*Solutions Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Algèbre Générale

Solution 1.1. Soit $(x, y) \in G^2$. On a d'abord

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x \cdot y)^{p+1}(x \cdot y)^{-p} \\ &= x^{p+1} \cdot y^{p+1} \cdot y^{-p} \cdot x^{-p} \\ &= x^{p+1} \cdot y \cdot x^{-p} \end{aligned} \tag{1.1}$$

On cherche maintenant à montrer que x^{p+1} et y commutent. On a

$$y^{p+2} \cdot x^{p+2} = (y \cdot x)^{p+2} \tag{1.2}$$

$$= (y \cdot x)^{p+1} \cdot y \cdot x \tag{1.3}$$

$$= y^{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot y \cdot x \tag{1.4}$$

Donc on a $y \cdot x^{p+1} = x^{p+1} \cdot y$. En reportant dans (1.1), on a $x \cdot y = y \cdot x$ et donc

$$\boxed{\text{G est abélien.}} \tag{1.5}$$

■

Remarque 1.1.

— *Pour $(\Sigma_3, \cdot)$, on a f_0, f_1 et f_6 des morphismes mais Σ_3 n'est pas commutatif.*

— *Si f_2 est un morphisme, alors on a $(x \cdot y)^2 = x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2$ d'où $y \cdot x = x \cdot y$.*

Solution 1.2. A est non vide car $\omega(e_G) = 1$ et $e_G \in A$. Soit $x \in A$ tel que $\omega(x) = 2p+1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$x^{2k} = e_G \Leftrightarrow 2p+1 \mid 2k \tag{1.6}$$

$$\Leftrightarrow 2p+1 \mid k \tag{1.7}$$

d'après le théorème de Gauss.

Ainsi, $\omega(x^2) = 2p+1$ et $x^2 \in A$, donc

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A & \to & A \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est bien définie. Soit $x \in A$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2p+1} = e_G$ donc $x^{2p+2} = x$ d'où $(x^{p+1})^2 = x$. Il suffit donc de vérifier que $x^{p+1} \in A$ pour montrer que l'application est surjective. Comme A est fini, elle sera bijective.

On a $gr\{x^{p+1}\} \subset gr\{x\}$ et $(x^{p+1})^2 = x$ donc $gr\{x\} = gr\{x^{p+1}\}$ donc $\omega(x) = \omega(x^{p+1}) = 2p+1$ et donc $x^{p+1} \in A$.

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ est bijective.}} \tag{1.8}$$

■

Solution 1.3. On note $m = \theta(\sigma)$. On suppose que σ se décompose en produit de cycle de longueur $l_1, \dots, l_m$ avec $l_1 + \cdots + l_m = n$. Comme

$$(a_1, \dots, a_l) = [a_1, a_2] \circ [a_2, a_3] \circ \cdots \circ [a_{l-1}, a_l] \tag{1.9}$$

Donc σ se décompose en $\sum_{i=1}^m (l_i - 1) = n - m$ transpositions. Montrons par récurrence sur k, $\mathcal{H}(k)$: "Un produit de k transpositions possède au moins $n-k$ orbites".

Pour $k = 0$, $\sigma = id$ possède n orbites.

Pour $k = 1$, soit τ une transposition, on a $\theta(\tau) = n - 2 + 1 = n - 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_k$, soit $\sigma \in \Sigma_n$ qui se décompose en produit de $k+1$ transpositions.

$$\sigma = \underbrace{\tau_1 \circ \dots \tau_k}_{\sigma'} \circ \tau_{k+1} \tag{1.10}$$

D'après $\mathcal{H}_k$, on a $\theta(\sigma') \geqslant n - k$. Notons $\tau_{k+1} = [a, b]$.

Si a et b appartiennent à la même orbite. On note $(a_1, \dots, a_r)$ le cycle correspondant avec $a_r = a$ et $a_s = b$ où $s \in [\![1, n-1]\!]$. On a

$$\begin{cases} (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a,b](a_i) = a_{i+1} \quad \text{où } i \notin \{r, s\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a,b](a_r) = a_{s+1} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a,b](a_s) = a_1 \end{cases} \tag{1.11}$$

On n'a pas perdu d'orbites, donc $\theta(\sigma) \geqslant n-k-1$.

Si a et b n'appartiennent pas à la même orbite, notons $(a_1,\dots,a_r)$ et $(b_1,\dots,b_s)$ ces orbites avec $a=a_r$ et $b=b_s$. On a

$$\begin{cases} \underbrace{(a_1,\dots,a_{r-1},a_r)\circ(b_1,\dots,b_s)\circ[a_r,b_s]}_{\sigma''}(a_i)=a_{i+1} & \text{où } i\in[\![1,\dots,r-1]\!] \\ (a_1,\dots,a_{r-1},a_r)\circ(b_1,\dots,b_s)\circ[a_r,b_s](b_j)=b_{j+1} & \text{où } j\in[\![1,\dots,s-1]\!] \\ (a_1,\dots,a_{r-1},a_r)\circ(b_1,\dots,b_s)\circ[a_r,b_s](a_r)=b_1 \\ (a_1,\dots,a_{r-1},a_r)\circ(b_1,\dots,b_s)\circ[a_r,b_s](b_s)=a_1 \end{cases} \tag{1.12}$$

Donc

$$\sigma''=(a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_s) \tag{1.13}$$

On a perdu une orbite et donc $\theta(\sigma) \geqslant n-k-1$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence sur k.}} \tag{1.14}$$

■

Solution 1.4. On note par $\overline{k}$ les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et par $\widetilde{l}$ les éléments de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Soit f un morphisme. On pose $f(\overline{1})=\widetilde{x}$ où $x\in[\![0,m-1]\!]$. On a donc $nf(\overline{1})=f(\overline{0})=\widetilde{0}$.

On a donc $\widetilde{nx}=\widetilde{0}$ donc $m\mid nx$. On écrit $m=m_1(m\wedge n)$ et $n=n_1(m\wedge n)$. D'après le théorème de Gauss, on a donc $m_1\mid x$. Donc $x=km_1$ avec $k\in[\![0,(n\wedge m)-1]\!]$.

Réciproquement, soit $k\in[\![0,(n\wedge m)-1]\!]$. On définit

$$\begin{array}{rccc} f_k: & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ & \overline{l} & \mapsto & \widetilde{lkm_1} \end{array}$$

Si $\overline{l}=\overline{l'}$, alors $n\mid l-l'$ et donc $nm_1\mid(l-l')km_1$ puis $n_1(n\wedge m)m_1\mid(l-l')km_1$ donc $m\mid(l-l')km_1$ d'où $\widetilde{lkm_1}=\widetilde{l'km_1}$ donc f est bien définie et c'est évidemment un morphisme.

Soit $k,k'\in[\![0,n\wedge m-1]\!]$ avec $k\neq k'$. Si $\widetilde{km_1}=\widetilde{k'm_1}$ alors $m\mid(k-k')m_1$ et donc $n\wedge m\mid k-k'$ et $|k-k'|<n\wedge m$ donc $k=k'$ ce qui est absurde. Ainsi, les f_k sont distincts.

$$\boxed{\text{On a donc } n \wedge m \text{ morphismes.}} \tag{1.15}$$

■

Remarque 1.2. *Exemple pour l'exercice précédent : morphisme de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. On a $f(\overline{1}) = \widetilde{x}$ d'où $\widetilde{4x} = \widetilde{0}$ donc $3 \mid x$ d'où $x \in \{0, 3\}$. On a donc le morphisme trivial $f_0 \colon \bar{l} \mapsto \widetilde{0}$ et $f_1 \colon \bar{l} \mapsto \widetilde{3l}$.*

Solution 1.5. On considère $H = \{x \in G \mid x^2 = e_G\}$. Si $x \notin H$, alors $x^{-1} \neq x$ et donc

$$P = \prod_{x \in H} x \tag{1.16}$$

H est le noyau du morphisme $x \mapsto x^2$ (morphisme car G est abélien) donc H est un sous-groupe. Soit K un sous-groupe de H et $a \in H \setminus K$. Montrons que $K \cup aK$ est un sous-groupe de H.

On a $e_G \in K \cup aK$. Soit $x \in K \cup aK \subset H$, on a $x^{-1} = x \in K \cup aK$. Soit $(x_1, x_2) \in (K \cup aK)^2$, si $(x_1, x_2) \in K^2$,, c'est ok. Si $(x_1, x_2) \in (aK)^2$, on note $x_1 = a \cdot k_1$ et $x_2 = a \cdot k_2$ avec $(k_1, k_2) \in K^2$. On a $x_1 \cdot x_2 = a^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2 \in K$. Si $x_1 \in K$ et $x_2 \in aK$, alors $x_1 \cdot x_2 = a \cdot k_1 \cdot k_2 \in aK$. Donc $K \cup aK$ est un sous-groupe de H.

Soit $x \in K \cap aK$, il existe $(k_1, k_2) \in K^2$ tel que $k_1 = a \cdot k_2$ et $a \in K$ ce qui est impossible. Donc $K \cap aK = \emptyset$.

On construit alors par récurrence K_n : on pose $K_0 = \{e_G\}$ et à l'étape n, si $K_n = H$ on arrête, sinon il existe $a_{n+1} \in H \setminus K_n$ et on pose $K_{n+1} = K_n \cup a_{n+1}K$. Alors $|K_{n+1}| = 2|K_n|$. Comme H est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H = K_{n_0}$. On a alors $|H| = 2^{n_0}$.

Ainsi, si $n_0 = 0$, on a $H = \{e_G\}$ et

$$\boxed{P = e_G} \tag{1.17}$$

Si $n_0 = 1$, on a $H = \{e_G, a_1\}$ et

$$\boxed{P = a_1 \neq e_G} \tag{1.18}$$

Si $n_0 \geqslant 2$, comme chaque a_k apparaît un nombre pair de fois dans le produit, on a

$$\boxed{P = e_G} \tag{1.19}$$

■

Solution 1.6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $(\overline{kx_0})_{0\leqslant k\leqslant n}$ ne sont pas deux à deux distincts. Donc il existe $l \neq l' \in [\![0,n]\!]^2$ tel que $\overline{lx_0} = \overline{l'x_0}$ d'où $0 < |l-l'| \leqslant n$. Donc il existe $j \in [\![1,n]\!]$ avec $jx_0 \in G$. Ainsi, $n!x_0 \in G$ (itéré de jx_0). Ce raisonnement est vrai pour $x = \frac{x_0}{n!}$ donc $x_0 \in G$. Ainsi,

$$\boxed{G = \mathbb{R}} \tag{1.20}$$

■

Solution 1.7. Soit f un isomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$, on a $f(\overline{k}) = kf\overline{1})$. Par isomorphisme, $\omega(f(\overline{1})) = \omega(\overline{1}) = n$. Notons alors $\overline{x} = f(\overline{1})$ avec $x \in [\![0,n-1]\!]$.

Si $x \wedge n = 1$, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ux + vn = 1$, donc $u\overline{x} = \overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$. Ainsi, $Zn\mathbb{Z} = gr\{\overline{x}\}$ (car les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des itérés de $\overline{1}$) donc $\omega(\overline{x}) = n$.

Réciproquement, si $\omega(\overline{x}) = n$, $\overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$ donc il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $u\overline{x} = 1 = \overline{ux}$. Donc $n \mid ux - 1$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathbb{Z}$ tel que $ux - 1 = vn$, d'où $ux + vn = 1$. D'après Bézout, on a $x \wedge n = 1$. Finalement, on a $\omega(\overline{x}) = n$ si et seulement si $x \wedge n = 1$.

Ainsi, les isomorphismes sont nécessairement de la forme

$$\boxed{\begin{array}{rccc} f_x : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{k} & \mapsto & \overline{kx} \end{array}} \tag{1.21}$$

où $x \in [\![0,n-1]\!]$ et $x \wedge n = 1$.

Réciproquement, si $x \in [\![0,n-1]\!]$ est tel que $x \wedge n = 1$, f_x est évidemment un morphisme. Si $\overline{k} \in \ker(f_x)$, on a $f_x\left(\overline{k}\right) = \overline{0}$ si et seulement si $\overline{kx} = \overline{0}$ si et seulement si $n \mid kx$ et comme $n \wedge x = 1$, d'après le théorème de Gauss, on a $n \mid k$ donc $\overline{k} = \overline{0}$ donc $\ker(f_x) = \left\{\overline{0}\right\}$. Donc f_x est injective, donc bijective car $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$. ■

Solution 1.8. Si $y \in \mathrm{Im}\varphi$, y possède $|\ker \varphi|$ antécédents. En effet, il existe $x_0 \in G$ tel que $y = \varphi(x_0)$. Pour tout $x \in G$, on a $\varphi(x) = y$ si et seulement si $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ si et seulement si $\varphi(x_0^{-1} \cdot x) = e_G$ si et seulement si $x_0^{-1} \cdot x \in \ker \varphi$ si et seulement si $x \in x_0 \ker \varphi$. Comme

$$\begin{array}{rccc} g: & \ker \varphi & \to & x_0 \ker \varphi \\ & x & \mapsto & x \cdot x_0 \end{array}$$

est bijective, on a $|\ker \varphi| = |x_0\varphi|$. Ainsi, on a $|G| = |\mathrm{Im}\varphi| \times |\ker \varphi|$.

Dans tous les cas, on a $\ker \varphi \subset \ker \varphi^2$ et $\mathrm{Im}\varphi^2 \subset \mathrm{Im}\varphi$. On a ensuite

$$\mathrm{Im}\varphi^2 = \mathrm{Im}\varphi \iff |\mathrm{Im}\varphi^2| = |\mathrm{Im}\varphi| \tag{1.22}$$

$$\iff |\ker \varphi^2||\mathrm{Im}\varphi^2| = |\ker \varphi^2||\mathrm{Im}\varphi| = |G| = |\ker \varphi||\mathrm{Im}\varphi| \tag{1.23}$$

$$\iff |\ker \varphi^2| = |\ker \varphi| \tag{1.24}$$

$$\iff \boxed{\ker \varphi^2 = \ker \varphi} \tag{1.25}$$

■

Solution 1.9. On considère

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^m \end{array}$$

l'exercice revient à montrer que f est bijective. D'après le théorème de Bézout, il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $am + bn = 1$. Soit $y \in G$, on a

$$y^1 = y = y^{am+bn} = y^{am} \cdot \underbrace{y^{bn}}_{=e_G} = y^{am} = (y^a)^m \tag{1.26}$$

Donc f est surjective et comme G est fini,

$$\boxed{\text{f est bijective.}} \tag{1.27}$$

■

Solution 1.10.

1. On a $e_G \in S_g$, si $(x,y) \in S_g^2$ alors $x \cdot y \cdot g = x \cdot g \cdot y = g \cdot x \cdot y$ donc $x \cdot y \in S_g$ et si $x \in S_g$ alors $x \cdot g = g \cdot x$ implique $g \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot g$ en multipliant par l'inverse de x à gauche et à droite donc
$$\boxed{x^{-1} \in S_g} \tag{1.28}$$
2. Soit $(h,h') \in G^2$. On a $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$ si et seulement si $g \cdot h^{-1} \cdot h' = h^{-1} \cdot h \cdot g$ si et seulement si $h^{-1} \cdot h \in S_g$ si et seulement si $h' \in hS_g$. Or $|hS_g| = |S_g|$ car
$$\begin{array}{rccc} I_h : & S_g & \to & hS_g \\ & x & \mapsto & h \cdot x \end{array}$$
est bijective de réciproque $I_{h^{-1}}$. Soit la relation d'équivalence $\mathcal{R}_0$ sur G définie par $h\mathcal{R}_0h'$ si et seulement si $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$. Chaque classe à $|S_g|$ éléments et il y y a $|C(g)|$ classes dans G d'où
$$\boxed{|G| = |S_g|\,|C(g)|} \tag{1.29}$$
3. On a $Z(G) = \cap_{g \in G} S_g$ donc $Z(G)$ est un sous-groupe et pour tout $g \in G$,
$$\boxed{Z(G) \subset S_g} \tag{1.30}$$
4. Pour $x \in G$, on note $\overline{x} = \{h \cdot x \cdot h^{-1} \mid h \in G\} = C(x)$.

   On a $|\overline{x}| = 1$ si et seulement si pour tout $h \in G$, $h \cdot x \cdot h^{-1} = x$ si et seulement si $x \in Z(G)$. Soit $\mathcal{A}$ une partie de G telle que $(\overline{x})_{x \in \mathcal{A}}$ forme une partition de $G \setminus Z(G)$. On a
$$|G| = p^\alpha = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)| \tag{1.31}$$
   Si $x \in \mathcal{A}$, $x \notin Z(G)$ donc $|S_x| < |G|$ (car $x \in Z(G)$ si et seulement si $S_x = G$) et donc
$$|C(x)| = \frac{|G|}{|S_x|} \tag{1.32}$$
   d'après 2. Donc $|C(x)| = p^\beta$ avec $\beta \in [\![1, \alpha]\!]$ car $|C(x)| \neq 1$. Donc
$$p \,\Big|\, \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)| \tag{1.33}$$
   d'où
$$p \mid |Z(G)| \tag{1.34}$$
   donc
$$\boxed{|Z(G)| \neq 1} \tag{1.35}$$

5. On a

$$p^2 = |Z(G)| + \sum_{x\in\mathcal{A}} |C(x)| \tag{1.36}$$

D'après la question 4, on a $|Z(G)| \neq 1$ et $|Z(G)| \mid |G|$.

Si $Z(G) \neq G$, alors $|Z(G)| = p$. Pour $x \in \mathcal{A}$, $Z(G) \subset S_x \neq G$ donc $|S_x| = p$ (car $|S_x| \mid |G|$) et donc $Z(G) = S_x$. Or $x \in S_x$ et $x \notin Z(G)$ ce qui n'est pas possible, donc $|Z(G)| = p^2$ et $Z(G) = G$.

$$\boxed{\text{Donc G est abélien.}} \tag{1.37}$$

S'il existe un élément d'ordre p^2. G est cyclique et est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Sinon, pour tout $x \in G \setminus \{e_G\}$, on a $\omega(x) = p$. Soit $x_1 \in G \setminus \{e_G\}$ et $x_2 \in G \setminus gr\{x_1\}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 & \to & G \\ & (\overline{k}, \overline{l}) & \mapsto & x_1^k \cdot x_2^l \end{array}$$

f est bien définie car si $\overline{k} = \overline{k'}$ et $\overline{l} = \overline{l'}$, on a $p \mid k - k'$ et $p \mid l - l'$ donc $x_1^k \cdot x_2^l = x_1^{k'} \cdot x_2^{l'}$. Comme G est abélien, f est un morphisme.

Montrons que f est injective. Soit $(\overline{k}, \overline{l}) \in \ker(f)$ avec $(k, l) \in [\![0, p-1]\!]^2$, on a $x_1^k \cdot x_2^l = e_G$ donc $x_2^l = x_1^{-k}$. Si $l \in [\![1, p-1]\!]$ or p est premier donc $l \wedge p = 1$ donc il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $lu + pv = 1$. Alors on a

$$x_2 = x_2^{lu+pv} = x_2^{lu} \cdot x_2^{pv} = x_2^{lu} = x_1^{-k} \in gr\{x_1\} \tag{1.38}$$

ce qui n'est pas possible. Donc $\overline{l} = \overline{0}$ et de même $\overline{k} = \overline{0}$ donc f est injective et ainsi $|\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}| = |G|$ donc

$$\boxed{\text{f est un isomorphisme.}} \tag{1.39}$$

■

Remarque 1.3. *Les groupes de cardinal p^3 ne sont pas nécessairement abélien, par exemple le groupe des isométries du carré $\mathcal{D}_4$ de cardinal 8.*

Solution 1.11. Soit f un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n$ donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $f(1) = r_0$ donc

$$\boxed{f : n \mapsto r_0^n} \tag{1.40}$$

Soit f un morphisme de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$. Pour tout $a\in\mathbb{N}^*$, $f(1)=f(\frac{1}{a})^a$. Pour tout p premier, on a $\nu_p(f(1))=a\nu_p(f(\frac{1}{a}))$ donc pour tout $a\in\mathbb{N}^*$, $a\mid\nu_p(f(1))$ donc $\nu_p(f(1))=0$ pour tout p premier, donc $f(1)=1$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f(n)=f(1)^n=1$ et $f(b\times\frac{a}{b})=f(a)=1=f(\frac{a}{b})^b$ donc $f(\frac{a}{b})=1$. Donc

$$\boxed{f:r\mapsto 1} \tag{1.41}$$

■

Solution 1.12. On a $xy=y^2x$, $x^2y=xy^2x=y^4x^2$, $x^3y=x^2y^2x=xy^4x^2=y^8x^3$, $x^5y=y^{32}x^5$ donc $y^{31}=e_G$ et $\omega(y)=31$.

Tout élément de G peut s'écrire $y^\lambda x^\mu$ avec $(\lambda,\mu)\in[\![0,30]\!]\times\{0,4\}$. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & [\![0,30]\!]\times[\![0,4]\!] & \to & G \\ & (\lambda,\mu) & \mapsto & y^\lambda x^\mu \end{array}$$

est surjective par construction. Soit $((\lambda,\mu),(\lambda',\mu'))\in([\![0,30]\!]\times[\![0,4]\!])^2$ tel que $y^\lambda x^\mu=y^{\lambda'}x^{\mu'}$ donc $y^{\lambda-\lambda'}=x^{p'-p}$ d'où $y^{5(\lambda-\lambda')}=x^{5(\mu'-\mu)}=e_G$. Or $\omega(y)=31$ donc $31\mid 5(\lambda-\lambda')$ et d'après le théorème de Gauss, $31\mid\lambda-\lambda'$. Or $(\lambda,\lambda')\in[\![0,30]\!]^2$ donc $\lambda=\lambda'$ et de même $\mu=\mu'$ donc f est injective donc bijective et

$$\boxed{|G|=155} \tag{1.42}$$

Soit G' un autre tel groupe engendré par x' et y', on forme

$$\begin{array}{rccl} g: & G & \to & G \\ & y^p x^\mu & \mapsto & y'^\lambda x'^\mu \end{array}$$

et on vérifie que g est un isomorphisme. ■

Solution 1.13.

1. Soit $i\in[\![1,r]\!]$, il existe nécessairement $y_i\in G$ tel que $\nu_{p_i}(\omega(y_i))=p_i^{\alpha_i}$ (où ν_p est la valuation p-adique), sinon on ne pourrait pas avoir ce terme dans le ppcm. Donc

$$\boxed{p_i^{\alpha_i}\mid\omega(y_i)} \tag{1.43}$$

2. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega(y_i) = p_i^{\alpha_i} n$. Posons $x_i = y_i^n \in G$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$,

$$x_i^k = e_G \Longleftrightarrow y_i^{nk} = e_G \Longleftrightarrow \omega(y_i) \mid nk \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid k \tag{1.44}$$

Donc

$$\boxed{\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}} \tag{1.45}$$

3. On pose $x = \prod_{i=1}^r x_i$. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors

$$x^k = e_G \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^r x_i^k = e_G \tag{1.46}$$

Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on met le tout à la puissance $M_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r p_j^{\alpha_j}$. On a alors, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$,

$$x_i^{kM_i} = e_G \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid kM_i \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid k \tag{1.47}$$

la dernière équivalence venant du théorème de Gauss. Donc pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $p_i^{\alpha_i} \mid k$, ce qui équivaut donc à $N \mid k$ et donc

$$\boxed{\omega(x) = N} \tag{1.48}$$

■

Solution 1.14. Sur un corps commutatif, un polynôme de degré n admet au plus n racines. Montrons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{K}^*$ tel que $\omega(x_i) = |\mathbb{K}^*|$. Par définition de N, pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $\omega(x) \mid N$. D'où $x^N = 1_{\mathbb{K}}$. Donc x est racine de $X^N - 1$. Ainsi, $|\mathbb{K}^*| \leqslant N$. Par ailleurs, $N \mid |\mathbb{K}^*|$ car pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $x^{|\mathbb{K}^*|} = 1_{\mathbb{K}^*}$. Donc $|\mathbb{K}^*| = N$ et ainsi

$$\boxed{\mathbb{K}^* = gr\left\{x_1\right\}} \tag{1.49}$$

On a $|\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*| = 12$ donc pour tout $\overline{x} \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, $\omega(\overline{x}) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. On a $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{2}^3 = \overline{8}$, $\overline{2}^4 = \overline{16} = \overline{3}$, $\overline{2}^6 = \overline{12}$ donc $\omega(\overline{2}) = 12$ et

$$\boxed{\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^* = gr\left\{\overline{2}\right\} = \left\{\overline{2}^k \mid k \in [\![0, 11]\!]\right\}} \tag{1.50}$$

■

Solution 1.15.

1. Soit $(x,y) \in G^2$, on a $(x\cdot y)^2 = (x\cdot y)\cdot(x\cdot y) = e_G$ donc $x\cdot y = y^{-1}\cdot x^{-1}$ et comme $x^2 = e_G$, $x^{-1} = x$ d'où $xy = yx$ et

$$\boxed{\text{G est abélien.}} \tag{1.51}$$

2. Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ une famille génératrice minimale de G : pour tout $x \in G$, il existe$(\varepsilon_i) \in \{0,1\}^n$ tel que $x = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$ (car G est abélien). Soit

$$\begin{array}{cccc} f: & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n & \to & G \\ & (\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_n}) & \mapsto & \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \end{array}$$

Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $\overline{\varepsilon_i} = \overline{\varepsilon_i'}$, alors $x^{\varepsilon_i} = x^{\varepsilon_i'}$ car $x_i^2 = e_G$ et $2 \mid \varepsilon_i - \varepsilon_i'$. Donc f est bien définie.

f est clairement un morphisme (car G est abélien). D'après la première question, f est surjective. Montrons que f est injective. Soit $(\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_n})$ tel que $\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} = e_G$. Soit $i \in [\![1,n]\!]$, supposons ε_i impair, on a alors $x_i = \varepsilon_i = x_i$. D'où $x_i = \prod_{j=1}^n x_j^{-\varepsilon_j} = \prod_{j=1}^n x_j^{\varepsilon_j}$ car $x^2 = e_G$. Donc $x_i \in gr(x_j, j \in [\![1,n]\!], j \neq i)$, ce qui contredit le caractère minimal de $(x_1,\ldots,x_n)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, f est injective donc est un isomorphisme.}} \tag{1.52}$$

■

Remarque 1.4. *En notant + la loi sur G, on peut définir*

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times G & \to & G \\ & (\varepsilon,x) & \mapsto & x^{\varepsilon} \end{array}$$

. Alors $(G,+,\cdot)$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, de dimension finie n car G est fini, et le choix d'une base réalise un isomorphisme de $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n,+)$ dans $(G,+)$.

Remarque 1.5. *Par isomorphisme, on a*

$$\prod_{x\in G} x = f\left(\sum_{(\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_n})\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} (\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_n})\right) \tag{1.53}$$

Pour $n=1$, on a $\overline{0}+\overline{1}=\overline{1}$, pour $n=2$, on a $(\overline{0},\overline{0})+(\overline{0},\overline{1})+(\overline{1},\overline{0})+(\overline{1},\overline{1}) = (\overline{0},\overline{0})$. Pour $n>2$, $\overline{1}$ apparaît 2^{n+1} fois sur chaque coordonnée (donc un nombre pair de fois), donc la somme fait $(\overline{0},\ldots,\overline{0})$.

Solution 1.16.

1. Si G est abélien, on a
$$\boxed{D(G) = \{e_G\}} \tag{1.54}$$

2. Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, σ se décompose en un produit d'un nombre pair de transpositions. Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux transpositions.
   — Si $\{a, b\} = \{c, d\}$, alors $[a, b] \circ [c, d] = id$.
   — Si $a \in \{c, d\}$, supposons par exemple $a = c$ et $b \neq d$. On a alors $[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ [a, d] = [b, a, d]$.
   — Si $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, on a
$$[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ \underbrace{[b, c] \circ [b, c]}_{=id} \circ [c, d] = [a, b, c] \circ [b, c, d] \tag{1.55}$$
$$\boxed{\text{Donc les 3-cycles engendrent } \mathcal{A}_n.} \tag{1.56}$$

3. On a
$$\sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(a_3)) \tag{1.57}$$
On peut trouver $\sigma \colon [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telle que a_i soit envoyé sur b_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et les éléments $[\![1, n]\!] \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ dans $[\![1, n]\!] \setminus \{b_1, b_2 b_3\}$.
$$\boxed{\text{Donc les 3-cycles sont conjugués dans } \Sigma_n.} \tag{1.58}$$
Si $n \geqslant 5$ et σ impair, soit $(c_1, c_2) \in [\![1, n]\!] \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$. $\sigma' = \sigma \circ [c_1, c_2]$ est pair et $\sigma'(a_i) = b_i$.
$$\boxed{\text{Donc les trois cycles sont conjugués dans } \mathcal{A}_n \text{ pour } n \geqslant 5.} \tag{1.59}$$
C'est cependant faux pour $n = 3$ et $n = 4$.

4. Soit $(\sigma, \sigma') \in \Sigma_n^2$. En notant $\mathcal{E}$ la signature d'une permutation (morphisme de $(\Sigma_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$), on a
$$\mathcal{E}(\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1}) = 1 \tag{1.60}$$
donc $\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1} \in \mathcal{A}_n$. Donc $D(\Sigma_n) \subset \mathcal{A}_n$.
Soit ensuite (a_1, a_2, a_3) un 3-cycle. On a $(a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$ puis
$(a_1, a_3, a_2)^{-1} = (a_1, a_2, a_3)$. Ainsi, on a
$$\sigma \circ (a_1, a_3, a_2) \circ \sigma^{-1} \circ (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3) \tag{1.61}$$

On pose $\sigma = [a_2, a_3]$, et alors (a_1, a_2, a_3) est un commutateur. Ainsi, $(a_1, a_2, a_3) \in D(\Sigma_n)$ et donc $\mathcal{A}_n \subset D(\Sigma_n)$ (d'après la première question).

Finalement, on a

$$\boxed{D(\Sigma_n) = \mathcal{A}_n} \tag{1.62}$$

■

Remarque 1.6. *Pour $n \geqslant 5$, on a $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$.*

Solution 1.17.

1. Pour $g \in G$, τ_g est bijective de réciproque $\tau_{g^{-1}}$. On a notamment $\tau_{g \cdot g'} = \tau_g \circ \tau_{g'}$ donc τ est un morphisme. Si $g \in G$ est tel que $\tau_g = id$, pour tout $x \in G$, on a $gx = x$ donc $g = e_G$. Donc τ est un morphisme injectif et

$$\boxed{\text{G est isomorphe à Im}\tau = \tau(G)\text{, sous-groupe de }\Sigma(G)\text{, lui-même isomorphe à }\Sigma_n} \tag{1.63}$$

2. Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & \Sigma_n & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & \sigma & \mapsto & (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = P_\sigma \end{array}$$

P_σ est la matrice de permutation associée à σ. f est un morphisme, et est injectif, donc

$$\boxed{\text{G est isomorphe à un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{C}).} \tag{1.64}$$

■

Solution 1.18. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 8t + 7$. Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, on a $\overline{0}^2 = \overline{0}$, $\overline{1}^2 = \overline{1}$, $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$, $\overline{4}^2 = \overline{0}$, $\overline{5}^2 = \overline{1}$, $\overline{6}^2 = \overline{4}$ et $\overline{7}^2 = \overline{1}$. Donc la somme de 3 de ces classes ne donnent pas $\overline{7}$.

Par récurrence, prouvons la propriété. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = (8t + 7)4^{n+1}$. Parmi x, y, z les trois sont pairs ou deux d'entre eux sont impairs. Si x, y impairs et z pair, on écrit $x = 2x' + 1, y = 2y' + 1, z = 2z'$, alors $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2[4]$ mais $(8t + 7)4^{n+1} \equiv 0[4]$: contradiction. Nécessairement, x, y et z sont pairs. En divisant par 4, on se ramène donc à l'hypothèse de récurrence.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}} \tag{1.65}$$

■

Solution 1.19. On raisonne sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. On a $\overline{10^{10^n}} = \overline{3^{10^n}}$. Dans le groupe $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$, $\overline{3}$ a un ordre qui divise $|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*| = 6$. On a $\overline{3}^2 = \overline{2}$, $\overline{3}^3 = \overline{-1}$ et $\overline{3}^6 = \overline{1}$. Donc $\overline{3}^{6k} = \overline{1}, \overline{3}^{6k+1} = \overline{3}, \overline{3}^{6k+2} = \overline{2}, \overline{3}^{6k+3} = \overline{-1}, \overline{3^{6k+4}} = \overline{4}$ et $\overline{3^{6k+5}} = \overline{5}$..

On se place maintenant dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\overline{10} = \overline{4}, \overline{10}^2 = \overline{4}$ et donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{10}^n = \overline{4}$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n = 6k + 4$. Ainsi,

$$\boxed{\overline{10^{10^n}} = \overline{4}} \tag{1.66}$$

■

Solution 1.20.

1. On a $F_1 = 5$ et $2 + \prod_{k=0}^{0} F_k = 2 + 3 = 5$. Soit $n \geqslant 1$, supposons que $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$. Alors

$$\begin{aligned} F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 &= (2^{2^n})^2 - 1 && (1.67)\\ &= (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) && (1.68)\\ &= F_n(F_n - 2) && (1.69)\\ &= F_n \times \prod_{k=0}^{n-1} F_k && (1.70)\\ &= \prod_{k=0}^{n} F_k && (1.71) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{d'où le résultat par récurrence.}} \tag{1.72}$$

2. Soit p un facteur premier de F_n. S'il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $p \mid F_k$, alors d'après la première question on a $p \mid F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k = 2$. Donc $p = 2$. Or F_n est impair, donc non divisible par deux, ce qui est absurde. Donc p ne divise aucun F_k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. Les F_n étant distincts deux à deux,

$$\boxed{\text{il existe donc une infinité de nombres premiers.}} \tag{1.73}$$

■

Remarque 1.7. *Si $n \neq m$ alors $F_n \wedge F_m = 1$.*

Solution 1.21.

1. On teste uniquement les puissances qui divisent 32 : 2,4,8,16,32. On a $\overline{5}^2 = \overline{-7}, \overline{5}^4 = \overline{-15}, \overline{5}^8 = \overline{1}$. Donc
$$\boxed{\omega(\overline{5}) = 8} \tag{1.74}$$

2. On note
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \to & U \\ & (\dot{k}, \tilde{l}) & \mapsto & \overline{-1}^k \times \overline{5}^l \end{array}$$

On a $\omega(\overline{-1}) = 2$ et $\gamma(\overline{5}) = 8$ donc ψ est bien définie. ψ est bien un morphisme de groupes. Soit $(\dot{k}, \tilde{l}) \in \ker(\psi)$, on a $\overline{-1}^k \times \overline{5}^l = \overline{1}$. Si $\dot{k} = \dot{1}$, alors $\overline{-1}^k = \overline{-1} = \overline{5}^{-l} = \overline{5}^l \in gr\{\overline{5}\}$. Donc $\overline{5}^{2l} = \overline{1}$ et ainsi $8 \mid 2l$ d'où $4 \mid l$. Mais alors $l \in \{0, 4\}$ ce qui est impossible. Donc $\dot{k} \neq \dot{1}$. De ce fait, $\dot{k} \neq \dot{1}$. Ainsi, $\overline{5}^l = \overline{1}$ donc $\tilde{l} = \tilde{0}$. Ainsi, $\ker(\psi) = \left\{(\dot{0}, \tilde{0})\right\}$ donc ψ est injective, puis bijective car $|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}| = |U|$. Donc
$$\boxed{U = gr\left\{\overline{-1}, \overline{5}\right\}} \tag{1.75}$$

■

Remarque 1.8. *U n'est pas cyclique car, par isomorphisme, ses éléments ont un ordre qui divise 8.*

Solution 1.22.

