Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Algèbre Générale

2 Séries numériques et familles sommables

3 Probabilités sur un univers dénombrable

4 Calcul matriciel

5 Réduction des endomorphismes

Solution 5.1. *Si on a (i), soit x un vecteur propre associé à $\rho(u) = \rho e^{i\theta}$. On a $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$ et comme $x \neq 0$, on a $\rho(u) \leqslant |||\rho(u)||| < 1$ d'où (ii).*

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford $u = n + d$ avec n nilpotent, d diagonalisable et $dn = nd$. Soit $m = \dim(E)$. Pour tout $p \geqslant m$, on a

$$u^{p}) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0}$$

En effet, on a $k \geqslant m-1$ fixé, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\binom{p}{k} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

car $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et

$$\binom{p}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\rho(u)^p}\right)$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit x un vecteur propré associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc en particulier, $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, donc $\rho(u)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\rho(u) \geqslant 0$ donc $\rho(u) < 1$. Posons encore $u = d + n$ la décomposition de Dunford de u. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ base de E dans laquelle les coefficients de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$ sont en module $\leqslant \varepsilon$. Définissons sur E

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \right\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|$$

Soit $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ triangulaire supérieure avec $m_{ii} = \lambda_i$ et pour tout $j \neq i$, $|m_{i,j}| < \varepsilon$. Soit donc $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathbb{C}^m$, on a

$$\|Mx\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^{m} m_{i,j} x_j \right|}_{(|\lambda_i| + (m-1)\varepsilon)\|x\|_\infty}$$

donc

$$|||u||| \leqslant \underbrace{\rho(u)}_{<1} + (m-1)\varepsilon$$

et on choisit

$$\varepsilon < \underbrace{\frac{1-\rho(u)}{m-1}}_{>0}$$

d'où $|||u||| < 1$ et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence.

Remarque 5.1. $u \mapsto \rho(u)$ n'est pas une norme car pour u nilpotente non nulle, $\rho(u) = 0$.

Solution 5.2. *Supposons (i), soit Y un vecteur propre de A avec $AY = \lambda Y$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, BA^kY = \lambda^k BY$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^{k_0}BY \neq 0$ et $BY \neq 0$ donc on a (ii).*

Si (ii), supposons qu'il existe $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\varphi = 0$. On note

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$$

avec les λ_i distincts. Alors $Y = \sum_{i=1}^r Y_i$ où $Y_i \in \ker(A-\lambda_i I_n)$. Il existe $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ tel que $Y_{i_0} \neq 0$ car $Y \neq 0$. On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$B\exp(tA)Y = \sum_{i=1}^{r} B\exp(t\lambda_i)Y_i = 0$$

Pour tout $k \in \{0,\dots,r-1\}$, on a $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^r B\lambda_i^k \exp(t\lambda_i)Y_i = 0$. Pour $t = 0$ on a $\sum_{i=1}^r \lambda_i^k BY_i = 0$ ce qui, pour $t = 0$, donne le système

$$\begin{cases} BY_1 + \cdots + BY_r & = & 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \cdots + \lambda_r BY_r = 0 & & \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{r-1}BY_1 + \cdots + \lambda_r^{r-1}BY_r & = & 0 \end{cases}$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$, on a donc $\sum_{i=1}^r P(\lambda_i)BY_i = 0$. Pour $i \in \{0,\dots,r-1\}$ et $P = \prod_{i\neq j}\frac{(X-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$, on obtient pour tout $i \in \{1,\dots,r\}, BY_i = 0$. En particulier, $BY_{i_0} = 0$ et Y_{i_0} est un vecteur propre de A car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).

Soit $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, supposons que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $BA^kY = 0$. Soit $k \geqslant n$, il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$X^k = Q_k\chi_A + R_k$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc $A^k = R_k(A)$ *d'où* $BA^kY = BR_k(A)Y = 0$*. Alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} B\exp(tA)Y &= B\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kA^k}{k!}Y \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k(BA^kY)}{k!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence.

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. *A $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & x\cos(t) + y\sin(2t) \end{array}$$

   est bornée, donc le sup *sur $\mathbb{R}$ existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au* sup *sur $\mathbb{R}$.*

2. *Si $|x| + |y| \leqslant 1$, alors $N(x, y) \leqslant 1$ donc on a la première inclusion.*

   Si $N(x, y) \leqslant 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leqslant 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leqslant \left| x\frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x\frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leqslant 2$$

   et donc $|y| \leqslant 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. *On fixe $(x, y) \in S_N(0, 1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π-périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limite à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ.*

   On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leqslant x|\cos(t)| + y|\sin(2t)| = |\varphi(-t)|$$

   et $-t \in [0, \pi]$. Donc le sup *est atteint sur $[0, \pi]$.*

   On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leqslant \varphi(t) = x\underbrace{\cos(t)}_{\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]} + y\sin(2t) \leqslant x\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]} + y\sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t)$$

   Donc le sup *est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le* sup *(existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le* sup *sur $\mathbb{R}$ qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.*

   On a donc $x\cos(t_0) + y\sin(2t_0) = 1$ et $-x\sin(t_0) + 2y\cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0, en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.

Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ *tel que* x *et* y *s'écrivent de la façon demandée, alors* t_0 *est l'unique point satisfaisant* $\varphi(t_0) = 1$ *et* $\varphi'(t_0) = 0$*. Mais alors le* sup *de* φ *sur* $[0, \frac{\pi}{4}]$ *est atteint en un point* t_1 *qui vérifie les mêmes choses, donc* $t_1 = t_0$ *d'où* $N(x, y) = 1$.

Solution 6.2.

1. *Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur* E

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (f, g) & \mapsto & f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \end{array}$$

   Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$ *et on utilise l'inégalité de Minkowski.*

2. *Pour* $x \in [0, 1]$*, écrire* $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$*, utiliser Cauchy-Schwarz avec* f' *et* 1 *puis que* $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a + b}$*, pour enfin passer au* sup *sur* x.

3. *Utiliser, pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f_n : & [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^n \end{array}$$

Solution 6.3. *Si* f *est ouverte,* $f(\mathbb{R}^n)$ *est un sous-espace vectoriel ouvert de* R^p*. Donc* f *est surjective.*

Si f *est surjective, on prend* F *un supplémentaire de* $\ker(f)$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *avec* $\dim(\ker(f)) = n - p$ *et* $\dim(F) = p$*. Soit* $(e_1, \ldots, e_p)$ *une base de* F *et* $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ *une base de* $\ker(f)$*. On vérifie que* $(f(e_1, \ldots, f(e_p))$ *est une base de* $\mathbb{R}^p$*. On définit*

$$\begin{array}{rccl} N_1 : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \sum_i^n x_i e_i & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^n$ *et*

$$\begin{array}{rccl} N_2 : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & \sum_i^p y_i f(e_i) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |y_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^p$.

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $y_0 \in f(\Theta)$, il existe $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. Comme Θ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta$$

Soit $y = \sum_{i=}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, si $N_2(y - y_0) < r_0$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \overset{def}{=} f(x)$$

avec $N_1(x - x_0) = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. Ainsi $x \in \Theta$ et $y \in f(\Theta)$, donc $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ et $f(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.4.

1. *Classique.*

2. $$|f(x)| \leqslant |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leqslant |f(0)| + \kappa(f)x \leqslant N(f)$$

   car $x \leqslant 1$, donc $N_\infty \leqslant N$. Pour la non-équivalence, prendre

   $$\begin{array}{rccl} f_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^n \end{array}$$

3. *On a $|f(0)| \leqslant N_\infty(f)$ donc $N(f) \leqslant N'(f)$. Ensuite, $N_\infty \leqslant N$ donne $N' \leqslant N + \kappa \leqslant 2N$. Donc N est N' sont équivalentes.*

Remarque 6.1. Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend $(e_i)_{i \in I}$ une base (de Hamel), $J = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ dénombrable. Si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, on peut vérifier que

$$N_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n|x_{i_{2n}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. *Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$. Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$. Alors*

$$\left\|T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right) - I_n\right\|_\infty = \left|\frac{\lambda}{p}\right| < \alpha$$

donc $T_{i,j}(\lambda) \in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left(T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)^p \in G$$

Soit $\delta = \rho e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}} = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$.

On a alors

$$\left\|D_n\left(\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}}\right) - I_n\right\|_\infty < \alpha$$

donc $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}})^p \in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G = GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 6.2. C'est faux sur $\mathbb{R}$. Contre-exemple : matrices de déterminant positif.

Solution 6.6. *Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $h \in E$ avec $\|h\| \leqslant \alpha$ et $\|f(h)\| > \varepsilon_0$. On prends $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\| \leqslant 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leqslant M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x \in E$,*

$$\lim_{\|h\|\to 0} f(x+h) = \lim_{\|h\|\to 0} f(x) + f(h) = f(x)$$

donc f est continue.

On a $f(px) = p(fx)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que

$\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lambda$. *Comme f est continue, on a*

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lim_{n\to+\infty} f(r_n x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} r_n f(x) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Remarque 6.3. Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ $(0 \in I)$. On définie

$$f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\Big) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i\in I\setminus\{0\}} \lambda_i e_i$$

f vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \to \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. *On a $\alpha(A) \subset \overline{A}$ donc $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Comme $\alpha(A)$ est un ouvert inclus dans $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.*
2. *Si $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$, on montre aussi que $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. On a donc $A, \overline{A}, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ et c'est tout.*

Solution 6.8.

1. *Si $d_A = d_B$,*

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B}$$

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_i\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de l'inf). Il existe $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de la fermeture). Ainsi,

$$d_A(x) \leqslant \|x - a_2\| \leqslant \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$. Comme $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leqslant d_A$, on a $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.

2. *Soit $x \in A$, on a $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leqslant \rho(A,B)$ donc $\sup\limits_{x\in A} d_B(x) \leqslant \rho(A,B)$, de même pour $\sup\limits_{y\in B} d_A(y)$ donc on on a un première inégalité.*

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x-a\| \leqslant d_A(x)+\varepsilon$ et $\|x-b\| \leqslant d_B(x)+\varepsilon$. On a alors

$$d_A(x) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|a-b\| + \|x-b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A,B)$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leqslant d_B(x) + \alpha(A,B)$. De même, $d_B(x) \leqslant d_A(x) + \alpha(A,B)$ donc $\rho(A,B) \leqslant \alpha(A,B)$.

Solution 6.9.

1. *Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\lim\limits_{z\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \to x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur $\mathbb{C}$, on a $y = P(x) \in P(F)$.*

2. *Soit Θ un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $y \in P(\Theta), \exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x,r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x - x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominatrice de P. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi*

$$|Q(x)| = |y - y'| \geqslant |a|r^n$$

Par contraposée, si $|y - y'| \leqslant \frac{|a|r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x' - x| < r$.Ainsi, $x' \in B(x,r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.10.

1. *Si $P \notin \mathcal{S}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$ et $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$. Par contraposée, si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$,alors $P \in \mathcal{S}$.*

   Réciproquement, si $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$ avec $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ réels, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^{n} |a - \lambda_i + ib| \geqslant |b|^n$$

2. *Soit $(P_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $P_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} P \in F$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|P_p(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc quand $p \to +\infty$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc $P \in \mathcal{S}$ et S est fermé.*

3. *Soit* $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite de matrice trigonalisable sur* $\mathbb{R}$ *qui converge vers* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Ib bite* χ_p *le polynôme caractéristique de* M_p. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $\chi_p \in \mathcal{S}$ *et* $\chi_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \chi_M$. *Comme* $\mathcal{S}$ *est fermé,* $\chi_M \in \mathcal{S}$ *et* M *est trigonalisable sur* $\mathbb{R}$.

Solution 6.11.

1. φ *est linéaire et* $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n + = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$.

   Si φ *est bijective, elle est surjective et il existe* $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ *tel que* $UA + BV = 1$ *et d'après le théorème de Bézout, on a* $A \wedge B = 1$.

