1.11

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{n+1}{1-2n},\ a = -\frac{1}{2}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{n+1}{1-2n} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{n+1}{1-2n} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{2(n+1)+1-2n}{2(1-2n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{2n+2+1-2n}{2(1-2n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{3}{2(1-2n)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{3}{2(2n-1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{3}{2(2n-1)} < \varepsilon; =>$$

$$2n-1 > \frac{3}{2\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\varepsilon} + 1\right);$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{1}{2}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2\varepsilon} + 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{3}{4\varepsilon} + \frac{3}{2}\right] = 3 \cdot \left[\frac{1}{4\varepsilon} + \frac{1}{2}\right]$$

1.12

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{2n+1}{3n-5},\ a = \frac{2}{3}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{2n+1}{3n-5} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{3(2n+1) - 2(3n-5)}{3(3n-5)}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{6n+3-6n+10}{3(3n-5)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{13}{3(3n-5)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{13}{3(3n-5)} < \varepsilon; =>$$

$$3n - 5 > \frac{13}{3\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{13}{3\varepsilon} + 5\right);$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{2}{3}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{13}{3\varepsilon} + 5\right)\right] + 1 = 2 + \left[\frac{13}{9\varepsilon} + \frac{2}{3}\right] = 2 + \left[\frac{13 + 6\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$$

1.13

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{1-2n^2}{n^2+3},\ a = -2$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{1-2n^2}{n^2+3} - (-2)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{1-2n^2}{n^2+3} + 2\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{1-2n^2+2(n^2+3)}{n^2+3}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{1-2n^2+2n^2+6}{n^2+3}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{7}{n^2+3}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{7}{n^2+3} < \varepsilon; =>$$

$$n^2+3 > \frac{7}{\varepsilon}; =>$$

$$n^2 > \frac{7}{\varepsilon} - 3;$$

Последнее неравенство будет так же выполняться, если перейдем к более сильному неравенству.

$$n > \sqrt{\left|\frac{7}{\varepsilon} - 3\right|};$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен **-2**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\left|\frac{7}{\varepsilon} - 3\right|}\right] + 1$$

1.14

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3n^2}{2-n^2},\ a = -3$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{3n^2}{2-n^2} - (-3)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{3n^2}{2-n^2} + 3\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{3n^2 + 3(2-n^2)}{2-n^2}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{3n^2 + 6 - 3n^2}{2-n^2}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{6}{2-n^2}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{6}{n^2-2}\right| < \varepsilon; => \frac{6}{n^2-2} < \varepsilon; =>$$

$$n^2 - 2 > \frac{6}{\varepsilon}; =>$$

$$n^2 > \frac{6}{\varepsilon} + 2;$$

Последнее неравенство будет так же выполняться, если перейдем к более сильному неравенству.

$$n > \sqrt{\left|\frac{6}{\varepsilon} + 2\right|};$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен **-3**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\left|\frac{6}{\varepsilon} + 2\right|}\right] + 1$$

1.15

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{n}{3n-1},\ a = \frac{1}{3}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon:$$

$$\left|\frac{n}{3n-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{3n-(3n-1)}{3(3n-1)}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{3n-3n+1}{3(3n-1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{1}{3(3n-1)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{1}{3(3n-1)} < \varepsilon; =>$$

$$3n-1 > \frac{1}{3\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}+1\right);$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{1}{3}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\varepsilon}+1\right)\right] + 1 = \left[\frac{1}{9\varepsilon} + \frac{4}{3}\right] = \left[\frac{1+12\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$$