1. Soit
$$\begin{array}{rccc} f : & G_n \times G_m & \to & U_{nm} \\ & (\xi, \xi') & \mapsto & \xi \times \xi' \end{array}$$

Soit $(\xi, \xi') \in G_n \times G_m$, Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(\xi \times \xi')^k = 1$. Alors $(\xi \times \xi')^{km} = 1$ d'où $\xi^{km} = 1$ donc $n \mid km$ et $n \mid k$ d'après le théorème de Gauss. De même pour n, on a $m \mid k$ et donc $nm \mid k$. La réciproque est immédiate : $\xi \times \xi' \in G_{nm}$. Donc $f(G_n \times G_m) \subset G_{nm}$ et $|G_n \times G_m| = \varphi(n) \times \varphi(m) = \varphi(nm) = |G_{nm}|$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

Montrons que f est injective : soit $(x, y, x', y') \in G_n^2 \times G_m^2$ tel que $xx' = yy'$. On a alors $x^m = y^m$ et $x'^n = y'^n$ d'où $(xy^{-1})^m = 1$ d'où $\omega(xy^{-1}) \mid m$ et $\omega(xy^{-1}) \mid n$. Donc $\omega(xy^{-1}) = 1$ donc $x = y$ et en reportant, on a $x' = y'$. Donc f est injective puis bijective (égalité des cardinaux).

On a alors

$$\mu(n)\mu(m) = \sum_{\xi\in G_n} \xi \times \sum_{\xi'\in G_m} \xi' \tag{1.76}$$

$$= \sum_{(\xi,\xi')\in G_n\times G_m} \xi\xi' \tag{1.77}$$

$$= \sum_{\xi\in G_{nm}} \xi \tag{1.78}$$

$$= \boxed{\mu(nm)} \tag{1.79}$$

2. On a $\mu(1) = 1$. Soit p premier. On a

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = 0 \tag{1.80}$$

donc

$$\mu(p) \sum_{k=1}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = -1 \tag{1.81}$$

Soit alors $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \geqslant 2$, on a

$$\boxed{\mu(p^\alpha) = \sum_{\substack{k=1\\ k\wedge p=1}}^{p^\alpha} e^{\frac{2ik\pi}{p^\alpha}} = \sum_{k=1}^{p^\alpha} e^{\frac{2ik\pi}{p^\alpha}} - \sum_{k=1}^{p^{\alpha-1}} e^{\frac{2ik\pi}{p^{\alpha-1}}} = 0} \tag{1.82}$$

Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, s'il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $\alpha_i \geqslant 2$ alors $\mu(n) = 0$. Sinon, on a

$$\boxed{\mu(n) = \prod_{i=1}^{r} \mu(p_i) = (-1)^r} \tag{1.83}$$

3. Soit $(f, g) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^2$, on a

$$(f \star g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2) \tag{1.84}$$

$$= \sum_{d_1 d_2 = n} g(d_1) f(d_2) \tag{1.85}$$

$$= (g \star f)(n) \tag{1.86}$$

$$\boxed{\text{Donc } \star \text{ est commutative.}} \tag{1.87}$$

Soit $(f,g,h) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^3$, on a

$$(f \star (g \star h))(n) = \sum_{d_1 d = n} f(d_1)(g \star h)(d) \tag{1.88}$$

$$= \sum_{d_1 d = n} \left[f(d_1) \times \sum_{d_2 d_3 = d} g(d_2) h(d_3) \right] \tag{1.89}$$

$$= \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(g_1) g(d_2) h(d_3) \tag{1.90}$$

$$= ((f \star g) \star h)(n) \tag{1.91}$$

$$\boxed{\text{donc } \star \text{ est associative.}} \tag{1.92}$$

On vérifie maintenant que l'élément neutre est $e : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ qui à 1 associe 1 et 0 si $n \geqslant 2$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ & n & \mapsto & \sum_{d|n} \mu(d) \end{array}$$

On a $\psi(1) = 1$. Soit $n \geqslant 2$ avec $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_r}$. Les diviseurs de n sont dans $D = \{\prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i} \mid \beta_i \leqslant \alpha_i\}$. Ainsi, $\psi(n) = \sum_{d \in D} \mu(d)$. Or $\mu(d)$ vaut 0 s'il existe $\beta_i \geqslant 2$ et $(-1)^k$ si k β_i valent 1 et les autres 0. Il y a $\binom{r}{k}$ choix possibles pour que k β_i valent 1. Ainsi,

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^{r} 1^{r-k} (-1)^k \binom{r}{k} = 0 \tag{1.93}$$

Donc $\mu \star 1 = e$, et $\mu^{-1} = 1 \colon n \mapsto 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On note

$$\begin{array}{rccc} id : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^* \\ & n & \mapsto & n \end{array}$$

Alors

$$\sum_{d|n} d\mu(\frac{n}{d}) = (\mu \star id)(n) \tag{1.94}$$

$$= (id \star \mu)(n) \tag{1.95}$$

$$= (1 \star (\varphi \star \mu))(n) \tag{1.96}$$

$$= \boxed{\varphi(n)} \tag{1.97}$$

la troisième égalité venant du fait que $id = 1 \star \varphi$ car $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

■

Solution 1.23. Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a

$$\binom{p+k}{k} = \frac{(p+k)\times\cdots\times(p+1)}{k\times\cdots\times 1} = 1 + \alpha k p \tag{1.98}$$

car $(p+k)\times\cdots\times(p+1) = k! + p \times \text{qqchose}$. On a $p \mid \binom{p}{k}$ donc

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k}\binom{p+k}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k}[p^2] \tag{1.99}$$

Pour $k=0$, on a $\binom{p}{0}\binom{p}{0} = 1$ et pour $k=p$, on a $\binom{p}{p}\binom{2p}{p} = \binom{2p}{p}$. Et

$$\sum_{k=1}^{p-1}\binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} - 2 = 2^p - 2 \tag{1.100}$$

Il reste donc à prouver que $\binom{2p}{p} \equiv 2[p^2]$.

Or

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p}{p-k} \equiv 2[p^2] \tag{1.101}$$

la première égalité venant de l'égalité du terme en X^p dans $(1+X)^{2p} = (1+X)^p(1+X)^p$, et la deuxième venant du fait que seuls les termes en $k=0$ et $k=p$ ne contiennent pas de p^2, et valent chacun 1.

Finalement, on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{p+k}{k} \equiv 2^p - 2 + 1 + 2[p^2] \equiv 2^p + 1[p^2]} \tag{1.102}$$

■

Solution 1.24.

1. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$. On note $|G| = d$. On a donc $G \subset \mathbb{U}_d$ car pour tout $x \in G$, $x^d = 1$.

$$\boxed{\text{Donc } G = \mathbb{U}_d \text{ est cyclique.}} \tag{1.103}$$

2. On pose

$$\psi: \begin{array}{ccc} SO_2(\mathbb{R}) & \to & (\mathbb{U}, \times) \\ R_\theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

qui est un isomorphisme. Donc les sous-groupes de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les G_n pour $n \geqslant 1$ avec

$$\boxed{G_n = \left\{ R_{\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}} \tag{1.104}$$

3. φ est bilinéaire et symétrique. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on $\varphi(X, X) = \sum_{M \in G} \|MX\|^2 \geqslant 0$ et si $\varphi(X, X) = 0$, on a pour tout $M \in G$, $X = 0$. Notamment, $I_2 \in G$ et donc $X = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est bien un produit scalaire.}} \tag{1.105}$$

Pour tout $(M_0, X, Y) \in G \times (\mathbb{R}^2)^2$, on a $\varphi(M_0X, M_0Y) = \sum_{M \in G} \langle MM_0X, MM_0Y \rangle$ et $M \mapsto MM_0$ est bijective de G dans G donc $\varphi(M_0X, M_0Y) = \varphi(X, Y)$.

Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_1$ une base orthonormée pour φ. On note $P_0 = \text{mat}_{\mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_1}$. Pour tout $M \in G$, $P_0^{-1}MP_0$ est la matrice d'une isométrie pour φ dans une base orthonormée pour φ. Donc $P_0^{-1}MP_0$ est orthogonale, et $\det(P_0^{-1}MP_0) = 1$ car pour tout $M \in G$, $\det(M) = 1$. Ainsi, $\left\{ P_0^{-1}MP_0 \mid M \in G \right\}$ est un sous-groupe fini de $SO_2(\mathbb{R})$, donc cyclique. Il est isomorphe à G donc

$$\boxed{\text{G est cyclique.}} \tag{1.106}$$

■

Solution 1.25.

1. On a $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in E$. On remarque ensuite que pour tout $s = x + y\sqrt{2} \in E$, on a $ss^{-1} = 1$ avec $s^{-1} = x - y\sqrt{1} \in E$. Soit $(s, s') \in E^2$ avec $s = x + y\sqrt{2}$ et $s' = x' + y'\sqrt{2}$. Notons déjà que $x + y\sqrt{2} > 0$ car $x = \sqrt{1 + 2y^2} > |y|\sqrt{2}$. On a donc

$$ss' = \underbrace{xx' + 2yy'}_{\in \mathbb{Z}} + \sqrt{2}\underbrace{(yx' + y'x)}_{\in \mathbb{Z}} \tag{1.107}$$

On a $xx' \in \mathbb{N}$ et $x > \sqrt{2}|y| \geqslant 0$ et $x' > \sqrt{2}|y'| \geqslant 0$ donc $xx' > 2|yy'|$ et ainsi $xx' + 2yy' \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, on a

$$(xx'+2yy')^2-2(yx'+y'x)^2 = (xx')^2+4(yy')^2-2(yx')^22(y'x)^2 \tag{1.108}$$
$$= (x^2-2y^2)(x'^2-2y'^2) \tag{1.109}$$
$$= 1 \tag{1.110}$$

Donc $ss' \in E$. Finalement,

$$\boxed{\text{E est un sous-groupe de } (\mathbb{R}_+^*, \times).} \tag{1.111}$$

2. ln est un isomorphisme de E sur $\ln(E)$, sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. On sait que si

$$\underbrace{\inf(\ln(E)\cap\mathbb{R}_+)}_{\alpha} > 0 \tag{1.112}$$

alors $\ln(E)=\alpha\mathbb{Z}$ (sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ dans le cas $\alpha>0$, pour rappel si $\alpha=0$ alors le sous-groupe est dense dans $\mathbb{R}$). On cherche la borne inférieure de $E\cap]1+\infty[$ que l'on note β. β existe car cet ensemble est non vide, par exemple $3+2\sqrt{2}$ y appartient.

Si $\beta=1$, on peut trouver une suite de termes de E strictement décroissante convergeant vers 1. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$1 < x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2} < x_n+y_n\sqrt{2} \tag{1.113}$$

On sait que

$$x_n-y_n\sqrt{2} = (x_n+y_n\sqrt{2})^{-1} < 1 < x_n+y_n\sqrt{2} \tag{1.114}$$

donc $-y_n\sqrt{2} < 1-x_n < 0$ donc $y_n>0$. Ainsi,

$$y_n = \sqrt{\frac{x_n^2-1}{2}} \tag{1.115}$$

Si $x_{n+1}\geqslant x_n$, alors $y_{n+1}\geqslant y_n$ d'où $x_{n+1}+\sqrt{2}y_{n+1} > x_n+\sqrt{2}y_n$ ce qui est absurde. Donc $x_{n+1}<x_n$ et on obtient une suite strictement décroissante d'entiers naturels ce qui est impossible. Donc $\beta>1$ et

$$\boxed{E=\left\{(x_0+y_0\sqrt{2})^n \;\middle|\; n\in\mathbb{Z}\right\} \text{ est monogène.}} \tag{1.116}$$

On peut identifier β :

$$x_0 = \min\left\{x\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}, \exists y\in\mathbb{Z}, x+y\sqrt{2}\in E\cap], +\infty[\right\} \tag{1.117}$$

Donc $\beta = 3 + 2\sqrt{2}$ Finalement, $x^2 - 2y^2 = 1$ avec $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n + y_n\sqrt{2} = \beta^n$.

■

Remarque 1.9. *En fait, on a*

$$\begin{cases} x_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k} 3^{n-2k} \\ y_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} 3^{n-2k-1} \end{cases} \tag{1.118}$$

Solution 1.26. On a $7 \mid n^n - 3$ si et seulement si $\overline{n}^n = \overline{3}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$ est un groupe de cardinal 6. Donc l'ordre de ses éléments divisent 6, et sont donc 1,2,3 ou 6. Notamment, on vérifie que $\omega(\overline{3}) = 6$ et donc le groupe engendré par $\overline{3}$ est exactement $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$. Ainsi,

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times) = \left\{ \overline{3}^k \mid k \in [\![0, 5]\!] \right\} \tag{1.119}$$

(c'est un groupe cyclique). Les générateurs sont $\left\{ \overline{3}^k, k \wedge 6 = 1 \right\} = \left\{ \overline{3}, \overline{3}^5 = \overline{-2} = \overline{5} \right\}$. Donc $\overline{n} = \overline{3}$ ou $\overline{n} = \overline{5}$.

Si $\overline{n} = 3$, $\overline{3}^n = \overline{3}$ si et seulement si $n \equiv 1[6]$ donc $n \equiv 3[7]$ et $n \equiv 1[6]$. D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à $n \equiv 31[42]$. La réciproque est immédiate.

Si $\overline{n} = 5$, $\overline{5}^n = \overline{3}$ si et seulement si $n \equiv 5[6]$ et $n \equiv 5[7]$. D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à $n \equiv 5[42]$.

$$\boxed{\text{Donc les solutions sont } n \in \mathbb{N}^* \text{ tels que } n \equiv 31[42] \text{ ou } n \equiv 5[42].} \tag{1.120}$$

■

Solution 1.27. On a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} = \frac{2a}{(p-1)!} \iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{k(p-k)} = \frac{2a}{(p-1)!} \tag{1.121}$$

$$\iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p(p-1)!}{k(p-k)} = 2a \tag{1.122}$$

$$\iff p \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!^3}{k(p-k)}}_{\in \mathbb{N}} = 2a \underbrace{(p-1)!^2}_{p \wedge (p-1)!^2=1} \tag{1.123}$$

donc $p \mid a$ d'après le théorème de Gauss.

On écrit alors $a = p \times b$ avec $b \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} = \frac{2b}{(p-1)!} \tag{1.124}$$

comme $(p-1)!, k$ et $p-k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \overline{-k}^{-2} = \overline{2b} \times \underbrace{\overline{(p-1)!}^{-1}}_{=\overline{-1}} \tag{1.125}$$

d'après le théorème de Wilson.

Donc

$$\overline{2b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^{-2} \tag{1.126}$$

Comme

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ & \overline{k} & \mapsto & \overline{k}^{-1} \end{array}$$

est bijective, on a

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \overline{\frac{p(p-1)(2p-1)}{6}} \tag{1.127}$$

Or $p \geqslant 5$ est premier, donc $p-1$ est pair et p est congru) 1 ou 2 modulo 3. Donc $p-1 \equiv 0[3]$ ou $2p-1 \equiv 0[3]$ donc $\frac{(p-1)(2p-1)}{6} \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \overline{p} \times \overline{\frac{(p-1)(2p-1)}{6}} = 0 \tag{1.128}$$

et donc $p \mid b$ par le théorème de Gauss. Donc

$$\boxed{p^2 \mid a} \tag{1.129}$$

■

Solution 1.28. Les racines réelles de P ont une multiplicité paire, le coefficient dominant est positif (car la limite en $+\infty$ est positive) et les racines complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées :

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2 = (X-\Re(\alpha))^2 + |\Im(\alpha)|^2 \tag{1.130}$$

avec $\Im(\alpha) \neq 0$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat en décomposant P sur } \mathbb{C}[X].} \tag{1.131}$$

■

Solution 1.29.

1. $G = \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par α et 1. S'il existait $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = a\mathbb{Z}$, alors il existait $(n,m) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tel que $1 = na$ et $\alpha = ma$, d'où $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Le fait que } \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{N} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ est alors immédiate.}} \tag{1.132}$$

2. Posons $\beta = \frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{Z}+\beta\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $c < d \in \mathbb{R}^2$. Comme $\frac{c}{2\pi} < \frac{d}{2\pi}$, il existe $x \in \mathbb{Z}+\beta\mathbb{N} \cap]\frac{c}{2\pi}, \frac{d}{2\pi}[$ et alors $2\pi x \in 2\pi\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{N}\cap]c,d[$. On pose $c = \arcsin(a)$ et $d = \arcsin(b)$ avec $a < b$. On a bien $c < d$ car arcsin est strictement croissante.

   Alors il existe $(m,n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ tel que $2\pi m + \alpha m = 2\pi x \in]c,d[$ donc $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi m + \alpha n) = \sin(\alpha n) \in]a,b[$.

$$\boxed{\text{Donc } (\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est dense dans }]-1,1[.} \tag{1.133}$$

   En particulier, cela vaut pour $\alpha = 1$ car $\pi \notin \mathbb{Q}$. Donc $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1,1]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. 2^n commence par 7 en base 10 si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ avec

$$7 \times 10^p \leqslant 2^n < 8 \times 10^p \Longleftrightarrow \ln(7) + p\ln(10) \leqslant n\ln(2) < \ln(8) + p\ln(10) \tag{1.134}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\ln(7)}{\ln(10)} \leqslant \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} - p < \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \tag{1.135}$$

On a alors

$$p = \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \mathbb{N} \tag{1.136}$$

On étudie donc $\mathbb{N}\frac{\ln(2)}{\ln(10)} + \mathbb{Z}$. Supposons que $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Alors on a $2^q = 10^p$ mais comme $p \neq 0$, on a $5 \mid 10^p$ mais $5 \nmid 2^q$, donc $\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$.

On sait que

$$u_n = n\frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \left] \frac{\ln(7)}{\ln(10)}, \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \right[\tag{1.137}$$

Par densité, on peut donc construire par récurrence $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{\ln(7)}{\ln(10)} < u_{n_{p+1}} < u_{n_p} < \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \tag{1.138}$$

$$\boxed{\text{Donc on a bien une infinité de puissance de 2 commençant par 7 en base 10.}} \tag{1.139}$$

■

Remarque 1.10. $(e^{\mathrm{i}n\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ *est de la même façon dense dans* $\mathbb{U}$. *On peut montrer qu'elle est équirépartie, c'est à dire que pour tout* $a < b \in [0, 2\pi[^2$, *on a*

$$\lim_{N\to+\infty} \left| \left\{ n \in [\![1, N]\!] \middle| n\alpha - \frac{\lfloor 2\pi n\alpha \rfloor}{2\pi} \in]a, b[\right\} \right| \times \frac{1}{N} = \frac{b-a}{2\pi} \tag{1.140}$$

Remarque 1.11. *Par équirépartition dans* $[0, 1[$ *des*

$$\left\{ n\frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \mid n \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.141}$$

la probabilité pour qu'une puissance de 2 commence par k *en base 10 est* ($k \in [\![1, 9]\!]$)

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln(10)} \tag{1.142}$$

Solution 1.30.

1. Pour $\alpha = a + ib$, on définit le module au carré : $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$. Soit $\beta = c + \mathrm{i}d \neq 0$. Si $\alpha = \beta q + r$ avec $q, r \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ et $|r|^2 < |\beta|^2$, alors $|\alpha - \beta q|^2 < |\beta|^2$ et $\beta \neq 0$ donc

$$\left| \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\in\mathbb{C}} - \underbrace{q}_{\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]} \right| < |1| \tag{1.143}$$

On pose $\frac{\alpha}{\beta} = x + \mathrm{i}y$. On pose

$$u_x = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}[\\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x \in [\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor x \rfloor + 1[\end{cases} \tag{1.144}$$

et de même pour u_y. On a alors $q = u_x + \mathrm{i}u_y \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ et

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - q \right|^2 = |x - u_x|^2 + |y - u_y|^2 \leqslant 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1 \tag{1.145}$$

On pose donc $r = \alpha - \beta q \in \mathbb{Z}[i]$ et ainsi

$$\boxed{\text{l'anneau } \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ est euclidien.}} \tag{1.146}$$

2. Soit A un anneau euclidien et I un idéal de A non réduit à $\{0\}$. Il existe $x \in I$ tel que

$$v(x_0) = \min\{v(x) \mid x \in I\{0\}\} \tag{1.147}$$

On a $x_0 A \subset I$. Soit $x \in I$. Il existe $q, r \in A$ tel que

$$x = x_0 q + r \tag{1.148}$$

avec $v(r) < v(x_0)$ ou $r = 0$. Or $r \in I$ donc $r = 0$. Ainsi $x \in x_0 A$ et donc $I = x_0 A$.

$$\boxed{\text{Donc tout anneau euclidien est principal.}} \tag{1.149}$$

■

Remarque 1.12. *C'est encore vrai avec* $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}] = \{a + \mathrm{i}b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Solution 1.31.

1. Si $\overline{x} = \overline{y}^2$ est un carré, d'après le petit théorème de Fermat, on a $\overline{x}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{y}^{p-1} = \overline{1}$. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ & \overline{y} & \mapsto & \overline{y}^2 \end{array}$$

f est un morphisme multiplicatif, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$.

Comme $\mathbb{F}_p$ est un corps, chaque carré possède exactement deux antécédents. Il y a $p-1$ antécédents, donc il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$. Donc $|\mathrm{Im}(f)| = \frac{p-1}{2}$ et si $\overline{x}$ est un carré, x est racine de $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$. Le polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$ possède au plus $\frac{p-1}{2}$ racines et tout carré est racine. Donc les racines sont exactement les carrés et

$$\boxed{\overline{x}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1} \text{ si et seulement si } \overline{x} \text{ est un carré.}} \tag{1.150}$$

2. On a $p \equiv 1[4]$ si et seulement si $\frac{p-1}{2}$ est pair si et seulement si $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ si et seulement si $\overline{-1}$ est un carré dans $\mathbb{F}_p$. Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ tous congrus à 1 modulo 4. On pose $n = (p_1 \times \cdots \times p_r)^2 + 1$. Soit p un facteur premier de n, on a $n \equiv 1[n_i]$ donc $p \notin \{p_1, \ldots, p_r\}$. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $\overline{n} = \overline{0}$ donc $\overline{-1} = \overline{p_1 \times \cdots \times p_r}^2$ donc $p \equiv 1[4]$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\text{Donc il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.}} \tag{1.151}$$

■

Solution 1.32.

1. On pose $P_1 = \sum_{i=0}^{n} r'_i X^i$, et $\nu_p(r'_i)$ est positif par définition de $c(P)$. Donc

$$\boxed{P_1 \in \mathbb{Z}[X]} \tag{1.152}$$

Pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$\min_{i \in [\![1,n]\!]} \nu_p(r_i) = \nu_p(r_{i_0}) \tag{1.153}$$

et $\nu_p(r'_{i_0}) = 0$ donc $p \nmid r'_{i_0}$ donc

$$\bigwedge_{i=1}^{n} r'_i = 1 \tag{1.154}$$

Si on a $P = \alpha_1 P_1 = \alpha_2 P_2$ avec les conditions requises, soit $p \in \mathcal{P}$, si $\nu_p(\alpha_2) > \nu_p(\alpha_1)$, alors p divise tous les coefficients de P_1 ce qui n'est pas possible, donc $\nu_p(\alpha_2) = \nu_p(\alpha_1)$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a aussi $\alpha_1 = \alpha_2$ et donc $P_1 = P_2$.

$$\boxed{\text{Donc l'écriture est unique.}} \tag{1.155}$$

2. On a $P = c(P)P_1$ et $Q = c(Q)Q_1$ donc $PQ = c(P)c(Q)P_1Q_1$ et $P_1Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$.

   Soit $p \in \mathcal{P}$ divisant tous les coefficients de P_1Q_1. On définit, si $R = \sum_{i\in\mathbb{N}} \gamma_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$, $\overline{R} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{\gamma_i} X^i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. $R \mapsto \overline{R}$ est un morphisme d'anneaux. Par hypothèse, on a $\overline{P_1}\overline{Q_1} = \overline{0} = \overline{P_1Q_1}$ et par intégrité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on a $\overline{P_1} = \overline{0}$ ou bien $\overline{Q_1} = \overline{0}$, ce qui est exclu par les hypothèses. Donc

$$\boxed{\text{c(PQ)=c(P)c(Q)}} \tag{1.156}$$

3. Soit alors P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (les inversibles de $\mathbb{Z}[X]$ étant -1 et 1). Posons

$$P = QR \in \mathbb{Q}[X]^2 \tag{1.157}$$

$$= c(Q)c(R)\underbrace{Q_1R_1}_{\in\mathbb{Z}[X]} \tag{1.158}$$

   Or $c(Q)c(R) = c(P)$ d'après le lemme de Gauss et nécessairement, $c(P) = 1$. Donc $P = Q_1R_1$, et alors $Q_1 = \pm 1$ et $R_1 = \pm 1$, et Q ou R est constant,

$$\boxed{\text{donc P est irréductible sur } \mathbb{Q}[X].} \tag{1.159}$$

   Pour la réciproque, on a $2X$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ car de degré 1, mais pas sur $\mathbb{Z}[X]$ car ni 2 ni X ne sont inversibles.

4. Soit $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$. Sur $\mathbb{C}[X]$, on a $P = (X - e^{\mathrm{i}\theta})(X - e^{-\mathrm{i}\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

   Et $e^{\mathrm{i}\theta} \neq e^{-\mathrm{i}\theta}$ car $\theta \not\equiv 0[\pi]$. On a $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ donc $e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}_q$, et $e^{\mathrm{i}\theta}$ et $e^{-\mathrm{i}\theta}$ sont des racines de A. Donc, dans $\mathbb{C}[X]$, on a $P \mid A$ et $A \in \mathbb{Q}[X]$, donc il existe $B \in \mathbb{Q}[X]$ tel que

$$\underbrace{A}_{\in\mathbb{Q}[X]} = \underbrace{B}_{\in\mathbb{C}[X]} \times \underbrace{P}_{\in\mathbb{Q}[X]} \tag{1.160}$$

   Or B s'obtient par la division euclidienne de A par P, qui est indépendante du corps de référence, il vient $B \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $A \mid P$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

On a $c(A) = 1 = c(B)c(P)$ et $A = c(B)c(P)B_1P_1 = B_1P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et le coefficient dominant de A est donc 1. Donc le coefficient dominant de B_1 et de P_1 est aussi 1. En reportant, on a $P = P_1 \in \mathbb{Z}[X]$.

Donc $2\cos(\theta) \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2]$ donc $\cos\{\theta\} \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$ (-1 et 1 ne peuvent y être car on a supposé $\theta \not\equiv 0[\pi]$). Les solutions sont donc

$$\boxed{\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}} \tag{1.161}$$

(en rajoutant $\theta = 0$ et π).

■

Remarque 1.13. *On a* $\frac{\arccos(\frac{1}{3})}{\pi} \notin Q$ *car* $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$ *n'est pas dans l'ensemble solutions.*

Solution 1.33.

1. Soit $P = a\prod_{i=1}^{s}(X - a_i)^{\alpha_i}$ avec les a_i distincts et $\alpha_i \geqslant 1$. a_i est racine de P' de multiplicité $\alpha_i - 1$. Il manque donc s racines. Si $\alpha = 0$, le résultat est évident, sinon on pose

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & P(x)e^{\frac{x}{\alpha}} \end{array}$$

et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha}(P(x) + \alpha P'(x)) \tag{1.162}$$

Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, P' est scindé sur $\mathbb{R}$ (appliquer le théorème de Rolle entre les racines distinctes de P), donc f' s'annule $s - 1$ fois entre les racines de P donc

$$\boxed{P + \alpha P' \text{ aussi.}} \tag{1.163}$$

La dernière racine est réelle car sinon, le conjugué de la racine complexe supposée serait aussi racine.

2. On pose $R = \mu\prod_{i=0}^{r}(X - \beta_i)$. On pose

$$\begin{array}{rccc} \Delta: & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

On a alors
$$\sum_{i=0}^{r} a_i P^{(i)} = \sum_{i=0}^{r} a_i \Delta^i(P) = R(\Delta)(P) = \mu \prod_{i=0}^{r}(\Delta - \beta_i id)(P) \tag{1.164}$$
Par récurrence sur r, on montre que
$$\boxed{\prod_{i=0}^{r}(\Delta - \beta_i id)(P) \text{ est scindé}} \tag{1.165}$$
d'après la première question.

■

Remarque 1.14. *On a aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' + \lambda P$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ si P est scindé sur $\mathbb{R}$.*

Solution 1.34. Soit $F = \frac{P'}{P}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ où a_i sont les racines de P. On note α le coefficient dominant de P, et on a
$$P' = \alpha \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j) \right) \tag{1.166}$$
On a donc $F = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i}$ et on a
$$F' = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)^2} = \frac{P''P - P'P'}{P^2} \tag{1.167}$$

Pour $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, on a
$$(n-1)(P'^2(x))(x) \geqslant nP(x)P''(x) \iff n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \leqslant -P'^2(x) \tag{1.168}$$
$$\iff \frac{P'^2(x)}{P^2(x)} \leqslant n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \times \frac{1}{P^2(x)} \tag{1.169}$$
$$\iff F^2(x) \leqslant n(-F'(x)) \tag{1.170}$$
$$\iff \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)} \right)^2 \leqslant \boxed{n \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)^2}} \tag{1.171}$$
qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ avec $(1 \dots 1)$ et $(\frac{1}{x-a_1} \dots \frac{1}{x-a_n})$. ■

Remarque 1.15. *Si* $P = \alpha(X-a_1)^{m_1}(X-a_r)^{m_r}$, *alors*

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X-a_i} \tag{1.172}$$

Solution 1.35.

1. $P' \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P') = \deg(P) - 1$. On a $P \wedge P' = 1$ car P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Comme le pgcd est obtenu par l'algorithme d'Euclide qui est indépendant du corps de référence, on a $P \wedge P' = 1$ sur $\mathbb{C}[X]$ donc

$$\boxed{P \text{ n'a que des racines simples sur } \mathbb{C}.} \tag{1.173}$$

2. Notons $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ (défini car $A(\alpha) = 0$ donc α est algébrique). Comme $A(\alpha) = 0$, on a $P \mid A$ et P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a $\deg(P) \geqslant 2$, on peut donc décomposer sur $\mathbb{Q}[X]$:

$$A = P^r \times P_1^{r_1} \times \dots P_s^{r_s} \tag{1.174}$$

avec les P_i irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ non associés.

α n'est pas racine d'un P_i car sinon $P \mid P_i$ ce qui est impossible. α est racine simple de P donc $m(\alpha) = r > \frac{\deg(A)}{2}$. Par ailleurs, $\deg(P)^r \geqslant 2r > \deg(A)$ ce qui est impossible.

Donc

$$\alpha \in \mathbb{Q} \tag{1.175}$$

■

Solution 1.36. Soit $x \in A$. Il existe $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n < m$ tel que $x^n = x^m$. Alors $x^{m-n} = e_G \in A$.

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}^* & \to & A \\ & n & \mapsto & x^n \end{array}$$

n'est pas injective, car $\mathbb{N}^*$ est infini et A est fini. Or $m - n \in \mathbb{N}^*$ donc

$$x^{m-n} = e_G \Rightarrow x = x \cdot x^{m-n-1} = e_G \tag{1.176}$$

donc $x^{-1} = x^{m-n-1} \in A$ et ainsi

$$\boxed{\text{A est un sous-groupe.}} \tag{1.177}$$

■

Solution 1.37. Pour $\alpha = 0$, on a $1+p \equiv 1+p[p^2]$. Pour $\alpha = 1$, on a

$$(1+p)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} p^k = 1 + p^2 + \binom{p}{2} p^2 \sum_{k=3}^{p} \binom{p}{k} p^k \tag{1.178}$$

Or $\binom{p}{2} p^2 = \frac{p(p-1)p^2}{2} \equiv 0[p^3]$ car p est premier plus grand que trois donc impair, et la somme est aussi congru à 0 modulo p^3.

Soit $\alpha \geqslant 1$, supposons que l'on ait

$$(1+p)^p \equiv 1 + p^{\alpha+1}[p^{\alpha+2}] \tag{1.179}$$

Il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$(1+p)^{p^\alpha} = 1 + p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2} \tag{1.180}$$

Alors

$$(1+p)^{p^{\alpha+1}} = (1 + \underbrace{p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2}}_{x})^p \tag{1.181}$$

Or

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k = 1 + p^{\alpha+2} + lp^{\alpha+3} + \underbrace{\sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k}_{\text{divisible par } x^2} \tag{1.182}$$

Comme $p^{\alpha+1} \mid x$, $p^{2\alpha+2} \mid x^2$ avec $2\alpha + 2 \geqslant \alpha + 3$ ($\alpha \geqslant 1$). D'où

$$p^{\alpha+3} \mid x^2 \mid \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k \tag{1.183}$$

et donc

$$\boxed{(1+p)^{p^{\alpha+1}} \equiv 1 + p^{\alpha+2}[p^{\alpha+3}]} \tag{1.184}$$

■

Remarque 1.16. *Pour $p = 2, \alpha = 1$, on a $3^2 = 9 \not\equiv 5[8]$.*

Solution 1.38. Si $7 = 2x^2 - 5y^2$, on a $\overline{0} = 2\overline{x}^2 - 5\overline{y}^2 = \overline{2}(\overline{x}^2 + \overline{y}^2)$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Comme 2 et 7 sont premiers entre eux donc $\overline{2}$ est inversible. Donc $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \overline{0}$. La seule possibilité est $\overline{x} = \overline{0}$ et $\overline{y} = \overline{0}$. Donc $7 \mid x$ et $y \mid y$. Si $x = 7k$ alors $x^2 = 49k^2$ donc $49 \mid x^2$ et $49 \mid y^2$ donc $47 \mid 2x^2 - 5y^2 = 7$ ce qui est faux.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\boxed{7 \neq 2x^2 - 5y^2} \tag{1.185}$$

■

Solution 1.39. $\mathbb{F}_{19}$ est un corps car 19 est premier. On a donc $\overline{x}^3 = \overline{1}$ si et seulement si $(x - \overline{1})(x^2 + x - \overline{1}) = \overline{0}$. On a donc $x = \overline{1}$ ou $x^2 + x + \overline{1} = \overline{0}$. On a

$$x^2 + x + \overline{1} = (x + \overline{2}^{-1})^2 + \overline{3} \times \overline{4}^{-1} = (x + \overline{10})^2 + \overline{3} \times \overline{50} \tag{1.186}$$

Donc $(x + \overline{10})^2 = \overline{4}$ d'où

$$\boxed{x = \overline{-8} = \overline{11} \text{ ou } x = \overline{-12} = \overline{7}.} \tag{1.187}$$

■

Solution 1.40.

1. m est inversible si et seulement si $m \wedge 2^n = 1$ si et seulement si $m \wedge 2 = 1$ si et seulement si m est impair.

$$\boxed{\text{Il y a donc } 2^{n-1} \text{ inversibles.}} \tag{1.188}$$

2. On a $5^{2^{3-3}} = 5 \equiv 1 + 2^2[2^3]$. Par récurrence, soit $n \geqslant 3$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $5^{2^{n-3}} = 1 + 2^{n-1} + k2^n$ donc

$$\boxed{5^{2^{n-1}} = 1 + 2^n + k2^{n+1} + 2^{2n-2}(1 + 2k)^2 \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}]} \tag{1.189}$$

car $2n - 2 \geqslant n + 1$ ($n \geqslant 3$).

3. On a $5^{2^{n-2}} \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}] \equiv 1[2^n]$ et $5^{2^{n-3}} \not\equiv 1[2^n]$.

$$\boxed{\text{Donc l'ordre de } \overline{5} \text{ est } 2^{n-2}.} \tag{1.190}$$

4. $gr\left\{\overline{-1}\right\} = \left\{\overline{-1}, \overline{1}\right\}$. $\overline{5}$ n'engendre pas $\overline{-1}$ car si $\overline{5}^k = \overline{-1}$, on a $\overline{5}^{2k} = \overline{1}$ d'où $2^{n-2} \mid 2k$ donc $2^{n-3} \mid k$. Ainsi, $k \in \{2^{n-3}, 2^{n-2}, 2^{n-1}\}$. Mais $\overline{5}^{2^{n-2}} = \overline{1}, \overline{5}^{2^{n-3}} = \overline{1 + 2^{n-1}} \neq \overline{-1}$ donc un tel k n'existe pas.

   Posons

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}, +) & \to & (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}^\times, \times) \\ & (\widetilde{a}, \dot{b}) & \mapsto & \overline{-1}^a \overline{5}^b \end{array}$$

Elle est bien définie car $\omega(\overline{-1}) = 2$ et $\omega(\overline{5}) = 2^{n-2}$. C'est évidemment un morphisme, on a égalité des cardinaux des ensembles de départ et d'arrivée, et on vérifie qu'elle est injective, et donc

$$\boxed{\text{c'est un isomorphisme.}} \tag{1.191}$$

■

Solution 1.41. Soit $(x, x') \in G^2$ tel que $x \cdot x' = e$. Alors

$$e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e \cdot x' \cdot x \tag{1.192}$$

si et seulement si

$$e \cdot x \cdot x' = e = x \cdot e \cdot x' \cdot x \cdot x' = x \cdot e \cdot x' \tag{1.193}$$

Soit $(x, x', x'') \in G^3$ tel que $x \cdot x' = e$ et $x' \cdot x'' = e$. On a alors

$$x \cdot x' \cdot x'' = x \cdot e = x = e \cdot x'' \tag{1.194}$$

Donc $x = e \cdot x''$ et $e = e \cdot x'' \cdot x'$. Si on prouve que $e \cdot x'' = x''$, alors $x = x''$ et $x' \cdot x = e$.

Montrons donc que pour tout $x \in G$, $e \cdot x = x$. Notons que s'il existe $e' \in G$ tel que pour tou t$x \in G$, $e' \cdot x = x$, alors $e' \cdot e = e' = e$. Il vient donc

$$x' \cdot x = x' \cdot e \cdot x'' = x' \cdot x'' = e \tag{1.195}$$

Donc pour tout $x \in G$, l'élément x' est inverse à droite et à gauche : $x \cdot x' = e$.

Donc

$$x \cdot x' \cdot x = e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e = x \tag{1.196}$$

Et donc e est neutre à gauche. Finalement,

$$\boxed{(G, \cdot) \text{ est un groupe.}} \tag{1.197}$$

■

Remarque 1.17. *Si $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est surjective, on peut définir*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f(x) \end{array}$$

pour un certain $x\in\mathbb{R}$. On a $f\circ g = id$. Si f n'est pas injective : s'il existait $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $h\circ f = id$, soit $(x,x')\in\mathbb{R}^2$ telle que $f(x)=f(x')$. En composant par h, on aurait $x=x'$ donc f serait injective ce qui n'est pas.

On peut donc avoir un inverse à droite mais pas à gauche.

Solution 1.42. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\underbrace{1\dots1}_{\text{n fois en base 10}} = 1+10+\cdots+10^{n-1} = \frac{10^n-1}{9} \tag{1.198}$$

On a

$$21 \,\Big|\, \frac{10^n-1}{9} \iff 3 \,\Big|\, \frac{10^n-1}{9} \text{ et } 7 \,\Big|\, \frac{10^n-1}{9} \tag{1.199}$$

$$\iff 27 \mid 10^n-1 \text{ et } 7 \mid 10^n-1 \tag{1.200}$$

car $7\wedge 9=1$. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on a $\overline{10}=\overline{3}$ donc pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\overline{10}^{6k}=\overline{1}$ d'après le petit théorème de Fermat. Dans $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$, $\widetilde{10}$ est inversible car $10\wedge 27=1$. $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times,+,\times)$ comporte 18 éléments donc pour tout $k'\in\mathbb{N}$, on a $\widetilde{10}^{18k'}=\widetilde{1}$.

Lorsque $81\mid n$, on a $21\mid 1\dots1$.

Cherchons plus précisément les ordres de $\overline{10}$ dans $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*,\times)$ et de $\widetilde{10}$ dans $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times,\times)$. Dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$, groupe de cardinal 6, on vérifie que l'ordre de 10 est 6. Dans l'autre groupe, on vérifie que l'ordre de $\widetilde{10}$ est 3. Ainsi, $21\mid 1\dots1$ si et seulement si $6\mid n$.

$$\boxed{\text{Il y a donc une infinité de multiples de 21 qui s'écrivent avec uniquement des 1 en base 10.}} \tag{1.201}$$

■

Remarque 1.18. *Il suffit de trouver l'ordre de 10 dans les deux ensembles et de prendre le ppcm.*

Solution 1.43.

1. $X^d - 1$ a au plus d racines dans $\mathbb{K}$. Pour tout $k \in [\![0, d-1]\!]$, x_0^k est racine de $X^d - 1_{\mathbb{K}}$ car $gr\{x_0\}$ a pour cardinal d. Donc les racines sont exactement les puissances de x_0.

   Soit $x \in \mathbb{K}^*$ d'ordre d. On a $x \in gr\{x_0\}$ car $x^d = 1$ (racine du polynôme de $X^d = 1_{\mathbb{K}}$). Or, dans le groupe cyclique engendré par x_0,

   $$\boxed{\text{il y a } \varphi(d) \text{ éléments.}} \tag{1.202}$$

2. On a ou bien $\varphi(d)$ ou bien aucun élément d'ordre d dans $\mathbb{K}$. Soit d tel que $d \mid n$, on note $H_d = \{x \in K \mid \omega(x) = d\}$. On a

   $$\mathbb{K}^* = \bigcup_{d \mid n} H_d \tag{1.203}$$

   Alors

   $$n = \sum_{d \mid n} |H_d| \leqslant \sum_{d \mid n} \varphi(d) = n \tag{1.204}$$

   Alors pour tout d tel que $d \mid n$, on a $|H_d| = \varphi(d)$. En particulier, on a $|H_n| = \varphi(n) \geqslant 1$ donc H_n est non vide. Donc il existe (au moins) un élément d'ordre n, donc

   $$\boxed{(\mathbb{K}^*, \times) \text{ est cyclique.}} \tag{1.205}$$

■

Solution 1.44.

1. Soit $x \in M$. On a $\overline{1} - \overline{x}^{-1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{1}$ et $\overline{1} - \overline{x}^{-1} = \overline{1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{0}$, ce qui n'est pas possible pour les deux cas.

   $$\boxed{\text{Donc f est bien définie.}} \tag{1.206}$$

   Soit $x \in M$, on a

   $$\begin{aligned} f^2(x) &= f(\overline{1} - \overline{x}^{-1}) && (1.207)\\ &= \overline{1} - (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1} && (1.208)\\ &= (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1} - \overline{1}) && (1.209)\\ &= -\overline{x}^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1} && (1.210) \end{aligned}$$

Donc

$$f^3(x) = \overline{1} - (\overline{1} - (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1})^{-1} \tag{1.211}$$
$$= \overline{1} - (-x\overline{x}^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1})^{-1} \tag{1.212}$$
$$= \overline{1} + \overline{x}(\overline{1} - \overline{x}^{-1}) \tag{1.213}$$
$$= \overline{1} + \overline{x} - \overline{1} \tag{1.214}$$
$$= \overline{x} \tag{1.215}$$

Donc

$$f^3 = id_M \tag{1.216}$$

2. Soit $x \in M$, on a

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \overline{1} - \overline{x}^{-1} = x \tag{1.217}$$
$$\Longleftrightarrow \overline{x}^2 - \overline{x} + \overline{1} = \overline{0} \tag{1.218}$$
$$\Longleftrightarrow (\overline{x} - \overline{2}^{-1})^2 + \overline{3} \times \overline{4}^{-1} = \overline{0} \tag{1.219}$$
$$\Longleftrightarrow \overline{-3} = (\overline{2}\overline{x} - \overline{1})^2 \tag{1.220}$$

f admet un point fixe si et seulement $\overline{-3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ car $\overline{y} = \overline{2}\overline{x} - \overline{1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{2}^{-1}(\overline{y} + \overline{1})$.

Donc

$$\boxed{\overline{-3} \text{ est un carré dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\text{si et seulement si f admet un point fixe.}} \tag{1.221}$$

3. Comme p est premier plus grand que 5, on a $p \equiv 1$ ou $2[3]$ donc $p - 2 \equiv 0$ ou $2[3]$ car $f^3 = id_M$, les longueurs des cycles qui composent f valent 1 ou 3.

Si f n'a pas de point fixe, tous les cycles sont de longueur 3, donc $3 \mid p - 2$ donc $p \equiv 2[3]$. Si $p \equiv 2[3]$, alors $3 \mid p - 2$, le nombre de points fixes est un multiple de 3 donc aussi du nombre de racine carrés de $\overline{-3}$. Et puisque l'on est dans un corps, il y a au plus 2 racines de $\overline{-3}$. Donc si $p \equiv 2[3]$, il n'y a pas de point fixe.

Donc

$$\boxed{\overline{-3} \text{ est un carré dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ si et seulement si } p \equiv 1[3].} \tag{1.222}$$

■

Solution 1.45. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que x possède un développement décimal périodique. Alors il existe $(n_0, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_{n+T} = a_n$. On a alors

$$|x| = \underbrace{b_m \dots b_0, a_0 \dots a_{n_0-1}}_{\in \mathbb{Q}} + \frac{1}{10^{n_0-1}} \underbrace{(0, a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} a_{n_0} \dots)}_{=y} \tag{1.223}$$

$$10^T y - y = a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} \in \mathbb{N} \tag{1.224}$$

et donc

$$y = \frac{a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1}}{10^T - 1} \in \mathbb{Q} \tag{1.225}$$

Donc $x \in Q$.

Réciproquement, soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p = aq + b$ avec $b \in [\![0, q-1]\!]$. Si $b = 0$, on arrête. On a sinon

$$x = a + \frac{1}{10^k} \frac{10^k b}{q} \tag{1.226}$$

où $k = \min\{m \geqslant 1 \mid 10^m b > q\}$. On réitère l'algorithme avec $\frac{10^k b}{q}$ car on a $\left\lfloor \frac{10^k b}{q} \right\rfloor \in [\![1, 9]\!]$ par définition de k.

Il y a q restes possibles dans la division euclidienne par q. Ainsi, au bout d'au plus de $q+1$ itérations, on retrouve un reste précédent. Par unicité de la division euclidienne, on obtient un développement décimal périodique.

Donc

$$\boxed{x \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant n_0, a_{n+T} = a_n.} \tag{1.227}$$

■

Remarque 1.19. *On peut écrire $q = 2^a 5^b q'$ avec $q' \wedge 2 = q' \wedge 5 = 1$. On se ramène alors à $q \wedge 2 = q \wedge 5 = 1$. En reportant dans l'écriture décimale de x, on a*

$$\frac{\alpha}{q} = \frac{\beta}{10^T - 1} \tag{1.228}$$

avec $\alpha \wedge q = 1$. On a donc $q \mid 10^T - 1$ d'après le lemme de Gauss. T revient donc à l'ordre de $\overline{10}$ dans $\left((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times\right)$ qui contient $\varphi(q)$ éléments. Par défaut, on a donc $T = \varphi(q)$.

Solution 1.46.

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \in [\![0, n-1]\!]$, on a $H_n(m) = 0 \in \mathbb{Z}$. Si $m \geqslant n$, on a $H_n(m) = \binom{m}{n} \in \mathbb{Z}$. Si $m < 0$, on a

$$H_n(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = (-1)^n \binom{-m+n-1}{-m-1} \in \mathbb{Z} \tag{1.229}$$

Donc

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}} \tag{1.230}$$

2. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$. On a $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ donc $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Supposons $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. $(H_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base étagée en degré de $\mathbb{C}[X]$. Donc il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$. Par récurrence, on a $P(0) = a_0 \in \mathbb{Z}$. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$, supposons $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$. On a alors

$$P(k+1) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \underbrace{a_k}_{\in\mathbb{Z}} H_k}_{\in\mathbb{Z}} + a_{k+1} \underbrace{H_{k+1}(k+1)}_{=1} \tag{1.231}$$

Donc $a_{k+1} \in \mathbb{Z}$.

Donc

$$\boxed{P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } \exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}, P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k.} \tag{1.232}$$

■

Remarque 1.20. *Les translation $X + \alpha$ sont les seules pour lesquelles on a $(X + \alpha)(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. En effet, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, on a $P \in \mathbb{Q}[X]$ d'après ce qui précède. Si $\deg(P) \geqslant 2$, quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer le coefficient dominant de P strictement positif. On a alors $\lim_{x\to+\infty} P'(x) = +\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que P est strictement croissant sur $[A, +\infty[$. De plus, $P(x+1) - P(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc il existe $A' > 0$ tel que $P(x+1) > P(x) + 1$. Pour $n \geqslant \max(A, A')$, on a $P(n+1) \geqslant P(n) + 2$ ce qui contredit $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Donc le degré de P est inférieur à 1.*

Solution 1.47. Le coefficient en X^k s'écrit $a_{k-1} - \alpha a_k \in \mathbb{Q}$. Si $a_k \in \mathbb{Q}$, on a donc $a_{k-1} \in \mathbb{Q}$. Il est donc impossible d'avoir deux coefficients consécutifs rationnels. Or $x_{n-1} \in \mathbb{Q}$ car c'est le coefficient dominant de P. Donc

$$\boxed{\alpha \text{ est nécessairement racine simple.}} \tag{1.233}$$

■

Solution 1.48. Soit $\Delta = P \wedge P' = \Delta$. On a $\deg(\Delta) \in \{1, 2, 3, 4\}$ car $\Delta \mid P'$.

Si $\deg(\Delta) = 4$, alors $\Delta = P'$ (car associé). Donc il existe $\beta \in \mathbb{C}$ d'où $\underbrace{P}_{\in \mathbb{Q}[X]} = (X - \beta) \underbrace{P'}_{\in \mathbb{Q}[X]}$. Par division euclidienne, $X - \beta \in \mathbb{Q}[X]$ et $\beta \in \mathbb{Q}$ d'après l'algorithme de la division euclidienne.

Si $\deg(\Delta) = 1$, on a $P = X - \beta$ avec $\beta \in \mathbb{Q}$ racine de P.

Si $\deg(\Delta) = 2$, si $\Delta = (X - \beta)^2$, on a $\Delta' = 2(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\beta \in \mathbb{Q}$ racine de Δ donc de P. Si $\Delta = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$. α_1 et α_2 sont racines doubles de P donc $P = (X - \beta) \underbrace{(X - \alpha_1)^2 (X - \alpha_2)^2}_{= \Delta^2 \in \mathbb{Q}[X]}$ Par division euclidienne, $X - \beta \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $\beta \in \mathbb{Q}$.

Si $\deg(\Delta) = 3$, si $\Delta = (X - \beta)^3$, on a $\Delta^{(2)} = 6(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\beta \in \mathbb{Q}$. Si $\Delta = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$ avec α_1, α_2 et α_3 distinctes. α_1, α_2 et α_3 seraient racines doubles de P ce qui contredit $\deg(P) = 5$. Si $\Delta = (X - \alpha)^2 (X - \beta)$, α est racine triple de P et β racine double de P donc $P = (X - \alpha)^3 (X - \beta)^2 \in \mathbb{Q}[X]$. Par division euclidienne, $(X - \alpha)(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$ et

$$X - \alpha = \frac{\Delta}{(X - \alpha)(X - \beta)} \in \mathbb{Q}[X] \tag{1.234}$$

donc $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Donc

$$\boxed{\text{P admet au moins une racine rationnelle.}} \tag{1.235}$$

■

Solution 1.49.

1. $1 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}], 0 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}], \mathrm{i} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Soit $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$:

$$\begin{cases} (a + \mathrm{i}b) - (a' + \mathrm{i}b') = (a - a') + \mathrm{i}(b - b') \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \\ (a + \mathrm{i}b) \times (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba') \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \end{cases} \tag{1.236}$$

Donc $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant i.

Soit A un sous anneau de $\mathbb{C}$ contenant i. A est stable par x donc $i^4 = 1 \in A$. A est stable par $+$ donc $\mathbb{Z} \subset A$, puis $\mathrm{i}\mathbb{Z} \subset A$ donc $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset A$.

$$\boxed{\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ est donc le plus petit sous anneau de } \mathbb{C} \text{ contenant i.}} \tag{1.237}$$

2. Si $|z|^2 = 1$ c'est-à-dire $a^2 + b^2 = 1$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{a - \mathrm{i}b}{|z|^2} = a - \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \tag{1.238}$$

Si z est inversible dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, il existe $' \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $zz' = 1$ donc $|z|^2|z'|^2 = 1$ donc $|z|^2 = 1$. Donc

$$\boxed{z \text{ est inverse dans } \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ si et seulement si } |z|^2 = 1.} \tag{1.239}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Si $|a| \geqslant 2$ ou $|b \geqslant 2$, alors $a^2 + b^2 \geqslant 4$ donc si $|z|^2 = 1$, alors $a^2 + b^2 = 1$ et ($|a| = 1$ et $|b| = 0$) ou ($|a| = 0$ et $|b| = 1$). Donc

$$\boxed{U = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}} \tag{1.240}$$

3. (a) Si $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - n| \leqslant \frac{1}{2}$ (faire un dessin et le montrer grâce aux parties entières). Soit alors $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$, on prend un $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|x_0 - a| \leqslant \frac{1}{2}, |y_0 - b| \leqslant \frac{1}{2}$. Et pour $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, on a

$$\boxed{|z - z_0|^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \leqslant \frac{1}{2}} \tag{1.241}$$

   (b) Soit $(q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$, on a $z_1 = qz_2 + r$ si et seulement si $\frac{z_1}{z_2} - q = \frac{r}{z_2}$. On a $|r| < |z_1|$ si et seulement si $\left|\frac{z_1}{z_2} - q\right| < 1$. On a $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$ donc d'après 3.(a), il existe $q \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $\left|\frac{z_1}{z_2} - q\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. On pose alors $r = z_1 - qz_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ par stabilité. Il vient donc $|r| < |z_2|$. Ainsi,

$$\boxed{\exists (q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2, z_1 = qz_2 + r \text{ et } |r| < |z_1|.} \tag{1.242}$$

   Si $z_2 = 1$ et $z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$, on peut prendre $q \in \{0, 1, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}\}$. Donc

$$\boxed{\text{il n'y a pas unicité.}} \tag{1.243}$$

(c) Soit $I \neq \{0\}$ un idéal de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. On note $n_0 = \min\left\{|z|^2 \mid z \in I \setminus \{0\}\right\}$ (partie non vide de $\mathbb{N}^*$). Soit $z_0 \in I \setminus \{0\}$ tel que $|z_0|^2 = n_0$. On a directement $z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset I$ (I est un idéal). Réciproquement, soit $z \in I$, d'après 3.(b), il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ tel que

$$r = \underbrace{z}_{\in I} - \underbrace{z_0}_{\in I}\underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]} \in I \tag{1.244}$$

et $|r|^2 < n_0$. Nécessairement, $r = 0$ et $z = z_0 q \in z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Donc $I = z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \text{ est principal.}} \tag{1.245}$$

4. Si $|z|^2 = 1$, alors $z \in U$ donc c'est bon. On travaille ensuite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la décomposition existe pour $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ avec $|z|^2 \leqslant n$. Soit $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ tel que $|z|^2 = n + 1$. On a $|z|^2 \geqslant 2$ donc $z \in U$. Si z est irréductible, c'est bon. Sinon, il existe $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ tel que $z = z_1 z_2$ et z_1 et z_2 non inversibles. Alors $|z_1|^2 \geqslant 2$ et $|z_2|^2 \geqslant 2$. Or $|z|^2 = n + 1 = |z_1|^2|z_2|^2$ donc $|z_1|^2 \leqslant n$ et $|z_2|^2 \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, on peut décomposer z_1 et z_2, donc z est décomposable

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}} \tag{1.246}$$

Pour l'unicité, soit $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \setminus \{0\}$ tel que $z = u \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\nu_\rho(z)} = v \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\mu_\rho(z)}$. Le théorème de Gauss est valable dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, car c'est un anneau principal. S'il existe $\rho_0 \in \mathcal{P}_0$ tel que $\nu_{\rho_0}(z) < \mu_{\rho_0}(z)$, alors

$$\rho_0 \left| \prod_{p \in \mathcal{P}_0 \setminus \{\rho_0\}} \rho^{\nu_\rho(z)} \right. \tag{1.247}$$

ce qui est proscrit par le théorème de Gauss. On a donc pour tout $\rho \in \mathcal{P}_0$, $\nu_\rho(z) = \mu_\rho(z)$. En reportant, on a $u = v$.

$$\boxed{\text{D'où l'unicité de la décomposition.}} \tag{1.248}$$

■

Solution 1.50.

1. On a $\overline{1} \in R$. Soit $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \in R^2$, il existe $(\overline{y_1}, \overline{y_2}) \in (\mathbb{F}_p^*)^2$ tel que $\overline{x_1} = \overline{y_1}^2$ et $\overline{x_2} = \overline{y_2}^2$. On a alors

$$\overline{x_1 x_2}^{-1} = (\overline{y_1 y_2}^{-1})^2 \in R \tag{1.249}$$

donc

$$\boxed{R \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{F}_p^*, \times).} \tag{1.250}$$

Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{F}_p^* & \to & \mathbb{F}_p^* \\ & \overline{y} & \mapsto & \overline{y}^2 \end{array}$$

On a $\mathrm{Im}(\varphi) = R$. Comme $\mathbb{F}_p$ est un corps, chaque éléments de R a exactement 2 antécédents par φ. Donc $|R| = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{2} = \frac{p-1}{2}$.

S'il existe $\overline{y} \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $\overline{a} = \overline{y}^2$, on a $\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{y}^{p-1} = \overline{1}$ par le théorème de Fermat.

Réciproquement, si $\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$, $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$ admet au plus $\frac{p-1}{2}$ racines dans $\mathbb{F}_p^*$. Tous les éléments de R sont racines de ce polynôme, ce sont donc ses seules racines. Donc $a \in R$.

$$\boxed{\text{Donc } a \in R \text{ si et seulement si } a^{\frac{p-1}{2}} = 1.} \tag{1.251}$$

2. Si $p = a^2 + b^2$, alors $\overline{0} = \overline{a}^2 + \overline{b}^2$. Si $\overline{a} = \overline{b} = \overline{0}$, on a $p \mid a$ et $p \mid b$ donc $p^2 \mid p$ ce qui est exclu. Par exemple, si $\overline{a} \neq \overline{0}$, on a $\overline{1} = -\overline{b}^2 \overline{a}^{-2}$ donc $\overline{-1} = (\overline{a}^{-1}\overline{b})^2 \in R$ d'après 1. On a donc $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ si et seulement si $2 \mid \frac{p-1}{2}$ (car p est premier plus grand que 3) d'où $4 \mid p - 1$ donc

$$\boxed{p \equiv 1[4]} \tag{1.252}$$

3. On a $|\mathbb{F}_p| = p$, $E(\sqrt{p}) \leqslant \sqrt{p} < E(\sqrt{p}) + 1$ et $|\{0, \dots, E(\sqrt{p})\}|^2 = (E(\sqrt{p}) + 1)^2 > p$ (p est premier, ce n'est pas un carré) donc (cardinalité)

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective.}} \tag{1.253}$$

Donc il existe

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in (\{0, \dots, E(\sqrt{p})\}^2)^2 \tag{1.254}$$

avec $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ et $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Donc

$$\overline{a_1} - \overline{kb_1} = \overline{a_2} - \overline{kb_2} \Rightarrow \overline{a_1} - \overline{a_2} = \overline{k}(\overline{b_1} - \overline{b_2}) \tag{1.255}$$

Si $\overline{b_1} = \overline{b_2}$, alors $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ donc $p \mid b_1 - b_2$ et $p \mid a_1 - a_2$ donc $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ ce qui n'est pas vrai. Donc $\overline{b_1} \neq \overline{b_2}$. Posons $b_0 = b_1 - b_2$ et $a_0 = a_1 - a_2$. On a $\overline{b_0} \neq \overline{0}$. Il vient donc $(|a_0|, |b_0|) \in [\![1, E(\sqrt{p})]\!]^2$, $\overline{a_0} = \overline{kb_0}$ donc

$$\boxed{\overline{k} = \overline{a_0}\,\overline{b_0}^{-1}} \tag{1.256}$$

4. Si $p \equiv 1[4]$, en remontant les calculs, on a $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ donc $\overline{-1} \in R$ et il existe $\overline{k} \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $\overline{-1} = \overline{k}^2$. Alors d'après 3., il existe (a_0, b_0) tels que $\overline{k} = \overline{a_0}\overline{b_0}^{-1}$. Il vient alors $\overline{-1} = \overline{a_0}^2(\overline{b_0}^{-1})^2$ donc $\overline{-b_0}^2 = \overline{a_0}^2$. On a

$$p \mid a_0^2 + b_0^2 \in [\![2, 2E(\sqrt{p})]\!]^2 \subset [\![2, 2p-1]\!] \tag{1.257}$$

Nécessairement, $a_0^2 + b_0^2 = p$ et

$$\boxed{p \text{ est somme de deux carrés.}} \tag{1.258}$$

■

Solution 1.51.

1. Soit $(m, n) \in A^2$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que $m = a^2 + b^2 = |a + \mathrm{i}b|^2$ et $n = c^2 + d^2 = |c + \mathrm{i}d|^2$. Donc

$$\boxed{m \times n = |ac - bd6\mathrm{i}(bc + ad)|^2 = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \in A} \tag{1.259}$$

2. On a

$$\boxed{n = \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_1} p^{\nu_p(n)}}_{\in A \text{ car } \mathcal{P}_1 \subset A} \times \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{\nu_p(n)}}_{= \prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{2\alpha_p} \in A} \in A} \tag{1.260}$$

3. Soit $n \in A$, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $n = a^2 + b^2$. Soit $p \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, on a $p \mid a^2 + b^2$ donc $\overline{a^2 + b^2} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $p \nmid a$ ou $p \nmid b$, alors $\overline{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \overline{0}$ donc $\overline{-1} \in R$ (résidus quadratiques, voir exercice précédent). Donc $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

   Si $p \mid a$ et $p \mid b$, $a = p^k a', b = p^l b'$ avec $p \nmid a'$ et $p \nmid b'$. On suppose $1 \leqslant k \leqslant l$ (quitte à échanger a et b). On a

$$a^2 + b^2 = p^{2k}(a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2) = n \tag{1.261}$$

   donc

$$p \;\Big|\; a'^2 + p^{2(l-k)b'^2} \tag{1.262}$$

   et $\overline{a'}^2 + \overline{p^{2(l-k)}}\overline{b'}^2 = \overline{0}$. Nécessairement, $l = k$. De même $p \in \mathcal{P}_1$. Par contraposée, ν_p est pair.

$$\boxed{\text{D'où la réciproque.}} \tag{1.263}$$

■

2 Séries numériques et familles sommables

Solution 2.1.

1. On a $b_0 = a_1 = 5, b_1 = a_3 = 13$ et pour $p \geqslant 2$, $b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$.

   On a donc l'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les deux solutions sont 3 et -1. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$.

   On a alors $b_0 = 5 = \lambda + \mu$ et $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$. On trouve alors

$$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}}$$

2. On le montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

3. Si $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, on a $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$. Alors

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p}$$

   Soit $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$$

   Soit $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{p_n} \leqslant \sigma(n) < 3^{p_n+1}$. On a

$$p_n = \left\lfloor \log_3(\sigma(n)) \right\rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

   En reportant, on a $\frac{3}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{9}{2}$.

   Si $\sigma(n) = 3^n$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{9}{2}$$

   Si $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{2}$$

   Soit $\mu \in [1, 3[$ et $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^n \mu$. Alors

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{9}{2\mu}$$

$$\boxed{\text{Donc tout réel compris dans } \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right] \text{ est valeur d'adhérence.}}$$

$\blacksquare$

Solution 2.2.

1.
$$\begin{array}{rccl} g: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$$
est continue, $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $l \in [a,b]$ avec $g(l)=0$, d'où
$$\boxed{f(l)=l}$$

2. On note $A = \{\lambda \mid \lambda \text{ est valeur d'adhérence}\}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que A est non vide. De plus, A est borné car $A \subset [a,b]$. Soit $\lambda = \inf(A)$ et $\mu = \sup(A)$.

   Si $\lambda = b$, on a $\mu = b$ et $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$.

   Si $\lambda < b$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \notin A$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in]\lambda, \lambda+\varepsilon[\}$ est infini. Par définition, λ est valeur d'adhérence. Donc $\lambda \in A$, et de même $\mu \in A$.

   Soit $\nu \in]\lambda, \mu[$ avec $\lambda < \mu$. Si $\nu \notin A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$ est fini. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $x_n \notin]\nu-\varepsilon_0, \nu+\varepsilon_0[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0$. Soit alors $n \geqslant \max(N_0, N_1)$. Si $x_n \leqslant \nu - \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \leqslant \nu - \varepsilon_0$. Si $x_n \geqslant \nu + \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \geqslant \nu + \varepsilon_0$. Ceci contredit que λ et μ sont valeur d'adhérence.

   Ainsi, $\nu \in A$ et
$$\boxed{[\lambda, \mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}}$$

3. Si (x_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, d'après 2., on a $A = [\lambda, \mu]$. On suppose $\lambda < \nu$. Ainsi, $\frac{\lambda+\nu}{2} = \alpha$ est valeur d'adhérence. Donc il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$ par continuité de f et c'est aussi égale à $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Ainsi,
$$\boxed{f(\alpha) = \alpha}$$

   Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda, \mu]$ et $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x_n = x_{n_0}$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lambda = \mu$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et a une unique valeur d'adhérence.

$$\boxed{\text{Donc } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

■

Solution 2.3. On a $u_n = e^{\mathrm{i}2^n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ car $l = l^2$ et $|l| = 1$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique au-delà d'un certain rang, il existe $T \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_{n+T} = u_n$. En particulier, $u_{N_0+T} = u_{N_0}$. On veut alors $2^{N_0+T}\theta \equiv 2^{N_0}\theta[2\pi]$. D'où $2^{N_0+T}\theta = 2\theta + 2k\pi$ donc $2^{N_0}(2^T - 1)\theta = 2k\pi$. Donc $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $U_{N+1} = U_N = U_{N^2}$. Comme $|U_N| = 1$, alors $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $\frac{\theta}{2\pi}$ est dyadique.

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$ (nombre dyadique). Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $u_n = u_{n_0} = 1$.

Pour la densité, on prend une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant successivement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous les paquets de k entiers sont dans $\{0,1\}^k$. Soit $x \in [0,1[$ tel que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $p_N \in \mathbb{N}$,

$$2^{p_N}\theta = 2\pi\underbrace{(\dots)}_{\in\mathbb{N}} + 2\pi(\frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in[0,\frac{1}{2^N}[})$$

On a alors

$$e^{\mathrm{i}2^{p_N}\theta} = e^{\mathrm{i}2\pi(\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_N}{2^N}+\dots)}$$

et

$$\left|\frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_N}{2^N} - x\right| \leqslant \frac{1}{2^N}$$

D'où $\lim_{N\to+\infty} u_{p_N} = e^{\mathrm{i}2\pi x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{U}$. ■

Solution 2.4. Si $a = 0$ et $b = 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou inversement), $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a > 0$ ou $b > 0$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(\frac{e^{\frac{1}{n}\ln(a)} + e^{\frac{1}{n}\ln(b)}}{2}\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + \frac{1}{4n^2}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{n}{2}\ln(ab) + \frac{1}{4}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2 + o(1))\Big) \end{aligned}$$

Si $ab > 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Si $ab < 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Si $ab = 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}\ln(a)^2}}$$

■

Solution 2.5.

1. Soit $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n > 0$ (car $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$).

$$J = \left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; x_k \geqslant \frac{M}{2}\right\}$$

est fini car $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et est non vide. On définit

$$\varphi(0) = \min\left\{k \in J \;\middle|\; x_k = \max\{x_n \mid n \in J\}\right\}$$

Pour tout $n \in J$, $x_{\varphi(0)} \geqslant x_n$. Si $n \notin J$, $x_n \leqslant \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$. Ainsi,

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

Puis on recommence avec

$$\Big\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\}\Big\}$$

2. Pour $l = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_N < \varepsilon$. On pose

$$\boxed{I = \{N\}}$$

et on a bien

$$\left|\sum_{k \in I} x_k - l\right| \leqslant \varepsilon$$

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{N} x_k > A$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$). Donc on peut prendre

$$\boxed{I = \{0, \dots, N\}}$$

Si $l \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < l$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $x_n < \varepsilon$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$. Donc il existe un plus petit entier N_1 tel que $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geqslant l - \varepsilon$. Comme $x_{N_1} < \varepsilon$, on a $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leqslant l + \varepsilon$. Donc

$$\boxed{I = \{N_0, \dots, N_1\}}$$

■

Solution 2.6. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$$

Montrons que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. D'abord, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} >$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = l \in \overline{R}_+^*$. Si $l < +\infty$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l}$ et donc $u_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l^2}$ et la série diverge. Donc $l = +\infty$ et comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On observe ensuite que $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$ donc $S_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} S_n$. Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{= (S_n - S_{n-1}) S_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_nS_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{=\ S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

On applique le théorème de Césaro à la suite $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$, et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a bien

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Réciproquement, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ avec $u_0 = 1$. On a

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}}$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}}$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1}$$

■

Remarque 2.1. *On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour $\alpha < 1$,*

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha}$$

Solution 2.7. Tout d'abord, on montre que pour tout $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$$

en posant

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et on a $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geqslant 0$ et $f'(0) = 0$. Comme $f(0) = 0$, on a pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \geqslant 0$.

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur f, on a

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leqslant \cosh(1)} \leqslant x^4$$

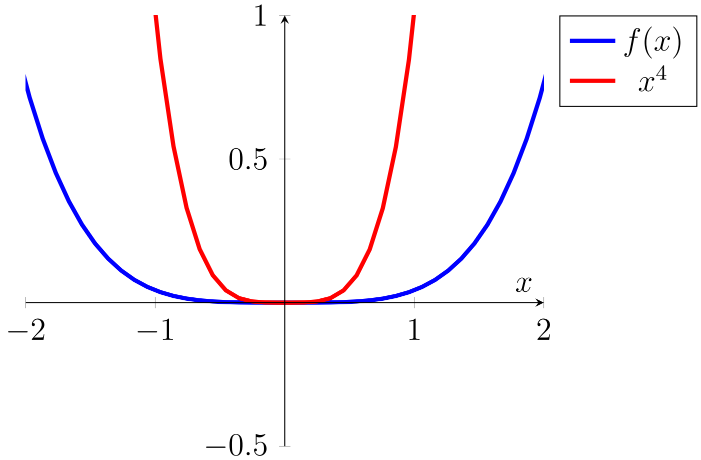

FIGURE 1 – $0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[\cosh\Big(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\Big) - 1\Big]$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}}$$

■

Solution 2.8. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$.

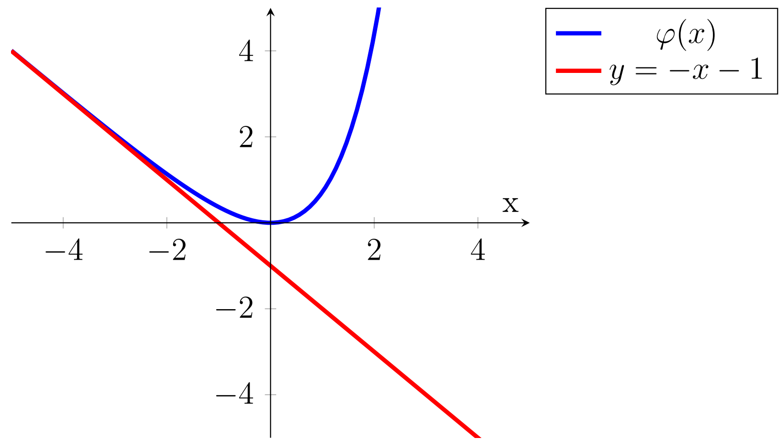

FIGURE 2 – $e^x - x - 1 \geqslant -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$0\varphi(a_n) \leqslant \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$$

Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| > \varepsilon$. Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geqslant \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0$$

ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

et c'est pareil pour b_n et c_n. ■

Solution 2.9.

1. Soit

$$\begin{array}{rrcl} f: &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x(1-x) \end{array}$$

On a $f(x) \in]0, \frac{1}{4}]$. Pour tout $n \in\geqslant 1$, $u_n \in]0, \frac{1}{4}]$. Par récurrence, on a donc $u_{n+1} \leqslant u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } v_n \text{ est bien définie.}}$$

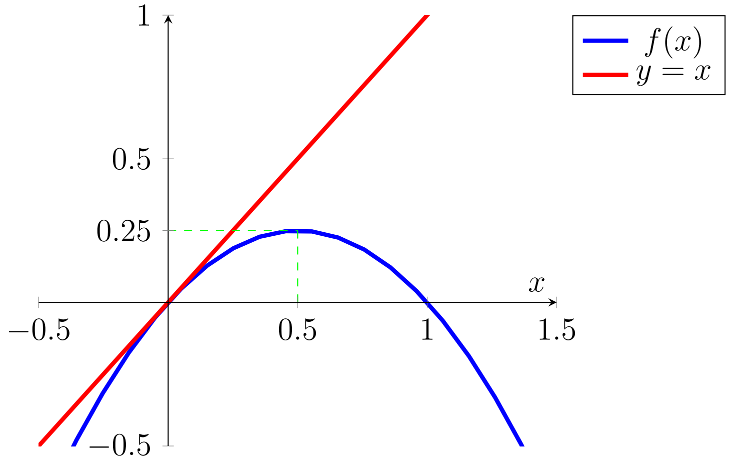

FIGURE 3 – $x(1-x) \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ pour $x \in]0,1[$.

2. On a
$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1)$$
Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. D'après le théorème de Césaro, on a
$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On a
$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{=O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$
donc
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. En sommant, on a donc
$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n+\ln(n)+o\big(\ln(n)\big)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{\ln(n)}{n}+o(\frac{\ln(n)}{n})} \\ &= \frac{1}{n}\Big(1-\frac{\ln(n)}{n}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{=\,\alpha_n} \end{aligned}$$

α_n est le terme genéral d'une série à termes positifs convergentes car $\alpha_n = O\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$. Donc

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et en sommant,

$$\boxed{v_n = n + \ln(n) + O(1)}$$

et comme montré auparavant,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}$$

■

Solution 2.10.

1. Soit

$$\begin{array}{cccc} f_n: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n - x - n \end{array}$$

On a $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 = 0$ si et seulement si

$$x = \Big(\frac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n$$

$f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. f_n est monotone strictement sur $]\alpha_n, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc il existe un unique } x_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } f_n(x_n) = 0}$$

On a $f_n(1) = -n < 0$ donc $x_n > 1$ et $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ pour $n \geqslant 3$ (on a $x_2 = 2$). Donc pour $n \geqslant 3$, $x_n \in]1, 2[$.

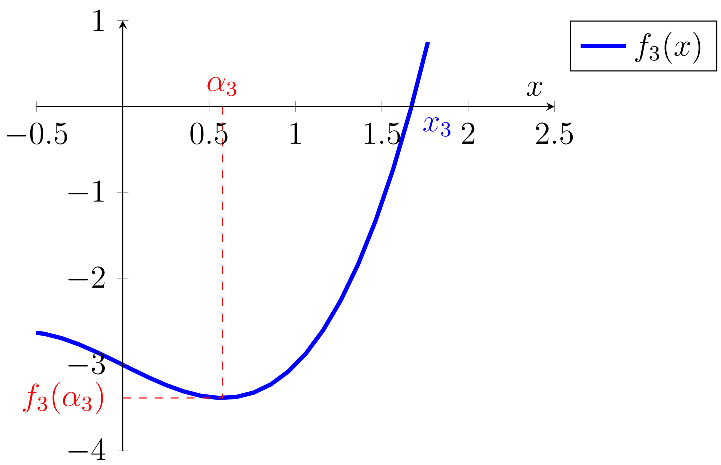

FIGURE 4 – $x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur $\mathbb{R}_+$.

2. On a $x_n^n = x_n + n \leqslant 2 + n$ donc

$$1 \leqslant x_n \leqslant (2+n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(2+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$$

3. On peut poser $x_n = 1 + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. On a

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n$$

donc

$$n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln(1+\varepsilon_n+n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1+\varepsilon_n}{n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

On a enfin

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n = 1 + n + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\ln(1+\varepsilon_n) &= \frac{1}{n}\ln(n+1+\frac{\ln(n)}{n}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)) \\
&= \frac{1}{n}\Big[\ln(n)+\ln\Big(1+\frac{1}{n}+\underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{=\,o\left(\frac{1}{n}\right)}\Big)\Big] \\
&= \frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}$$

donc

$$1+\varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)}$$

■

Solution 2.11. On note

$$v_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_na_0+u_{n-1}a_1+\cdots+u_0a_n}{u_0+\cdots+u_n}$$

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=a$ alors $v_n = a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. De manière générale, on a

$$v_n-a = v_n - a\frac{u_n+\cdots+u_0}{u_0+\cdots+u_n} = \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}(a_k-a)}{u_0+\cdots+u_n}$$

Ainsi,

$$|u_n-a| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}|a_k-a|}{u_0+\cdots+u_n}$$

Soit $\varepsilon>0$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geqslant N$, $|a_k-a|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, on note $M=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}|a_k-a|$. Soit $n\geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}
|v_n-a| &\leqslant \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k}|a_k-a|+\sum_{k=N}^n |a_k-a|}{u_0+\cdots+u_n} \\
&\leqslant \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_kM}{u_0+\cdots+u_n}+\underbrace{\frac{\sum_{k=N}^n u_{n-k}\frac{\varepsilon}{2}}{u_0+\cdots+u_n}}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}$$

car les u_i sont positifs.

On remarque enfin que

$$\begin{aligned}
u_n &= o(u_0 + \cdots + u_n) \\
u_{n-1} &= o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\
&\vdots \\
u_{n-N+1} &= o(u_0 + \cdots + u_n)
\end{aligned}$$

Donc

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et il existe $N' \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, on a

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^{n} u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a $|v_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et ainsi

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = a}$$

■

Solution 2.12.

1. Pour $n \geqslant 2$, (iii) donne

$$x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}$$

où l'inégalité est stricte d'après (ii). Pour $n \geqslant 2$, on a

$$x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2!}$$

donc

$$0 \leqslant 2x - \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Donc $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$. On a ensuite

$$0 \leqslant n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

donc

$$\boxed{a_n = \left\lfloor n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) \right\rfloor}$$

On a donc bien unicité.

Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus. On a, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Or

$$0 - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$$

donc

$$a_n \in \{0, \ldots, n-1\}$$

et (i) est vérifié.

On a

$$0 \leqslant x - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k!} < \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc (iii) est vérifié, et supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $m \geqslant n_0 + 1$, on a $a_m = m - 1$. Alors

$$x = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!}$$

et

$$x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n_0!}$$

donc

$$n_0!\Big(x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!}\Big) = 1$$

et

$$n_0!\Big(x - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_{n_0-1}}{(n_0-1)!}\Big) - a_{n_0} = 1$$

En prenant la partie entière, on a donc $0 = 1$ ce qui est absurde.

Donc (ii) est vérifié.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = 0$ alors $x \in \mathbb{Q}$.

   Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a
$$x = \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n!}$$
   si et seulement si
$$a_n = n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big)$$
   si et seulement si
$$n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) \in \mathbb{N}$$
   ce qui est vrai dès que $n \geqslant q$. Donc pour tout $n > q$, on a $a_n = 0$ par unicité.

3. Soit $l \in [-1,1]$. Soit $x \in [0,1[$ avec
$$x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$
   On a alors
$$n!2\pi x = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \underbrace{\sum_{k \geqslant n+2} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{=\,\varepsilon_n}$$
   On a
$$0 \leqslant \varepsilon_n < \frac{2\pi n!}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   Donc
$$\sin(n!2\pi x) = \sin\Big(\frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \varepsilon_n\Big)$$
   et il suffit d'avoir, comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\arcsin(l)}{2\pi} \in \Big[0, \frac{1}{4}\Big]$$
   On pose alors
$$\boxed{a_n = \left\lfloor \frac{n\arcsin(l)}{2\pi} \right\rfloor}$$
   pour $n \geqslant 2$ et on a $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{4} < n-1$ pour tout $n \geqslant 2$. On a donc le résultat.

■

Remarque 2.2. *Il n'y a pas unicité. Par exemple, pour $l = 0$, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ convient. Plus généralement, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \geqslant q$, on a*
$$\sin\left(n!2\pi\Big(x + \frac{p}{q}\Big)\right) = \sin(n!2\pi x)$$

Solution 2.13. Par récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\begin{array}{rrcl} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\ln(1+x) - x \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\ln(1+x) \end{array}$$

g est dérivable est

$$g'(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

donc g est croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $l \in]0,+\infty[$ tel que $g(l) = 0$ d'où $f(l) = l$.

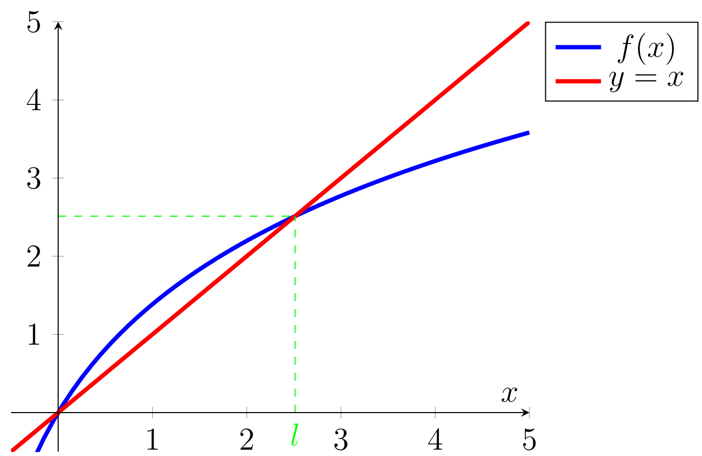

FIGURE 5 – $x \mapsto 2\ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x \in]0,l]$, on a $x \leqslant f(x) \leqslant l$ et pour tout $x > l$, on a $l \leqslant f(x) \leqslant x$.

Soit $n \geqslant 1$. Si $u_n \geqslant l$ et $u_{n-1} \geqslant l$, on a $m_n = l$ et $M_n \in \{u_n, u_{n-1}\}$. Il vient donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(f(u_n) + f(u_{n-1})) \geqslant f(l) = l$$

et

$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \leqslant M_n$$

Donc $m_{n+1} = l = m_n$ et $M_{n+1} \leqslant M_n$.

Par récurrence, on a pour tout $k \geqslant n$, $u_k \geqslant l$ et $(M_k)_{k \geqslant n}$ converge vers $\lambda \geqslant l$ (car décroissante et plus grande que l) et $m_k = l$ pour tout $k \geqslant n$.

De plus pour tout $k \geqslant n$, on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(f(u_k) + f(u_{k-1})) \leqslant f(M_k)$$

car f est croissante et donc

$$u_{k+2} \leqslant f(M_{k+1}) \leqslant f(M_k)$$

Par passage à la limite, on a $\lambda \leqslant f(\lambda)$ donc $\lambda = f(\lambda)$ et donc $\lambda = l$. Or pout tout $k \geqslant n$, on a

$$\underbrace{m_k}_{=\,l} \leqslant u_k \leqslant M_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$$

donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l}$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0 - 1} \geqslant l$ et $u_{n_0} \geqslant l$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$. Or même s'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_1 - 1} \leqslant l$ et $u_{n_1} \leqslant l$, alors on inverse les rôles de M_{n_1} et m_{n_1}.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n - l)(u_{n+1} - l) \leqslant 0$$

Supposons par exemple $u_0 \geqslant l$ et $u_1 \leqslant l$. Alors

$$0 \leqslant u_2 - l \leqslant \frac{u_0 - l}{2}$$

et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_{2k} - l \leqslant \frac{u_0 - l}{2^k}$. Donc $u_{2k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$ et de même $u_{2k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} l$ (par valeurs inférieures). Donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} l}$$

■

Solution 2.14. Soit $(\theta, \theta') \in [2, 2\pi[^2$ tel que

$$\lim_{k \to +\infty} e^{\mathrm{i} p x_n} = e^{\mathrm{i}\theta}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} e^{\mathrm{i}qx_n} = e^{\mathrm{i}\theta'}$$

Soient x, x' deux valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distinctes. On a

$$\begin{cases} e^{\mathrm{i}px} = e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}px'} \\ e^{\mathrm{i}qx} = e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}qx'} \end{cases}$$

Il existe $(k,k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} px = px' + 2k\pi \\ qx = qx' + 2k\pi \end{cases}$$

et donc $p(x-x') = 2k\pi$ et $q(x-x') = 2k'\pi$ et alors $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence. Comme elle est bornée,

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut prendre

$$\boxed{x_n = n!}$$

On a

$$e^{2\mathrm{i}\pi n!} = 1$$

et

$$n!e = n!\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$$

Si on veut x_n divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut prendre

$$\boxed{x_n = (-1)^n n!}$$

■

Solution 2.15.

1. On a
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leqslant \boxed{\frac{n^k}{k!}}$$
2. On a
$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k$$
donc
$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z|^k \underbrace{\left|\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right|}_{\geqslant 0}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} \frac{|z|^k}{n^k}$$
$$\boxed{= \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n}$$
3. On sait que
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{|z|}$$
et
$$\left(1+\frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{|z|}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{|z|}{n}+o\left(\frac{|z|}{n}\right)\right)} = e^{|z|}e^{o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{|z|}$$
En reportant dans la question précédente, on a donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z}$$

■

Remarque 2.3. *Une autre méthode est d'écrire, pour $z = a + \mathrm{i}b$,*
$$1 + \frac{z+\mathrm{i}b}{n} = 1 + \frac{a}{n} + \mathrm{i}\frac{b}{n} = \rho_n e^{\mathrm{i}\theta_n}$$
. On a alors
$$\left|1+\frac{a+\mathrm{i}b}{n}\right| = \sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}} = \rho_n$$

et alors

$$\begin{aligned}
\rho_n^n &= \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)\right|^n \\
&= e^{\frac{n}{2}\ln\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\frac{b^2}{n^2}\right)} \\
&= e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\
&= e^{a+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a = |e^z|
\end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$1+\frac{a+\mathrm{i}b}{n} = \rho_n\Big(\underbrace{\frac{1+\frac{a}{n}}{\rho_n}}_{=\ \cos(\theta_n)} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{b}{n\rho_n}}_{=\ \sin(\theta_n)}\Big)$$

On a alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b}{n\rho_n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{a}{n}}{\rho_n} = 1$$

On peut imposer $\theta_n \in]-\pi,\pi]$ *et il existe alors* $N\in\mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$, $\cos(\theta_n)\geqslant 0$. *Pour* $n\geqslant N$, *on a alors* $\theta_n \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *donc*

$$\theta_n = \arcsin\left(\frac{b}{n\rho_n}\right)$$

et $n\theta_n = n\arcsin\left(\frac{b}{n\rho_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} b$. *Finalement, on a bien*

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \rho_n^n e^{\mathrm{i}\theta_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^a e^{\mathrm{i}b} = e^z$$

Solution 2.16. Pour tout $n \geqslant 2$, $u_n > 0$. On a

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}}_{<1} u_n$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc converge. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n}\underbrace{\ln\Big(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)-\ln\Big(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\Big)}_{=\ v_k} < 0$$

Ensuite,

$$v_k = -\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{k}}$$

Comme $\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(u_n)=-\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

On a ensuite

$$u_n = \exp\left(\sum_{k=2}^{n}\left[\ln\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right]\right)$$

et

$$\ln\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Donc

$$v_k = -\frac{2}{\sqrt{k}}+O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Le terme dans le O est le terme générale d'une série absolument convergent donc convergent, on note ce terme α_k. On a alors

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n}\left(-\frac{2}{\sqrt{k}}+\alpha_k\right) = -2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}+\underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty}\alpha_k}_{=C}+o(1)$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} \int_2^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{k\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Posons

$$w_n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$$

On étudie la série de terme général $w_n - w_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(1-\left(1-\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n}+O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\\
&= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

Donc la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ converge et ainsi $(w_n)_{n\geqslant 2}$ converge : il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + C' + o(1)$$

On a donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^{n} v_k = -4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)$$

Ainsi,

$$u_n = \exp\left(-4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} Ke^{-4\sqrt{n}}$$

où $K = e^{-2C'+C} > 0$.

Donc

$$u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} K^\alpha e^{-4\alpha\sqrt{n}}$$

Si $\alpha \leqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^\alpha \not\to 0$ donc

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ diverge.}}$$

Si $\alpha > 0$, $u_n^\alpha = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ converge.}}$$

■

Solution 2.17. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a

$$u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \geqslant nu_{2n} \geqslant 0$$

Si (S_n) converge alors $S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$.

Comme on a $(2n+1)u_{2n} \geqslant (2n+1)u_{2n+1} \geqslant 0$, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n} = 0$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = 0 \text{ et donc } u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Si $\{p \in \mathbb{N} | pu_p \geqslant 1\}$ est infini, alors $u_p \neq o\left(\frac{1}{p}\right)$ donc

$$\boxed{\sum u_p \text{ diverge.}}$$

■

Remarque 2.4. *Ce n'est pas vrai si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, par exemple si $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré et 0 sinon.*

Solution 2.18. 1. C'est une série à termes positifs. On a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Ainsi

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

2. C'est une série à termes positifs. On a

$$u_n \geqslant \int_1^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(1) dt = \frac{\sin(1)}{n+1} \times \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

3. On écrit

$$\frac{n!}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}(-1)^k}_{\in\mathbb{Z}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k$$

et

$$\left|\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!}(-1)^k\right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

d'après le critère spécial des séries alternées.

Donc

$$\begin{aligned}\sin\left(2\pi\frac{n!}{e}\right) &= \sin\left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\substack{\text{terme général}\\ \text{d'une série alternée}\\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\substack{\text{terme général}\\ \text{d'une série absolument}\\ \text{convergente}}}\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

4. Si $\alpha \leqslant 0$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ et comme $\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

Si $\alpha > 1$, $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ convegre absolument donc converge.}}$$

Si $\alpha \in]0,1]$, on écrit

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \underbrace{(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}} \\
&= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(1 - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right)\right) \\
&= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} \quad \underbrace{-\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}\right)}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} < 0 \\ \text{terme général} \\ \text{d'une série convergente} \\ \text{ssi } \alpha > \frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

■

Remarque 2.5. *Soit $\alpha \in [0,1]$ et*

$$u_n = \int_0^\alpha t^n \sin(t) dt \geqslant 0$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \leqslant \alpha^{n+1}$, terme général d'une série convergente donc $\sum u_n$ converge.

Si $\alpha = 1$, on utilise

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi} t$$

Alors $u_n \geqslant \frac{2}{\pi(n+2)}$, terme générale d'une série divergente donc $\sum u_n$ diverge.

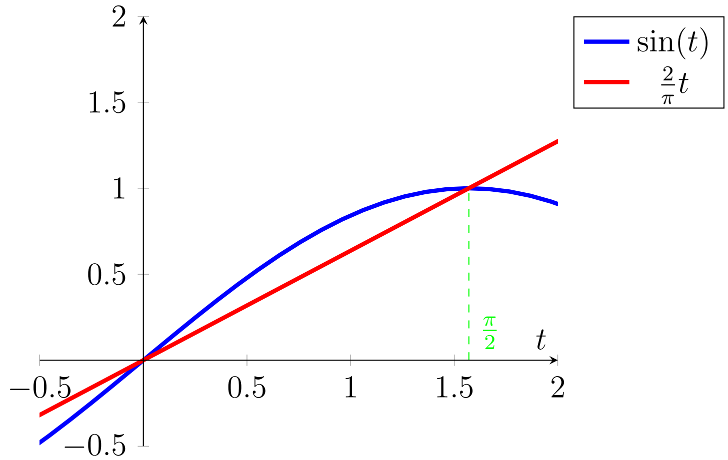

FIGURE 6 – $\sin(t) \geqslant \frac{2}{\pi} t$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solution 2.19.

On a

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

u_n est le reste d'ordre n d'une série alternée, donc u_n est du signe de $\frac{(-1)^n}{n}$. Donc on a

$$u_{n+1} \times u_n \leqslant 0$$

Par ailleurs,

$$|u_n| = \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{= \frac{1}{n(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{= \frac{1}{(n+2)(n+3)}} + \cdots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)}$$

Donc $(|u_n|)_{n \geqslant 1}$ est décroissante.

D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Pour calculer la somme, on peut chercher si la famille $(u_{n,p})_{\substack{n \geqslant 1 \\ p \in \mathbb{N}}}$ est sommable où

$$u_{n,p} = \frac{(-1)^n}{(n+2p)(n+2p+1)}$$

Soit $p \geqslant 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p} - \frac{1}{n+2p+1} \right) = \frac{1}{2p+1}$$

Donc

$$\sum_{p\in\mathbb{N}} \sum_{n\geqslant 1} |u_{n,p}| = +\infty$$

Ainsi, cette famille n'est pas sommable. Essayons plutôt de calculer u_n d'abord : soit $n \geqslant 1$ fixé et $N \geqslant n$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=n}^{N} (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \\
&= -\sum_{k=n}^{N} \int_0^1 (-t)^{k-1} dt \\
&= -\int_0^1 \sum_{k=n}^{N} (-t)^{k-1} dt \\
&= \int_0^1 (-t)^n \frac{1-(-t)^{N-n+1}}{1+t} dt
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n}^{N} \frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leqslant \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{1}{N+2}$$

Donc

$$u_n = -\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

Soit alors $M \geqslant 1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{M} u_n &= \sum_{n=1}^{M} \left(-\int_0^1 \frac{(-t)^n}{t+1} dt \right) \\
&= -\int_0^1 \frac{1}{1+t} \sum_{n=1}^{M} (-t)^n dt \\
&= -\int_0^1 \frac{-t}{1+t} \frac{1-(-t)^M}{1+t} dt \\
&= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt
\end{aligned}$$

Comme

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2}dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{M+1}dt = \frac{1}{M+2} \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2}dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t+1)-1}{(1+t)^2}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}dt \\ &= [\ln(1+t)]_0^1 + \left[\frac{1}{2}-1\right] \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{(3n)!} = \left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Posons

$$\begin{cases} S_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \\ S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \\ S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!} \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 &= e \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 &= \exp(j) \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 &= \exp(j^2) \end{cases}$$

où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. En sommant les trois lignes, on a

$$3S_0 = e + \exp(j) + \exp(j^2) = e + e^{-\frac{1}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3}\left(e + e^{-\frac{1}{2}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)}$$

S'il existe $p \geqslant 0$ tel que $n = p^3$, alors

$$\left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p$$

et

$$\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor \left(p^3 - 1\right)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p - 1$$

Sinon, $n^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{N}$. Soit $k = \left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$. Alors $k^3 < n \leqslant (k+1)^3$ donc $k^3 \leqslant n-1 < (k+1)^3$ d'où $k \leqslant (n-1)^{\frac{1}{3}} < k+1$. Donc $\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = k$.

Donc $\sum u_n$ est une série lacunaire. Comme $u_{p^3} = O\left(\frac{1}{p^3}\right)$, d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^3 - p}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x(4x^2-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1}$$

Donc la somme partielle jusqu'au rang n vaut

$$\begin{aligned}
S_n &= -\underbrace{\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}_{=\ H_n} + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p-1} + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2p+1} \\
&= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{2p+1} \\
&= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2\left(\underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k}}_{=\ H_{2n-1}} - 1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}}_{=\ \frac{1}{2}H_{n-1}}\right) \\
&= -H_n + 2H_{2n-1} - H_{n-1} - 1 + \frac{1}{2n+1} \\
&= -\ln(n) + 2\ln(2n-1) - \ln(n-1) - 1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{=\ o(1)} + o\left(1\right) \\
&= \ln\left(\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)}\right) - 1 + o\left(1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(4) - 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(4) - 1}$$

■

Solution 2.20. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$a - \varepsilon \leqslant \frac{f'(x)}{f(x)} \leqslant a + \varepsilon$$

Alors

$$(a-\varepsilon)f(x) \leqslant f'(x) \leqslant (+\varepsilon)f(x)$$

On voit donc que

$$f'(x) - f(x)(a+\varepsilon) \leqslant 0$$

On pose alors (sorte d'inéquation différentielle)

$$g_1(x) = f(x)e^{-(a+\varepsilon)x}$$

On a

$$g_1'(x) = e^{-(a+\varepsilon)x}\left(f'(x) - f(x)(a+\varepsilon)\right) \leqslant 0$$

pour tout $x \geqslant A$. Donc g_1 est décroissante sur $[A, +\infty[$. Alors

$$0 < g_1(x) \leqslant g_1(A) = f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}$$

Alors

$$0 < f(x) \leqslant \left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right) e^{(a+\varepsilon)x}$$

De même, pour $x \geqslant A$,

$$\left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right) e^{(a-\varepsilon)x} \leqslant f(x)$$

car $g_2(x) = f(x)e^{-(a-\varepsilon)x}$ est croissante sur $[A, +\infty[$.

Donc

$$f(n) \leqslant \left(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\right) e^{(a+\varepsilon)n}$$

Comme $a + \varepsilon < 0$,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} f(n) \text{ converge.}}$$

De plus

$$f(A)e^{-(a-\varepsilon)A}\frac{e^{(a-\varepsilon)N}}{1-e^{a-\varepsilon}} \leqslant R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leqslant f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}\frac{e^{(a+\varepsilon)N}}{1+e^{a+\varepsilon}}$$

Donc

$$\boxed{R_N = \underset{n\to+\infty}{O}\left(e^{aN}\right) \text{ et } e^{aN} = \underset{n\to+\infty}{O}(R_N)}$$

■

Solution 2.21. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{e^k}{k}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}+\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

On utilise la règle d'Abel : on écrit $e^k = B_k - B_{k-1}$ avec

$$\begin{cases} B_k = \sum_{j=0}^{k} e^j = \frac{e^{k+1}-1}{e-1} \\ B_{-1} = 0 \end{cases}$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k+1} = -1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{B_k}{k(k+1)}}_{\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{e^{k+1}}{(e-1)k^2}}}_{= \underset{n\to+\infty}{o}(S_n)} + \underbrace{\frac{B_n}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n e}{n(e-1)}}$$

Donc

$$\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{n(e-1)}}$$

■

Solution 2.22.

1. $u_n > 0$ et

$$u_n = e^{n^\alpha \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} = e^{n^\alpha\left(-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n^{\alpha-1}} + O\left(n^{\alpha-2}\right)$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Si $\alpha = 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$-n^{\alpha-1} + O\left(n^{\alpha-2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n^{\alpha-1}$$

donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$,

$$-n^{\alpha-1} + O\left(n^{\alpha-1}\right) \leqslant \frac{-n^{\alpha-1}}{2}$$

d'où

$$u_n \leqslant e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

2. On a $u_n > 0$ et

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{k}\ln(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$

donc par comparaison des sommes partielles, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

Donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

3. On écrit $n!e = \lfloor n!e \rfloor + \alpha_n$. Alors

$$\sin(n!\pi e) = (-1)^{\lfloor n!e \rfloor} \sin(\alpha_n \pi)$$

On écrit

$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$$

On pose $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{n \times n!}$. On a

$$v_n \leqslant e \leqslant w_n$$

donc

$$0 \leqslant e - v_n \leqslant \frac{1}{n \times n!}$$

d'où

$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leqslant \frac{n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc

$$n!e\pi = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!}}_{\text{pair}} \pi + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement,a

$$\frac{\sin(n!e\pi)}{\ln(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln(n)} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\ln(n)(n+1)}}_{\substack{\text{terme général}\\ \text{d'une série alternée}\\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)}_{\substack{\text{terme général}\\ \text{d'une série absolument}\\ \text{convergente}}}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

$\blacksquare$

Solution 2.23.

1. On a

$$u_n = (a+b+c)\ln(n) + b\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + c\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = (a+b+c)\ln(n) + \frac{b+2c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+2c &= 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si} a = b \text{ et } b = -2c \text{ avec } c \in \mathbb{R}}$$

Prenons $c = 1$ pour calculer la somme. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) \\
&= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) - \ln(n+1) \\
&= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) \\
&= \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(2)
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)}$$

2. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

On écrit

$$u_n = \frac{2^n\left(3^{2^{n-1}}-1\right)}{\left(3^{2^{-1}}+1\right)\left(3^{2^n}-1\right)} = \frac{2^n\left(3^{2^{n-1}}+1-2\right)}{3^{2^n}-1} = \underbrace{\frac{2^n}{3^{2^{n-1}}-1}}_{=\,v_n} - \underbrace{\frac{2^{n+1}}{3^{2^n}-1}}_{=\,v_{n+1}}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 = 1}$$

3. On remarque que $k - n\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor$ est le reste de la division euclidienne de k par n. Donc ce reste est borné par $k-1$. Donc $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. D'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

On note alors

$$J_r = \{n \in \mathbb{N}^* | n \equiv r[k]\}$$

$(J_r)_{r\in\{0,\ldots,k-1\}}$ forme une partition de $\mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{n\in J_r} \frac{r}{n(n+1)} = 0$$

si $r = 0$. Si $r \in \{1, \ldots, k-1\}$, on a

$$S_r = r\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)}$$

et par sommabilité on a

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n - k\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor}{n(n+1)} = \sum_{r=1}^{k-1} S_r = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On a

$$\begin{aligned}
v_p &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{(kp+r)(kp+r+1)} \\
&= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r+1} \\
&= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=2}^{k} \frac{r-1}{kp+r} \\
&= \frac{1}{kp+1} + \sum_{r=2}^{k-1} \frac{1}{kp+r} - \frac{k-1}{k(p+1)} \\
&= \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{kp+r} - \frac{1}{p+1}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^{N} v_p = \sum_{n=1}^{k(N+1)} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{k(N+1)}{N+1}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) = \ln(k) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(k)}$$

4. On a

$$\arctan(u) + \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

donc

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(n)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

■

Solution 2.24. On a

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \sum_{k=1}^{n} k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = u_1 - n u_{n+1} + \sum_{k=2}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$$

Si $(nu_n)_{n\geqslant 1}$, on a donc évidemment d'après ce qui précède

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

Si $(u_n)_{n\geqslant 1}$ décroît, $v_n \geqslant 0$ et on a

$$\frac{v_k}{k} = u_k - u_{k+1}$$

et donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k,n}$$

en définissant $w_{n,k} = \frac{v_k}{k}$ si $k \geqslant n$ et 0 sinon. On a $w_{k,n} \geqslant 0$ car $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sommable si et seulement si $(w_{n,k})_{k\in\mathbb{N}^*}$ si et seulement si (d'après le théorème de Fubini)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{\sum_{n=1}^{k} \frac{v_k}{k} = v_k} < +\infty$$

Et dans ce cas (toujours d'après le théorème de Fubini),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{=\ u_n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{=\ v_k} < +\infty$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$$

et

$$v_n = \frac{1}{(n+1)\dots(n+p)} - \frac{n}{(n+1)\dots(n+p+1)} = \frac{p+1}{(n+1)\dots(n+p+1)}$$

Soit

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1)\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1)\left(S_p - \frac{1}{p!}\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}} = \frac{p+1}{p(p!)}$$

■

Solution 2.25. Montrons d'une manière générale que si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ est telle que $u_k = \underset{k\to+\infty}{o}(u_{k+1})$, alors $\sum u_k$ diverge et $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

En effet, on a alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = +\infty$ et d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_k$ diverge. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$,

$$0 \leqslant \frac{u_k}{u_{k+1}} \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \geqslant N$. Pour $k \geqslant N+1$, on a

$$u_k \leqslant \varepsilon u_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon^{n-k} u_n$$

pour $k \leqslant n-1$.

Alors

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{N} u_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} u_k \leqslant \left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-N-1} u_n\right)$$

On peut supposer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ et alors

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_n \leqslant 2\varepsilon u_n$$

Donc on a bien le résultat voulu.

Pour revenir à l'exercice, on a alors

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+q)!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^q}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente. Donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

■

Solution 2.26. On a

$$\left|\frac{z^{nb}}{z^{na+c}+1}\right| = \frac{|z|^{nb}}{|1+z^{na+c}|} \underset{n\to+\infty}{\sim} |z|^{nb}$$

car $|z|<1$. $|z|^{nb}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour n fini, on a

$$\frac{1}{1+z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-z^{na+c})^k$$

Montrons donc que $\left(z^{nb}\left((-z^{na+c})^k\right)\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}|z|^{nb}|z|^{k(na+c)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{|z|^{nb}}{1-|z|^{na+c}} < +\infty$$

d'après ce qui précède. On a sommabilité, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}z^{nb}(-z^{na+c})^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k z^{ck}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}z^{n(b+ak)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{ck}}{1-z^{b+ak}}\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{ck}}{1-z^{b+ak}}}$$

■

Solution 2.27. On a

$$b_q = \sum_{n=1}^{q}u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,q}$$

Montrons donc que la famille des $(u_{n,q})_{(n,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}|u_{n,q}| &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=n}^{+\infty}\frac{n|a_n|}{q(q+1)}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n|\left(\sum_{q=n}^{+\infty}\frac{1}{q}-\frac{1}{q+1}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| < +\infty\end{aligned}$$

Donc le théorème de Fubini s'applique et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,q} = \sum_{q=1}^{+\infty}b_q = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n$$

Donc

$$\boxed{\sum_{q=1}^{+\infty}b_q = \sum_{n=1}^{+\infty}a_n}$$

■

Solution 2.28. D'après l'exercice précédent, $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}v_n = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n$$

On applique l'inégalité de la moyenne géométrique et arithmétique à $(u_1, 2u_2, \ldots, nu_n)$:

$$\sqrt[n]{u_1\times 2u_2\times\cdots\times nu_n} = w_n\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{1}{n}(u_1+2u_2+\cdots+nu_n) = (n+1)v_n$$

Donc on a

$$w_n \leqslant \frac{(n+1)v_n}{\sqrt[n]{n!}}$$

On étudie donc $\sqrt[n]{n!}$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n!} &= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n!)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n}\left(n\ln(n) - n + \frac{1}{2}\ln(\pi n) + \ln\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\right)\right) \\
&= n\exp\left(-1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{e}
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Ainsi, $w_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$ donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}}$$

Montrons que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leqslant e$$

Cela équivaut à $(n+1)^n \leqslant e^n n!$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^k \leqslant n!e^n$$

ce qui est vrai car pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ on a $\frac{1}{(n-k)!} \leqslant 1$. Donc $w_n \leqslant ev_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leqslant e\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = e\sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$$

Pour montrer que e est la meilleure constante possible, on forme pour $N \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,N} = \frac{1}{n}$ si $n \leqslant N$ et 0 sinon. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = H_n < +\infty$$

Dans ce cas, on a

$$w_{n,N} = \sqrt[n]{u_{1,N}\dots w_{n,N}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}v_n$$

pour $n \leqslant N$ et 0 sinon. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N} = \sum_{n=1}^{N} w_{n,N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n$$

En divisant par $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, on a donc

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N}}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N}} = \frac{\sum_{n=1}^{N} v_{n,N} \times \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

d'après le théorème de Césaro.

On a trouvé une suite donc la constante C est égale à e. D'après ce qui précède,

$$\boxed{e \text{ est la meilleure constante possible.}}$$

■

Remarque 2.6. *Pour la fin de l'exercice précédent, on peut utiliser le fait que $H_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$ et alors*

$$\sum_{n=1}^{N} w_{n,N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{1}{n+1}}_{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} e\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} e\ln(N)$$

par le théorème de sommation des relations de comparaison.

Solution 2.29.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\} | p+q=n\}$$

On a alors

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q)\in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n+1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

$$\boxed{\text{Donc la condition nécessaire et suffisante est } \alpha > 2.}$$

Dans ce cas, par le théorème des sommation par paquets, on a

$$\boxed{\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1)+\zeta(\alpha)}$$

2. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a

$$\frac{(p+q)^2}{2} \leqslant p^2+q^2 \leqslant (p+q)^2$$

Pour $\alpha \leqslant 0$, il est clair que l'on a divergence. Pour $\alpha > 0$, on a donc

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{(p^2+q^2)^{\alpha}} \leqslant \frac{2^{\alpha}}{(p+q)^{2\alpha}}$$

$$\boxed{\text{Donc la condition nécessaire et suffisante est } \alpha > 1.}$$

d'après le 1.

■

Solution 2.30. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{m+n^2-1} = \frac{1}{n^2} = \Sigma_n$$

par téléscopage. $\sum_{n\geqslant 1} \Sigma_n$ converge et

$$\sum_{n\geqslant 1} \Sigma_n = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\boxed{\text{Donc } \left(\frac{1}{(m+n^2)\,(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \text{ est sommable et la somme vaut } \frac{\pi^2}{6}.}$$

Posons, pour $k \geqslant 1$,

$$I_k = \left\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* \middle| m+n^2 = k\right\}$$

On a $n^2 \in \{1,\dots,k\}$ si et seulement si $n \in \left\{1,\dots,\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor\right\}$ et $(m,n) \in I_k$ si et seulement si $m = k-n^2$.

On a $|I_k| = \left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$ et par sommation par paquets,

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(m,n)\in I_k} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)}}$$

■

Remarque 2.7. *Grâce à une transformation d'Abel, on a aussi, pour $N \geqslant 1$,*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{\lfloor k \rfloor}{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{N} \underbrace{\frac{\lfloor k \rfloor - \lfloor k-1 \rfloor}{k}}_{\neq 0 \ ssi \ k=p^2} + \underbrace{\frac{\lfloor N \rfloor}{N+1}}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0}\end{aligned}$$

et on retrouve le résultat.

Solution 2.31.

1.
$$\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k\geqslant 1} -\ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}\right)$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k\geqslant 1} -\ln\left(1 - -\frac{1}{p_k}\right)$$

converge si et seulement si (car $-\ln\left(1-\frac{1}{p_k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} p_k > 0$ vu que $p_k \geqslant k$ pour tout $k \geqslant 1$)

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k}$$

converge.

Donc

$$\boxed{\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \text{ converge si et seulement si } \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k} \text{ converge.}}$$

Fixons alors $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^{N} \left(\sum_{n_k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{n_k}}\right)$$

où la série est à termes positifs et est convergent. Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{p_1^{n_1} \dots p_N^{n_N}}\right)_{n_1,\dots,n_N \in \mathbb{N}^N}$$

est sommable et on a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} &= \sum_{(n_1,\dots,n_N)\in\mathbb{N}^N} \frac{1}{p_1^{n_1}\dots p_N^{n_N}} \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{p_{N+1}-1} \frac{1}{k} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty\end{aligned}$$

car dans la première somme, tous les inverses (et une seule fois) des nombres dont les facteurs premiers sont dans $\{p_1,\dots,p_N\}$ apparaissent.

Donc

$$\boxed{\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}}$$

2. Posons

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$$

On a

$$\ln(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{-\ln\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}\right)}_{\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{p_k^s}=\underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^s}\right)}$$

car $p_k \geqslant k$. Donc

$$\boxed{(\Pi_n) \text{ converge dans } \mathbb{R}_+^*.}$$

Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{(p_1^s)^{j_1}\dots(p_n^s)^{j_n}}\right)_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\Pi_n = \sum_{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}}\right)^s &\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \\ &= \zeta(s)\end{aligned}$$

car dans la première somme, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, chaque k n'apparaît qu'une unique fois. Comme on a

$$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^s} \leqslant \Pi_n$$

Donc $\Pi_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \zeta(s)$ et ainsi

$$\boxed{\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} = \zeta(s)}$$

3. Soit $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}$. Si $a > 1$, on a

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^a}$$

Donc $\sum \frac{1}{n^z}$ converge absolument. On peut donc prolonger ζ à $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}$.

De même que précédemment, puisque

$$\left| \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \right| = \frac{1}{\left(p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n} \right)^a}$$

la famille

$$\left(\left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \right)_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n}$$

est sommable. On peut aussi développer et

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z$$

On a

$$\begin{aligned} |\Pi_n - \zeta(z)| &= \left| \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z} \right| \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus J_n} \frac{1}{k^z} \right| \\ &\leqslant \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus J_n} \frac{1}{k^a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{aligned}$$

où l'on a noté $J_n = \{k \geqslant 1 |$ les facteurs premiers de k sont dans $\{p_1, \dots, p_n\}\}$ et où l'on a appliqué l'inégalité triangulaire et le résultat de 2. pour conclure.

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\zeta(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}}$$

■

Solution 2.32. Pour $\alpha > 2$, puisque $\varphi(n) \geqslant n$, on a

$$\frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour $\alpha = 2$, si $n = p_k$ est premier, on a $\varphi(p_k) = p_k - 1$ et

$$\frac{\varphi(p_k)}{p_k^2} = \frac{p_k - 1}{p_k^2} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$$

et $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.

De même pour $\alpha < 2$, $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ diverge car $\frac{\varphi(n)}{n^2} = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)$.

Donc

$$\boxed{\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.}$$

Pour $\alpha > 1$, on calcule

$$S = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^\alpha} \times \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_2^\alpha} = \sum_{(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2} \frac{\varphi(n_1)}{(n_1 n_2)^\alpha}$$

ce qui est légitime car il s'agit de deux séries à termes positifs convergentes. Soit, pour $n \geqslant 1$, $D_n = \left\{(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \middle| n = n_1 n_2\right\}$. Par sommation par paquets, on a,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(n_1,n_2) \in D_n} \frac{\varphi(n_1)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{n_1 | n} \varphi(n_1)\right)$$

et grâce à la formule d'Euler-Möbius, on a

$$\sum_{n_1 | n} \varphi(n_1) = n$$

Ainsi, $S = \zeta(\alpha - 1)$ et donc

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha - 1)}{\zeta(\alpha)}}$$

■

Solution 2.33. Soit $A \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. S'il y a n indices $k \in \mathbb{N}$ tels que $z_k \in B(A, R)$, alors pour ces indices k, on a $B(z_k, \frac{1}{2}) \subset B(A, R + \frac{1}{2})$. Donc (faire un dessin !), on a

$$n\frac{\pi}{4} \leqslant \pi \left(R + \frac{1}{2}\right)^2$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{i \in \mathbb{N} | z_i \in B(0, n)\}$. De l'inégalité précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est fini. Il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective qui permet d'ordonner les z_n par module croissante et à même module par indice croissant.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $R = \left|z_{\sigma(n)}\right|$, on a pour tout $k \leqslant n$, $z_{\sigma(k)} \in B(0, R)$.

Donc

$$n\frac{\pi}{4} \leqslant \pi \left(\left|z_{\sigma(n)}\right| + \frac{1}{2}\right)^2$$

d'où

$$\left|z_{\sigma(n)}\right| \geqslant \left|z_{\sigma(n)} + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2}$$

Donc

$$\left|\frac{1}{z_{\sigma(n)}}\right|^3 = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Donc

$$\boxed{\sum \frac{1}{z_{\sigma(n)}^3} \text{ est absolument convergente.}}$$

■

Solution 2.34. On a $k = \lfloor n \rfloor$ si et seulement si $k^2 \leqslant n < (k+1)^2$. Il y a $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ entiers.

Posons

$$B_p = \sum_{n=1}^{p} (-1)^{\lfloor n \rfloor}$$

et $B_{-1} = 0$. Si $k^2 \leqslant p \leqslant (k+1)^2$, on a

$$B_p = \underbrace{B_k^2}_{\text{signe de } (-1)^k} + (-1)^k \underbrace{(p-k)^2}_{|\cdot| \leqslant 2k+1}$$

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|B_p| \leqslant 2 \lfloor p \rfloor + 1$$

Donc avec une transformation d'Abel, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} &= \sum_{n=1}^{N} \frac{(B_n - B_{n-1})}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{B_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{B_n}{n+1} \\
&= \underbrace{\frac{B_N}{N}}_{= \underset{N \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} - B_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{n(n+1)}}_{= \underset{N \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}
\end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann, la dernière somme converge absolument et donc

$$\boxed{\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} \text{ converge.}}$$

■

Solution 2.35.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n u_{n+1} > 0$. On a

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{N_0}}\right) = \sum_{k=N_0+1}^{n} \ln\left(\frac{a+k}{n+k}\right) = \sum_{k=N_0+1} \ln\left(1 + \frac{a}{k}\right) - \ln\left(1 + \frac{b}{k}\right)$$

Alors

$$\ln\left(\frac{u_n}{u_{N_0}}\right) = \sum_{k=N_0+1}^{n} \frac{a-b}{k} + \underbrace{\underset{k \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{\text{terme général d'une série convergente}} = (a-b)\ln(n) + \underbrace{C}_{\in \mathbb{R}} + \underset{n \to +\infty}{o}(1)$$

Ainsi,

$$u_n = u_{N_0} n^{a-b} \underbrace{k^{1 + \underset{n \to +\infty}{o}(1)}}_{>0} \underset{n \to +\infty}{\sim} U_{N_0} n^{a-b} k$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b - a > 1}$$

2. On a

$$u_{n+1}(b+n+1) = u_n(a+n+1)$$

donc

$$(a+1)u_n = bu_{n+1} + (n+1)u_{n+1} - nu_n$$

En sommant sur $\mathbb{N}$, on a

$$(a+1)\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = b\sum_{n=1}^{+\infty} u_n + u_1 = b\sum_{n=1}^{+\infty} + \underbrace{u_1 - bu_0}_{=\frac{a(a+1)}{b(b+1)}-a}$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{a\,(a+1-b\,(b+1))}{b\,(b+1)\,(a+1-b)} = a\left(\frac{1}{b(b+1)} - \frac{b}{(b+1)(a+1-b)}\right)}$$

3. Pour $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$, on a

$$\boxed{u_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} = \frac{-\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}}{(n+1)!} = -\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)}\binom{2n}{n}}$$

■

Solution 2.36.

1. u_n est une série à termes positifs et

$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

$\sum v_n$ est une série alternée. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ et en formant

$$\begin{array}{rccc} f: & [2,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array}$$

On a $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ qui est négatif dès que $x > e$. Donc $(v_n)_{n\geqslant 3}$ décroît. D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

2. f décroît sur $[,+\infty[$ donc pour tout $k \geqslant 4$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x}dx \leqslant \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln(x)}{x}dx$$

d'où

$$\underbrace{\int_4^{N+1} \frac{\ln(x)}{x}dx}_{=\frac{1}{2}\left[\ln^2(N+1)-\ln^2(4)\right]} \leqslant \sum_{k=4}^{N} \frac{\ln(k)}{k} \leqslant \underbrace{\int_3^{N} \frac{\ln(x)}{x}dx}_{=\frac{1}{2}\left[\ln^2(N)-\ln^2(3)\right]}$$

Donc

$$\boxed{S_N \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln^2(N)}$$

Formons $w_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$. $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} w_n - w_{n-1}$ converge.

On a

$$w_n - w_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln^2(n-1)}{2}$$

On a

$$\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln(n) - \frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\ln^2(n-1) = \ln^2(n) - \frac{2\ln(n)}{n} + \underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{=\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}$$

Donc

$$w_n - w_{n-1} = \underbrace{\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{\text{terme général d'une série absolument convergente}}$$

Donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + L + \underset{n\to+\infty}{o}(1)}$$

3. On a

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(2k)}{2k}}_{=I_N} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1}}\frac{\ln(2k+1)}{2k+1}_{=J_N}$$

Donc

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = I_N - (S_{2N} - I_N)$$

On a

$$S_{2N} = \frac{\ln^2(2N)}{2} + L + \underset{N\to+\infty}{o}(1) = \frac{\ln^2(2)}{2} + \frac{\ln^2(N)}{2} + \ln(2)\ln(N) + L + \underset{N\to+\infty}{o}(1)$$

De plus,

$$I_N = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(2)}{2k}}_{=\frac{\ln(2)}{2}\left(\ln(N)+\gamma+\underset{N\to+\infty}{o}(1)\right)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(k)}{2k}}_{=\frac{1}{2}S_N=\frac{\ln^2(N)}{4}+\frac{L}{2}+\underset{N\to+\infty}{o}(1)}$$

Finalement, on a bien

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{2N} v_n &= 2I_n - S_{2N} \\ &= \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2} + \underset{N\to+\infty}{o}(1)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2}}$$

■

Solution 2.37. Si $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_{n+1} = 10^{\alpha_n - 1}$. Alors $q_1(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$, $q_k(\alpha_n) = \alpha_{n-k}$, $q_n(\alpha_n) = 2$ et $q_{n+1}(\alpha_n) = 1$.

Si $k < \alpha_n$, $q_n(k) = 1$. Soit

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} u_k$$

Comme c'est une série à termes positifs, $\sum_{k\geqslant 1} u_k$ converge si et seulement $\sum_{n\geqslant 0} S_n$ converge.

Par définition, pour tout $k \in \{\alpha_n, \dots, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a $q_{n+1}(k) = 1$ et pour tout $p \geqslant n+1$, $q_p(k) = 1$. Donc

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{kq_1(k)\dots \underbrace{q_n(k)}_{\geqslant 2}}$$

Posons

$$\begin{aligned} f : \ \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \log_{10}(t) = \tfrac{\ln(t)}{\ln(10)} \end{aligned}$$

Il vient $q_1(t) = \lfloor f(t) \rfloor + 1 > f(t)$. Par récurrence, on a

$$q_n(t) \geqslant f^n(t)$$

défini pour $t \geqslant \alpha_n$. On a donc

$$S_n \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k(f(k))\dots f^n(k)}$$

On forme

$$\begin{array}{rccc} g_n : & [\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1 & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{tf(t)\dots f^n(t)} \end{array}$$

qui est décroissante. Ainsi, pour tout $k \in \{\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a

$$\int_k^{k+1} g_n(t) \leqslant u_k \leqslant \int_{k-1}^{k} g_n(t)$$

d'où en faisant le changement de variables $u = \log_{10}(t)$, on a

$$\int_{\alpha_{n-1}-1}^{\alpha_n - 1} g_{n-1}(u)du(\ln(10)) \leqslant S_n \leqslant \int_{\alpha_n - 1}^{\alpha_{n+1}-1} g_n(t)dt$$

On obtient donc une minoration par $C \times (\ln(10))^n$ donc

$$\boxed{\text{la série diverge.}}$$

■

Solution 2.38.

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_0 = 1 > 0$ et $P_1(x) = 1 + x$ s'annule en -1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat au rang n. On a $P'_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$, par hypothèse P_{2n+1} s'annule uniquement en $\alpha_{2n+1} < 0$. Donc $P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) = \frac{(\alpha_{2n+1})^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$ donc $P_{2n+2} > 0$. Comme $P'_{2n+3} = P_{2n+2} > 0$ donc P_{2n+3} est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P_{2n+3} = \pm\infty$. Donc il existe un unique $\alpha_{2n+3} \in \mathbb{R}$ tel que $P_{2n+3}(\alpha_{2n+3}) = 0$. Comme $P_{2n+3}(0) = 1 \geqslant 1$, $\alpha_{2n+3} < 0$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}}$$

2. Soit $x < 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = e^x > 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $P_{2n+1}(x) > 0$. En particulier, $\alpha_{2n+1} < x$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_{2n+1} = -\infty}$$

■

Solution 2.39. On pose $f_n(x) = e^x - x - n$, on a $f_n'(x) = e^x - 1$. Donc $x_1 = 0$ et ainsi

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \exists! x_n \geqslant 0\colon e^{x_n} = x_n + n}$$

Pour tout $x \geqslant 0$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -1 < 0$ donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0$ et $x_n < x_{n+1}$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, de plus $e^{x_n} = x_n + n \geqslant n$ donc $x_n \geqslant \ln(n)$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$$

De plus, $x_n = \ln(x_n + n)$ et $f_n(n) = e^n - 2n > 0$ (par récurrence), donc $x_n < n$ par stricte croissante de f_n donc

$$x_n = \ln(x_n + n) \leqslant \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2)$$

Ainsi, $x_n = \underset{n\to+\infty}{O}(\ln(n))$. En reportant, on a

$$x_n = \ln(n + \underset{n\to+\infty}{O}(\ln(n))) = \ln(n) + \ln(1 + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)) = \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

donc

$$\boxed{n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

En reportant, on a
$$\boxed{x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}$$

■

Solution 2.40.

1. Si $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \in \mathbb{R}_+^+$, on a

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n}{S^\alpha}$$

Comme u_n est le terme générale d'une série convergente donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

2. On a $\alpha = 1$ donc $v_n = \frac{u_n}{S_n}$, soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i = \sum_{i=1}^{n+p} \frac{u_i}{S_i}$$

où $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $i \in \{n+1, n+p\}$, $S_i \leqslant S_{n+p}$ donc

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geqslant \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i = \frac{1}{S_{n+p}} (S_{n+p} - S_n) = 1 - \frac{S_n}{S_{p+n}}$$

et ainsi,

$$\boxed{\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}}$$

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour n fixé, on a $\lim\limits_{p\to+\infty} S_{n+p} = +\infty$ (car $\sum u_n$ diverge). Donc lorsque $p \to +\infty$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i \geqslant 1$$

ce qui est absurde puisque la limite en $+\infty$ du reste est 0. Ainsi,

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

3. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ et

$$v_n = \frac{1}{\alpha - 1}\left(S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}\right)$$

avec $(S_n^{1-\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Donc $\sum w_n$ est une série téléscopique convergente. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, on a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leqslant w_n \leqslant \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha}$$

car $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $\sum w_n$ converge,

$$\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge.}}$$

Si $\alpha < 1$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{\alpha-1} = 0$,

$$\frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{u_n}{S_n^\alpha}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}}$$

4. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$ par convergence et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et de plus $u_n = R_n - R_{n+1}$. On pose

$$\alpha_n = \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(R_{n+1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}\right)$$

si $\alpha \neq 1$.

Si $0 < \alpha < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n^{1-\alpha} = 0$ donc $\sum \alpha_n$ est une série téléscopique convergente et de même que précédemment, on a

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} \leqslant \alpha_n$$

donc $w_n \leqslant \alpha_n$ et

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}}$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$\alpha_n = \ln(R_n) - \ln(R_{n+1})$$

où $\ln(R_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Donc $\sum \alpha_n$ est une série téléscopique divergente. De plus

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n} = 1 - \frac{R_{n+1}}{R_n}$$

donc

$$\ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n}{R_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-u_n}{R_n}$$

On a donc

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}}$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{u_n}{R_n^\alpha}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}}$$

■

Solution 2.41.

1. Pour tout $x \in [0,1[$ il existe un unique $q_x \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $x \in [\frac{q_x}{n}, \frac{q_x+1}{n}]$ avec $q_x = \lfloor nx \rfloor$ et

$$\begin{array}{rccc} h: & \{0, \ldots, n\} & \to & \{0, \ldots, n-1\} \\ & k & \mapsto & q_{x_k} = \lfloor nx_k \rfloor \end{array}$$

n'est pas injective donc il existe $k > k'$ tel que $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$ avec $(k, k') \in \{0, \ldots, n\}^2$ d'où

$$|kx - \lfloor kx \rfloor - (k'x - \lfloor k'x \rfloor)| < \frac{1}{n}$$

d'où

$$|(k - k')x - p| < \frac{1}{n}$$

avec $p \in \mathbb{Z}$ et pour $q = (k - k') \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\boxed{\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}}$$

2. D'après ce qui précède, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, n\}$ tels que

$$\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{nq_n} \leqslant \frac{1}{q_n^2}$$

car $n \geqslant q_n$. Donc

$$\boxed{\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}}$$

On a donc $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si q_n ne tend pas vers $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n > N$ avec $q_n < A$. Donc $\{n \in \mathbb{N} | q_n < A\}$ est infini : on peut extraire $(q_{\sigma(n)})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q_{\sigma(n)} < A$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire $(q_{\varphi(n)})$ qui converge vers $q \in \mathbb{R}$. Notons que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang donc $q \in \mathbb{N}^*$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{\varphi(n)} = \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} q_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha q$. $(p_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers relatifs stationnaire, donc $\alpha q \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

Donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} q_n = +\infty}$$

3. On sait qu'il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissante telle que $\sin(\sigma(n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$ alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sigma(n) \sin(\sigma(n))} = 0$$

donc si la suite converge, alors elle converge vers 0.

Appliquons ce qui précède à $\alpha = \frac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$ et

$$\left| \frac{1}{\pi} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Alors

$$|q_n - \pi p_n| < \frac{\pi}{q_n} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

pour n suffisamment grand. Quitte à extraire, on peut supposer que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. On a

$$|\sin(x)| = |\sin(q_n - \pi q_n)|$$

donc

$$|\sin(q_n)| \leqslant \left| \sin\left(\frac{\pi}{q_n}\right) \right| \leqslant \frac{\pi}{q_n}$$

car sin est croissant sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Donc

$$\underbrace{\frac{1}{|q_n \sin(q_n)|}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} \geqslant \frac{1}{\pi}$$

ce qui est absurde.

Donc

$$\boxed{\left(\frac{1}{n \sin(n)} \right)_{n \geqslant 1} \text{ ne converge pas.}}$$

$\blacksquare$

Solution 2.42.

1. On a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| = \left|\sum_{p=1}^{n} (a_{n,p} - a_p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p\right| =\leqslant \sum_{p=1}^{n} |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=n+1}^{+\infty} |a_p|$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geqslant N$, on a

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{n,p} - a_p| = \sum_{p=1}^{N} |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=N+1}^{n} |a_{n,p} - a_p|$$

Pour p fixé, on a $|a_p| \leqslant b_p$ donc

$$\sum_{p=N+1}^{n} |a_{n,p} - a_p| \leqslant 2 \sum_{p=N+1}^{n} b_p$$

Ainsi,

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| \leqslant \sum_{p=1}^{N} |a_{n,p} - a_p| + 3 \sum_{p=N+1}^{+\infty} b_p$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{p\geqslant 1} b_p$ converge, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$3 \sum_{p=N_1+1}^{+\infty} b_p \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

donc pour tout $n \geqslant N_1$, on a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p|$$

N_1 étant fixé, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, on a

$$\sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| = 0$$

Donc pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a

$$\left|\sum_{p=1}^{n} a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p\right| < \varepsilon$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p}$$

2. On fixe $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{p}{n}\right)^n = e^{-p}$$

Pour $x \geqslant -1$, on a $\ln(1+x) \leqslant x$ donc $\ln\left(1-\frac{p}{n}\right) \leqslant -\frac{p}{n}$ et $a_{n,p} = e^{n\ln\left(1-\frac{p}{n}\right)} \leqslant e^{-p} = b_p$ Donc d'après ce qui précède,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty\left(\left(\frac{1}{n}\right)^n+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\right)} = \frac{1}{e-1}}$$

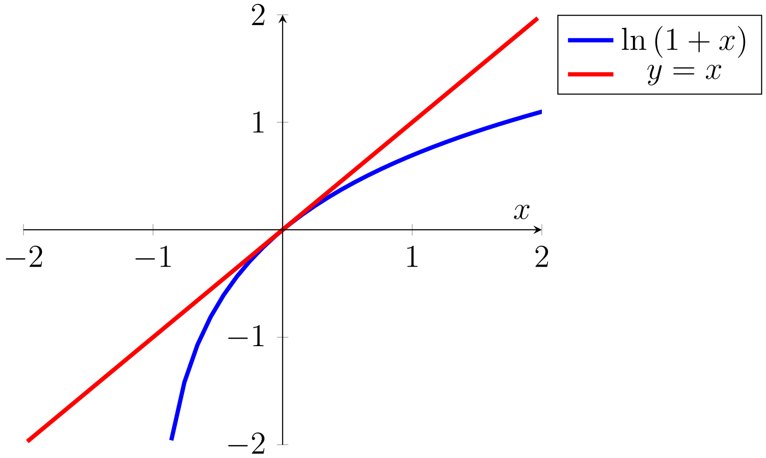

FIGURE 7 – $\ln(1+x) \leqslant x$ pour $x > -1$.

■

Remarque 2.8. *C'est faux si on n'a pas l'hypothèse (ii). Par exemple,*

$$a_{n,p} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pour p fixé mais

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Solution 2.43.

1. Pour tout $k \geqslant 1$, $(u_{kn})_{n\geqslant 1}$ est une sous-famille de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ sommable, donc $(u_{kn})_{n\geqslant 1}$ est sommable.

$$\boxed{\text{Donc } S_k \text{ existe.}}$$

2. On a

$$\begin{cases} S_1 - S_2 & = & u_1 + u_3 + \cdots + u_{2n+1} + \dots & = & 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 + S_6 & = & u_1 + u_5 + u_7 + u_{11} + \dots & = & 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 - S_5 + S_6 + S_{10} + S_{15} - S_{10} & = & u_1 + u_7 + u_{11} + \dots & = & 0 \end{cases}$$

A la première ligne on enlève les multiples de 2, à la deuxième ligne on enlève les multiples de 2 et 3, à la troisième ligne on enlève les multiples de 2, 3 et 5. Et ainsi de suite.

Soient donc $p_1, \dots, p_N$ les N premiers nombres premiers. On a

$$0 = \sum_{k=1}^{p_1 \dots p_N} \mu(k) S_k = \sum_{k \in \left\{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \middle| (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\right\}} \mu(k) S_k$$

où si $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $\mu(k) = 0$ s'il existe $\alpha_i \geqslant 2$ et $\mu(p_{i_1} \dots p_{i_s}) = (-1)^s$ sinon (fonction de Möbius).

Soit $n = p_1^{\beta_1} \dots p_N^{\beta_N}$. On cherche le coefficient en u_n dans la somme. Si $n = 1$, c'est 1. Si $n \geqslant 1$, on a

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0$$

donc

$$\sum_{k \in \left\{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \middle| (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\right\}} \mu(k) S_k = u_1 + \alpha_N$$

avec

$$\alpha_N = \sum_{k \in B_N} u_k$$

où $B_N \subset \mathbb{N}^*$ est tel que $\min(B_N) = p_{N+1}$. On a

$$|\alpha_N| \leqslant \sum_{k \geqslant p_{N+1}} |u_k| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

car c'est le reste de $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$ convergente.

Donc $u_1 + \alpha_N = 0 \xrightarrow[N \to +\infty]{} u_1$ donc $u_1 = 0$.

Avec $u_1 = 0$,

$$\begin{cases} S_n & = & u_n + u_{2n} + u_{3n} + \dots & = & 0 \\ S_{2n} & = & u_{2n} + u_{4n} + u_{6n} + \dots & = & 0 \end{cases}$$

et en recommençant avec u_n pour tout $n \geqslant 1$, on obtient bien

$$\boxed{u_n = 0}$$

■

Solution 2.44.

1. On prend $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum u_n = 0$ converge donc $\sum f(u_n) = \sum f(0)$ converge. Donc

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Supposons que f n'est pas continue en 0. Alors il existe $\varepsilon_0 >$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [-\alpha, \alpha]$: $|f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Pour $\alpha \equiv \alpha_n = \frac{1}{n^2}$, il existe $x_n \in \left[-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right]$: $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon_0$. $\sum x_n$ converge absolument mais $\sum f(x_n)$ diverge grossièrement ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{f est continue en 0.}}$$

2. Supposons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in \left]-\alpha, \alpha\right[$: $f(-x) \neq -f(x)$. On définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ telle que $f(-x_n) + f(x_n) \neq 0$. Il existe $N_n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$N_n \left| f(-x_n) + f(x_n) \right| \geqslant 1$$

(il suffit de prendre $N_n = \left\lfloor \frac{1}{|f(x_n) + f(-x_n)|} \right\rfloor + 1$)

On définit

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots, \dots, x_n, -x_n, \dots, \dots)$$

où $(x_n, -x_n)$ apparaît N_n fois. On a $\sum_{k=0}^{2N} u_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{2N+1} u_k = x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $\sum u_n$ converge.

Si $\sum f(u_n)$ convergeait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ alors

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(x_k) \right| < \frac{1}{2}$$

De plus, pour $n \geqslant n_0$, on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \cdots + f(x_n) + f(-x_n) + f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2}$$

où $(f(x_n), f(-x_n))$ apparaît N_n fois. Comme

$$|f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2}$$

on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \cdots + f(x_n) + f(-x_n)| = N_n |f(x_n) + f(-x_n)| < 1$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc f est impaire au voisinage de 0.}}$$

3. Supposons que pour tout $\beta > 0$, il existe $(x, y) \in]-\beta, \beta[^2$ avec $f(x+y) \neq f(x) + f(y)$. Alors il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_n \in \mathbb{N}$,

$$M_n |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \geqslant 1$$

On définit alors

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_n + y_n, -x_n, -y_n, \dots)$$

où $(x_n + y_n, -x_n, -y_n)$ apparaît M_n fois. On a

$$\sum_{k=0}^{N} u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } N \equiv 0[3] \\ x_n + y_n & \text{si } N \equiv 1[3] \\ y_n & \text{si } N \equiv 2[3] \end{cases} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

donc $\sum u_n$ converge.

Si $\sum f(u_n)$ convergeait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(u_k)\right| < \frac{1}{2}$$

De plus, d'après 2., il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_1$, on a $f(-x_n) + f(-y_n) = -f(x_n) - f(y_n)$ donc pour tout $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a

$$|f(x_n + y_n) + f(-x_n) + f(-y_n)| \times M_n = |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \times M_n < 1$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc f est linéaire au voisinage de 0.}}$$

4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*, x \in \mathbb{R}, |x| \leqslant \frac{\beta}{|k|}$. Par récurrence, on a $f(kx) = kf(x)$.

   Si $|x| < \beta$ et si $\frac{x}{\beta} \in \mathbb{Q}$, on a
$$\frac{x}{\frac{\beta}{2}} = \frac{p}{q}$$
   donc en posant $\lambda = \frac{2}{\beta} f\left(\frac{\beta}{2}\right)$, on a
$$f(x) = f\left(\frac{p\beta}{2q}\right) = \frac{p}{q} f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{p}{q}\frac{\beta}{2}\lambda = \lambda x$$
   Si $\frac{x}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{x}{\frac{\beta}{2}}$. On a alors
$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + r_n\frac{\beta}{2}\right) \\ &= f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + f\left(\frac{r_n\beta}{2}\right) \end{aligned}$$
   et $x - \frac{r_n\beta}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après 1. et $r_n f\left(\frac{\beta}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda x$

$$\boxed{\text{Donc f est une homothétie au voisinage de 0.}}$$

■

3 Probabilités sur un univers dénombrable

Solution 3.1.

1. On note P :'le lancer initial donne pile', F :'le lancer initial donne face', B_k :'la k-ième boule est blanche', N_k :'la k-ième boule est noire'.

   On a

   $$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(P)\,\mathbb{P}_P(B_k) + \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}_F(B_k) = \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} \tag{3.1}$$

   donc

   $$\boxed{\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

2. On a

   $$\boxed{\mathbb{P}_{B_k}(P) = \mathbb{P}_P(B_k)\,\frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(B_k)} = \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1} \tag{3.3}$$

3. On a

   $$\mathbb{P}\left(B_1 \bigcap \dots \bigcap B_k\right) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_P\left(B_1 \bigcap \dots \bigcap B_k\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_F\left(B_1 \bigcap \dots \bigcap B_k\right) \tag{3.4}$$

   $$= \frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{j}{j+1} + \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right) \tag{3.5}$$

   $$\boxed{= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\right)} \tag{3.6}$$

4. On a

   $$\mathbb{P}\left(B_k \bigcap B_{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} + \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{k+2}\right) \tag{3.7}$$

   $$= \frac{1}{2}\left(\frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)}\right) \tag{3.8}$$

   Donc on a indépendance si et seulement si

   $$\mathbb{P}\left(B_k \bigcap B_{k+1}\right) = \mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}(B_{k+1}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \tag{3.9}$$

   $$\Leftrightarrow 2k(k+1) + 2 = (k+2)(k+2) \tag{3.10}$$

   $$\Leftrightarrow 2k^2 + 2k = k^2 + 3k \tag{3.11}$$

   $$\Leftrightarrow \boxed{k = 1} \tag{3.12}$$

   Ainsi, seuls les deux premiers tirages sont indépendants.

■

Remarque 3.1. *Seuls les deux premiers tirages sont indépendants car le premier tirage est indépendant du lancer de pièce.*

Solution 3.2.

1.
$$\boxed{p_0 = 1, q_0 = 0, p_N = 0, q_N = 1} \tag{3.13}$$

2. Soit $a \in [\![1, N-1]\!]$. Puisque les lancers de pièce sont indépendants, on peut partitionner selon le résultat du premier lancer. On a donc [probabilités conditionnelles]

$$\boxed{p_a = p \times p_{a+1} + q \times p_{a-1}} \tag{3.14}$$

L'équation caractéristique est

$$pX^2 - x + q = 0 \tag{3.15}$$

On a $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4(1-p)\,p = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$.

Ainsi, si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $a \in [\![0, N]\!]$, on a

$$p_a = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^a \tag{3.16}$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \times \left(\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right)} \tag{3.17}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$p_a = \alpha a + \beta \tag{3.18}$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{N}\,(N-a)} \tag{3.19}$$

3. Pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$q_a = pq_{a+1} + qp_{a-1} \tag{3.20}$$

donc pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$p_a + q_a = p\left(p_{a+1} + q_{a+1}\right) + q\left(p_{a-1} + q_{a-1}\right) \tag{3.21}$$

Comme $p_0 + q_0 = p_N + q_N = 1$, on a pour tout $a \in [\![0, N]\!]$,

$$\boxed{p_a + q_a = 1} \tag{3.22}$$

Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement en temps fini.

■

Solution 3.3.

1. Les tirs sont indépendants donc

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(A_n\right) = (1-a)^n \times (1-b)^n \times a \\ &\mathbb{P}\left(B_n\right) = (1-a)^n \times (1-b)^n \times (1-a) \times b \end{aligned}} \tag{3.23}$$

2. On a

$$G_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \tag{3.24}$$

réunion disjointe. Donc

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbb{P}\left(G_A\right) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab} \\ &\mathbb{P}\left(G_B\right) = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \frac{b(1-a)}{a+b-ab} \end{aligned}} \tag{3.25}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(G_A\right) + \mathbb{P}\left(G_B\right) = 1} \tag{3.26}$$

3. On a $\mathbb{P}\left(G_A\right) = \mathbb{P}\left(G_B\right)$ si et seulement si

$$\frac{a}{1-a} = b \tag{3.27}$$

Cela implique que $\frac{a}{1-a} \in]0, 1[$ ce qui est possible uniquement (après étude de fonction) si

$$\boxed{a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } b = \frac{a}{1-a}} \tag{3.28}$$

$\blacksquare$

Solution 3.4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose E_n :'Le joueur gagne au bout du n-ième lancer' (évènement disjoints) et G :'Le joueur gagne'. On a $G \cup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$. Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{n} = \ln(2)} \tag{3.29}$$

2. On note P_n :'le joueur obtient pile au n-ième lancer', P :'il obtient pile'. On a

$$\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\mathbb{P}(G \bigcap P_n)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}_{P_n}(G) \times \mathbb{P}(P_n)}{\mathbb{P}(G)} \tag{3.30}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\ln(2)}} \tag{3.31}$$

Puis

$$\boxed{\mathbb{P}_G(P) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}_G(P_n) = 1} \tag{3.32}$$

$\blacksquare$

Remarque 3.2. *On a utilisé le résultat suivant : pour tout $x \in]0,1[$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \tag{3.33}$$

Soit on connaît le résultat avec les séries entières, soit on le redémontre à la main : pour $N \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} x^n t^{n-1} dt \tag{3.34}$$

$$= x \int_0^1 \frac{1-(xt)^N}{1-xt} dt \tag{3.35}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1-xt} dt}_{=[\ln(1-xt)]_0^1} + R_N \tag{3.36}$$

avec $|R_N| \leqslant \frac{x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ d'où le résultat.

Solution 3.5.

1. On a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 + p_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} = 2\alpha + (1-2\alpha) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{3.37}$$
donc
$$\boxed{\text{c'est une probabilité sur } \mathbb{N}.} \tag{3.38}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note E_k :'la famille a k enfants et exactement 2 garçons', E :'la famille a exactement 2 garçons', A_k :'la famille a k enfants'.

   On a alors
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(E_k) \times \mathbb{P}(A_k) \tag{3.39}$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \binom{k}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times p_k \tag{3.40}$$
$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k+1}} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \tag{3.41}$$
$$= (1-2\alpha) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{2k}} \tag{3.42}$$
$$= (1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{2k+4}} \tag{3.43}$$
$$= \frac{1}{16}(1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{4^k} = \frac{1}{16}(1-2\alpha) \times \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} \tag{3.44}$$
$$\boxed{= \frac{4(1-2\alpha)}{27}} \tag{3.45}$$

3. On note F :'la famille a au moins 2 filles', F_k :'la famille a exactement k filles et au moins 4 enfants', G :'la famille a au moins 2 garçons', G_k :'la famille a exactement k garçons et au moins 4 enfants'.

   On a
$$\mathbb{P}_G(G) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} \tag{3.46}$$
et $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G} = F_0 \cup F_1 \cup G_0 \cup G_1$. Donc, comme $\mathbb{P}(F_0) = \mathbb{P}(G_0)$ et $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(G_1)$, on a $\mathbb{P}(F \cap G) = 1 - 2(\mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1))$.

On a alors

$$\mathbb{P}(G_0) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{3.47}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{2k-1}} \tag{3.48}$$

$$= 2(1-2\alpha) \frac{1}{4^4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \tag{3.49}$$

$$= 2(1-2\alpha) \times \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{3} \tag{3.50}$$

et

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{3.51}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} k \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \tag{3.52}$$

$$= (1-2\alpha) \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{2^{2k-1}} \tag{3.53}$$

$$= (1-2\alpha) \times \frac{2}{4} \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{4^{k-1}} \tag{3.54}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k+1}{4^k} \tag{3.55}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} - 1 - \frac{2}{4} - \frac{3}{4^2} \right) \tag{3.56}$$

et on calcule enfin

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(G_0) - \mathbb{P}(G_1)} \tag{3.57}$$

■

Solution 3.6. Pour tout $k \geqslant 1$, on note A_k :'A gagne à son lancé k' et B_k de manière équivalente pour le joueur B. On note G_A :'A gagne' et de même pour B. On a ainsi

$$G_A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k \tag{3.58}$$

(réunion disjointe) et pareil pour G_B. On a

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} \tag{3.59}$$

d'où

$$\mathbb{P}\left(G_A\right) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{5}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)} \tag{3.60}$$

et pareil

$$\boxed{\mathbb{P}\left(G_B\right) = \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{5}{36}\right) \times \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{5}{36}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)} > \mathbb{P}\left(G_A\right)} \tag{3.61}$$

et

$$\mathbb{P}\left(G_A\right) + \mathbb{P}\left(G_B\right) = 1 \tag{3.62}$$

donc $G_A \cup G_B$ est presque sur. ■

Solution 3.7. Soit $k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$. La probabilité que l'on tire $2k$ boules blanches est (loi binomiale) :

$$\binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{3.63}$$

donc la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit pair est

$$\mathbb{P}_P = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{3.64}$$

De même, la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit impair est

$$\mathbb{P}_I = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k+1} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k-1} \tag{3.65}$$

On a alors

$$\mathbb{P}_P + \mathbb{P}_I = 1 \tag{3.66}$$

et

$$\mathbb{P}_P - \mathbb{P}_I = \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} (-1)^{k'} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k'} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k'} = \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n} \tag{3.67}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}_P = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n}\right)} \tag{3.68}$$

■

Remarque 3.3. *Si on note $\mathbb{P}_3$ la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit multiple de 3 :*

$$\mathbb{P}_3 = \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} \binom{n}{3k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{3k} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-3k} \tag{3.69}$$

On note $\mathbb{P}_2$ la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit congru à 2 module 3, et on définit $\mathbb{P}_1$ de même. Alors on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}_1+\mathbb{P}_2+\mathbb{P}_3 &= 1 \\ \mathrm{j}\mathbb{P}_1+\mathrm{j}^2\mathbb{P}_2+\mathbb{P}_3 &= \left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n \\ \mathrm{j}^2\mathbb{P}_1+\mathrm{j}\mathbb{P}_1+\mathbb{P}_3 &= \left(\frac{b+\mathrm{j}^2a}{a+b}\right)^n \end{cases} \tag{3.70}$$

et donc

$$\mathbb{P}_3 = \frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n + \left(\frac{b+\mathrm{j}^2a}{a+b}\right)^n\right) \tag{3.71}$$

Solution 3.8. Soit pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$A_i = \{\sigma \in \Sigma_n | \sigma(i) = i\} \tag{3.72}$$

$$A = \{\sigma \in \Sigma_n | \sigma \text{ a un point fixe}\} \tag{3.73}$$

On a

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{3.74}$$

On a

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!] \\ |J|=k}} \left|\bigcap_{i\in J} A_i\right| \tag{3.75}$$

Il y a $\binom{n}{k}$ tels J, et on a

$$\left|\bigcap_{i\in J} A_i\right| = |\{\sigma\in\Sigma_n | \forall i\in J, \sigma(i)=i\}| = (n-k)! \tag{3.76}$$

Ainsi,

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! \tag{3.77}$$

donc

$$\boxed{p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = -\left(\frac{1}{e}-1\right) = 1-\frac{1}{e}} \tag{3.78}$$

■

Solution 3.9.

1.
$$\boxed{p_N(0) = 0, p_N(1) = 1} \tag{3.79}$$

2. Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$p_N(n) = p \times p_N(n+1) + (1-n) \times p_N(n-1) \tag{3.80}$$

et l'équation caractéristique est $X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{1-p}{p}$ et le discriminant vaut $\Delta = \left(\frac{1}{p} - 2\right)^2 \geqslant 0$. Donc les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{q}{p}$. Ainsi, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,

$$p_N(n) = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^n \tag{3.81}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Avec les conditions initiales, on trouve

$$\begin{cases} \mu & = & \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ \lambda & = & \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases} \tag{3.82}$$

donc

$$\boxed{p_N(n) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \text{ i.e. } p < \frac{1}{2} \\ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n & \text{si } q < p \text{ i.e. } p > \frac{1}{2} \end{cases}} \tag{3.83}$$

On vérifie d'ailleurs que l'arrêt en temps fini est presque sûr : $p_N(n) + q_N(n) = 1$ (utiliser la relation de récurrence et les conditions initiales).

■

Solution 3.10.

1. On note A_n :'la première boule blanche apparaît au n-ième tirage' et B_n :'on tire une boule noire au n-ième tirage'. On a

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \bigcap \overline{B_n} \tag{3.84}$$

ce qui implique donc

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_n\right) &= p_n && (3.85)\\
&= \mathbb{P}\left(B_1\right)\mathbb{P}_{B_1}\left(B_2\right)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}\left(\overline{B_n}\right) && (3.86)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1} && (3.87)\\
&= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}} && (3.88)
\end{aligned}
$$

et par sommation téléscopique, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1} \tag{3.89}$$

Donc on tire une boule blanche presque sûrement.

2. On utilise le même principe : pour $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(A_n\right) = p_n = \frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}\times\frac{2c+1}{2c+2}}\times\cdots\times\frac{(n-2)\,c+1}{(n-2)\,c+2}\times\frac{1}{(n-1)\,c+2} \tag{3.90}$$

Comme les $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}\left(A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant 1 \tag{3.91}$$

donc

$$\boxed{\text{la série converge.}} \tag{3.92}$$

On peut montrer à nouveau que le tirage d'une boule blanche reste presque sûr. En effet, on a

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{nc+2-c-1}{nc+2} = 1 - \frac{c+1}{nc+2} = a - \frac{c+1}{nc} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.93}$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, il existe $K > 0$ tel que

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{c+1}{c}}} \tag{3.94}$$

avec $\frac{c+1}{c} > 1$. Notamment, $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = 0$. Comme

$$(nc+2)\,p_{n+1} = ((n-1)\,c+1)\,p_n \tag{3.95}$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ncp_{n+1} - (n-1)\, cp_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2p_{n+1} \tag{3.96}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n - u_1\right) \tag{3.97}$$

La première somme est téléscopique et vaut 0, et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc on trouve bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \tag{3.98}$$

■

Remarque 3.4. *On peut contourner la règle de Raabe-Duhamel. On écrit*

$$\ln(p_{n+1}) = -\ln(2) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{kc+1}{kc+2}\right) - \ln(nc+2) \tag{3.99}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{kc+2}\right) - \ln(n) + \ln(c) - \ln(2) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{3.100}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{kc} + \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) - \ln(n) - A + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{3.101}$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) - \ln(n) - A + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{3.102}$$

$$= -\ln(n)\left(1 + \frac{1}{c}\right) + A' + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{3.103}$$

Ainsi,

$$p_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1+\frac{1}{c}}} \tag{3.104}$$

donc la série converge.

Solution 3.11. On a

$$u_{n+1} = q \times 1 + p \times u_n^2 \tag{3.105}$$

car soit la bactérie meure au premier jour, soit les deux descendants n'ont plus de lignée au n-ième jour (on a u_n^2 car les lignées des deux descendants sont indépendantes).

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & q + px^2 \end{array}$$

Si $x \in [0,1]$, on a $f(x) \in [0,1]$ car $f(1) = q + p = 1$. Soit $g(x) = f(x) - x$. On a

$$g(x) = p\,(x-1)\left(x - \frac{p}{q}\right) \tag{3.106}$$

— Si $1 \leqslant \frac{p}{q}$: on a pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) > 0$ et $g(1) = 0$. Donc si

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1} \tag{3.107}$$

car c'est une suite croissante, majorée, convergente vers le point fixe 1.

— Si $1 > \frac{q}{p}$: si $x \in \left[0, \frac{q}{p}\right[$, on a $g(x) > 0$, si $x \in \left]\frac{q}{p}, 1\right[$, $g(x) < 0$ et $g\left(\frac{q}{p}\right) = 0$.
Par récurrence, comme $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{q}{p}\right[$ donc (suite croissante majorée qui converge vers le point fixe $\frac{q}{p}$) donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{q}{p}} \tag{3.108}$$

On a bien

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \min\left(1, \frac{q}{p}\right)} \tag{3.109}$$

Ainsi, la lignée s'éteint presque sûrement si et seulement si $\frac{q}{p} \geqslant 1$ i.e. $p \leqslant \frac{1}{2}$. Sinon, la probabilité d'extinction est $\frac{q}{p}$.

Si $p = \frac{1}{2}$, on pose $\varepsilon_n = 1 - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right) \tag{3.110}$$

d'où

$$\varepsilon_{n+1} = 1 - u_{n+1} = \varepsilon_n\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3.111}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon_{n+1}^{\alpha} = \varepsilon_n^{\alpha}\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^{\alpha} = \varepsilon_n^{\alpha} - \frac{\alpha\varepsilon_n^{\alpha+1}}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\varepsilon_n^{\alpha+1}\right) \tag{3.112}$$

On choisit $\alpha = -1$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \tag{3.113}$$

D'après le lemme de Césaro, on a $\frac{1}{\varepsilon_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ d'où

$$\boxed{\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}} \tag{3.114}$$

$\blacksquare$

Solution 3.12. On note E_n :'la puce est en 0 à l'instant $2n$' et B_n :'la puce repasse pour la première fois en 0 à l'instant $2n$'.

Soit E :'la puce repasse par l'origine'. On a

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \tag{3.115}$$

où les B_n sont disjoints donc $\mathbb{P}(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(B_n)$.

On a

$$\mathbb{P}(E_n) = \binom{2n}{n} p^n q^n \tag{3.116}$$

On écrit alors

$$E_n = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n} (E_n \cap B_k) \tag{3.117}$$

où la réunion est disjointe (on partitionne selon le premier passage en 0). D'où

$$u_n = \mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}_{B_k}(E_n) \tag{3.118}$$

On pose $b_k = \mathbb{P}(B_k)$ et on a $\mathbb{P}_{B_k}(E_n) = \mathbb{P}(E_{n-k}) = u_{n-k}$: c'est comme si on repartait de 0 à l'étape k. On a donc $u_0 = \mathbb{P}(E_0) = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} \tag{3.119}$$

en posant $b_0 = 0$.

Or, on a

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(pq)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}(pq)^n \tag{3.120}$$

d'où

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \tag{3.121}$$

et on a $4pq < 1$ si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$.

Dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$, on pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= S - u_0 && (3.122)\\
&= S - 1 && (3.123)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} && (3.124)\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k} && (3.125)\\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} u_l\right) \qquad = S\sum_{n=0}^{+\infty} b_n && (3.126)
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \mathbb{P}(E) = \frac{S-1}{S} < 1} \tag{3.127}$$

Comme dans ce cas, on a $\sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(E_n) < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli indique que le nombre de retours à l'origine est presque sûrement fini. ∎

Remarque 3.5. *Avec les séries entières, on peut vérifier que*

$$S = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}} \tag{3.128}$$

d'où

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \sqrt{1-4pq} \tag{3.129}$$

Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Comme on a pour $p \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(p) = 1 - \sqrt{4p(1-p)} \tag{3.130}$$

et $b_n(p) \leqslant b_n\left(\frac{1}{2}\right)$, on peut passer à la limite donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \tag{3.131}$$

et la retour en 0 est presque sûr si $p = \frac{1}{2}$.

Remarque 3.6. *Pour montrer que*

$$l(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{1-4x} \tag{3.132}$$

lorsque $0 \leqslant x < \frac{1}{4}$*. On effectue un produit de Cauchy*

$$l(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n = \frac{1}{1-4r} \tag{3.133}$$

en dénombrant les parties d'un ensemble à $2n$ *éléments séparées en* n *éléments dans* A *et* n *éléments dans* B*.*

4 Calcul matriciel

5 Réduction des endomorphismes

Solution 5.1. Si on a (i), soit x un vecteur propre associé à $\rho(u) = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$. On a $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$ et comme $x \neq 0$, on a $\rho(u) \leqslant |||\rho(u)||| < 1$ d'où (ii).

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford $u = n + d$ avec n nilpotent, d diagonalisable et $dn = nd$. Soit $m = \dim(E)$. Pour tout $p \geqslant m$, on a

$$u^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$$

En effet, on a $k \geqslant m - 1$ fixé, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\binom{p}{k} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

car $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et

$$\binom{p}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\rho(u)^p}\right)$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit x un vecteur propré associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc en particulier, $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, donc $\rho(u)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\rho(u) \geqslant 0$ donc $\rho(u) < 1$. Posons encore $u = d+n$ la décomposition de Dunford de u. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ base de E dans laquelle les coefficients de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$ sont en module $\leqslant \varepsilon$. Définissons sur E

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\right\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|$$

Soit $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ triangulaire supérieure avec $m_{ii} = \lambda_i$ et pour tout $j \neq i$, $|m_{i,j}| < \varepsilon$. Soit donc $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \in \mathbb{C}^m$, on a

$$\|Mx\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \underbrace{\left|\sum_{j=1}^{m} m_{i,j} x_j\right|}_{(|\lambda_i|+(m-1)\varepsilon)\|x\|_\infty}$$

donc

$$|||u||| \leqslant \underbrace{\rho(u)}_{<1} + (m-1)\varepsilon$$

et on choisit

$$\varepsilon < \frac{1-\rho(u)}{\underbrace{m-1}_{>0}}$$

d'où $|||u||| < 1$ et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence. ■

Remarque 5.1. *$u \mapsto \rho(u)$ n'est pas une norme car pour u nilpotente non nulle, $\rho(u) = 0$.*

Solution 5.2. Supposons (i), soit Y un vecteur propre de A avec $AY = \lambda Y$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, BA^kY = \lambda^k BY$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^{k_0}BY \neq 0$ et $BY \neq 0$ donc on a (ii).

Si (ii), supposons qu'il existe $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\varphi = 0$. On note

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r}(X-\lambda_i)^{m_i}$$

avec les λ_i distincts. Alors $Y = \sum_{i=1}^r Y_i$ où $Y_i \in \ker(A-\lambda_i I_n)$. Il existe $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ tel que $Y_{i_0} \neq 0$ car $Y \neq 0$. On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$B\exp(tA)Y = \sum_{i=1}^{r} B\exp(t\lambda_i)Y_i = 0$$

Pour tout $k \in \{0,\dots,r-1\}$, on a $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^r B\lambda_i^k \exp(t\lambda_i)Y_i = 0$. Pour $t=0$ on a $\sum_{i=1}^r \lambda_i^k BY_i = 0$ ce qui, pour $t = 0$, donne le système

$$\begin{cases} BY_1 + \cdots + BY_r & = & 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \cdots + \lambda_r BY_r & = & 0 \\ & \vdots & \\ \lambda_1^{r-1}BY_1 + \cdots + \lambda_r^{r-1}BY_r & = & 0 \end{cases}$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$, on a donc $\sum_{i=1}^r P(\lambda_i)BY_i = 0$. Pour $i \in \{0,\dots,r-1\}$ et $P = \prod_{i\neq j}\frac{(X-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$, on obtient pour tout $i \in \{1,\dots,r\}, BY_i = 0$. En particulier, $BY_{i_0} = 0$ et Y_{i_0} est un vecteur propre de A car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).

Soit $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, supposons que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $BA^kY = 0$. Soit $k \geqslant n$, il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$X^k = Q_k\chi_A + R_k$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc $A^k = R_k(A)$ d'où $BA^kY = BR_k(A)Y = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} B\exp(tA)Y &= B\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^kA^k}{k!}Y \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k(BA^kY)}{k!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence. ■

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. A $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & x\cos(t) + y\sin(2t) \end{array}$$

   est bornée, donc le sup sur $\mathbb{R}$ existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au sup sur $\mathbb{R}$.

2. Si $|x| + |y| \leqslant 1$, alors $N(x,y) \leqslant 1$ donc on a la première inclusion.

   Si $N(x,y) \leqslant 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leqslant 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leqslant \left| x\frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x\frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leqslant 2$$

   et donc $|y| \leqslant 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. On fixe $(x,y) \in S_N(0,1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π-périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limite à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ.

   On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leqslant x|\cos(t)| + y|\sin(2t)| = |\varphi(-t)|$$

   et $-t \in [0, \pi]$. Donc le sup est atteint sur $[0, \pi]$.

   On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leqslant \varphi(t) = x \underbrace{\cos(t)}_{\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]} + y\sin(2t) \leqslant x \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]} + y\sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t)$$

   Donc le sup est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le sup (existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le sup sur $\mathbb{R}$ qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.

   On a donc $x\cos(t_0) + y\sin(2t_0) = 1$ et $-x\sin(t_0) + 2y\cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0, en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.

Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que x et y s'écrivent de la façon demandée, alors t_0 est l'unique point satisfaisant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$. Mais alors le sup de φ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est atteint en un point t_1 qui vérifie les mêmes choses, donc $t_1 = t_0$ d'où $N(x, y) = 1$.

■

Solution 6.2.

1. Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur E

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (f, g) & \mapsto & f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \end{array}$$

   Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$ et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. Pour $x \in [0, 1]$, écrire $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, utiliser Cauchy-Schwarz avec f' et 1 puis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a + b}$, pour enfin passer au sup sur x.

3. Utiliser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\begin{array}{rccl} f_n : & [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^n \end{array}$$

■

Solution 6.3. Si f est ouverte, $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de R^p. Donc f est surjective.

Si f est surjective, on prend F un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $\dim(\ker(f)) = n - p$ et $\dim(F) = p$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\ker(f)$. On vérifie que $(f(e_1, \ldots, f(e_p))$ est une base de $\mathbb{R}^p$. On définit

$$\begin{array}{rccl} N_1 : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \sum_i^n x_i e_i & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\begin{array}{rccl} N_2 : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & \sum_i^p y_i f(e_i) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |y_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^p$.

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $y_0 \in f(\Theta)$, il existe $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. Comme Θ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta$$

Soit $y = \sum_{i=}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, si $N_2(y - y_0) < r_0$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$$

avec $N_1(x - x_0) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. Ainsi $x \in \Theta$ et $y \in f(\Theta)$, donc $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ et $f(\Theta)$ est un ouvert. ■

Solution 6.4.

1. Classique.
2. $$|f(x)| \leqslant |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leqslant |f(0)| + \kappa(f)x \leqslant N(f)$$

   car $x \leqslant 1$, donc $N_\infty \leqslant N$. Pour la non-équivalence, prendre

   $$\begin{array}{rccc} f_n: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^n \end{array}$$

3. On a $|f(0)| \leqslant N_\infty(f)$ donc $N(f) \leqslant N'(f)$. Ensuite, $N_\infty \leqslant N$ donne $N' \leqslant N + \kappa \leqslant 2N$. Donc N est N' sont équivalentes.

■

Remarque 6.1. *Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend $(e_i)_{i\in I}$ une base (de Hamel), $J = (i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ dénombrable. Si $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, on peut vérifier que*

$$N_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i\in I\setminus J} |x_i|$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n|x_{i_{2n}}| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}|x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i\in I\setminus J} |x_i|$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$. Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$. Alors

$$\left\| T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right) - I_n \right\|_\infty = \left|\frac{\lambda}{p}\right| < \alpha$$

donc $T_{i,j}(\lambda) \in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left(T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)^p \in G$$

Soit $\delta = \rho e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}} = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$.

On a alors

$$\left\| D_n\left(\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}}\right) - I_n \right\|_\infty < \alpha$$

donc $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}})^p \in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G = GL_n(\mathbb{C})$.

■

Remarque 6.2. *C'est faux sur $\mathbb{R}$. Contre-exemple : matrices de déterminant positif.*

Solution 6.6. Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $h \in E$ avec $\|h\| \leqslant \alpha$ et $\|f(h)\| > \varepsilon_0$. On prends $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\| \leqslant 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leqslant M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{\|h\|\to 0} f(x+h) = \lim_{\|h\|\to 0} f(x) + f(h) = f(x)$$

donc f est continue.

On a $f(px) = p(fx)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \lambda$.

Comme f est continue, on a

$$\begin{aligned}
f(\lambda x) &= \lim_{n\to+\infty} f(r_n x) \\
&= \lim_{n\to+\infty} r_n f(x) \\
&= \lambda f(x)
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire. ■

Remarque 6.3. *Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ ($0 \in I$). On définie*

$$f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\Big) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i\in I\setminus\{0\}} \lambda_i e_i$$

f vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \to \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. On a $\alpha(A) \subset \overline{A}$ donc $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Comme $\alpha(A)$ est un ouvert inclus dans $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.
2. Si $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$, on montre aussi que $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. On a donc $A, \overline{A}, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ et c'est tout.

■

Solution 6.8.

1. Si $d_A = d_B$,

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B}$$

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_i\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de l'inf). Il existe $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de la fermeture). Ainsi,

$$d_A(x) \leqslant \|x - a_2\| \leqslant \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$. Comme $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leqslant d_A$, on a $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.

2. Soit $x \in A$, on a $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leqslant \rho(A, B)$ donc $\sup\limits_{x\in A} d_B(x) \leqslant \rho(A, B)$, de même pour $\sup\limits_{y\in B} d_A(y)$ donc on on a un première inégalité.

   Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x - a\| \leqslant d_A(x) + \varepsilon$ et $\|x - b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon$. On a alors

$$d_A(x) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|a - b\| + \|x - b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A, B)$$

   Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leqslant d_B(x)+\alpha(A, B)$. De même, $d_B(x) \leqslant d_A(x)+\alpha(A, B)$ donc $\rho(A, B) \leqslant \alpha(A, B)$.

■

Solution 6.9.

1. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\lim\limits_{z\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \to x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur $\mathbb{C}$, on a $y = P(x) \in P(F)$.
2. Soit Θ un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $y \in P(\Theta)$, $\exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x, r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x - x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominatrice de P. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi

$$|Q(x)| = |y - y'| \geqslant |a|r^n$$

   Par contraposée, si $|y-y'| \leqslant \frac{|a|r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x'-x| < r$.Ainsi, $x' \in B(x, r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert.

■

Solution 6.10.

1. Si $P \notin \mathcal{S}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$ et $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$. Par contraposée, si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$,alors $P \in \mathcal{S}$.

   Réciproquement, si $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$ avec $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ réels, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^{n} |a - \lambda_i + ib| \geqslant |b|^n$$

2. Soit $(P_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $P_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} P \in F$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|P_p(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc quand $p \to +\infty$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc $P \in \mathcal{S}$ et S est fermé.

3. Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrice trigonalisable sur $\mathbb{R}$ qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ib bite χ_p le polynôme caractéristique de M_p. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\chi_p \in \mathcal{S}$ et $\chi_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \chi_M$. Comme $\mathcal{S}$ est fermé, $\chi_M \in \mathcal{S}$ et M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

■

Solution 6.11.

1. φ est linéaire et $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n + = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$.

   Si φ est bijective, elle est surjective et il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UA + BV = 1$ et d'après le théorème de Bézout, on a $A \wedge B = 1$.

   Réciproquement, si φ n'est pas surjective, il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\varphi(U, V) = 0$ d'où $AU = -BV$. Soit $\delta = A \wedge B$, on écrit $A = \delta A_1$ et $B = \delta B_1$ avec $A_1 \wedge B_1 = 1$ et on a $A_1 U = -B_1 V$. D'après le théorème de Gauss, on a $A_1 \mid V$ et $B_1 \mid U$. Si $U = 0$, on a $V = 0$ et de même si $V = 0$, on a $U = 0$. On peut donc supposer $U \neq 0$ et $V \neq 0$, et on a alors $\deg(A_1) \leqslant \deg(V) \leqslant n-1 < n = \deg(A)$ mais $A = \delta A_1$ donc $\deg(\delta) \geqslant 1$ et $A \wedge B \neq 1$.

2. Φ est continue car $R_{A,B}$ est un polynôme en les coefficients de A et B.

3. Comme on est dans $\mathbb{C}$, $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$. $\Phi_{P,P'}$ est continue d'après la question précédente, $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc Δ est ouvert.

   Sur $\mathbb{R}$, on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si $P \wedge P' = 1$ (contre-exemple : $P = X^2+1$). Dans $\mathbb{R}_3[X]$, X est scindé à racines simples et $X(1+\varepsilon X)^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} X$ et $-\frac{1}{\varepsilon}$ est racine double, donc Δ n'est pas ouvert.

■

Remarque 6.4. *On peut cependant considérer*

$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\}$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ sont les racines (distinctes) de R sur $\mathbb{R}$, on choisit $\alpha_0 \in]-\infty, \lambda_1$, $\alpha_n \in]\lambda_n, +\infty[$ et $\alpha_i \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ si $i = 1, \ldots, n-1$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$ (car les racines de P provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ & Q & \mapsto & (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \end{array}$$

Ψ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$ qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que si $\|P - Q\| < r$, alors $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$. Donc Q change n fois de signe, et admet au moins n racines. Mais $\deg(Q) = n$, donc Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc Δ_n est ouvert dans $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$.

Remarque 6.5.

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ diagonalisable à racines simples}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M \text{ sciné à racines simples}\}$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et c'est aussi vrai sur $\mathbb{R}$.

Solution 6.12.

1. Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & A^n \end{array}$$

   f est continue et $F = f^{-1}(\{0\})$ donc $F = \overline{F}$.

   Soit $M_0 \in F$, X^n annule M_0 donc M_0 est trigonalisable : on écrit M_0 dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors M_ε la même matrice dans la même base en rajoutant simplement ε en première position de la diagonale. Alors $M_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} M_0$ et $M_\varepsilon \notin F$ donc $\mathring{F} = \emptyset$. Notons que cela signifie que F est dense.

2. La norme dérive du produit scalaire $(A|B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\mathsf{T} B)$. Soit $M \in F$, on a $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$. On a $(M|I_n) = \mathrm{Tr}(M) = 0$ car M est nilpotente. Donc $\|M - I_n\|^2$ est minimale pour $\|M\|^2$ minimale, donc pour $M = 0 \in F$. Donc $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$ (et la distance est atteinte pour $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

■

Solution 6.13.

1. $A \mapsto \det(A)$ est continue et $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est donc ouvert. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = A - \frac{1}{p+1} I_n$. Comme $\mathrm{Sp}(A)$ est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \geqslant N$, $\frac{1}{p+1} \notin \mathrm{Sp}(A)$. Donc pour tout $p \geqslant N$, $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$, et $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$ donc $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. On fixe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On écrit $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Comme, à B fixé, $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a le résultat par densité.

■

Solution 6.14.

1. On a $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u) \circ v_p = \frac{1}{p}(id_E - u^p)$, donc $\|v_p \circ (id_E - u)\| \leqslant \frac{1}{p}(\|id_E\| + \|u^p\|) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.

   Soit $x \in \ker(u - id_E) \cap \mathrm{Im}(u - id_E)$, on a $u(x) = x$ et il existe $y \in E$, $x = (u - id_E)(y)$. On a $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$ et $v_p(x) = v_p \circ (u - id_E)(y) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ d'où $x = 0$. Le théorème du rang permet de conclure.
2. Soit $x \in E$, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $\Pi(x) = x_1$ et $x_2 = (u - id_E)(y_2)$. Alors $v_p(x) = x_1 + v_p \circ (u - id_E)(y_2) \xrightarrow[p \to +\infty]{} x_1 = \Pi(x)$.

■

Solution 6.15.

1. Pour tout $x \in A$, $f_n(x) \in A$ car A est convexe. Soit $(x, y) \in A^2$, on a

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f(x) - f(y)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - y\|$$

   Donc f_n est $(1 - \frac{1}{n})$-lipschitzienne. On forme

$$\begin{array}{rccc} g_n : & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|f_n(x) - x\| \end{array}$$

   qui est continue. Soit $x_n \in A$ telle que $g_n(x_n) = \min_{x \in A} g_n(x)$ (existe car A est compact et g_n continue). On a $x_n \in A$, d'où $f_n(x_n) \in A$ et

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f_n(x_n) - x_n\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) g_n(x_n)$$

Si $g_n(x_n) \neq 0$, alors on aurait $g_n(f(x_n)) < g_n(x_n)$ ce qui n'est pas possible. Donc $g_n(x_n) = 0$ et $f_n(x_n) = x_n$.

Soit y_n un autre point fixe, on a

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x_n - y_n\|$$

donc $x_n = y_n$.

2. On a $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et on extrait (car A est compact) et on a

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in A$$

On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)} f(x_0)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\right) f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)}$$

par continuité de f. Donc $f(x) = x$.

3. Soit $(x, y) \in A^2$, points fixes de f, et $t \in [0, 1]$, on pose $z = tx + (1 - t)y$. On a

$$\begin{aligned}
\|x - y\| &= \|f(x) - f(y)\| \\
&\leqslant \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| \\
&\leqslant \|x - z\| + \|z - y\| \\
&= (1 - t)\|x - y\| + t\|x - y\| \\
&= \|x - y\|
\end{aligned}$$

On a donc égalité partout : $\|f(x)-f(y)\| = \|f(x)-f(z)\|+\|f(z)-f(y)\|$ et $\|f(x)-f(z)\| = \|x - z\|$, $\|f(z) - f(y)\| = \|z - y\|$ car f est 1-lipschitzienne.

Comme la norme est euclidienne, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) - f(z) = \lambda(f(z) - f(y))$ d'où $f(x) + \lambda f(y) = (\lambda + 1)f(z)$ d'où $f(z) = \frac{x+\lambda y}{\lambda+1} = t'x + (1 - t')y$ avec $t' = \frac{1}{\lambda+1} \in [0, 1]$. En reportant, on a

$$\|f(x) - f(z))\| = \|x - t'x - (1 - t')y\| = (1 - t')\|x - y\| = \|x - z\| = (1 - t)\|x - y\|$$

Si $x \neq y$, alors $t = t'$ et $f(z) = tx + (1 - t)y = z$.

4. Soit dans $\mathbb{R}^2$, $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} = [-1,1]^2 = A$. Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & A \\ & (x,y) & \mapsto & (x,|x|) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_\infty &= \|(x_1,|x_1|)(x_2,|x_2|)\|_\infty \\ &= \max\{|x_1-x_2|, \big||x_1|-|x_2|\big|\} \\ &= |x_1-x_2| \\ &\leqslant \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_\infty \end{aligned}$$

Donc f est 1-lipschitzienne, on a $f(x,y)=(y,x)$ si et seulement si $y=|x|$. Donc ici, F n'est pas convexe.

■

Solution 6.16.

1. On a pour tout $(x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$. Pour $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $f(qrx) = qf(rx) = f(px) = pf(x)$ donc $f(rx) = rf(x)$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de f, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Donc f est linéaire.

   Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans $\mathbb{C}$.

2. On étudie la série, pour x fixé de terme général

$$\|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| = \frac{1}{2^n}\|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}$$

   qui est donc convergente. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3. On a $v_0(x) = f(x)$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) = g(x) - f(x)$. f étant continue, v_n l'est aussi, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme pour tout $x \in E$, $\|(v_{n+1}-v_n)(x)\| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}$, donc g est continue.

4. On a, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\|v_n(x+y) - v_n(x) - v_n(y)\| = \|\frac{1}{2^n}f(2^n(x+y)) - \frac{1}{2^n}(f(2^n x) + f(2^n y))\| \leqslant \frac{M}{2^n}$$

Donc quand $n \to +\infty$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

On a pour tout $x \in E$,

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x)\right\|\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M$$

Soit maintenant h linéaire continue telle que $h - f$ soit bornée, soit $M' = \sup_{x \in E} \|h(x) - f(x)\|$. On a donc

$$\|v_n(x) - h(x)\| = \left\|\frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^n} h(2^n x)\right\| \leqslant \frac{M'}{2^n}$$

car h est linéaire. Donc quand $n \to +\infty$, $g(x) = h(x)$ car $\lim_{n \to +\infty} v_n(x) = g(x)$.

■

Solution 6.17. En particulier, pour $t = f(0)$, $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{x \in E \mid f(x) = f(0)\}$ est borné (car compact). Donc il existe A tel que $f^{-1}(\{f(0)\}) \subset \overline{B(0,A)}$. Par contraposée, pour tout $x \in E$, si $\|x\| > A$, alors $f(x) \neq f(0)$.

On montre alors que $E \setminus \overline{B(0,A)}$ est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout $x \in E \setminus \overline{B(0,A)}$, $f(x) > f(0)$ soit $f(x) < f(0)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on se place dans le cas $f(x) > f(0)$. Comme on est en dimension finie sur $\overline{B(0,A)}$ compact, f atteint son minimum et ce minimum est plus petit que $f(0)$, c'est donc un minimum global. ■

Remarque 6.6. *C'est faux pour $n = 1$. Contre-exemple : $f = id_{\mathbb{R}}$.*

Solution 6.18. Si c'était le cas, on prend un cercle $\mathcal{C}$ compact (et connexe par arcs). $f(\mathcal{C})$ est compact connexe par arc dans $\mathbb{R}$. On note $f(\mathcal{C}) = [a,b]$ (avec $a < b$ car f injective). Si $x \in \mathcal{C}$ est tel que $f(x) = \frac{a+b}{2}$, on $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a,b] \setminus \left\{\frac{a+b}{2}\right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$ donc une telle fonction n'existe pas. ■

Solution 6.19.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_{l^1} = 1$ et $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leqslant |||\varphi|||$ donc $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On note $M = \sup |K_n| \leqslant |||\varphi|||$.

Soit maintenant $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| u - \sum_{n=0}^{N} u_n e_n \right\|_1 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

(reste d'une série convergente). Par continuité de φ, on a donc

$$|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n||K_n| \leqslant M\|u\|_1$$

Ainsi, $|||\varphi||| \leqslant M$ et donc $|||\varphi||| = M$.

2. F est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective.

   Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & l^1 & \to & \mathbb{R} \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{array}$$

   Elle est bien définie car $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle est linéaire, et continue car $|\varphi(u)| \leqslant \|(K_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$.

   Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(e_n) = K_n$. Donc $F(\varphi) = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et F est surjective. Donc F est une isométrie bijective et le dual topologique de l^1 est équivalent à l^∞.

■

Solution 6.20.

1. Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $K = \ker(\varphi)$/ Si F est dense, φ est discontinue. Soit $(a, b) \in (E \setminus H)^2$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $b - a$ (existe car H est dense). La suite $(a + x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(a + x_n) = \varphi(a) \neq 0$, et pour $t \in [0, 1]$, $\varphi(t(a + x_n) + (1 - t)(a + x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$. Donc $[a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H$.

   Soit $\gamma : [0, 1] \to E \setminus H$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(t) & = & \alpha_n t + \beta_n \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) & = & b & \\ \gamma(t) & = & a + t x_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

   On cherche à définir α_n et β_n : on veut $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = a + x_n$ et $\gamma(1 - \frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$ (pour la continuité en se raccordant au x_n). En résolvant le système, on trouve $\alpha_n = n(n+1)(x_n - x_{n+1})$ et $\beta_n = a + x_n - (n - 1)(n + 1)(x_n - x_{n+1})$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$: $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant N$, pour tout $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}[$, $\gamma(t) \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$ par convexité de la boule. Donc $\lim_{t \to 1} \gamma(t) = b$ et γ est continue. Donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

2. Soit φ une forme linéaire telle que $\ker(f) = H$ est fermé. Alors φ est continue (à redémontrer). Soit $x \in E \setminus H$, on a $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $E \setminus H$ était connexe par arcs, φ s'annulerait sur $E \setminus H$ ce qui n'est pas vrai. Donc $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.

3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si H est dense alors $E \setminus H$ est connexe par arc d'après la première question. Si H est fermé, soit φ une forme linéaire continue telle que $\ker(f) = H$. Soit $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$.
   — Si $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_-^*$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in E \setminus H}) \neq 0$ et on peut relier directement x_1 et x_2.
   — Sinon, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\varphi(x_1) = \rho e^{i\theta}$ et $\varphi(x_2) = \rho' e^{i(\theta+\pi)}$. Alors $x_3 = ix_1$ est tel que $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$ et $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$ (on contourne l'origine par une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$). Par conséquent, on peut utiliser x_3 pour relier x_1 et x_2 donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

■

Solution 6.21. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ((x, \sin(\frac{1}{x}))) \end{array}$$

φ est continue et $\Gamma)\varphi(\mathbb{R}_+^*)$ est connexe par arcs.

On a $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$ avec $\Gamma' = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$. En effet, pour tout $y \in [-1, 1]$, on pose $x_k = \frac{1}{\arcsin(y) + 2k\pi}$. On a $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow[k \to +\infty]{} y$ donc $(0, y) = \lim_{k \to = +\infty} (x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \overline{\Gamma}$.

Réciproquement, si $(x, y) \in \overline{\Gamma}$, il existe $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ avec $x = \lim_{k \to +\infty} x_k$ et $y = \lim_{k \to +\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$. Si $x > 0$, par continuité, $y = \sin(\frac{1}{x})$ et $(x, y) \in \Gamma$. Si $x = 0$, $y \in [-1, 1]$ donc $(x, y) \in \Gamma'$.

Si $\overline{\Gamma}$ est connexe par arcs, il existe

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0, 1] & \to & \overline{\Gamma} \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

continue telle que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. La première projection $t \mapsto x(t)$ est continue avec $x(0) = 0$ et $x(1) = \frac{1}{\pi}$. On définit maintenant $t_1 = \sup\{t \in [0,1] \mid x(t) = 0\}$. Par continuité, $x(t_1) = 0$ et donc $t_1 < 1$. Donc pour tout $t > t_1$, $x(t) > 0$ et $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$ pour $t > t_1$ et $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ avec $y_1 \in [-1, 1]$.

Or, -1 et 1 n'appartiennent pas simultanément à $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. On peut supposer que $1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Comme γ est continue, il existe $t_2 > t_1$ tel que pour tout $t \in]t_1, t_2]$, $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Or $x(t_2) > 0$ et $x(t_1) = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $t_0 \in]t_1, t_2]$ tel que $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ ce qui contredit ce qui précède.

Donc $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs. ■

Solution 6.22.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$ car u_n est le barycentre de $(a, T(a), \ldots, T^n(a))$ et K est convexe. Comme K est compact, on peut extraire $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} u \in K$. Alors

$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n) + 1}(id_E - T^{\sigma(n)+1})(a)$$

d'où

$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leqslant \frac{1}{\sigma(n) + 1} \times 2M \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

avec $M = \sup\limits_{x \in K} \|x\|$ (existe car K est compact donc borné). Par continuité de T, on a $T(u) = u$.

2. Posons $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$ fermé car $K' = K \cap \Big(\underbrace{(id_E - T)}_{\text{continu}}{}^{-1}\{0\}\Big)$. Donc K' est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout $(u_1, u_2) \in K'^2$, pour tout $t \in [0,1]$, par linéarité de T, on a

$$T(tu_1 + (1-t)u_2) = tu_1 + (1-t)u_2$$

donc K' convexe. De plus, comme $U \circ T = T \circ U$, pour tout $u \in K'$, on a $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$ donc $U(u) \in K'$. On applique alors la question 1 à K' est il existe $y \in K'$: $U(y) = y$ et $T(y) = y$.

■

Solution 6.23.

1. C'est le théorème du rang car $\mathrm{rg}(u) \leqslant n \leqslant p-2$, et $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0\}$ est de dimension $p-1$ donc $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$ (formule de Grassmann).

2. On a
$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = x$$
et
$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$
Soit $I_+ = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i > 0\}$ et $I_- = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i < 0\}$. On a $I_+ \neq \emptyset$ et $I_- \neq \emptyset$ car $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$. Soit $t \geqslant 0$. Pour tout $i \in I_+$, $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$. Pour $i \in I_-$, $\lambda_i + t \underbrace{\alpha_i}_{<0} \geqslant 0$ si et seulement si $t \leqslant -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$. Prenons alors
$$t = \min_{i \in I_-} \Big(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \Big)$$
On au aussi pour tout $i \in I_-$, $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$ et il existe $i_0 \in I_-$ tel que $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$.

3. Par récurrence descendante, on se ramène à n+1 points car si x est barycentre de p points avec $p \geqslant n+2$, alors il est barycentre de $p-1$ points.

4. Soit $A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit
$$\begin{array}{rccc} f: & A \times K^{n+1} & \to & \mathrm{conv}(K) \\ & ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (x_1, \dots, x_{n+1})) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array}$$
f est surjective et continue, donc $\mathrm{conv}(K)$ est l'image continue d'un compact donc $\mathrm{conv}(K)$ est compact.

■

Solution 6.24. Pour tout $u \in A_p$, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ distincts et u est diagonalisable. Réciproquement, si u est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ alors dans une base la matrice de u est diagonale avec des α_i (éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc $u \in A_p$.

Si $u \in A_p$, on écrit donc le polynôme caractéristique de u
$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $0 \leqslant m_i \leqslant \dim(E) = n$ et $\sum_{i=1}^r m_i = n$. $u \mapsto \chi_u$ est continue. Pour $(m_1, \ldots, m_r) \in \{0, \ldots, n\}^r$ tel que $\sum_{i=1}^r m_i = n$, notons

$$A_{m_1,\ldots,m_r} = \left\{ u \in A_p \;\middle|\; \chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\}$$

et

$$\Big[u \mapsto \chi_u(A_p)\Big] = \left\{ \bigcup_{(m_1,\ldots,m_r) \in D_{n,r}} \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\}$$

où

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \ldots, m_r) \in \{0, \ldots, n\}^r \;\middle|\; \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires,
si $(m_1, \ldots, m_r) \neq (m_1', \ldots, m_r')$, alors $A_{m_1,\ldots,m_r}$ et $A_{m_1',\ldots,m_r'}$ ne sont pas dans la même composante connexe par arcs car

$$\left[u \mapsto \chi_u\Big(A_{m_1,\ldots,m_p} \bigcup A_{m_1',\ldots,m_r'}\Big)\right] = \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \bigcup \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i'} \right\}}_{\text{pas connexe par arcs}}$$

Si $\gamma \colon [0,1] \to A_p$ est continue, $t \mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t) + a_1(t)X + \cdots + a_{n-1}(t)X^{n-1} + X^n$ est continue sur $[0,1]$ et prend un nombre fini de valeurs donc est constante. $a_i \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.

Soit $u_0 \in A_{m_1,\ldots,m_r}$, soit $u \in A_{m_1,\ldots,m_r}$, alors il existe une base $\mathcal{B}_0$ base de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$ soit diagonale avec des α_1 sur les m_1 premières lignes de la diagonale, α_2 sur les m_2 lignes suivantes, etc. Soit $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$. M est semblable à M_0 donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PM_0P^{-1}$.

Or $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc il existe $\varphi \colon [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$ continue telle que $\varphi(0) = P$ et $\varphi(1) = I_n$. On pose alors

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & [0,1] & \to & A_{m_1,\ldots,m_r} \\ & t & \mapsto & \varphi(t) M_0 \varphi^{-1}(t) \end{array}$$

Alors $A_{m_1,\ldots,m_r}$ est connexe par arcs.

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \ldots, m_r) \in \{0, \ldots, n\}^r \;\middle|\; \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}$$

qui vaut $\binom{m+r-1}{r-1}$ possibilités (place n points sur une droite et les séparer avec $r-1$ barres : le nombre de points dans chaque segment donne un m_i, il y a $m+r-1$ possibilités pour placer les $r-1$ barres). ∎

Solution 6.25.

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|AX|_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j} x_j}_{>0} \geqslant 0$. Si $|AX|_i = 0$ alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j = 0$ donc $x_j = 0$, impossible car $X \neq 0$.
2. Si $|AX| = A|X|$. On a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,
$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} |x_j|$$
donc les $(a_{i,j} x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ ont tous même argument. On prend $\theta = \arg(x_j)$.
3. K est fermé et borné en dimension finie : c'est un compact. On a $I_x \neq \emptyset$ car $AX \geqslant 0$ donc $0 \in I_x$. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AX - t_k X \geqslant 0$ donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(AX - t_k X)_i \geqslant 0$ et par passage à la limite, $AX - tX \geqslant 0$ donc I_x est fermé.

   Si $t \in I_x$,
$$|tX|_1 = t = \sum_{i=1}^{n} t \underbrace{x_i}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j}_{=(AX)_i} \leqslant n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$$
car $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$. On note $M = n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.
4. Pour tout $x \in K$, $\theta(X) \leqslant M$ donc θ est bien borné sur K. Par définition de r_0, il existe $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{k \to +\infty} \theta(X_k) = r_0$. On note $\theta(X_k) = t_k$. Comme K est compact, il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $X_{\sigma(k)}$ converge vers $X^+ \in K$. A priori, $\theta(X^+) \leqslant r_0$. On a $AX_{\sigma(k)} - t_{\sigma(k)} X_{\sigma(k)} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc par passage à la limite, $AX^+ - r_0 X^+ \geqslant 0$ et donc $r_0 \leqslant \theta(X^+)$ donc $r_0 = \theta(X^+)$.
5. Soit $Y = A^+ - r_0 X^+ \geqslant 0$. Si $Y \neq 0$, alors $AY > 0$ d'après la question 1 donc
$$AY = A \underbrace{(AX^+)}_{>0} - r_0 \underbrace{(AX^+)_{>0}} > 0$$

On a $AY > \varepsilon AX^+$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|AY|_i > \varepsilon |AX^+|_i$ (car $AY > 0$). On pose alors

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|AY|_i}{|AX^+|_i}$$

On a alors $AY - \varepsilon AX^+ > 0$ d'où

$$\underbrace{A \frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}_{\in K} - (r_0 + \varepsilon) \frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} > 0$$

donc $r_0 + \varepsilon \in I_{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}$ c'est-à-dire

$$r_0 + \varepsilon \leqslant \theta\Big(\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}\Big) \leqslant r_0$$

ce qui est impossible. Nécessairement $Y = 0$.

6. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$|AV|_i = \Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} |v_j| = (A|V|)_i$$

donc $|\lambda| = |AV| \leqslant A|V|$. De plus, $|V| \in K$ donc $|\lambda| \leqslant \theta(|V|) \leqslant r_0$. Notons que cela implique que le rayon spectral de A est $\rho(A)$ est plus petit que r_0 et que l'on a même égalité.

7. Si $|\lambda| = r_0$, on a $|\lambda| = \theta(|V|) = r_0$ et d'après la question 5 on a $A|V| = r_0|V| = |AV|$. D'après la question 2, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $V = e^{\mathrm{i}\theta}|V|$. Or

$$AV = \lambda V = e^{\mathrm{i}\theta} A|V| = e^{\mathrm{i}\theta} r_0 |V|$$

et comme $|K| \in K, |V| \neq 0$ et on a donc $\lambda = r_0$.

8. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|V\|_1 = 1$ et $AV = r_0 V$. D'après la question précédente, on a $V = e^{\mathrm{i}\theta}|V|$ et $A|V| = r_0|V|$. Soit alors $t \in \mathbb{R}$, on a

$$A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$$

Notons maintenant que si $Y \geqslant 0$ avec $Y \neq 0$ vérifie $AY = r_0 Y$, alors $Y > 0$. En effet, d'après la première question, $AY > 0$. On a $r_0 \neq 0$ car sinon $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ et $A^n = 0$ ce qui est impossible car ses coefficients sont strictement positifs. D'où $Y > 0$.

Ainsi, par définition de X^+, on a $X^+ > 0$ et $|V| > 0$. On a alors

$$(X^+)_i + t|v_i| \geqslant 0$$

si et seulement si

$$t \geqslant -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

On prend

$$t = \min_{1\leqslant i\leqslant n} -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

Finalement, on a $X^+ + t|V| \geqslant 0$ et une de ses coordonnées vaut 0 (car on a pris le minimum sur les i). Nécessairement, $X^+ + t|V| = 0$ (car $A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$) et donc $|V| \in \mathbb{R}X^+$. Donc $V = e^{i\theta}|V| \in \mathbb{C}X^+$ et ainsi

$$\dim(\ker(A - r_0 I_n)) = 1$$

■

Solution 6.26. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & U\times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$$

On a

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x',y') = |\|x-y\|-\|x'-y'\|| \leqslant \|(x-y)-(x'-y')\| \leqslant \|x-x'\|+\|y-y'\| \leqslant 2\|(x,y)-(x',y')\|_\infty$$

donc φ est continue.

$U \times V$ est compact, donc il existe $(x_1, y_1) \in (U \times V)$ telle que $\varphi(x_1, y_1) = \min_{(x,y)\in U\times V} \varphi(x, y)$. Comme U et V sont disjoints, $x_1 \neq y_1$ et $\varphi(x_1, y_1))d(U, V) > 0$.

Soit $\alpha = \frac{d(U,V)}{3}$. On pose $U' = \{x \in E \mid d(x, U) < \alpha\}$ et $V' = \{x \in E \mid d(x, V) < \alpha\}$. $x \mapsto \|x\|$ est continue car 1-lipschitzienne donc U' est V' sont des ouverts et on a bien $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Soit ensuite $x \in U' \cap V'$, on a $d(x, U) < \alpha$ et $d(x, V) < \alpha$ donc il existe $(u, v) \in U \times V$, $d(x, u) < \alpha$ et $d(x, v) < \alpha$. Alors $d(u, v) \leqslant 2\alpha$ ce qui est absurde. Donc $U' \cap V' = \emptyset$. ■

Solution 6.27.

1. f est 1-lipschitzienne donc est continue. On forme

$$\begin{array}{rccl} g: & K & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x - f(x)\| \end{array}$$

g est continue, K est compact donc il existe $a \in K$ tel que $g(a) = \min_{x \in K} g(x)$. Si $a \neq f(a)$, alors $\|f(a) - f^2(a)\| = g(f(a)) < \|a - f(a)\| = g(a)$ ce qui est impossible par définition de a. Donc $f(a) = a$. S'il existe $a' \neq a$ tel que $f(a') = a'$, alors $\|f(a) - f(a')\| = \|a - a'\| < \|a - a'\|$ ce qui est impossible. Donc a est unique.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = a$ alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_{n+1} - a\| = \|f(u_n) - f(a)\| < \|u_n - a\|$$

donc la suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+$ donc elle converge vers $l \geqslant 0$. Par compacité de K, il existe une extraction σ telle que $\lim_{n \to +\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha \in K$. Par continuité,

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_{\sigma(n)} - a\| = \|\alpha - a\| = l$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} \| \underbrace{u_{\sigma(n)+1}}_{f(u_{\sigma(n)})} - f(a)\| = \|f(\alpha) - f(a)\| = l = \|\alpha - a\|$$

par continuité de f. Ainsi, on a $\alpha = a$ et $l = 0$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = a$.

3. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x < y \in \mathbb{R}^2$, il existe $z \in]x, y[$ tel que (égalité des accroissements finis)

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(z)| = \left|\frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}\right| < 1$$

donc f vérifie bien l'hypothèse de contraction. Cependant, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2 + 1} > a$ donc pas de point fixe. La démonstration tombe en défaut car $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

■

Solution 6.28. La condition est équivalente à pour tout $(M_1, M_2, M_3) \in K_1 \times K_2 \times K_3$, M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.

On forme alors

$$\begin{array}{rccl} f: & K_1 \times K_2 \times K_3 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (M_1, M_2, M_3) & \mapsto & R(M_1, M_2, M_3) \end{array}$$

où $R(M_1, R_2, M_3)$ est le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par M_1, M_2 et M_3.

On note $M_i = (x_i, y_i)$ et Δ_i la médiatrice de $[M_jM_k]$. Établissons une équation de Δ_i. On a $M = (x, y) \in \Delta_i$ si et seulement si $\|\vec{MM_j}\|_2^2 = \|\vec{MM_k}\|_2^2$ si et seulement si $(\vec{MM_j} + \vec{MM_k} \mid \vec{MM_j} - \vec{MM_k}) = 0$ (produit scalaire), si et seulement si $(\vec{MC_i} \mid \vec{M_jM_k}) = 0$ où C_i est le milieu de $[M_jM_k]$, si et seulement si (calculer le produit scalaire)

$$\Big(\frac{x_j + x_k}{2} - x\Big)(x_k - x_j) + \Big(\frac{y_j + y_k}{2} - y\Big)(y_k - y_j) = 0$$

Soit alors $M_0 = (x_0, y_0)$ le centre du cercle circonscrit. $M_0 \in \Delta_i \cap \Delta_j$ avec $i \neq j$. Par exemple, $M_0 \in \Delta_3 \cap \Delta_1$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Big(\frac{x_2 + x_1}{2} - x_0\Big)(x_2 - x_1) + \Big(\frac{y_2 + y_1}{2} - y_0\Big)(y_2 - y_1) & = & 0 \\ \Big(\frac{x_3 + x_2}{2} - x_0\Big)(x_3 - x_2) + \Big(\frac{y_3 + y_2}{2} - y_0\Big)(y_3 - y_2) & = & 0 \end{array}\right.$$

si et seulement si $(L_2 \leftarrow L_1(x_3 - x_2) + L_2(x_1 - x_2))$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) & = & \dfrac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} \\ x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) & = & \dfrac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2} \end{array}\right.$$

si et seulement si $(L_1 \leftarrow L_2(y_2 - y_1) + L_1(y_2 - y_3))$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & \dfrac{\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \\ y_0 & = & \dfrac{\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \end{array}\right.$$

et $R(M_1, M_2, M_3) = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}$. En reportant, f est continue sur $K_1 \times K_2 \times K_3$ compact donc f atteint son minimum. ■

Solution 6.29.

1. Pour tout $f \in E$, $T(f)$ est $\mathcal{C}^1$ et $(T(f))' = f$, $T(f)(0) = 0$. T est clairement linéaire, soit ensuite $x \in [0, 1]$, on a

$$|T(f)(x)| = \Big|\int_0^x f(t)dt\Big| \leqslant \int_0^x |f(t)|dt \leqslant x\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

Donc $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ donc T est continue et $|||T||| \leqslant 1$. Pour $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et pour tout $x \in [0,1]$, $T(f)(x) = x$ donc $\|T(1)\|_\infty = 1$. Ainsi, $|||T||| = 1$.

2. $id_E - T$ est continue. Soit $(f,g) \in E^2$, on a $g = f - T(f)$ si et seulement si $g = y' - y$ et $y(0) = 0$. On a $g(x)e^{-x} = \underbrace{e^{-x}(y'(x) - y(x))}_{(e^{-x}y(x))'}$ donc en intégrant de 0 à x on a

$$y(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$$

Donc $T(f)$ vérifie le problème de Cauchy si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$ si et seulement si pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$$

Donc $id_E - T$ est bijective. Enfin, on a pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x)| \leqslant |g(x)| + \left| \int_0^x g(t) e^{x-t} dt \right| \leqslant \|g\|_\infty (1 + xe^x) \leqslant \|g\|_\infty (1 + e)$$

Ainsi,

$$\|f\|_\infty = \|(id_E - T)^{-1}(g)\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty (1 + e)$$

donc $(id_E - T)^{-1}$ est continue. Ainsi, $id_E - T$ est un homéomorphisme.

■

Solution 6.30.

(i) $\Rightarrow$ (ii) $f^{-1}(K)$ est fermé car f est continue. K est borné, donc il existe $M > 0$, tel que pour tout $y \in K$, $\|y\| \leqslant M$. Donc pour tout $x \in f^{-1}(K)$, $\|f(x)\| \leqslant M$. Par contraposée de (i) pour $A = M + 1$, il existe $B > 0$ tel que $\|f(x)\| < A \Rightarrow \|x\| < B$. Donc pour $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| < B$ donc $f^{-1}(K)$ est borné. C'est donc un compact.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $A \geqslant 0$. Soit $K = \overline{B(0,A)}$ compact car fermé et borné en dimension finie. D'après (ii), $f^{-1}(K)$ est compact donc borné : il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| \leqslant B$. Par contraposée, si $\|x\| > B$ alors $x \notin f^{-1}(K)$ et $f(x) \notin K$ donc $\|f(x)\| > A$. Ainsi, $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

■

Remarque 6.7. *Exemple pour l'exercice précédent : les fonctions polynômiales non constantes. Contre-exemple : l'exponentielle, cf* $\exp([0,1]) = \mathbb{R}_-$ *non compact.*

Solution 6.31.

1. Soit $(x, y) \in K^2$ compact. Soit σ un extraction telle que

$$(f^{\sigma(n)}(x), f^{\sigma(n)}(y)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (l, l') \in K^2$$

On a

$$f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

de même pour y. Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x)\| \leqslant \varepsilon \\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(y) - f^{\sigma(n)}(y)\| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Pour $N = \max(N_1, N_2)$ et $p = \sigma(N+1) - \sigma(N) \in \mathbb{N}^*$, on a

$$d(x, f^p(x)) \leqslant d(f^{\sigma(n+1)}(x), f^{\sigma(n)}(x)) \leqslant \varepsilon$$

et de même pour y avec le même p.

2. On a

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leqslant d(f(x), f(y)) \\ &\leqslant d(f^p(x), f^p(y)) \\ &\leqslant d(f^p(x), x) + d(x,y) + d(y, f^p(y)) \\ &\leqslant 2\varepsilon + d(x,y) \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a égalité tout du long. On a donc notamment, $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$ et donc f est une isométrie.

3. f est 1-lipschitzienne donc continue. Donc $f(K)$ est compact donc fermé. Il suffit donc de montrer que $f(K)$ est dense dans K. Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x - \underbrace{f^p(x)}_{\in f(K)}\| \leqslant \varepsilon$ d'après la première question. Donc $f(K)$ est dense dans K et $f(K) = \overline{f(K)} = K$.

■

Remarque 6.8. *Exemple pour l'exercice précédent : une rotation sur la sphère unité.*

Solution 6.32. Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & K & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & f(M) = \text{rayon du cercle circonscrit au triangle MAB} \end{array}$$

On a $F = f(K)$. Soit (C, i, j) un repère orthonormé où C est le milieu de $[AB]$ et $A(-\alpha, 0)$ et $B(\alpha, 0)$ avec $\alpha > 0$. La médiatrice Δ de $[A, B]$ a pour équation $x = 0$. Si $M(x, y)$, soit $\varphi(M)$ le centre du cercle circonscrit. On a $\varphi(M) \in \Delta$ donc $\varphi(M)(0, y_1)$ et $\varphi(M)$ appartient à la médiatrice de $[MA]$. On a $y_1 \neq 0$ car $M \notin (AB)$.

Notons M' le milieu de $[MA]$. On a $M'(\frac{x-\alpha}{2}, \frac{y}{2})$ d'où $\vec{M'\varphi(M)} \cdot \vec{MA} = 0$ d'où (en développant le produit scalaire),

$$y_1 = \Big((\alpha + x)\Big(\frac{\alpha - x}{2}\Big) - \frac{y^2}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{y}\Big)$$

φ est donc continue donc f également et $f(K) = F$ est compact. ■

Solution 6.33.

1. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\tau)$ et $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ avec $\tau(P) = \lambda P$. Si P n'est pas constant, notons $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $P(\alpha) = 0$. Alors $P(\alpha + 1) = 0$. En itérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$, impossible car P n'est pas constant donc pas nul. Finalement, P est constant et $\lambda = 1$: $\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}$.
2. $f : x \mapsto P(x)e^{-x}$ est continue et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc le sup est bien défini. Il est ensuite facile de vérifier que $\|P\|$ est une norme.
3. On a
$$\|\tau(P)\| = \sup_{x \geqslant 0} |P(x+1)e^{-x}| = \sup_{x' \geqslant 1} |P(x')e^{-x'}e| \leqslant \sup_{x' \geqslant 0} |P(x')e^{-x'}e| \leqslant e\|P\|$$
4. Utiliser $P = X$.

■

Solution 6.34.

1. Pour x fixé, $\min(x,\varphi(t)) = \frac{x+\varphi(t)-|x-\varphi(t)|}{2}$ est continue. Donc $T(f)$ est définie.

   Si $x \leqslant \varphi(0)$,
$$T(f)(x) = \int_0^1 xf(t)dt = x\int_0^1 f(t)dt$$
   et si $x \geqslant \varphi(1)$,
$$T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(t)f(t)dt$$
   et si $\varphi(0) \leqslant x \leqslant \varphi(1)$, il existe un unique $t_1 = \varphi^{-1}(x)$ (car φ induit un homéomorphisme de $[0,1]$ dans $\varphi([0,1])$).

   Si $t \leqslant t_1$, on a $\varphi(t) \leqslant x$, donc $\min(x,\varphi(t)) = \varphi(t)$. Si $t \geqslant t_1$, on a $\min(x,\varphi(t)) = x$. On a donc
$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^{t_1} \varphi(t)f(t)dt + \int_{t_1}^1 xf(t)dt \\ &= \underbrace{\int_0^{\varphi^{-1}(x)} \varphi(t)f(t)dt}_{=F_1(\varphi^{-1}(x))} + x\underbrace{\int_{\varphi^{-1}(x)}^1 f(t)dt}_{=F_2(\varphi^{-1}(x))} \end{aligned}$$
   et f et φ étant continues, F_1 et F_2 sont continues.

   Donc $T(f)$ continue et T linéaire, c'est un endomorphisme de E.

2. On a
$$|T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 \min(x,\varphi(t))dt}_{=A(x)}$$
   donc
$$\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|A\|_\infty$$
   donc T est continue et $|||T||| \leqslant \|A\|_\infty$. De plus pour $f = 1$, on a $|||T||| = \|A\|_\infty$.

3. On a
$$A(x) = \int_0^1 \min(x,\varphi(t))dt = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leqslant \varphi(0) \\ \int_0^1 \varphi(t)dt & \text{si} \quad x \geqslant \varphi(1) \end{cases}$$
   Dans tous les cas,
$$\|A\|_\infty \leqslant \int_0^1 \varphi(t)dt$$
   donc
$$\|A\|_\infty = \int_0^1 \varphi(t)dt$$

■

Solution 6.35.

1. φ est une forme linéaire. et on a

$$|\varphi(P)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{a_k}{2^k}\right| \leqslant 2\|P|_\infty$$

donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 2$. Pour $p \neq 0$, $|\varphi(P)| < 2\|P\|_\infty$: pour avoir égalité, il faudrait pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k =$ constante $\neq 0$ ce qui n'est pas possible. Pour $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varphi(P_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc $|||\varphi||| = 2$. De plus, $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé.

2. Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi(P) = 0$ d'où $a_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$ (et il existe $N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, a_n = 0$). On a donc

$$P(X) - 1 = (a_0 - 1) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k X^k$$

et si $\|P - 1\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{cases} |a_0 - 1| \leqslant \frac{1}{2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$|a_0| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

Et $\frac{1}{2} \leqslant 1 - |a_0| \leqslant |1 - a_0| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $|a_0| = \frac{1}{2}$ et $|1 - a_0| = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2}e^{i\theta} &\Rightarrow \left|1 - \frac{1}{2}e^{i\theta}\right|^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\theta)\right)^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 1 - \cos(\theta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \cos(\theta) = 1 \end{aligned}$$

et donc $a_0 = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| = \frac{1}{2}$, impossible car $P \in \mathbb{C}[X]$, ainsi $\|P - 1\|_\infty > \frac{1}{2}$.

3. On définit, pour $n \geqslant 1$, $P_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n)X^k$ avec $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n \in \ker(\varphi)$. On a

$$\begin{aligned} P_n \in \ker(\varphi) &\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n\Big)\frac{1}{2^k} = 0 \\ &\Rightarrow \varepsilon_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

et donc $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ (et $\varepsilon_n < 0$). On a donc $\|P_n - 1\|_\infty = \frac{1}{2} - \varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$.
Donc $d(1, \ker(\varphi)) = \frac{1}{2}$ et cette distance n'est pas atteinte.

■

Solution 6.36. Prouvons d'abord l'existence. Soit $M \in \mathbb{R}^n$, on définit $r(M) = \sup\{\|M - A\| \mid A \in K\}$ et $\varphi\colon A \mapsto \|M - A\|$ est continue sur K compact donc le sup est en fait un max. On a notamment $r(M) = \{R > 0 \mid K \subset B(M, R)\}$. Soit

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & r(M) \end{array}$$

Soit $(M, M') \in (\mathbb{R}^n)^2$. Pour tout $A \in K$, on a

$$\|M - A\| \leqslant \|M - M'\| + \|M' - A\| \leqslant \|M - M'\| + r(M')$$

En particulier, on a

$$r(M) \leqslant \|M - M'\| + r(M')$$

et en échangeant M et M', on a $|r(M) - r(M')| \leqslant \|M - M'\|$. Donc r est 1-lipschitzienne donc continue. Soit $A_0 \in K$, $R(M) \geqslant \|M - A_0\| \geqslant \|M\| - \|A_0\| \xrightarrow[\|M\| \to +\infty]{} +\infty$. Donc il existe $M_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $r(M_0) = \min_{M \in \mathbb{R}^n} r(M) = r_0$, d'où l'existence d'une boule fermée de rayon minimal.

Pour l'unicité, soit $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $r(M_1) = r(M_2) = r_0$. On suppose que $\|M_1 - M_2\| = \varepsilon > 0$. Soit M_3 le milieu de $[M_1 M_2]$. On a $K \subset B_{M_1, r_0} \cap B_{M_2, r_0}$. On prend $r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = r_0^2$ d'où

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < r_0$$

Soit $M \in B(M_1, r_0) \cap B(M_2, r_0)$, on a

$$\begin{aligned}
\|M - M_3\|^2 &= \frac{1}{4}\Big(\|M - M_1 + M - M_2\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(2\|M - M_1\|^2 + 2\|M - M_2\|^1 - \underbrace{\|M_1 - M_2\|^2}_{=\varepsilon^2}\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{4}(2r_0^2 + 2r_0^2 - \varepsilon^2) \\
&\leqslant r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} = r^2
\end{aligned}$$

Donc $B_1 \cap B_2 \subset \overline{B(M_3, r)}$ d'où $K \subset \overline{B(M_3, r)}$, ce qui est absurde car $r < r_0$. Donc $M_1 = M_2$. ∎

Solution 6.37. φ est évidemment définie et linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)| &= \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 f\right| \\
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f| \\
&\leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

∎

Donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 1$. Notons que si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors on a égalité partout au-dessus et pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| = \|f\|_\infty$ et comme $\left|\int f\right| = \int |f|$ implique que f est de signe constant sur l'intervalle d'intégration, si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors f est de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Or $|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f| = |\int_0^{\frac{1}{2}} f| + |\int_{\frac{1}{2}}^1 f|$, f est de signe opposé sur les deux segments. Or f est continue en $\frac{1}{2}$, donc f est nulle. Donc pour f non nulle, on a $|\varphi(f)| < \|f\|_\infty$ donc la norme triple n'est pas atteinte. Enfin, pour montrer que $|||\varphi||| = 1$, on utilise pour $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ (\frac{1}{2} - t)n & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ -1 & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

On a bien $\|f_n\|_\infty = 1$.

Solution 6.38.

1. Non car on applique l'application trace.

2. On a le résultat par récurrence.

3. On a
$$(n+1)|||v^n||| = |||u \circ v^n \circ v - v^n \circ v \circ r||| \leqslant 2|||u||| |||v||| |||v^n|||$$
Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v^n = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n+1 \leqslant 2|||u||| |||v|||$$
ce qui est impossible. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^n = 0$. Alors $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1} = 0$ donc $v^{n-1} = 0$ et de proche en proche $v = 0$: contradiction.

4. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,
$$(D \circ T - T \circ D)(P) = (XP)' - XP' = P$$
donc $D \circ T - T \circ D = id$. D'après ce qui précède, T et D ne peuvent pas être continus simultanément.

■

Solution 6.39.

1. $\sum_{k \geqslant 0}(A - I_n)^k$ converge absolument car $|||A - I_n|||^k \leqslant \alpha_k$ et $\alpha <$.
Si $AX = 0$, $\|(A - I_n)X\| = \|X\| \leqslant \alpha\|X\|$ donc $\|X\| = 0$ et $X = 0$ donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$, idem pour B. On a alors
$$A\sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k = ((A - I_n) + I_n)\sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k = I_n$$
par téléscopage. Donc
$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty}(I_n - A)^k$$
et
$$|||A^{-1}||| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$$

et de même pour B. On écrit alors

$$ABA^{-1}B^{-1} - I_n = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - I_n)(B - I_n) - (B - I_n)(A - I_n))A^{-1}B^{-1})$$

d'où

$$\left\|\left|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\right|\right\| \leqslant \frac{2|||A - I_n||| |||B - I_n|||}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

2. On prend $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.
3. Pour tout $M \in G$, il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \cap G = \{M\}$. Montrons que G est discret si et seulement si I_n est isolé. En effet, si I_n est isolé, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(I_n, r_0) \cap G = \{I_n\}$. Soit $M \in G$, alors pour tout $M' \in G$, $M - M' = M(I_n - M^{-1}M')$ d'où $I_n - M^{-1}M' = M^{-1}(M - M')$. Si

$$|||M - M'||| < \frac{r_0}{|||M^{-1}|||}$$

on a $|||I_n - M^{-1}M'||| < r_0$ et donc $M' = M$ et M est isolé. Ainsi G est isolé. La réciproque est évidente.

C est dans le commutant si et seulement si C commute avec A et B si et seulement si

$$\begin{cases} ACA^{-1}C^{-1} = I_n \\ BCB^{-1}C^{-1} = I_n \end{cases}$$

Notons maintenant que

$$\overline{B_{\|\cdot\|}(I_n, \frac{1}{4})} \cap G = \mathcal{A}$$

est fini. En effet, si cet ensemble était infini, il existerait $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite injective dans $\mathcal{A}$. La suite étant bornée, on peut extraite $(M_{\sigma(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge et alors pour tout $p \in I_n$

$$\underbrace{M_{\sigma(p)}M_{\sigma(p+1)}^{-1}}_{\xrightarrow[pto+\infty]{} I_n} \in G \setminus \{I_n\}$$

ce qui est impossible car I_n est isolé.

Comme $A \in \mathcal{A}\backslash\{I_n\}$, il existe $C \in \mathcal{A}\backslash\{I_n\}$ telle que $|||C - I_n|||$ soit minimale et $|||c - I_n||| \leqslant \frac{1}{4}$. D'après la question 2 on a

$$\left\|\left|ACA^{-1}C^{-1} - I_n\right|\right\| < |||C - I_n|||$$

et même chose pour B. Donc nécessairement, $ACA^{-1}C^{-1} = I_n$ et de même pour B. Ainsi, C commute avec toutes les matrices de G.

■

Solution 6.40.

1. $\mathbb{C}_{n-1}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc c'est un fermé. Par division euclidienne par χ_A, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$. Comme

$$\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

$\exp(A) \in \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$.

2. Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$$

et donc

$$\exp(A) = P^{-1} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P$$

et $\exp(A)$ est diagonalisable.

Si $\exp(A)$ est diagonalisable, on utilise la décomposition de Dunford : $A = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. On a donc

$$\exp(A) = \exp(D) \underbrace{\exp(N)}_{=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}} = \exp(D) + \exp(D)\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}\Big) = \exp(D) + N'$$

avec N' nilpotente et $\exp(D)$ est diagonalisable d'après le sens direct. N' commute avec $\exp(D)$. Par unicité de la décomposition de Dunford, $\exp(A)$ étant diagonalisable, on a $N' = 0$. Comme $\exp(D)$ est inversible,

$$N \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}}_{=I_n + N''} = 0$$

avec N'' nilpotente. $I_n + N''$ est donc inversible et ainsi $N = 0$ et A est diagonalisable.

3. D'après ce qui précède, $\exp(A) = I_n$ est diagonalisable et

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in \operatorname{Sp}_{\lambda}(\mathbb{C})\} = \{I_n\}$$

Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$, en diagonalisant, on a bien $\exp(A) = I_n$.

4. Sur $\mathbb{R}$, si A est diagonalisable, $\exp(A)$ l'est aussi. Cependant, la réciproque n'est pas vrai, par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\pi & 0 \\ 0 & -2\mathrm{i}\pi \end{pmatrix} \text{ semblable à } \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

On a $\chi_M = X^2 + 4\pi^2$, $\exp(A) = I_2$ et A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

■

Solution 6.41.

1. On a $\ln(1-x) = P(x) + x^2 O(1)$ et $\exp(y) = Q(y) + y^n O(1)$ d'où

$$\exp(\ln(1+x)) = 1 + x = Q(\ln(1+x)) + \underbrace{\ln(1+x)^n O(1)}_{O(x^n)}$$

alors $1+x = Q(P(x)+O(x^n))+O(x^n) = Q(P(x))+O(x^n)$. Soit $B(X) = Q(P(X))+O(x^n) \in \mathbb{R}[X]$, on a $\frac{B(x)}{x^n} = O(1)$ donc $X^n \mid B$ et

$$Q(P(X)) = 1 + X + B(X) = 1 + X + X^n A(X)$$

2. On a $N^n = 0$ donc $P(N)$ est aussi nilpotente et on a

$$\exp(P(N)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(N)^k}{k!} = Q(P(N)) = I_n + N + 0$$

3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et sa décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. On a $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{C}^*$ et on écrit

$$M = D\,\underbrace{(I_n + \underbrace{D^{-1}N}_{\text{nilpotente}})}_{=\exp(P(D^{-1}N))}$$

si $D = P_1 \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P_1^{-1}$, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_k = \exp(\mu_k)$ (car exp est surjectif sur $\mathbb{C}^*$). Alors

$$D = \exp(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) P_1^{-1}) \in \mathbb{C}[D]$$

puis

$$\begin{aligned}M &= \exp\Big(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}\Big) \exp\Big(P(D^{-1}N)\Big) \\ &= \exp\Big(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1} + P(D^{-1}N)\Big)\end{aligned}$$

car les matrices commutent.

Donc exp est surjective.

■

Solution 6.42. On a $A \subset \overline{A}$, $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{2}{n})^{2n} \in \overline{A}$ et $e = \lim\limits_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \in \overline{A}$.

Si $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$, $(\frac{1}{n} + \frac{1}{p})^{n+p} \leqslant 1$. Donc si $(\frac{1}{n} + \frac{1}{p})^{n+p} \geqslant 1$, alors $n = 1$ ou $p = 1$.

Si $x > e$, à partir d'un certain rang, on a $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leqslant \frac{e+x}{2}$ et si $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$. Si $1 \leqslant x < e$, à partir d'un certain rang, on a $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > x$ donc si $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$.

Soit $x < 1$, si $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 3$ ou $n \geqslant 3$ et $p \geqslant 2$, on a $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leqslant \frac{5}{6}$ et

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} &= \exp\left((n+p)\ln\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\right) \\ &\leqslant \exp\left((n+p)\ln\left(\frac{5}{6}\right)\right) \\ &\leqslant \max\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0}, \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^p}_{\xrightarrow[p \to +\infty]{} 0}\right)\end{aligned}$$

Il existe N_0 tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $(\frac{5}{6})^n \leqslant \frac{x}{2}$. Si n ou p est plus grand que N_0, on a donc

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \leqslant \frac{x}{2}$$

Donc il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de A plus grand que $\frac{x}{2}$. Ainsi,

$$\overline{A} = A \cup \{e, 0\}$$

■

Solution 6.43. On note

$$\mathbb{V} = \bigcup_{m \geqslant 1} \mathbb{U}_m = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{m}} \,\middle|\, m \geqslant 1, k \in \{0, \dots, m-1\} \right\}$$

Soit $M \in H$. $X^m - 1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ avec ses valeurs propres dans $\mathbb{V}$. Réciproquement, si M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{V}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M), \exists m_\lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{U}_{m_\lambda}$ et soit $m = \mathrm{ppcm}_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)}(m_\lambda)$. Alors $M^m = I_n$.

Soit $A \in \overline{H}$, il existe $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{p \to +\infty} M_p = A$. Comme le polynôme caractéristique est une fonction continue des coefficients, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a

$$\lim_{p \to +\infty} \chi_{M_p}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = 0$$

Or

$$|\chi_{M_p}(\lambda)| = |\lambda - \lambda_{1,p}| \dots |\lambda - \lambda_{n,p}| \geqslant d(\lambda, \mathbb{U})^n$$

avec $\lambda_{i,p} \in \mathbb{V}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc $d(\lambda, \mathbb{U}) = 0$ et comme $\mathbb{U}$ est fermé, $\lambda \in \mathbb{U}$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$. Soit

$$\left\{ e^{\mathrm{i}\theta_1}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_r} \right\}$$

les valeurs propres distinctes de A de multiplicités $m_1, \dots, m_r$. Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_1}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_1}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_r}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_r}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1}$$

On a

$$\theta = \lim_{k \to +\infty} \frac{2\pi}{k} \lfloor k \frac{\theta}{2\pi} \rfloor$$

donc on peut former, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_{1,p}}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_{1,p}}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_{r,p}}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_{r,p}}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1}$$

avec $\theta_{i,p} = \frac{2\pi}{p} \lfloor p \frac{\theta_j}{2\pi} \rfloor + \frac{2j\pi}{p}$. Pour p suffisamment gand, les $(\theta_{j,p})$ sont deux à deux distincts donc A_p est diagonalisable et $A_p \in H$, et donc $A \in \overline{H}$. ■

Solution 6.44.

1. On a l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. On a cependant $N_a(X^k) = |a_k|$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k \neq 0$. Donc N_a est une norme implique que a ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$. Réciproquement, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$, si $P \neq 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec p_k et donc $N_a(P) > 0$. Donc N_a est une norme si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$.

2. Si N_a et N_b sont équivalentes, alors il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta N_b(X^k) \leqslant N_a(X^k) \leqslant \alpha N_b(X^k)$$

d'où

$$\beta |b_k| \leqslant N_a(X^k) \leqslant \alpha |b_k|$$

Donc $a = O(b)$ et $b = O(a)$.

Réciproquement, si $a = O(b)$ et $b = O(a)$, alors on a l'inégalité précédente sur les a_k et b_k, d'où

$$\beta \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k a_k| \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k|$$

et donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\beta N_b(P) \leqslant N_a(P) \leqslant \alpha N_b(P)$$

et N_a et N_b sont équivalentes.

3. Δ est continue pour N_a si et seulement s'il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $N_a(\Delta P) \leqslant C N_a(P)$. Si Δ est continue alors il existe $c \geqslant 0$ tel que $N_a(kX^k) \leqslant c N_a(X^k)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|k a_{k-1}| \leqslant c |a_k| \tag{6.1}$$

Réciproquement, si on a (6.1), pour tout $P \in \mathbb{C}[X] = N_a(\Delta P) \leqslant c N_a(P)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = k!$, (6.1) est vérifiée pour $c = 1$. Si $b_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, (6.1) n'est pas vérifiée donc Δ n'est pas continue pour N_b.

■

Solution 6.45.

1. On a $d(x,A)=0$ si et seulement si $\inf_{a\in A}\|x-a\|=0$ si et seulement si $\varepsilon>0, \exists a\in A\colon \|x-a\|<\varepsilon$ si et seulement si $x\in\overline{A}$.

   On a $A\subset\overline{A}$ donc $d(x,\overline{A})\leqslant d(x,A)$. Soit $\varepsilon>0$, il existe $a'\in\overline{A}$ tel que $\|x-a'\|<d(x,\overline{A})+\varepsilon$ et il existe $a\in A$ tel que $\|a-a'\|<\varepsilon$. Ainsi,

   $$d(x,A)\leqslant\|x-a\|\leqslant d(x,\overline{A})+2\varepsilon$$

   Ceci calant pour tout $\varepsilon>0$, on a $d(x,A)\leqslant d(x,\overline{A})$ et donc on a égalité.

2. $A\times B\subset\overline{A}\times\overline{B}$ donc $d(A,B)\geqslant d(\overline{A},\overline{B})$. De plus, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $(a',b')\in\overline{A}\times\overline{B}$ tel que $\|a'-b'\|<d(\overline{A},\overline{B})+\varepsilon$ et il existe $(a,b)\in A\times B$ tel que $\|a-a'\|<\varepsilon$ et $\|b-b'\|\varepsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a donc

   $$d(A,B)\leqslant\|a-b\|<d(\overline{A},\overline{B})+3\varepsilon$$

   Ceci valant pour tout $\varepsilon>0$, on a bien l'égalité.

■

Solution 6.46. φ_{x_0} est une forme linéaire. Elle est continue si et seulement $C>0$ tel que pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$,

$$|P(x_0)|\leqslant C\|P\|_\infty$$

Si $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$, on a

$$|P(x_0)|\leqslant\|P\|_\infty\sum_{k=0}^n|x_0|^k$$

Si $|x_0|<1$, on a

$$|P(x_0)|\leqslant\|P\|_\infty\frac{1}{1-|x_0|}$$

donc φ_{x_0} est continue et si $x_0=|x_0|e^{\mathrm{i}\theta_0}$, soit $n\in\mathbb{N}$ et $P_n=\sum_{k=0}^n e^{-\mathrm{i}k\theta_0}X^k$, on a $\|P_n\|_\infty=1$ et

$$|\varphi_{x_0}(P_n)=\sum_{k=0}^n|x_0|^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{1-|x_0|}$$

donc $|||\varphi_{x_0}|||=\frac{1}{1-|x_0|}$.

Si $|x_0|\geqslant1$,

$$|\varphi_{x_0}(P_n)|=\sum_{k=0}^n|x_0|^k\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

donc φ_{x_0} n'est pas continue. ■

Solution 6.47. Pour le sens indirect, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$ donc $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$. Par continuité du déterminant, on a $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \det(-\lambda I_n)$. Donc $\lambda = 0$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ donc M est nilpotente.

Pour le sens direct, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M. On trigonalise u sur une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ avec $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \ldots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \cdots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$. Posons pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$. On pose $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \ldots, \varepsilon_{n,p})$ et $M_p = \mathrm{mat}_{B_p}(u)$, semblable à M et $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ car $\|M_p\| \leqslant \frac{1}{p}\|M_1\|$. ■

Solution 6.48. On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M.

Pour le sens indirect, si M n'est pas diagonalisable, il existe une base $B = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = D + N$$

où D est diagonale et N est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases $\mathcal{B}_p$ définies à l'exercice précédent, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} D$$

Si $D \in S_M$, alors M est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc S_M n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si M est diagonalisable, soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$ avec $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} M'$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$ car M et M_p sont semblables. Par continuité du déterminant, on a $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$, donc $\chi_{M'} = \chi_M$. De plus, $A \mapsto \Pi_M(A)$ (polynôme minimal) est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Pi_M(M_p) = 0$ donc $\Pi_M(M') = 0$. M' est donc annulée par Π_M, donc M' est diagonalisable et comme $\chi_M = \chi_{M'}$, M et M' ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc $M' \in S_M$. ■

Remarque 6.9. *Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour*

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$

On a $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ *et* $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow[p \to +\infty]{} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$ *donc* $\lim\limits_{p \to +\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim\limits_{p \to +\infty} M_p}$.

Solution 6.49. On note $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leqslant h\}$.

1. ω_φ est bien défini car $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2\|\varphi\|_\infty$). Si $0 < h \leqslant h'$, alors $A_h \subset A_{h'}$ donc $\sup(A_h) \leqslant \sup(A_{h'})$ donc $\omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h')$.
2. Soit $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, soit $(x, y) \in I^2$ tel que $|x - y| \leqslant h + h'$ (où on peut supposer que $x \leqslant y$).
   — Si $y \in [x, x + h]$, alors $|x - y| \leqslant h$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
   — Si $y \in [x+h, x+h+h']$, $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)-\varphi(x+h)|+|\varphi(x+h)-\varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h)+\omega_\varphi(h')$ car $|x - (x + h)| \leqslant h$ et $|x + h - y| \leqslant h'$.

   Donc $\omega_\varphi(h + h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda h \leqslant (\lfloor \lambda \rfloor + 1)h$ et par croissance et ce qui précède, on a
$$\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega_\varphi(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega_\varphi(h)$$
4. Soit $\varepsilon > 0$. φ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, si $|x - y|\alpha$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$ et on a pour $h \leqslant \alpha$, $\omega_\varphi(h) \leqslant \varepsilon$ d'où $\lim\limits_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0$.
   Soit alors $h_0 > 0$ fixé et $h > 0$,
   — si $h_0 \leqslant h$, on a $0 \leqslant \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leqslant \omega_\varphi(h - h_0)$.
   — si $h \leqslant h_0$, on a $0 \leqslant \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h_0 - h)$.

   Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leqslant \omega_\varphi(|h_0 - h|)$. Donc on a bien $\lim\limits_{h\to h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$. Donc ω_φ est continue (et même uniformément).

■

Solution 6.50. G est borné car si $M \in G$, $|||M||| \leqslant |||I_n||| + \mu = 1 + \mu$. Montrons donc que si G_0 est un sous-groupe borné de $GL_n(\mathbb{C})$, alors les valeurs propres de ses éléments sont de module 1, et ceux-ci sont diagonalisables.

En effet, soit $M \in G$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, soit X un vecteur propre associé. On a $\|MX\| = |\lambda|\|X\| \leqslant |||M|||\|X\|$ donc $|\lambda| \leqslant |||M||| \leqslant \sup\limits_{M\in G} |||M|||$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $M^k \in G$ et $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$, donc si $|\lambda| > 1$, on a $\lim\limits_{k\to+\infty} |\lambda|^k = +\infty$, et si $|\lambda|^\lambda < 1$, on a $\lim\limits_{k\to-\infty} |\lambda|^k = +\infty$. Comme G est borné, $|\lambda| = 1$.

On utilise ensuite la décomposition de Dunford pour M : $M = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. Grâce au binôme de Newton, pour $k \geqslant r$ p* r est l'indice de nilpotence de N, on a

$$M^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} N^p D^{k-p} = \underbrace{D^k}_{\text{borné}} + kND + \sum_{p=2}^{r-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}} N^p \underbrace{D^{k-p}}_{\text{borné car } \mathrm{Sp}(D)\subset\mathbb{U}}$$

Donc

$$M^k \underset{k\to+\infty}{\sim} \underbrace{\frac{k^{r-1}}{(r-1)!} \underbrace{N^{r-1}}_{\neq 0} D^{k-r+1}}_{\text{non borné si } N\neq 0}$$

Donc $N = 0$ et $M = D$ est diagonalisable.

Revenons donc à l'exercice. Soit $M \in G$ et $\lambda = e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathrm{Sp}(M)$ avec $\theta \in]-\pi, pi]$. Si X est un vecteur propre associé à λ, on a

$$(\lambda - 1)\|X\| = \|(M - I_n)X\| \leqslant \mu\|X\|$$

donc $|\lambda - 1| = 2|\underbrace{\sin(\frac{\theta}{2})}_{\geqslant 0}| \leqslant \mu$. Donc $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ où $\theta_0 = \arcsin(\frac{\mu}{2}) \in [0, \pi[$.

Si $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, $e^{\mathrm{i}k\pi} \in \mathrm{Sp}(M^k)$, $|e^{\mathrm{i}k\theta} - 1| \leqslant \mu$. Alors $\{k\theta + 2l\pi \mid (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non monogène et donc dense, et alors $(e^{\mathrm{i}k\theta})_{k\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{U}$, donc il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $|e^{\mathrm{i}k_0\theta} + 1| = |2 - (1 - e^{\mathrm{i}k_0\theta_0})| < 2 - \mu$, ce qui est impossible car $|2 - (1 - e^{\mathrm{i}k_{0\theta}})| \geqslant 2 - |1 - e^{\mathrm{i}k_0\theta_0}| \geqslant 2 - \mu$.

Ainsi, $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{U}_m$. Ce n'est pas forcément le même m pour tout les M dans G. Notons alors pour

$$\lambda \in \bigcup_{M\in G} \mathrm{Sp}(M) = \mathcal{A}$$

$\omega(\lambda)$ l'ordre (multiplicatif) de λ dans $\mathbb{U}$.

Si $\omega(\lambda) = m$, on a $gr(\lambda) = \mathbb{U}_m$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda^k = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{m}} \in \mathcal{A}$ (car $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$). Supposons que $\{\omega(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{A}\}$ non borné. Alors il existe $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $m_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ et $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{m_k}} \in \mathcal{A}$. Alors

$$\underbrace{e^{2\mathrm{i}\lfloor \frac{m_k}{2} \rfloor \frac{\pi}{m_k}}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{i\pi} = -1} \in \mathcal{A}$$

ce qui est impossible car $|\lambda+1| \geqslant 2-\mu > 0$. On peut donc noter

$$m = \bigvee_{\lambda\in\mathcal{A}} \omega(\lambda)$$

et pour tout $M \in G$, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $\lambda^m = 1$. Or M est diagonalisable, donc $M^m = I_n$. ■

Solution 6.51. Si $M \in \mathcal{G}_q$, $P(X) = X^q - 1$ annule M donc M est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{U}_q$. Réciproquement, si M est diagonalisable et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_q$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ avec

$$M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1}$$

et donc

$$M^q = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^q, \dots, \lambda_n^q)P^{-1} = I_n$$

Si $M \in \mathcal{G}_q$ n'est pas une homothétie, il existe $\lambda \neq \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)^2$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} M$$

Or

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est semblable } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

car $\chi_A = (X-\lambda)(X-\mu)$ donc est diagonalisable. Donc $M_k \sim M$ et $M_k \in \mathcal{G}_q$ et M n'est pas isolé.

Montrons le petit lemme suivante : soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Si $|||M - \lambda I_n||| \leqslant \varepsilon$ alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \overline{B(\lambda, \varepsilon)}$. En effet, soit X un vecteur propre de M associé à $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a

$$\|(M-\lambda I_n)X\| = |\mu - \lambda|\|X\| \leqslant |||M - \lambda I_n|||\|X\| \leqslant \varepsilon\|X\|$$

donc $|\mu - \lambda| \leqslant \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \sin(\frac{\pi}{q}) > 0$ et $\lambda \in \mathbb{U}_q$; si $M \in B_{\|\!|\cdot|\!\|}(\lambda I_n, \varepsilon) \cap \mathcal{G}_q$ alors pour tout $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on a $|\lambda - \mu| \leqslant \sin(\frac{\pi}{q})$ donc $\lambda = \mu$. Donc si $M = \lambda I_n$ alors M est isolé (avec $\lambda \in \mathbb{U}_q$). Donc les matrices scalaires sont isolées. ∎

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. Tout d'abord, $\deg(L_n) = n$ et son coefficient dominant et $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. -1 et 1 sont racines d'ordre n de P_n donc pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$ $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$. Ainsi, on a par intégrations par parties successives :

   $$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t) P_n(t) dt$$

   Notamment, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P^{(n)} = 0$ et $(P|L_n) = 0$. En particulier, pour tout $m < n$, $\deg(L_m) \leqslant n-1$ et $(L_m|L_n) = 0$ donc $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de L_n grâce aux intégrales de Wallis :

   $$\begin{aligned}\|L_n\|_2^2 &= (L_n|L_n) \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} L_n^{(n)} (t^2-1)^n dt \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt\end{aligned}$$

   On pose $t = \cos(\theta)$ d'où $dt = -\sin(\theta) d\theta$, d'où

   $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt &= \int_0^{\pi} \sin(\theta)^{2n+1} d\theta \\ &= 2I_{2n+1} \text{ [Wallis]}\end{aligned}$$

   On a classiquement $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. D'où

   $$\begin{aligned}I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \underbrace{I_1}_{=1} \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

   d'où

   $$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2 \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

2. On utilise la formule de Leibniz en écrivant $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$.
3. On montre le résultat par récurrence sur $k \in \{0,\dots,n\}$ en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que $L_n = P_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $]-1,1[$. Or $\deg(L_n) = n$, donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.

4. $(L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (étagée en degré). Donc il existe $(\alpha_{n,0},\dots,\alpha_{n,k})\in\mathbb{R}^{k+1}$ tel que $XL_{n-1}=\sum_{k=0}^n \alpha_{n,k}L_k$. Si $k\leqslant n-3$, on a

$$(XL_{n-1}L_k)=\alpha_{n,k}\|L_k\|_2^2=(L_{n-1}XL_k)=0$$

car $\deg(XL_k)=k+1\leqslant n-2$. Donc

$$XL_{n-1}=\alpha_{n,n-2}L_{n-2}+\alpha_{n,n-1}L_{n-1}+\alpha_{n,n}L_n$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(Xl_{n-1}|L_{n-1})=\int_{-1}^1 tL_{n-1}(t)^2dt$$

Or P_n est paire, donc L_n est de la parité de n et donc L_n^2 est paire puis XL_n^2 est impaire. Donc $\alpha_{n,n-1}=0$.

$$\begin{aligned}(XL_{n-1}|L_{n-2})&=\alpha_{n,n-2}\underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{=\frac{2}{2n-3}}\\&=(-1)^n\int_{-1}^1 P_{n-1}(t)\underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}}\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\int_{-1}^1 P_{n-1}(t)dt&=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\underbrace{\int_{-1}^1(1-t^2)^{n-1}dt}_{2I_{2n-1}}\\&=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\times 2\times\frac{2^{2n-2}(n-1)!)^2}{(2n-1)!}\\&=\frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!}\end{aligned}$$

donc $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}}=\frac{n-1}{n}$. D'où le résultat.

■

Solution 7.2. On forme

$$\begin{array}{rccl}g: & [a,b] & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \underbrace{\Delta f(x_0,\dots,x_{n-1},x)}_{\varphi(x)}-\underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)A}_{P(x)}\end{array}$$

On a $g(x_n) = 0$. On suppose les $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ distincts, et on pose

$$A = \frac{V(x_0, \dots, x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)}$$

g est de classe $\mathcal{C}^n$ et pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $g(x_i) = 0$. Donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g^{(n)}(\xi) = 0$ (théorème de Rolle appliqué n fois. $\deg(P) = n$ et son coefficient dominant est A donc $P^{(n)}(\xi) = An! = \varphi^{(n)}(\xi)$.

On développe maintenant $\varphi(x)$ par rapport à la dernière colonne :

$$\varphi(x) = f(x) \times V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + Q(X)$$

avec $\deg(Q) \leqslant n - 1$ et $V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1}(x_i - x_j)$ (déterminant de Vandermonde). On a donc

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n-1}(x_j - x_i)$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{A}{\prod_{0 \leqslant i < j \leqslant n-1}(x_j - x_i)} = \Delta f(x_0, \dots, x_n)$$

■

Solution 7.3. On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{0} -t f''(t) dt$$

et de même

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t) f''(t) dt$$

D'où

$$\begin{aligned}
A(f) &= f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} t f''(t) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t) f''(t) dt \\
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} t dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t) dt \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Et c'est atteint pour $f(t) = \frac{t^2}{4}$. ■

Solution 7.4. Pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)$ donc

$$f'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1)) \tag{7.1}$$

donc f' est $\mathcal{C}^1$ et donc f est $\mathcal{C}^2$. On fixe alors x et on dérive deux fois (7.1) en fonction de h. On a alors

$$f''(x+h)=f''(x-h)$$

pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$ donc f'' est constante et f est polynômiale de degré 2.

Réciproquement, si $f(x)=ax^2+bx+c$, on a bien la relation de l'énoncé. ■

Solution 7.5.

1. Soit $a>0$,
$$\tau_a:\begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to &]a,+\infty[\\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{array}$$
est croissante. Donc il existe $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_a(x)\in\overline{\mathbb{R}}$. On écrit alors
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{x}+\frac{f(a)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}l$$
2. S'il existe $a<b\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $f(a)<f(b)$, alors $\tau_a(b)>0$. Comme τ_a est croissante, $l\geqslant\tau_a(b)>0$. Par contraposée, si $l\geqslant 0$, f est décroissante.
3. Posons pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)=f(x)-lx$. Pour $x<y$, on a
$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-l\leqslant 0$$
Donc φ est décroissante et $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\in\overline{\mathbb{R}}$ existe.

■

Solution 7.6.

1. On forme
$$g:\begin{array}{rcl}[0,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{1}{\frac{1}{p}+x}\end{array}$$
Alors
$$\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{np}\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{k}{np}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{dx}{\frac{1}{p}+x}=\ln(p+1)=l_p$$

2. On note $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

   Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $0 < x < \alpha_0$, alors $|\varepsilon(x_0)| \leqslant \varepsilon_0$, et il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{n} \leqslant \alpha_0$. Alors pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$,

   $$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left|\varepsilon\Big(\frac{1}{k+n}\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}$$

   et

   $$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{k+n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}\frac{np+1}{n+1} \leqslant \varepsilon_0$$

   On a donc

   $$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(p+1) f'(0)$$

3. On peut penser à $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ continue et $f(0) = 0$. De plus,

   $$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

   donc v_n diverge.

4. On écrit $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} 0$. Ainsi,

   $$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{bp} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{(k+n)^2}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$, $|\varepsilon(\frac{1}{n+k})| \leqslant \varepsilon$ et donc

   $$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2}$$

   donc

   $$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right)$$

   puis

   $$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2}$$

   Or

   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(n+k)^2} &= \frac{1}{(np)^2} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2} \\ &= \frac{1}{np} \times \underbrace{\frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{(\frac{1}{p}+x)^2}}\end{aligned}$$

donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(0)p}{n(p+1)}$$

■

Solution 7.7. Supposons que f' ne tend pa vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \geqslant A, |f'(x_A)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\alpha_0 \geqslant 0$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha_0$ alors $|f'(x) - f'(y)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $t \in [x_A - \alpha, x_A + \alpha]$, on a

$$|f'(t)| \geqslant |f'(x_A)| - |f'(x_A) - f'(t)| \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

et pour $A = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geqslant n, \forall t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f'(t)| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{n}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f' > 0$ sur les $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Alors

$$f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = \int_{x_n - \alpha_0}^{x_n + \alpha_0} f'(t)dt \geqslant \varepsilon_0 \alpha_0 > 0$$

mais comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = 0$$

d'où la contradiction.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, on applique ce qui précède à $\Im(f)$ et $\Re(f)$.

Si f' n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

car $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ et

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} + \underbrace{\frac{2x\cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en } +\infty}$$

■

Solution 7.8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x + \frac{h}{2}) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x)$$

par continuité de g. Donc f est dérivable et $f' = g$. Par ailleurs, pour $y = \frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$$

par récurrence f est $\mathcal{C}^\infty$.

En outre, en fixant x et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à y, on a

$$f''(x + y) - f''(x - y) = 0$$

Donc f'' est constante donc f est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec $f' = g$). ■

Solution 7.9. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt$$

On note $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b - a) + \int_a^b F''(t)(b - t)dt$$

Pour $a = k$ et $b = k + \frac{1}{2}$, on a

$$F(k + \frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k + \frac{1}{2} - t)f'(t)dt = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k + \frac{1}{2} - u)du$$

et pour $a = k + 1, b = k + \frac{1}{2}$,

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}+u)du$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(f(k) - f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u(f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u))du$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u)}_{\geqslant 0 \text{ car } u \geqslant 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du$$

et $f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u) \leqslant f'(k+1) - f'(k)$ d'où

$$S_n \leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} udu}_{=\frac{1}{8}}(f'(n) - f'(1))$$

■

Solution 7.10.

1. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{cases} \|A\| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2 \\ \|B\| \leqslant \frac{h^2}{2}M_2 \end{cases}$$

   On a $B - A - f(x-h) + f(x+h) = 2hf'(x)$ d'où

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}$$

   Donc f' est bornée sur $\mathbb{R}$. On a ensuite un majorant qui dépend de h que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.

2. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|A_k\| \leqslant \frac{k^n}{n!}M_n$$

   On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1 - f(x+1) \\ \vdots \\ A_k - f(x+k) \\ \vdots \\ A_n - f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

   On a

$$\det(M) = \frac{(-1)^n}{1! \times 2! \times \dots \times (n-1)!}V(1, \dots, n)$$

où V est le déterminant de Vandermonde. Donc $\det(M) \neq 0$. On peut former les $f^{(j)}(x)$ en fonction des $(A_i - f(x+i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$: il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (A_i - f(x+i))$. Donc

$$\|f^{(j)}(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \left(\frac{n}{n!} M_n + M_0 \right)$$

Donc $f^{(j)}$ est bornée pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

■

Solution 7.11.

1.
$$l_{\sigma,\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

2. On a
$$\begin{aligned} \left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| - \| \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{>0} \gamma'(a_i)\| \right| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) - (a_{i+1} - a_i)\gamma'(a_i)\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt \end{aligned}$$

3. $\|\gamma'\|$ est continue donc
$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\delta(\sigma) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i)$$

Donc α_0 existe.

γ' est continue sur $[a,b]$ donc uniformément continue sur $[a,b]$, et il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, on a

$$|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Alors si $\delta(\sigma) \leqslant \alpha_1$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, pour tout $t \in [a_i, a_{i+1}]$, on a

$$|t - a_i| \leqslant (a_{i+1} - a_i) \leqslant \alpha_1$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i) - \gamma'(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, si $@d(\sigma) \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1)$, on a

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

4. On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$$

donc $\|\gamma'(t)\| = R$ et $l(\gamma) = 2\pi R$.

■

Solution 7.12.

1. Pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_2(t)}$$

donc

$$e^{\mathrm{i}(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, il existe $k(t) \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$. On a

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi}$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à k_0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Si $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$,

$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, f est $\mathcal{C}^k$. On a alors

$$f(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)e^{\mathrm{i}\theta(\mathrm{t})} = \mathrm{i}\theta'(t)f(t)$$

Donc

$$\theta(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)}$$

De plus, on a

$$\theta(t) = \theta(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

pour $t_0 \in I$.

3. On fixe $t_0 \in I$. Soit θ_0 un argument de $\gamma(t_0)$, on pose

$$\theta(t) = \theta_0 - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

Comme $\frac{f'}{f}$ est $\mathcal{C}^{k-1}$, θ est bien $\mathcal{C}^k$. On forme $g(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)}$ qui est de classe $\mathcal{C}^k$. On a

$$g'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t)$$

donc $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$, donc $\frac{g}{f}$ est constante sur I et $g(t_0) = e^{\mathrm{i}\theta_0} = f(t_0)$ donc $g = f$ sur I. Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $|f(t)| = |e^{\mathrm{i}\theta(t)}| = 1$ et si $\theta(t) = a(t) + \mathrm{i}(t)$, on a donc

$$e^{\mathrm{i}\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{\mathrm{i}a(t)}$$

donc $b(t) = 0$ et $\theta(t) \in \mathbb{R}$.

■

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires

Table des figures