   Réciproquement, si φ *n'est pas surjective, il existe* $(U,V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \setminus \{(0,0)\}$ *tel que* $\varphi(U,V) = 0$ *d'où* $AU = -BV$. *Soit* $\delta = A \wedge B$, *on écrit* $A = \delta A_1$ *et* $B = \delta B_1$ *avec* $A_1 \wedge B_1 = 1$ *et on a* $A_1 U = -B_1 V$. *D'après le théorème de Gauss, on a* $A_1 \mid V$ *et* $B_1 \mid U$. *Si* $U = 0$, *on a* $V = 0$ *et de même si* $V = 0$, *on a* $U = 0$. *On peut donc supposer* $U \neq 0$ *et* $V \neq 0$, *et on a alors* $\deg(A_1) \leqslant \deg(V) \leqslant n - 1 < n = \deg(A)$ *mais* $A = \delta A_1$ *donc* $\deg(\delta) \geqslant 1$ *et* $A \wedge B \neq 1$.

2. Φ *est continue car* $R_{A,B}$ *est un polynôme en les coefficients de* A *et* B.

3. *Comme on est dans* $\mathbb{C}$, $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$. $\Phi_{P,P'}$ *est continue d'après la question précédente,* $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$ *donc* Δ *est ouvert.*

   Sur $\mathbb{R}$, *on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si* $P \wedge P' = 1$ *(contre-exemple :* $P = X^2 + 1$*). Dans* $\mathbb{R}_3[X]$, X *est scindé à racines simples et* $X(1+\varepsilon X)^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} X$ *et* $-\frac{1}{\varepsilon}$ *est racine double, donc* Δ *n'est pas ouvert.*

Remarque 6.4. On peut cependant considérer

$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\}$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ sont les racines (distinctes) de R sur $\mathbb{R}$, on choisit $\alpha_0 \in]-\infty, \lambda_1$, $\alpha_n \in]\lambda_n, +\infty[$ et $\alpha_i \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ si $i = 1, \ldots, n-1$.

Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$ (car les racines de P provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ & Q & \mapsto & (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0\leqslant k\leqslant n-1} \end{array}$$

Ψ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$ qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que si $\|P-Q\| < r$, alors $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$. Donc Q change n fois de signe, et admet au moins n racines. Mais $\deg(Q) = n$, donc Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc Δ_n est ouvert dans $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$.

Remarque 6.5.

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ diagonalisable à racines simples}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M \text{ sciné à racines simples}\}$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et c'est aussi vrai sur $\mathbb{R}$.

Solution 6.12.

1. *Soit*
$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^n \end{array}$$
f est continue et $F = f^{-1}(\{0\})$ donc $F = \overline{F}$.

   Soit $M_0 \in F$, X^n annule M_0 donc M_0 est trigonalisable : on écrit M_0 dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors M_ε la même matrice dans la même base en rajoutant simplement ε en première position de la diagonale. Alors $M_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} M_0$ et $M_\varepsilon \notin F$ donc $\mathring{F} = \emptyset$. Notons que cela signifie que F est dense.

2. *La norme dérive du produit scalaire $(A|B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\mathsf{T} B)$. Soit $M \in F$, on a $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$. On a $(M|I_n) = \mathrm{Tr}(M) = 0$ car M est nilpotente. Donc $\|M - I_n\|^2$ est minimale pour $\|M\|^2$ minimale, donc pour $M = 0 \in F$. Donc $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$ (et la distance est atteinte pour $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).*

Solution 6.13.

1. *$A \mapsto \det(A)$ est continue et $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est donc ouvert. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = A - \frac{1}{p+1} I_n$. Comme $\mathrm{Sp}(A)$ est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \geqslant N$, $\frac{1}{p+1} \notin \mathrm{Sp}(A)$. Donc pour tout $p \geqslant N$, $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$, et $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$ donc $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

2. *On fixe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On écrit $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Comme, à B fixé, $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a le résultat par densité.*

Solution 6.14.

1. *On a* $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u) \circ v_p = \frac{1}{p}(id_E - u^p)$*, donc* $\|v_p \circ (id_E - u)\| \leqslant \frac{1}{p}(\|id_E\| + \|u^p\|) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.

   Soit $x \in \ker(u - id_E) \cap \mathrm{Im}(u - id_E)$*, on a* $u(x) = x$ *et il existe* $y \in E$*,* $x = (u - id_E)(y)$*. On a* $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$ *et* $v_p(x) = v_p \circ (u - id_E)(y) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ *d'où* $x = 0$*. Le théorème du rang permet de conclure.*

2. *Soit* $x \in E$*, on écrit* $x = x_1 + x_2$ *avec* $\Pi(x) = x_1$ *et* $x_2 = (u - id_E)(y_2)$*. Alors* $v_p(x) = x_1 + v_p \circ (u - id_E)(y_2) \xrightarrow[p \to +\infty]{} x_1 = \Pi(x)$.

Solution 6.15.

1. *Pour tout* $x \in A$*,* $f_n(x) \in A$ *car* A *est convexe. Soit* $(x, y) \in A^2$*, on a*

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|f(x) - f(y)\| \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|x - y\|$$

   Donc f_n *est* $(1 - \frac{1}{n})$*-lipschitzienne. On forme*

$$\begin{array}{rccc} g_n : & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|f_n(x) - x\| \end{array}$$

   qui est continue. Soit $x_n \in A$ *telle que* $g_n(x_n) = \min_{x \in A} g_n(x)$ *(existe car* A *est compact et* g_n *continue). On a* $x_n \in A$*, d'où* $f_n(x_n) \in A$ *et*

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|f_n(x_n) - x_n\| = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)g_n(x_n)$$

   Si $g_n(x_n) \neq 0$*, alors on aurait* $g_n(f(x_n)) < g_n(x_n)$ *ce qui n'est pas possible. Donc* $g_n(x_n) = 0$ *et* $f_n(x_n) = x_n$*.*

   Soit y_n *un autre point fixe, on a*

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|x_n - y_n\|$$

   donc $x_n = y_n$*.*

2. *On a* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *et on extrait (car* A *est compact) et on a*

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in A$$

On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)} f(x_0)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\right) f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$$

par continuité de f. Donc $f(x) = x$.

3. *Soit $(x, y) \in A^2$, points fixes de f, et $t \in [0, 1]$, on pose $z = tx + (1-t)y$. On a*

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|f(x) - f(y)\| \\ &\leqslant \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| \\ &\leqslant \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= (1-t)\|x - y\| + t\|x - y\| \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

On a donc égalité partout : $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$ et $\|f(x) - f(z)\| = \|x - z\|$, $\|f(z) - f(y)\| = \|z - y\|$ car f est 1-lipschitzienne.

Comme la norme est euclidienne, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) - f(z) = \lambda(f(z) - f(y))$ d'où $f(x) + \lambda f(y) = (\lambda+1) f(z)$ d'où $f(z) = \frac{x+\lambda y}{\lambda+1} = t'x + (1-t')y$ avec $t' = \frac{1}{\lambda+1} \in [0, 1]$. En reportant, on a

$$\|f(x) - f(z))\| = \|x - t'x - (1-t')y\| = (1-t')\|x - y\| = \|x - z\| = (1-t)\|x - y\|$$

Si $x \neq y$, alors $t = t'$ et $f(z) = tx + (1-t)y = z$.

4. *Soit dans $\mathbb{R}^2$, $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} = [-1, 1]^2 = A$. Soit*

$$\begin{array}{cccc} f : & A & \to & A \\ & (x, y) & \mapsto & (x, |x|) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_\infty &= \|(x_1, |x_1|)(x_2, |x_2|)\|_\infty \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, \big||x_1| - |x_2|\big|\} \\ &= |x_1 - x_2| \\ &\leqslant \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty \end{aligned}$$

Donc f est 1-lipschitzienne, on a $f(x, y) = (y, x)$ si et seulement si $y = |x|$. Donc ici, F n'est pas convexe.

Solution 6.16.

1. *On a pour tout* $(x,y)\in E^2$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ *et par récurrence, pour tout* $n\in\mathbb{Z}$, $f(nx)=nf(x)$. *Pour* $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, *on a* $f(qrx)=qf(rx)=f(px)=pf(x)$ *donc* $f(rx)=rf(x)$. *Par densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et continuité de* f, *on a pour tout* $\lambda\in\mathbb{R}$, $f(\lambda x)=\lambda f(x)$. *Donc* f *est linéaire.*

   Pour $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, *cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans* $\mathbb{C}$.

2. *On étudie la série, pour* x *fixé de terme général*

$$\|v_{n+1}(x)-v_n(x)\|=\frac{1}{2^n}\|f(2^{n+1}x)-2f(2^nx)\|\leqslant\frac{M}{2^{n+1}}$$

   qui est donc convergente. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

3. *On a* $v_0(x)=f(x)$, *donc* $\sum_{n=0}^{+\infty}v_{n+1}(x)-v_n(x)=g(x)-f(x)$. f *étant continue,* v_n *l'est aussi, et pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *comme pour tout* $x\in E$, $\|(v_{n+1}-v_n)(x)\|\leqslant\frac{M}{2^{n+1}}$, *donc* g *est continue.*

4. *On a, pour tout* $(x,y)\in E^2$,

$$\|v_n(x+y)-v_n(x)-v_n(y)\|=\|\frac{1}{2^n}f(2^n(x+y))-\frac{1}{2^n}(f(2^nx)+f(2^ny))\|\leqslant\frac{M}{2^n}$$

   Donc quand $n\to+\infty$, $g(x+y)=g(x)+g(y)$.

   On a pour tout $x\in E$,

$$\|g(x)-f(x)\|=\left\|\sum_{n=0}^{+\infty}v_{n+1}(x)-v_n(x)\right\|\|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}\|v_{n+1}(x)-v_n(x)\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M}{2^n}=M$$

   Soit maintenant h *linéaire continue telle que* $h-f$ *soit bornée, soit* $M'=\sup_{x\in E}\|h(x)-f(x)\|$. *On a donc*

$$\|v_n(x)-h(x)\|=\left\|\frac{1}{2^n}f(2^nx)-\frac{1}{2^n}h(2^nx)\right\|\leqslant\frac{M'}{2^n}$$

   car h *est linéaire. Donc quand* $n\to+\infty$, $g(x)=h(x)$ *car* $\lim_{n\to+\infty}v_n(x)=g(x)$.

Solution 6.17. *En particulier, pour* $t=f(0)$, $f^{-1}(\{f(0)\})=\{x\in E\mid f(x)=f(0)\}$ *est borné (car compact). Donc il existe* A *tel que* $f^{-1}(\{f(0)\})\subset\overline{B(0,A)}$. *Par contraposée, pour tout* $x\in E$, *si* $\|x\|>A$, *alors* $f(x)\neq f(0)$.

On montre alors que $E \setminus \overline{B(0,A)}$ est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout $x \in E \setminus \overline{B(0,A)}$, $f(x) > f(0)$ soit $f(x) < f(0)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on se place dans le cas $f(x) > f(0)$. Comme on est en dimension finie sur $\overline{B(0,A)}$ compact, f atteint son minimum et ce minimum est plus petit que $f(0)$, c'est donc un minimum global.

Remarque 6.6. C'est faux pour $n = 1$. Contre-exemple : $f = id_{\mathbb{R}}$.

Solution 6.18. *Si c'était le cas, on prend un cercle $\mathcal{C}$ compact (et connexe par arcs). $f(\mathcal{C})$ est compact connexe par arc dans $\mathbb{R}$. On note $f(\mathcal{C}) = [a,b]$ (avec $a < b$ car f injective). Si $x \in \mathcal{C}$ est tel que $f(x) = \frac{a+b}{2}$, on $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a,b] \setminus \left\{\dfrac{a+b}{2}\right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$ donc une telle fonction n'existe pas.*

Solution 6.19.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_{l^1} = 1$ et $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leqslant |||\varphi|||$ donc $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On note $M = \sup |K_n| \leqslant |||\varphi|||$.*

   Soit maintenant $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

   $$\left\| u - \sum_{n=0}^{N} u_n e_n \right\|_1 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

   (reste d'une série convergente). Par continuité de φ, on a donc

   $$|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n||K_n| \leqslant M\|u\|_1$$

   Ainsi, $|||\varphi||| \leqslant M$ et donc $|||\varphi||| = M$.

2. *F est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective.*

   Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. On définit

   $$\begin{array}{rccc} \varphi : & l^1 & \to & \mathbb{R} \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{array}$$

   Elle est bien définie car $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle est linéaire, et continue car $|\varphi(u)| \leqslant \|(K_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$.

   Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(e_n) = K_n$. Donc $F(\varphi) = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et F est surjective. Donc F est une isométrie bijective et le dual topologique de l^1 est équivalent à l^∞.

Solution 6.20.

1. *Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $K = \ker(\varphi)$/ Si F est dense, φ est discontinue. Soit $(a, b) \in (E \setminus H)^2$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $b - a$ (existe car H est dense). La suite $(a + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(a + x_n) = \varphi(a) \neq 0$, et pour $t \in [0, 1]$, $\varphi(t(a+x_n)+(1-t)(a+x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$. Donc $[a+x_n, a+x_{n+1}] \subset E\setminus H$. Soit $\gamma : [0, 1] \to E \setminus H$ telle que*

$$\begin{cases} \gamma(t) &= \alpha_n t + \beta_n \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H \quad \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) &= b \\ \gamma(t) &= a + tx_0 \quad \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

On cherche à définir α_n et β_n : on veut $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = a + x_n$ et $\gamma(1 - \frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$ (pour la continuité en se raccordant au x_n). En résolvant le système, on trouve $\alpha_n = n(n + 1)(x_n - x_{n+1})$ et $\beta_n = a + x_n - (n - 1)(n + 1)(x_n - x_{n+1})$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$: $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant N$, pour tout $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}[$, $\gamma(t) \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$ par convexité de la boule. Donc $\lim\limits_{t\to 1} \gamma(t) = b$ et γ est continue. Donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

2. *Soit φ une forme linéaire telle que $\ker(f) = H$ est fermé. Alors φ est continue (à redémontrer). Soit $x \in E \setminus H$, on a $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $E \setminus H$ était connexe par arcs, φ s'annulerait sur $E \setminus H$ ce qui n'est pas vrai. Donc $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.*

3. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si H est dense alors $E \setminus H$ est connexe par arc d'après la première question. Si H est fermé, soit φ une forme linéaire continue telle que $\ker(f) = H$. Soit $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$.*
   - *Si $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_-^*$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1 - t)x_2}_{\in E\setminus H}) \neq 0$ et on peut relier directement x_1 et x_2.*
   - *Sinon, il existe $\theta \in \mathbb{R}, (\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\varphi(x_1) = \rho e^{i\theta}$ et $\varphi(x_2) = \rho' e^{i(\theta+\pi)}$. Alors $x_3 = ix_1$ est tel que $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$ et $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$ (on contourne l'origine par une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$). Par conséquent, on peut utiliser x_3 pour relier x_1 et x_2 donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.*

Solution 6.21. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ((x, \sin(\frac{1}{x}))) \end{array}$$

φ est continue et $\Gamma)\varphi(\mathbb{R}_+^*)$ est connexe par arcs.

On a $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$ avec $\Gamma' = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$. En effet, pour tout $y \in [-1,1]$, on pose $x_k = \frac{1}{\arcsin(y)+2k\pi}$. On a $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ donc $(0,y) = \lim_{k\to=+\infty}(x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \overline{\Gamma}$.

Réciproquement, si $(x,y) \in \overline{\Gamma}$, il existe $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ avec $x = \lim_{k\to+\infty} x_k$ et $y = \lim_{k\to+\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$. Si $x > 0$, par continuité, $y = \sin(\frac{1}{x})$ et $(x,y) \in \Gamma$. Si $x = 0$, $y \in [-1,1]$ donc $(x,y) \in \Gamma'$.

Si $\overline{\Gamma}$ est connexe par arcs, il existe

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0,1] & \to & \overline{\Gamma} \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

continue telle que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. La première projection $t \mapsto x(t)$ est continue avec $x(0) = 0$ et $x(1) = \frac{1}{\pi}$. On définit maintenant $t_1 = \sup\{t \in [0,1] \mid x(t) = 0\}$. Par continuité, $x(t_1) = 0$ et donc $t_1 < 1$. Donc pour tout $t > t_1$, $x(t) > 0$ et $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$ pour $t > t_1$ et $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ avec $y_1 \in [-1,1]$.

Or, -1 et 1 n'appartiennent pas simultanément à $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. On peut supposer que $1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Comme γ est continue, il existe $t_2 > t_1$ tel que pour tout $t \in]t_1, t_2]$, $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Or $x(t_2) > 0$ et $x(t_1) = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $t_0 \in]t_1, t_2]$ tel que $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ ce qui contredit ce qui précède.

Donc $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs.

Solution 6.22.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$ car u_n est le barycentre de $(a, T(a), \ldots, T^n(a))$ et K est convexe. Comme K est compact, on peut extraire $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \in K$. Alors*

$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n)+1}(id_E - T^{\sigma(n)+1})(a)$$

d'où

$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leqslant \frac{1}{\sigma(n)+1} \times 2M \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

avec $M = \sup\limits_{x\in K} \|x\|$ *(existe car* K *est compact donc borné). Par continuité de* T*, on a* $T(u) = u$*.*

2. *Posons* $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$ *fermé car* $K' = K \cap \Big(\underbrace{(id_E - T}_{continu})^{-1}\{0\}\Big)$*. Donc* K' *est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout* $(u_1, u_2) \in K'^2$*, pour tout* $t \in [0,1]$*, par linéarité de* T*, on a*

$$T(tu_1 + (1-t)u_2) = tu_1 + (1-t)u_2$$

donc K' *convexe. De plus, comme* $U \circ T = T \circ U$*, pour tout* $u \in K'$*, on a* $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$ *donc* $U(u) \in K'$*. On applique alors la question 1 à* K' *est il existe* $y \in K' \colon U(y) = y$ *et* $T(y) = y$*.*

Solution 6.23.

1. *C'est le théorème du rang car* $\mathrm{rg}(u) \leqslant n \leqslant p-2$*, et* $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0\}$ *est de dimension* $p-1$ *donc* $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$ *(formule de Grassmann).*

2. *On a*

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i)x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + t\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = x$$

et

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i + t\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$$

Soit $I_+ = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i > 0\}$ *et* $I_- = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i < 0\}$*. On a* $I_+ \neq \emptyset$ *et* $I_- \neq \emptyset$ *car* $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$ *et* $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$*. Soit* $t \geqslant 0$*. Pour tout* $i \in I_+$*,* $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$*. Pour* $i \in I_-$*,* $\lambda_i + t\underbrace{\alpha_i}_{<0} \geqslant 0$ *si et seulement si* $t \leqslant -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$*. Prenons alors*

$$t = \min_{i\in I_-}\Big(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\Big)$$

On au aussi pour tout $i \in I_-$*,* $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$ *et il existe* $i_0 \in I_-$ *tel que* $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$*.*

3. *Par récurrence descendante, on se ramène à n+1 points car si* x *est barycentre de* p *points avec* $p \geqslant n+2$*, alors il est barycentre de* $p-1$ *points.*

4. Soit $A = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ *fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit*

$$\begin{array}{cccc} f: & A \times K^{n+1} & \to & \mathrm{conv}(K) \\ & ((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (x_1, \ldots, x_{n+1})) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array}$$

f *est surjective et continue, donc* $\mathrm{conv}(K)$ *est l'image continue d'un compact donc* $\mathrm{conv}(K)$ *est compact.*

Solution 6.24. *Pour tout* $u \in A_p$, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ *distincts et* u *est diagonalisable. Réciproquement, si* u *est diagonalisable et* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ *alors dans une base la matrice de* u *est diagonale avec des* α_i *(éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc* $u \in A_p$*.*

Si $u \in A_p$*, on écrit donc le polynôme caractéristique de* u

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $0 \leqslant m_i \leqslant \dim(E) = n$ *et* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$*.* $u \mapsto \chi_u$ *est continue. Pour* $(m_1, \ldots, m_r) \in \{0, \ldots, n\}^r$ *tel que* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$*, notons*

$$A_{m_1,\ldots,m_r} = \left\{ u \in A_p \,\middle|\, \chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right.$$

et

$$\Big[u \mapsto \chi_u(A_p)\Big] = \left\{ \bigcup_{(m_1,\ldots,m_r) \in D_{n,r}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\}$$

où

$$D_{n,r} = \{(m_1, \ldots, m_r) \in \{0, \ldots, n\}^r \,\Big|\, \sum_{i=1}^{r} m_i = n\}$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires,
si $(m_1, \ldots, m_r) \neq (m'_1, \ldots, m'_r)$*, alors* $A_{m_1,\ldots,m_r}$ *et* $A_{m'_1,\ldots,m'_r}$ *ne sont pas dans la même composante connexe par arcs car*

$$\left[u \mapsto \chi_u\Big(A_{m_1,\ldots,m_p} \bigcup A_{m'_1,\ldots,m'_r}\Big)\right] = \underbrace{\left\{ \left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\} \bigcup \left\{ \left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m'_i} \right\} \right\}}_{\textit{pas connexe par arcs}}$$

Si $\gamma\colon [0,1] \to A_p$ est continue, $t \mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t) + a_1(t)X + \cdots + a_{n-1}(t)X^{n-1} + X^n$ est continue sur $[0,1]$ et prend un nombre fini de valeurs donc est constante. $a_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.

Soit $u_0 \in A_{m_1,\dots,m_r}$, soit $u \in A_{m_1,\dots,m_r}$, alors il existe une base $\mathcal{B}_0$ base de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$ soit diagonale avec des α_1 sur les m_1 premières lignes de la diagonale, α_2 sur les m_2 lignes suivantes, etc. Soit $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$. M est semblable à M_0 donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PM_0P^{-1}$.

Or $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc il existe $\varphi\colon [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$ continue telle que $\varphi(0) = P$ et $\varphi(1) = I_n$. On pose alors

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & [0,1] & \to & A_{m_1,\dots,m_r} \\ & t & \mapsto & \varphi(t)M_0\varphi^{-1}(t) \end{array}$$

Alors $A_{m_1,\dots,m_r}$ est connexe par arcs.

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \{(m_1,\dots,m_r) \in \{0,\dots,n\}^r \;\Big|\; \sum_{i=1}^{r} m_i = n\}$$

qui vaut $\binom{m+r-1}{r-1}$ possibilités (place n points sur une droite et les séparer avec $r-1$ barres : le nombre de points dans chaque segment donne un m_i, il y a $m+r-1$ possibilités pour placer les $r-1$ barres).

Solution 6.25.

1. *Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $|AX|_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}x_j}_{>0} \geqslant 0$. Si $|AX|_i = 0$ alors pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $\underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j = 0$ donc $x_j = 0$, impossible car $X \neq 0$.*
2. *Si $|AX| = A|X|$. On a pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$,*

   $$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|$$

   donc les $(a_{i,j}x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ ont tous même argument. On prend $\theta = \arg(x_j)$.
3. *K est fermé et borné en dimension finie : c'est un compact. On a $I_x \neq \emptyset$ car $AX \geqslant 0$ donc $0 \in I_x$. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AX - t_kX \geqslant 0$*

donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(AX - t_k X)_i \geqslant 0$ et par passage à la limite, $AX - tX \geqslant 0$ donc I_x est fermé.

Si $t \in I_x$,

$$|tX|_1 = t = \sum_{i=1}^{n} t \underbrace{x_i}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j}_{=(AX)_i} \leqslant n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$$

car $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$. On note $M = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

4. *Pour tout $x \in K$, $\theta(X) \leqslant M$ donc θ est bien borné sur K. Par définition de r_0, il existe $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} \theta(X_k) = r_0$. On note $\theta(X_k) = t_k$. Comme K est compact, il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $X_{\sigma(k)}$ converge vers $X^+ \in K$. A priori, $\theta(X^+) \leqslant r_0$. On a $AX_{\sigma(k)} - t_{\sigma(k)} X_{\sigma(k)} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc par passage à la limite, $AX^+ - r_0 X^+ \geqslant 0$ et donc $r_0 \leqslant \theta(X^+)$ donc $r_0 = \theta(X^+)$.*

5. *Soit $Y = A^+ - r_0 X^+ \geqslant 0$. Si $Y \neq 0$, alors $AY > 0$ d'après la question 1 donc*

$$AY = A \underbrace{(AX^+)}_{>0} - r_0 \underbrace{(AX^+)_{>0}} > 0$$

On a $AY > \varepsilon AX^+$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|AY|_i > \varepsilon |AX^+|_i$ (car $AY > 0$). On pose alors

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|AY|_i}{|AX^+|_i}$$

On a alors $AY - \varepsilon AX^+ > 0$ d'où

$$A \underbrace{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}_{\in K} - (r_0 + \varepsilon) \frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} > 0$$

donc $r_0 + \varepsilon \in I_{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}$ c'est-à-dire

$$r_0 + \varepsilon \leqslant \theta\Big(\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} \Big) \leqslant r_0$$

ce qui est impossible. Nécessairement $Y = 0$.

6. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a*

$$|AV|_i = \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} |v_j| = (A|V|)_i$$

donc $|\lambda| = |AV| \leqslant A|V|$. *De plus,* $|V| \in K$ *donc* $|\lambda| \leqslant \theta(|V|) \leqslant r_0$. *Notons que cela implique que le rayon spectral de* A *est* $\rho(A)$ *est plus petit que* r_0 *et que l'on a même égalité.*

7. *Si* $|\lambda| = r_0$, *on a* $|\lambda| = \theta(|V|) = r_0$ *et d'après la question 5 on a* $A|V| = r_0|V| = |AV|$. *D'après la question 2, il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $V = e^{\mathrm{i}\theta}|V|$. *Or*

$$AV = \lambda V = e^{\mathrm{i}\theta} A|V| = e^{\mathrm{i}\theta} r_0 |V|$$

et comme $|K| \in K, |V| \neq 0$ *et on a donc* $\lambda = r_0$.

8. *Soit* $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *tel que* $\|V\|_1 = 1$ *et* $AV = r_0 V$. *D'après la question précédente, on a* $V = e^{\mathrm{i}\theta}|V|$ *et* $A|V| = r_0|V|$. *Soit alors* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$$

Notons maintenant que si $Y \geqslant 0$ *avec* $Y \neq 0$ *vérifie* $AY = r_0 Y$, *alors* $Y > 0$. *En effet, d'après la première question,* $AY > 0$. *On a* $r_0 \neq 0$ *car sinon* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ *et* $A^n = 0$ *ce qui est impossible car ses coefficients sont strictement positifs. D'où* $Y > 0$.

Ainsi, par définition de X^+, *on a* $X^+ > 0$ *et* $|V| > 0$. *On a alors*

$$(X^+)_i + t|v_i| \geqslant 0$$

si et seulement si

$$t \geqslant -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

On prend

$$t = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

Finalement, on a $X^+ + t|V| \geqslant 0$ *et une de ses coordonnées vaut 0 (car on a pris le minimum sur les* i*). Nécessairement,* $X^+ + t|V| = 0$ *(car* $A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$*) et donc* $|V| \in \mathbb{R}X^+$. *Donc* $V = e^{\mathrm{i}\theta}|V| \in \mathbb{C}X^+$ *et ainsi*

$$\dim(\ker(A - r_0 I_n)) = 1$$

Solution 6.26. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & U \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}$$

On a

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x',y') = |\|x-y\|-\|x'-y'\|| \leqslant \|(x-y)-(x'-y')\| \leqslant \|x-x'\|+\|y-y'\| \leqslant 2\|(x,y)-(x',y')\|_\infty$$

donc φ est continue.

$U \times V$ est compact, donc il existe $(x_1, y_1) \in (U \times V)$ telle que $\varphi(x_1, y_1) = \min_{(x,y)\in U\times V} \varphi(x,y)$. Comme U et V sont disjoints, $x_1 \neq y_1$ et $\varphi(x_1, y_1))d(U,V) > 0$.

Soit $\alpha = \frac{d(U,V)}{3}$. On pose $U' = \{x \in E \mid d(x,U) < \alpha\}$ et $V' = \{x \in E \mid d(x,V) < \alpha\}$. $x \mapsto \|x\|$ est continue car 1-lipschitzienne donc U' est V' sont des ouverts et on a bien $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Soit ensuite $x \in U' \cap V'$, on a $d(x,U) < \alpha$ et $d(x,V) < \alpha$ donc il existe $(u,v) \in U \times V$, $d(x,u) < \alpha$ et $d(x,v) < \alpha$. Alors $d(u,v) \leqslant 2\alpha$ ce qui est absurde. Donc $U' \cap V' = \emptyset$.

Solution 6.27.

1. *f est 1-lipschitzienne donc est continue. On forme*

$$\begin{array}{rccl} g: & K & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x - f(x)\| \end{array}$$

   g est continue, K est compact donc il existe $a \in K$ tel que $g(a) = \min_{x\in K} g(x)$. Si $a \neq f(a)$, alors $\|f(a) - f^2(a)\| = g(f(a)) < \|a - f(a)\| = g(a)$ ce qui est impossible par définition de a. Donc $f(a) = a$. S'il existe $a' \neq a$ tel que $f(a') = a'$, alors $\|f(a)-f(a')\| = \|a - a'\| < \|a - a'\|$ ce qui est impossible. Donc a est unique.

2. *S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = a$ alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\|u_{n+1} - a\| = \|f(u_n) - f(a)\| < \|u_n - a\|$$

   donc la suite $(\|u_n - a\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+$ donc elle converge vers $l \geqslant 0$. Par compacité de K, il existe une extraction σ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha \in K$. Par continuité,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{\sigma(n)} - a\| = \|\alpha - a\| = l$$

   et

$$\lim_{n\to+\infty} \| \underbrace{u_{\sigma(n)+1}}_{f(u_{\sigma(n)})} - f(a)\| = \|f(\alpha) - f(a)\| = l = \|\alpha - a\|$$

par continuité de f. Ainsi, on a $\alpha = a$ et $l = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

3. *f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x < y \in \mathbb{R}^2$, il existe $z \in]x, y[$ tel que (égalité des accroissements finis)*
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(z)| = \left|\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right| < 1$$
donc f vérifie bien l'hypothèse de contraction. Cependant, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2+1} > a$ donc pas de point fixe. La démonstration tombe en défaut car $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Solution 6.28. *La condition est équivalente à pour tout $(M_1, M_2, M_3) \in K_1 \times K_2 \times K_3$, M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.*

On forme alors
$$\begin{array}{rrcl} f: & K_1 \times K_2 \times K_3 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (M_1, M_2, M_3) & \mapsto & R(M_1, M_2, M_3) \end{array}$$
où $R(M_1, R_2, M_3)$ est le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par M_1, M_2 et M_3.

On note $M_i = (x_i, y_i)$ et Δ_i la médiatrice de $[M_j M_k]$. Établissons une équation de Δ_i. On a $M = (x, y) \in \Delta_i$ si et seulement si $\|\vec{MM_j}\|_2^2 = \|\vec{MM_k}\|_2^2$ si et seulement si $(\vec{MM_j} + \vec{MM_k} \mid \vec{MM_j} - \vec{MM_k}) = 0$ (produit scalaire), si et seulement si $(\vec{MC_i} \mid \vec{M_jM_k}) = 0$ où C_i est le milieu de $[M_j M_k]$, si et seulement si (calculer le produit scalaire)
$$\Big(\frac{x_j + x_k}{2} - x\Big)(x_k - x_j) + \Big(\frac{y_j + y_k}{2} - y\Big)(y_k - y_j) = 0$$
Soit alors $M_0 = (x_0, y_0)$ le centre du cercle circonscrit. $M_0 \in \Delta_i \cap \Delta_j$ avec $i \neq j$. Par exemple, $M_0 \in \Delta_3 \cap \Delta_1$ si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{rcl} \Big(\frac{x_2 + x_1}{2} - x_0\Big)(x_2 - x_1) + \Big(\frac{y_2 + y_1}{2} - y_0\Big)(y_2 - y_1) & = & 0 \\ \Big(\frac{x_3 + x_2}{2} - x_0\Big)(x_3 - x_2) + \Big(\frac{y_3 + y_2}{2} - y_0\Big)(y_3 - y_2) & = & 0 \end{array}\right.$$
si et seulement si ($L_2 \leftarrow L_1(x_3 - x_2) + L_2(x_1 - x_2)$)
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) & = & \dfrac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} \\ x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) & = & \dfrac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2} \end{array}\right.$$

si et seulement si ($L_1 \leftarrow L_2(y_2-y_1)+L_1(y_2-y_3)$)

$$\begin{cases} x_0 &= \dfrac{\frac{x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2}{2}(y_2-y_3)-(y_1-y_2)\frac{x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2}{2}}{(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)} \\ y_0 &= \dfrac{\frac{x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2}{2}(x_1-x_2)-(x_2-x_3)\frac{x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2}{2}}{(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)} \end{cases}$$

et $R(M_1,M_2,M_3)=\sqrt{(x_0-x_3)^2+(y_0-y_3)^2}$. *En reportant,* f *est continue sur* $K_1\times K_2\times K_3$ *compact donc* f *atteint son minimum.*

Solution 6.29.

1. *Pour tout* $f\in E$, $T(f)$ *est* $\mathcal{C}^1$ *et* $(T(f))'=f$, $T(f)(0)=0$. T *est clairement linéaire, soit ensuite* $x\in[0,1]$, *on a*

$$|T(f)(x)|=\left|\int_0^x f(t)dt\right|\leqslant\int_0^x|f(t)|dt\leqslant x\|f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$$

Donc $\|T(f)\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$ *donc* T *est continue et* $|\!|\!|T|\!|\!|\leqslant 1$. *Pour* $f=1$, *on a* $\|f\|_\infty=1$ *et pour tout* $x\in[0,1]$, $T(f)(x)=x$ *donc* $\|T(1)\|_\infty=1$. *Ainsi,* $|\!|\!|T|\!|\!|=1$.

2. id_E-T *est continue. Soit* $(f,g)\in E^2$, *on a* $g=f-T(f)$ *si et seulement si* $g=y'-y$ *et* $y(0)=0$. *On a* $g(x)e^{-x}=\underbrace{e^{-x}(y'(x)-y(x))}_{(e^{-x}y(x))'}$ *donc en intégrant de 0 à* x *on a*

$$y(x)=e^x\int_0^x e^{-t}g(t)dt$$

Donc $T(f)$ *vérifie le problème de Cauchy si et seulement si pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $T(f)(x)=e^x\int_0^x e^{-t}g(t)dt$ *si et seulement si pour tout* $x\in[0,1]$,

$$f(x)=g(x)+e^x\int_0^x e^{-t}g(t)dt$$

Donc id_E-T *est bijective. Enfin, on a pour tout* $x\in[0,1]$,

$$|f(x)|\leqslant|g(x)|+\left|\int_0^x g(t)e^{x-t}dt\right|\leqslant\|g\|_\infty(1+xe^x)\leqslant\|g\|_\infty(1+e)$$

Ainsi,

$$\|f\|_\infty=\|(id_E-T)^{-1}(g)\|_\infty\leqslant\|g\|_\infty(1+e)$$

donc $(id_E-T)^{-1}$ *est continue. Ainsi,* id_E-T *est un homéomorphisme.*

Solution 6.30.

(i) ⇒ (ii) $f^{-1}(K)$ *est fermé car* f *est continue.* K *est borné, donc il existe* $M > 0$*, tel que pour tout* $y \in K$, $\|y\| \leqslant M$*. Donc pour tout* $x \in f^{-1}(K)$, $\|f(x)\| \leqslant M$*. Par contraposée de (i) pour* $A = M + 1$*, il existe* $B > 0$ *tel que* $\|f(x)\| < A \Rightarrow \|x\| < B$*. Donc pour* $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| < B$ *donc* $f^{-1}(K)$ *est borné. C'est donc un compact.*

(ii) ⇒ (i) *Soit* $A \geqslant 0$*. Soit* $K = \overline{B(0, A)}$ *compact car fermé et borné en dimension finie. D'après (ii),* $f^{-1}(K)$ *est compact donc borné : il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| \leqslant B$*. Par contraposée, si* $\|x\| > B$ *alors* $x \notin f^{-1}(K)$ *et* $f(x) \notin K$ *donc* $\|f(x)\| > A$*. Ainsi,* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Remarque 6.7. Exemple pour l'exercice précédent : les fonctions polynômiales non constantes. Contre-exemple : l'exponentielle, cf $\exp([0, 1]) = \mathbb{R}_-$ non compact.

Solution 6.31.

