*Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Suites et séries de fonctions **2**

1 Suites et séries de fonctions

Exercice 1.1. *Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (n + kx)^{\frac{1}{n}}$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(F_n)_{n \geqslant 1}$.

Exercice 1.2. *Soit $-\alpha \notin \mathbb{N}^*$. Pour $n \geqslant 1$, soit*

$$u_n(x) = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{(1+\alpha) \times \cdots \times (2n-1+\alpha)} x^n$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

1. *Donner la nature de $\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$.*
2. *Trouver les valeurs de α telle que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $[0, 1[$.*
3. *Trouver les valeurs de α telle que $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur $]-1, 0]$*

Exercice 1.3. *On forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \arctan(k + x) - \arctan(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

Quel est le domaine de définition de f ? Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 1.4. *On pose*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-nt}\right)$$

Montrer que f est définie pour $t > 0$ et donner un équivalent de $f(t)$ quand $t \to 0^+$. On admet l'existence de $I = \lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-u}\right) du$.

Exercice 1.5. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{n^2 x^2}{1 + n^4 x^4} \end{array} \tag{1}$$

$(a_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $g_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p)$.

1. *g_n est-elle définie ? Étudier la convergence simple de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

2. *Soit $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ si et seulement si pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a_p\notin[a,b]$.*

Exercice 1.6. *Convergence simple de*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{x^2+n^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x). \tag{2}$$

f est-elle $\mathcal{C}^1$? Donner la limite de f en 0 et $+\infty$. Donner un équivalent en 0.

Exercice 1.7. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle qu'il existe $M\geqslant 0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n'\|_{\infty,[a,b]}\leqslant M$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. Montrer qu'il y a convergence uniforme.*

Exercice 1.8. *Soit $x\geqslant 1$. Soit $f_n(x)=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+p^x}}$. Étudier la convergence.*

Exercice 1.9 (Produit Eulérien)**.**

1. *Soit $(\mathcal{A},\|\cdot\|)$ une algèbre normée et pour $n\geqslant 1$*

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ & a & \mapsto & \left(1_{\mathcal{A}}+\frac{a}{n}\right)^n. \end{array} \tag{3}$$

Montrer que

$$\left\|\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}-f_n(a)\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{\|a\|^k}{k!}-\left(1+\frac{\|a\|}{n}\right)^n. \tag{4}$$

On pourra montrer que pour tout $(n,k)\in\mathbb{N}\times[\![0,n]\!]$, $\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\leqslant\frac{1}{k!}$. En déduire que $(f_n)_{n\geqslant1}$ converge simplement vers exp, *avec convergence uniforme sur les compacts de $\mathcal{A}$.*

2. *On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$,*

$$P_n(X)=\frac{\left(1+\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1}-\left(1-\frac{\mathrm{i}X}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2\mathrm{i}}. \tag{5}$$

Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers sin *sur $\mathbb{C}$.*

3. *Déterminer le degré de P_n, les racines de P_n et son coefficient en X. En déduire que*

$$P_n=X\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{X^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right). \tag{6}$$

4. *Soit* $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$. *On suppose que*

   (i) *Il existe* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^N$ *avec* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$ *et pour tout* $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $|a_{n,p}| \leqslant \alpha_n$.

   (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, *il existe* $\beta_n = \lim\limits_{p\to+\infty} a_{n,p} \in \mathbb{C}$.

   Montrer que $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$.

5. *En déduire que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) = x \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. *On pourra montrer que pour tout* $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $|\tan(t)| \geqslant |t|$.

Exercice 1.10. *Soit* $[a,b] \subset]0,1[$ *et*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x(1-x) \end{array} \tag{7}$$

On définit $f^1 = f$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} * f \circ f_n$.

1. *Montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $\frac{1}{2}$ *sur* $[a,b]$. *A-t-on convergence uniforme sur* $[0,1]$ *?*

2. *Soit* $\mathbb{Q}_2 = \left\{\frac{p}{2^n} \middle| p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$. *Montrer que pour tout* $P \in \mathbb{R}[X]$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $Q \in \mathbb{Q}_n[X]$ *tel que* $\|P - Q\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$.

3. *En déduire que pour tout* $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, *il existe* $A \in \mathbb{Z}[X]$ *telle que*

$$\|f_n - A\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon. \tag{8}$$

   Peut-on généraliser à d'autres intervalles ?

Exercice 1.11. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'applications convexes de* $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *qui converge simplement vers* $u\colon I \to \mathbb{R}$.

1. *Soit* $[a,b] \subset \mathring{I}$. *Montrer qu'il existe* $A \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $(x,y) \in [a,b]$,

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leqslant A\,|x-y|\,. \tag{9}$$

   On pourra former $(\alpha,\beta) \in I^2$, $\alpha < a < b < \beta$, *et étudier les taux d'accroissements des* u_n.

2. *En déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* u *sur* $[a,b]$.

Exercice 1.12. *Soit* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *et* $E = \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ *muni de* $\|\cdot\|_\infty$. *Soit* $\varphi\colon \ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continue. Montrer que*

$$\begin{array}{cccc} \psi : & E & \to & E \\ & f & \mapsto & \varphi \circ f \end{array} \tag{10}$$

est continue.

Exercice 1.13. *On pose, sous réserve d'existence,*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nt}}{1+n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t). \tag{11}$$

1. *Donner le domaine de définition* E *de* f.
2. f *est-elle continue sur* E *? Évaluer* $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.
3. *Montrer que* f *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $E \setminus \{0\}$. *Donner l'équation différentielle satisfaite par* f.

Exercice 1.14. *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et*

$$\begin{array}{cccc} u_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{n^a} \end{array} \tag{12}$$

1. *Montrer que* $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ *converge simplement sur* $[0,1]$. *On note* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2. *Pour quelles valeurs de* a *a-t-on convergence normale sur* $[0,1]$ *?*
3. *Calculer* S *pour* $a = 1$ *et* $a = 2$.

Exercice 1.15. *Donner le domaine de définition de*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+nx^{\frac{3}{2}}}. \tag{13}$$

Étudier la continuité de f *sur son domaine de définition.* f *est-elle intégrable sur son domaine de définition ?*

Exercice 1.16.

1. *Donner le domaine de définition de*

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x). \tag{14}$$

2. *Montrer que l'on a converge uniforme sur* $[0,\infty[$. *A-t-on convergence normale ?*

3. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, mais n'est pas dérivable à droite en 0.

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S(x) = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x^k}\right)$.

Exercice 1.17 (Théorème de Weierstrass trigonométrique)**.** *On pose, pour $k \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{array}{rccc} Q_k : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & c_k \left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^k \end{array} \tag{15}$$

où $c_k \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(t)\mathrm{d}t = 1$.

1. Montrer que pour tout $\delta \in]0, \pi]$, $\lim\limits_{k \to +\infty} \sup\limits_{\delta \leqslant |t| \leqslant \pi} Q_k(t) = 0$.

2. Soit f continue 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On définit

$$\begin{array}{rccc} P_k : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)\mathrm{d}s. \end{array} \tag{16}$$

Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. On utilisera, en la justifiant, la continuité uniforme de f et son caractère borné sur $\mathbb{R}$.

3. On note, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{rccc} \varepsilon_k : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ & t & \mapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}. \end{array} \tag{17}$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ (« polynômes trigonométriques »2π-périodiques). Montrer que F est dense dans E, $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques pour $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 1.18. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite monotone de fonctions continues qui converge simplement vers u continue sur un compact $K \subset E$ où E est un espace vectoriel normé.*

1. Montrer que l'on peut se ramener au cas d'une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante de fonctions continues qui converge simplement vers 0.

2. Soit $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n,\varepsilon} = \{x \in K | f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$. Montrer que $F_{n,\varepsilon}$ est fermé, que $F_{n+1,\varepsilon} \subset F_{n,\varepsilon}$ et que $\cap_{n \in \mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_{N,\varepsilon} = \emptyset$, puis que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur K.

3. Prouver le résultat en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in K$ tel que $f_n(x_n) = \max\limits_{x \in K} f_n(x)$.