Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Calcul matriciel

Solution 1.1. Soit $(k,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$\begin{aligned}
\left[M\overline{M}\right]_{k,m} &= \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)}\overline{\omega}^{(j-1)(m-1)} && (1.1)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k-1}\overline{\omega}^{m-1}\right]^j && (1.2)\\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k-m}\right]^j && (1.3)
\end{aligned}$$

Or $\omega^{k-m} = 1$ si et seulement si $n \mid k-m$ si et seulement si $k=m$ car $|k-m| \in [\![0, n-1]\!]$. Si $k=m$, on a $[M\overline{M}]_{k,m} = n$ et si $k \neq m$, on a

$$[M\overline{M}]_{k,m} = \frac{1-\left(\omega^{k-m}\right)^n}{1-\omega^{k-m}} = 0 \tag{1.4}$$

Donc $M\overline{M} = nI_n$. Ainsi, $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{n}\overline{M}} \tag{1.5}$$

On a $\det(M\overline{M}) = \det(M)\det(\overline{M}) = n^n = \det(M)\overline{\det(M)} = |\det(M)|^2$ donc $|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$.

On calcul M^2. On a

$$[M^2]_{k,m} = \sum_{j=1}^{n} \omega^{(k-1)(j-1)+(j-1)(m-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} \left[\omega^{k+m-2}\right]^j \tag{1.6}$$

On a $k+m-2 \in [\![0, 2n-2]\!]$ donc $n \mid k+m-2$ si et seulement si $k+m = n+2$ ou $k+m=2$ si et seulement si $m = n+2-k$ ou $k=m=1$. Donc

$$M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & n \\ \vdots & & & n & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & n & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

En développant par rapport à la première ligne (ou colonne), on a

$$\det(M^2) = n^n(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{1.8}$$

donc

$$\boxed{\det(M) = \begin{cases} \pm n^{\frac{n}{2}} \quad \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est pair i.e. } \begin{cases} n \equiv 0[4] \\ \text{ou} \\ n \equiv 3[4] \end{cases} \\ \pm i n^{\frac{n}{2}} \quad \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est impair i.e. } \begin{cases} n \equiv 1[4] \\ \text{ou} \\ n \equiv 2[4] \end{cases} \end{cases}} \tag{1.9}$$

■

Solution 1.2.

1. Si $A \geqslant 0$, soit $X \geqslant 0$, on a

$$[AX]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \geqslant 0 \tag{1.10}$$

donc $AX \geqslant 0$.

Réciproquement, soit $j \in [\![1, n]\!]$, on prend

$$X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

où le 1 est en j-ième position. $X_j \geqslant 0$ et

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \geqslant 0 \tag{1.12}$$

donc $A \geqslant 0$.

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \geqslant 0, A^{-1} = (A^{-1})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \geqslant 0$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. On a

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i,k} A^{-1}_{k,j} = 0 \tag{1.13}$$

donc pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on a $A_{i,j} = 0$ ou $A^{-1}_{k,j} = 0$.

i étant fixé, comme $A \in Gl_n(\mathbb{R})$, il existe $k_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $A_{i,k_0} > 0$. Alors pour tout $j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, on a $A^{-1}_{k_0,j} = 0$ et $A^{-1}_{k_0,i} > 0$ (car A^{-1} est inversible). Supposons qu'il existe $k_1 \neq k_0$ tel que $A_{i,k_1} > 0$. Alors pour tout $j \neq i$, on a $A^{-1}_{k,j} = 0$ et $A^{-1}_{k_1,i} > 0$, mais alors les lignes k_0 et k_1 sont liées, ce qui est impossible. Donc il existe un unique $k_i \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,k_i} > 0$.

Comme A est inversible, pour $i \neq i'$, on a $k_i \neq k_{i'}$, sinon on aurait deux lignes proportionnelles. Donc

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \\ & i & \mapsto & k_i \end{array}$$

Ainsi il existe une unique permutation $\sigma \in \Sigma_n$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,\sigma(i)} > 0$ et pour tout $j \neq \sigma(i)$, $A_{ij} = 0$. Donc

$$\boxed{A = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) P_\sigma} \tag{1.14}$$

avec $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$ et $a_i > 0$.

Réciproquement, si A est de cette forme, on a $A \geqslant 0$ et

$$A^{-1} = P_\sigma^{-1} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) = P_{\sigma^{-1}} \operatorname{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) \tag{1.15}$$

donc $A^{-1} \geqslant 0$.

