

*Exercices MP/MP**

Table des matières

| | |
|---|----|
| 1 Algèbre Générale | 2 |
| 2 Séries numériques et familles sommables | 9 |
| 3 Probabilités sur un univers dénombrable | 15 |
| 4 Calcul matriciel | 22 |
| 5 Réduction des endomorphismes | 25 |
| 6 Espaces vectoriels normés | 26 |
| 7 Fonction d'une variable réelle | 27 |
| 8 Suites et séries de fonctions | 28 |
| 9 Séries entières | 29 |
| 10 Intégration | 30 |
| 11 Espaces préhilbertiens | 31 |
| 12 Espaces euclidiens | 32 |
| 13 Calcul différentiel | 33 |
| 14 Équation différentielles linéaires | 34 |

1 Algèbre Générale

Exercice 1.1. Soit (G, \cdot) un groupe tel que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que f_p, f_{p+1}, f_{p+2} soient des morphismes où

$$\begin{array}{ccc} f_p : & G & \rightarrow G \\ & x & \mapsto x^p \end{array}$$

Montrer que G est un groupe abélien.

Exercice 1.2. Soit (G, \cdot) un groupe fini. Soit $A = \{x \in G, \omega(x) \text{ est impair}\}$ où $\omega(x)$ désigne l'ordre de x . Montrer que A est non vide, et que $x \mapsto x^2$ est une permutation de A .

Exercice 1.3. Soit $\sigma \in \Sigma_n$. On note $\theta(\sigma)$ le nombre d'orbite de σ . Montrer que le nombre minimal de transposition dont σ est le produit est $n - \theta(\sigma)$.

Exercice 1.4. Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Combien y a-t-il de morphismes de groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 1.5. Soit (G, \cdot) un groupe abélien fini. Soit $P = \prod_{x \in G} x$. Montrer que $P = e_G$ (élément neutre de G) sauf dans un cas très particulier.

Exercice 1.6. Soit G un sous-groupe additif de \mathbb{R} . On suppose qu'il existe un nombre fini n d'ensembles de la forme $(x + G)_{x \in \mathbb{R}}$ avec $x + G = \{x + y, y \in G\}$. Montrer que $G = \mathbb{R}$.

Exercice 1.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'automorphismes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$?

Exercice 1.8. Soit (G, \cdot) un groupe fini et φ un morphisme de $G \rightarrow G$. Montrer que $|G| = |\text{Im } \varphi| \times |\ker \varphi|$. En déduire que $\ker \varphi = \ker \varphi^2$ si et seulement si $\text{Im } \varphi = \text{Im } \varphi^2$.

Exercice 1.9. Soit (G, \cdot) un groupe fini d'ordre n , et $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \wedge m = 1$. Montrer que pour tout $y \in G$, il existe un unique $x \in G$ tel que $x^m = y$.

Exercice 1.10. Soit (G, \cdot) un groupe fini. Pour $g \in G$, on note

$$C(g) = \{hgh^{-1}, h \in G\}$$

et

$$S_g = \{x \in G, xg = gx\}$$

1. Montrer que S_g est un sous-groupe de G .
2. Montrer que $|G| = |S_g| \times |C(g)|$.
3. On note $Z(G) = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G , et que pour tout $g \in G$, $Z(G) \subset S_g$.
4. On suppose que $|G| = p^\alpha$ où p est premier et $\alpha \geq 1$. Montrer que $|Z(G)| \neq 1$. On pourra utiliser le fait que $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe $h \in G$ tel que $y = h x h^{-1}$ est une relation d'équivalence.
5. On suppose que $|G| = p^2$. Montrer que G est abélien et qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

Exercice 1.11. Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ (respectivement $(\mathbb{Q}, +)$) dans (\mathbb{Q}_+^*, \times) . On pourra poser, pour p premier et $n \in \mathbb{Z}$, $\nu_p(n)$ la puissance de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n .

Exercice 1.12. Soit G un groupe engendré par deux éléments $x, y \neq e_G$ tels que $x^5 = e_G$ et $xy = y^2x$. Montrer que $|G| = 155 = 5 \times 31$ et qu'il est unique à un isomorphisme près.

Exercice 1.13. Soit (G, \cdot) un groupe abélien fini. On note $N = \vee_{x \in G} \omega(x)$ (ppcm des ordres des éléments de G) appelé exposant de G , caractérise par $\forall k \in \mathbb{Z}, (\forall x \in G, x^k = e)$ si et seulement si $(\forall x \in G, \omega(x) \mid k)$ si et seulement si $(N \mid k)$. En particulier, $N \mid |G|$.

On pose $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en nombres premiers de N .

1. Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Justifier qu'il existe $y_i \in G$, tel que $p_i^{\alpha_i} \mid \omega(y_i)$.
2. Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Justifier qu'il existe $x_i \in G$, tel que $\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}$.
3. Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $\omega(x) = N$.

Exercice 1.14. Soit \mathbb{K} un corps fini commutatif, (\mathbb{K}^*, \times) est un groupe abélien fini. Soit $N = \vee_{x \in \mathbb{K}^*} \omega(x)$ (ordre multiplicatif). On sait d'après l'exercice précédent qu'il existe $x_0 \in \mathbb{K}^*$ tel que $\omega(x_0) = N$. En étudiant le polynôme $X^N - 1_K$, montrer que (\mathbb{K}^*, \times) est cyclique.

En exemple, soit $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +, \times)$ (c'est un corps).

Trouver un générateur du groupe $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*, \times)$.

Exercice 1.15. Soit (G, \cdot) un groupe tel que $\forall x \in G, x^2 = e_G$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Montrer que si G est fini, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit isomorphe à $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$. On pourra considérer une famille génératrice minimale.

Exercice 1.16. Soit (G, \cdot) un groupe, on appelle groupe dérivé de G et on note

$$D(G) = \{xyx^{-1}y^{-1}, (x, y) \in G^2\}$$

1. Si G est abélien, que vaut $D(G)$?
2. Montrer que pour $n \geq 3$, les 3-cycles engendrent \mathcal{A}_n (groupe des permutations de signature égale à 1).
3. Montrer que deux 3-cycles (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) sont conjugués dans Σ_n (c'est-à-dire qu'il existe $\sigma \in \Sigma_n$ telle que $(b_1, b_2, b_3) = \sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1}$). Est-ce encore vrai dans \mathcal{A}_n ?
4. En déduire $D(\Sigma_n)$.

Exercice 1.17. Soit (G, \cdot) un groupe fini de cardinal n .