1. *Soit* $(x, y) \in K^2$ *compact. Soit* σ *un extraction telle que*

$$(f^{\sigma(n)}(x), f^{\sigma(n)}(y)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (l, l') \in K^2$$

On a

$$f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

de même pour y*. Soit* $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x)\| \leqslant \varepsilon \\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(y) - f^{\sigma(n)}(y)\| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Pour $N = \max(N_1, N_2)$ *et* $p = \sigma(N + 1) - \sigma(N) \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$d(x, f^p(x)) \leqslant d(f^{\sigma(n+1)}(x), f^{\sigma(n)}(x)) \leqslant \varepsilon$$

et de même pour y *avec le même* p*.*

2. *On a*

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leqslant d(f(x), f(y)) \\ &\leqslant d(f^p(x), f^p(y)) \\ &\leqslant d(f^p(x), x) + d(x, y) + d(y, f^p(y)) \\ &\leqslant 2\varepsilon + d(x, y) \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a égalité tout du long. On a donc notamment, $\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\|$ et donc f est une isométrie.

3. *f est 1-lipschitzienne donc continue. Donc $f(K)$ est compact donc fermé. Il suffit donc de montrer que $f(K)$ est dense dans K. Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x - \underbrace{f^p(x)}_{\in f(K)}\| \leqslant \varepsilon$ d'après la première question. Donc $f(K)$ est dense dans K et $f(K) = \overline{f(K)} = K$.*

Remarque 6.8. Exemple pour l'exercice précédent : une rotation sur la sphère unité.

Solution 6.32. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & K & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & f(M) = \text{rayon du cercle circonscrit au triangle } MAB \end{array}$$

On a $F = f(K)$. Soit (C, i, j) un repère orthonormé où C est le milieu de $[AB]$ et $A(-\alpha, 0)$ et $B(\alpha, 0)$ avec $\alpha > 0$. La médiatrice Δ de $[A, B]$ a pour équation $x = 0$. Si $M(x, y)$, soit $\varphi(M)$ le centre du cercle circonscrit. On a $\varphi(M) \in \Delta$ donc $\varphi(M)(0, y_1)$ et $\varphi(M)$ appartient à la médiatrice de $[MA]$. On a $y_1 \neq 0$ car $M \notin (AB)$.

Notons M' le milieu de $[MA]$. On a $M'(\frac{x-\alpha}{2}, \frac{y}{2})$ d'où $M'\vec{\varphi(M)} \cdot \vec{MA} = 0$ d'où (en développant le produit scalaire),

$$y_1 = \Big((\alpha + x)\Big(\frac{\alpha - x}{2}\Big) - \frac{y^2}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{y}\Big)$$

φ est donc continue donc f également et $f(K) = F$ est compact.

Solution 6.33.

1. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\tau)$ et $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ avec $\tau(P) = \lambda P$. Si P n'est pas constant, notons $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $P(\alpha) = 0$. Alors $P(\alpha + 1) = 0$. En itérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$, impossible car P n'est pas constant donc pas nul. Finalement, P est constant et $\lambda = 1$: $\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}$.*

2. *$f : x \mapsto P(x)e^{-x}$ est continue et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc le $\sup$ est bien défini. Il est ensuite facile de vérifier que $\|P\|$ est une norme.*

3. *On a*

$$\|\tau(P)\| = \sup_{x \geqslant 0} |P(x+1)e^{-x}| = \sup_{x' \geqslant 1} |P(x')e^{-x'}e| \leqslant \sup_{x' \geqslant 0} |P(x')e^{-x'}e| \leqslant e\|P\|$$

4. *Utiliser* $P = X$.

Solution 6.34.

1. *Pour* x *fixé,* $\min(x, \varphi(t)) = \frac{x+\varphi(t)-|x-\varphi(t)|}{2}$ *est continue. Donc* $T(f)$ *est définie.*

   Si $x \leqslant \varphi(0)$,
   $$T(f)(x) = \int_0^1 xf(t)dt = x\int_0^1 f(t)dt$$
   et si $x \geqslant \varphi(1)$,
   $$T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(t)f(t)dt$$
   et si $\varphi(0) \leqslant x \leqslant \varphi(1)$*, il existe un unique* $t_1 = \varphi^{-1}(x)$ *(car* φ *induit un homéomorphisme de* $[0,1]$ *dans* $\varphi([0,1])$*).*

   Si $t \leqslant t_1$*, on a* $\varphi(t) \leqslant x$*, donc* $\min(x, \varphi(t)) = \varphi(t)$*. Si* $t \geqslant t_1$*, on a* $\min(x, \varphi(t)) = x$*. On a donc*
   $$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^{t_1} \varphi(t)f(t)dt + \int_{t_1}^1 xf(t)dt \\ &= \underbrace{\int_0^{\varphi^{-1}(x)} \varphi(t)f(t)dt}_{=F_1(\varphi^{-1}(x))} + x\underbrace{\int_{\varphi^{-1}(x)}^1 f(t)dt}_{=F_2(\varphi^{-1}(x))} \end{aligned}$$
   et f *et* φ *étant continues,* F_1 *et* F_2 *sont continues.*

   Donc $T(f)$ *continue et* T *linéaire, c'est un endomorphisme de* E.

2. *On a*
   $$|T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 \min(x, \varphi(t))dt}_{=A(x)}$$
   donc
   $$\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|A\|_\infty$$
   donc T *est continue et* $|||T||| \leqslant \|A\|_\infty$*. De plus pour* $f = 1$*, on a* $|||T||| = \|A\|_\infty$.

3. *On a*
   $$A(x) = \int_0^1 \min(x, \varphi(t))dt = \begin{cases} x & si \quad x \leqslant \varphi(0) \\ \int_0^1 \varphi(t)dt & si \quad x \geqslant \varphi(1) \end{cases}$$
   Dans tous les cas,
   $$\|A\|_\infty \leqslant \int_0^1 \varphi(t)dt$$

donc

$$\|A\|_\infty = \int_0^1 \varphi(t)dt$$

Solution 6.35.

1. *φ est une forme linéaire. et on a*

$$|\varphi(P)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{a_k}{2^k}\right| \leqslant 2\|P|_\infty$$

donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 2$. Pour $p \neq 0$, $|\varphi(P)| < 2\|P\|_\infty$: pour avoir égalité, il faudrait pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = constante \neq 0$ ce qui n'est pas possible. Pour $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varphi(P_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc $|||\varphi||| = 2$. De plus, $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé.

2. *Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi(P) = 0$ d'où $a_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$ (et il existe $N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, a_n = 0$). On a donc*

$$P(X) - 1 = (a_0 - 1) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k X^k$$

et si $\|P-1\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{cases} |a_0 - 1| \leqslant \frac{1}{2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$|a_0| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

Et $\frac{1}{2} \leqslant 1 - |a_0| \leqslant |1 - a_0| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $|a_0| = \frac{1}{2}$ et $|1 - a_0| = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\theta} &\Rightarrow \left|1 - \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\theta)\right)^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 1 - \cos(\theta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \cos(\theta) = 1 \end{aligned}$$

et donc $a_0 = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| = \frac{1}{2}$, impossible car $P \in \mathbb{C}[X]$, ainsi $\|P - 1\|_\infty > \frac{1}{2}$.

3. *On définit, pour* $n \geqslant 1$, $P_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n)X^k$ *avec* $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$ *tel que* $P_n \in \ker(\varphi)$. *On a*

$$\begin{aligned} P_n \in \ker(\varphi) &\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n\Big)\frac{1}{2^k} = 0 \\ &\Rightarrow \varepsilon_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

et donc $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *(et* $\varepsilon_n < 0$*). On a donc* $\|P_n - 1\|_\infty = \frac{1}{2} - \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$.
Donc $d(1, \ker(\varphi)) = \frac{1}{2}$ *et cette distance n'est pas atteinte.*

Solution 6.36. *Prouvons d'abord l'existence. Soit* $M \in \mathbb{R}^n$, *on définit* $r(M) = \sup\{\|M - A\| \mid A \in K\}$ *et* $\varphi\colon A \mapsto \|M - A\|$ *est continue sur* K *compact donc le sup est en fait un max. On a notamment* $r(M) = \{R > 0 \mid K \subset B(M, R)\}$. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & r(M) \end{array}$$

Soit $(M, M') \in (\mathbb{R}^n)^2$. *Pour tout* $A \in K$, *on a*

$$\|M - A\| \leqslant \|M - M'\| + \|M' - A\| \leqslant \|M - M'\| + r(M')$$

En particulier, on a

$$r(M) \leqslant \|M - M'\| + r(M')$$

et en échangeant M *et* M', *on a* $|r(M) - r(M')| \leqslant \|M - M'\|$. *Donc* r *est 1-lipschitzienne donc continue. Soit* $A_0 \in K$, $R(M) \geqslant \|M - A_0\| \geqslant \|M\| - \|A_0\| \xrightarrow[\|M\|\to+\infty]{} +\infty$. *Donc il existe* $M_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $r(M_0) = \min\limits_{M\in\mathbb{R}^n} r(M) = r_0$, *d'où l'existence d'une boule fermée de rayon minimal.*

Pour l'unicité, soit $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ *tel que* $r(M_1) = r(M_2) = r_0$. *On suppose que* $\|M_1 - M_2\| = \varepsilon > 0$. *Soit* M_3 *le milieu de* $[M_1M_2]$. *On a* $K \subset B_{M_1,r_0} \cap B_{M_2,r_0}$. *On prend* $r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = r_0^2$ *d'où*

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < r_0$$

Soit $M \in B(M_1, r_0) \cap B(M_2, r_0)$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|M - M_3\|^2 &= \frac{1}{4}\Big(\|M - M_1 + M - M_2\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(2\|M - M_1\|^2 + 2\|M - M_2\|^1 - \underbrace{\|M_1 - M_2\|^2}_{=\varepsilon^2}\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{4}(2r_0^2 + 2r_0^2 - \varepsilon^2) \\
&\leqslant r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} = r^2
\end{aligned}$$

Donc $B_1 \cap B_2 \subset \overline{B(M_3, r)}$ *d'où* $K \subset \overline{B(M_3, r)}$, *ce qui est absurde car* $r < r_0$. *Donc* $M_1 = M_2$.

Solution 6.37. φ *est évidemment définie et linéaire. Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)| &= \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 f\right| \\
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f| \\
&\leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 1$. Notons que si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors on a égalité partout au-dessus et pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| = \|f\|_\infty$ et comme $\left|\int f\right| = \int |f|$ implique que f est de signe constant sur l'intervalle d'intégration, si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors f est de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Or $|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f| = |\int_0^{\frac{1}{2}} f| + |\int_{\frac{1}{2}}^1|$, f est de signe opposé sur les deux segments. Or f est continue en $\frac{1}{2}$, donc f est nulle. Donc pour f non nulle, on a $|\varphi(f)| < \|f\|_\infty$ donc la norme triple n'est pas atteinte. Enfin, pour montrer que $|||\varphi||| = 1$, on utilise pour $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ (\frac{1}{2} - t)n & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ -1 & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

On a bien $\|f_n\|_\infty = 1$.

Solution 6.38.

1. *Non car on applique l'application trace.*

2. *On a le résultat par récurrence.*

3. *On a*

$$(n+1)|||v^n||| = |||u \circ v^n \circ v - v^n \circ v \circ r||| \leqslant 2|||u||||||v||||||v^n|||$$

   Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v^n = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n + 1 \leqslant 2|||u||||||v|||$$

   ce qui est impossible. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^n = 0$. Alors $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1} = 0$ donc $v^{n-1} = 0$ et de proche en proche $v = 0$: contradiction.

4. *Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,*

$$(D \circ T - T \circ D)(P) = (XP)' - XP' = P$$

   donc $D \circ T - T \circ D = id$. D'après ce qui précède, T et D ne peuvent pas être continus simultanément.

Solution 6.39.

1. *$\sum_{k \geqslant 0}(A - I_n)^k$ converge absolument car $|||A - I_n|||^k \leqslant \alpha_k$ et $\alpha <$.*
   Si $AX = 0$, $\|(A - I_n)X\| = \|X\| \leqslant \alpha\|X\|$ donc $\|X\| = 0$ et $X = 0$ donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$, idem pour B. On a alors

$$A \sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k = ((A - I_n) + I_n) \sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k = I_n$$

   par téléscopage. Donc

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k$$

   et

$$|||A^{-1}||| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$$

   et de même pour B. On écrit alors

$$ABA^{-1}B^{-1} - I_n = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - I_n)(B - I_n) - (B - I_n)(A - I_n))A^{-1}B^{-1})$$

   d'où

$$|||ABA^{-1}B^{-1} - I_n||| \leqslant \frac{2|||A - I_n||||||B - I_n|||}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

2. *On prend* $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.

3. *Pour tout* $M \in G$, *il existe* $r > 0$ *tel que* $B(M, r) \cap G = \{M\}$. *Montrons que* G *est discret si et seulement si* I_n *est isolé. En effet, si* I_n *est isolé, il existe* $r_0 > 0$ *tel que* $B(I_n, r_0) \cap G = \{I_n\}$. *Soit* $M \in G$, *alors pour tout* $M' \in G$, $M - M' = M(I_n - M^{-1}M')$ *d'où* $I_n - M^{-1}M' = M^{-1}(M - M')$. *Si*

$$|||M - M'||| < \frac{r_0}{|||M^{-1}|||}$$

on a $|||I_n - M^{-1}M'||| < r_0$ *et donc* $M' = M$ *et* M *est isolé. Ainsi* G *est isolé. La réciproque est évidente.*

C *est dans le commutant si et seulement si* C *commute avec* A *et* B *si et seulement si*

$$\begin{cases} ACA^{-1}C^{-1} = I_n \\ BCB^{-1}C^{-1} = I_n \end{cases}$$

Notons maintenant que

$$\overline{B_{|||\cdot|||}(I_n, \frac{1}{4})} \cap G = \mathcal{A}$$

est fini. En effet, si cet ensemble était infini, il existerait $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite injective dans* $\mathcal{A}$. *La suite étant bornée, on peut extraite* $(M_{\sigma(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ *qui converge et alors pour tout* $p \in I_n$

$$\underbrace{M_{\sigma(p)}M_{\sigma(p+1)}^{-1}}_{\xrightarrow[pto+\infty]{} I_n} \in G \setminus \{I_n\}$$

ce qui est impossible car I_n *est isolé.*

Comme $A \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$, *il existe* $C \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$ *telle que* $|||C - I_n|||$ *soit minimale et* $|||c - I_n||| \leqslant \frac{1}{4}$. *D'après la question 2 on a*

$$\left|\left|\left|ACA^{-1}C^{-1} - I_n\right|\right|\right| < |||C - I_n|||$$

et même chose pour B. *Donc nécessairement,* $ACA^{-1}C^{-1} = I_n$ *et de même pour* B. *Ainsi,* C *commute avec toutes les matrices de* G.

Solution 6.40.

1. $\mathbb{C}_{n-1}[A]$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc c'est un fermé. Par division euclidienne par* χ_A*, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,* $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$*. Comme*

$$\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

   $\exp(A) \in \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$.

2. *Si* A *est diagonalisable, il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *tel que*

$$A = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P$$

   et donc

$$\exp(A) = P^{-1} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}) P$$

   et $\exp(A)$ *est diagonalisable.*

   Si $\exp(A)$ *est diagonalisable, on utilise la décomposition de Dunford :* $A = D + N$ *avec* $DN = ND$*,* D *diagonalisable et* N *nilpotente. On a donc*

$$\exp(A) = \exp(D) \underbrace{\exp(N)}_{=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}} = \exp(D) + \exp(D)\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}\Big) = \exp(D) + N'$$

   avec N' *nilpotente et* $\exp(D)$ *est diagonalisable d'après le sens direct.* N' *commute avec* $\exp(D)$*. Par unicité de la décomposition de Dunford,* $\exp(A)$ *étant diagonalisable, on a* $N' = 0$*. Comme* $\exp(D)$ *est inversible,*

$$N \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}}_{=I_n+N''} = 0$$

   avec N'' *nilpotente.* $I_n + N''$ *est donc inversible et ainsi* $N = 0$ *et* A *est diagonalisable.*

3. *D'après ce qui précède,* $\exp(A) = I_n$ *est diagonalisable et*

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in \operatorname{Sp}_{\lambda}(\mathbb{C})\} = \{I_n\}$$

   Donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$*.*

   Réciproquement, si A *est diagonalisable avec* $\operatorname{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$*, en diagonalisant, on a bien* $\exp(A) = I_n$.

4. *Sur $\mathbb{R}$, si A est diagonalisable, $\exp(A)$ l'est aussi. Cependant, la réciproque n'est pas vrai, par exemple*

$$M = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\pi & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i}\pi \end{pmatrix} \text{ semblable à } \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

On a $\chi_M = X^2 + 4\pi^2$, $\exp(A) = I_2$ et A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Solution 6.41.

1. *On a $\ln(1-x) = P(x) + x^2 O(1)$ et $\exp(y) = Q(y) + y^n O(1)$ d'où*

$$\exp(\ln(1+x)) = 1 + x = Q(\ln(1+x)) + \underbrace{\ln(1+x)^n O(1)}_{O(x^n)}$$

alors $1 + x = Q(P(x) + O(x^n)) + O(x^n) = Q(P(x)) + O(x^n)$. Soit $B(X) = Q(P(X)) + O(x^n) \in \mathbb{R}[X]$, on a $\frac{B(x)}{x^n} = O(1)$ donc $X^n \mid B$ et

$$Q(P(X)) = 1 + X + B(X) = 1 + X + X^n A(X)$$

2. *On a $N^n = 0$ donc $P(N)$ est aussi nilpotente et on a*

$$\exp(P(N)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(N)^k}{k!} = Q(P(N)) = I_n + N + 0$$

3. *Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et sa décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. On a $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{C}^*$ et on écrit*

$$M = D \underbrace{(I_n + \underbrace{D^{-1}N}_{\textit{nilpotente}})}_{=\exp(P(D^{-1}N))}$$

si $D = P_1 \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P_1^{-1}$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_k = \exp(\mu_k)$ (car $\exp$ est surjectif sur $\mathbb{C}^*$). Alors

$$D = \exp(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}) \in \mathbb{C}[D]$$

puis

$$\begin{aligned} M &= \exp\Big(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}\Big) \exp\Big(P(D^{-1}N)\Big) \\ &= \exp\Big(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1} + P(D^{-1}N)\Big) \end{aligned}$$

car les matrices commutent.

Donc $\exp$ est surjective.

Solution 6.42. *On a* $A \subset \overline{A}$*,* $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{2}{n})^{2n} \in \overline{A}$ *et* $e = \lim\limits_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^{n+1} \in \overline{A}$*.*

Si $n \geqslant 2$ *et* $p \geqslant 2$*,* $(\frac{1}{n}+\frac{1}{p})^{n+p} \leqslant 1$*. Donc si* $(\frac{1}{n}+\frac{1}{p})^{n+p} \geqslant 1$*, alors* $n = 1$ *ou* $p = 1$*.*

Si $x > e$*, à partir d'un certain rang, on a* $(1+\frac{1}{n})^{n+1} \leqslant \frac{e+x}{2}$ *et si* $x \notin A$*,* $x \notin \overline{A}$*. Si* $1 \leqslant x < e$*, à partir d'un certain rang, on a* $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > x$ *donc si* $x \notin A$*,* $x \notin \overline{A}$*.*

Soit $x < 1$*, si* $n \geqslant 2$ *et* $p \geqslant 3$ *ou* $n \geqslant 3$ *et* $p \geqslant 2$*, on a* $\frac{1}{n}+\frac{1}{p} \leqslant \frac{5}{6}$ *et*

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)^{n+p} &= \exp\left((n+p)\ln\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\right)\\ &\leqslant \exp\left((n+p)\ln\left(\frac{5}{6}\right)\right)\\ &\leqslant \max\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}, \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^{p}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0}\right)\end{aligned}$$

Il existe N_0 *tel que pour tout* $n \geqslant N_0$*,* $(\frac{5}{6})^n \leqslant \frac{x}{2}$*. Si* n *ou* p *est plus grand que* N_0*, on a donc*

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)^{n+p} \leqslant \frac{x}{2}$$

Donc il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de A *plus grand que* $\frac{x}{2}$*. Ainsi,*

$$\overline{A} = A \cup \{e, 0\}$$

Solution 6.43. *On note*

$$\mathbb{V} = \bigcup_{m\geqslant 1} \mathbb{U}_m = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{m}} \;\middle|\; m \geqslant 1, k \in \{0,\dots,m-1\}\right\}$$

Soit $M \in H$*.* $X^m - 1$ *est scindé à racines simples sur* $\mathbb{C}$ *donc* M *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *avec ses valeurs propres dans* $\mathbb{V}$*. Réciproquement, si* M *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *et* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{V}$*. Alors pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M), \exists m_\lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{U}_{m_\lambda}$ *et soit* $m = \mathrm{ppcm}_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)}(m_\lambda)$*. Alors* $M^m = I_n$*.*

Soit $A \in \overline{H}$*, il existe* $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{p\to+\infty} M_p = A$*. Comme le polynôme caractéristique est une fonction continue des coefficients, pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$*, on a*

$$\lim_{p\to+\infty} \chi_{M_p}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = 0$$

Or

$$|\chi_{M_p}(\lambda)| = |\lambda - \lambda_{1,p}| \dots |\lambda - \lambda_{n,p}| \geqslant d(\lambda, \mathbb{U})^n$$

avec $\lambda_{i,p} \in \mathbb{V}$ *pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$*. Donc* $d(\lambda, \mathbb{U}) = 0$ *et comme* $\mathbb{U}$ *est fermé,* $\lambda \in \mathbb{U}$*.*

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *tel que* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$*. Soit*

$$\left\{e^{\mathrm{i}\theta_1}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_r}\right\}$$

les valeurs propres distinctes de A *de multiplicités* $m_1, \dots, m_r$*. Il existe* $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ *tel que*

$$A = Q \,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_1}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_1}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_r}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_r}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1}$$

On a

$$\theta = \lim_{k \to +\infty} \frac{2\pi}{k} \lfloor k \frac{\theta}{2\pi} \rfloor$$

donc on peut former, pour $p \in \mathbb{N}^*$*,*

$$A = Q \,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_{1,p}}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_{1,p}}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_{r,p}}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_{r,p}}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1}$$

avec $\theta_{i,p} = \frac{2\pi}{p} \lfloor p \frac{\theta_j}{2\pi} \rfloor + \frac{2j\pi}{p}$*. Pour* p *suffisamment gand, les* $(\theta_{j,p})$ *sont deux à deux distincts donc* A_p *est diagonalisable et* $A_p \in H$*, et donc* $A \in \overline{H}$*.*

Solution 6.44.

1. *On a l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. On a cependant* $N_a(X^k) = |a_k|$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,* $X^k \neq 0$*. Donc* N_a *est une norme implique que* a *ne s'annule pas sur* $\mathbb{N}$*. Réciproquement, si pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,* $a_k \neq 0$*, si* $P \neq 0$*, il existe* $k \in \mathbb{N}$ *avec* p_k *et donc* $N_a(P) > 0$*. Donc* N_a *est une norme si et seulement si pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,* $a_k \neq 0$*.*
2. *Si* N_a *et* N_b *sont équivalentes, alors il existe* $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *tel que pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,*

   $$\beta N_b(X^k) \leqslant N_a(X^k) \leqslant \alpha N_b(X^k)$$

   d'où

   $$\beta |b_k| \leqslant N_a(X^k) \leqslant \alpha |b_k|$$

   Donc $a = O(b)$ *et* $b = O(a)$*.*

Réciproquement, si $a = O(b)$ et $b = O(a)$, alors on a l'inégalité précédente sur les a_k et b_k, d'où

$$\beta \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k a_k| \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k|$$

et donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\beta N_b(P) \leqslant N_a(P) \leqslant \alpha N_b(P)$$

et N_a et N_b sont équivalentes.

3. *Δ est continue pour N_a si et seulement s'il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $N_a(\Delta P) \leqslant C N_a(P)$. Si Δ est continue alors il existe $c \geqslant 0$ tel que $N_a(kX^k) \leqslant c N_a(X^k)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$|ka_{k-1}| \leqslant c|a_k| \tag{6.1}$$

Réciproquement, si on a (6.1), pour tout $P \in \mathbb{C}[X] = N_a(\Delta P) \leqslant c N_a(P)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = k!$, (6.1) est vérifiée pour $c = 1$. Si $b_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, (6.1) n'est pas vérifiée donc Δ n'est pas continue pour N_b.

Solution 6.45.

