Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Συστήματα Αναμονής

2η ομάδα ασκήσεων

Ελευθερία Αρκαδοπούλου

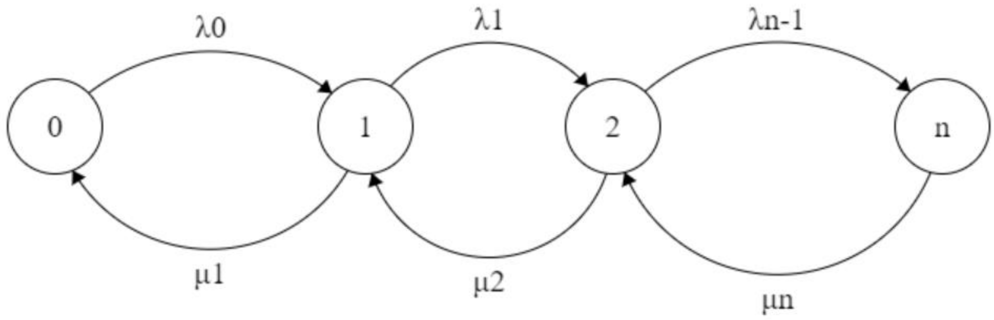
el19442

Θεωρητική μελέτη της ουράς M/M/1

A. Απαραίτητη συνθήκη για να είναι εργοδική η ουρά M/M/1 είναι να ισχύει

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων:



O

Οι εργοδικές πιθανότητες υπολογίζονται ως εξής, από τις εξισώσεις ισορροπίας:

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \text{ ή } P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 = \rho P_0$$

$$(\lambda + \mu)P_1 = \lambda P_0 + \mu P_2 \text{ ή } P_2 = \rho^2 P_0 \text{ και } P_k = \rho^k P_0,\ k > 0$$

$$P_0 + P_1 + \cdots + P_k + \cdots = 1 = P_0(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \cdots)$$

Υπολογίζουμε τη δυναμοσειρά τις τελευταίας εξίσωσης και προκύπτουν οι πιθανότητες:

$$Po = (1-\rho), Pk = (1-\rho) * \rho^k, k > 0 \; \textit{και} \; P\{n(t) > 0\} = 1 - Po = \rho$$

B. Ο μέσος χρόνος καθυστέρησης ενός πελάτη στο σύστημα:

$$E(T) = \frac{E[n(t)]}{\gamma} = \frac{E[n(t)]}{\lambda} = \frac{E[n(t)]}{\rho * \mu} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

C. Για να βρεθεί το σύστημά μας με 57 πελάτες, εξετάζουμε την περίπτωση k=57:

$$P_{57} = (1-\rho) * \rho^{57}$$

Συνεπώς, η πιθανότητα να βρεθεί το σύστημα με 57 πελάτες είναι θετική και άρα υπαρκτή.

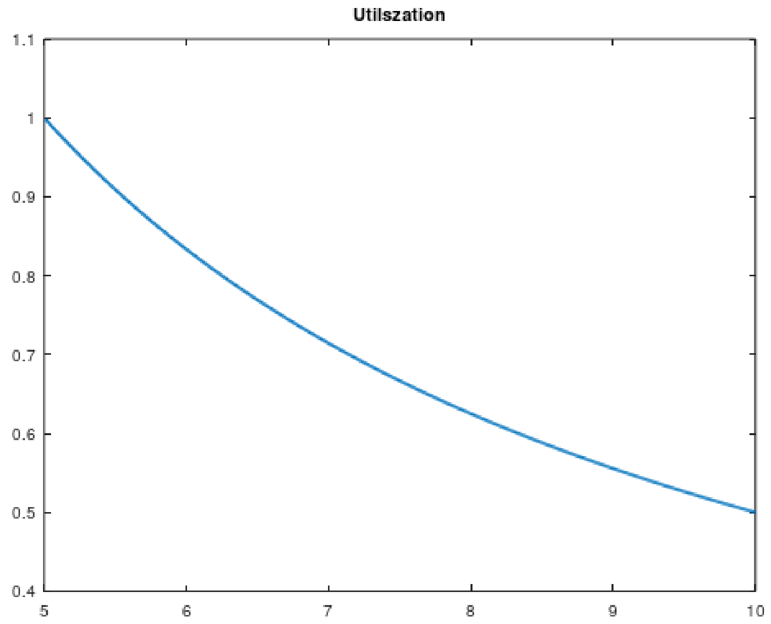
Ανάλυση ουράς M/M/1 με Octave

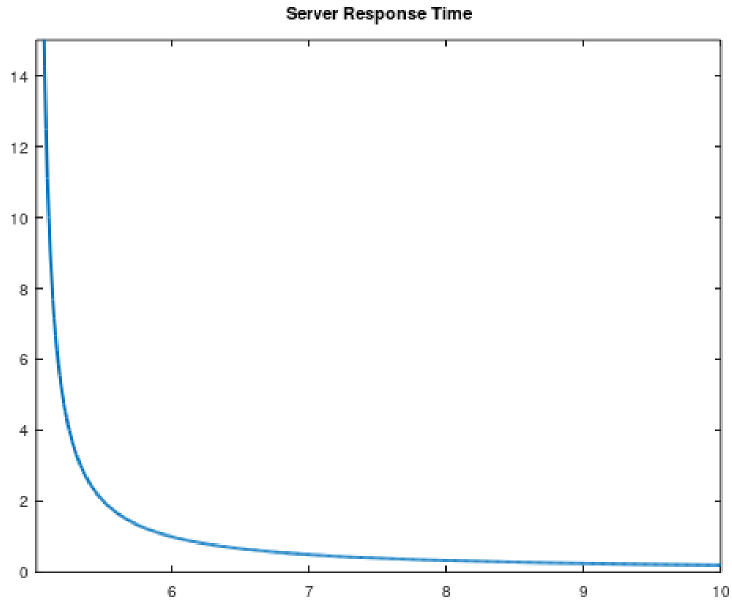
A. Για να είναι εργοδικό το σύστημά μας, με λ=5, θα πρέπει:

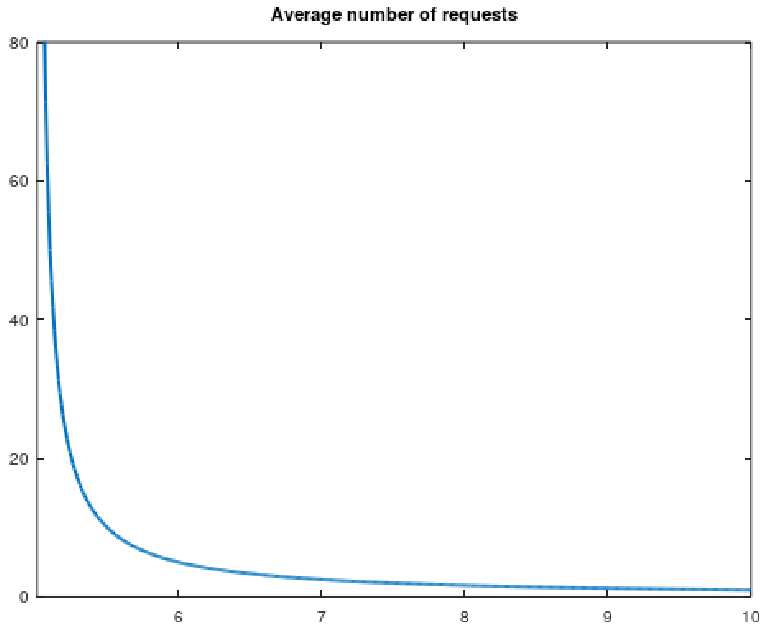
$$\frac{\lambda}{\mu} < 1 => \mu > 5$$

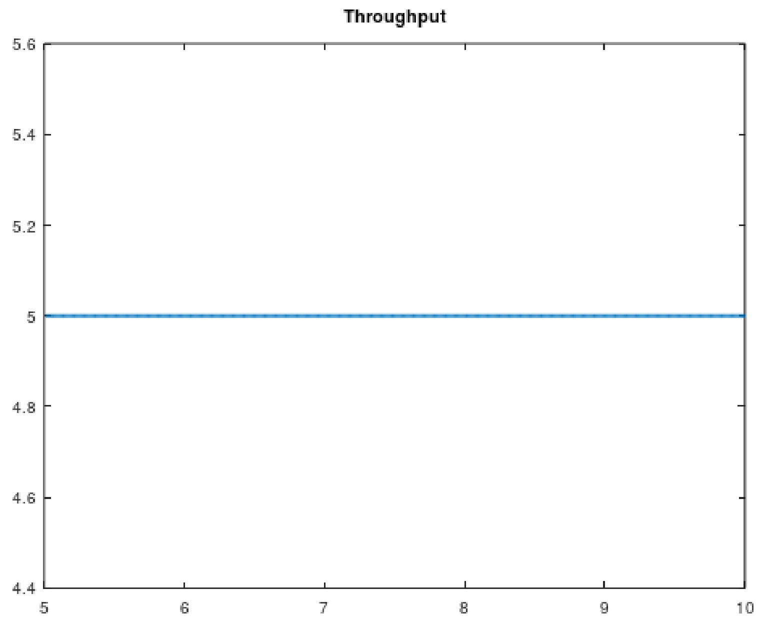
Άρα, τελικά, θα πρέπει 5<μ<10.

B. Τα αντίστοιχα διαγράμματα που ζητούνται:









C. Από το διάγραμμα του μέσου χρόνου καθυστέρησης (διάγραμμα 2), παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η τιμή του μ, ο χρόνος καθυστέρησης του συστήματος τείνει να μηδενιστεί. Όμως, παρατηρούμε ότι από μία τιμή του μ και μετά (περίπου ίσο με 7) ο χρόνος καθυστέρησης δε μειώνεται δραστικά με την αύξηση του μ. Συνεπώς, θα επιλέξουμε τιμή του μ περίπου ίσο με 7 πελάτες ανά λεπτό.

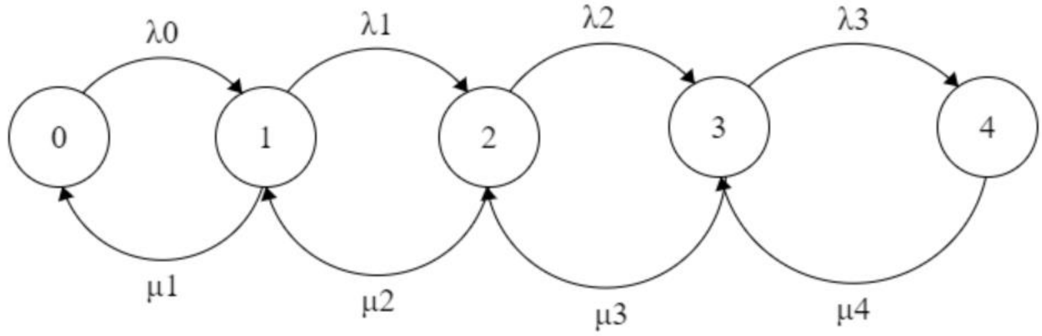
D. Για το throughput πελατών στην ουρά M/M/1, παρατηρούμε ότι είναι σταθερό και ίσο με 5 για όλες τις τιμές μ. Αυτό επιβεβαιώνεται από τη θεωρία, αφού όταν γ=λ το throughput είναι σταθερό. Η σχέση γ=λ ισχύει αφού η πιθανότητα P(blocking) στην περίπτωσή μας είναι ίση με 0.

Παρατίθεται ο κώδικας για όλο το μέρος 2:

```
pkg load queueing
pkg load statistics

clear all;
close all;
clc;

%B
lambda=5;
m=5.01:0.01:10;
for i=1:columns(m)
  [A(i),B(i),C(i),D(i)]=qsmm1(lambda, m(i));
endfor

figure(1);%utilisation
plot(m,A,"linewidth",2);
title("Utilszation");

figure(2); %server response time
plot(m,B,"linewidth",2);
title("Server Response Time");
axis([5.01 10 0 15]);

figure(3); %average requests number
plot(m,C,"linewidth",2);
title("Average number of requests");
axis([5.01 10 0 80]);

figure(4); %throughput
plot(m,D,"linewidth",2);
title("Throughput");
```

Διαδικασία γεννήσεων θανάτων: εφαρμογή σε σύστημα Μ/Μ/1/Κ

A. Θεωρούμε σύστημα M/M/1/4 με λ=5 και μ=10.
   Το διάγραμμα ρυθμού μεταβάσεων:



Υπολογίζουμε τις εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος. Γνωρίζουμε ότι $P0 + P1 + P2 + P3 + P4 = 1$ και ότι $\lambda 0 * P0 = \mu 1 * P1$, $\lambda 1 * P1 = P2 * \mu 2$, $\lambda 2 * P2 = P3 * \mu 3, \lambda 3 * P3 = \mu 4 * P4$. Επιλύουμε το σύστημα, γνωρίζοντας ότι $\mu i = \mu = 10$ και $\lambda i = \frac{\lambda}{i+1}$ και προκύπτει:

$$Pk = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} * P0 \; και \; άρα$$

$$P0 = 0.607, P1 = 0.303, P2 = 0.076, P3 = 0.013, P4 = 0.0016$$

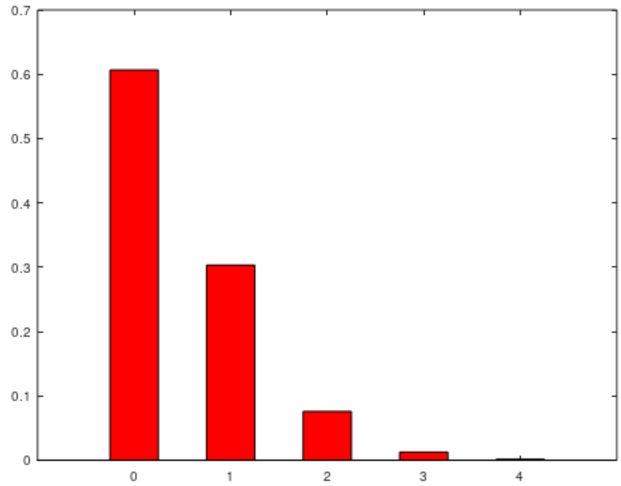
Η πιθανότητα απώλειας πελάτη είναι ίση με $Pblock = P4 = 0.0016$.

B. Μοντελοποιούμε το παραπάνω σύστημα.
   i. Η μήτρα ρυθμού μεταβάσεων:

```
transition_matrix =

   -5.00000    5.00000    0.00000    0.00000    0.00000
   10.00000  -12.50000    2.50000    0.00000    0.00000
    0.00000   10.00000  -11.66667    1.66667    0.00000
    0.00000    0.00000   10.00000  -11.25000    1.25000
    0.00000    0.00000    0.00000   10.00000  -10.00000
```

ii. Οι εργοδικές πιθανότητες των καταστάσεων του συστήματος (επιβεβαιώνουμε ότι είναι οι ίδιες με αυτές που υπολογίσαμε στο (Α)):

```
P =

   0.6066351   0.3033175   0.0758294   0.0126382   0.0015798
```



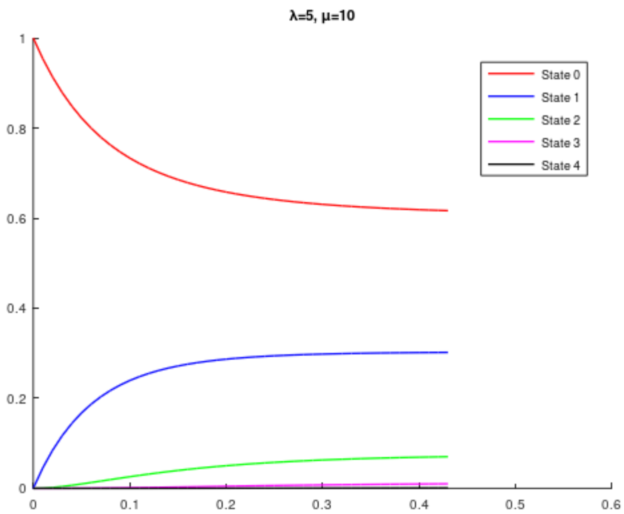
iii. Μέσος αριθμός πελατών στο σύστημα όταν αυτό βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας:

```
En =  0.49921
```

iv. Blocking probability σε κατάσταση ισορροπίας (ίση με την πιθανότητα να έχουμε 4 πελάτες στο σύστημα τη δεδομένη χρονική στιγμή):

```
Pblocking =  0.0015798
```

v.



Ο κώδικας του μέρους 3:

```
pkg load queueing
pkg load statistics
% system M/M/1/4
% when there are 3 clients in the system, the capability of the server doubles.

clc;
clear all;
close all;

lambda = 5;
mu = 10;
states = [0, 1, 2, 3, 4]; % system with capacity 4 states
% the initial state of the system. The system is initially empty.
initial_state = [1, 0, 0, 0, 0];

% define the birth and death rates between the states of the system.
births_B = [lambda, lambda/2, lambda/3, lambda/4];
deaths_D = [mu, mu, mu, mu];

%(i) get the transition matrix of the birth-death process
transition_matrix = ctmcbd(births_B, deaths_D);
display(transition_matrix);

% (ii)get the ergodic probabilities of the system
P = ctmc(transition_matrix);
display(P);
% plot the ergodic probabilities (bar for bar chart)
figure(1);
bar(states, P, "r", 0.5);

%(iii)average customers in the system
En=0;
for i=0:columns(states)-1
  En=En+i*P(i+1);
endfor
display(En);

%(iv)Pblocking
Pblocking=P(5);
display(Pblocking);

%(v)transient probability of state 0 until convergence to ergodic probability
index = 0;
for T = 0 : 0.01 : 50
  index = index + 1;
  P0 = ctmc(transition_matrix, T, initial_state);
  Prob0(index) = P0(1);
  Prob1(index) = P0(2);
  Prob2(index) = P0(3);
  Prob3(index) = P0(4);
  Prob4(index) = P0(5);
  if P0 - P < 0.01
    break;
  endif
endfor

T = 0 : 0.01 : T;
figure(2);
hold on;
title("λ=5, μ=10");
plot(T, Prob0, "r", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob1, "b", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob2, "g", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob3, "m", "linewidth", 1.3);
plot(T, Prob4, "k", "linewidth", 1.3);
legend("State 0","State 1","State 2","State 3","State 4");
hold off;
```