■

Remarque 1.1. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

Si $AX \geqslant 0$, en définissant $x_0 = x_{n+1} = 0$, on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} \geqslant 0 \tag{1.17}$$

Si $x_{i_0} = \min(x_0, \dots, x_{n+1})$, on a

$$2x_{i_0} \geqslant x_{i_0-1} + x_{i_0+1} \geqslant 2x_{i_0} \tag{1.18}$$

donc $x_{i_0-1} = x_{i_0+1} = x_{i_0}$. De proche en proche, on a $x_{i_0} = x_0 = 0$. Donc $X \geqslant 0$.

Si $AX = 0$, on a $AX \geqslant 0$ et $A(-X) = 0$ donc $X \geqslant 0$ et $-X \geqslant 0$ donc $X = 0$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = AX \geqslant 0$, on a $A^{-1}Y = X \geqslant 0$ donc $A^{-1} \geqslant 0$.

Solution 1.3. Soit

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ & P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$(X+1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \tag{1.19}$$

On note $P_i = X^{i-1}$ et $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On note $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. $u^{-1}\colon P \mapsto P(X-1)$ donc A est inversible et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$(X-1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i (-1)^{j-i-1} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} (-1)^{j-i} \tag{1.20}$$

donc

$$\boxed{A^{-1} = \left(\binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}} \tag{1.21}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k\colon P \mapsto P(X+k)$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$(X+k)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i k^{j-i-1} = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} k^{j-i} \tag{1.22}$$

donc

$$\boxed{A^k = \left(\binom{j-1}{i-1} k^{j-i} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}} \tag{1.23}$$

■

Solution 1.4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H(n)$:'si $\dim(E) = n$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\mathrm{Tr}(u) = 0$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

'

Pour $n = 1$, on a $u = 0$ si $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Pour $n \geqslant 1$, on suppose $H(n)$, soit E de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda id_E$, on a $\mathrm{Tr}(u) = (n+1)\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $u = 0$.

Sinon, il existe $e_1 \neq 0$ tel que $(e_1, u(e_1))$ est libre (résultat classique, redémontré en remarque ci-dessous). On pose $e_2 = u(e_1)$ et on complète (e_1, e_2) en une base de E : $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) = \mathcal{B}_1$. Alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & & & & \\ 0 & & \text{A'} & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

avec $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(A') = 0$. Posons $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$. On note Π la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1)$. Alors si

$$\begin{array}{rccc} u' : & F & \to & F \\ & x & \mapsto & \Pi(u(x)) \end{array}$$

et $A' = \mathrm{mat}_{(e_2,\dots,e_{n+1})}(u')$ donc $\mathrm{Tr}(u') = 0$. D'après $H(n)$, il existe $(f_2, \dots, f_{n+1})$ une base de F telle que

$$\mathrm{mat}_{(f_2,\dots,f_{n+1})}(u') = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Soit donc $\mathcal{B}_2 = (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ base de E. On a $u(e_1) \in F$ donc

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix}} \tag{1.27}$$

2. Soit $M = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $D = (i\delta_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On a

$$[DM]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} i\delta_{i,k}a_{k,j} = ia_{i,j} \tag{1.28}$$

et

$$[MD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}k\delta_{k,j} = ja_{i,j} \tag{1.29}$$

On a $M \in \ker(\varphi)$ si et seulement si pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$ si et seulement si $M \in D_n(\mathbb{K})$ (ensemble des matrices diagonales). Donc $\dim(\ker(\varphi)) = n$ et $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = n^n - n$. Or pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), [MD - DM]_{i,i} = 0$. Notons Δ_n l'ensemble des matrices de diagonale nulle. On a $\mathrm{Im}\varphi \subset \Delta_n$ et $\dim(\Delta_n) = n^2 - n$ (une base de Δ_n est $(E_{i,j})_{i\neq j}$, matrices élémentaires) donc $\mathrm{Im}(\varphi) = \Delta_n$.

Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. D'après 1. il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP \in \Delta_n = \mathrm{Im}(\varphi)$ donc il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = MD - DM$ donc

$$\begin{aligned} A &= P(MD - DM)P^{-1} && (1.30) \\ &= PMDP^{-1} - PDMP^{-1} && (1.31) \\ &= \boxed{XY - YX} && (1.32) \end{aligned}$$

avec $X = PMP^{-1}$ et $Y = PDP^{-1}$.

■

Remarque 1.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(x, u(x))$ est liée i.e. pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda_x x$. Alors u est une homothétie.*

En effet, soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, si (x, y) est liée, il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \mu x$. On a alors

$$u(y) = \lambda_y y = \mu u(x) = \mu\lambda_x x = \lambda_x y \tag{1.33}$$

On a $y \neq 0$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Si (x, y) est libre, on a

$$u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y \tag{1.34}$$

Par liberté de (x, y), on a $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi, λ_x ne dépend pas de x : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$, i.e. $u = \lambda id_E$.

Solution 1.5.

1. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$ et $Y = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T}$, on a

$$XY^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \dots & \dots & x_1y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & x_ny_n \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

est de rang 1. On a

$$(XY^\mathsf{T})^2 = X(Y^\mathsf{T}X)Y^\mathsf{T} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) XY^\mathsf{T} \tag{1.36}$$

Si $\lambda = 0$, c'est évident.

Si $\lambda \neq 0$ et $B = I_n + \lambda XY^\mathsf{T}$, on a

$$XY^\mathsf{T} = \frac{B - I_n}{\lambda} \tag{1.37}$$

et

$$(XY^\mathsf{T})^2 = \frac{(B - I_n)^2}{\lambda^2} \tag{1.38}$$

soit

$$(XY^\mathsf{T})^2 = \frac{B^2 - 2B + I_n}{\lambda^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) \left(\frac{B - I_n}{\lambda}\right) \tag{1.39}$$

d'où

$$\lambda \left(Y^\mathsf{T}X\right) (B - I_n) = B^2 - 2B + I_n \tag{1.40}$$

d'où

$$B^2 + \left(-2 - \lambda \left(Y^\mathsf{T}X\right)\right) B + I_n \left(1 + \lambda \left(Y^\mathsf{T}X\right)\right) = 0 \tag{1.41}$$

Si $1+\lambda Y^\top X \neq 0$, alors B est inversible et

$$\boxed{B^{-1} = -\frac{1}{1+\lambda Y^\top X}\left(B - \left(2+\lambda Y^\top X\right) I_n\right)} \tag{1.42}$$

Si $1+\lambda Y^\top X = 0$, on a

$$B\left(B - I_n\right) = 0 \tag{1.43}$$

Si B est inversible, on aura $B = I_n$ et $\lambda X Y^\top = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Or $\lambda \neq 0$ donc $X = Y = 0$ et $1 = 0$: absurde. Donc $B \notin GL_n(\mathbb{K})$.

2. On a

$$M = A + \lambda X Y^Y = A\left(I_n + \lambda A^{-1} X Y^\top\right) \tag{1.44}$$

donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\left(I_n + \lambda A^{-1} X Y^\top\right)$ est inversible si et seulement si $1+\lambda Y^\top A^{-1} X$ est inversible d'après 1. Alors

$$\boxed{M^{-1} = \left(I_n - \frac{\lambda A^{-1} X Y^\top}{1+\lambda Y^\top A^{-1} X}\right) A^{-1}} \tag{1.45}$$

■

Solution 1.6. On a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ donc il faut montrer que $(S_0, \dots, S_n)$ est libre. Soit donc $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\alpha_0 S_0 + \cdots + \alpha_n S_n = 0 \tag{1.46}$$

Si $\alpha \neq 0$, on pose $k_0 = \max\left(k \in [\![0, n]\!] | \alpha_k \neq 0\right)$. On a

$$\alpha_0 (1-X)^n + \cdots + \alpha_{k_0} X^{k_0} (1-X)^{n-k_0} = 0 \tag{1.47}$$

soit

$$\alpha_0 (1-X)^{k_0} + \cdots + \alpha_{k_0} X^{k_0} = 0 \tag{1.48}$$

En évaluant en 1, on a $\alpha_{k_0} = 0$ ce qui est absurde. Donc $(S_0, \dots, S_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X] = n+1$.

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$S_j = X^j(1-X)^{n-j} \tag{1.49}$$
$$= X^j\left(\sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k X^k\right) \tag{1.50}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-j}\binom{n-j}{k}(-1)^k X^{k+j} \tag{1.51}$$
$$= \sum_{k=j}^{n}\binom{n-j}{k-j}(-1)^{k-j} X^k \tag{1.52}$$

donc

$$\boxed{A = P_{(1,\dots,X^n)\to(S_0,\dots,S_n)} = \left(\binom{n-j}{k-j}(-1)^{k-j}\right)_{0\leqslant k,j\leqslant n}} \tag{1.53}$$

On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $u(X^j) = S_j$ pour tout $j \in [\![0, n]\!]$. On a $u(X^j) = \left(\frac{X}{1-X}\right)^j(1-X)^n$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $u(P) = P\left(\frac{X}{1-X}\right)(1-X)^n$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on a $u(P) = Q$ si et seulement si $P\left(\frac{X}{1-X}\right)(1-X)^n = Q(X)$ si et seulement si $P(Y)\left(\frac{1}{1+Y}\right)^n = Q\left(\frac{Y}{1+Y}\right)$ soit $u(P) = Q$ si et seulement si $P(Y) = Q\left(\frac{Y}{1+Y}\right)(1+Y)^n$. Ainsi $u^{-1}(X^j) = X^j(1+X)^{n-j}$, donc

$$\boxed{A^{-1} = \mathrm{mat}_{(1,\dots,X^n)}(u^{-1}) = \left(\binom{n-j}{k-j}\right)_{0\leqslant k,j\leqslant n}} \tag{1.54}$$

■

Solution 1.7. Si on a $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$, on a $I_n \notin H$. On écrit donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathbb{K}I_n \tag{1.55}$$

Soit $i \neq j$, on prend $E_{i,j} = M + \lambda I_n$ (décomposition précédente) avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda \neq 0$, on a

$$M = E_{i,j} - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K}) \tag{1.56}$$

donc $M \in GL_n(\mathbb{K}) \cap H$: absurde. Donc $\lambda = 0$ et $E_{i,j} \in H$, d'où $\mathrm{Vect}(E_{i,j})_{,\neq i} \subset H$. Or

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in (GL_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{Vect}(E_{i,j})_{i\neq j}) \subset (GL_n(\mathbb{K}) \cap H) \tag{1.57}$$

donc $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$: absurde. $\blacksquare$

Remarque 1.3. *Il existe une forme linéaire non nulle* $\varphi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *telle que* $H = \ker(\varphi)$.

En effet, pour toute forme linéaire φ *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, il existe une unique matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *telle que*

$$\varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM) \tag{1.58}$$

Pour le montrer : si A *existe, pour tout* $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\varphi(E_{i,j}) = \operatorname{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. *Réciproquement, soit* $A = (\varphi(E_{j,i}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *On a pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$ *car cex deux formes linéaires coïncident sur les* $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$,

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \operatorname{Tr}(AM) = 0\} \tag{1.59}$$

Si $r = \operatorname{rg}(A)$*, il existe* $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ *telles que* $A = Q^{-1}J_{n,n,r}P$ *(*$J_{n,n,r}$ *: matrice de taille* $n \times n$ *avec les* r *premiers coefficients diagonaux valant 1). Alors pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a*

$$\operatorname{Tr}(AM) = \operatorname{Tr}(J_{n,n,r}\underbrace{MPQ^{-1}}_{=\,M'}) \tag{1.60}$$

et il suffit de prendre

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.61}$$

Solution 1.8.

1. On prend $\lambda = 0$ et $N(0 \times 0) = 0 \times N(0) = 0$ donc

$$\boxed{N(0) = 0} \tag{1.62}$$

2. On a pour $j \neq i$, $E_{i,j} \times E_{j,j} = E_{i,j}$ et $E_{j,j}E_{i,j} = 0$ donc $N(E_{i,j}) = N(E_{i,j}E_{j,j}) = N(E_{j,j}E_{i,j})$ d'où

$$\boxed{N(E_{i,j}) = 0} \tag{1.63}$$

3. Déjà traité à l'exercice 1.
4. Si $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} \tag{1.64}$$

donc

$$\boxed{N(A) = N(P^{-1}AP) \leqslant \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} N(E_{i,j}) = 0} \tag{1.65}$$

5. Soit $A' = A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n$. On a $N(A') = 0$ d'après ce qui précède. Montrons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$,

$$|N(A) - N(B)| \leqslant N(A - B) \tag{1.66}$$

On écrit $A = A - B + B$ et $N(A) \leqslant N(A - B) + N(B)$ d'où $N(A) - N(B) \leqslant N(A - B)$ et on a le résultat par symétrie de A et B.

On a donc

$$\left| N(A) - N\left(\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) \right| \leqslant N\left(A - \frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = 0 \tag{1.67}$$

d'où

$$\boxed{N(A) = N\left(\frac{\mathrm{Tr}(A)}{n} I_n\right) = |\mathrm{Tr}(A)| \times \underbrace{N\left(\frac{I_n}{n}\right)}_{= a \geqslant 0}} \tag{1.68}$$

■

Solution 1.9. On écrit

$$f + g = f \circ \left(id + f^{-1} \circ g\right) \tag{1.69}$$

avec $f^{-1} \circ g$ de rang 1. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ g) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \star \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

avec $\alpha = \mathrm{Tr}(f^{-1} \circ g)$ et donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(id + g^{-1} \circ g)$ est inversible si et seulement si $1 + \alpha \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(f^{-1} \circ g) \neq 1$. ■

Solution 1.10. Par symétrie du problème, il suffit de déterminer les

$$a_{n,j} = |\{\text{chemins de longueur } n \text{ de } 1 \text{ vers } j \in \{2,3,4\}\}| \tag{1.71}$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a(n,1) \\ a(n,2) \\ a(n,3) \\ a(n,4) \end{pmatrix} \tag{1.72}$$

On a alors

$$X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} X_n \tag{1.73}$$

car (en raisonnant modulo 4) il y a autant de chemins de longueur n+1 reliant 1 à j que de chemins de longueur n reliant 1 à j-1 + chemins de longueur n reliant 1 à j+1. d'où $X_n = A^n X_0$ avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.74}$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} \tag{1.75}$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.76}$$

On a $B^2 = I_2$ et on montre par récurrence

$$\begin{cases} A^{2p} = 2^{2p-1} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix} & p \geqslant 1 \\ A^{2p+1} = 2^{2p} \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} & p \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.77}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{aligned} &a(2p,1) = 2^{2p-1} = a(2p,3) \\ &a(2p,2) = 0 = a(2p,4) \\ &a(2p+1,1) = 0 = a(2p+1,3) \\ &a(2p+1,4) = 2^{2p} = a(2p+1,4) \end{aligned}} \tag{1.78}$$

Ici, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.79}$$

En deux itérations, il y a chaque fois deux possibilités pour relier deux sommets différents de même partié, et 3 pour revenir au même sommet. On a donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_8 + 2 \begin{pmatrix} B & B & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \end{pmatrix} \tag{1.80}$$

On applique le binôme de Newton pour calculer les puissances paires de A, puis on déduit les puissances impaires en multipliant par A. ■

Solution 1.11. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Supposons $AX = 0$. Alors pour tout $i \in$

$[\![1, n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = 0 \Rightarrow -a_{i,i} x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j \tag{1.81}$$

donc

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} x_j \right| = |a_{i,i} x_i| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j} x_j| \tag{1.82}$$

Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$x_{i_0} = \max \{|x_i|, i \in [\![1, n]\!]\} \tag{1.83}$$

On a alors

$$|a_{j,i_0}| |x_{i_0}| \leqslant |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i_0,j}| \tag{1.84}$$

D'après l'hypothèse, on a $|x_{i_0}| = 0$ donc $X = 0$ et A est inversible.

Il faut l'inégalité stricte, un contre-exemple est donnée par une ligne nulle. ■

Remarque 1.4. *Si pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $|a_{j,j}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$ alors $A^{\mathsf{T}} \in GL_n(\mathbb{C})$ et donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$.*

Solution 1.12. On écrit, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$i \wedge j = \sum_{k | i \wedge j} \varphi(k) \tag{1.85}$$

$$= \sum_{\substack{k|i \\ k|j}} \varphi(k) \tag{1.86}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} b_{k,j} \varphi(k) \tag{1.87}$$

avec $b_{k,i} = 1$ si $k \mid i$ et 0 sinon. On a alors, si $A = (i \wedge j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, $A = B^{\mathsf{T}} C$ avec $B = (b_{k,i})_{1 \leqslant i,k \leqslant n}$ (triangulaire supérieure) et $C = (\varphi(k) b_{k,j})_{1 \leqslant k,j \leqslant n}$ (triangulaire supérieure). Donc

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \varphi(i)} \tag{1.88}$$

■

Solution 1.13. Pour l'unicité, si $A = L_1U_1 = L_2U_2$ telles que proposées. Comme A est inversible, on a $\det(A) = \det(L_i)\det(U_i) \neq 0$ pour $i\{1,2\}$ et donc L_i et U_i sont inversibles. Ainsi,

$$L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{C}) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}) \tag{1.89}$$

avec des 1 sur la diagonale, c'est donc I_n, d'où l'unicité.

