1.16

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3n^3}{n^3-1},\ a = 3$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{3n^3}{n^3-1} - 3\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{3n^3 - 3(n^3-1)}{n^3-1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{3n^3 - 3n^3 + 3}{n^3-1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{3}{n^3-1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\frac{3}{n^3-1} < \varepsilon; =>$$
$$n^3 - 1 > \frac{3}{\varepsilon}; =>$$
$$n^3 > 1 + \frac{3}{\varepsilon};$$
$$n > \sqrt[3]{1 + \frac{3}{\varepsilon}};$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен **3**.
Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt[3]{1 + \frac{3}{\varepsilon}}\right] + 1$$

1.17

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{4+2n}{1-3n},\ a = -\frac{2}{3}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{4+2n}{1-3n} + \frac{2}{3}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{3(4+2n)+2(1-3n)}{3(1-3n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{12+6n+2-6n}{3(1-3n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{14}{3(1-3n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{14}{3(3n-1)}\right| < \varepsilon; =>$$

Поскольку $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{14}{3(3n-1)} > 0$, то

$$\frac{14}{3(3n-1)} < \varepsilon; =>$$

$$3n - 1 > \frac{14}{3\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{14}{3\varepsilon} + 1\right); \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{2}{3}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{14}{3\varepsilon} + 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{4}{3} + \frac{14}{9\varepsilon}\right] = \left[\frac{14+12\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$$

1.18

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{5n+15}{6-n},\ a = -5$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{5n+15}{6-n} - (-5)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{5n+15}{6-n} + 5\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{5n+15+30-5n}{6-n}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{45}{6-n}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{45}{n-6}\right| < \varepsilon; =>$$

Поскольку $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{45}{n-6} > 0$, то

$$\frac{45}{n-6} < \varepsilon; =>$$

$$n - 6 > \frac{45}{\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{45}{\varepsilon} + 6; \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен **- 5**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{45}{\varepsilon} + 6\right] + 1 = 7 + \left[\frac{45}{\varepsilon}\right]$$

1.19

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3-n^2}{4+2n^2},\ a = -\frac{1}{2}$$

По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{3-n^2}{4+2n^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{3-n^2}{4+2n^2} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{2(3-n^2)+(4+2n^2)}{2(4+2n^2)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{6-2n^2+4+2n^2}{2(4+2n^2)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{10}{2(4+2n^2)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{5}{2(2+n^2)}\right| < \varepsilon; => \frac{5}{2(2+n^2)} < \varepsilon; => 2+n^2 > \frac{5}{2\varepsilon}; =>$$

$$n^2 > \frac{5}{2\varepsilon} - 2;$$

Последнее неравенство будет так же выполняться, если перейдем к более сильному неравенству.

$$n > \sqrt{\left|\frac{5}{2\varepsilon} - 2\right|}; \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{1}{2}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\left|\frac{5}{2\varepsilon} - 2\right|}\right] + 1$$

1.20

Доказать, что $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{2n-1}{2-3n},\ a = -\frac{2}{3}$$

По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{2n-1}{2-3n} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{2n-1}{2-3n} + \frac{2}{3}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{3(2n-1)+2(2-3n)}{3(2-3n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{6n-3+4-6n}{3(2-3n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{1}{3(2-3n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{1}{3(3n-2)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{1}{3(3n-2)} < \varepsilon; =>$$

$$3n - 2 > \frac{1}{3\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} + 2\right); \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{2}{3}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon} + 2\right)\right] + 1 = \left[\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{5}{3}\right] = \left[\frac{1+15\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$$