7. Preference-Free CIR and CEV Models with Jumps

この章では、6章で取り上げたfundamental CIRモデルのpreference-freeな形状へ拡張を行う。更にCEVモデル(constant elasticity of variance)の紹介とそのpreference-freeへの拡張も行う。Fundamentalモデルは、状態変数過程の時系列なダイナミクスに影響する経済的ファンダメンタルから債券価格を導出する。Preference-freeモデルは、特定のプレーンヴァニラデリバティブの価格や債券価格のcross-sectionalな情報から金利デリバティブの価格付けを行うことに適している。

CIR+モデルやCEVモデル+と言ったsingle-plusモデル（time-homogeneousかつpreference-free）は、モデルの価格と金利デリバティブや債券のcross-sectionな市場価格をフィッティングさせることで、リスク中立確率過程下のパラメータを得る。Single-plusモデルは、MPRSを必要としていないため、これらのモデルは一般の非線形な、実確率下でnon-affineな状態変数過程に従うMPRSを想定していることになる。Single-plus modelの重要な理論的特徴は、short rate過程がtime-homogeneousなことである。

CIRとCEVモデルのpreference-freeな拡張元で下のshort-rate過程は以下で与えられる。

・・・(7.1)

ここで、は確定的な項であり、)は状態変数である。

Time-homogeneousなCIR+とCEV+モデルは、が一定であり、CIR++とCEV++モデルは初期時点の債券価格に一致させるように、は変化する。

Time-inhomogeneousなCIRモデルは最初に取り入れられたのは、CIRの原著文である。しかしながら、CIRの概念下でshort rateの実確率は、以前としてaffineであり、MRPSの定義と一致していた。CIRアプローチは、様々な研究者によって、使われており、ゼロクーポン債の初期価格を計算するために、確定的な項は使用されている。これらの研究とは異なり、本誌では、MPRSが一般的な非線形の形状を取るものとして、CIR++モデルを導出する。このアプローチの下では、リスク中立の状態変数は以下として特定される。

・・・(7.2)

ここで、short-rateはとして定義される。４章のVasieck+モデルの導出と似ているように、(7.2)方程式のCIR+モデルにおけるリスク中立の状態変数過程では、実確率下での、外生的な債券価格の確率過程とゼロクーポン債のcross sectionな特定の関数形状を推計することで導出される。、、、は債券ボラティリティと価格に関連した外政的なインプットであり、これらのパラメータは実確率下で導出される。しかしながらこれらのパラメータはリスク中立状態変数過程でも定義できるので、fundamental CIRモデルとの一貫性を表すためにティルダを付けて表示する。

本章では、time-inhomogeneousなCIR++モデルCEV++モデルを用いて、債券価格・金利デリバティブの導出を行う。Time-homogeneousなCIR+モデルCEV+モデルは、の特殊なケースとして導く。また、本章ではこれらのexponential・log-normal jumpsのモデルへの拡張も行う。CIR++モデルCEV++モデルを紹介する前に、”mean calibration”手法として知られる初期ゼロクーポン債の計算方法を要約する。この手法では、short-rate過程の時間依存の長期平均性を用いることで初期価格に対するshort-rate過程を計算している。この手法下では、状態変数がshort rate自身であり、CIR++モデルとは異なる。（状態変数がshort rateと異なる。）

先行研究では、”mean calibration”手法では、全てのフォワードレートカーブを表現CIRモデルで表現する事ができないことを述べている。

CIR++モデルは、理論的かつ計算的にもmean-calibrated CIRmodelと比較し、メリットが多数存在する。Mean-calibrated CIRmodel　では状態変数にはtime-homogeneousなconditional volatilitesを許していたが、このモデル下ではunconditional volatilites はtime-inhomogeneousとなる。対照的に、CIR++モデルでは、shorte rateとforward-rateのconditional・unconditional volatilityに対してtime-homogeneousとなる。またCIR++モデルはHIMモデル同様に、どんな形状のforward-rateカーブにおいても価格が計算出来る。CIR++モデルのその他のメリットとして、債券価格・オプション価格・３項ツリーの導出をCIRモデルの簡単な応用で可能にしていることである。

Mean-Calibrated CIR Model

Hull and white (1990)ではCIRモデルを、初期時点の債券価格にフィッティングさせることでmean-calibration methodを用いた。

・・・(7.3)

この後示すように、初期時点のforward-rate関数の形状に依存しているので、はが0になると、負となる。つまり次の期間で、short-rateは負となる。負のshort-rateのルートは、short-rateのボラティリティ項の√内部は0になるので、この手法ではforward-rate curveが任意の形状下では使用できない。この事を証明するために、Ito’s lemmaを用いて債券価格のPDEを考える。

・・・(7.4)

制約として、境界条件P(T,T)=1がある。(7.4)の方程式の解が以下の形で書けると仮定する。

・・・(7.5)

ここで、とし、境界要件A(T,T)=0とB(0)=0とする。

r(t)とｔに関して債券価格の偏微分を行い、それらを(7.4)に代入することで、以下の式が得られる。

・・・(7.6)

の解は、CIRモデルと一致しており、満期までの期間に依存している。(しかしながら、A(t,T)はtime-homogeneousではなく、tとTに依存している。A(t,T)を解くと以下の式になる。

・・・(7.7)

0時点の初期価格は、P(0,T)で与えられるので、(7.5)式の債券価格関数を計算するには、以下の式が必要となる。

・・・(7.8)

(7.8)式の対数を取り、(7.7)からA(0,T)を代入することで、以下の式を得る。

・・・(7.9)

Tに関して微分することで、以下の式を得る。

・・・(7.10)

Tに関するの微分係数が常に正であるので、は全てのtに関して正である必要があり、forward-rateカーブは以下の等式を全ての、T>0に対して満たす必要がある。

・・・(7.11)

全てのforward-rateカーブは上記の式を満たさないので、CIRのmean-calibration手法は常に適用できるわけではなく、これはHJMと異なる点である。。

最後に、有限時点下でのshort-rateとforward rateのunconditional volatilityはtime-inhomogeneousになる事が分かった。short-rateとforward rateのconditional volatility は長期平均に依存していなくても、これらの変数のunconditional volatilityはCIRmean-calibrated modelでは、に依存してしまう。オプション行使日において、金利デリバティブの価格はshort rateのunconditional volatilityに高い感応度があるので、unconditional volatilityはCIRmean-calibrated modelにとって課題である。

Preference-free CIR+ and CIR++ Model

Fundamental CIRモデルに対応するsingle-plusモデルは、実確率下での債券価格過程から特定される外生要素を含んだpreference freeである。

・・・(7.12)

ここで、、、である。

Z(t)はwinner 過程、は瞬間的な債券のリターン、は瞬間的な債券のボラティリティであり、満期までの残存時間で表されており、Y(t)は状態変数、aとは負でない定数である。実確率下でshort-rateを特定するFundamental CIRモデルとは異なり、CIR+モデルは、実確率の下で債券価格過程を外生的に特定する。

(7.12)方程式の確率過程は、に存在する全てのT日程である満期の債券に対してsingle-factorである事を仮定している。Single-factorの仮定を説明した4章のように、２つのゼロクーポン債からなるヘッジポートフォリオは次の間隔の無リスクスリターンを再構築する際に用いられる。そのようなヘッジポートフォリオの構築の結果、債券のボラティリティから計算される超過リターンは全ての債券に対して等しいことになる。

・・・(7.14)

ここで。は金利リスクの市場価格であり、r(t)の非線形関数を意味する一般的なmannerから定義されるz、そしてそのほかのt時点の状態変数で表される。しかしは全てのの満期Tにおいて状態変数と独立である必要がある。(7.12)方程式に(7.14)式を代入することで測度を変換すると、以下の式を得る。

・・・(7.15)

ギルサノフの定理を用いることでリスク中立確率過程下でのWiｎner過程は以下で表される。

ここで、はT日付に対するtの瞬間的なforward-rateを導入する。(7.16)の確率積分を用いて満期に対する債券価格の対数の偏微分を行うことで、ｔ瞬間forward-rateは以下の式でかける。

　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　・・・(7.17)

ここｔで、f(0,T)は0時点の瞬間的なforward-rateと定義できる。Short-rate r(t)=f(t,t)であり、（７．１７）のT-tと置くと以下の式になる。

・・・(7.18)

ここで、(7.18)式には、MPRSが出現せず、preference freeモデルのバリュエ―ションとなっている。CIR+モデルでは、short-rate過程にtime-homogeneousが必要とされるので、０時点のforward-rateカーブは以下の関数形にフィットする必要がある。

・・・(7.19)

(7.19)式より、特定の関数形のみshort-rate過程がtime-homogeneousになる事が分かる。

(7.19)式の関数形状は、４つのパラメータに依存している。(また状態変数Y(0)も(7.12)式より初期時点の債券ボラティリティによって定義される。（７．１８）式を(7.19)式に代入することで、リスク中立下のshort-rateは以下で書ける。

・・・(7.20)

の仮定により、リスク中立下での状態変数の確率過程は以下の式となる。

・・・(7.21)

preference-free・time-inhomogeneousなCIR++モデルは外生的な実確率下での債券価格過程を与えることで、そして、CIR+モデルでのアプローチを利用してforward-rateを用いて導出できる。CIR++モデルは、特定のforward-rateを用いることで、mean-calibratedCIRモデルの代わりとなる。（7.12）～(7.19)の方程式は、パラメータをと書きかえる事で、CIR++モデルとなる。（７．１９）式のパラメータをと書きかえることで、以下の式が成り立つ。

・・・（7.22）

状態変数Y(t)のリスク中立確率過程は、CIR++モデルとCIRモデルにおいて同じ形となり、(7.21)式で表される。しかしながら、、（７．２１）、（７．２２）式を用いることで、CIR++モデルのリスク中立のshort-rateは以下で表される。

・・・(7.23)

A Common Notational Framework

残りの章では、CIR.CIR+.CIR++モデルに対してa,bの代わりに,の表記を用いる事にする。もちろんfundamentalCIRやpreference-free CIR+/CIR++モデルによって,の解釈が異なる。Fundamental CIRにおいて、６章の(6.26)にあるようにMPRSはshort-rate過程の実確率下でのやmに関連している。実確率下での、short-rateの蓋世的な特徴に基づいてfundamental CIRは成り立っているので、式の中に必ずMPRSが入る。他方では、CIR+/CIR++モデルでは、実確率下での債券価格過程の蓋世的な特定に基づいている。CIR+モデルの下でのパラメータ,,とと初期時点の状態変数Y(0)は、以下の２点に用いられる。①債券ボラティリティ関数の特定、②0時点の債券価格にフぃティングさせることである。CIR++モデルは、forward-rateカーブのf(0,T)の形状にフィットさせることである。

この後は、リスク中立過程Y(t)は、a,bの代わりに,を用いた一般的な形状であると考える。実確率下で状態変数の定常性が必要とするには経済的な理由があるが、強い理論的な合理性は、リスク中立下での定常性の必要性はない。リスク中立下での、爆発的な状態変数過程を導く負の価値の平均回帰性も許している。９章で見せるように、リスク中立下での爆発的な平方根の確率過程は、金利デリバティブを評価する際に有効である。

Probability Density and the Unconditional Moments

(7.2)式で定義されている、Y(t)のリスク中立下での状態変数を考える。S時点における、ｔ時の状態変数のリスク中立確率過程下での密度関数は以下で表される。

ここで,,v=cr(S),

または、qオーダーのmodified Bessel functionである。分布関数は、noncentral chi-square分布に従う。（詳しくは6章で実施）

t時点のY(S)の平均と分散は以下で表される。

・・・(7.25)

ここで、である。(7.25)式は、とが生の場合と負の場合は有効である。両者のケースともに、momentは有限時間aの時間間隔の下で有限値となる。負のとの場合は、無限時間の中では無限大のunconditional meanと　varianceとなる。これは経済的には問題がなく、なぜならば実確率下では、状態変数は、定常過程に従うからである。またリスク中立確率過程下でのみ、無限時間の中で、無限のunconditional meanと　varianceを取るexplosiveCIR+やCIR++モデルと異なり、良く使われるpreference-freeモデルは、実確率・リスク中立確率下で無限時間の中で、無限大のunconditional meanと　varianceを許している。たとえばHJMのforward rateが以下に従うとする。

・・・（７．２６）

ここで、・・・（７．２７）

Kの有限的の正の値を取る仮定は、無裁定条件に必要である。

この過程の漸近的なunconditional meanとvarianceは、実確率・リスク中立確率下で共に無限値をとる。興味深いことに、CIR+とCIR++モデルの下でのforward rateの無限の満期は、はどんな有限期間においても、一定である。

の表記を用いることで、CIR++モデルの、リスク中立下でのshort-rateの確率過程は、以下で表される。

・・・(7.28)

CIR++モデルでは、Short-rateのボラティリティ水準が、Y(t)の状態変数の水準によって決定される。また、Short-rateのconditional volatilityとunconditional volatility はtime-homogeneousとなる。Y(t)がtime-homogeneousであるため、conditional volatilityもtime-homogeneousとなる。S>tの時、ｒ（ｔ）によって与えられるr(S)のunconditional volatilityは(7.1)を用いることで、以下のように書ける。

・・・(7.29)

Y(t)がtime-homogeneous過程に従うので、Y(t)によって与えられたY(s)のunconditional volatilityもtime-homogeneousとなる。つまり、r(t)が与えられたr(S)もtime-homogeneousとなる。CIR++モデルとは異なり、(7.3)式で与えられるmean-calibrated CIRモデルでは、長期平均が変化するので、short-rate過程のunconditional volatility はtime –homogeneousとならない。

Bond Price Solution

ここでは初めに、CIR++モデルを用いて債券価格を導出した後に、の仮定下でCIR+に関する価格式を考える。ＣＩＲ++モデルにおいて、r(t)と状態変数Y(t)の関係式がaffineであるために、債券価格の解は以下の式で表される。

・・・(7.30)

・・・(7.31)

制約式として、A(0)=B(0)=0があり、定義からH(t,T)=0

債券価格はY(t),とｔの関数であるとし、Y(t)のリスク中立確率過程が(7.2)に従い、short-rate過程が(7.1)に従うとすると、債券価格のPDEはIto’slemmaを用いて導出すうｒ事ができる。(7.30)を用いて債券価格の偏微分し、ＰＤＥに代入することで、以下の式を得る。

・・・(7.３２)

ここで、fundamental CIRモデルと上記の式が一致しているので、の式は以前と同じ式で表される。

・・・（７．３3）

・・・（７．３４）

観測される初期時点の債券価格から(7.30)を計算するために、0時点の初期価格の対数を取る

・・・(7.35)

Tに関して微分を行い整理をする。

・・・(7.36)

(7.32)と(7.36)方程式からA(T),B(T)の偏微分を代入しTをtに置き換える。

・・・(7.37)

ここで、である。(7.37)式は、(7.22)式と等しい。であり、Y(t)は、負にならないので、short rateが負になるのは、が負の値を取るときである。カリブレーションを行うと、現実的な値は正にとどまることを確認している。あるtに関して、が負であるか決定する重要な要因として、初期時点Y(0)の価値と、フォワードレートのf(0,ｔ)の形状である。

(7.31)式のの積分として定義されているH(t,T)はCIR++モデル下において、以下のように書ける。

・・・(7.38)

CIR+モデル下では、であるので、(7.37)式が以下のように記載できる。

・・・(7.39)

いいかえると、ＣＩＲ＋モデルによるf(t,T)はtime-homogeneousであり、Y(t)を含んでいる。ＣＩＲ+モデル下でのリスク中立パラメータは、MPRと独立した債券の市場価格や金利デリバティブのcross sectionから計算されるので、fundamental CIR modelよりフィッティングの精度は高い。さらに、インプライドフォワードレートと観測フォワードレートのフィッティングを上げるためには、3,4のファクターを用いたmultiple-factor single plus modelが良い。

CIR+モデルのH（ｔ、Ｔ）関数は以下で表される。

・・・(7.40)