Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Συστήματα Αναμονής

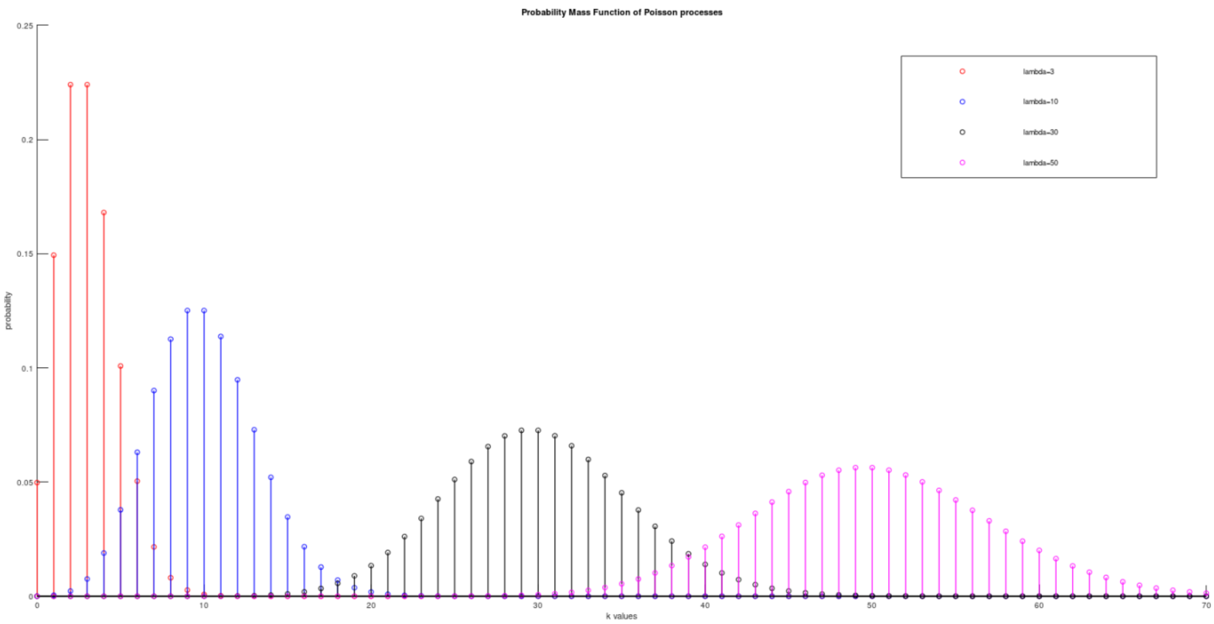
1η ομάδα ασκήσεων

Ελευθερία Αρκαδοπούλου

el19442

Κατανομή Poisson

A. Από το διάγραμμα, παρατηρούμε ότι, όσο μεγαλώνει η τιμή της παραμέτρου λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης μάζας πιθανότητας της κατανομής Poisson ανοίγει σε πλάτος (αυξάνεται το εύρος), ενώ η κορυφή της (μέγιστη τιμή) πέφτει και μετατοπίζεται δεξιότερα.



Ο κώδικας:

```
pkg load statistics
clc;
clear all;
close all;

# TASK: In a common diagram, design the Probability Mass Function of Poisson processes
# with lambda parameters 3, 10, 30, 50. In the horizontal axes, choose k parameters
# between 0 and 70.

k = 0:1:70;
lambda = [3, 10, 30, 50];

for i = 1 : columns(lambda)
  poisson(i, :) = poisspdf(k, lambda(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i = 1 : columns(lambda)
  stem(k, poisson(i, :), colors(i), "linewidth", 1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3", "lambda=10", "lambda=30", "lambda=50");
```

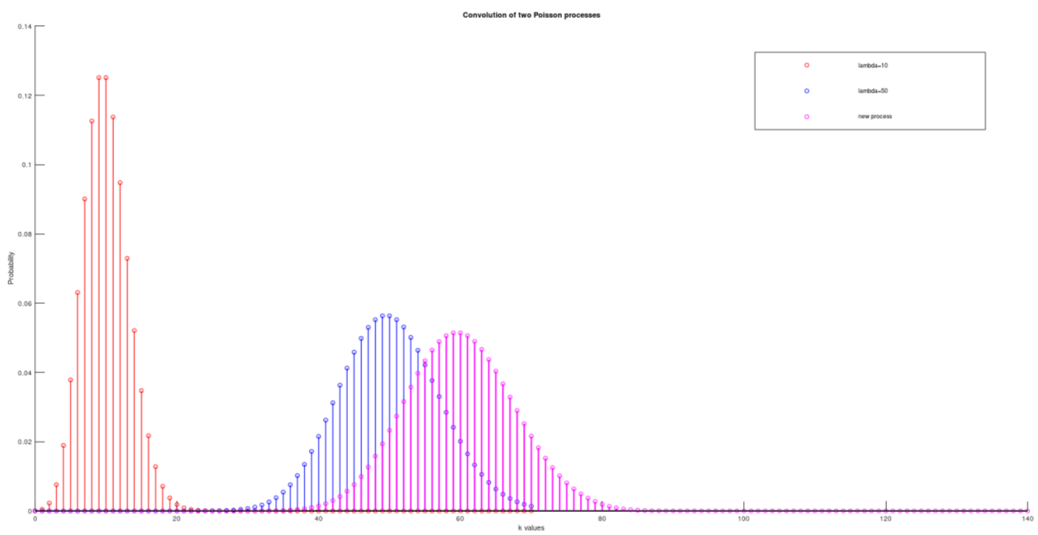
B. Επιλέγουμε την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=30. Η μέση τιμή και διακύμανσή της:

```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value =  30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance =  30.000
```

Παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι η μέση τιμή είναι ίση με τη διακύμανση και ίση με την παράμετρο λ=30.
Ο κώδικας:

```
# TASK: regarding the poisson process with parameter lambda 30, compute its mean
# value and variance

index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index, :);
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index, :)) - 1)
  mean_value = mean_value + i .* poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i = 0 : (columns(poisson(index, :)) - 1)
  second_moment = second_moment + i .* i .* poisson(index, i + 1);
endfor

variance = second_moment - mean_value .^ 2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);
```

C. Οι 3 κατανομές σε κοινό διάγραμμα:



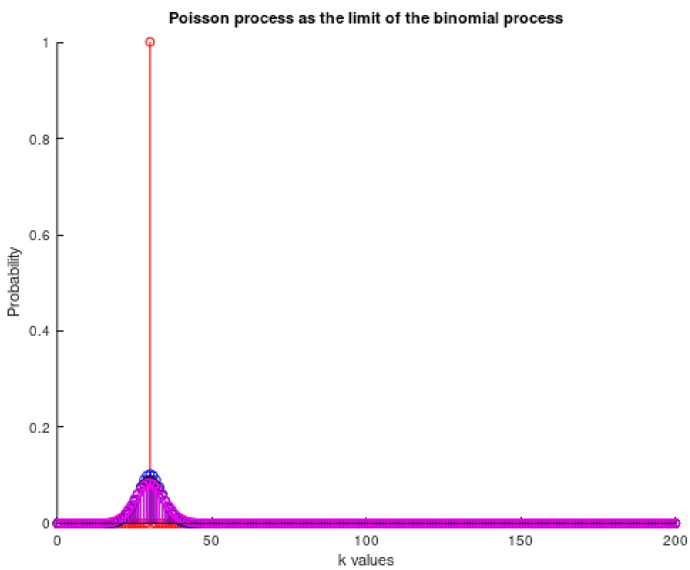
Παρατηρούμε ότι, όπως ήταν αναμενόμενο, από την υπέρθεση των δύο κατανομών με παραμέτρους λ=10 και λ=50 αντίστοιχα, προκύπτει νέα κατανομή Poisson με λ=60 (φαίνεται στο διάγραμμα), δηλαδή 10+50 το άθροισμα των παραμέτρων των επιμέρους κατανομών. Απαραίτητη προϋπόθεση για να συμβαίνει αυτό είναι οι δύο επιμέρους κατανομές (λ=10, 50) να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ο κώδικας:

```
# TASK: consider the convolution of the Poisson distribution with lambda 10 with
# the Poisson distribution with lambda 50.

first = find(lambda == 10);
second = find(lambda == 50);
poisson_first = poisson(first, :);
poisson_second = poisson(second, :);

composed = conv(poisson_first, poisson_second);
new_k = 0 : 1 : (2 * 70);

figure(2);
hold on;
stem(k, poisson_first(:), colors(1), "linewidth", 1.2);
stem(k, poisson_second(:), colors(2), "linewidth", 1.2);
stem(new_k, composed, "mo", "linewidth", 2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10", "lambda=50", "new process");
```

D. Για να ληφθεί μια κατανομή Poisson ως το όριο διωνυμικής κατανομής παραμέτρων n και p, θα πρέπει n→∞ και p→0, ώστε το γινόμενο n*p να είναι πεπερασμένο και σταθερό, ίσο με την παράμετρο λ της προκύπτουσας κατανομής Poisson.

Στο διάγραμμα έχουμε κατασκευάσει κατανομή Poisson με λ=30, όπως προκύπτει από την εξέλιξη διωνυμικής κατανομής με παράμετρο n=30, 60, 90, 120, 150. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται το n, η προκύπτουσα κατανομή τείνει όλο και περισσότερο στην Poisson.

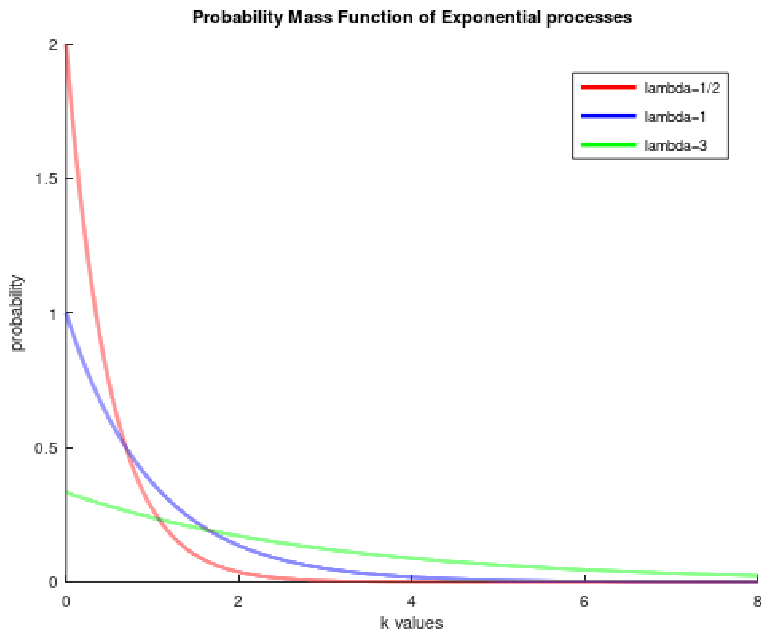


Ο κώδικας:

```
# TASK: show that Poisson process is the limit of the binomial distribution.
k = 0 : 1 : 200;
# Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i = 1 : 1 : 5;
n = lambda .* i;
p = lambda ./ n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i = 1 : 4
  binomial = binopdf(k, n(i), p(i));
  stem(k, binomial, colors(i), 'linewidth', 1.2);
endfor
hold off;
```

Εκθετική κατανομή

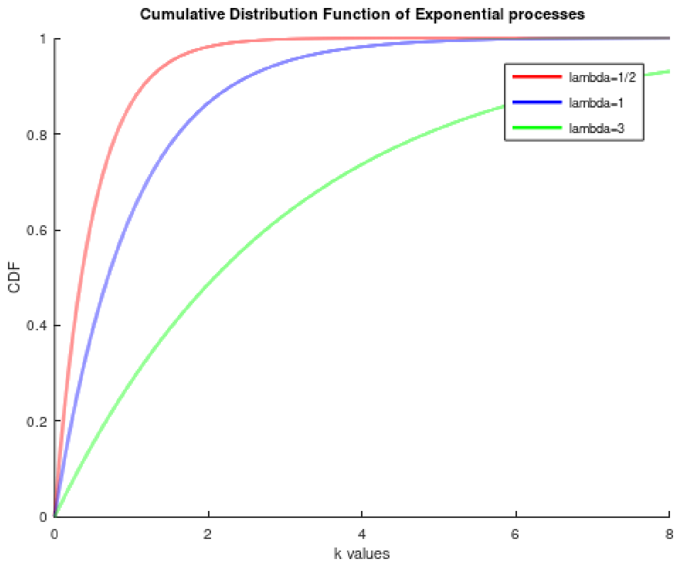
Α. Σε κοινό διάγραμμα για παραμέτρους λ=2,1,3 (και άρα 1/λ=0.5, 1, 3), για τιμές στον οριζόντιο άξονα από 0 έως 8, οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των αντίστοιχων κατανομών προκύπτουν ως εξής:



Ο κώδικας:

```
pkg load statistics
clc;
clear all;
close all;

k = 0:0.0001:8;
lambda = [1./2,1,3];
colors = "rbg";

for i=1:columns(lambda)
  exponPdf(i,:) = exppdf(k,lambda(i));
endfor

figure(1);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  plot(k,exponPdf(i,:),colors(i), "linewidth",2.5);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=1/2","lambda=1","lambda=3");
```

B. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής:



Ο κώδικας:

```
%B
for i=1:columns(lambda)
  exponCdf(i,:) = expcdf(k,lambda(i));
endfor

figure(2);
hold on;
for i=1:columns(lambda)
  plot(k,exponCdf(i,:), colors(i),"linewidth",2.5);
endfor
hold off;

title("Cumulative Distribution Function of Exponential processes");
xlabel("k values");
ylabel("CDF");
legend("lambda=1/2","lambda=1","lambda=3");
```

C. Χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής για 1/λ=2.5 για να υπολογίσουμε τις ζητούμενες πιθανότητες P(X>30000) και Pr(X>50000|X>20000).

```
P[X > 3000] =
P_3000 =  0.88696
P[X > 5000 | X > 2000] =
P_5000_2000 =  0.88692
```

Παρατηρούμε ότι οι 2 ζητούμενες πιθανότητες είναι ίσες, γεγονός που είναι αναμενόμενο από την ιδιότητα έλλειψης μνήμης της εκθετικής κατανομής, δηλαδή από το ότι για τον υπολογισμό δεσμευμένης πιθανότητας τυχαίας μεταβλητής παίρνουμε τη διαφορά των δύο τιμών.

$P[X > s] = 1 - P[X \leq s] = 1 - Fx(s) = 1 - \left(1 - e^{\lambda * s}\right), P[X > 3000] = 0.8869$

$$P[X > t + s|X > s] = \frac{P[X > t + s, X > s]}{P[X > s]} = \frac{P[X > t + s]}{P[X > s]} = e^{-\lambda * t}$$

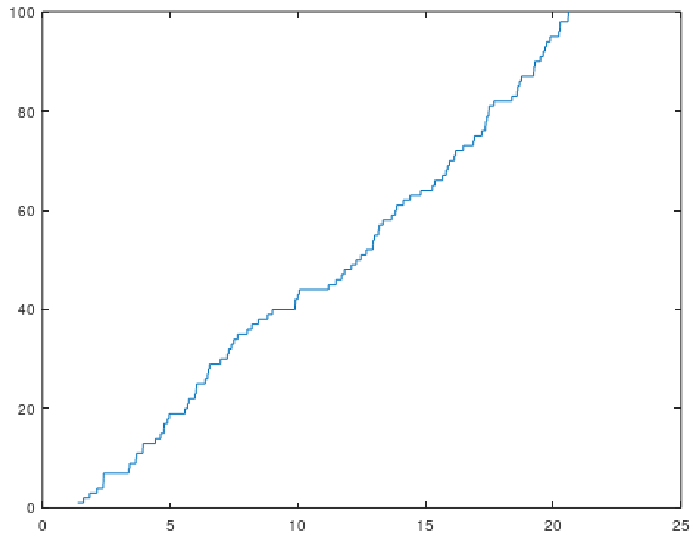
$$P[X > 5000|X > 2000] = 0.8869$$

Ο κώδικας:

```
%C
exponc = expcdf(k, 2.5); %CDF gia 1/lambda=2.5
P_3000 = 1 - exponc(3000);
display("P[X > 3000] =");
display(P_3000);
P_2000 = 1 - exponc(2000);
P_5000 = 1 - exponc(5000);
P_5000_2000 = P_5000./P_2000;
display("P[X > 5000 | X > 2000] =");
display(P_5000_2000);
```

Διαδικασία καταμέτρησης Poisson

A. Σχεδιάζουμε, με χρήση της stairs, διαδικασία καταμέτρησης Poisson από 100 τυχαία γεγονότα, θεωρώντας λ=5. Γνωρίζουμε ότι οι χρόνοι που μεσολαβούν μεταξύ δύο διαδοχικών εμφανίσεων γεγονότων Poisson ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/λ.



Ο κώδικας:

```
pkg load statistics
clc;
clear all;
close all;
%A

randomevents = exprnd(0.2, 100);
for i = 2:100
  randomevents(i) = randomevents(i) .+ randomevents(i-1);
endfor
stairs(randomevents, 1:100);
```

B. Γνωρίζουμε ότι ο αριθμός γεγονότων σε ένα χρονικό παράθυρο ΔΤ = t1 - t2 είναι κατανομή Poisson με μέσο αριθμό γεγονότων λ*Δt. Συνεπώς, ο μέσος αριθμός γεγονότων στη μονάδα του χρόνου είναι ίσος με λ. Οι υπολογισμοί:

```
Random events:
 200
Mean value of events per second:
 5.1826
Random events:
 300
Mean value of events per second:
 4.8371
Random events:
 500
Mean value of events per second:
 5.3905
Random events:
 1000
Mean value of events per second:
 5.4400
Random events:
 10000
Mean value of events per second:
 4.9890
```

Παρατηρούμε ότι, όσο αυξάνονται τα γεγονότα, ο μέσος αριθμός γεγονότων στη μονάδα του χρόνου πλησιάζει τη θεωρητική τιμή λ=5.

Ο κώδικας:

```
%B
N = [200, 300, 500, 1000, 10000];
for k=1:columns(N)
  random_events=exprnd(1/5, N(k));
  for j = 2:N(k)
    random_events(j) = random_events(j) .+ random_events(j-1);
  endfor
  display("Random events:");
  display(N(k));
  display("Mean value of events per second:");
  display(N(k)./random_events(N(k)));
endfor
```