UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CARRERAS: INFORMATICA Y ESTADISTICA

INICIAL DEL

APELLIDO PATERNO

Examen Primer Parcial

MAT - 114 Matemática Discreta I

Curso de Temporada

10 de enero de 2023

Apellido Paterno	Apellido Materno	Nombre(s)
Carnet de Identidad	Carrera	Nombre del Docente y paralelo

a) Está prohibido el uso de libros, apuntes u otro recurso bibliográfico

b) Está prohibido utilizar dispositivos celulares, tablets o cualquier otro recurso tecnológico

c) La presencia en la prueba implica la autorización para ser filmados, especialmente en caso de presentarse alguna irregularidad que requiera la intervención por parte de los encargados de la aplicación de la prueba

d) Solo pueden aplicar la prueba los estudiantes que acrediten su identidad portando algún documento de identificación y se encuentren en listas oficiales de inscritos

FIRMA ESTUDIANTE

EJERCICIOS

1.- Simplificar $[\sim (r \wedge \sim q) \wedge \sim (\sim q \rightarrow p)] \rightarrow r$

2.- Demostrar $p \rightarrow \sim s$ por el método de contradicción utilizando las hipótesis

1) $p \rightarrow (q \vee r)$

2) $q \rightarrow \sim p$

3) $s \rightarrow \sim r$

3.- Simplificar $\{[(A^c \cap B) \cap U] \cup (U - A)\}^c - (B \cap A^c)$

4.- Sean A, B y C subconjuntos de U. Simplificar la siguiente expresión $[(A \triangle B)^c - (A \cap B)^c]^c \cup [(B - C)^c \cup A^c]$

Solución

1.- Simplificar $[\sim (r\wedge \sim q)\wedge \sim (\sim q \to p)] \to r$

Solución:

$$
\begin{array}{lcl}
[\sim (r\wedge \sim q)\wedge \sim (\sim q \to p)] \to r & \underbrace{\Leftrightarrow}_{(p\to q)\equiv(\sim p\vee q)} & [\sim (r\wedge \sim q)\wedge \sim (\sim (\sim q) \vee p)] \to r \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{ley de la doble negación}} & [\sim (r\wedge \sim q)\wedge \sim (q \vee p)] \to r \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{ley de Morgan}} & [(\sim r\vee \sim\sim q) \wedge (\sim q\wedge \sim p)] \to r \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{ley de la doble negación}} & [(\sim r \vee q)\wedge \sim q\wedge \sim p] \to r \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{por asociatividad}} & [[(\sim r \vee q)\wedge \sim q] \wedge \sim p] \to r \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{por distributividad}} & [[(\sim r\wedge \sim q) \vee (q\wedge \sim q)] \wedge \sim p] \to r \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{(p\wedge\sim p)\equiv F} & [[(\sim r\wedge \sim q) \vee F] \wedge \sim p] \to r \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{(p\vee F)\equiv p} & [\sim r\wedge \sim q\wedge \sim p] \to r \\
 & \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{por la conmutatividad}} & [\sim p\wedge \sim q\wedge \sim r] \to r
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(p\to q)\equiv(\sim p\vee q)} && [\sim(r\wedge \sim q)\wedge \sim(\sim(\sim q)\vee p)]\to r\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(p\to q)\equiv(\sim p\vee q)} && \sim[\sim p\wedge \sim q\wedge \sim r]\vee r\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{ley de Morgan}} && [\sim\sim p\vee \sim\sim q\vee \sim\sim r]\vee r\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{ley de la doble negación}} && p\vee q\vee r\vee r\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{por asociatividad}} && p\vee q\vee (r\vee r)\\
&\underbrace{\Leftrightarrow}_{(p\vee p)\equiv p} && p\vee q\vee r
\end{aligned}
$$

así $[\sim(r\wedge\sim q)\wedge\sim(\sim q\to p)]\to r$ es logicamente equivalente a $(p\vee q\vee r)$

2.- Demostrar $p\to\sim s$ por el método de contradicción utilizando las hipótesis

$$
\begin{aligned}
&1)\ p\to(q\vee r)\\
&2)\ q\to\sim p\\
&3)\ s\to\sim r
\end{aligned}
$$

Solución:

El razonamiento deductivo

$$
\begin{array}{l}
1)\ p\to(q\vee r)\\
2)\ q\to\sim p\\
3)\ s\to\sim r\\
\hline
p\to\sim s
\end{array}
$$

por el método de la contradicción es equivalente al razonamiento

$$
\begin{array}{l}
1)\ p\to(q\vee r)\\
2)\ q\to\sim p\\
3)\ s\to\sim r\\
4)\ \sim(p\to\sim s)\\
\hline
F
\end{array}
$$

ahora verifiquemos la valides de este razonamiento

1) $p \to (q \vee r)$	hipótesis
2) $q \to \sim p$	hipótesis
3) $s \to \sim r$	hipótesis
4) $\sim (p \to \sim s)$	nueva hipótesis
5) $p \wedge s$	de 4 $(\sim (p \to \sim s)) \Leftrightarrow (p \wedge s)$
6) p	de 5 por S
7) s	de 5 por S
8) $\sim r$	de 3 y 7 por MP
9) $p \to \sim q$	de 2 $(q \to \sim p) \Leftrightarrow (p \to \sim q)$
10) $\sim q$	de 6 y 9 por MP
11) $q \vee r$	de 1 y 6 por MP
12) $\sim q \to r$	de 11 $(q \vee r) \Leftrightarrow (\sim q \to r)$
13) r	de 10 y 12 por MP
14) $\sim r \wedge r$ (contradicción)	de 8 y 13 C

así $v(\sim r \wedge r) = F$ para cualquier valor de verdad que se asigne a r, por tanto la proposición $\sim r \wedge r$ es falsa

3.- Simplificar $\{[(A^c \cap B) \cap U] \cup (U - A)\}^c - (B \cap A^c)$

Solución:

Sea $R := \{[(A^c \cap B) \cap U] \cup (U - A)\}^c - (B \cap A^c)$ así por el álgebra de conjuntos se tendrá

$$\begin{aligned}
R &= \{[(A^c \cap B) \cap U] \cup (U - A)\}^c - (B \cap A^c) \\
&= \{[(A^c \cap B) \cap U]^c \cap (U - A)^c\} - (B \cap A^c) \\
&= \{[(A^c \cap B) \cap U]^c \cap (U \cap A^c)^c\} \cap (B \cap A^c)^c \\
&= \{[(A^c \cap B) \cap U]^c \cap (U \cap A^c)^c\} \cap (B \cap A^c)^c \\
&= \{[(A^c \cap B)]^c \cap (A^c)^c\} \cap (B \cap A^c)^c \\
&= \{[((A^c)^c \cup B^c)] \cap A\} \cap (B^c \cup (A^c)^c) \\
&= \{[(A \cup B^c)] \cap A\} \cap (B^c \cup A) \\
&= ((A \cup B^c) \cap (A \cup B^c)) \cap A \\
&= (A \cup B^c) \cap A \\
&= A \cap (A \cup B^c) \\
&= A
\end{aligned}$$

por tanto $\{[(A^c \cap B) \cap U] \cup (U - A)\}^c - (B \cap A^c) = A$

4.- Sean A, B y C subconjuntos de U. Simplificar la siguiente expresión $[(A \triangle B)^c - (A \cap B)^c]^c \cup [(B - C)^c \cup A^c]$

Solución:

Sea $R := [(A \triangle B)^c - (A \cap B)^c]^c \cup [(B-C)^c \cup A^c]$ así por el álgebra de conjuntos se tendrá

$$\begin{aligned}
R &= [(A \triangle B)^c - (A \cap B)^c]^c \cup [(B-C)^c \cup A^c] \\
&= [((A-B) \cup (B-A))^c - (A \cap B)^c]^c \cup [(B-C)^c \cup A^c] \\
&= [((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c - (A \cap B)^c]^c \cup [(B \cap C^c)^c \cup A^c] \\
&= [(A \cap B^c) \cup B^c] \cup [(B \cap A^c) \cup A^c] \cup C \\
&= [((A \cup B^c) \cap B^c)] \cup [((B \cup A^c) \cap A^c)] \cup C \\
&= [(B^c \cap (B^c \cup A))] \cup [(A^c \cap (A^c \cup B))] \cup C \\
&= B^c \cup A^c \cup C
\end{aligned}$$

portanto $[(A \triangle B)^c - (A \cap B)^c]^c \cup [(B-C)^c \cup A^c] = (B^c \cup A^c \cup C)$

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CARRERAS: INFORMATICA Y ESTADISTICA

INICIAL DEL

APELLIDO PATERNO

Examen Segundo Parcial

MAT - 114 Matemática Discreta I

Curso de Temporada

20 de enero de 2023

Apellido Paterno	Apellido Materno	Nombre(s)
Carnet de Identidad	Carrera	Nombre del Docente y paralelo

$a)$ Está prohibido el uso de libros, apuntes u otro recurso bibliográfico

$b)$ Está prohibido utilizar dispositivos celulares, tablets o cualquier otro recurso tecnológico

$c)$ La presencia en la prueba implica la autorización para ser filmados, especialmente en caso de presentarse alguna irregularidad que requiera la intervención por parte de los encargados de la aplicación de la prueba

$d)$ Solo pueden aplicar la prueba los estudiantes que acrediten su identidad portando algún documento de identificación y se encuentren en listas oficiales de inscritos

FIRMA ESTUDIANTE

EJERCICIOS

1.- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y se definen las relaciones

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1), (2,3), (a,2), (3,b)\} \text{ es reflexiva} \\ S &= \{(1,3), (c,d)\} \text{ es simetrica} \\ T &= \{(3,e), (2,3)\} \text{ es transitiva} \end{aligned}$$

determinar $a + b + c + d + e =?$

2.- En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se definen las funciones

$$F = \{(2,4), (1,5), (3,r), (2,s), (4,3), (5,t)\}$$

$$G = \{(x,y) \in A \times A / y = rx + t\}$$

tal que $G(2) = F(1)$ y $F(2) = G(1)$ determinar $3r + 3s + t =?$

3.- Demostrar mediante inducción matemática que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

4.- Supongamos que n es un número impar y no dovisible por 3. ¿Cuál es el resto de dividir n^2 por 24?

Solución

1.- Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y se definen las relaciones

$$\begin{aligned} R &= \{(1,1), (2,3), (a,2), (3,b)\} \text{ es reflexiva} \\ S &= \{(1,3), (c,d)\} \text{ es simetrica} \\ T &= \{(3,e), (2,3)\} \text{ es transitiva} \end{aligned}$$

determinar $a + b + c + d + e =?$

Solución: Como el conjunto es de la forma $A = \{1, 2, 3\}$ y la relación R es reflexiva, entonces se tiene que verificar

$$\begin{gathered} (1,1) \in R \\ (2,2) \in R \\ (3,3) \in R \end{gathered}$$

pero por hipótesis $R = \{(1,1), (2,3), (a,2), (3,b)\}$ entonces

$$(2,2) = (a,2)$$

y por igualdad de pares ordenados $a = 2$, por otro lado

$$(3,3) = (3,b)$$

y por igualdad de pares ordenados $b = 3$

También la relación S es simetrica, entonces por definición de simetria se tiene que verificar que

$$(x,y) \in S, \text{ entonces } (y,x) \in S$$

pero $S = \{(1,3),(c,d)\}$ así

$$(1,3) \in S, \text{ entonces } (3,1) \in S$$

y como la relación S solo tiene dos elementos entonces $(3,1) = (c,d)$ y por igualdad de pares ordenados se tiene que $c = 3$ y $d = 1$

finalmente la relación T es transitiva por tanto tiene que verificar la propiedad

$$(x,y) \in T \text{ y } (y,z) \in T, \text{ entonces } (x,z) \in T$$

pero $T = \{(3,e),(2,3)\}$ así

$$(2,3) \in T \text{ y } (3,e) \in T, \text{ entonces } (2,e) \in T$$

por tanto $(2,e) = (2,3)$ y por igualdad de pares ordenados se tiene que $e = 3$, así

$$a + b + c + d + e = 2 + 3 + 3 + 1 + 3 = 12$$

2.- En el conjunto $A = \{1,2,3,4,5\}$ se definen las funciones

$$F = \{(2,4),(1,5),(3,r),(2,s),(4,3),(5,t)\}$$
$$G = \{(x,y) \in A \times A / y = rx + t\}$$

tal que $G(2) = F(1)$ y $F(2) = G(1)$ determinar $3r + 3s + t = ?$

Solución: Como la relación F es una función entonces

$$(2,4) \in F \wedge (2,s) \in F, \text{ entonces } 4 = s$$

por otro lado $F(1) = 5$ pero $G(2) = F(1)$ por tanto $G(2) = 5$ también notemos que

$$(x,y) \in G \text{ si y solo si } y = rx + t$$

o equivalentemente $y = G(x)$ entonces $G(x) = rx + t$ y como $G(2) = 5$ se tendrá

$$5 = 2r + t \ (1)$$

también $G(1) = F(2) = 4$ por tanto $G(1) = 4$ pero

$$4 = r + t \ (2)$$

despejando de la ecuación (2) la variable r se tendrá

$$r = 4 - t \ (3)$$

renplazando la ecuación (3) en la ecuación (1)

$$t = 3$$

por tanto $r = 4 - t = 4 - 3 = 1$ así $3r + 3s + t = 3(1) + 3(4) + 3 = 18$

3.- Demostrar mediante inducción matematica que $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

Solución: Sea

$$X = \left\{ n \in \mathbb{N} : P_{(n)} \right\}$$

donde $P_{(n)} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}\right)$

Para $i)$ ¿Vemos si $1 \in X$?, es decir $1 \in X = \left\{ n \in \mathbb{N} : P_{(n)} \right\}$ así para que $1 \in X$ es necesario que se verifique la propiedad $P_{(1)}$, es decir

$$P_{(1)} = \left(1 \leq 2 - \frac{1}{1}\right)$$

asi $v\left(P_{(1)}\right) = V$ por tanto $1 \in X$

Para $ii)$ Si $\underbrace{n \in X}_{\text{hipotesis}}$ implica que $\underbrace{(n+1) \in X}_{\text{conclusión}}$. Ahora veamos que $P_{(n+1)}$ sea verdadera, es decir

$$P_{(n+1)} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}\right)$$

así

$$\begin{aligned} 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{(n+1)^2} &= \left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \cdots + \tfrac{1}{n^2}\right) + \tfrac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2 - \tfrac{1}{n+1} \end{aligned}$$

de donde $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$ es decir $v\left(P_{(n+1)}\right) = V$, entonces $X = \mathbb{N}$

Aperación Auxiliar: Afirmamos $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

$$\begin{aligned}
2-\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{(n+1)^2} &\leq 2-\tfrac{1}{n+1}\\
\tfrac{1}{(n+1)^2} &\leq -\tfrac{1}{n+1}+\tfrac{1}{n}\\
\tfrac{1}{(n+1)^2} &\leq \tfrac{-1+\frac{n+1}{n}}{n+1}\\
\tfrac{1}{n+1} &\leq -1+\tfrac{n+1}{n}\\
\tfrac{1}{n+1} &\leq \tfrac{1}{n}\\
n &\leq n+1\\
0 &\leq 1
\end{aligned}$$

4.- Supongamos que n es un número impar y no dovisible por 3. ¿Cuál es el resto de dividir n^2 por 24?

Solución: Como n es un número impar entonces $2\not| n$ y por hipotesis $3\not| n$ así lo recomendable es dividir n entre 6, es decir

$$n = 6q + r$$

donde $0 \leq r < 6$, pero en esta relación se observa que r no puede ser par si fuera el caso entonces por la relación $n = 6q+r$, n seria divisible entre 2 lo cual seria una contradicción y tampoco puede ser 3 ya que entonces también n seria divisible entre 3 lo cual también seria una contradicción, por tanto los unicos posibles valores de r son 1 o 5

Supongamos que $r = 5$ entonces

$$n = 6q + 5 = 6q + 5 + 1 - 1 = 6\,(q + 1) - 1$$

así si $r = 5$ o $r = 1$ entonces $n = 6k \pm 1$ pero

$$n^2 = (6k \pm 1)^2 = 36k^2 \pm 12k + 1 = 12k\,(3k \pm 1) + 1$$

para algun entero k, así el producto $k\,(3k \pm 1)$ sera par por tanto $k\,(3k \pm 1) = 2t$ por tanto

$$n^2 = 12\,(2t) + 1 = 24t + 1$$

para algun entero t con $0 \leq 1 < 24$ así por el algoritmo de la división el resto de dividir n^2 entre 24 es 1

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

CARRERAS: INFORMATICA Y ESTADISTICA

INICIAL DEL

APELLIDO PATERNO

Examen Final

MAT - 114 Matemática Discreta I

Curso de Temporada

26 de enero de 2023

Apellido Paterno	Apellido Materno	Nombre(s)
Carnet de Identidad	Carrera	Nombre del Docente y paralelo

a) Está prohibido el uso de libros, apuntes u otro recurso bibliográfico

b) Está prohibido utilizar dispositivos celulares, tablets o cualquier otro recurso tecnológico

c) La presencia en la prueba implica la autorización para ser filmados, especialmente en caso de presentarse alguna irregularidad que requiera la intervención por parte de los encargados de la aplicación de la prueba

d) Solo pueden aplicar la prueba los estudiantes que acrediten su identidad portando algún documento de identificación y se encuentren en listas oficiales de inscritos

FIRMA ESTUDIANTE

EJERCICIOS

1.- Hallar la solución general de la ecuación diofantica lineal $14x + 22y = 50$

2.- Para adquirir ejemplares de dos libros, cuyos respectivos precios son 12 y 17.50 bolivianos, una universidad dispone de 1680 bolivianos ¿De cuántas maneras puede hacerse la operación, si debe comprarse por lo menos un ejemplar de cada libro y debe de gastarse todo el dinero?

3.- Resolver la ecuación $[15] \otimes x = [9]$ en $\mathbb{Z}_{18}$

4.- ¿Cuáles de las siguientes tablas es un grupo?

I

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	a
b	b	b	c	d
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

II

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Solución

1.- Hallar la solución general de la ecuación diofantica lineal $14x + 22y = 50$

Solución:

Primero veamos si la ecuación diofantica $14x + 22y = 50$ tiene solución

$$\begin{array}{rcl} 22 & = & 14\,(1) + 8 \\ 14 & = & 8\,(1) + 6 \\ 8 & = & 6\,(1) + 2 \\ 6 & = & 2\,(3) + 0 \end{array}$$

por tanto $(22; 14) = 2$ así $2 \mid 50$ pues $50 = 2\,(25)$ por tanto la ecuación diofantica tiene solución:

Y del esquema se tiene

$$\begin{array}{rcl} 22 + 14\,(-1) & = & 8 \\ 14 + 8\,(-1) & = & 6 \\ 22\,(2) + 14\,(-3) & = & 2 \end{array}$$

por tanto $14\left(\underbrace{-75}_{x_0}\right) + 22\left(\underbrace{50}_{y_0}\right) = 50$ así las soluciones generales serán $x = x_0 + \frac{b}{g}k$; $y = y_0 - \frac{a}{g}k$

es decir $x = -75 + 11k$; $y = 50 - 7k$

2.- Para adquirir ejemplares de dos libros, cuyos respectivos precios son 12 y 17.50 bolivianos, una universidad dispone de 1680 bolivianos ¿De cuántas maneras puede hacerse la operación, si debe comprarse por lo menos un ejemplar de cada libro y debe de gastarse todo el dinero?

Solución:

Según el enuciado anterior la ecuación a resolver es: $12x+17.5y=1680$ para $x,y\in\mathbb{Z}^+$. Para poder resolver esta ecuación mediante el método de Ecuaciones Diofanticas es prudente multiplicar la ecuación por 2, es decir

$$24x+35y=3360 \text{ para } x,y\in\mathbb{Z}^+$$

Primero veamos si la ecuación tiene solución:

$$\begin{aligned}
&35=24\,(1)+11 \text{ con } 0\leq 11<24\\
&24=11\,(2)+2 \text{ con } 0\leq 2<11\\
&11=2\,(5)+1 \text{ con } 0\leq 1<2\\
&2=\underbrace{1}_{\text{mcd}}(2)+0
\end{aligned}$$

así $(24:35)=1$ y como $1\mid 3360$ entonces la ecuación tiene solución

Segundo determinar la solución:

$$\begin{aligned}
1 &= 11+2\,(-5)\\
&\underbrace{=}_{2=24+11(-2)} 11+(24+11\,(-2))\,(-5)\\
&= 11+24\,(-5)+11\,(10)\\
&= 11\,(11)+24\,(-5)\\
&\underbrace{=}_{11=35+24(-1)} (35+24\,(-1))\,(11)+24\,(-5)\\
&= 35\,(11)+24\,(-11)+24\,(-5)\\
&= 35\,(11)+24\,(-16)
\end{aligned}$$

de donde $1=35\,(11)+24\,(-16)$ o equivalentemente $24\,(-16)+35\,(11)=1$. Por otro lado $1\mid 3360$ es decir $3360=1\,(3360)$ así

$$(24\,(-16)+35\,(11))\,3360=1\,(3360)$$

o equivalentemente

$$24\left(\underbrace{-53760}_{x_0}\right)+35\left(\underbrace{36960}_{y_0}\right)=3360$$

la solución determinada es una solución particular, pero gracias a esta solución se pueden determinar otras soluciones bajo las relaciones

$$\begin{array}{lcl}
x=x_0+\frac{b}{g}k & \text{e} & y=y_0-\frac{a}{g}k\\
x=-53760+35k & \text{e} & y=36960-24k \text{ pero } x,y\in\mathbb{Z}^+\\
-53760+35k>0 & \text{e} & 36960-24k>0\\
k>\frac{53760}{35}=1536 & \text{e} & 1540=\frac{36960}{24}>k
\end{array}$$

de donde $1536<k<1540$ de donde $k=1537,1538,1539$ es decir

$$x = -53760 + 35\,(1537) = 35 \quad \text{e} \quad y = 36960 - 24\,(1537) = 72$$
$$x = -53760 + 35\,(1538) = 70 \quad \text{e} \quad y = 36960 - 24\,(1538) = 48$$
$$x = -53760 + 35\,(1539) = 105 \quad \text{e} \quad y = 36960 - 24\,(1539) = 24$$

así las soluciones positivas para la ecuación $12x + 17.5y = 1680$ son:

$$x = 35 \quad \text{e} \quad y = 72$$
$$x = 70 \quad \text{e} \quad y = 48$$
$$x = 105 \quad \text{e} \quad y = 24$$

así las compras que realizan son:

- Del primer ejemplar 35 y del segundo 72
- Del primer ejemplar 70 y del segundo 48
- Del primer ejemplar 105 y del segundo 24

3.- Resolver la ecuación $[15] \otimes x = [9]$ en $\mathbb{Z}_{18}$

Solución:

¿Quien es $\mathbb{Z}_{18}$? En el conjunto de los números enteros se define la relación de equivalencia

$$x \equiv y \text{ mod } 18$$

recordemos que: $x \equiv y$ mod 18 es equivalente $y - x = 18k$, como es una relación de equivalencia las clases de equivalencia son:

$$[a] = \{t \in \mathbb{Z} : t \equiv a \text{ mod } 18\} = \{t \in \mathbb{Z} : t = 18\,(k_1) + a\}$$

por el algoritmo de la división el a es el resto de dividir t entre 18 por tanto $0 \leq a < 18$, asi

$$\mathbb{Z}_{18} = \{[0], [2], [3], ..., [16], [17]\}$$

para resolver el ejercicio $[15] \otimes x = [9]$ supongamos que $x = [t]$, entonces $[15] \otimes [t] = [9]$

$$\begin{aligned} [15] \otimes [t] &= [9] \\ [15\,(t)] &= [9] \end{aligned}$$

asi $15t \equiv 9$ mod 18 de donde $9 = 18k + 15t$ por el algoritmo de la división

$$\begin{aligned} 18 &= 15\,(1) + 3(1) \\ 15 &= \underbrace{3}_{mcd}(5) + 0 \end{aligned}$$

pero notemos que $3 \mid 9$ es decir $9 = 3\,(3)$es verdad y esto significa que la ED tiene solución, y para determinar la solución hay que despejar el resto de la ec (1), es decir $3 = 18\,(1) + 15\,(-1)$ multiplicando por 3

$$9 = 18\left(\underbrace{3}_{k}\right) + 15\left(\underbrace{-3}_{t}\right)$$

de donde $t = -3$ por tanto el t positivo sera $(-3) + 18 = 15$, finalmente $x = [15]$

4.- ¿Cuáles de las siguientes tablas es un grupo?

I

$*$	a	b	c	d
a	a	c	d	a
b	b	b	c	d
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

II

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

Solución:

Recordemos que si G un conjunto no vació. El conjunto G es denominado **grupo** si

1. Para todo $a, b \in G$ implica $ab \in G$
2. Para todo $a, b, c \in G$ implica $a\,(bc) = (ab)\,c$
3. Para todo $a \in G$, existe $e \in G$ tal que $ae = a$ y $ea = a$
4. Para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ tal que $aa^{-1} = e$ y $a^{-1}a = e$

Para la primera tabla I: Esta tabla no es un grupo ya que la propiedad 3 indica que

$$ae = a \text{ para todo } a \in G$$

así en la tabla se observa que

$$a * a = a,\ b * a = b,\ c * a = c \text{ y } d * a = d$$

pero también tiene que verificarse que

$$ea = a \text{ para todo } a \in G$$

y según la tabla se observa que

$$a * a = a,\ a * b = c,\ a * c = d \text{ y } a * d = a$$

así la propiedad 3 no se verifica

Para la tabla II: Vemos las propiedades

Según la tabla II la propiedad 1 se verifica, la propiedad 3 también ya que

$*$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b			
c	c			
d	d			

así el neutro es a, la propiedad 4 también ya que

$*$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				a

y la propiedad 2 también ya que

$$a * (b * c) = d = (a * b) * c$$

y

$$a * (c * d) = b = (a * c) * d$$

y

$$b * (c * d) = a = (b * c) * d$$

y

$$a * (b * d) = c = (a * b) * d$$

y por la simetría de la tabla

$*$	a	b	c	d
a		b	c	d
b	b		d	c
c	c	d		b
d	d	c	b	

por tanto esta tabla es un grupo