Pour l'existence, on travaille par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour $n = 1$ on a $A = (1) \times (a_{1,1})$. Soit $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ vérifiant l'hypothèse, alors A_n vérifie l'hypothèse $A_n = L_nU_n$ avec

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & Y \\ X^\top & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \tag{1.90}$$

On veut

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} & 0 \\ L' & \vdots \\ & 0 \\ X_1^\top & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & U' & & Y_1 \\ 0 & \dots & 0 & u_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \tag{1.91}$$

On a $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, par produits par blocs, on a $A_n = L'U' = L_nU_n$ et par unicité, $L' = L_n$ et $U' = U_n$. On a $X^\top = X_1^\top U'$ et donc $X_1^\top = X^\top U_n^{-1}$ et $Y = L_nY_1$ donc $Y_1 = L_n^{-1}Y$.

Enfin, $a_{n+1,n+1} = X_1^\top Y_1 + u_{n+1,n+1}$ et donc

$$u_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1} - X_1^\top Y_1 = a_{n+1,n+1} - X^\top U_n^{-1}L_n^{-1}Y \tag{1.92}$$

Réciproquement, en définissant ainsi U et L, on a bien $A = Lu$ en remontant les calculs. ■

Solution 1.14. On a $\sum_{k\in A_i} a_k - \sum_{k\in B_i} a_k = 0$ (combinaison linéaire des a_k avec des coefficients ±1), donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \pm1 & \dots & \dots & \pm1 \\ \pm1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \pm1 \\ \pm1 & \dots & \dots & \pm1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{pmatrix}}_{=X} = 0 \tag{1.93}$$

Sur chaque ligne, il y a n fois 1 et n fois -1 (car les A_i et B_i sont disjoints). On veut montrer que $X = \alpha\mathbf{1}$. On a $X \in \ker(A)$ et $\mathbf{1} \in \ker(A)$ (car il y a n 1 et n -1 par ligne). On veut donc montrer que $\dim(\ker(A)) = 1$, soit $\mathrm{rg}(A) = 2n$.

On doit donc montrer qu'il existe une sous-matrice de taille $2n$ inversible car $\dim(\ker(A)) \geqslant 1$. Comme on est bloqué par les ± 1, on se place dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit donc

$$\overline{B_n} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \dots & \dots & \overline{1}1 \\ \overline{1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \overline{1}1 \\ \overline{1}1 & \dots & \dots & \overline{1}1 & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right) \tag{1.94}$$

Si $\det(\overline{B_n}) \neq 0$, on a $\det(B_n) \neq 2k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où B_n est obtenue en enlevant à A sa dernière ligne et sa dernière colonne, et donc $\det(A) \neq 0$.

On cherche un polynôme annulateur de $\overline{B_n}$. On a

$$\left(\overline{B_n} + \overline{I_{2n}}\right)^2 = \overline{B_n}^2 + 2\overline{B_n} + I_{2n} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \dots & \overline{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{1} & \dots & \overline{1} \end{pmatrix}^2 = 2n \begin{pmatrix} \overline{1} & \dots & \overline{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{1} & \dots & \overline{1} \end{pmatrix} = \left(\overline{0}\right) \tag{1.95}$$

Ainsi,

$$\overline{B_n}\left(\overline{B_n} + 2\overline{I_{2n}}\right) = -\overline{I_{2n}} = \overline{I_{2n}} \tag{1.96}$$

donc $\overline{B_n} \in GL_n\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)$ et donc $B_n \in GL_{2n}(\mathbb{R})$, ce qui démontre bien que $\mathrm{rg}(A) = 2n$ et $\ker(A) = \mathrm{Vect}(\mathbf{1})$, d'où

$$\boxed{a_1 = \cdots = a_{2n+1}} \tag{1.97}$$

■

Table des figures