1. *On a $d(x, A) = 0$ si et seulement si $\inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$ si et seulement si $\varepsilon > 0, \exists a \in A \colon \|x - a\| < \varepsilon$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.*

   On a $A \subset \overline{A}$ donc $d(x, \overline{A}) \leqslant d(x, A)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a' \in \overline{A}$ tel que $\|x - a'\| < d(x, \overline{A}) + \varepsilon$ et il existe $a \in A$ tel que $\|a - a'\| < \varepsilon$. Ainsi,

$$d(x, A) \leqslant \|x - a\| \leqslant d(x, \overline{A}) + 2\varepsilon$$

   Ceci calant pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(x, A) \leqslant d(x, \overline{A})$ et donc on a égalité.

2. *$A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B}$ donc $d(A, B) \geqslant d(\overline{A}, \overline{B})$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a', b') \in \overline{A} \times \overline{B}$ tel que $\|a' - b'\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + \varepsilon$ et il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $\|a - a'\| < \varepsilon$ et $\|b - b'\| \varepsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a donc*

$$d(A, B) \leqslant \|a - b\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + 3\varepsilon$$

   Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien l'égalité.

Solution 6.46. *φ_{x_0} est une forme linéaire. Elle est continue si et seulement $C > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,*

$$|P(x_0)| \leqslant C\|P\|_\infty$$

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a

$$|P(x_0)| \leqslant \|P\|_\infty \sum_{k=0}^n |x_0|^k$$

Si $|x_0| < 1$, on a

$$|P(x_0)| \leqslant \|P\|_\infty \frac{1}{1-|x_0|}$$

donc φ_{x_0} est continue et si $x_0 = |x_0|e^{\mathrm{i}\theta_0}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = \sum_{k=0}^n e^{-\mathrm{i}k\theta_0} X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et

$$|\varphi_{x_0}(P_n) = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{1-|x_0|}$$

donc $|||\varphi_{x_0}||| = \frac{1}{1-|x_0|}$.

Si $|x_0| \geqslant 1$,

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc φ_{x_0} n'est pas continue.

Solution 6.47. *Pour le sens indirect, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$ donc $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$. Par continuité du déterminant, on a $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \det(-\lambda I_n)$. Donc $\lambda = 0$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ donc M est nilpotente.*

Pour le sens direct, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M. On trigonalise u sur une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \cdots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$. Posons pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$. On pose $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$ et $M_p = \mathrm{mat}_{B_p}(u)$, semblable à M et $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ car $\|M_p\| \leqslant \frac{1}{p}\|M_1\|$.

Solution 6.48. *On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M.*

Pour le sens indirect, si M n'est pas diagonalisable, il existe une base $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = D + N$$

où D est diagonale et N est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases $\mathcal{B}_p$ définies à l'exercice précédent, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} D$$

Si $D \in S_M$, alors M est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc S_M n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si M est diagonalisable, soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$ avec $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} M'$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$ car M et M_p sont semblables. Par continuité du déterminant, on a $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$, donc $\chi_{M'} = \chi_M$. De plus, $A \mapsto \Pi_M(A)$ (polynôme minimal) est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Pi_M(M_p) = 0$ donc $\Pi_M(M') = 0$. M' est donc annulée par Π_M, donc M' est diagonalisable et comme $\chi_M = \chi_{M'}$, M et M' ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc $M' \in S_M$.

Remarque 6.9. Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$

On a $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim\limits_{p\to+\infty} M_p}$.

Solution 6.49. *On note $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x,y) \in I^2 \text{ et } |x-y| \leqslant h\}$.*

1. *ω_φ est bien défini car $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2\|\varphi\|_\infty$). Si $0 < h \leqslant h'$, alors $A_h \subset A_{h'}$ donc $\sup(A_h) \leqslant \sup(A_{h'})$ donc $\omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h')$.*
2. *Soit $(h,h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, soit $(x,y) \in I^2$ tel que $|x-y| \leqslant h + h'$ (où on peut supposer que $x \leqslant y$).*
   - *Si $y \in [x, x+h]$, alors $|x-y| \leqslant h$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$*
   - *Si $y \in [x+h, x+h+h']$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x+h)| + |\varphi(x+h) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$ car $|x - (x+h)| \leqslant h$ et $|x+h-y| \leqslant h'$.*

   Donc $\omega_\varphi(h+h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. *Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda h \leqslant (\lfloor\lambda\rfloor + 1)h$ et par croissance et ce qui précède, on a*

$$\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (\lfloor\lambda\rfloor + 1)\omega_\varphi(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega_\varphi(h)$$

4. *Soit $\varepsilon > 0$. φ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, si $|x - y|\alpha$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$ et on a pour $h \leqslant \alpha$, $\omega_\varphi(h) \leqslant \varepsilon$ d'où $\lim\limits_{h \to 0} \omega_\varphi(h) = 0$.*

   Soit alors $h_0 > 0$ fixé et $h > 0$,

   — si $h_0 \leqslant h$, on a $0 \leqslant \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leqslant \omega_\varphi(h - h_0)$.

   — si $h \leqslant h_0$, on a $0 \leqslant \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h_0 - h)$.

   Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leqslant \omega_\varphi(|h_0 - h|)$. Donc on a bien $\lim\limits_{h \to h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$. Donc ω_φ est continue (et même uniformément).

Solution 6.50. *G est borné car si $M \in G$, $|||M||| \leqslant |||I_n||| + \mu = 1 + \mu$. Montrons donc que si G_0 est un sous-groupe borné de $GL_n(\mathbb{C})$, alors les valeurs propres de ses éléments sont de module 1, et ceux-ci sont diagonalisables.*

En effet, soit $M \in G$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, soit X un vecteur propre associé. On a $\|MX\| = |\lambda|\|X\| \leqslant |||M|||\|X\|$ donc $|\lambda| \leqslant |||M||| \leqslant \sup\limits_{M \in G} |||M|||$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $M^k \in G$ et $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$, donc si $|\lambda| > 1$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} |\lambda|^k = +\infty$, et si $|\lambda|^\lambda < 1$, on a $\lim\limits_{k \to -\infty} |\lambda|^k = +\infty$. Comme G est borné, $|\lambda| = 1$.

On utilise ensuite la décomposition de Dunford pour M : $M = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. Grâce au binôme de Newton, pour $k \geqslant r$ p r est l'indice de nilpotence de N, on a*

$$M^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} N^p D^{k-p} = \underbrace{D^k}_{\text{borné}} + kND + \sum_{p=2}^{r-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}} N^p \underbrace{D^{k-p}}_{\text{borné car } \mathrm{Sp}(D) \subset \mathbb{U}}$$

Donc

$$M^k \underset{k \to +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{k^{r-1}}{(r-1)!} \underbrace{N^{r-1}}_{\neq 0} D^{k-r+1}}_{\text{non borné si } N \neq 0}$$

Donc $N = 0$ et $M = D$ est diagonalisable.

Revenons donc à l'exercice. Soit $M \in G$ et $\lambda = e^{i\theta} \in \mathrm{Sp}(M)$ avec $\theta \in]-\pi, pi]$. Si X est un vecteur propre associé à λ, on a

$$(\lambda - 1)\|X\| = \|(M - I_n)X\| \leqslant \mu\|X\|$$

donc $|\lambda - 1| = 2|\underbrace{\sin(\frac{\theta}{2})}_{\geqslant 0}| \leqslant \mu$. Donc $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ où $\theta_0 = \arcsin(\frac{\mu}{2}) \in [0, \pi[$.

Si $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, $e^{ik\pi} \in \mathrm{Sp}(M^k)$, $|e^{ik\theta} - 1| \leqslant \mu$. *Alors* $\{k\theta + 2l\pi \mid (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$ *non monogène et donc dense, et alors* $(e^{ik\theta})_{k\in\mathbb{Z}}$ *est dense dans* $\mathbb{U}$, *donc il existe* $k_0 \in \mathbb{Z}$ *tel que* $|e^{ik_0\theta} + 1| = |2 - (1 - e^{ik_0\theta_0})| < 2 - \mu$, *ce qui est impossible car* $|2 - (1 - e^{ik_{0\theta}})| \geqslant 2 - |1 - e^{ik_0\theta_0}| \geqslant 2 - \mu$.

Ainsi, $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ *et il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\lambda = e^{i\theta} \in \mathbb{U}_m$. *Ce n'est pas forcément le même* m *pour tout les* M *dans* G. *Notons alors pour*

$$\lambda \in \bigcup_{M\in G} \mathrm{Sp}(M) = \mathcal{A}$$

$\omega(\lambda)$ *l'ordre (multiplicatif) de* λ *dans* $\mathbb{U}$.

Si $\omega(\lambda) = m$, *on a* $gr(\lambda) = \mathbb{U}_m$ *donc il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\lambda^k = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathcal{A}$ *(car* $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$*). Supposons que* $\{\omega(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{A}\}$ *non borné. Alors il existe* $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tel que* $m_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ *et* $e^{\frac{2i\pi}{m_k}} \in \mathcal{A}$. *Alors*

$$\underbrace{e^{2i\lfloor\frac{m_k}{2}\rfloor\frac{\pi}{m_k}}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{i\pi}=-1} \in \mathcal{A}$$

ce qui est impossible car $|\lambda + 1| \geqslant 2 - \mu > 0$. *On peut donc noter*

$$m = \bigvee_{\lambda\in\mathcal{A}} \omega(\lambda)$$

et pour tout $M \in G$, *pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\lambda^m = 1$. *Or* M *est diagonalisable, donc* $M^m = I_n$.

Solution 6.51. *Si* $M \in \mathcal{G}_q$, $P(X) = X^q - 1$ *annule* M *donc* M *est diagonalisable à valeurs propres dans* $\mathbb{U}_q$. *Réciproquement, si* M *est diagonalisable et* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_q$ *alors il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *avec*

$$M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$$

et donc

$$M^q = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^q, \dots, \lambda_n^q)P^{-1} = I_n$$

Si $M \in \mathcal{G}_q$ *n'est pas une homothétie, il existe* $\lambda \neq \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)^2$ *et* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *tel que*

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} M$$

Or

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est semblable } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

car $\chi_A = (X-\lambda)(X-\mu)$ donc est diagonalisable. Donc $M_k \sim M$ et $M_k \in \mathcal{G}_q$ et M n'est pas isolé.

Montrons le petit lemme suivante : soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Si $|||M - \lambda I_n||| \leqslant \varepsilon$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \overline{B(\lambda, \varepsilon)}$. En effet, soit X un vecteur propre de M associé à $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a

$$\|(M - \lambda I_n)X\| = |\mu - \lambda|\|X\| \leqslant |||M - \lambda I_n|||\|X\| \leqslant \varepsilon\|X\|$$

donc $|\mu - \lambda| \leqslant \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \sin(\frac{\pi}{q}) > 0$ et $\lambda \in \mathbb{U}_q$; si $M \in B_{|||\cdot|||}(\lambda I_n, \varepsilon) \cap \mathcal{G}_q$ alors pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on a $|\lambda - \mu| \leqslant \sin(\frac{\pi}{q})$ donc $\lambda = \mu$. Donc si $M = \lambda I_n$ alors M est isolé (avec $\lambda \in \mathbb{U}_q$). Donc les matrices scalaires sont isolées.

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. *Tout d'abord,* $\deg(L_n) = n$ *et son coefficient dominant et* $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. -1 *et* 1 *sont racines d'ordre* n *de* P_n *donc pour tout* $k \in \{0,\dots,n-1\}$ $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$. *Ainsi, on a par intégrations par parties successives :*
$$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t)P_n(t)dt$$
Notamment, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P^{(n)} = 0$ *et* $(P|L_n) = 0$. *En particulier, pour tout* $m < n$, $\deg(L_m) \leqslant n-1$ *et* $(L_m|L_n) = 0$ *donc* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de* L_n *grâce aux intégrales de Wallis :*
$$\begin{aligned}\|L_n\|_2^2 &= (L_n|L_n)\\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} L_n^{(n)}(t^2-1)^n dt\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt\end{aligned}$$
On pose $t = \cos(\theta)$ *d'où* $dt = -\sin(\theta)d\theta$, *d'où*
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt &= \int_0^{\pi} \sin(\theta)^{2n+1}d\theta\\ &= 2I_{2n+1} \ \textit{Wallis}\end{aligned}$$
On a classiquement $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$. *D'où*
$$\begin{aligned}I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\dots\times\frac{2}{3}\times\underbrace{I_1}=1\\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$
d'où
$$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times 2\times\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

2. *On utilise la formule de Leibniz en écrivant* $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$.

3. *On montre le résultat par récurrence sur* $k \in \{0,\dots,n\}$ *en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que* $L_n = P_n^{(n)}$ *s'annule au moins* n *fois sur* $]-1,1[$. *Or* $\deg(L_n) = n$, *donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.*

4. $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (étagée en degré). Donc il existe $(\alpha_{n,0}, \dots, \alpha_{n,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $XL_{n-1} = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} L_k$. Si $k \leqslant n-3$, on a

$$(XL_{n-1}L_k) = \alpha_{n,k} \|L_k\|_2^2 = (L_{n-1}XL_k) = 0$$

car $\deg(XL_k) = k+1 \leqslant n-2$. Donc

$$XL_{n-1} = \alpha_{n,n-2}L_{n-2} + \alpha_{n,n-1}L_{n-1} + \alpha_{n,n}L_n$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(Xl_{n-1}|L_{n-1}) = \int_{-1}^1 tL_{n-1}(t)^2 dt$$

Or P_n est paire, donc L_n est de la parité de n et donc L_n^2 est paire puis XL_n^2 est impaire. Donc $\alpha_{n,n-1} = 0$.

$$\begin{aligned}(XL_{n-1}|L_{n-2}) &= \alpha_{n,n-2} \underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{=\frac{2}{2n-3}} \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) \underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}}\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\int_{-1}^1 P_{n-1}(t)dt &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-1}dt}_{2I_{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \times 2 \times \frac{2^{2n-2}(n-1)!)^2}{(2n-1)!} \\ &= \frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!}\end{aligned}$$

donc $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}} = \frac{n-1}{n}$. D'où le résultat.

Solution 7.2. On forme

$$\begin{array}{rccl} g: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \underbrace{\Delta f(x_0, \dots, x_{n-1}, x)}_{\varphi(x)} - \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)A}_{P(x)} \end{array}$$

On a $g(x_n) = 0$. On suppose les $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ distincts, et on pose

$$A = \frac{V(x_0, \ldots, x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)}$$

g est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on a $g(x_i) = 0$. Donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g^{(n)}(\xi) = 0$ (théorème de Rolle appliqué n fois. $\deg(P) = n$ et son coefficient dominant est A donc $P^{(n)}(\xi) = An! = \varphi^{(n)}(\xi)$.

On développe maintenant $\varphi(x)$ par rapport à la dernière colonne :

$$\varphi(x) = f(x) \times V_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) + Q(X)$$

avec $\deg(Q) \leqslant n - 1$ et $V_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i - x_j)$ (déterminant de Vandermonde). On a donc

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_j - x_i)$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{A}{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j - x_i)} = \Delta f(x_0, \ldots, x_n)$$

Solution 7.3. *On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.*

$$f(0) = f\Big(\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}f'\Big(\frac{1}{2}\Big) + \int_{\frac{1}{2}}^{0} -tf''(t)dt$$

et de même

$$f(1) = f\Big(\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}f'\Big(\frac{1}{2}\Big) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)f''(t)dt$$

D'où

$$\begin{aligned} A(f) &= f(0) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) + f(1) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} tf''(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f''(t)dt \\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)dt \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Et c'est atteint pour $f(t) = \frac{t^2}{4}$.

Solution 7.4. *Pour tout* $(x,h)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)$ *donc*

$$f'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1)) \tag{7.1}$$

donc f' *est* $\mathcal{C}^1$ *et donc* f *est* $\mathcal{C}^2$. *On fixe alors* x *et on dérive deux fois* (7.1) *en fonction de* h. *On a alors*

$$f''(x+h)=f''(x-h)$$

pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$ *donc* f'' *est constante et* f *est polynômiale de degré 2.*

Réciproquement, si $f(x)=ax^2+bx+c$, *on a bien la relation de l'énoncé.*

Solution 7.5.

1. *Soit* $a>0$,

$$\begin{array}{rccc} \tau_a: & \mathbb{R} & \to &]a,+\infty[\\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

est croissante. Donc il existe $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_a(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. *On écrit alors*

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{x}+\frac{f(a)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} l$$

2. *S'il existe* $a<b\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ *tel que* $f(a)<f(b)$, *alors* $\tau_a(b)>0$. *Comme* τ_a *est croissante,* $l\geqslant\tau_a(b)>0$. *Par contraposée, si* $l\geqslant 0$, f *est décroissante.*

3. *Posons pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)=f(x)-lx$. *Pour* $x<y$, *on a*

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-l\leqslant 0$$

Donc φ *est décroissante et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\in\overline{\mathbb{R}}$ *existe.*

Solution 7.6.

1. *On forme*

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\frac{1}{p}+x} \end{array}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{np}\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{k}{np}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{dx}{\frac{1}{p}+x}=\ln(p+1)=l_p$$

2. *On note* $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

   Soit $\varepsilon_0 > 0$. *Il existe* $\alpha_0 > 0$ *tel que si* $0 < x < \alpha_0$, *alors* $|\varepsilon(x_0)| \leqslant \varepsilon_0$, *et il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{n} \leqslant \alpha_0$. *Alors pour tout* $n \geqslant N_0$, *pour tout* $k \in \{0, \dots, np\}$,

$$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left|\varepsilon\Big(\frac{1}{k+n}\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}$$

   et

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{k+n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}\frac{np+1}{n+1} \leqslant \varepsilon_0$$

   On a donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(p+1) f'(0)$$

3. *On peut penser à* $f : x \mapsto \sqrt{x}$ *continue et* $f(0) = 0$. *De plus,*

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

   donc v_n *diverge.*

4. *On écrit* $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + x^2\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} 0$. *Ainsi,*

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{bp} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{(k+n)^2}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$, *pour tout* $k \in \{0, \dots, np\}$, $|\varepsilon(\frac{1}{n+k})| \leqslant \varepsilon$ *et donc*

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2}$$

   donc

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right)$$

   puis

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(np)^2} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p}+\frac{k}{np})^2}$$
$$= \frac{1}{np} \times \underbrace{\frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p}+\frac{k}{np})^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{(\frac{1}{p}+x)^2}}$$

donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(0)p}{n(p+1)}$$

Solution 7.7. *Supposons que f' ne tend pa vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \geqslant A, |f'(x_A)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\alpha_0 \geqslant 0$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha_0$ alors $|f'(x) - f'(y)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $t \in [x_A - \alpha, x_A + \alpha]$, on a*

$$|f'(t)| \geqslant |f'(x_A)| - |f'(x_A) - f'(t)| \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

et pour $A = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geqslant n, \forall t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f'(t)| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{n}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f' > 0$ sur les $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Alors

$$f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = \int_{x_n - \alpha_0}^{x_n + \alpha_0} f'(t)dt \geqslant \varepsilon_0 \alpha_0 > 0$$

mais comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = 0$$

d'où la contradiction.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, on applique ce qui précède à $\Im(f)$ et $\Re(f)$.

Si f' n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

car $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ et

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{2x\cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en } +\infty}$$

Solution 7.8. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x+\frac{h}{2}) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x)$$

par continuité de g. Donc f est dérivable et $f' = g$. Par ailleurs, pour $y = \frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2})$$

par récurrence f est $\mathcal{C}^\infty$.

En outre, en fixant x et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à y, on a

$$f''(x+y) - f''(x-y) = 0$$

Donc f'' est constante donc f est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec $f' = g$).

Solution 7.9. *On a*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt$$

On note $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \int_a^b F''(t)(b-t)dt$$

Pour $a = k$ et $b = k + \frac{1}{2}$, on a

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}-u)du$$

et pour $a = k+1, b = k+\frac{1}{2}$,

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}+u)du$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(f(k) - f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u(f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u))du$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u)}_{\geqslant 0 \text{ car } u\geqslant 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du$$

et $f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u) \leqslant f'(k+1) - f'(k)$ *d'où*

$$S_n \leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} udu}_{=\frac{1}{8}}(f'(n) - f'(1))$$

Solution 7.10.

1. *D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a*

$$\begin{cases} \|A\| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2 \\ \|B\| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2 \end{cases}$$

   On a $B - A - f(x-h) + f(x+h) = 2hf'(x)$ *d'où*

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}$$

   Donc f' *est bornée sur* $\mathbb{R}$*. On a ensuite un majorant qui dépend de* h *que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.*

2. *L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau*

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|A_k\| \leqslant \frac{k^n}{n!} M_n$$

   On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1 - f(x+1) \\ \vdots \\ A_k - f(x+k) \\ \vdots \\ A_n - f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

   On a

$$\det(M) = \frac{(-1)^n}{1! \times 2! \times \cdots \times (n-1)!} V(1, \dots, n)$$

où V *est le déterminant de Vandermonde. Donc* $\det(M) \neq 0$*. On peut former les* $f^{(j)}(x)$ *en fonction des* $(A_i - f(x+i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *: il existe* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ *tel que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (A_i - f(x+i))$*. Donc*

$$\|f^{(j)}(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \Big(\frac{n}{n!} M_n + M_0 \Big)$$

Donc $f^{(j)}$ *est bornée pour tout* $j \in \{1, \ldots, n-1\}$*.*

Solution 7.11.

1.

$$l_{\sigma,\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \Big\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \gamma'(t) dt \Big\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

2. On a

$$\begin{aligned} \Big| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \Big| &= \Big| \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| - \| \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{>0} \gamma'(a_i) \| \Big| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) - (a_{i+1} - a_i)\gamma'(a_i)\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt \end{aligned}$$

3. $\|\gamma'\|$ *est continue donc*

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\delta(\sigma) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i)$$

Donc α_0 *existe.*

γ' *est continue sur* $[a,b]$ *donc uniformément continue sur* $[a,b]$*, et il existe* $\alpha_1 > 0$ *tel que pour tout* $(x,y) \in [a,b]^2$*, on a*

$$|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Alors si $\delta(\sigma) \leqslant \alpha_1$*, pour tout* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$*, pour tout* $t \in [a_i, a_{i+1}]$*, on a*

$$|t - a_i| \leqslant (a_{i+1} - a_i) \leqslant \alpha_1$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i) - \gamma'(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, si $@d(\sigma) \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1)$*, on a*

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

4. *On a*

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$$

donc $\|\gamma'(t)\| = R$ *et* $l(\gamma) = 2\pi R$.

Solution 7.12.

1. *Pour tout* $t \in I$*, on a*

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_2(t)}$$

donc

$$e^{\mathrm{i}(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1$$

Ainsi, pour tout $t \in I$*, il existe* $k(t) \in \mathbb{Z}$ *telle que* $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$*. On a*

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi}$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à k_0 *d'après le théorème des valeurs intermédiaires.*

2. *Si* $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$*,*

$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, par composition,* f *est* $\mathcal{C}^k$*. On a alors*

$$f(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = \mathrm{i}\theta'(t) e^{\mathrm{i}\theta(t)} = \mathrm{i}\theta'(t) f(t)$$

Donc

$$\theta(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)}$$

De plus, on a

$$\theta(t) = \theta(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

pour $t_0 \in I$.

3. *On fixe* $t_0 \in I$. *Soit* θ_0 *un argument de* $\gamma(t_0)$, *on pose*

$$\theta(t) = \theta_0 - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

Comme $\frac{f'}{f}$ *est* $\mathcal{C}^{k-1}$, θ *est bien* $\mathcal{C}^k$. *On forme* $g(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)}$ *qui est de classe* $\mathcal{C}^k$. *On a*

$$g'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t)$$

donc $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$, *donc* $\frac{g}{f}$ *est constante sur* I *et* $g(t_0) = e^{\mathrm{i}\theta_0} = f(t_0)$ *donc* $g = f$ *sur* I. *Ainsi, pour tout* $t \in I$, *on a* $|f(t)| = |e^{\mathrm{i}\theta(t)}| = 1$ *et si* $\theta(t) = a(t) + \mathrm{i}(t)$, *on a donc*

$$e^{\mathrm{i}\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{\mathrm{i}a(t)}$$

donc $b(t) = 0$ *et* $\theta(t) \in \mathbb{R}$.

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires