1.6

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2},\ a = \frac{4}{3}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{4n^2+1}{3n^2+2} - \frac{4}{3}\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{3(4n^2+1) - 4(3n^2+2)}{3(3n^2+2)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{12n^2+3-12n^2-8}{3(3n^2+2)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{-5}{3(3n^2+2)}\right| < \varepsilon; => \frac{5}{3(3n^2+2)} < \varepsilon; =>$$

$$3n^2 + 2 > \frac{5}{3\varepsilon}; => n^2 > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right);$$

Последнее неравенство будет так же выполняться, если перейдем к более сильному неравенству.

$$n^2 > \frac{1}{3}\left|\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right|;$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{3}\left|\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right|}; \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{4}{3}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{1}{3}\left|\frac{5}{3\varepsilon} - 2\right|}\right] + 1$$

1.7

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{9-n^3}{1+2n^3},\ a = -\frac{1}{2}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{9-n^3}{1+2n^3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{9-n^3}{1+2n^3} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{2(9-n^3)+(1+2n^3)}{2(1+2n^3)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{18-2n^3+1+2n^3}{2(1+2n^3)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{19}{2(1+2n^3)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{19}{2(1+2n^3)} < \varepsilon; =>$$

$$1+2n^3 > \frac{19}{2\varepsilon}; =>$$

$$n^3 > \frac{1}{2}\left(\frac{19}{2\varepsilon} - 1\right);$$

$$n > \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{19}{2\varepsilon} - 1\right)};$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{1}{2}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(\frac{19}{2\varepsilon} - 1\right)}\right] + 1$$

1.8

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{4n-3}{2n+1},\ a = 2$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$
$$\left|\frac{4n-3}{2n+1} - 2\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{4n-3-2(2n+1)}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{4n-3-4n-2}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{-5}{2n+1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\frac{5}{2n+1} < \varepsilon; =>$$
$$2n+1 > \frac{5}{\varepsilon}; =>$$
$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 1\right); \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен **2**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5}{\varepsilon} - 1\right)\right] + 1 = \left[\frac{5}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{5+\varepsilon}{2\varepsilon}\right]$$

1.9

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{1-2n^2}{2+4n^2},\ a = -\frac{1}{2}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$
$$\left|\frac{1-2n^2}{2+4n^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{1-2n^2}{2+4n^2} + \frac{1}{2}\right| < \varepsilon;$$
$$\left|\frac{2(1-2n^2)+(2+4n^2)}{2(2+4n^2)}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{2-4n^2+2+4n^2}{2(2+4n^2)}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{4}{2(2+4n^2)}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{1}{1+2n^2}\right| < \varepsilon; => \frac{1}{1+2n^2} < \varepsilon; => 1+2n^2 > \frac{1}{\varepsilon}; =>$$
$$n^2 > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right);$$

Последнее неравенство будет так же выполняться, если перейдем к более сильному неравенству.

$$n > \sqrt{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|};$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{1}{2}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left|\frac{1}{\varepsilon} - 1\right|}\right] + 1$$

1.10

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = -\frac{5n}{n+1},\ a = -5$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$
$$\left|-\frac{5n}{n+1} - (-5)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|-\frac{5n}{n+1} + 5\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{-5n + 5(n+1)}{n+1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{-5n + 5n + 5}{n+1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\left|\frac{5}{n+1}\right| < \varepsilon; =>$$
$$\frac{5}{n+1} < \varepsilon; =>$$
$$n + 1 > \frac{5}{\varepsilon}; =>$$
$$n > \frac{5}{\varepsilon} - 1; \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен **-5**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{5}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$$