1.21

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3n-1}{5n+1},\ a = \frac{3}{5}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{5(3n-1)-3(5n+1)}{5(5n+1)}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{15n-5-15n-3}{5(5n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{-8}{5(5n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{8}{5(5n+1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{8}{5(5n+1)} < \varepsilon; =>$$

$$5n+1 > \frac{8}{5\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon} - 1\right); \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{3}{5}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{5}\left(\frac{8}{5\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{8}{25\varepsilon} + \frac{4}{5}\right] = \left[\frac{8+20\varepsilon}{25\varepsilon}\right]$$

1.22

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{4n-3}{2n+1},\ a = 2$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{4n-3}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{4n-3-2(2n+1)}{2n+1}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{4n-3-4n-2}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{-5}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{5}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{5}{2n+1} < \varepsilon; =>$$

$$2n+1 > \frac{5}{\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 1\right);$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен **2**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{5}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{5+\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$$

1.23

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2},\ a = -\frac{1}{2}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$
$$\left|\frac{1-2n^2}{2+4n^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\frac{1}{2}\left|\frac{1-2n^2}{1+2n^2} + 1\right| < \varepsilon;$$
$$\frac{1}{2}\left|\frac{1-2n^2+1+2n^2}{1+2n^2}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\frac{1}{2}\left|\frac{2}{1+2n^2}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{1}{1+2n^2}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\frac{1}{1+2n^2} < \varepsilon; =>$$
$$1+2n^2 > \frac{1}{\varepsilon}; =>$$
$$n^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right);$$

Последнее неравенство будет так же выполняться, если перейдем к более сильному неравенству.

$$n > \sqrt{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|};$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{1}{2}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|}\right] + 1$$

1.24

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{5n+1}{10n-3},\ a = \frac{1}{2}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{5n+1}{10n-3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{2(5n+1)-(10n-3)}{2(10n-3)}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{10n+2-10n+3}{2(10n-3)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{5}{2(10n-3)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{5}{2(10n-3)} < \varepsilon; =>$$

$$10n+3 > \frac{5}{2\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{10}\left(\frac{5}{2\varepsilon} - 3\right);$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{1}{2}$. Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{10}\left(\frac{5}{2\varepsilon} - 3\right)\right] + 1 = \left[\frac{5}{20\varepsilon} + \frac{7}{10}\right] = \left[\frac{5+14\varepsilon}{20\varepsilon}\right]$$

1.25

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{2-2n}{3+4n},\ a = -\frac{1}{2}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{2-2n}{3+4n} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{2-2n}{3+4n} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{2(2-2n)+(3+4n)}{2(3+4n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{4-4n+3+4n}{2(3+4n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{7}{2(3+4n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{7}{2(3+4n)} < \varepsilon; =>$$

$$3+4n > \frac{7}{2\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{4}\left(\frac{7}{2\varepsilon} - 3\right);$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{1}{2}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4}\left(\frac{7}{2\varepsilon} - 3\right)\right] + 1 = \left[\frac{7}{8\varepsilon} + \frac{1}{4}\right] = \left[\frac{7+2\varepsilon}{8\varepsilon}\right]$$