2-10

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3}{(4-n)^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^3}\left((n+1)^2+(n-1)^2-(n+2)^3\right)}{\frac{1}{n^3}(4-n)^3} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2-\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}{\left(\frac{4}{n}-1\right)^3} = \frac{0\cdot(1+0)^2+0\cdot(1-0)^2-(1+0)^3}{(0-1)^3} = 1$$

2-11

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2(n+1)^3-(n-2)^3}{n^2+2n-3} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^3}\left(2(n+1)^3-(n-2)^3\right)}{\frac{1}{n^3}(n^2+2n-3)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^3-\left(1-\frac{2}{n}\right)^3}{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}} = +\infty$$

2-12

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3+(n+2)^3}{(n+4)^3+(n+5)^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^3}\left((n+1)^3+(n+2)^3\right)}{\frac{1}{n^3}\left((n+4)^3+(n+5)^3\right)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1+\frac{2}{n}\right)^3}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^3+\left(1+\frac{5}{n}\right)^3} = \frac{1^3+1^3}{1^3+1^3} = 1$$

2-13

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n+3)^4-(n+4)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{((n+3)^2-(n+4)^2)\cdot((n+3)^2+(n+4)^2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(n^2+6n+9-n^2-8n-16)\cdot(n^2+6n+9+n^2+8n+16)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3+(n+4)^3}{(-2n-7)\cdot(2n^2+14n+25)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}\left((n+3)^3+(n+4)^3\right)}{\frac{1}{n^3}(-2n-7)\cdot(2n^2+14n+25)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{3}{n})^3+(1+\frac{4}{n})^3}{\left(-2-\frac{7}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{14}{n}+\frac{25}{n^2}\right)}=\frac{1^3+1^3}{-2\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

2-14

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^3+(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)^2-(n-1)^2)\cdot((n+1)^2+(n-1)^2)}{(n+1)^3+(n-1)^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1-n^2+2n-1)\cdot(n^2+2n+1+n^2-2n+1)}{(n+1)^3+(n-1)^3}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n(2n^2+2)}{(n+1)^3+(n-1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}8n(n^2+1)}{\frac{1}{n^3}\left((n+1)^3+(n-1)^3\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3+\left(1-\frac{1}{n}\right)^3}=\frac{8\cdot 1}{1^3+1^3}=4$$

2-15

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3-2n}{(n+1)^4-(n-1)^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(4n^2-1)}{((n+1)^2-(n-1)^2)\cdot((n+1)^2+(n-1)^2)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(4n^2-1)}{(n^2+2n+1-n^2+2n-1)\cdot(n^2+2n+1+n^2-2n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n(4n^2-1)}{4n(2n^2+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{4(n^2+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(4n^2-1\right)}{\frac{1}{n^2}4\left(n^2+1\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{4\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{4}{4\cdot 1}=1$$

2-16

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+6)^3-(n+1)^3}{(2n+3)^2+(n+4)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3\cdot 6\cdot n^2+3\cdot 6^2\cdot n+6^3-n^3-3n^2-3n-1}{(2n+3)^2+(n+4)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(6^2-1)\cdot n+3\cdot(6-1)\cdot n^2+(6^3-1)}{(2n+3)^2+(n+4)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(3\cdot 35\cdot n+15n^2+(6^3-1)\right)}{\frac{1}{n^2}\left((2n+3)^2+(n+4)^2\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\cdot 35}{n}+15+\frac{6^3-1}{n^2}}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^2+\left(1+\frac{4}{n}\right)^2}=\frac{0+15+0}{2^2+1^2}=\frac{15}{5}=3$$

2-17

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^3-(n+5)^3}{(3n-1)^3+(2n+3)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}\left((2n-3)^3-(n+5)^3\right)}{\frac{1}{n^3}\left((3n-1)^3+(2n+3)^3\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2-\frac{3}{n}\right)^3-\left(1+\frac{5}{n}\right)^3}{\left(3-\frac{1}{n}\right)^3+\left(2+\frac{3}{n}\right)^3}=\frac{2^3-1^3}{3^3+2^3}=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$$

2-18

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{(n+6)^3-(n+1)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+10)^2+(3n+1)^2}{n^3+3\cdot6\cdot n^2+3\cdot6^2\cdot n+6^3-n^3-3n^2-3n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left((n+10)^2+(3n+1)^2\right)}{\frac{1}{n^2}\left(3\cdot(6-1)\cdot n^2+3\cdot(6^2-1)\cdot n+(6^3-1)\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^2+\left(3+\frac{1}{n}\right)^2}{15+\frac{3\cdot35}{n}+\frac{(6^3-1)}{n^2}}=\frac{1^2+3^2}{15+0+0}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

2-19

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3+(3n+2)^3}{(2n+3)^3-(n-7)^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}\left((2n+1)^3+(3n+2)^3\right)}{\frac{1}{n^3}\left((2n+3)^3-(n-7)^3\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)^3+\left(3+\frac{2}{n}\right)^3}{\left(2+\frac{3}{n}\right)^3-\left(1-\frac{7}{n}\right)^3}=\frac{2^3+3^3}{2^3-1^3}=\frac{35}{7}=5$$

2-20

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+7)^3-(n+2)^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3\cdot7\cdot n^2+3\cdot7^2\cdot n+7^3-n^3-3\cdot2\cdot n^2-3\cdot2^2\cdot n-2^3}{(3n+2)^2+(4n+1)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(3(7-2)n^2+3(7^2-2^2)n+(7^3-2^3)\right)}{\frac{1}{n^2}\left((3n+2)^2+(4n+1)^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{15+\frac{24}{n}+\frac{7^3-2^3}{n^2}}{\left(3+\frac{2}{n}\right)^2+\left(4+\frac{1}{n}\right)^2}=$$
$$=\frac{15+0+0}{3^2+4^2}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

2-21

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^3-(2n+3)^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+3\cdot 4n^2+3\cdot 2n+1-8n^3-3\cdot 3\cdot 4n^2-3\cdot 3^2\cdot 2n-3^3}{(2n+1)^2+(2n+3)^2}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\left(3\cdot 4n^2(1-3)+3\cdot 2n(1-3^2)+(1-3^3)\right)}{\frac{1}{n^2}\left((2n+1)^2+(2n+3)^2\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-24-\frac{48}{n}-\frac{26}{n^2}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2+\left(2+\frac{3}{n}\right)^2}=$$
$$=\frac{-24-0-0}{2^2+2^2}=-\frac{24}{8}=-3$$

2-22

Вычислить предел числовой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{(n+1)^4-n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n^3+3n^2-3n+1}{((n+1)^2-n^2)\cdot((n+1)^2+n^2)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-3n+1}{(n^2+2n+1-n^2)(n^2+2n+1+n^2)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^3}(3n^2-3n+1)}{\frac{1}{n^3}(2n+1)(2n^2+2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=$$
$$=\frac{0-0+0}{(2+0)\cdot(2+0+0)}=0$$