1.26

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{23-4n}{2-n},\ a = 4$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon :$$

$$\left|\frac{23-4n}{2-n} - 4\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{23-4n-4(2-n)}{2-n}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{23-4n-8+4n}{2-n}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{15}{2-n}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{15}{n-2}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{15}{n-2} < \varepsilon; =>$$

$$n-2 > \frac{15}{\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{15}{\varepsilon} + 2; \quad (*)$$

Очевидно, что предел существует и равен **4**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{15}{\varepsilon} + 2\right] + 1 = 3 + \left[\frac{15}{\varepsilon}\right]$$

1.27

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{1+3n}{6-n},\ a = -3$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{1+3n}{6-n} - (-3)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{1+3n}{6-n} + 3\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{1+3n+3(6-n)}{6-n}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{1+3n+18-3n}{6-n}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{19}{n-6}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{19}{n-6} < \varepsilon; =>$$

$$n-6 > \frac{19}{\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{19}{\varepsilon} + 6;$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен **- 3**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{19}{\varepsilon} + 6\right] + 1 = 7 + \left[\frac{19}{\varepsilon}\right]$$

1.28

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{2n+3}{n+5},\ a = 2$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{2n+3}{n+5} - 2\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{2n+3-2(n+5)}{n+5}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{2n+3-2n-10}{n+5}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{-7}{n+5}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\frac{7}{n+5} < \varepsilon; =>$$

$$n+5 > \frac{7}{\varepsilon}; =>$$

$$n > \frac{7}{\varepsilon} - 5;$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен **-2**.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\frac{7}{\varepsilon} - 5\right] + 1 = \left[\frac{7}{\varepsilon}\right] - 4$$

Получаем:

$$N(\varepsilon) = \begin{cases} \left[\frac{7}{\varepsilon}\right] - 4, & \varepsilon < \frac{7}{5} \\ 1, & \varepsilon \geq \frac{7}{5} \end{cases}$$

1.29

Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{3n^2+2}{4n^2-1},\ a = \frac{3}{4}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon>0 : \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n : n\geq N(\varepsilon) : |a_n-a|<\varepsilon$$:

$$\left|\frac{3n^2+2}{4n^2-1}-\frac{3}{4}\right|<\varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{4(3n^2+2)-3(4n^2-1)}{4(4n^2-1)}\right|<\varepsilon;=>$$
$$\left|\frac{12n^2+8-12n^2+3}{4(4n^2-1)}\right|<\varepsilon;=>$$
$$\left|\frac{11}{4(4n^2-1)}\right|<\varepsilon;=>$$
$$\frac{11}{4(4n^2-1)}<\varepsilon;=>$$
$$4n^2-1>\frac{11}{4\varepsilon};=>$$
$$n^2>\frac{1}{4}\left(\frac{11}{4\varepsilon}+1\right);$$

Последнее неравенство будет так же выполняться, если перейдем к более сильному неравенству.

$$n>\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{11}{4\varepsilon}+1\right|};$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $\frac{3}{4}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{11}{4\varepsilon}+1\right|}\right]+1$$

1.30

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

$$a_n = \frac{2-3n^2}{4+5n^2},\ a = -\frac{3}{5}$$

По определению предела:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n : n \geq N(\varepsilon) : |a_n - a| < \varepsilon$$:

$$\left|\frac{2-3n^2}{4+5n^2} - \left(-\frac{3}{5}\right)\right| < \varepsilon;$$

Проведем преобразования:

$$\left|\frac{2-3n^2}{4+5n^2} + \frac{3}{5}\right| < \varepsilon;$$

$$\left|\frac{5(2-3n^2)+3(4+5n^2)}{5(4+5n^2)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{10-15n^2+12+15n^2}{5(4+5n^2)}\right| < \varepsilon; =>$$

$$\left|\frac{22}{5(4+5n^2)}\right| < \varepsilon; => \frac{22}{5(4+5n^2)} < \varepsilon; => 4+5n^2 > \frac{22}{5\varepsilon}; =>$$

$$n^2 > \frac{1}{5}\left(\frac{22}{5\varepsilon} - 4\right);$$

Последнее неравенство будет так же выполняться, если перейдем к более сильному неравенству.

$$n > \sqrt{\frac{1}{5}\left|\frac{22}{5\varepsilon} - 4\right|};$$ (*)

Очевидно, что предел существует и равен $-\frac{3}{5}$.

Из (*) легко посчитать $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{1}{5}\left|\frac{22}{5\varepsilon} - 4\right|}\right] + 1$$