1. Soit $g \in G$ et

$$\begin{aligned} \tau_g : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Montrer que

$$\begin{aligned}\tau : G &\rightarrow \Sigma(G) \\ g &\mapsto \tau_g\end{aligned}$$

(où $\Sigma(G)$ est le groupe des permutations de G) est un morphisme injectif. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de (Σ_n, \circ) .

2. Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

Exercice 1.18. Montrer qu'il n'existe pas $(x, y, z, t, n) \in \mathbb{N}^5$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = (8t + 7) \times 4^n$.

Exercice 1.19. Montrer que $10^{10^n} \equiv 4[7]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.20. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 1.21. Soit U le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$.

1. Quel est l'ordre de $\bar{5}$?
2. Montrer que $U = \text{gr}\{\bar{-1}, \bar{5}\}$ (groupe engendré) et qu'il est isomorphe à un groupe produit.

Exercice 1.22. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \wedge n = 1\}$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité, on définit $\mu(n) = \sum_{\xi \in G_n} \xi$.

1. Montrer que si $n \wedge m = 1$, alors $\mu(nm) = \mu(m)\mu(n)$.
2. Calculer $\mu(1)$. Que vaut $\mu(n)$ si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ (décomposition en nombres premiers) ?
3. Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ muni de

$$\begin{aligned}f \star g : \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ n &\mapsto (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d)\end{aligned}$$

Montrer que \star est une loi associative et commutative, qu'elle admet un élément neutre noté e . Déterminer l'inverse de μ pour \star . On pourra calculer, pour $n \geq 2$, $\sum_{d|n} \mu(d)$.

4. Que vaut pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} d\mu(d/n)$?

Exercice 1.23. Soit p premier. Montrer que

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 2^p + 1[p^2]$$

Exercice 1.24.

1. Montrer que les sous-groupes finis de (\mathbb{U}, \times) sont cycliques (où \mathbb{U} est le cercle unité).
2. Quels sont les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$?
3. Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) &\mapsto \sum_{M \in G} \langle MX, MY \rangle\end{aligned}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de \mathbb{R} . Montrer que φ est un produit scalaire pour lequel les matrices de M sont des isométries. En déduire que G est cyclique.

Exercice 1.25. Soit $E = \{x + y\sqrt{2}, x \in \mathbb{N}^*, y \in \mathbb{Z}, \text{ et } x^2 - 2y = 1\}$.

1. Montrer que E est un sous-groupe de (\mathbb{R}_+, \times) .
2. Montrer que $E = \{(x_0 + y_0\sqrt{2})^n, n \in \mathbb{Z}\}$ où $x_0 + y_0\sqrt{2} = \min E \cap]1, +\infty[$.

Exercice 1.26. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $7 \mid n^n - 3$.

Exercice 1.27. Soit p premier plus grand que 5. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{(p-1)!}$. Montrer que $p^2 \mid a$.

Exercice 1.28. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.

Exercice 1.29.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $(\sin(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.
2. Montrer qu'il y a une infinité de puissance de 2 qui commencent par 7 en base 10.

Exercice 1.30. Soit A un anneau commutatif intègre, on dit que A est euclidien si et seulement s'il existe $v : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ tels que pour tout $(a, b) \in A \times A \setminus \{0\}$, il existe $(q, r) \in A^2$ tels que $a = bq + r$ et $v(r) < v(b)$ ou $r = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est euclidien.
2. Montrer que tout anneau euclidien est principal.

Exercice 1.31.

1. Soit p premier plus grand que 3. Soit $\bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}$. Montrer que \bar{x} est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $\bar{x}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$.
2. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 1.32. Soit $P = \sum_{i=0}^n r_i X^i \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$. On pose

$$c(P) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min_{0 \leq i \leq n} (\nu_p(r_i))}$$

où \mathcal{P} est l'ensemble des nombres premiers. On écrit $P = c(P) \times P_1$.

1. Montrer que $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$, que ses coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble et qu'une telle écriture est unique.
2. Soit $(P, Q) \in (\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\})^2$. Montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$. On justifiera en passant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ que si p premier divise tous les coefficients de $P_1 \times Q_1$, alors il divise tous les coefficients de P_1 ou tous ceux que Q_1 [Lemme de Gauss].
3. En déduire que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$, alors il l'est aussi sur $\mathbb{Q}[X]$. La réciproque est-elle vraie ?
4. Trouver tous les $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$. Si $\theta \not\equiv 0[\pi]$ et si $\theta = 2\pi p/q$ avec $p \wedge q = 1$, on appliquera ce qui précède à $A = X^q - 1$ et $P = X^2 - (2\cos(\theta))X + 1$.

Exercice 1.33. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur \mathbb{R} .

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $P + \alpha P'$ est scindé sur \mathbb{R} .
2. Soit $R = \sum_{i=0}^r a_i X^i$ scindé sur \mathbb{R} . Montrer que $\sum_{i=0}^r a_i P^{(i)}$ l'est aussi.

Exercice 1.34. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$, scindé sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(n-1)(P'^2)(x) \geq nP(x)P''(x)$.

Exercice 1.35.

1. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, montrer que R n'a que des racines simples sur \mathbb{C} . On pourra évaluer $P \wedge P'$ sur $\mathbb{Q}[X]$.
2. Soit $A \in \mathbb{Q}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de A de multiplicité $m(\alpha) > d(A)/2$ où $d(A)$ est le degré de A . Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$.
3. Soit $A \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $2m+1$. On suppose que A admet une racine complexe de multiplicité plus grande que m . Montrer que A possède une racine rationnelle.

Exercice 1.36. Soit (G, \cdot) un groupe et A une partie finie de G stable pour \cdot . Montrer que A est en fait un sous-groupe de G .

Exercice 1.37. Soit p premier plus grand que 3. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$,

$$(1+p)^{p^\alpha} \equiv 1 + p^{\alpha+1}[p^{\alpha+2}]$$

Exercice 1.38. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \wedge n}}^n e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{\xi \in \Xi_n} \xi$ où Ξ_n sont les racines primitives n -ièmes de l'unité. On a notamment $|\Xi_n| = \varphi(n)$ (fonction d'Euler).

1. Montrer que si $m \wedge n = 1$, $\mu(m \times n) = \mu(m) \times \mu(n)$.
2. Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ (décomposition en facteurs premiers), que vaut $\mu(n)$?

Exercice 1.39. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $7 \neq 2x^2 - 5y^2$.

Exercice 1.40. Résoudre $x^3 = 1$ dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.

Exercice 1.41. Soit $n \geq 3$.

1. Combien y a-t-il d'inversibles dans $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}, +, \times)$? On note $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ le groupe (multiplicatif) de ses inversibles.
2. Montrer que $5^{2^{n-3}} \equiv 1 + 2^{n-1}[2^n]$.
3. Évaluer l'ordre de 5 dans $(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$.
4. Montrer que $\text{gr}\{-1\} \cap \text{gr}\{5\} = \{1\}$ où gr indique le groupe engendré par l'ensemble. En déduire que $\left((\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times, \times\right)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 1.42. Soit (G, \cdot) un ensemble non vide muni d'une loi interne associative. On suppose que

- (i) $\exists e \in G, \forall x \in G, x \cdot e = x$,
- (ii) $\forall x \in G, \exists x' \in G, x \cdot x' = e$.

Montrer que (G, \cdot) est un groupe.

Exercice 1.43. Montrer qu'il existe une infinité de multiples de 21 qui s'écrivent avec uniquement des 1 en base 10.

Exercice 1.44. Soit \mathbb{K} un corps commutatif fini. Soit $n = |\mathbb{K}^*|$.

1. Soit d un diviseur de n , on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{K}^*$ d'ordre (multiplicatif) d dans le groupe (\mathbb{K}^*, \times) . Montrer qu'il existe exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans (\mathbb{K}^*, \times) (φ indique la fonction d'Euler). On pourra s'intéresser au polynôme $X^d - 1_{\mathbb{K}}$.
2. En utilisant $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, montrer que (\mathbb{K}^*, \times) est cyclique.

Exercice 1.45. Soit p premier plus grand que 5. et $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

1. Montrer que

$$\begin{aligned} f : M &\rightarrow M \\ x &\mapsto 1 - x^{-1} \end{aligned}$$

est bien définie et calculer f^3 .

2. Montrer que -3 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si f admet un point fixe.
3. Montrer que -3 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1[3]$ (on pourra décomposer f en produit de cycles de supports disjoints).

Exercice 1.46. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x = \pm b_m b_{m-1} \dots b_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ (écriture décimale). Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, a_{n+T} = a_n$ (la suite des décimales est périodique à partir du rang n_0).

Exercice 1.47. On définit $H_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

1. Montrer que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ si et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$.

Exercice 1.48. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ racine de P . Montrer que α est racine simple de P . On pourra se demander, si le degré de P est n et $P = (X - \alpha)(a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1})$, quels sont les coefficients a_k de \mathbb{Q} tels que $a_k \in \mathbb{Q}$.

Exercice 1.49. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 5 tel que P admette une racine complexe α d'ordre plus grand que 2. Montrer que P admet au moins une racine rationnelle. Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est de degré n admette une racine complexe multiple, alors P a une racine rationnelle ?

Exercice 1.50. On définit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Montrer que c'est le plus petit sous-anneau de \mathbb{C} contenant i .
2. On définit, pour $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, $|z|^2 = a^2 + b^2$. Montrer que z est inverse dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $|z|^2 = 1$. En déduire l'ensemble U des inversibles.
3. (a) Montrer que pour tout $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, il existe $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, $|z - z_0|^2 \leq \frac{1}{2}$.
(b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[i]^2$ avec $z_2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $z_1 = qz_2 + r$ et $|r| < |z_1|$. A-t-on unicité ?
(c) En déduire que $\mathbb{Z}[i]$ est principal.

4. Montrer que tout élément $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ peut se décomposer en $z = u \times \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\nu_\rho(z)}$ où $u \in U$ et \mathcal{P}_0 est un ensemble d'irréductibles tel que tout élément de \mathcal{P} (irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$) est associé à un unique élément de \mathcal{P}_0 (on pourra raisonner par récurrence sur $|z|^2 \in \mathbb{N}$). Montrer l'unicité de cette décomposition.

Exercice 1.51. Soit p premier plus grand que 3. On note \mathbb{F}_p le corps $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$. On dit que $x \in \mathbb{F}_p^*$ est un résidu quadratique si et seulement si il existe $y \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $x = y^2$. On note R l'ensemble des résidus quadratiques.

1. Montrer que R est un sous-groupe de (\mathbb{F}_p, \times) de cardinal $\frac{p-1}{2}$ et $a \in R$ si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
2. Montrer que si $p = a^2 + b^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, alors $p \equiv 1[4]$.
3. Montrer que, pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$,

$$\begin{aligned} f : \{0, \dots, E(\sqrt{p})\}^2 &\rightarrow \mathbb{F}_p \\ (a, b) &\mapsto a - kb \end{aligned}$$

n'est pas injective. En déduire qu'il existe $(a_0, b_0) \in \{1, \dots, E(\sqrt{p})\}^2$ tel que $k = a_0 \times b_0^{-1}$.

4. Soit p premier tel que $p \equiv 1[4]$. Montrer que p est somme de deux carrés.

Exercice 1.52 (Fermat). Soit p premier. On sait, d'après l'exercice précédent, que p est somme de deux carrés si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$. On note $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2, n = a^2 + b^2\}$.

1. Montrer que A est stable par produit. On note alors $P_1 = \{p \text{ premier} \mid p = 2 \text{ ou } p \equiv 1[4]\}$ et $P_2 = \{p \text{ premier} \mid p \equiv 3[4]\}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $p \in P_2$, $\nu_p(n)$ est pair (où $\nu_p(n)$ la puissance de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n). Montrer que $n \in A$.
3. Montrer la réciproque (pour $n \in A$, pour $p \in P_1 \cup P_2$) tel que $\nu_p(n)$ est impair, on montrera que -1 est un carré dans \mathbb{F}_p .

2 Séries numériques et familles sommables

Exercice 2.1. Soit la suite définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = 2a_{\lfloor n/3 \rfloor} + 3a_{\lfloor n/9 \rfloor}$$

1. On pose pour $p \in \mathbb{N}$, $b_p = a_{3^p}$. Calculer b_p en fonction de p .
2. Montrer que si $3^p \leq n < 3^{p+1}$, alors $a_n = b_p$.
3. Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\frac{a_n}{n})_{n \geq 2}$.

Exercice 2.2. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue. Soit $x_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que f admet au moins un point fixe $l \in [a, b]$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un segment.
3. En déduire que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

Exercice 2.3. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$, on définit $u_0 = e^{i\theta}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. Peut-on avoir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- stationnaire ?
- convergente ?
- périodique ?
- dense dans \mathbb{U} ?

On pourra étudier le développement binaire de $\frac{\theta}{2\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$.

Exercice 2.4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, étudier $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^{n^2}$.

Exercice 2.5. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective telle que $(x_{\varphi(n)})$ est décroissante.
2. Montrer que pour tout $l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble $I \subset \mathbb{N}$ fini tel que

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leq \varepsilon$$

ou si $l = +\infty$: $\forall A > 0$, il existe un sous-ensemble I fini tel que $\sum_{k \in I} x_k \geq A$.

Exercice 2.6. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \times \sum_{k=0}^n u_k^2 = 1$. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$. Une telle suite existe-t-elle ?

Exercice 2.7. Étudier $x_n = n - \sum_{k=1}^n \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right)$.

Exercice 2.8. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles telles que

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + b_n + c_n = 0,$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} = 3.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$. On pourra étudier $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$.

Exercice 2.9. Soit $u_0 \in]0, 1[$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. On pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que $v_n = n + \ln(n) + O(1)$, en déduire un développement de u_n .

Exercice 2.10.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $u_n^n = u_n + n$.
2. Montrer que $(u_n)_{n \geq 2}$ converge vers $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de $x_n - \lambda$.

Exercice 2.11. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs non tous nuls. On suppose que

$$u_n = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$$

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de limite a . En cas d'existence, évaluer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Exercice 2.12.

1. Soit $x \in [0, 1[$, montrer qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n \geq 2}$ d'entiers naturels telle que
 - (i) $0 \leq a_n \leq n - 1$ pour tout $n \geq 2$,
 - (ii) il existe $m \geq n$ tel que $a_m < m - 1$ pour tout $n \geq 2$,
 - (iii) $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n \geq 2}$ pour que $x \in \mathbb{Q}$.
3. Soit $l \in [-1, 1]$, montrer qu'il existe $x \in [0, 1[$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n!2\pi x) = l$.

Exercice 2.13. Soit $u_0 > 0, u_1 > 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) + \ln(1 + u_{n-1})$$

Étudier la suite (u_n) . On pourra poser $M_n = \max(u_n, u_{n-1}, l)$, $m_n = \min(u_n, u_{n-1}, l)$ où $l = 2 \ln(1 + l)$ et $l > 0$.

Exercice 2.14. Soit $(p, q) \in (\mathbb{R}^*)^2$ avec $p/q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On suppose que $(e^{ipx_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e^{iqx_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Et si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée ?

Exercice 2.15.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.

Exercice 2.16. Soit $u_n = \prod_{k=2}^n \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k+1}}$ pour $n \geq 2$. Quelle est la limite de cette suite ? Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 2} u_n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$?

Exercice 2.17. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On pourra minorer $u_{n+1} + \dots + u_{2n}$. Montrer ensuite que si $\{p \in \mathbb{N}, pu_p \geq 1\}$ est infini, alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 2.18. Nature de $\sum u_n$ où $u_n =$

1. $n^{-1-\frac{1}{n}}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(t) dt$
3. $\sin(2\pi \frac{n!}{e})$
4. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 2.19. Montrer la convergence et calculer la somme des différentes séries suivantes :

1. $\sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq n} \frac{(-1)^k}{k}$
2. $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(3n)!}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{E(n^{\frac{1}{3}}) - E(n-1)^{\frac{1}{3}}}{4n - n^{\frac{1}{3}}}$ où E désigne la partie entière.

Exercice 2.20. Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe \mathcal{C}^2 et telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a < 0$. Montrer la convergence de $\sum_{n \geq 1} f(n)$. Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.

Exercice 2.21. Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^k}{k}$.

Exercice 2.22. Donner la nature de $\sum u_n$ quand u_n vaut

1. $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\frac{1}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}$
3. $\frac{\sin(n! \pi e)}{\ln(n)}$

Exercice 2.23. Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$ où u_n vaut

1. $a \ln(n) + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$ pour $n \geq 1$ (on cherchera d'abord une condition nécessaire et suffisante de convergence).
2. $\frac{2^n}{3^{2^{n-1}} + 1}$ pour $n \geq 1$.

3. $\frac{k-n\lfloor \frac{k}{n} \rfloor}{k(k+1)}.$

4. $\arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$ pour $n \geq 0$.

Exercice 2.24. Soit $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature lorsque

(i) $(nu_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0 OU

(ii) $(u_n)_{n \geq 1}$ décroît et tend vers 0.

Comparer alors les sommes respectives. En déduire, pour $p \geq 1$ fixé,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)}$$

Exercice 2.25. Soit $q \in \mathbb{Z}$ et $v_n = \frac{1}{(n+q)!} \sum_{k=1}^n k!$. Donner la nature de $\sum v_n$. En cas de divergence, donner un équivalent des sommes partielles.

Exercice 2.26. Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Montrer, en justifiant l'existence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{nc}}{1 - z^{na+b}}$$

Exercice 2.27. Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série complexe absolument convergente. On pose pour $q \in \mathbb{N}^*$, $b_q = \frac{1}{q(q+1)}(a_1 + 2a_2 + \dots + qa_q)$. Montrer que $\sum_{q \geq 1} b_q$ converge et évaluer sa somme en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. On pourra poser $u_{n,q} = \frac{na_n}{q(q+1)}$ si $n \leq q$ et 0 sinon.

Exercice 2.28. Soit $(u_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n < +\infty$. On pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)}(u_1 + \dots + nu_n)$ et $w_n = \sqrt[n]{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a l'inégalité entre la moyenne géométrique et arithmétique :

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$.

Montrer que $\sum w_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. On pourra utiliser l'exercice précédent. Montrer que e est la "meilleure" constante possible, c'est-à-dire que si $\forall (u_n)_{n \geq 1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum u_n$ converge, on a $\sum w_n \leq C \sum u_n$ alors $C \geq e$.

Exercice 2.29.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ soit sommable et exprimer alors la somme en fonction de la fonction ζ de Riemann.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ soit sommable.

Exercice 2.30. Étudier la sommabilité de $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)}$.

Exercice 2.31.

1. Montrer que pour tout $s \in]1, +\infty[$, le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$ converge (où les p_k sont les nombres premiers). Donner sa valeur en fonction de $\zeta(s)$.
2. Généraliser ce résultat à $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re(s) > 1$.

Exercice 2.32. On note $\varphi(n) = |\{k \in \{1, \dots, n\}, k \wedge n = 1\}|$ (fonction d'Euler). Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la somme $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ converge-t-elle ? Donner alors sa somme en fonction de $\zeta(\alpha)$.

Exercice 2.33. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{z_n^3}$ converge.

Exercice 2.34. Donner la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$.

Exercice 2.35. Pour $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*)$, on définit $u_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)} \dots$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge.
2. Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Faire le cas où $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$.

Exercice 2.36. Soit $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ et $v_n = (-1)^n u_n$ pour $n \geq 1$.

1. Donner la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
2. Soit $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$. Donner un équivalent de S_N puis développer jusqu'au $o(1)$.
3. Exprimer $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ en fonction de γ (constante d'Euler) et $\ln(2)$.

Exercice 2.37. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $q_1(n)$ la nombre de chiffres de l'écriture décimale de n . On définit par récurrence $q_{k+1}(n) = q_1(q_k(n))$. Étudier la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n q_1(n) q_2(n) \dots q_n(n)}$$

Exercice 2.38. Soit $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n} > 0$ sur \mathbb{R} et P_{2n+1} s'annule une seule fois en $a_{2n+1} < 0$.
2. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1}$.

Exercice 2.39. Montrer qu'il existe un unique $x_n \geq 0$ tel que $e^{x_n} = x_n + n$. Donne un développement asymptotique à deux termes de x_n pour $n \geq 1$.

Exercice 2.40. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge, étudier $\sum v_n$.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Pour $\alpha = 1$, montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $v_{n+1} + \dots + v_{n+p} \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$. En déduire que $\sum v_n$ diverge.
3. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Pour $\alpha > 1$, on forme $w_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$. Montrer que $\sum v_n$ converge. Et si $\alpha < 1$?

4. On suppose que $\sum u_n$ converge. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $w_n = \frac{u_n}{R_n}$. Étudier la nature de $\sum w_n$.

Exercice 2.41 (Principe des tiroirs de Dirichlet). Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$ tel que $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{qn}$. On pourra étudier les $n+1$ réels $(kx - \lfloor kx \rfloor) = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ et montrer qu'il existe $k \neq k'$ avec $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$.
2. Montrer qu'il existe $(p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $|x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$.
3. Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n \sin(n)}\right)_{n \geq 1}$ (on admet que $\pi \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Exercice 2.42. Soit $(a_{n,p}) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^*)^2}$ telle que

- (i) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,p} = a_p \in \mathbb{C}$,
 - (ii) il existe une suite de réels positifs (b_p) donc la série converge telle que pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $|a_{n,p}| \leq b_p$.
1. Évaluer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^n a_{n,p}$.
 2. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \right)$.

Exercice 2.43. Soit $\sum_{n \geq 1} u_n$ une série complexe absolument convergente.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on peut définir $S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{kn}$.
2. On suppose que pour tout $k \geq 1$, $S_k = 0$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 0$.

Exercice 2.44. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, si $\sum u_n$ converge, alors $\sum f(u_n)$ converge.

1. Montrer que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$, $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = -f(x)$ (f est impaire au voisinage de 0).
3. Montrer qu'il existe $\beta > 0$ $\forall (x, y) \in]-\beta, \beta[^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (f est linéaire au voisinage de 0).
4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\gamma > 0$ tels que $\forall x \in]-\gamma, \gamma[$, $f(x) = \lambda x$ (f est une homothétie au voisinage de 0).

3 Probabilités sur un univers dénombrable

Exercice 3.1. On lance une seule fois une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages avec remise dans une urne contenant initialement 1 boule noire et 1 boule blanche : si la pièce a donné pile (respectivement face), on rajoute à chaque fois une boule blanche (respectivement noire).

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au k -ième tirage ?
2. Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k -ième tirage, quelle est la probabilité p_k d'avoir obtenu pile au lancer initial de la pièce ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir k boules blanches au cours des k premiers tirages ?
4. On note B_k l'évènement où la k -ième boule est blanche. B_k et B_{k+1} sont-ils indépendants ?

Exercice 3.2. A et B s'affrontent dans une partie de pile ou face : $\mathbb{P}(P) = p$, $\mathbb{P}(F) = 1 - p = q$ avec $p \in]0, 1[$. Au départ, ils possèdent un total de N euros. Après chaque lancer, le perdant donne un euro au gagnant. A gagne si pile, perd si face. Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs est ruiné (ou s'ils avaient 0 au départ).

On note p_a (respectivement q_a) la probabilité que A (respectivement B) soit ruiné (en temps fini) si A a a euros au départ.

1. Évaluer p_0, p_N, q_0, q_N .
2. Montrer que pour tout $a \in \{1, \dots, N - 1\}$, $p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$. En déduire l'expression de p_a .
3. Calculer de même q_a , puis $p_a + q_a$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 3.3. Deux archers tirent alternativement sur une cible, jusqu'à ce que l'un des deux la touche. A commence. Il touche la cible avec une probabilité $a \in]0, 1[$. B touche la cible avec une probabilité $b \in]0, 1[$. On note G_A (respectivement G_B) l'évènement où A (respectivement B) l'emporte.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité pour que A (respectivement B) l'emporte au rang $2n + 1$ (respectivement $2n + 2$). On note A_n (respectivement B_n) l'évènement correspondant.
2. En déduire $\mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_B)$. Que vaut $\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B)$?
3. A quelle condition a-t-on $\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_B)$?

Exercice 3.4. Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers pour l'obtenir, on lui fait tirer un billet de loterie parmi n (un seul billet gagnant).

1. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne ?
2. Sachant qu'il a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu pile au n -ième lancer ? Et qu'il ait obtenu pile ?

Exercice 3.5. Dans une famille donnée, la probabilité pour qu'il y ait k enfants est p_k ($k \in \mathbb{N}$) avec $p_0 = p_1 = \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ et pour tout $k \geq 2$, $p_k = \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}}$. La probabilité qu'il y ait un garçon ou une fille est la même.

1. Vérifier que c'est une probabilité sur \mathbb{N} .
2. Quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement deux garçons ?
3. Quelle est la probabilité qu'une famille ait au moins deux filles sachant qu'elle a au moins deux garçons ?

Exercice 3.6. Deux joueurs jouent avec deux dés non pipés. A (respectivement) gagne s'il obtient un total de 6 (respectivement 7). A commence. On s'arrête lorsqu'un des deux joueurs gagne. Quelle est la probabilité de succès des deux joueurs ?

Exercice 3.7. Une urne contient a boules blanches et b noires. On en tire successivement n au hasard avec remise. Quelle est la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit pair ?

Exercice 3.8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité p_n pour qu'une bijection de $\{1, \dots, n\}$ possède au moins un point fixe. Donner la limite de p_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.9. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. On joue à pile ou face avec une probabilité p d'obtenir pile. On gagne 1 euro si on tombe sur face, on perd un euro sinon. Le jeu s'arrête lorsque l'on a 0 ou N euros. Pour $n \in \{0, \dots, N\}$, on note $p_N(n)$ la probabilité de gagner (respectivement de perdre) si on dispose au départ de n euros.

1. Calculer $p_N(0)$ et $p_N(N)$.
2. Calculer $p_N(n)$, $q_N(n)$ et $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N(n)$ à n fixé.

Exercice 3.10. Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Soit une urne contenant initialement une boule blanche et une noire. Après tirage, la boule tirée est remise avec c autres boules de sa couleur. Soit, pour $n \geq 1$, p_n la probabilité pour que la première boule blanche apparaisse au n -ième tirage. Calculer p_n et $\sum_{n \geq 1} p_n$ lorsque

1. $c = 1$
2. c quelconque.

Exercice 3.11. Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Une bactérie vit un seul jour. À l'issue de cette journée, elle peut se diviser en deux avec la probabilité p ou bien disparaître tristement sans laisser de traces avec la probabilité q . Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par U_n l'évènement indiquant que la lignée d'une bactérie donnée est éteinte au n -ième jour. On note $u_n = \mathbb{P}(U_n)$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \min(1, \frac{p}{q})$. Interpréter. Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, chercher un développement asymptotique en $o(\frac{1}{n})$ de u_n .

Exercice 3.12. Une puce se déplace sur une droite. Elle part de 0 et fait des sauts successifs de longueur 1. A chaque saut, elle avance avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et recule avec la probabilité $q = 1 - p$. Quelle est la probabilité pour que la puce repasse en 0 ? Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, le nombre de retours à l'origine est presque sûrement fini.

Exercice 3.13. Soit un lancer infini d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On désigne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'évènement qu'après le n -ième lancer, on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs (donc au $n - 1$ -ième et au n -ième). On note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Calculer a_1, a_2, a_3 .
2. Calculer a_n et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Interpréter.

Exercice 3.14. On dispose de $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N . Pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, la k -ième urne possède k boules blanches et $N - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire n fois une boule avec remise.

1. Quelle est la probabilité qu'au $n + 1$ -ième tirage, on ait obtenu une blanche sachant qu'au cours des n premiers lancers on a obtenu des blanches ? On note cette probabilité $\mathbb{P}_N(n)$.
2. Que vaut $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{P}_N(n)$ à n fixé ?

Exercice 3.15. Quelle est la probabilité pour que deux entiers naturels soient premiers entre eux ?

Exercice 3.16. A écrit à B avec une probabilité p_1 s'il lui a écrit la veille, p_2 sinon (avec $(p_1, p_2) \in [0, 1]^2$). Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n qui vaut 1 si A a écrit à B le jour n et 0 sinon. Déterminer la loi et l'espérance (sous réserve d'existence) de X_n .

Exercice 3.17. On lance deux dés non pipés. On note D_i le résultat du i -ième dé, $X = \max(D_1, D_2)$ et $Y = \min(D_1, D_2)$.

1. Déterminer les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Et si $\mathbb{P}(D_i = k) = p_{k,i}$ avec $\sum_{k=1}^6 p_{k,i} = 1$?

Exercice 3.18. Soit $(a, b) \in]0, 1[\times \mathbb{R}_+^*$, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N} dont la loi conjointe est

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{b^i e^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

1. Vérifier que cette définition est cohérente.
2. Déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Y et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.19. Soit $x \in]0, 1[$. Soit une succession d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, de probabilité d'échec x . On définit deux suites de variables aléatoires : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est la nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n -ième succès, et $T_1 = S_1$ et pour $n \geq 2$, T_n est le nombre d'épreuves séparant le n -ième succès du $n - 1$ -ième.

1. Exprimer, pour tout $n \geq 1$, S_n en fonction des $(T_i)_{i \geq 1}$.
2. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_n .
3. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S_n .
4. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Exercice 3.20. Soit X une variable aléatoire à valeur dans \mathbb{N} . Montrer que X possède une espérance si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge, et qu'on a alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Exercice 3.21. Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de Poisson) avec $\lambda > 0$. Quelle est la valeur que prend X avec la plus grande probabilité ? Évaluer la limite de cette valeur quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Exercice 3.22. Un veilleur de nuit doit ouvrir une porte, ils possède un trousseau de 10 clés indiscernables dont une seule ouvre la porte. S'il est sobre, après chaque échec, il met de côté la mauvaise clé et poursuit avec les autres. S'il est ivre, il remet la clé dans le trousseau après chaque échec. Soit X (respectivement Y) la nombre d'essais au bout desquels il ouvre la porte s'il est sobre (respectivement ivre).

1. Donner les lois de X et Y , leurs espérances et variances (si définies).
2. Le gardien est ivre un jour sur 3. Sachant qu'un jour il a essayé au moins 9 clés, quelle est la probabilité qu'il ait été sobre ce jour-là ?

Exercice 3.23. Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient N jetons à deux faces. L'une porte un numéro bleu, l'autre un rouge. Pour tout $1 \leq j \leq i \leq n$, un seul jeton porte i bleu et j rouge. On tire au hasard un jeton. On note B (respectivement R) le numéro bleu (respectivement rouge) tiré et $G = B - R$.

1. Déterminer N en fonction de n .
2. Donner les lois conjoints et marginales de B et R .
3. Déterminer les espérances et variances de B , R et G .

Exercice 3.24. Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières (naturelles) d'un axe d'origine 0. Au départ, le mobile est en 0. S'il est au point d'abscisse k à l'instant n , à l'instant $n+1$ il est au point $k+1$ avec une probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ et 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$. On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n et $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{k}{k+1} \mathbb{P}(X_n = k-1)$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(x_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^n \frac{u_n}{n-j+1} = 1$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 .
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + u_{n+1}$. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction des $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
5. On note T l'instant auquel le mobile revient pour la première fois à l'origine ($T = 0$ s'il ne repasse pas par l'origine). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$. En déduire $\mathbb{P}(T = 0)$.
6. T admet-elle une espérance ?

Exercice 3.25. Le nombre N de clients arrivant dans un magasin au cours d'une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ . Ces clients se répartissent de manière équiprobable entre les m caisses du magasin ($m \in \mathbb{N}^*$). Soit X_1 le nombre de clients qui arrivent à la caisse 1 au cours d'une journée.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $N = n$.
2. En déduire la loi de X_1 .

Exercice 3.26. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Quelle est la conjointe de (U, V) ?
2. Déterminer la covariance de X, Y ?
3. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 3.27. On tire indéfiniment à pile ou face, avec une probabilité $p \in]0, 1[$ d'obtenir pile, $q = 1 - p$ d'obtenir face. On note P (respectivement F) le rang d'apparition du premier pile (respectivement du premier face) et on note X (respectivement Y) la longueur de la première (respectivement deuxième) suite de tirages égaux (ex : (pile, pile, face, pile,...) donne $X = 2$ et $Y = 1$).

1. Donner les lois de P et F et leurs espérances et variances.
2. P et F sont-elles indépendantes ?
3. Donner les lois conjointes et marginales de X et Y . Sont-elles indépendantes ?
4. Montrer que $\mathbb{E}(X) \geq 2$.
5. Quelle est la probabilité que $X = Y$?
6. Donner la loi de $X + Y$ lorsque $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.28. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi, centrées à valeurs dans $[-1, 1]$.

1. Montrer que pour tout $\lambda \geq 0, \forall x \in [-1, 1], e^{\lambda x} \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}} + x \sinh(\lambda)$.
2. En déduire que si X est une variable aléatoire discrète centrée à valeurs dans $[-1, 1]$, alors pour tout $\lambda \geq 0, \mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}$ et $\mathbb{E}(e^{-\lambda X}) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}}$.
3. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda > 0, \mathbb{P}(X \geq a) \leq e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{\lambda X})$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $a \geq 0, \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq a\right) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2}}$.

Exercice 3.29.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N} d'espérances finies. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathbb{E}_{(X=k)}(Y) = \sum_{l=0}^{+\infty} l \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = l)$$

Montrer que

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X=k)}(Y) \times \mathbb{P}(X = k)$$

2. Soit $\lambda \geq 0$, on suppose que le nombre de descendants poules à la première génération d'une poule donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ . Soit X_n le nombre de poules à la n -ième génération avec $X_0 = N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 3.30. Au cours de sa vie, une poule pond N œufs où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Chaque œuf éclot avec une probabilité $p \in]0, 1[$. On note K le nombre de poussins. Donner la loi et l'espérance de K .

Exercice 3.31. Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'évènements indépendants de Ω (où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé) telle que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}$ (indicatrice de l'ensemble).

1. Évaluer l'espérance et variance de S_n , et en donner des équivalents.
2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Exercice 3.32. Soit $n \geq 1$, (X_1, \dots, X_n) des variables aléatoires indépendantes discrètes telles que $X_i \sim \mathcal{G}(p)$ (loi géométrique) avec $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$ et $U = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $V = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

1. Donner la loi de U et son espérance (dont on justifiera l'existence).
2. Donner la loi de V , montrer que

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1 - q^i}$$

Exercice 3.33. Un joueur arrive au casino avec une fortune $k \in \{0, \dots, N\}$ où N est la "banque", c'est-à-dire la limite que paiera le casino. A chaque étape, il gagne 1 avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et perd 1 avec une probabilité $q = 1 - p$. Il s'arrête lorsqu'il a 0 (ruine) ou N (banque). On sait que l'arrêt en temps fini est presque sûr. On note t_k le temps d'arrêt du joueur (le nombre de fois où il joue avant de s'arrêter).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(t_k > N(n+1)) \leq \mathbb{P}(t_k > Nn) \times (1 - p^N)$$

En déduire que t_k possède une espérance notée T_k .

2. Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$, $T_k = p(1 + T_{k+1}) + q(1 + T_{k-1})$.
3. En déduire que

$$T_k = \begin{cases} \frac{1}{q-p} \left[k - N \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right) \right] & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\ k(N-k) & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 3.34. Soit $s > 1$. On munit \mathbb{N}^* de la probabilité :

$$\forall n \geq 1, \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$$

1. Vérifier que c'est une probabilité sur \mathbb{N}^* . On forme, pour $n \geq 1$, $A_n = n\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.
2. Montrer que si \mathcal{P} est l'ensemble des nombres premiers, alors $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants.
3. En déduire que

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

puis que

$$\zeta(s) = \left(\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \right)^{-1}$$

Exercice 3.35. On dispose de deux pièces de monnaie. La pièce A (respectivement B) amène pile avec la probabilité $a \in]0, 1[$ (respectivement $b \in]0, 1[$). On choisit au départ de façon équiprobable une des deux pièces et on effectue le premier lancer avec celle là. Si on obtient pile, on garde la même, sinon on change. Soit, pour $n \geq 1$, E_n l'évènement désignant le fait que l'on utilise pour la première fois la pièce A au n -ième lancer. On indique de même par U_n l'évènement désignant le fait que l'on obtient n piles au cours des n premiers lancers.

Calculer $\mathbb{P}(E_n)$, $\mathbb{P}(U_n)$, $\mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n)$, $\mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}} U_n)$.

Exercice 3.36. Soit N pièces de monnaie, dont chacune amène pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$. A chaque lancer, on laisse de côté les pièces tombées sur pile, et on relance les autres jusqu'à que toutes arrivent sur pile.

1. Pour $i \in \{1, \dots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'évènement $A_{i,n}$ désignant le fait que la pièce numéro i est lancée au plus n fois.
2. Soit B_n l'évènement indiquant que l'on effectue au plus n relances. Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n)$.
3. Pour $n \geq 1$, quelle est la probabilité d'effectuer exactement n relances ?

Exercice 3.37. Soit p premier et $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (en tant que corps). Soit $n \geq 1$. On définit $\mathbb{K}_{<n}[X] = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(Q) < n\}$ et $\mathbb{K}_{=n}[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) = n\}$. Ces espaces sont munis de la probabilité uniforme. On forme $\Omega = \mathbb{K}_{<n}[X] \times \mathbb{K}_{=n}[X]$ muni de la probabilité uniforme.

1. Quelle est la loi de $\deg(Q)$?
2. Quelle est la probabilité pour que $Q \mid P$?
3. Soit $R \in \mathbb{K}_{<n-1}[X]$, on pose pour $(Q, P) \in \Omega$ avec $Q \neq 0$, R_1 le reste de la division euclidienne de P par Q . Calculer $\mathbb{P}(R_1 = R)$ et $\mathbb{P}_{\deg(Q)=k}(R_1 = R)$.

Exercice 3.38. On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n . On note X_1 le premier tirage et X_2 le deuxième.

1. Donner la loi conjointe de (X_1, X_2) .
2. Donner la loi de X_2 puis la loi de $X_1 \mid_{X_2=j}$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$.
3. X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
4. Généraliser à k tirages sans remise pour $1 \leq k \leq n$.

4 Calcul matriciel

Exercice 4.1. Soit $M = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k, l \leq n}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et calculer M^{-1} . Que vaut $\det(M)$?

Exercice 4.2. On dit que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est positive et on note $A \geq 0$ si et seulement si tous ses coefficients le sont.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \geq 0$ si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, si $X \geq 0$ alors $AX \geq 0$.
2. Quelles sont les matrices $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A \geq 0$ et $A^{-1} \geq 0$?

Exercice 4.3. Soit $A = \left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer A^{-1} et A^k pour $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4.4. Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique non nulle ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\text{Tr}(A) = 0$.

1. Montrer que A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra procéder par récurrence, en distinguant selon qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $A = \lambda I_n$ ou non. Dans le deuxième cas, pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A , on montrera qu'il existe $e_1 \in \mathbb{K}^n$ telle que $(e_1, u(e_1))$ est libre.
2. Montrer qu'il existe $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $A = [X, Y] = XY - YX$. On pourra considérer

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto DM - MD \end{aligned}$$

avec $D = \text{diag}(1, 2, \dots, n)$ et déterminer $\ker(\varphi)$.

Exercice 4.5. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$.

1. Pour quelles valeurs de λ , $I_n + \lambda XY^\top$ est inversible ?
2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. A quelle condition nécessaire et suffisante $A + \lambda XY^\top \in GL_n(\mathbb{R})$? Montrer alors que

$$(A + \lambda XY^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{\lambda}{1 + \lambda Y^\top A^{-1} X} A^{-1} X Y^\top A^{-1}$$

Exercice 4.6. Soit $n \geq 1$ et pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, $S_j = X^j(1 - X)^{n-j}$. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et exprimer $(1, X, \dots, X^n)$ en fonction de (S_0, \dots, S_n) .

Exercice 4.7. Soit \mathbb{K} un corps et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$ pour $n \geq 2$.

Exercice 4.8. Soit $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

- (i) $\forall \lambda \geq 0, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N(\lambda A) = \lambda N(A)$,
- (ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, N(A + B) \leq N(A) + N(B)$,
- (iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, N(AB) = N(BA)$.

1. Calculer $N(0)$.
2. Évaluer $N(E_{i,j})$ pour $i \neq j$ (matrice élémentaire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

3. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\text{Tr}(A) = 0$, alors A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra procéder par récurrence, en distinguant selon qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, $A = \lambda I_n$ ou non. Dans le deuxième cas, pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A , on montrera qu'il existe $e_1 \in \mathbb{K}^n$ telle que $(e_1, u(e_1))$ est libre.
4. En déduire $N(A)$ si $\text{Tr}(A) = 0$.
5. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N(A) = a|\text{Tr}(A)|$.

Exercice 4.9. Soit E un espace vectoriel de dimension n , $f \in GL(E)$ et g un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que $f + g \in GL(E)$ si et seulement $\text{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq 1$.

Exercice 4.10. On considère un carré dans \mathbb{Z}^2 . Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre de chemins de longueur n qui relient un sommet à un autre ? Généraliser à un cube dans \mathbb{Z}^3 .

Exercice 4.11 (Matrice à diagonale strictement dominante). Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. On dit que A est à diagonale strictement dominante. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Est-ce encore vrai si on a seulement l'inégalité large ?

Exercice 4.12. Calculer, pour $n \geq 1$, $\det \left((i \wedge j) \right)_{1 \leq i,j \leq n}$. On pourra utiliser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m = \sum_{k|n} \varphi(k)$.

Exercice 4.13. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose, pour $k \in \{1, \dots, n\}$, $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$. On suppose que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $A_k \in GL_k(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique décomposition $(L, U) \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{C}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ (matrices triangulaires inférieures et supérieures) où L a des 1 sur la diagonale et $A = LU$.

Exercice 4.14. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$, il existe des parties disjointes A_i et B_i de $\{1, \dots, 2n+1\} \setminus \{i\}$ avec $|A_i| = |B_i| = n$ et $\sum_{k \in A_i} a_k = \sum_{k \in B_i} a_k$. Montrer que $a_1 = \dots = a_{2n+1}$.

Exercice 4.15. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$, montrer qu'il existe une unique permutation $\sigma \in \Sigma_n$ et il existe $(T, T') \in (\mathcal{T}_n^+)^2$ telles que $M = TP_\sigma T'$ où $P_\sigma = (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i,j \leq n}$ et δ est le symbole de Kronecker. Cette décomposition est-elle unique ?

Exercice 4.16. Soit \mathbb{K} un sous-corps de \mathbb{C} et J un idéal non nul de $M_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si $J \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$, alors $J = M_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que J contient une matrice de rang 1.
3. Montrer que $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4.17. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \neq 0$ avec $\lambda AB + A + B = 0$, montrer que A et B commutent.

Exercice 4.18. Soit $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Inverser, si possible,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.19. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{i,i} = 0$ et pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} + a_{j,i} = 1$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A . Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

1. Déterminer $\ker(u) \cap H$. En déduire que $\text{rg}(A) \in \{n-1, n\}$.
2. Est-il possible que toutes les matrices A vérifiant ces conditions soient de rang $n-1$?
3. Même question avec n .

Exercice 4.20. Soit $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\text{rg}(M) = \text{rg}(N) = 1$. Montrer que M et N sont semblables si et seulement si $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(N)$.

Exercice 4.21. Soit F un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$, on note $r = \max\{\text{rg}(M) \mid M \in F\}$.

1. Montrer qu'il existe $(P_0, Q_0) \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$P_0^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_{J_r} Q_0 \in F$$

On note $F_0 = \{P_0 M Q_0^{-1} \mid M \in F\}$.

2. Montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ isomorphe à F , et que $r = \max\{\text{rg}(M_0) \mid M_0 \in F_0\}$.
3. On définit

$$G_0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & B^\top \\ \hline B & C \end{array} \right)$$

où $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par G_0 ?

4. Soit $M_0 \in G_0 \cap F_0$ avec

$$M_0 = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & B^\top \\ \hline B & C \end{array} \right) \in F_0$$

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B^\top \\ \hline B & C \end{array} \right) \in F_0$$

En déduire que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n-r\}^2$, pour tout $\lambda \neq 0$,

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & & & \vdots \\ & & & b_{j,r} \\ \hline b_{i,1} & \dots & b_{i,r} & c_{i,j} \end{array} \right) = 0$$

5. Montrer que $C = 0$, puis que $B = 0$.
6. Conclure.
7. Si $\dim(F) \geq n^2 - n + 1$, montrer que $F \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.
8. Et sur $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 4.22. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ non constante telle que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, $f(AB) = f(A) \times f(B)$. Montrer que $f(M) \neq 0$ si et seulement si $M \in GL_n(\mathbb{C})$.

5 Réduction des endomorphismes

6 Espaces vectoriels normés

7 Fonction d'une variable réelle

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires