Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Algèbre Générale

2 Séries numériques et familles sommables

3 Probabilités sur un univers dénombrable

4 Calcul matriciel

5 Réduction des endomorphismes

Solution 5.1. *Pour le sens indirect, soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$ *donc* $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$. *Par continuité du déterminant, on a* $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \det(-\lambda I_n)$. *Donc* $\lambda = 0$ *et* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ *donc* M *est nilpotente.*

Pour le sens direct, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ *canoniquement associée à* M. *On trigonalise* u *sur une base* $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *avec* $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \cdots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$. *Posons pour* $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$. *On pose* $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$ *et* $M_p = \mathrm{mat}_{B_p}(u)$, *semblable à* M *et* $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ *car* $\|M_p\| \leqslant \frac{1}{p}\|M_1\|$.

Solution 5.2. *On pose* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ *canoniquement associée à* M.

Pour le sens indirect, si M *n'est pas diagonalisable, il existe une base* $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ *de* $\mathbb{C}^n$ *telle que*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = D + N$$

où D *est diagonale et* N *est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases* $\mathcal{B}_p$ *définies à l'exercice précédent, on a*

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} D$$

Si $D \in S_M$, *alors* M *est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc* S_M *n'est pas fermé.*

Pour le sens direct, si M *est diagonalisable, soit* $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$ *avec* $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} M'$. *Soit* $\lambda \in \mathbb{C}$. *On a* $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$ *car* M *et* M_p *sont semblables. Par continuité du déterminant, on a* $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$, *donc* $\chi_{M'} = \chi_M$. *De plus,* $A \mapsto \Pi_M(A)$ *(polynôme minimal) est continue sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et pour tout* $p \in \mathbb{N}$, *on a* $\Pi_M(M_p) = 0$ *donc* $\Pi_M(M') = 0$. M' *est donc annulée par* Π_M, *donc* M' *est diagonalisable et comme* $\chi_M = \chi_{M'}$, M *et* M' *ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc* $M' \in S_M$.

Remarque 5.1. Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$

On a $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim\limits_{p\to+\infty} M_p}$.

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. *A $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & x\cos(t) + y\sin(2t) \end{array}$$

est bornée, donc le sup *sur $\mathbb{R}$ existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au* sup *sur $\mathbb{R}$.*

2. *Si $|x| + |y| \leqslant 1$, alors $N(x, y) \leqslant 1$ donc on a la première inclusion.*
Si $N(x, y) \leqslant 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leqslant 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leqslant \left| x\frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x\frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leqslant 2$$

et donc $|y| \leqslant 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. *On fixe $(x, y) \in S_N(0, 1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π-périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limite à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ.*
On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leqslant x|\cos(t)| + y|\sin(2t)| = |\varphi(-t)|$$

et $-t \in [0, \pi]$. Donc le sup *est atteint sur $[0, \pi]$.*
On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leqslant \varphi(t) = x \underbrace{\cos(t)}_{\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]} + y\sin(2t) \leqslant x \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]} + y\sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t)$$

Donc le sup *est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le* sup *(existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le* sup *sur $\mathbb{R}$ qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.*
On a donc $x\cos(t_0) + y\sin(2t_0) = 1$ et $-x\sin(t_0) + 2y\cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0, en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.
Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que x et y s'écrivent de la façon demandée, alors t_0 est l'unique point satisfaisant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$. Mais alors le sup *de φ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est atteint en un point t_1 qui vérifie les mêmes choses, donc $t_1 = t_0$ d'où $N(x, y) = 1$.*

Solution 6.2.

1. *Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur E*

$$\varphi : \begin{array}{rcl} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (f, g) & \mapsto & f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \end{array}$$

Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$ et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. *Pour $x \in [0,1]$, écrire $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, utiliser Cauchy-Schwarz avec f' et 1 puis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a+b}$, pour enfin passer au $\sup$ sur x.*

3. *Utiliser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction*

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n \end{array}$$

Solution 6.3. *Si f est ouverte, $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de R^p. Donc f est surjective.*

Si f est surjective, on prend F un supplémentaire de $\ker(f)$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $\dim(\ker(f)) = n - p$ et $\dim(F) = p$. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\ker(f)$. On vérifie que $(f(e_1, \ldots, f(e_p))$ est une base de $\mathbb{R}^p$. On définit

$$N_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \sum_i^n x_i e_i & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^n$ et

$$N_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ \sum_i^p y_i f(e_i) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |y_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^p$.

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $y_0 \in f(\Theta)$, il existe $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. Comme Θ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta$$

Soit $y = \sum_{i=}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, si $N_2(y - y_0) < r_0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \overset{def}{=} f(x)$$

avec $N_1(x - x_0) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. Ainsi $x \in \Theta$ et $y \in f(\Theta)$, donc $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ et $f(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.4.

1. *Classique.*

2.
$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leqslant |f(0)| + \kappa(f)x \leqslant N(f)$$

   car $x \leqslant 1$, donc $N_\infty \leqslant N$. Pour la non-équivalence, prendre

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n \end{array}$$

3. *On a $|f(0)| \leqslant N_\infty(f)$ donc $N(f) \leqslant N'(f)$. Ensuite, $N_\infty \leqslant N$ donne $N' \leqslant N + \kappa \leqslant 2N$. Donc N est N' sont équivalentes.*

Remarque 6.1. Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend $(e_i)_{i\in I}$ une base (de Hamel), $J = (i_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ dénombrable. Si $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$, on peut vérifier que

$$N_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i\in I\setminus J} |x_i|$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n|x_{i_{2n}}| + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}|x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i\in I\setminus J} |x_i|$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. *Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$. Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$. Alors*

$$\left\| T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right) - I_n \right\|_\infty = \left|\frac{\lambda}{p}\right| < \alpha$$

donc $T_{i,j}(\lambda) \in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left(T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)^p \in G$$

Soit $\delta = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim_{n\to+\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$.

On a alors

$$\left\| D_n\left(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}}\right) - I_n \right\|_\infty < \alpha$$

donc $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}})^p \in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G = GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 6.2. C'est faux sur $\mathbb{R}$. Contre-exemple : matrices de déterminant positif.

Solution 6.6. *Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $h \in E$ avec $\|h\| \leqslant \alpha$ et $\|f(h)\| > \varepsilon_0$. On prends $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\| \leqslant 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leqslant M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.*

Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{\|h\|\to 0} f(x+h) = \lim_{\|h\|\to 0} f(x) + f(h) = f(x)$$

donc f est continue.

On a $f(px) = p(fx)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que $\lim_{n\to+\infty} r_n = \lambda$. Comme f est continue, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lim_{n\to+\infty} f(r_n x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} r_n f(x) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Remarque 6.3. Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ ($0 \in I$). On définie

$$f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\Big) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i\in I\setminus\{0\}} \lambda_i e_i$$

f vérifie $f(x + y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \to \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. *On a $\alpha(A) \subset \overline{A}$ donc $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Comme $\alpha(A)$ est un ouvert inclus dans $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.*
2. *Si $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$, on montre aussi que $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. On a donc $A, \overline{A}, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ et c'est tout.*

Solution 6.8.

1. *Si $d_A = d_B$,*
$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B}$$
Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_i\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de l'inf). Il existe $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de la fermeture). Ainsi,
$$d_A(x) \leqslant \|x - a_2\| \leqslant \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$$
Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$. Comme $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leqslant d_A$, on a $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.
2. *Soit $x \in A$, on a $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leqslant \rho(A, B)$ donc $\sup\limits_{x\in A} d_B(x) \leqslant \rho(A, B)$, de même pour $\sup\limits_{y\in B} d_A(y)$ donc on on a un première inégalité.*
Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x - a\| \leqslant d_A(x) + \varepsilon$ et $\|x - b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon$. On a alors
$$d_A(x) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|a - b\| + \|x - b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A, B)$$
Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leqslant d_B(x) + \alpha(A, B)$. De même, $d_B(x) \leqslant d_A(x) + \alpha(A, B)$ donc $\rho(A, B) \leqslant \alpha(A, B)$.

Solution 6.9.

1. *Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\lim\limits_{z\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \to x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur $\mathbb{C}$, on a $y = P(x) \in P(F)$.*

2. *Soit Θ un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $y \in P(\Theta), \exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x,r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x - x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominatrice de P. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi*
$$|Q(x)| = |y - y'| \geqslant |a|r^n$$
Par contraposée, si $|y - y'| \leqslant \frac{|a|r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x' - x| < r$.Ainsi, $x' \in B(x,r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.10.

1. *Si $P \notin \mathcal{S}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$ et $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$. Par contraposée, si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$,alors $P \in \mathcal{S}$.*
Réciproquement, si $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$ avec $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ réels, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a
$$|P(z)| = \prod_{i=1}^{n} |a - \lambda_i + ib| \geqslant |b|^n$$
2. *Soit $(P_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $P_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} P \in F$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|P_p(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc quand $p \to +\infty$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc $P \in \mathcal{S}$ et S est fermé.*
3. *Soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrice trigonalisable sur $\mathbb{R}$ qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ib bite χ_p le polynôme caractéristique de M_p. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\chi_p \in \mathcal{S}$ et $\chi_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \chi_M$. Comme $\mathcal{S}$ est fermé, $\chi_M \in \mathcal{S}$ et M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.*

Solution 6.11.

1. *φ est linéaire et $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n + = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$.*
Si φ est bijective, elle est surjective et il existe $(U,V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UA + BV = 1$ et d'après le théorème de Bézout, on a $A \wedge B = 1$.
Réciproquement, si φ n'est pas surjective, il existe $(U,V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\varphi(U,V) = 0$ d'où $AU = -BV$. Soit $\delta = A \wedge B$, on écrit $A = \delta A_1$ et $B = \delta B_1$ avec $A_1 \wedge B_1 = 1$ et on a $A_1U = -B_1V$. D'après le théorème de Gauss, on a $A_1 \mid V$ et $B_1 \mid U$. Si $U = 0$, on a $V = 0$ et de même si $V = 0$, on a $U = 0$. On peut donc supposer $U \neq 0$ et $V \neq 0$, et on a alors $\deg(A_1) \leqslant \deg(V) \leqslant n - 1 < n = \deg(A)$ mais $A = \delta A_1$ donc $\deg(\delta) \geqslant 1$ et $A \wedge B \neq 1$.
2. *Φ est continue car $R_{A,B}$ est un polynôme en les coefficients de A et B.*
3. *Comme on est dans $\mathbb{C}$, $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$. $\Phi_{P,P'}$ est continue d'après la question précédente, $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc Δ est ouvert.*
Sur $\mathbb{R}$, on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si $P \wedge P' = 1$ (contre-exemple : $P = X^2 + 1$). Dans $\mathbb{R}_3[X]$, X est scindé à racines simples et $X(1 + \varepsilon X)^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} X$ et $-\frac{1}{\varepsilon}$ est racine double, donc Δ n'est pas ouvert.

Remarque 6.4. On peut cependant considérer
$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\}$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ sont les racines (distinctes) de R sur $\mathbb{R}$, on choisit $\alpha_0 \in]-\infty, \lambda_1$, $\alpha_n \in]\lambda_n, +\infty[$ et $\alpha_i \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ si $i = 1, \dots, n-1$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$ (car les racines de P provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ & Q & \mapsto & (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \end{array}$$

Ψ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$ qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que si $\|P - Q\| < r$, alors $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$. Donc Q change n fois de signe, et admet au moins n racines. Mais $\deg(Q) = n$, donc Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc Δ_n est ouvert dans $\{P \in \mathbb{R}[X] \bigm| \deg(P) = n\}$.

Remarque 6.5.

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \bigm| M \text{ diagonalisable à racines simples}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \bigm| \chi_M \text{ sciné à racines simples}\}$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et c'est aussi vrai sur $\mathbb{R}$.

Solution 6.12.

1. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \mapsto & A^n \end{array}$$

   f est continue et $F = f^{-1}(\{0\})$ donc $F = \overline{F}$.
   Soit $M_0 \in F$, X^n annule M_0 donc M_0 est trigonalisable : on écrit M_0 dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors M_ε la même matrice dans la même base en rajoutant simplement ε en première position de la diagonale. Alors $M_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} M_0$ et $M_\varepsilon \notin F$ donc $\mathring{F} = \emptyset$. Notons que cela signifie que F est dense.
2. *La norme dérive du produit scalaire $(A|B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\mathsf{T} B)$. Soit $M \in F$, on a $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$. On a $(M|I_n) = \mathrm{Tr}(M) = 0$ car M est nilpotente. Donc $\|M - I_n\|^2$ est minimale pour $\|M\|^2$ minimale, donc pour $M = 0 \in F$. Donc $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$ (et la distance est atteinte pour $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).*

Solution 6.13.

1. *$A \mapsto \det(A)$ est continue et $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est donc ouvert. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = A - \frac{1}{p+1} I_n$. Comme $\mathrm{Sp}(A)$ est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \geqslant N$, $\frac{1}{p+1} \notin \mathrm{Sp}(A)$. Donc pour tout $p \geqslant N$, $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$, et $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$ donc $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
2. *On fixe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On écrit $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Comme, à B fixé, $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a le résultat par densité.*

Solution 6.14.

1. *On a $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u) \circ v_p = \frac{1}{p}(id_E - u^p)$, donc $\|v_p \circ (id_E - u)\| \leqslant \frac{1}{p}(\|id_E\| + \|u^p\|) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.*
   Soit $x \in \ker(u - id_E) \cap \mathrm{Im}(u - id_E)$, on a $u(x) = x$ et il existe $y \in E$, $x = (u - id_E)(y)$. On a $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$ et $v_p(x) = v_p \circ (u - id_E)(y) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ d'où $x = 0$. Le théorème du rang permet de conclure.

2. *Soit* $x \in E$, *on écrit* $x = x_1 + x_2$ *avec* $\Pi(x) = x_1$ *et* $x_2 = (u - id_E)(y_2)$. *Alors* $v_p(x) = x_1 + v_p \circ (u - id_E)(y_2) \xrightarrow[p\to+\infty]{} x_1 = \Pi(x)$.

Solution 6.15.

1. *Pour tout* $x \in A$, $f_n(x) \in A$ *car* A *est convexe. Soit* $(x, y) \in A^2$, *on a*

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|f(x) - f(y)\| \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|x - y\|$$

Donc f_n *est* $(1 - \frac{1}{n})$*-lipschitzienne. On forme*

$$\begin{array}{rccl} g_n : & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|f_n(x) - x\| \end{array}$$

qui est continue. Soit $x_n \in A$ *telle que* $g_n(x_n) = \min_{x\in A} g_n(x)$ *(existe car* A *est compact et* g_n *continue). On a* $x_n \in A$, *d'où* $f_n(x_n) \in A$ *et*

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|f_n(x_n) - x_n\| = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)g_n(x_n)$$

Si $g_n(x_n) \neq 0$, *alors on aurait* $g_n(f(x_n)) < g_n(x_n)$ *ce qui n'est pas possible. Donc* $g_n(x_n) = 0$ *et* $f_n(x_n) = x_n$.
Soit y_n *un autre point fixe, on a*

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\|x_n - y_n\|$$

donc $x_n = y_n$.

2. *On a* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *et on extrait (car* A *est compact) et on a*

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in A$$

On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)}f(x_0)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} + \underbrace{\Big(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\Big)f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)}$$

par continuité de f. *Donc* $f(x) = x$.

3. *Soit* $(x, y) \in A^2$, *points fixes de* f, *et* $t \in [0, 1]$, *on pose* $z = tx + (1 - t)y$. *On a*

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|f(x) - f(y)\| \\ &\leqslant \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| \\ &\leqslant \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= (1 - t)\|x - y\| + t\|x - y\| \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

On a donc égalité partout : $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$ *et* $\|f(x) - f(z)\| = \|x - z\|$, $\|f(z) - f(y)\| = \|z - y\|$ *car* f *est* 1*-lipschitzienne.*

Comme la norme est euclidienne, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $f(x) - f(z) = \lambda(f(z) - f(y))$ *d'où* $f(x) + \lambda f(y) = (\lambda + 1)f(z)$ *d'où* $f(z) = \frac{x+\lambda y}{\lambda+1} = t'x + (1-t')y$ *avec* $t' = \frac{1}{\lambda+1} \in [0,1]$. *En reportant, on a*

$$\|f(x) - f(z))\| = \|x - t'x - (1-t')y\| = (1-t')\|x-y\| = \|x - z\| = (1-t)\|x-y\|$$

Si $x \neq y$, *alors* $t = t'$ *et* $f(z) = tx + (1-t)y = z$.

4. *Soit dans* $\mathbb{R}^2$, $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} = [-1,1]^2 = A$. *Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & (x, |x|) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)\|_\infty &= \|(x_1,|x_1|)(x_2,|x_2|)\|_\infty \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, \big||x_1| - |x_2|\big|\} \\ &= |x_1 - x_2| \\ &\leqslant \|(x_1,y_1) - (x_2,y_2)\|_\infty \end{aligned}$$

Donc f *est 1-lipschitzienne, on a* $f(x,y) = (y,x)$ *si et seulement si* $y = |x|$. *Donc ici,* F *n'est pas convexe.*

Solution 6.16.

1. *On a pour tout* $(x,y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *et par récurrence, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$. *Pour* $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, *on a* $f(qrx) = qf(rx) = f(px) = pf(x)$ *donc* $f(rx) = rf(x)$. *Par densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et continuité de* f, *on a pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. *Donc* f *est linéaire.*

   Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans* $\mathbb{C}$.

2. *On étudie la série, pour* x *fixé de terme général*

$$\|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| = \frac{1}{2^n}\|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}$$

   qui est donc convergente. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

3. *On a* $v_0(x) = f(x)$, *donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) = g(x) - f(x)$. f *étant continue,* v_n *l'est aussi, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *comme pour tout* $x \in E$, $\|(v_{n+1} - v_n)(x)\| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}$, *donc* g *est continue.*

4. *On a, pour tout* $(x,y) \in E^2$,

$$\|v_n(x+y) - v_n(x) - v_n(y)\| = \|\frac{1}{2^n}f(2^n(x+y)) - \frac{1}{2^n}(f(2^n x) + f(2^n y))\| \leqslant \frac{M}{2^n}$$

   Donc quand $n \to +\infty$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

   On a pour tout $x \in E$,

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x)\right\|\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M$$

Soit maintenant h linéaire continue telle que $h-f$ soit bornée, soit $M' = \sup_{x\in E} \|h(x)-f(x)\|$. On a donc

$$\|v_n(x) - h(x)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^n} h(2^n x) \right\| \leqslant \frac{M'}{2^n}$$

car h est linéaire. Donc quand $n \to +\infty$, $g(x) = h(x)$ car $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = g(x)$.

Solution 6.17. *En particulier, pour $t = f(0)$, $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{x \in E \mid f(x) = f(0)\}$ est borné (car compact). Donc il existe A tel que $f^{-1}(\{f(0)\}) \subset \overline{B(0,A)}$. Par contraposée, pour tout $x \in E$, si $\|x\| > A$, alors $f(x) \neq f(0)$.*

On montre alors que $E \setminus \overline{B(0,A)}$ est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout $x \in E \setminus \overline{B(0,A)}$, $f(x) > f(0)$ soit $f(x) < f(0)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on se place dans le cas $f(x) > f(0)$. Comme on est en dimension finie sur $\overline{B(0,A)}$ compact, f atteint son minimum et ce minimum est plus petit que $f(0)$, c'est donc un minimum global.

Remarque 6.6. C'est faux pour $n = 1$. Contre-exemple : $f = id_{\mathbb{R}}$.

Solution 6.18. *Si c'était le cas, on prend un cercle $\mathcal{C}$ compact (et connexe par arcs). $f(\mathcal{C})$ est compact connexe par arc dans $\mathbb{R}$. On note $f(\mathcal{C}) = [a,b]$ (avec $a < b$ car f injective). Si $x \in \mathcal{C}$ est tel que $f(x) = \frac{a+b}{2}$, on $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a,b] \setminus \left\{\frac{a+b}{2}\right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$ donc une telle fonction n'existe pas.*

Solution 6.19.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_{l^1} = 1$ et $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leqslant |||\varphi|||$ donc $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On note $M = \sup |K_n| \leqslant |||\varphi|||$.*
   Soit maintenant $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

   $$\left\| u - \sum_{n=0}^{N} u_n e_n \right\|_1 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

   (reste d'une série convergente). Par continuité de φ, on a donc

   $$|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n||K_n| \leqslant M\|u\|_1$$

   Ainsi, $|||\varphi||| \leqslant M$ et donc $|||\varphi||| = M$.
2. *F est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. On définit*

   $$\begin{array}{rccc} \varphi : & l^1 & \to & \mathbb{R} \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{array}$$

   Elle est bien définie car $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle est linéaire, et continue car $|\varphi(u)| \leqslant \|(K_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$.
   Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(e_n) = K_n$. Donc $F(\varphi) = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et F est surjective. Donc F est une isométrie bijective et le dual topologique de l^1 est équivalent à l^∞.

Solution 6.20.

1. *Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $K = \ker(\varphi)$/ Si F est dense, φ est discontinue. Soit $(a, b) \in (E \setminus H)^2$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $b - a$ (existe car H est dense). La suite $(a+x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(a+x_n) = \varphi(a) \neq 0$, et pour $t \in [0, 1]$, $\varphi(t(a + x_n) + (1 - t)(a + x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$. Donc $[a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H$.*
   Soit $\gamma : [0, 1] \to E \setminus H$ telle que
   $$\begin{cases} \gamma(t) = \alpha_n t + \beta_n \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) = b & \\ \gamma(t) = a + tx_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$
   On cherche à définir α_n et β_n : on veut $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = a + x_n$ et $\gamma(1 - \frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$ (pour la continuité en se raccordant au x_n). En résolvant le système, on trouve $\alpha_n = n(n + 1)(x_n - x_{n+1})$ et $\beta_n = a + x_n - (n - 1)(n + 1)(x_n - x_{n+1})$.
   Soit alors $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$: $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant N$, pour tout $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}[$, $\gamma(t) \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$ par convexité de la boule. Donc $\lim\limits_{t\to 1} \gamma(t) = b$ et γ est continue. Donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.
2. *Soit φ une forme linéaire telle que $\ker(f) = H$ est fermé. Alors φ est continue (à redémontrer). Soit $x \in E\setminus H$, on a $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $E \setminus H$ était connexe par arcs, φ s'annulerait sur $E \setminus H$ ce qui n'est pas vrai. Donc $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.*
3. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si H est dense alors $E\setminus H$ est connexe par arc d'après la première question. Si H est fermé, soit φ une forme linéaire continue telle que $\ker(f) = H$. Soit $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$.*
   - *Si $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_-^*$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1 - t)x_2}_{\in E\setminus H}) \neq 0$ et on peut relier directement x_1 et x_2.*
   - *Sinon, il existe $\theta \in \mathbb{R}, (\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\varphi(x_1) = \rho e^{i\theta}$ et $\varphi(x_2) = \rho' e^{i(\theta+\pi)}$. Alors $x_3 = ix_1$ est tel que $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$ et $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$ (on contourne l'origine par une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$). Par conséquent, on peut utiliser x_3 pour relier x_1 et x_2 donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.*

Solution 6.21. *Soit*
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ((x, \sin(\frac{1}{x}))) \end{array}$$
φ est continue et $\Gamma)\varphi(\mathbb{R}_+^*)$ est connexe par arcs.

On a $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$ avec $\Gamma' = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$. En effet, pour tout $y \in [-1, 1]$, on pose $x_k = \frac{1}{\arcsin(y)+2k\pi}$. On a $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ donc $(0, y) = \lim\limits_{k\to=+\infty} (x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \overline{\Gamma}$.

Réciproquement, si $(x, y) \in \overline{\Gamma}$, il existe $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ avec $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ et $y = \lim\limits_{k\to+\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$. Si $x > 0$, par continuité, $y = \sin(\frac{1}{x})$ et $(x, y) \in \Gamma$. Si $x = 0$, $y \in [-1, 1]$ donc $(x, y) \in \Gamma'$.

Si $\overline{\Gamma}$ est connexe par arcs, il existe
$$\begin{array}{rccl} \gamma : & [0, 1] & \to & \overline{\Gamma} \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

continue telle que $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. La première projection $t \mapsto x(t)$ est continue avec $x(0) = 0$ et $x(1) = \frac{1}{\pi}$. On définit maintenant $t_1 = \sup\{t \in [0,1] \mid x(t) = 0\}$. Par continuité, $x(t_1) = 0$ et donc $t_1 < 1$. Donc pour tout $t > t_1$, $x(t) > 0$ et $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$ pour $t > t_1$ et $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ avec $y_1 \in [-1, 1]$.

Or, -1 et 1 n'appartiennent pas simultanément à $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. On peut supposer que $1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Comme γ est continue, il existe $t_2 > t_1$ tel que pour tout $t \in]t_1, t_2]$, $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Or $x(t_2) > 0$ et $x(t_1) = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $t_0 \in]t_1, t_2]$ tel que $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ ce qui contredit ce qui précède.

Donc $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs.

Solution 6.22.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$ car u_n est le barycentre de $(a, T(a), \dots, T^n(a))$ et K est convexe. Comme K est compact, on peut extraire $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} u \in K$. Alors*

$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n) + 1}(id_E - T^{\sigma(n)+1})(a)$$

d'où

$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leqslant \frac{1}{\sigma(n) + 1} \times 2M \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

avec $M = \sup_{x \in K} \|x\|$ (existe car K est compact donc borné). Par continuité de T, on a $T(u) = u$.

2. *Posons $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$ fermé car $K' = K \cap \left(\underbrace{(id_E - T)}_{\text{continu}}^{-1}\{0\}\right)$. Donc K' est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout $(u_1, u_2) \in K'^2$, pour tout $t \in [0,1]$, par linéarité de T, on a*

$$T(tu_1 + (1-t)u_2) = tu_1 + (1-t)u_2$$

donc K' convexe. De plus, comme $U \circ T = T \circ U$, pour tout $u \in K'$, on a $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$ donc $U(u) \in K'$. On applique alors la question 1 à K' est il existe $y \in K'$: $U(y) = y$ et $T(y) = y$.

Solution 6.23.

1. *C'est le théorème du rang car $\mathrm{rg}(u) \leqslant n \leqslant p - 2$, et $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0\}$ est de dimension $p - 1$ donc $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$ (formule de Grassmann).*
2. *On a*

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = x$$

et

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + t \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

Soit $I_+ = \{i \in \{1,\ldots,p\} \mid \alpha_i > 0\}$ *et* $I_- = \{i \in \{1,\ldots,p\} \mid \alpha_i < 0\}$. *On a* $I_+ \neq \emptyset$ *et* $I_- \neq \emptyset$ *car* $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 0$ *et* $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p) \neq (0,\ldots,0)$. *Soit* $t \geqslant 0$. *Pour tout* $i \in I_+$, $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$. *Pour* $i \in I_-$, $\lambda_i + t\underbrace{\alpha_i}_{<0} \geqslant 0$ *si et seulement si* $t \leqslant -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$. *Prenons alors*

$$t = \min_{i\in I_-}\Big(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\Big)$$

On au aussi pour tout $i \in I_-$, $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$ *et il existe* $i_0 \in I_-$ *tel que* $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$.

3. *Par récurrence descendante, on se ramène à n+1 points car si* x *est barycentre de* p *points avec* $p \geqslant n+2$, *alors il est barycentre de* $p-1$ *points.*
4. *Soit* $A = \{(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ *fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit*

$$\begin{array}{cccc} f: & A \times K^{n+1} & \to & \mathrm{conv}(K) \\ & ((\lambda_1,\ldots,\lambda_n),(x_1,\ldots,x_{n+1})) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array}$$

   f *est surjective et continue, donc* $\mathrm{conv}(K)$ *est l'image continue d'un compact donc* $\mathrm{conv}(K)$ *est compact.*

Solution 6.24. *Pour tout* $u \in A_p$, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ *distincts et* u *est diagonalisable. Réciproquement, si* u *est diagonalisable et* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ *alors dans une base la matrice de* u *est diagonale avec des* α_i *(éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc* $u \in A_p$.

Si $u \in A_p$, *on écrit donc le polynôme caractéristique de* u

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X-\alpha_i)^{m_i}$$

avec $0 \leqslant m_i \leqslant \dim(E) = n$ *et* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$. $u \mapsto \chi_u$ *est continue. Pour* $(m_1,\ldots,m_r) \in \{0,\ldots,n\}^r$ *tel que* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$, *notons*

$$A_{m_1,\ldots,m_r} = \Big\{u \in A_p \;\Big|\; \chi_u = \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}$$

et

$$\Big[u \mapsto \chi_u(A_p)\Big] = \Big\{ \bigcup_{(m_1,\ldots,m_r)\in D_{n,r}} \Big\{\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}\Big\}\Big\}$$

où

$$D_{n,r} = \{(m_1,\ldots,m_r) \in \{0,\ldots,n\}^r \;\Big|\; \sum_{i=1}^{r} m_i = n\}$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires,
si $(m_1,\ldots,m_r) \neq (m_1',\ldots,m_r')$, *alors* $A_{m_1,\ldots,m_r}$ *et* $A_{m_1',\ldots,m_r'}$ *ne sont pas dans la même composante connexe par arcs car*

$$\Big[u \mapsto \chi_u\Big(A_{m_1,\ldots,m_p} \bigcup A_{m_1',\ldots,m_r'}\Big)\Big] = \underbrace{\Big\{\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}\Big\}\bigcup\Big\{\prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i'}\Big\}}_{\text{pas connexe par arcs}}$$

Si $\gamma\colon [0,1]\to A_p$ *est continue,* $t\mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t)+a_1(t)X+\cdots+a_{n-1}(t)X^{n-1}+X^n$ *est continue sur* $[0,1]$ *et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.* $a_i\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ *continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.*

Soit $u_0\in A_{m_1,\dots,m_r}$*, soit* $u\in A_{m_1,\dots,m_r}$*, alors il existe une base* $\mathcal{B}_0$ *base de* E *telle que* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$ *soit diagonale avec des* α_1 *sur les* m_1 *premières lignes de la diagonale,* α_2 *sur les* m_2 *lignes suivantes, etc. Soit* $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$*.* M *est semblable à* M_0 *donc il existe* $P\in GL_n(\mathbb{C})$ *telle que* $M = PM_0P^{-1}$*.*

Or $GL_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs, donc il existe* $\varphi\colon [0,1]\to GL_n(\mathbb{C})$ *continue telle que* $\varphi(0) = P$ *et* $\varphi(1) = I_n$*. On pose alors*

$$\begin{array}{cccc}\Phi: & [0,1] & \to & A_{m_1,\dots,m_r}\\ & t & \mapsto & \varphi(t)M_0\varphi^{-1}(t)\end{array}$$

Alors $A_{m_1,\dots,m_r}$ *est connexe par arcs.*

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \{(m_1,\dots,m_r)\in\{0,\dots,n\}^r \;\Big|\; \sum_{i=1}^r m_i = n\}$$

qui vaut $\binom{m+r-1}{r-1}$ *possibilités (place* n *points sur une droite et les séparer avec* $r-1$ *barres : le nombre de points dans chaque segment donne un* m_i*, il y a* $m+r-1$ *possibilités pour placer les* $r-1$ *barres).*

Solution 6.25.

1. *Pour tout* $i\in\{1,\dots,n\}$*,* $|AX|_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j \geqslant 0$*. Si* $|AX|_i = 0$ *alors pour tout* $j\in\{1,\dots,n\}$*,* $\underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j = 0$ *donc* $x_j = 0$*, impossible car* $X\neq 0$*.*
2. *Si* $|AX| = A|X|$*. On a pour tout* $i\in\{1,\dots,n\}$*,*
$$\Big|\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j\Big| = \sum_{j=1}^n a_{i,j}|x_j|$$
donc les $(a_{i,j}x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ *ont tous même argument. On prend* $\theta = \arg(x_j)$*.*
3. K *est fermé et borné en dimension finie : c'est un compact. On a* $I_x\neq\emptyset$ *car* $AX\geqslant 0$ *donc* $0\in I_x$*. Soit* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\in I_x^{\mathbb{N}}$ *convergeant vers* $t\in\mathbb{R}$*. Pour tout* $k\in\mathbb{N}$*,* $AX - t_kX\geqslant 0$ *donc pour tout* $i\in\{1,\dots,n\}$*,* $(AX-t_kX)_i\geqslant 0$ *et par passage à la limite,* $AX - tX\geqslant 0$ *donc* I_x *est fermé.*
Si $t\in I_x$*,*
$$|tX|_1 = t = \sum_{i=1}^n t\underbrace{x_i}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j}_{=(AX)_i} \leqslant n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$$
car $\sum_{j=1}^n x_j = 1$*. On note* $M = n\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$*.*
4. *Pour tout* $x\in K$*,* $\theta(X)\leqslant M$ *donc* θ *est bien borné sur* K*. Par définition de* r_0*, il existe* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}\in K^{\mathbb{N}}$ *tel que* $\lim\limits_{k\to+\infty}\theta(X_k) = r_0$*. On note* $\theta(X_k) = t_k$*. Comme* K *est compact, il*

existe $\sigma\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $X_{\sigma(k)}$ converge vers $X^+\in K$. A priori, $\theta(X^+)\leqslant r_0$. On a $AX_{\sigma(k)}-t_{\sigma(k)}X_{\sigma(k)}\geqslant 0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ donc par passage à la limite, $AX^+-r_0X^+\geqslant 0$ et donc $r_0\leqslant\theta(X^+)$ donc $r_0=\theta(X^+)$.

5. *Soit $Y=A^+-r_0X^+\geqslant 0$. Si $Y\neq 0$, alors $AY>0$ d'après la question 1 donc*

$$AY = A\underbrace{(AX^+)}_{>0} - r_0\underbrace{(AX^+)_{>0}} > 0$$

On a $AY>\varepsilon AX^+$ si et seulement si pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, $|AY|_i>\varepsilon|AX^+|_i$ (car $AY>0$). On pose alors

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\min_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{|AY|_i}{|AX^+|_i}$$

On a alors $AY-\varepsilon AX^+>0$ d'où

$$A\underbrace{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}_{\in K} - (r_0+\varepsilon)\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} > 0$$

donc $r_0+\varepsilon\in I_{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}$ c'est-à-dire

$$r_0+\varepsilon\leqslant\theta\Big(\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}\Big)\leqslant r_0$$

ce qui est impossible. Nécessairement $Y=0$.

6. *Pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, on a*

$$|AV|_i=\Big|\sum_{j=1}^n a_{i,j}v_j\Big|\leqslant\sum_{i=1}^n a_{i,j}|v_j|=(A|V|)_i$$

donc $|\lambda|=|AV|\leqslant A|V|$. De plus, $|V|\in K$ donc $|\lambda|\leqslant\theta(|V|)\leqslant r_0$. Notons que cela implique que le rayon spectral de A est $\rho(A)$ est plus petit que r_0 et que l'on a même égalité.

7. *Si $|\lambda|=r_0$, on a $|\lambda|=\theta(|V|)=r_0$ et d'après la question 5 on a $A|V|=r_0|V|=|AV|$. D'après la question 2, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $V=e^{i\theta}|V|$. Or*

$$AV=\lambda V=e^{i\theta}A|V|=e^{i\theta}r_0|V|$$

et comme $|K|\in K,|V|\neq 0$ et on a donc $\lambda=r_0$.

8. *Soit $V\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|V\|_1=1$ et $AV=r_0V$. D'après la question précédente, on a $V=e^{i\theta}|V|$ et $A|V|=r_0|V|$. Soit alors $t\in\mathbb{R}$, on a*

$$A(X^++t|V|)=r_0(X^++t|V|)$$

Notons maintenant que si $Y\geqslant 0$ avec $Y\neq 0$ vérifie $AY=r_0Y$, alors $Y>0$. En effet, d'après la première question, $AY>0$. On a $r_0\neq 0$ car sinon $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}=\{0\}$ et $A^n=0$ ce qui est impossible car ses coefficients sont strictement positifs. D'où $Y>0$.

Ainsi, par définition de X^+, on a $X^+ > 0$ et $|V| > 0$. On a alors

$$(X^+)_i + t|v_i| \geqslant 0$$

si et seulement si

$$t \geqslant -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

On prend

$$t = \min_{1\leqslant i\leqslant n} -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

Finalement, on a $X^+ + t|V| \geqslant 0$ et une de ses coordonnées vaut 0 (car on a pris le minimum sur les i). Nécessairement, $X^+ + t|V| = 0$ (car $A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$) et donc $|V| \in \mathbb{R}X^+$. Donc $V = e^{i\theta}|V| \in \mathbb{C}X^+$ et ainsi

$$\dim(\ker(A - r_0 I_n)) = 1$$

Solution 6.26. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & U\times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$$

On a

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x',y') = |\|x-y\|-\|x'-y'\|| \leqslant \|(x-y)-(x'-y')\| \leqslant \|x-x'\|+\|y-y'\| \leqslant 2\|(x,y)-(x',y')\|_\infty$$

donc φ est continue.

$U \times V$ est compact, donc il existe $(x_1, y_1) \in (U \times V)$ telle que $\varphi(x_1, y_1) = \min_{(x,y)\in U\times V} \varphi(x, y)$. Comme U et V sont disjoints, $x_1 \neq y_1$ et $\varphi(x_1, y_1))d(U, V) > 0$.

Soit $\alpha = \frac{d(U,V)}{3}$. On pose $U' = \{x \in E \mid d(x, U) < \alpha\}$ et $V' = \{x \in E \mid d(x, V) < \alpha\}$. $x \mapsto \|x\|$ est continue car 1-lipschitzienne donc U' est V' sont des ouverts et on a bien $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Soit ensuite $x \in U' \cap V'$, on a $d(x, U) < \alpha$ et $d(x, V) < \alpha$ donc il existe $(u, v) \in U \times V$, $d(x, u) < \alpha$ et $d(x, v) < \alpha$. Alors $d(u, v) \leqslant 2\alpha$ ce qui est absurde. Donc $U' \cap V' = \emptyset$.

Solution 6.27.

1. *f est 1-lipschitzienne donc est continue. On forme*

$$\begin{array}{rccc} g: & K & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|x-f(x)\| \end{array}$$

g est continue, K est compact donc il existe $a \in K$ tel que $g(a) = \min_{x\in K} g(x)$. Si $a \neq f(a)$, alors $\|f(a)-f^2(a)\| = g(f(a)) < \|a-f(a)\| = g(a)$ ce qui est impossible par définition de a. Donc $f(a) = a$. S'il existe $a' \neq a$ tel que $f(a') = a'$, alors $\|f(a)-f(a')\| = \|a-a'\| < \|a-a'\|$ ce qui est impossible. Donc a est unique.

2. *S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = a$ alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\|u_{n+1} - a\| = \|f(u_n) - f(a)\| < \|u_n - a\|$$

donc la suite $(\|u_n - a\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+$ donc elle converge vers $l \geqslant 0$. Par compacité de K, il existe une extraction σ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha \in K$. Par continuité,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{\sigma(n)} - a\| = \|\alpha - a\| = l$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \| \underbrace{u_{\sigma(n)+1}}_{f(u_{\sigma(n)}} - f(a)\| = \|f(\alpha) - f(a)\| = l = \|\alpha - a\|$$

par continuité de f. Ainsi, on a $\alpha = a$ et $l = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.

3. *f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x < y \in \mathbb{R}^2$, il existe $z \in]x, y[$ tel que (égalité des accroissements finis)*

$$\Big|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\Big| = |f'(z)| = \Big|\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\Big| < 1$$

donc f vérifie bien l'hypothèse de contraction. Cependant, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2+1} > a$ donc pas de point fixe. La démonstration tombe en défaut car $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Solution 6.28. *La condition est équivalente à pour tout $(M_1, M_2, M_3) \in K_1 \times K_2 \times K_3$, M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.*
On forme alors

$$\begin{array}{rccc} f: & K_1 \times K_2 \times K_3 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (M_1, M_2, M_3) & \mapsto & R(M_1, M_2, M_3) \end{array}$$

où $R(M_1, R_2, M_3)$ est le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par M_1, M_2 et M_3.

On note $M_i = (x_i, y_i)$ et Δ_i la médiatrice de $[M_j M_k]$. Établissons une équation de Δ_i. On a $M = (x, y) \in \Delta_i$ si et seulement si $\|\vec{MM_j}\|_2^2 = \|\vec{MM_k}\|_2^2$ si et seulement si $(\vec{MM_j} + \vec{MM_k} \mid \vec{MM_j} - \vec{MM_k}) = 0$ (produit scalaire), si et seulement si $(\vec{MC_i} \mid \vec{M_jM_k}) = 0$ où C_i est le milieu de $[M_j M_k]$, si et seulement si (calculer le produit scalaire)

$$\Big(\frac{x_j + x_k}{2} - x\Big)(x_k - x_j) + \Big(\frac{y_j + y_k}{2} - y\Big)(y_k - y_j) = 0$$

Soit alors $M_0 = (x_0, y_0)$ le centre du cercle circonscrit. $M_0 \in \Delta_i \cap \Delta_j$ avec $i \neq j$. Par exemple, $M_0 \in \Delta_3 \cap \Delta_1$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Big(\frac{x_2 + x_1}{2} - x_0\Big)(x_2 - x_1) + \Big(\frac{y_2 + y_1}{2} - y_0\Big)(y_2 - y_1) & = & 0 \\ \Big(\frac{x_3 + x_2}{2} - x_0\Big)(x_3 - x_2) + \Big(\frac{y_3 + y_2}{2} - y_0\Big)(y_3 - y_2) & = & 0 \end{array}\right.$$

si et seulement si ($L_2 \leftarrow L_1(x_3 - x_2) + L_2(x_1 - x_2)$)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) & = & \dfrac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} \\ x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) & = & \dfrac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2} \end{array}\right.$$

si et seulement si ($L_1 \leftarrow L_2(y_2-y_1)+L_1(y_2-y_3)$)

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_0 & = & \dfrac{\frac{x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2}{2}(y_2-y_3)-(y_1-y_2)\frac{x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2}{2}}{(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)} \\ y_0 & = & \dfrac{\frac{x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2}{2}(x_1-x_2)-(x_2-x_3)\frac{x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2}{2}}{(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)} \end{array}\right.$$

et $R(M_1,M_2,M_3)=\sqrt{(x_0-x_3)^2+(y_0-y_3)^2}$. *En reportant,* f *est continue sur* $K_1\times K_2\times K_3$ *compact donc* f *atteint son minimum.*

Solution 6.29.

1. *Pour tout* $f\in E$, $T(f)$ *est* $\mathcal{C}^1$ *et* $(T(f))'=f$, $T(f)(0)=0$. T *est clairement linéaire, soit ensuite* $x\in[0,1]$, *on a*

$$|T(f)(x)|=\left|\int_0^x f(t)dt\right|\leqslant\int_0^x|f(t)|dt\leqslant x\|f\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$$

   Donc $\|T(f)\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$ *donc* T *est continue et* $|||T|||\leqslant 1$. *Pour* $f=1$, *on a* $\|f\|_\infty=1$ *et pour tout* $x\in[0,1]$, $T(f)(x)=x$ *donc* $\|T(1)\|_\infty=1$. *Ainsi,* $|||T|||=1$.

2. id_E-T *est continue. Soit* $(f,g)\in E^2$, *on a* $g=f-T(f)$ *si et seulement si* $g=y'-y$ *et* $y(0)=0$. *On a* $g(x)e^{-x}=\underbrace{e^{-x}(y'(x)-y(x))}_{(e^{-x}y(x))'}$ *donc en intégrant de 0 à* x *on a*

$$y(x)=e^x\int_0^x e^{-t}g(t)dt$$

   Donc $T(f)$ *vérifie le problème de Cauchy si et seulement si pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $T(f)(x)=e^x\int_0^x e^{-t}g(t)dt$ *si et seulement si pour tout* $x\in[0,1]$,

$$f(x)=g(x)+e^x\int_0^x e^{-t}g(t)dt$$

   Donc id_E-T *est bijective. Enfin, on a pour tout* $x\in[0,1]$,

$$|f(x)|\leqslant|g(x)|+\left|\int_0^x g(t)e^{x-t}dt\right|\leqslant\|g\|_\infty(1+xe^x)\leqslant\|g\|_\infty(1+e)$$

   Ainsi,

$$\|f\|_\infty=\|(id_E-T)^{-1}(g)\|_\infty\leqslant\|g\|_\infty(1+e)$$

   donc $(id_E-T)^{-1}$ *est continue. Ainsi,* id_E-T *est un homéomorphisme.*

Solution 6.30.

(i)⇒ (ii) $f^{-1}(K)$ *est ferlé car* f *est continue.* K *est borné, donc il existe* $M>0$, *tel que pour tout* $y\in K$, $\|y\|\leqslant M$. *Donc pour tout* $x\in f^{-1}(K)$, $\|f(x)\|\leqslant M$. *Par contraposée de (i) pour* $A=M+1$, *il existe* $B>0$ *tel que* $\|f(x)\|<A\Rightarrow\|x\|<B$. *Donc pour* $x\in f^{-1}(K)$, $\|x\|<B$ *donc* $f^{-1}(K)$ *est borné. C'est donc un compact.*

(ii)$\Rightarrow$ *(i)* *Soit* $A \geqslant 0$. *Soit* $K = \overline{B(0,A)}$ *compact car fermé et borné en dimension finie. D'après (ii),* $f^{-1}(K)$ *est compact donc borné : il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| \leqslant B$. *Par contraposée, si* $\|x\| > B$ *alors* $x \notin f^{-1}(K)$ *et* $f(x) \notin K$ *donc* $\|f(x)\| > A$. *Ainsi,* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$.

Remarque 6.7. Exemple pour l'exercice précédent : les fonctions polynômiales non constantes.

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. *On note* $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x,y) \in I^2 \text{ et } |x-y| \leqslant h\}$.

1. ω_φ *est bien défini car* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2\|\varphi\|_\infty$*). Si* $0 < h \leqslant h'$*, alors* $A_h \subset A_{h'}$ *donc* $\sup(A_h) \leqslant \sup(A_{h'})$ *donc* $\omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h')$.
2. *Soit* $(h,h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$*, soit* $(x,y) \in I^2$ *tel que* $|x-y| \leqslant h+h'$ *(où on peut supposer que* $x \leqslant y$*).*
   — *Si* $y \in [x, x+h]$*, alors* $|x-y| \leqslant h$ *donc* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
   — *Si* $y \in [x+h, x+h+h']$, $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)-\varphi(x+h)|+|\varphi(x+h)-\varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h)+\omega_\varphi(h')$ *car* $|x-(x+h)| \leqslant h$ *et* $|x+h-y| \leqslant h'$.

   Donc $\omega_\varphi(h+h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. *Par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$*. Si* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*, on a* $\lambda h \leqslant (\lfloor \lambda \rfloor + 1)h$ *et par croissance et ce qui précède, on a*

$$\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (\lfloor \lambda \rfloor + 1)\omega_\varphi(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega_\varphi(h)$$

4. *Soit* $\varepsilon > 0$*.* φ *étant uniformément continue, il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $(x,y) \in I^2$*, si* $|x-y|\alpha$ *on a* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$ *et on a pour* $h \leqslant \alpha$*,* $\omega_\varphi(h) \leqslant \varepsilon$ *d'où* $\lim\limits_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0$.

   Soit alors $h_0 > 0$ *fixé et* $h > 0$,
   — *si* $h_0 \leqslant h$*, on a* $0 \leqslant \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leqslant \omega_\varphi(h-h_0)$.
   — *si* $h \leqslant h_0$*, on a* $0 \leqslant \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h_0-h)$.
   Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h)-\omega_\varphi(h_0)| \leqslant \omega_\varphi(|h_0-h|)$*. Donc on a bien* $\lim\limits_{h\to h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$.

   Donc ω_φ *est continue (et même uniformément).*

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires