

# ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ТРИГОНОМЕТРИИ\*)

## СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

## ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x - y) = -\frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y + 1}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y}$$

## ВЫРАЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО УГЛА

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

\*) Во всех формулах, приведенных в этом разделе, следует учитывать область допустимых значений левой и правой частей формул.

## ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{2}$$

## ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

## ФОРМУЛЫ ТРОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1}$$

**ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ**

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} y = -\frac{\cos(x+y)}{\cos x \sin y}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = -2 \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -2 \operatorname{ctg} 2x$$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos(45^\circ - x) = \sqrt{2} \sin(45^\circ + x)$$

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin(45^\circ - x) = \sqrt{2} \cos(45^\circ + x)$$

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

$$\text{где } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ**

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$$

**ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ**

<div>угол</div> <div>функция</div>	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\sin \beta$	$\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$

**ЗНАЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ УГЛОВ**

Угол в градусах	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

**СВОЙСТВА ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

$\arcsin (-a) = -\arcsin a,$	$ a  \leq 1$
$\arccos (-a) = \pi - \arccos a,$	$ a  \leq 1$
$\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} a,$	$a \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} (-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a,$	$a \in \mathbb{R}$
$\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},$	$ a  \leq 1$
$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2},$	$a \in \mathbb{R}$