Cálculo Diferencial e Integral I

Mat - 112

Primer Examen Parcial

04 de abril de 2022

1. En hojas blancas, usted debe desarrollar sus respuestas de la manera más completa y clara posible. Respuestas sin justificación no serán consideradas en la revisión.
2. En cada hoja, usted debe colocar sus apellidos y nombres, carnet de identidad.
3. Esta prueba tiene una duración mínima de 1 hora; y una duración máxima de 2 horas y 15 minutos.
4. Esta es una prueba de 5 problemas de desarrollo. La prueba puede ser realizada con lápiz o con bolígrafo.

FCPN U.M.S.A. CARRERA DE MATEMÁTICA CARRERA DE CIENCIAS QUÍMICAS

Problema 1. Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a, b, c \neq 0$. Si $a + b + c = 0$ y $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$, entonces demostrar que:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}$$

Problema 2. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Si f es continua en algún punto $a \in \mathbb{R}$, entonces demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$.

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$, entonces demostrar que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$$

para todo entero positivo c.

Problema 4. Se quiere construir una lata cilíndrica con fondo pero sin tapa que tendrá un volumen de $30cm^3$. Determine las dimensiones de la lata que minimizarán la cantidad de material necesaria para construir la lata.

Problema 5. Un pedazo de alambre de $10m$ de largo está cortado en dos piezas. Una pieza está doblada en forma de cuadrado y la otra de un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total encerrada sea:

1. un máximo?
2. un mínimo?

Cálculo Diferencial e Integral I

Mat - 112

Soluciones Primer Examen Parcial

04 de abril de 2022

1. En hojas blancas, usted debe desarrollar sus respuestas de la manera más completa y clara posible. Respuestas sin justificación no serán consideradas en la revisión.
2. En cada hoja, usted debe colocar sus apellidos y nombres, carnet de identidad.
3. Esta prueba tiene una duración mínima de 1 hora; y una duración máxima de 2 horas y 15 minutos.
4. Esta es una prueba de 5 problemas de desarrollo. La prueba puede ser realizada con lápiz o con bolígrafo.

CARRERA DE **MATEMÁTICA**

Problema 1. Sea $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a, b, c \neq 0$. Si $a + b + c = 0$ y $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$, entonces demostrar que:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{6}{5}$$

Solución. En primer lugar, como $a + b + c = 0$, por igualdades condicionales tenemos que:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \\ a^5 + b^5 + c^5 &= -5abc(ab + ac + bc). \end{aligned}$$

Entonces, como $a^3 + b^3 + c^3 = a^5 + b^5 + c^5$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3abc &= -5abc(ab + ac + bc) \\ \frac{3}{5} &= -(ab + ac + bc) \\ \frac{6}{5} &= -2(ab + ac + bc) \\ &= -(a(b + c) + b(a + c) + c(a + b)) \\ &= -(a(-a) + b(-b) + c(-c)) \\ &= -(-a^2 - b^2 - c^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

$\square$

Problema 2. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que:

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Si f es continua en algún punto $a \in \mathbb{R}$, entonces demostrar que f es continua en $\mathbb{R}$.

Solución. En primer lugar, como f es continua en $a \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} f(a) &= \lim_{h\to 0} f(a+h) \\ &= \lim_{h\to 0} (f(a)+f(h)) \\ &= \lim_{h\to 0} f(a) + \lim_{h\to 0} f(h) \\ &= f(a) + \lim_{h\to 0} f(h) \\ 0 &= \lim_{h\to 0} f(h). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $x \in \mathbb{R}$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(x+h) &= \lim_{h\to 0} (f(x)+f(h)) \\ &= \lim_{h\to 0} f(x) + \lim_{h\to 0} f(h) \\ &= f(x) + \lim_{h\to 0} f(h) \\ &= f(x) + 0 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Por lo que, f es continua en $x \in \mathbb{R}$.
Así, tenemos que f es continua en $\mathbb{R}$. $\square$

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente. Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$, entonces demostrar que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$$

para todo entero positivo c.

Solución. En primer lugar, notemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{f(2^m x)}{f(x)} &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(2^m x)}{f(2^{m-1}x)} \frac{f(2^{m-1}x)}{f(2^{m-2}x)} \cdots \frac{f(2x)}{f(x)} \right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(2^m x)}{f(2^{m-1}x)} \right) \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(2^{m-1}x)}{f(2^{m-2}x)} \right) \cdots \lim_{x\to\infty} \left(\frac{f(2x)}{f(x)} \right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

para todo $m \geq 1$. Entonces, como $c \geq 1$, tenemos que existe un entero $n \geq 0$ tal que:

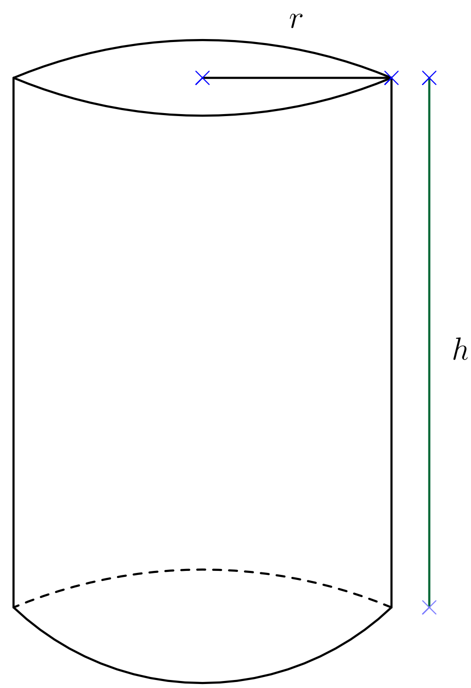
$$2^n \leq c \leq 2^{n+1}.$$

De donde, como f es creciente, se sigue que:

$$f(2^n x) \leq f(cx) \leq f(2^{n+1}x)$$

para todo $x > 0$.
Así, tenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = 1$. $\square$

Problema 4. Se quiere construir una lata cilíndrica con fondo pero sin tapa que tendrá un volumen de $30cm^3$. Determine las dimensiones de la lata que minimizarán la cantidad de material necesaria para construir la lata.



Solución. Sean h la altura y r el radio del cilindro. Entonces, como el volumen del cilindro es $V = \pi r^2 h = 30$, consideremos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} A: & (0,+\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & r & \longmapsto & A(r) := \pi r^2 + 2\pi r\left(\dfrac{30}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \dfrac{60}{r}, \end{array}$$

Luego, obtenemos que:

$$\begin{aligned} A'(r) &= 2\pi r - \frac{60}{r^2} \\ A''(r) &= 2\pi + \frac{120}{r^3} \end{aligned}$$

De donde, tenemos que los puntos críticos de A están dados por:

$$\begin{aligned} A'(r) &= 0 \\ 2\pi r - \frac{60}{r^2} &= 0 \\ r &= \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}} \end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que:

$$
\begin{aligned}
A''\left(\sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}\right) &= 2\pi + \frac{120}{\frac{30}{\pi}} \\
&= 2\pi + 4\pi \\
&= 6\pi \\
&> 0.
\end{aligned}
$$

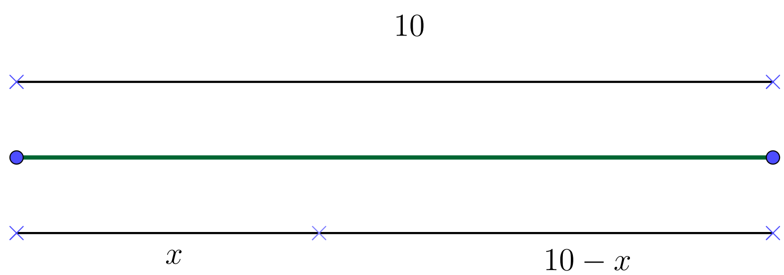
Por lo que, $r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}$ es un mínimo local de A.

Así, tenemos que las dimensiones de la lata que minimizarán la cantidad de material necesaria para construir la lata son $r = \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}} \approx 2.1215688358941103$ y $h = \frac{30}{\pi \sqrt[3]{\frac{30}{\pi}}^2} \approx 2.1215688358941109.$ $\square$

Problema 5. Un pedazo de alambre de $10m$ de largo está cortado en dos piezas. Una pieza está doblada en forma de cuadrado y la otra de un triángulo equilátero. ¿Cómo debe cortarse el alambre para que el área total encerrada sea:

1. un máximo?

2. un mínimo?



Solución. Sea x la longitud de la cuerda para formar el cuadrado. Entonces, consideremos la siguiente función:

$$
\begin{aligned}
A : \quad (0, +\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto A(x) := \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{10-x}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4},
\end{aligned}
$$

Luego, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{10-x}{3}\right) \\
A''(x) &= \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{18}.
\end{aligned}
$$

De donde, tenemos que los puntos críticos de A están dados por:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ \frac{x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{10-x}{3}\right) &= 0 \\ x &= \frac{\frac{5\sqrt{3}}{9}}{\frac{1}{8}+\frac{\sqrt{3}}{18}} \\ &= \frac{40}{11}(3\sqrt{3}-4). \end{aligned}$$

Por otro lado, notemos que:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{40}{11}(3\sqrt{3}-4)\right) &= \frac{25}{11}(3\sqrt{3}-4) \\ &\approx 2.71853 \\ A(0) &= \frac{25\sqrt{3}}{9} \\ &\approx 4.81125 \\ A(10) &= \frac{25}{4} \\ &= 6.25000. \end{aligned}$$

Así, tenemos que para que el área total encerrada por el alambre se mínima $x = \frac{40}{11}(3\sqrt{3}-4)$ y para que el área total encerrada por el alambre se máxima $x = 10$. $\square$

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

FILA A

Apellidos que inician de la A a la M

NOMBRE:..

CURSO:..............................ASIGNATURA:..

C.I.:.....................................FECHA:..........................EXAMEN:.........................

FIRMA ESTUDIANTE

EJERCICIOS

1.- (6 pts) Si g es una función diferenciable y que $f_{(x)} = xg_{(x^2+x)}$ para todo x. Si $f_{(2)} = f'_{(2)} = 3$ determinar $g'_{(6)}$

2.- (6 pts) Determinar la derivada de la función $f_{(x)} = x^x$

3.- (6 pts) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada continua y $f'_{(x)} \neq 0$ para todod $x \in \mathbb{R}$, además $f_{(3)} = 3$ y $f'_{(3)} = 2$. Sea $f^{-1}_{(y)}$ su función inversa. Determinar $\frac{d}{dy}\left(\sqrt{f^{-1}_{(y)}}\right)_{(3)}$

4.- (6 pts) Encontrar los valores que satisfacen el teorema del valor medio para la función $f_{(x)} = \sqrt{4x - x^2} + x$

5.- (6 pts) Calcular la recta tangente a la gráfica de la función $f_{(x)} = x^2 + 2x$ en el punto $(1, 3)$. Diga en que punto se intersectan la recta $g_{(x)} = 0$ y la recta tangente a la gráfica de $f_{(x)} = x^2 + 2x$ que tiene pendiente $m = 4$

UNIVERSIDAD MAYOR DE SAN ANDRES

FACULTAD DE CIENCIAS PURAS Y NATURALES

FILA B

Apellidos que inician de la N a la Z

NOMBRE:..

CURSO:..............................ASIGNATURA:..

C.I.:.....................................FECHA:..........................EXAMEN:.........................

FIRMA ESTUDIANTE

EJERCICIOS

1.- (6 pts) Si la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ satisface $f_{(x^2)}f''_{(x)} = f'_{(x)}f'_{(x^2)}$ para todo $x\in\mathbb{R}$ dado que $f_{(1)} = 1$ y $f'''_{(1)} = 8$, determinar el valor de $f'_{(1)} + f''_{(1)}$

2.- (6 pts) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ con $f_{(0)} = 1$ y tal que, para cualesquiera $x, h\in\mathbb{R}$ satisface

$$f_{(x+h)} - f_{(x)} = 8xh - 2h + 4h^2$$

el valor de $f'_{(2)}$ es

3.- (6 pts) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función con derivada continua y $f'_{(x)}\neq 0$ para todod $x\in\mathbb{R}$, además $f_{(3)} = 3$ y $f'_{(3)} = 2$. Sea $f^{-1}_{(y)}$ su función inversa. Determinar $\frac{d}{dy}\left(\sqrt{f^{-1}_{(y)}}\right)_{(3)}$

4.- (6 pts) Verificar que se cumpla las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[0,1]$ para la función $f_{(x)} = x^3 + 5x^2 - 6x$ y determinar un valor adecuado c que satisfaga la conclusión de este teorema

5.- (6 pts) Calcular la recta tangente a la gráfica de la función $f_{(x)} = x^2 + 2x$ en el punto $(1,3)$ ¿En que punto la gráfica de $f_{(x)} = x^3 + 2x^2 + 1$ tiene pendiente igual a cero?

Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Matemática

EXAMEN FINAL - CÁLCULO I

La Paz, 4 de diciembre de 2022

FILA 2

Instrucciones.

1. El examen es estrictamente de desarrollo y tiene una duración de 1hr y 30min.
2. Escriba lo más claro posible.
3. Utilize una hoja por ejercicio y cada hoja debe tener sus Apellidos, Nombre y Firma.

---

1. Encuentre la derivada de la función.

$$F(x) = \int_0^{e^{2x}} t^3 \, dt$$

2. Calcule la integral

$$\int \cos\sqrt{2x-1}dx$$

3. Calcule la siguiente integral [*Sugerencia:* $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$]:

$$\int x \operatorname{arc\,sen} x \, dx$$

4. Calcule el valor (o los valores) de $c \in \mathbb{R}$ tales que el área de la región delimitada por las parábolas $y_1 = 2c^2 - 2x^2$ y $y_2 = 2x^2 - 2c^2$ es $\dfrac{128}{3}$. (*Ayuda:* considere $y_2 \leq y_1$)

5 Determine la longitud de la gráfica de $y^2 = 16x^3$ de $(0,0)$ al punto $(1,4)$.