1.1

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3n-2}{2n-1},\ a = \frac{3}{2}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{3n-2}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{2(3n-2)-3(2n-1)}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{6n-4-6n+3}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{-1}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{1}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon; =>$$

Поскольку $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{2(2n-1)} > 0$, то

$$\frac{1}{2(2n-1)} < \varepsilon; =>$$; $$2n-1 > \frac{1}{2\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1\right);$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{3}{2}$. Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} + 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}\right] = \left[\frac{1+6\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$$

1.2

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{4n-1}{2n+1},\ a = 2$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{4n-1}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{4n-1-2(2n+1)}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{4n-1-4n-2}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{-3}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{3}{2n+1} < \varepsilon; =>$$

$$2n+1 > \frac{3}{\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right);$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен **2**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2\varepsilon}\right] = \left[\frac{3+\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$$

1.3

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{7n+4}{2n+1},\ a = \frac{7}{2}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{7n+4}{2n+1} - \frac{7}{2}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{2(7n+4) - 7(2n+1)}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{14n+8-14n-7}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon; =>$$

$$2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right); \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{7}{2}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}\right] = \left[\frac{1+2\varepsilon}{4\varepsilon}\right]$$

1.4

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{2n-5}{3n+1},\ a = \frac{2}{3}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{2n-5}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{3(2n-5) - 2(3n+1)}{3(3n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{6n-15-6n-2}{3(3n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{-17}{3(3n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{17}{3(3n+1)} < \varepsilon; =>$$

$$3n+1 > \frac{17}{3\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{17}{3\varepsilon} - 1\right); \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{2}{3}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{17}{3\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{2}{3} + \frac{17}{9\varepsilon}\right] = \left[\frac{17+6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$$

1.5

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{7n-1}{n+1},\ a = 7$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{7n-1}{n+1} - 7\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{7n-1-7(n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{7n-1-7n-7}{n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{-8}{n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{8}{n+1} < \varepsilon; =>$$

$$n+1 > \frac{8}{\varepsilon}; =>$$

$$n > \left(\frac{8}{\varepsilon} - 1\right); \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен **7**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{8}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\frac{8}{\varepsilon}\right]$$