*Solutions Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Algèbre Générale

Solution 1.1. *Soit $(x, y) \in G^2$. On a d'abord*

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x \cdot y)^{p+1}(x \cdot y)^{-p} \\ &= x^{p+1} \cdot y^{p+1} \cdot y^{-p} \cdot x^{-p} \\ &= x^{p+1} \cdot y \cdot x^{-p} \end{aligned} \tag{1.1}$$

On cherche maintenant à montrer que x^{p+1} et y commutent. On a

$$\begin{aligned} y^{p+2} \cdot x^{p+2} &= (y \cdot x)^{p+2} \\ &= (y \cdot x)^{p+1} \cdot y \cdot x \\ &= y^{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot y \cdot x \end{aligned}$$

Donc on a $y \cdot x^{p+1} = x^{p+1} \cdot y$. En reportant dans (1.1), on a $x \cdot y = y \cdot x$ et donc G est abélien.

Remarque 1.1.

- Pour $(\Sigma_3, \cdot)$, on a f_0, f_1 et f_6 des morphismes mais Σ_3 n'est pas commutatif.
- Si f_2 est un morphisme, alors on a $(x \cdot y)^2 = x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2$ d'où $y \cdot x = x \cdot y$.

Solution 1.2. *A est non vide car $\omega(e_G) = 1$ et $e_G \in A$. Soit $x \in A$ tel que $\omega(x) = 2p + 1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\begin{aligned} x^{2k} = e_G &\Leftrightarrow 2p + 1 \mid 2k \\ &\Leftrightarrow 2p + 1 \mid k \end{aligned}$$

d'après le théorème de Gauss.

Ainsi, $\omega(x^2) = 2p + 1$ et $x^2 \in A$, donc

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & A & \to & A \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est bien définie. Soit $x \in A$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2p+1} = e_G$ donc $x^{2p+2} = x$ d'où $(x^{p+1})^2 = x$. Il suffit donc de vérifier que x^{p+1} pour montrer que l'application est surjective. Comme A est fini, elle sera bijective.

On a $gr\{x^{p+1}\} \subset gr\{x\}$ *et* $(x^{p+1})^2 = x$ *donc* $gr\{x\} = gr\{x^{p+1}\}$ *donc* $\omega(x) = \omega(x^{p+1}) = 2p+1$ *et donc* $x^{p+1} \in A$.

Solution 1.3. *On note* $m = \theta(\sigma)$. *On suppose que* σ *se décompose en produit de cycle de longueur* $l_1, \dots, l_m$ *avec* $l_1 + \cdots + l_m = n$. *Comme*

$$(a_1, \dots, a_l) = [a_1, a_2] \circ [a_2, a_3] \circ \cdots \circ [a_{l-1}, a_l]$$

Donc σ *se décompose en* $\sum_{i=1}^{m}(l_i - 1) = n - m$ *transpositions. Montrons par récurrence sur* k, $\mathcal{H}(k)$*: "Un produit de* k *transpositions possède au moins* $n-k$ *orbites".*

Pour $k = 0$, $\sigma = id$ *possède* n *orbites.*

Pour $k = 1$, *soit* τ *une transposition, on a* $\theta(\tau) = n - 2 + 1 = n - 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, *supposons* $\mathcal{H}_k$, *soit* $\sigma \in \Sigma_n$ *qui se décompose en produit de* $k+1$ *transpositions.*

$$\sigma = \underbrace{\tau_1 \circ \dots \tau_k}_{\sigma'} \circ \tau_{k+1}$$

D'après $\mathcal{H}_k$, *on a* $\theta(\sigma') \geqslant n - k$. *Notons* $\tau_{k+1} = [a, b]$.

Si a *et* b *appartiennent à la même orbite. On note* $(a_1, \dots, a_r)$ *le cycle correspondant avec* $a_r = a$ *et* $a_s = b$ *où* $s \in \{1, \dots, n-1\}$. *On a*

$$\begin{cases} (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a,b](a_i) = a_{i+1} & \text{où } i \notin \{r, s\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a,b](a_r) = a_{s+1} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a,b](a_s) = a_1 \end{cases}$$

On n'a pas perdu d'orbites, donc $\theta(\sigma) \geqslant n - k - 1$.

Si a *et* b *n'appartiennent pas à la même orbite, notons* $(a_1, \dots, a_r)$ *et* $(b_1, \dots, b_s)$ *ces orbites avec* $a = a_r$ *et* $b = b_s$. *On a*

$$\begin{cases} \underbrace{(a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s]}_{\sigma''}(a_i) = a_{i+1} & \text{où } i \in \{1, \dots, r-1\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](b_j) = b_{j+1} & \text{où } j \in \{1, \dots, s-1\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](a_r) = b_1 \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](b_s) = a_1 \end{cases}$$

Donc

$$\sigma'' = (a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s)$$

On a perdu une orbite et donc $\theta(\sigma) \geqslant n - k - 1$. D'où le résultat par récurrence sur k.

Solution 1.4. *On note par $\overline{k}$ les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et par $\widetilde{l}$ les éléments de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Soit f un morphisme. On pose $f(\overline{1}) = \widetilde{x}$ où $x \in \{0, \ldots, m-1\}$. On a donc $nf(\overline{1}) = f(\overline{0}) = \widetilde{0}$.

On a donc $\widetilde{nx} = \widetilde{0}$ donc $m \mid nx$. On écrit $m = m_1(m \wedge n)$ et $n = n_1(m \wedge n)$. D'après le théorème de Gauss, on a donc $m_1 \mid x$. Donc $x = km_1$ avec $k \in \{0, \ldots, (n \wedge m) - 1\}$.

Réciproquement, soit $k \in \{0, \ldots, (n \wedge m) - 1\}$. On définit

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ & \overline{l} & \mapsto & \widetilde{lkm_1} \end{array}$$

Si $\overline{l} = \overline{l'}$, alors $n \mid l - l'$ et donc $nm_1 \mid (l - l')km_1$ puis $n_1(n \wedge m)m_1 \mid (l - l')km_1$ donc $m \mid (l - l')km_1$ d'où $\widetilde{lkm_1} = \widetilde{l'km_1}$ donc f est bien définie et c'est évidemment un morphisme.

Soit $k, k' \in \{0, \ldots, n \wedge m - 1\}$ avec $k \neq k'$. Si $\widetilde{km_1} = \widetilde{k'm_1}$ alors $m \mid (k - k')m_1$ et donc $n \wedge m \mid k - k'$ et $|k - k'| < n \wedge m$ donc $k = k'$ ce qui est absurde. Ainsi, les f_k sont distincts, on a donc $n \wedge m$ morphismes.

Remarque 1.2. Exemple pour l'exercice précédent : morphisme de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. On a $f(\overline{1}) = \widetilde{x}$ d'où $\widetilde{4x} = \widetilde{0}$ donc $3 \mid x$ d'où $x \in \{0, 3\}$. On a donc le morphisme trivial $f_0 \colon \overline{l} \mapsto \widetilde{0}$ et $f_1 \colon \overline{l} \mapsto \widetilde{3l}$.

Solution 1.5. *On considère $H = \{x \in G \mid x^2 = e_G\}$. Si $x \notin H$, alors $x^{-1} \neq x$ et donc $P = \prod_{x \in H} x$. H est le noyau du morphisme $x \mapsto x^2$ (morphisme car G est abélien) donc H est un sous-groupe. Soit K un sous-groupe de H et $a \in H \setminus K$. Montrons que $K \cup aK$ est un sous-groupe de H.*

On a $e_G \in K \cup aK$. Soit $x \in K \cup aK \subset H$, on a $x^{-1} = x \in K \cup aK$. Soit $(x_1, x_2) \in (K \cup aK)^2$, si $(x_1, x_2) \in K^2$,, c'est ok. Si $(x_1, x_2) \in (aK)^2$, on note $x_1 = a \cdot k_1$ et $x_2 = a \cdot k_2$ avec $(k_1, k_2) \in K^2$. On a $x_1 \cdot x_2 = a^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2 \in K$. Si $x_1 \in K$ et $x_2 \in aK$, alors $x_1 \cdot x_2 = a \cdot k_1 \cdot k_2 \in aK$. Donc $K \cup aK$ est un sous-groupe de H.

Soit $x \in K \cap aK$, il existe $(k_1, k_2) \in K^2$ tel que $k_1 = a \cdot k_2$ et $a \in K$ ce qui est impossible. Donc $K \cap aK = \emptyset$.

On construit alors par récurrence K_n : on pose $K_0 = \{e_G\}$ et à l'étape n, si $K_n = H$ on arrête, sinon il existe $a_{n+1} \in H \setminus K_n$ et on pose $K_{n+1} = K_n \cup a_{n+1}K$. Alors $|K_{n+1}| = 2|K_n|$. Comme H est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H = K_{n_0}$. On a alors $|H| = 2^{n_0}$.

Ainsi, si $n_0 = 0$, on a $H = \{e_G\}$ et $P = e_G$. Si $n_0 = 1$, on a $H = \{e_G, a_1\}$ et $P = a_1 \neq e_G$. Si $n_0 \geqslant 2$, comme chaque a_k apparaît un nombre pair de fois dans le produit, on a $P = e_G$.

Solution 1.6. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $(\overline{kx_0})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ ne sont pas deux à deux distincts. Donc il existe $l \neq l' \in \{0, \dots, n\}^2$ tel que $\overline{lx_0} = \overline{l'x_0}$ d'où $0 < |l - l'| \leqslant n$. Donc il existe $j \in \{1, \dots, n\}$ avec $jx_0 \in G$. Ainsi, $n!x_0 \in G$ (itéré de jx_0). Ce raisonnement est vrai pour $x = \frac{x_0}{n!}$ donc $x_0 \in G$. Ainsi, $G = \mathbb{R}$.*

Solution 1.7. *Soit f un isomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même. Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $f(\overline{k}) = kf\overline{1})$. Par isomorphisme, $\omega(f(\overline{1})) = \omega(\overline{1}) = n$. Notons alors $\overline{x} = f(\overline{1})$ avec $x \in \{0, dots, n-1\}$.*

Si $x \wedge n = 1$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ux + vn = 1$, donc $u\overline{x} = \overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$. Ainsi, $Zn\mathbb{Z} = gr\{\overline{x}\}$ (car les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des itérés de $\overline{1}$) donc $\omega(\overline{x}) = n$.

Réciproquement, si $\omega(\overline{x}) = n$, $\overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$ donc il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $u\overline{x} = 1 = \overline{ux}$. Donc $n \mid ux - 1$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathbb{Z}$ tel que $ux - 1 = vn$, d'où $ux + vn = 1$. D'après Bézout, on a $x \wedge n = 1$. Finalement, on a $\omega(\overline{x}) = n$ si et seulement si $x \wedge n = 1$.

Ainsi, les isomorphismes sont nécessairement de la forme

$$\begin{array}{rccc} f_x: & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{k} & \mapsto & \overline{kx} \end{array}$$

où $x \in \{0, \dots, n-1\}$ et $x \wedge n = 1$.

Réciproquement, si $x \in \{0, \dots, n-1\}$ est tel que $x \wedge n = 1$, f_x est évidemment un morphisme. Si $\overline{k} \in \ker(f_x)$, on a $f_x(\overline{k}) = \overline{0}$ si et seulement si $\overline{kx} = \overline{0}$ si et seulement si $n \mid kx$ et comme $n \wedge x = 1$, d'après le théorème de Gauss, on a $n \mid k$ donc $\overline{k} = \overline{0}$ donc $\ker(f_x) = \{\overline{0}\}$. Donc f_x est injective, donc bijective car $\left|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right| = \left|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right| = n$.

Solution 1.8. *Si $y \in \mathrm{Im}\varphi$, y possède $|\ker\varphi|$ antécédents. En effet, il existe $x_0 \in G$ tel que $y = \varphi(x_0)$. Pour tout $x \in G$, on a $\varphi(x) = y$ si et seulement si $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ si et seulement si $\varphi(x_0^{-1} \cdot x) = e_G$*

si et seulement si $x_0^{-1} \cdot x \in \ker \varphi$ *si et seulement si* $x \in x_0 \ker \varphi$*. Comme*

$$\begin{array}{rccc} g: & \ker \varphi & \to & x_0 \ker \varphi \\ & x & \mapsto & x \cdot x_0 \end{array}$$

est bijective, on a $|\ker \varphi| = |x_0 \varphi|$*. Ainsi, on a* $|G| = |\mathrm{Im}\varphi| \times |\ker \varphi|$.

Dans tous les cas, on a $\ker \varphi \subset \ker \varphi^2$ *et* $\mathrm{Im}\varphi^2 \subset \mathrm{Im}\varphi$*. On a ensuite*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\varphi^2 = \mathrm{Im}\varphi &\iff |\mathrm{Im}\varphi^2| = |\mathrm{Im}\varphi| \\ &\iff |\ker \varphi^2||\mathrm{Im}\varphi^2| = |\ker \varphi^2||\mathrm{Im}\varphi| = |G| = |\ker \varphi||\mathrm{Im}\varphi| \\ &\iff |\ker \varphi^2| = |\ker \varphi| \\ &\iff \ker \varphi^2 = \ker \varphi \end{aligned}$$

Solution 1.9. *On considère*

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^m \end{array}$$

l'exercice revient à montrer que f *est bijective. D'après le théorème de Bézout, il existe* $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $am + bn = 1$*. Soit* $y \in G$*, on a*

$$y^1 = y = y^{am+bn} = y^{am} \cdot \underbrace{y^{bn}}_{=e_G} = y^{am} = (y^a)^m$$

Donc f *est surjective et comme* G *est fini,* f *est bijective.*

Solution 1.10.

1. *On a* $e_G \in S_g$*, si* $(x, y) \in S_g^2$ *alors* $x \cdot y \cdot g = x \cdot g \cdot y = g \cdot x \cdot y$ *donc* $x \cdot y \in S_g$ *et si* $x \in S_g$ *alors* $x \cdot g = g \cdot x$ *implique* $g \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot g$ *en multipliant par l'inverse de* x *à gauche et à droite donc* $x^{-1} \in S_g$.
2. *Soit* $(h, h') \in G^2$*. On a* $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$ *si et seulement si* $g \cdot h^{-1} \cdot h' = h^{-1} \cdot h \cdot g$ *si et seulement si* $h^{-1} \cdot h \in S_g$ *si et seulement si* $h' \in hS_g$*. Or* $|hS_g| = |S_g|$ *car*

$$\begin{array}{rccc} I_h: & S_g & \to & hS_g \\ & x & \mapsto & h \cdot x \end{array}$$

est bijective de réciproque $I_{h^{-1}}$*. Soit la relation d'équivalence* $\mathcal{R}_0$ *sur* G *définie par* $h\mathcal{R}_0 h'$ *si et seulement si* $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$*. Chaque classe à* $|S_g|$ *éléments et il y y a* $|C(g)|$ *classes dans* G *d'où* $|G| = |S_g||C(g)|$.

3. *On a* $Z(G) = \cap_{g \in G} S_g$ *donc* $Z(G)$ *est un sous-groupe et pour tout* $g \in G$, $Z(G) \subset S_g$.

4. *Pour* $x \in G$, *on note* $\overline{x} = \{h \cdot x \cdot h^{-1} \mid h \in G\} = C(x)$.

   On a $|\overline{x}| = 1$ *si et seulement si pour tout* $h \in G$, $h \cdot x \cdot h^{-1} = x$ *si et seulement si* $x \in Z(G)$.

   Soit $\mathcal{A}$ *une partie de* G *telle que* $(\overline{x})_{x \in \mathcal{A}}$ *forme une partition de* $G \setminus Z(G)$. *On a*

$$|G| = p^\alpha = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)|$$

   Si $x \in \mathcal{A}$, $x \notin Z(G)$ *donc* $|S_x| < |G|$ *(car* $x \in Z(G)$ *si et seulement si* $S_x = G$*) et donc*

$$|C(x)| = \frac{|G|}{|S_x|}$$

   d'après 2. Donc $|C(x)| = p^\beta$ *avec* $\beta \in \{1, \ldots, \alpha\}$ *car* $|C(x)| \neq 1$. *Donc*

$$p \,\Big|\, \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)|$$

   d'où

$$p \mid |Z(G)|$$

   donc $|Z(G)| \neq 1$.

5. *On a*

$$p^2 = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)|$$

   D'après la question 4, on a $|Z(G)| \neq 1$ *et* $|Z(G)| \mid |G|$.

   Si $Z(G) \neq G$, *alors* $|Z(G)| = p$. *Pour* $x \in \mathcal{A}$, $Z(G) \subset S_x \neq G$ *donc* $|S_x| = p$ *(car* $|S_x| \mid |G|$*) et donc* $Z(G) = S_x$. *Or* $x \in S_x$ *et* $x \notin Z(G)$ *ce qui n'est pas possible, donc* $|Z(G)| = p^2$ *et* $Z(G) = G$. *Donc* G *est abélien.*

   S'il existe un élément d'ordre p^2. G *est cyclique et est isomorphe à* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. *Sinon, pour tout* $x \in G \setminus \{e_G\}$, *on a* $\omega(x) = p$. *Soit* $x_1 \in G \setminus \{e_G\}$ *et* $x_2 \in G \setminus gr\{x_1\}$. *Soit*

$$\begin{array}{cccc} f: & \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2 & \to & G \\ & (\overline{k}, \overline{l}) & \mapsto & x_1^k \cdot x_2^l \end{array}$$

   f *est bien définie car si* $\overline{k} = \overline{k'}$ *et* $\overline{l} = \overline{l'}$, *on a* $p \mid k - k'$ *et* $p \mid l - l'$ *donc* $x_1^k \cdot x_2^l = x_1^{k'} \cdot x_2^{l'}$. *Comme* G *est abélien,* f *est un morphisme.*

Montrons que f est injective. Soit $(\overline{k},\overline{l}) \in \ker(f)$ avec $(k,l) \in \{0,\dots,p-1\}^2$, on a $x_1^k \cdot x_2^l = e_G$ donc $x_2^l = x_1^{-k}$. Si $l \in \{1,\dots,p-1\}$ or p est premier donc $l \wedge p = 1$ donc il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $lu+pv=1$. Alors on a

$$x_2 = x_2^{lu+pv} = x_2^{lu} \cdot x_2^{pv} = x_2^{lu} = x_1^{-k} \in gr\{x_1\}$$

ce qui n'est pas possible. Donc $\overline{l} = \overline{0}$ et de même $\overline{k} = \overline{0}$ donc f est injective et ainsi $|\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}| = |G|$ donc f est un isomorphisme.

Remarque 1.3. Les groupes de cardinal p^3 ne sont pas nécessairement abélien, par exemple le groupe des isométries du carré $\mathcal{D}_4$ de cardinal 8.

Solution 1.11. *Soit f un morphisme de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n$ donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $f(1) = r_0$ donc $f\colon n \mapsto r_0^n$.*

Soit f un morphisme de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $f(1) = f(\frac{1}{a})^a$. Pour tout p premier, on a $\nu_p(f(1)) = a\nu_p(f(\frac{1}{a}))$ donc pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $a \mid \nu_p(f(1))$ donc $\nu_p(f(1)) = 0$ pour tout p premier, donc $f(1) = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n = 1$ et $f(b \times \frac{a}{b}) = f(a) = 1 = f(\frac{a}{b})^b$ donc $f(\frac{a}{b}) = 1$. Donc $f\colon r \mapsto 1$.

Solution 1.12. *On a $xy = y^2x$, $x^2y = xy^2x = y^4x^2$, $x^3y = x^2y^2x = xy^4x^2 = y^8x^3$, $x^5y = y^{32}x^5$ donc $y^{31} = e_G$ et $\omega(y) = 31$. Tout élément de G peut s'écrire $y^\lambda x^\mu$ avec $(\lambda,\mu) \in \{0,\dots,30\} \times \{0,\times 4\}$. Soit*

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \{0,\dots,30\} \times \{0,\times 4\} & \to & G \\ & (\lambda,\mu) & \mapsto & y^\lambda x^\mu \end{array}$$

est surjective par construction. Soit $((\lambda,\mu),(\lambda',\mu')) \in (\{0,\dots,30\} \times \{0,\times 4\})^2$ tel que $y^\lambda x^\mu = y^{\lambda'} x^{\mu'}$ donc $y^{\lambda-\lambda'} = x^{p'-p}$ d'où $y^{5(\lambda-\lambda')} = x^{5(\mu'-\mu)} = e_G$. Or $\omega(y) = 31$ donc $31 \mid 5(\lambda-\lambda')$ et d'après le théorème de Gauss, $31 \mid \lambda - \lambda'$. Or $(\lambda,\lambda') \in \{0,\dots,30\}^2$ donc $\lambda = \lambda'$ et de même $\mu = \mu'$ donc f est injective donc bijective et $|G| = 155$. Soit G' un autre tel groupe engendré par x' et y', on forme

$$\begin{array}{rccl} g\colon & G & \to & G \\ & y^p x^\mu & \mapsto & y'^\lambda x'^\mu \end{array}$$

et on vérifie que g est un isomorphisme.

Solution 1.13.

1. *Soit $i \in \{1,\dots,r\}$, il existe nécessairement $y_i \in G$ tel que $\nu_{p_i}(\omega(y_i)) = p_i^{\alpha_i}$ (où ν_p est la valuation p-adique), sinon on ne pourrait pas avoir ce terme dans le* ppcm. *Donc $p_i^{\alpha_i} \mid \omega(y_i)$.*

2. *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega(y_i) = p_i^{\alpha_i} n$. Posons $x_i = y_i^n \in G$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$,*
$$x_i^k = e_G \Longleftrightarrow y_i^{nk} = e_G \Longleftrightarrow \omega(y_i) \mid nk \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid k$$
Donc $\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}$.

3. *On pose $x = \prod_{i=1}^r x_i$. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors*
$$x^k = e_G \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^r x_i^k = e_G$$
Pour $i \in \{1,\dots,r\}$, on met le tout à la puissance $M_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^r p_j^{\alpha_j}$. On a alors, pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$,
$$x_i^{kM_i} = e_G \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid kM_i \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid k$$
la dernière équivalence venant du théorème de Gauss. Donc pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, $p_i^{\alpha_i} \mid k$, ce qui équivaut donc à $N \mid k$ et donc $\omega(x) = N$.

Solution 1.14. *Sur un corps commutatif, un polynôme de degré n admet au plus n racines. Montrons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{K}^*$ tel que $\omega(x_i) = |\mathbb{K}^*|$. Par définition de N, pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $\omega(x) \mid N$. D'où $x^N = 1_{\mathbb{K}}$. Donc x est racine de $X^N - 1$. Ainsi, $|\mathbb{K}^*| \leqslant N$. Par ailleurs, $N \mid |\mathbb{K}^*|$ car pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $x^{|\mathbb{K}^*|} = 1_{\mathbb{K}^*}$. Donc $|\mathbb{K}^*| = N$ et donc $\mathbb{K}^* = gr\{x_1\}$.*

On a $|\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*| = 12$ donc pour tout $\overline{x} \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, $\omega(\overline{x}) \in \{1,2,3,4,6,12\}$. On a $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{2}^3 = \overline{8}$, $\overline{2}^4 = \overline{16} = \overline{3}$, $\overline{2}^6 = \overline{12}$ donc $\omega(\overline{2}) = 12$ et
$$\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^* = gr\{\overline{2}\} = \left\{\overline{2}^k \mid k \in \{0,\dots,11\}\right\}$$

Solution 1.15.

1. *Soit $(x,y) \in G^2$, on a $(x\cdot y)^2 = (x\cdot y)\cdot(x\cdot y) = e_G$ donc $x\cdot y = y^{-1}\cdot x^{-1}$ et comme $x^2 = e_G$, $x^{-1} = x$ d'où $xy = yx$ et G est abélien.*

2. *Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille génératrice minimale de G : pour tout $x \in G$, il existe$(\varepsilon_i) \in \{0,1\}^n$ tel que $x = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$ (car G est abélien). Soit*
$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n & \to & G \\ & (\overline{\varepsilon_1},\dots,\overline{\varepsilon_n}) & \mapsto & \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \end{array}$$

Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $\overline{\varepsilon_i} = \overline{\varepsilon_i'}$, alors $x^{\varepsilon_i} = x^{\varepsilon_i'}$ car $x_i^2 = e_G$ et $2 \mid \varepsilon_i - \varepsilon_i'$. Donc f est bien définie.

f est clairement un morphisme (car G est abélien). D'après la première question, f est surjective. Montrons que f est injective. Soit $(\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n})$ tel que $\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} = e_G$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, supposons ε_i impair, on a alors $x_i = \varepsilon_i = x_i$. D'où $x_i = \prod_{j=1}^n x_j^{-\varepsilon_j} = \prod_{j=1}^n x_j^{\varepsilon_j}$ car $x^2 = e_G$. Donc $x_i \in gr(x_j, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i)$, ce qui contredit le caractère minimal de $(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi, f est injective donc est un isomorphisme.

Remarque 1.4. En notant $+$ la loi sur G, on peut définir

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G & \to & G \\ (\varepsilon, x) & \mapsto & x^\varepsilon \end{array}$$

. Alors $(G, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, de dimension finie n car G est fini, et le choix d'une base réalise un isomorphisme de $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ dans $(G, +)$.

Remarque 1.5. Par isomorphisme, on a

$$\prod_{x \in G} x = f\Big(\sum_{(\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} (\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n})\Big)$$

Pour $n = 1$, on a $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$, pour $n = 2$, on a $(\overline{0}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{0})$. Pour $n > 2$, $\overline{1}$ apparaît 2^{n+1} fois sur chaque coordonnée (donc un nombre pair de fois), donc la somme fait $(\overline{0}, \dots, \overline{0})$.

Solution 1.16.

1. *Si G est abélien, on a $D(G) = \{e_G\}$.*
2. *Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, σ se décompose en un produit d'un nombre pair de transpositions. Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux transpositions.*
   - *Si $\{a, b\} = \{c, d\}$, alors $[a, b] \circ [c, d] = id$.*
   - *Si $a \in \{c, d\}$, supposons par exemple $a = c$ et $b \neq d$. On a alors $[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ [a, d] = [b, a, d]$.*
   - *Si $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, on a*

$$[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ \underbrace{[b, c] \circ [b, c]}_{=id} \circ [c, d] = [a, b, c] \circ [b, c, d]$$

Donc les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$.

3. *On a*

$$\sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(a_3))$$

On peut trouver $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ telle que a_i soit envoyé sur b_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et les éléments $\{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, b_2 b_3\}$. Donc les 3-cycles sont conjugués dans Σ_n.

Si $n \geqslant 5$ et σ impair, soit $(c_1, c_2) \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$. $\sigma' = \sigma \circ [c_1, c_2]$ est pair et $\sigma'(a_i) = b_i$. Donc les trois cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$ pour $n \geqslant 5$. C'est cependant faux pour $n = 3$ et $n = 4$.

4. *Soit $(\sigma, \sigma') \in \Sigma_n^2$. En notant $\mathcal{E}$ la signature d'une permutation (morphisme de $(\Sigma_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$), on a*

$$\mathcal{E}(\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1}) = 1$$

donc $\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1} \in \mathcal{A}_n$. Donc $D(\Sigma_n) \subset \mathcal{A}_n$.

Soit ensuite (a_1, a_2, a_3) un 3-cycle. On a $(a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$ et $(a_1, a_3, a_2)^{-1} = (a_1, a_2, a_3)$. Ainsi, on a

$$\sigma \circ (a_1, a_3, a_2) \circ \sigma^{-1} \circ (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$$

On pose $\sigma = [a_2, a_3]$, et alors (a_1, a_2, a_3) est un commutateur. Ainsi, $(a_1, a_2, a_3) \in D(\Sigma_n)$ et donc $\mathcal{A}_n \subset D(\Sigma_n)$ (d'après la première question).

Finalement, on a $D(\Sigma_n) = \mathcal{A}_n$.

Remarque 1.6. Pour $n \geqslant 5$, on a $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$.

Solution 1.17.

1. *Pour $g \in G$, τ_g est bijective de réciproque $\tau_{g^{-1}}$. On a notamment $\tau_{g \cdot g'} = \tau_g \circ \tau_{g'}$ donc τ est un morphisme. Si $g \in G$ est tel que $\tau_g = id$, pour tout $x \in G$, on a $gx = x$ donc $g = e_G$. Donc τ est un morphisme injectif et G est isomorphe à $\mathrm{Im}\tau = \tau(G)$, sous-groupe de $\Sigma(G)$, lui-même isomorphe à Σ_n.*

2. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \Sigma_n & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & \sigma & \mapsto & (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = P_\sigma \end{array}$$

P_σ est la matrice de permutation associée à σ. f est un morphisme, et est injectif, donc G est isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Solution 1.18. *Soit* $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ *tel que* $x^2 + y^2 + z^2 = 8t + 7$. *Dans* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, *on a* $\overline{0}^2 = \overline{0}$, $\overline{1}^2 = \overline{1}$, $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$, $\overline{4}^2 = \overline{0}$, $\overline{5}^2 = \overline{1}$, $\overline{6}^2 = \overline{4}$ *et* $\overline{7}^2 = \overline{1}$. *Donc la somme de 3 de ces classes ne donnent pas* $\overline{7}$.

Par récurrence, prouvons la propriété. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ *tel que* $x^2+y^2+z^2 = (8t+7)4^{n+1}$. *Parmi* x, y, z *les trois sont pairs ou deux d'entre eux sont impairs. Si* x, y *impairs et* z *pair, on écrit* $x = 2x' + 1, y = 2y' + 1, z = 2z'$, *alors* $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2[4]$ *mais* $(8t + 7)4^{n+1} \equiv 0[4]$ *: contradiction. Nécessairement,* x, y *et* z *sont pairs. En divisant par 4, on se ramène donc à l'hypothèse de récurrence.*

Solution 1.19. *On raisonne sur* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. *On a* $\overline{10^{10^n}} = \overline{3^{10^n}}$. *Dans le groupe* $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$, $\overline{3}$ *a un ordre qui divise* $|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*| = 6$. *On a* $\overline{3}^2 = \overline{2}$, $\overline{3}^3 = \overline{-1}$ *et* $\overline{3}^6 = \overline{1}$. *Donc* $\overline{3}^{6k} = \overline{1}, \overline{3}^{6k+1} = \overline{3}, \overline{3}^{6k+2} = \overline{2}, \overline{3}^{6k+3} = \overline{-1}, 3^{6k+4} = \overline{4}$ *et* $3^{6k+5} = \overline{5}$..

On se place maintenant dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ *:* $\overline{10} = \overline{4}, \overline{10}^2 = \overline{4}$ *et donc par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{10}^n = \overline{4}$. *Donc il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $10^n = 6k + 4$. *Ainsi,* $\overline{10^{10^n}} = \overline{4}$.

Solution 1.20.

1. *On a* $F_1 = 5$ *et* $2 + \prod_{k=0}^{0} F_k = 2 + 3 = 5$. *Soit* $n \geqslant 1$, *supposons que* $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$. *Alors*

$$\begin{aligned} F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 &= (2^{2^n})^2 - 1 \\ &= (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) \\ &= F_n(F_n - 2) \\ = F_n \times \prod_{k=0}^{n-1} F_k \\ &= \prod_{k=0}^{n} F_k \end{aligned}$$

   d'où le résultat par récurrence.

2. *Soit* p *un facteur premier de* F_n. *S'il existe* $k \in \{0, \dots, n-1\}$ *tel que* $p \mid F_k$, *alors d'après la première question on a* $p \mid F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k = 2$. *Donc* $p = 2$. *Or* F_n *est impair, donc*

non divisible par deux, ce qui est absurde. Donc p ne divise aucun F_k pour $k \in \{0, n-1\}$ et il existe donc une infinité de nombres premiers (car les F_n sont tous différents deux à deux).

Remarque 1.7. Si $n \neq m$ alors $F_n \wedge F_m = 1$.

Solution 1.21.

1. *On teste uniquement les puissances qui divisent 32 : 2,4,8,16,32. On a $\overline{5}^2 = \overline{-7}, \overline{5}^4 = \overline{-15}, \overline{5}^8 = \overline{1}$. Donc $\omega(\overline{5}) = 8$.*
2. *On note*
$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} & \to & U \\ & (\dot{k}, \tilde{l}) & \mapsto & \overline{-1}^k \times \overline{5}^l \end{array}$$
3. *On a $\omega(\overline{-1}) = 2$ et $\gamma(\overline{5}) = 8$ donc ψ est bien définie. ψ est bien un morphisme de groupes. Soit $(\dot{k}, \tilde{l}) \in \ker(\psi)$, on a $\overline{-1}^k \times \overline{5}^l = \overline{1}$. Si $\dot{k} = \dot{1}$, alors $\overline{-1}^k = \overline{-1} = \overline{5}^{-l} = \overline{5}^l \in gr\{\overline{5}\}$. Donc $\overline{5}^{2l} = \overline{1}$ et ainsi $8 \mid 2l$ d'où $4 \mid l$. Mais alors $l \in \{0, 4\}$ ce qui est impossible. Donc $\dot{k} \neq \dot{1}$. De ce fait, $\dot{k} \neq \dot{1}$. Ainsi, $\overline{5}^l = \overline{1}$ donc $\tilde{l} = \tilde{0}$. Ainsi, $\ker(\psi) = \{(\dot{0}, \tilde{0})\}$ donc ψ est injective, puis bijective car $|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}| = |U|$.*

Remarque 1.8. U n'est pas cyclique car, par isomorphisme, ses éléments ont un ordre qui divise 8.

Solution 1.22.

1. *Soit*
$$\begin{array}{rccc} f : & G_n \times G_m & \to & U_{nm} \\ & (\xi, \xi') & \mapsto & \xi \times \xi' \end{array}$$
Soit $(\xi, \xi') \in G_n \times G_m$, Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(\xi \times \xi')^k = 1$. Alors $(\xi \times \xi')^{km} = 1$ d'où $\xi^{km} = 1$ donc $n \mid km$ et $n \mid k$ d'après le théorème de Gauss. De même pour n, on a $m \mid k$ et donc $nm \mid k$. La réciproque est immédiate : $\xi \times \xi' \in G_{nm}$. Donc $f(G_n \times G_m) \subset G_{nm}$ et $|G_n \times G_m| = \varphi(n) \times \varphi(m) = \varphi(nm) = |G_{nm}|$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

   Montrons que f est injective : soit $(x, y, x', y') \in G_n^2 \times G_m^2$ tel que $xx' = yy'$. On a alors $x^m = y^m$ et $x'^n = y'^n$ d'où $(xy^{-1})^m = 1$ d'où $\omega(xy^{-1}) \mid m$ et $\omega(xy^{-1}) \mid n$. Donc $\omega(xy^{-1}) = 1$ donc $x = y$ et en reportant, on a $x' = y'$. Donc f est injective puis bijective (égalité des cardinaux).

On a alors

$$\begin{aligned}\mu(n)\mu(m) &= \sum_{\xi\in G_n}\xi \times \sum_{\xi'\in G_m}\xi' \\ &= \sum_{(\xi,\xi')\in G_n\times G_m}\xi\xi' \\ &= \sum_{\xi\in G_{nm}}\xi \text{ [f est bijective]} \\ &= \mu(nm)\end{aligned}$$

2. *On a* $\mu(1)=1$. *Soit* p *premier. On a*

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{p}} = 0$$

donc

$$\mu(p)\sum_{k=1}^{p-1} e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{p}} = -1$$

. Soit alors $\alpha\in\mathbb{N}$ *avec* $\alpha \geqslant 2$*, on a*

$$\mu(p^\alpha) = \sum_{\substack{k=1\\ k\wedge p=1}}^{p^\alpha} e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{p^\alpha}} = \sum_{k=1}^{p^\alpha} e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{p^\alpha}} - \sum_{k=1}^{p^{\alpha-1}} e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{p^{\alpha-1}}} = 0$$

Si $n = p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$*, s'il existe* $i\in\{1,\dots,r\}$ *tel que* $\alpha_i \geqslant 2$ *alors* $\mu(n)=0$*. Sinon, on a*

$$\mu(n) = \prod_{i=1}^{r}\mu(p_i) = (-1)^r$$

3. *Soit* $(f,g)\in(\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^2$*, on a*

$$\begin{aligned}(f\star g)(n) &= \sum_{d_1d_2=n} f(d_1)g(d_2) \\ &= \sum_{d_1d_2=n} g(d_1)f(d_2) \\ &= (g\star f)(n)\end{aligned}$$

Donc $\star$ *est commutative.*

Soit $(f,g,h) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^3$, *on a*

$$\begin{aligned}(f\star(g\star h))(n) &= \sum_{d_1 d = n} f(d_1)(g\star h)(d)\\ &= \sum_{d_1 d=n}\left[f(d_1)\times \sum_{d_2 d_3 = d} g(d_2)h(d_3)\right]\\ &= \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(g_1)g(d_2)h(d_3)\\ &= ((f\star g)\star h)(n)\end{aligned}$$

donc $\star$ *est associative.*

On vérifie maintenant que l'élément neutre est $e : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ *qui à* 1 *associe* 1 *et 0 si* $n \geqslant 2$. *Soit*

$$\begin{array}{rccc}\psi: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z}\\ & n & \mapsto & \sum_{d|n}\mu(d)\end{array}$$

On a $\psi(1) = 1$. *Soit* $n \geqslant 2$ *avec* $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_r}$. *Les diviseurs de* n *sont dans* $D = \{\prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i} \mid \beta_i \leqslant \alpha_i\}$. *Ainsi,* $\psi(n) = \sum_{d\in D}\mu(d)$. *Or* $\mu(d)$ *vaut 0 s'il existe* $\beta_i \geqslant 2$ *et* $(-1)^k$ *si* k β_i *valent 1 et les autres 0. Il y a* $\binom{r}{k}$ *choix possibles pour que* k β_i *valent* 1. *Ainsi,*

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^r 1^{r-k}(-1)^k\binom{r}{k} = 0$$

Donc $\mu\star 1 = e$, *et* $\mu^{-1} = 1 : n \mapsto 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

4. *On note*

$$\begin{array}{rccc}id: & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N}^*\\ & n & \mapsto & n\end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} d\mu(\frac{n}{d}) &= (\mu\star id)(n)\\ &= (id\star\mu)(n)\\ &= (1\star(\varphi\star\mu))(n)\\ &= \varphi(n)\end{aligned}$$

la troisième égalité venant du fait que $id = 1\star\varphi$ *car* $n = \sum_{d|n}\varphi(d)$.

Solution 1.23. *Pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$, on a*

$$\binom{p+k}{k} = \frac{(p+k) \times \cdots \times (p+1)}{k \times \cdots \times 1} = 1 + \alpha k p$$

car $(p+k) \times \cdots \times (p+1) = k! + p \times$ qqchose. On a $p \mid \binom{p}{k}$ donc

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} [p^2]$$

Pour $k = 0$, on a $\binom{p}{0}\binom{p}{0} = 1$ et pour $k = p$, on a $\binom{p}{p}\binom{2p}{p} = \binom{2p}{p}$. Et

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} - 2 = 2^p - 2$$

Il reste donc à prouver que $\binom{2p}{p} \equiv 2[p^2]$.

Or

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{p}{p-k} \equiv 2[p^2]$$

la première égalité venant de l'égalité du terme en X^p dans $(1+X)^{2p} = (1+X)^p(1+X)^p$, et la deuxième venant du fait que seuls les termes en $k = 0$ et $k = p$ ne contiennent pas de p^2, et valent chacun 1.

Finalement, on a

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 2^p - 2 + 1 + 2[p^2] \equiv 2^p + 1[p^2]$$

Solution 1.24.

1. *Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{U}, \times)$. On note $|G| = d$. On a donc $G \subset \mathbb{U}_d$ car pour tout $x \in G$, $x^d = 1$. Donc $G = \mathbb{U}_d$ est cyclique.*
2. *On pose*

$$\begin{array}{rccc} \psi : & SO_2(\mathbb{R}) & \to & (\mathbb{U}, \times) \\ & R_\theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$$

qui est un isomorphisme. Donc les sous-groupes de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les G_n pour $n \geqslant 1$ avec

$$G_n = \{R_{\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

3. *φ est bilinéaire et symétrique. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on $\varphi(X,X) = \sum_{M\in G} \|MX\|^2 \geqslant 0$ et si $\varphi(X,X) = 0$, on a pour tout $M \in G$, $X = 0$. Notamment, $I_2 \in G$ et donc $X = 0$. Donc φ est bien un produit scalaire.*

   Pour tout $(M_0, X, Y) \in G \times (\mathbb{R}^2)^2$, on a $\varphi(M_0X, M_0Y) = \sum_{M\in G}\langle MM_0X, MM_0Y\rangle$ et $M \mapsto MM_0$ est bijective de G dans G donc $\varphi(M_0X, M_0Y) = \varphi(X,Y)$.

   Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_1$ une base orthonormée pour φ. On note $P_0 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0\to\mathcal{B}_1}$.

   Pour tout $M \in G$, $P_0^{-1}MP_0$ est la matrice d'une isométrie pour φ dans une base orthonormée pour φ. Donc $P_0^{-1}MP_0$ est orthogonale, et $\det(P_0^{-1}MP_0) = 1$ car pour tout $M \in G$, $\det(M) = 1$. Ainsi, $\{P_0^{-1}MP_0 \mid M \in G\}$ est un sous-groupe fini de $SO_2(\mathbb{R})$, donc cyclique. Il est isomorphe à G donc G est cyclique.

Solution 1.25.

1. *On a $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in E$. On remarque ensuite que pour tout $s = x + y\sqrt{2} \in E$, on a $ss^{-1} = 1$ avec $s^{-1} = x - y\sqrt{1} \in E$. Soit $(s, s') \in E^2$ avec $s = x + y\sqrt{2}$ et $s' = x' + y'\sqrt{2}$. Notons déjà que $x + y\sqrt{2} > 0$ car $x = \sqrt{1+2y^2} > |y|\sqrt{2}$. On a donc*

$$ss' = \underbrace{xx' + 2yy'}_{\in\mathbb{Z}} + \sqrt{2}\underbrace{(yx' + y'x)}_{\in\mathbb{Z}}$$

   On a $xx' \in \mathbb{N}$ et $x > \sqrt{2}|y| \geqslant 0$ et $x' > \sqrt{2}|y'| \geqslant 0$ donc $xx' > 2|yy'|$ et ainsi $xx' + 2yy' \in \mathbb{N}^*$. Enfin, on a

$$\begin{aligned}(xx' + 2yy')^2 - 2(yx' + y'x)^2 &= (xx')^2 + 4(yy')^2 - 2(yx')^2 2(y'x)^2 \\ &= (x^2 - 2y^2)(x'^2 - 2y'^2) \\ &= 1\end{aligned}$$

   Donc $ss' \in E$. Finalement, E est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

2. $\ln$ *est un isomorphisme de E sur $\ln(E)$, sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On sait que si*

$$\underbrace{\inf(\ln(E) \cap \mathbb{R}_+)}_{\alpha} > 0$$

   alors $\ln(E) = \alpha\mathbb{Z}$ (sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans le cas $\alpha > 0$, pour rappel si $\alpha = 0$ alors le sous-groupe est dense dans $\mathbb{R}$). On cherche la borne inférieure de $E \cap]1 + \infty[$ que l'on note β. β existe car cet ensemble est non vide, par exemple $3 + 2\sqrt{2}$ y appartient.

Si $\beta = 1$, on peut trouver une suite de termes de E strictement décroissante convergeant vers 1. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 < x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} < x_n + y_n\sqrt{2}$$

On sait que

$$x_n - y_n\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})^{-1} < 1 < x_n + y_n\sqrt{2}$$

donc $-y_n\sqrt{2} < 1 - x_n < 0$ donc $y_n > 0$. Ainsi,

$$y_n = \sqrt{\frac{x_n^2 - 1}{2}}$$

Si $x_{n+1} \geqslant x_n$, alors $y_{n+1} \geqslant y_n$ d'où $x_{n+1} + \sqrt{2}y_{n+1} > x_n + \sqrt{2}y_n$ ce qui est absurde. Donc $x_{n+1} < x_n$ et on obtient une suite strictement décroissante d'entiers naturels ce qui est impossible. Donc $\beta > 1$ et $E = \{(x_0 + y_0\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est monogène.

On peut identifier β :

$$x_0 = \min\{x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y\sqrt{2} \in E\cap], +\infty[\}$$

Donc $\beta = 3 + 2\sqrt{2}$ Finalement, $x^2 - 2y^2 = 1$ avec $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n + y_n\sqrt{2} = \beta^n$.

Remarque 1.9. En fait, on a

$$\begin{cases} x_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k} 3^{n-2k} \\ y_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} 3^{n-2k-1} \end{cases}$$

Solution 1.26. *On a $7 \mid n^n - 3$ si et seulement si $\overline{n}^n = \overline{3}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$ est un groupe de cardinal 6. Donc l'ordre de ses éléments divisent 6, et sont donc 1,2,3 ou 6. Notamment, on vérifie que $\omega(\overline{3}) = 6$ et donc le groupe engendré par $\overline{3}$ est exactement $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$. Ainsi,*

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times) = \{\overline{3}^{k\big| k \in \{0,\dots,5\}}\}$$

(c'est un groupe cyclique). Les générateurs sont $\{\overline{3}^k, k \wedge 6 = 1\} = \{\overline{3}, \overline{3}^5 = \overline{-2} = \overline{5}\}$. Donc $\overline{n} = \overline{3}$ ou $\overline{n} = \overline{5}$.

Si $\overline{n} = 3$, $\overline{3}^n = \overline{3}$ si et seulement si $n \equiv 1[6]$ donc $n \equiv 3[7]$ et $n \equiv 1[6]$. D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à $n \equiv 31[42]$. La réciproque est immédiate.

Si $\overline{n} = 5$, $\overline{5}^n = \overline{3}$ si et seulement si $n \equiv 5[6]$ et $n \equiv 5[7]$. D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à $n \equiv 5[42]$.

Donc les solutions sont $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \equiv 31[42]$ ou $n \equiv 5[42]$.

Solution 1.27. *On a*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} = \frac{2a}{(p-1)!} &\iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{k(p-k)} = \frac{2a}{(p-1)!} \\ &\iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p(p-1)!}{k(p-k)} = 2a \\ &\iff p \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!^3}{k(p-k)}}_{\in \mathbb{N}} = 2a \underbrace{(p-1)!^2}_{p \wedge (p-1)!^2 = 1}\end{aligned}$$

donc $p \mid a$ d'après le théorème de Gauss.

On écrit alors $a = p \times b$ avec $b \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} = \frac{2b}{(p-1)!}$$

comme $(p-1)!, k$ et $p-k$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ sont inversibles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \overline{-k}^{-2} = \overline{2b} \times \underbrace{\overline{(p-1)!}^{-1}}_{= \overline{-1} \text{ d'après le théorème de Wilson}}$$

Donc

$$\overline{2b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^{-2}$$

Comme

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ & \overline{k} & \mapsto & \overline{k}^{-1} \end{array}$$

est bijective, on a

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \overline{\frac{p(p-1)(2p-1)}{6}}$$

Or $p \geqslant 5$ est premier, donc $p-1$ est pair et p est congru) 1 ou 2 modulo 3. Donc $p-1 \equiv 0[3]$ ou $2p-1 \equiv 0[3]$ donc $\frac{(p-1)(2p-1)}{6} \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \overline{p} \times \overline{\frac{(p-1)(2p-1)}{6}} = 0$$

et donc $p \mid b$ par le théorème de Gauss. Donc $p^2 \mid a$.

Solution 1.28. *Les racines réelles de P ont une multiplicité paire, le coefficient dominant est positif (car la limite en $+\infty$ est positive) et les racines complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées :*

$$(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2 = (X - \Re(\alpha))^2 + |\Im(\alpha)|^2$$

avec $\Im(\alpha) \neq 0$. D'où le résultat en décomposant P sur $\mathbb{C}[X]$.

Solution 1.29.

1. *$G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par α et 1. S'il existait $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = a\mathbb{Z}$, alors il existait $(n, m) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tel que $1 = na$ et $\alpha = ma$, d'où $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$. Le fait que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$ est alors immédiate.*

2. *Posons $\beta = \frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{Z} + \beta\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $c < d \in \mathbb{R}^2$. Comme $\frac{c}{2\pi} < \frac{d}{2\pi}$, il existe $x \in \mathbb{Z} + \beta\mathbb{N} \cap]\frac{c}{2\pi}, \frac{d}{2\pi}[$ et alors $2\pi x \in 2\pi\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N} \cap]c, d[$. On pose $c = \arcsin(a)$ et $d = \arcsin(b)$ avec $a < b$. On a bien $c < d$ car $\arcsin$ est strictement croissante.*

   Alors il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $2\pi m + \alpha m = 2\pi x \in]c, d[$ donc $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi m + \alpha n) = \sin(\alpha n) \in]a, b[$.

   Donc $(\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $]-1, 1[$. En particulier, cela vaut pour $\alpha = 1$ car $\pi \notin \mathbb{Q}$. Donc $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. 2^n commence par 7 en base 10 si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ avec*

$$\begin{aligned} 7 \times 10^p \leqslant 2^n < 8 \times 10^p &\iff \ln(7) + p\ln(10) \leqslant n\ln(2) < \ln(8) + p\ln(10) \\ &\iff \frac{\ln(7)}{\ln(10)} \leqslant \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} - p < \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \end{aligned}$$

   On a alors

$$p = \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \mathbb{N}$$

On étudie donc $\mathbb{N}\frac{\ln(2)}{\ln(10)} + \mathbb{Z}$. *Supposons que* $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. *Alors on a* $2^q = 10^p$ *mais comme* $p \neq 0$, *on a* $5 \mid 10^p$ *mais* $5 \nmid 2^q$, *donc* $\frac{\ln(10)}{\ln(2)} \notin \mathbb{Q}$.

On sait que

$$u_n = n\frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \left]\frac{\ln(7)}{\ln(10)}, \frac{\ln(8)}{\ln(10)}\right[$$

Par densité, on peut donc construire par récurrance $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ *telle que*

$$\frac{\ln(7)}{\ln(10)} < u_{n_{p+1}} < u_{n_p} < \frac{\ln(8)}{\ln(10)}$$

Donc on a bien une infinité de puissance de 2 commençant par 7 en base 10.

Remarque 1.10. $(e^{\mathrm{i}n\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ est de la même façon dense dans $\mathbb{U}$. On peut montrer qu'elle est équirépartie, c'est à dire que pour tout $a < b \in [0, 2\pi[^2$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \left|\left\{n \in \{1, \dots, N\} \;\middle|\; n\alpha - \frac{\lfloor 2\pi n\alpha \rfloor}{2\pi} \in]a, b[\right\}\right| \times \frac{1}{N} = \frac{b-a}{2\pi}$$

Remarque 1.11. Par équirépartition dans $[0, 1[$ des

$$\left\{n\frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n\ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

la probabilité pour qu'une puissance de 2 commence par k en base 10 est ($k \in \{1, \dots, 9\}$)

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln(10)}$$

Solution 1.30.

1. *Pour* $\alpha = a + \mathrm{i}b$, *on définit le module au carré :* $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$. *Soit* $\beta = c + \mathrm{i}d \neq 0$. *Si* $\alpha = \beta q + r$ *avec* $q, r \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ *et* $|r|^2 < |\beta|^2$, *alors* $|\alpha - \beta q|^2 < |\beta|^2$ *et* $\beta \neq 0$ *donc*

$$\Big|\underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\in\mathbb{C}} - \underbrace{q}_{\in\mathbb{Z}[\mathrm{i}]}\Big| < |1|$$

On pose $\frac{\alpha}{\beta} = x + \mathrm{i}y$. *On pose*

$$u_x = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & si\ x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}[\\ \lfloor x \rfloor + 1 & si\ x \in [\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor x \rfloor + 1[\end{cases}$$

et de même pour u_y. *On a alors* $q = u_x + \mathrm{i}u_y \in \mathbb{Z}[i]$ *et*

$$\left|\frac{\alpha}{\beta} - q\right|^2 = |x - u_x|^2 + |y - u_y|^2 \leqslant 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$$

On pose donc $r = \alpha - \beta q \in \mathbb{Z}[i]$ *et ainsi l'anneau* $\mathbb{Z}[i]$ *est euclidien.*

2. *Soit A un anneau euclidien et I un idéal de A non réduit à $\{0\}$. Il existe $x \in I$ tel que*

$$v(x_0) = \min\{v(x) \mid x \in I\{0\}\}$$

On a $x_0 A \subset I$. Soit $x \in I$. Il existe $q, r \in A$ tel que

$$x = x_0 q + r$$

avec $v(r) < v(x_0)$ ou $r = 0$. Or $r \in I$ donc $r = 0$. Ainsi $x \in x_0 A$ et donc $I = x_0 A$. Donc tout anneau euclidien est principal.

Remarque 1.12. C'est encore vrai avec $\mathbb{Z}[\mathrm{i}\sqrt{2}] = \{a + \mathrm{i}b\sqrt{2} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Solution 1.31.

1. *Si $\overline{x} = \overline{y}^2$ est un carré, d'après le petit théorème de Fermat, on a $\overline{x}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{y}^{p-1} = \overline{1}$. Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* & \to & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ & \overline{y} & \mapsto & \overline{y}^2 \end{array}$$

f est un morphisme multiplicatif, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times\right)$.

Comme $\mathbb{F}_p$ est un corps, chaque carré possède exactement deux antécédents. Il y a $p-1$ antécédents, donc il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$. Donc $|\mathrm{Im}(f)| = \frac{p-1}{2}$ et si $\overline{x}$ est un carré, x est racine de $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$. Le polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$ possède au plus $\frac{p-1}{2}$ racines et tout carré est racine. Donc les racines sont exactement les carrés et $\overline{x}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ si et seulement si $\overline{x}$ est un carré.

2. *On a $p \equiv 1[4]$ si et seulement si $\frac{p-1}{2}$ est pair si et seulement si $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ si et seulement si $\overline{-1}$ est un carré dans $\mathbb{F}_p$. Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers $p_1, \dots, p_r$ tous congrus à 1 modulo 4. On pose $n = (p_1 \times \cdots \times p_r)^2 + 1$. Soit p un facteur premier de n, on a $n \equiv 1[n_i]$ donc $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $\overline{n} = \overline{0}$ donc $\overline{-1} = \overline{p_1 \times \cdots \times p_r}^2$ donc $p \equiv 1[4]$ ce qui est une contradiction.*

   Donc il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Solution 1.32.

1. *On pose $P_1 = \sum_{i=0}^{n} r_i' X^i$, et $\nu_p(r_i')$ est positif par définition de $c(P)$. Donc $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$.*

Pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\min_{i \in \{1,\dots,n\}} \nu_p(r_i) = \nu_p(r_{i_0})$$

et $\nu_p(r'_{i_0}) = 0$ donc $p \nmid r'_{i_0}$ donc

$$\bigwedge_{i=1}^{n} r'_i = 1$$

Si on a $P = \alpha_1 P_1 = \alpha_2 P_2$ avec les conditions requises, soit $p \in \mathcal{P}$, si $\nu_p(\alpha_2) > \nu_p(\alpha_1)$, alors p divise tous les coefficients de P_1 ce qui n'est pas possible, donc $\nu_p(\alpha_2) = \nu_p(\alpha_1)$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a aussi $\alpha_1 = \alpha_2$ et donc $P_1 = P_2$.

2. *On a $P = c(P)P_1$ et $Q = c(Q)Q_1$ donc $PQ = c(P)c(Q)P_1Q_1$ et $P_1Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$.*

   Soit $p \in \mathcal{P}$ divisant tous les coefficients de P_1Q_1. On définit, si $R = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$, $\overline{R} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \overline{\gamma_i} X^i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. $R \mapsto \overline{R}$ est un morphisme d'anneaux. Par hypothèse, on a $\overline{P_1Q_1} = \overline{0} = \overline{P_1Q_1}$ et par intégrité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on a $\overline{P_1} = \overline{0}$ ou bien $\overline{Q_1} = \overline{0}$, ce qui est exclu par les hypothèses. Donc $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

3. *Soit alors P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (les inversibles de $\mathbb{Z}[X]$ étant -1 et 1). Posons*

$$\begin{aligned} P &= QR \in \mathbb{Q}[X]^2 \\ &= c(Q)c(R)\underbrace{Q_1R_1}_{\in \mathbb{Z}[X]} \end{aligned}$$

   OR $c(Q)c(R) = c(P)$ c'après le lemme de Gauss et nécessairement, $c(P) = 1$. Donc $P = Q_1R_1$, et alors $Q_1 = \pm 1$ et $R_1 = \pm 1$, et Q ou R est constant, donc P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$.

   Pour la réciproque, on a $2X$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ car de degré 1, mais pas sur $\mathbb{Z}[X]$ car ni 2 ni X ne sont inversibles.

4. *Soit $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$. Sur $\mathbb{C}[X]$, on a $P = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.*

   Et $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ car $\theta \not\equiv 0[\pi]$. On a $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}_q$, et $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont des racines de A. Donc, dans $\mathbb{C}[X]$, on a $P \mid A$ et $A \in \mathbb{Q}[X]$, donc il existe $B \in \mathbb{Q}[X]$ tel que

$$\underbrace{A}_{\in \mathbb{Q}[X]} = \underbrace{B}_{\in \mathbb{C}[X]} \times \underbrace{P}_{\in \mathbb{Q}[X]}$$

Or B s'obtient par la division euclidienne de A par P, qui est indépendante du corps de référence, il vient $B \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $A \mid P$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

On a $c(A) = 1 = c(B)c(P)$ et $A = c(B)c(P)B_1P_1 = B_1P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et le coefficient dominant de A est donc 1. Donc le coefficient dominant de B_1 et de P_1 est aussi 1. En reportant, on a $P = P_1 \in \mathbb{Z}[X]$.

Donc $2\cos(\theta) \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2]$ donc $\cos\{\theta\} \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$ (-1 et 1 ne peuvent y être car on a supposé $\theta \not\equiv 0[\pi]$). Les solutions sont donc

$$\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

(en rajoutant $\theta = 0$ et π).

Remarque 1.13. On a $\frac{\arccos(\frac{1}{3})}{\pi} \notin Q$ car $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$ n'est pas dans l'ensemble solutions.

Solution 1.33.

1. *Soit $P = a\prod_{i=1}^{s}(X - a_i)^{\alpha_i}$ avec les a_i distincts et $\alpha_i \geqslant 1$. a_i est racine de P' de multiplicité $\alpha_i - 1$. Il manque donc s racines. Si $\alpha = 0$, le résultat est évident, sinon on pose*

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & P(x)e^{\frac{x}{\alpha}} \end{array}$$

et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha}(P(x) + \alpha P'(x))$$

Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$, P' est scindé sur $\mathbb{R}$ (appliquer le théorème de Rolle entre les racines distinctes de P), donc f' s'annule $s-1$ fois entre les racines de P donc $P + \alpha P'$ aussi.

La dernière racine est réelle car sinon, le conjugué de la racine complexe supposée serait aussi racine.

2. *On pose $R = \mu\prod_{i=0}^{r}(X - \beta_i)$. On pose*

$$\begin{array}{rccl} \Delta: & \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

On a alors
$$\sum_{i=0}^{r} a_i P^{(i)} = \sum_{i=0}^{r} a_i \Delta^i(P) = R(\Delta)(P) = \mu \prod_{i=0}^{r} (\Delta - \beta_i id)(P)$$
Par récurrence sur r, on montre que $\prod_{i=0}^{r}(\Delta - \beta_i id)(P)$ est scindé d'après la première question.

Remarque 1.14. On a aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' + \lambda P$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ si P est scindé sur $\mathbb{R}$.

Solution 1.34. *Soit $F = \frac{P'}{P}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ où a_i sont les racines de P. On note α le coefficient dominant de P, et on a*
$$P' = \alpha \sum_{i=1}^{n} \Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_j) \Big)$$
On a donc $F = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i}$ et on a
$$F' = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)^2} = \frac{P''P - P'P'}{P^2}$$

Pour $x \notin \{a_1, \ldots, a_n\}$, on a
$$\begin{aligned}
(n-1)(P'^2(x))(x) \geqslant nP(x)P''(x) &\iff n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \leqslant -P'^2(x) \\
&\iff \frac{P'^2(x)}{P^2(x)} \leqslant n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \times \frac{1}{P^2(x)} \\
&\iff F^2(x) \leqslant n(-F'(x)) \\
&\iff \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)} \Big)^2 \leqslant n \times \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(X - a_i)^2}
\end{aligned}$$
qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^2$ avec $(1 \ldots 1)$ et $(\frac{1}{x - a_1} \ldots \frac{1}{x - a_n})$.

Remarque 1.15. Si $P = \alpha(X - a_1)^{m_1}(X - a_r)^{m_r}$, alors
$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{X - a_i}$$

Solution 1.35.

1. *$P' \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P') = \deg(P) - 1$. On a $P \wedge P' = 1$ car P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Comme le pgcd est obtenu par l'algorithme d'Euclide qui est indépendant du corps de référence, on a $P \wedge P' = 1$ sur $\mathbb{C}[X]$ donc P n'a que des racines simples sur $\mathbb{C}$.*

2. *Notons $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$ (défini car $A(\alpha) = 0$ donc α est algébrique). Comme $A(\alpha) = 0$, on a $P \mid A$ et P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a $\deg(P) \geqslant 2$, on peut donc décomposer sur $\mathbb{Q}[X]$:*

$$A = P^r \times P_1^{r_1} \times \dots P_s^{r_s}$$

avec les P_i irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ non associés.

α n'est pas racine d'un P_i car sinon $P \mid P_i$ ce qui est impossible. α est racine simple de P donc $m(\alpha) = r > \frac{\deg(A)}{2}$. Par ailleurs, $\deg(P)^r \geqslant 2r > \deg(A)$ ce qui est impossible.

Donc $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Solution 1.36. *Soit $x \in A$. Il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n < m$ tel que $x^n = x^m$. Alors $x^{m-n} = e_G \in A$.*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}^* & \to & A \\ & n & \mapsto & x^n \end{array}$$

n'est pas injective, car $\mathbb{N}^*$ est infini et A est fini. Or $m - n \in \mathbb{N}^*$ donc

$$x^{m-n} = e_G \Rightarrow x = x \cdot x^{m-n-1} = e_G$$

donc $x^{-1} = x^{m-n-1} \in A$ et ainsi A est un sous-groupe.

Solution 1.37. *Pour $\alpha = 0$, on a $1 + p \equiv 1 + p[p^2]$. Pour $\alpha = 1$, on a*

$$(1+p)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} p^k = 1 + p^2 + \binom{p}{2} p^2 \sum_{k=3}^{p} \binom{p}{k} p^k$$

Or $\binom{p}{2} p^2 = \frac{p(p-1)p^2}{2} \equiv 0[p^3]$ car p est premier plus grand que trois donc impair, et la somme est aussi congru à 0 modulo p^3.

Soit $\alpha \geqslant 1$, supposons que l'on ait

$$(1+p)^p \equiv 1 + p^{\alpha+1}[p^{\alpha+2}]$$

Il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$(1+p)^{p^\alpha} = 1 + p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2}$$

Alors

$$(1+p)^{p^{\alpha+1}} = (1 + \underbrace{p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2}}_{x})^p$$

Or

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k = 1 + p^{\alpha+2} + lp^{\alpha+3} + \underbrace{\sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k}_{\textit{divisible par } x^2}$$

Comme $p^{\alpha+1} \mid x$, $p^{2\alpha+2} \mid x^2$ *avec* $2\alpha+2 \geqslant \alpha+3$ $(\alpha \geqslant 1)$. *D'où*

$$p^{\alpha+3} \mid x^2 \mid \sum_{k=2}^{p} \binom{p}{k} x^k$$

et

$$(1+p)^{p^{\alpha+1}} \equiv 1 + p^{\alpha+2} [p^{\alpha+3}]$$

Remarque 1.16. Pour $p = 2, \alpha = 1$, on a $3^2 = 9 \not\equiv 5[8]$.

Solution 1.38. *Si* $7 = 2x^2 - 5y^2$, *on a* $\overline{0} = 2\overline{x}^2 - 5\overline{y}^2 = \overline{2}(\overline{x}^2 + \overline{y}^2)$ *dans* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. *Comme 2 et 7 sont premiers entre eux donc* $\overline{2}$ *est inversible. Donc* $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \overline{0}$. *La seule possibilité est* $\overline{x} = \overline{0}$ *et* $\overline{y} = \overline{0}$. *Donc* $7 \mid x$ *et* $y \mid y$. *Si* $x = 7k$ *alors* $x^2 = 49k^2$ *donc* $49 \mid x^2$ *et* $49 \mid y^2$ *donc* $47 \mid 2x^2 - 5y^2 = 7$ *ce qui est faux.*

Solution 1.39. $\mathbb{F}_{19}$ *est un corps car 19 est premier. On a donc* $\overline{x}^3 = \overline{1}$ *si et seulement si* $(x-\overline{1})(x^2 + x - \overline{1}) = \overline{0}$. *On a donc* $x = \overline{1}$ *ou* $x^2 + x + \overline{1} = \overline{0}$. *On a*

$$x^2 + x + \overline{1} = (x + \overline{2}^{-1})^2 + \overline{3} \times \overline{4}^{-1} = (x + \overline{10})^2 + \overline{3} \times \overline{50}$$

Donc $(x + \overline{10})^2 = \overline{4}$ *d'où* $x = \overline{-8} = \overline{11}$ *ou* $x = \overline{-12} = \overline{7}$.

Solution 1.40.

1. *m est inversible si et seulement si* $m \wedge 2^n = 1$ *si et seulement si* $m \wedge 2 = 1$ *si et seulement si m est impair. IL y a donc* 2^{n-1} *inversibles.*

2. *On a* $5^{2^{3-3}} = 5 \equiv 1 + 2^2[2^3]$. *Par récurrence, soit* $n \geqslant 3$. *Il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *avec* $5^{2^{n-3}} = 1 + 2^{n-1} + k2^n$ *donc*

   $$5^{2^{n-1}} = 1 + 2^n + k2^{n+1} + 2^{2n-2}(1+2k)^2 \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}]$$

   car $2n - 2 \geqslant n + 1$ $(n \geqslant 3)$.

3. *On a* $5^{2^{n-2}} \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}] \equiv 1[2^n]$ *et* $5^{2^{n-3}} \not\equiv 1[2^n]$. *Donc l'ordre de* $\overline{5}$ *est* 2^{n-2}.

4. $gr\{\overline{-1}\} = \{\overline{-1}, \overline{1}\}$. $\overline{5}$ *n'engendre pas* $\overline{-1}$ *car si* $\overline{5}^k = \overline{-1}$, *on a* $\overline{5}^{2k} = \overline{1}$ *d'où* $2^{n-2} \mid 2k$ *donc* $2^{n-3} \mid k$. *Ainsi,* $k \in \{2^{n-3}, 2^{n-2}, 2^{n-1}\}$. *Mais* $\overline{5}^{2^{n-2}} = \overline{1}, \overline{5}^{2^{n-3}} = \overline{1 + 2^{n-1}} \neq \overline{-1}$ *donc un tel* k *n'existe pas.*

Posons

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}, +\right) & \to & \left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}^\times, \times\right) \\ & (\widetilde{a}, \dot{b}) & \mapsto & \overline{-1}^a\overline{5}^b \end{array}$$

Elle est bien définie car $\omega(\overline{-1}) = 2$ *et* $\omega(\overline{5}) = 2^{n-2}$. *C'est évidemment un morphisme, on a égalité des cardinaux des ensembles de départ et d'arrivée, et on vérifie qu'elle est injective, et donc c'est un isomorphisme.*

Solution 1.41. *Soit* $(x, x') \in G^2$ *tel que* $x \cdot x' = e$. *Alors*

$$e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e \cdot x' \cdot x$$

si et seulement si

$$e \cdot x \cdot x' = e = x \cdot e \cdot x' \cdot x \cdot x' = x \cdot e \cdot x'$$

Soit $(x, x', x'') \in G^3$ *tel que* $x \cdot x' = e$ *et* $x' \cdot x'' = e$. *On a alors*

$$x \cdot x' \cdot x'' = x \cdot e = x = e \cdot x''$$

Donc $x = e \cdot x''$ *et* $e = e \cdot x'' \cdot x'$. *Si on prouve que* $e \cdot x'' = x''$, *alors* $x = x''$ *et* $x' \cdot x = e$.

Montrons donc que pour tout $x \in G$, $e \cdot x = x$. *Notons que s'il existe* $e' \in G$ *tel que pour tou tx* $\in G$, $e' \cdot x = x$, *alors* $e' \cdot e = e' = e$. *Il vient donc*

$$x' \cdot x = x' \cdot e \cdot x'' = x' \cdot x'' = e$$

Donc pour tout $x \in G$, *l'élément* x' *est inverse à droite et à gauche :* $x \cdot x' = e$.

Donc

$$x \cdot x' \cdot x = e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e = x$$

Et donc e *est neutre à gauche. Finalement,* $(G, \cdot)$ *est un groupe.*

Remarque 1.17. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective, on peut définir

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f(x) \end{array}$$

pour un certain $x \in \mathbb{R}$. On a $f \circ g = id$. Si f n'est pas injective : s'il existait $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h \circ f = id$, soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ telle que $f(x) = f(x')$. En composant par h, on aurait $x = x'$ donc f serait injective ce qui n'est pas.

On on peut avoir un inverse à droite mais pas à gauche.

Solution 1.42. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$\underbrace{1\dots 1}_{n \text{ fois en base } 10} = 1 + 10 + \dots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

On a

$$\begin{aligned} 21 \;\Big|\; \frac{10^n-1}{9} &\iff 3 \;\Big|\; \frac{10^n-1}{9} \text{ et } 7 \;\Big|\; \frac{10^n-1}{9} \\ &\iff 27 \mid 10^n - 1 \text{ et } 7 \mid 10^n - 1 \end{aligned}$$

car $7 \wedge 9 = 1$. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on a $\overline{10} = \overline{3}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{10}^{6k} = \overline{1}$ d'après le petit théorème de Fermat. Dans $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$, $\widetilde{10}$ est inversible car $10 \wedge 27 = 1$. $\Big((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times, +, \times\Big)$ comporte 18 éléments donc pour tout $k' \in \mathbb{N}$, on a $\widetilde{10}^{18k'} = \widetilde{1}$.

Lorsque $81 \mid n$, on a $21 \mid 1 \dots 1$.

Cherchons plus précisément les ordres de $\overline{10}$ dans $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ et de $\widetilde{10}$ dans $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times, \times)$. Dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$, groupe de cardinal 6, on vérifie que l'ordre de 10 est 6. Dans l'autre groupe, on vérifie que l'ordre de $\widetilde{10}$ est 3. Ainsi, $21 \mid 1 \dots 1$ si et seulement si $6 \mid n$.

Il y a donc une infinité de multiples de 21 qui s'écrivent avec uniquement des 1 en base 10.

Remarque 1.18. Il suffit de trouver l'ordre de 10 dans les deux ensembles et de prendre le ppcm.

Solution 1.43.

1. *$X^d - 1$ a au plus d racines dans $\mathbb{K}$. Pour tout $k \in \{0, \dots, d-1\}$, x_0^k est racine de $X^d - 1_{\mathbb{K}}$ car $gr\{x_0\}$ a pour cardinal d. Donc les racines sont exactement les puissances de x_0.*

Soit $x \in \mathbb{K}^*$ d'ordre d. On a $x \in gr\{x_0\}$ car $x^d = 1$ (racine du polynôme de $X^d = 1_{\mathbb{K}}$). Or, dans le groupe cyclique engendré par x_0, il y a $\varphi(d)$ éléments.

2. *On a ou bien $\varphi(d)$ ou bien aucun élément d'ordre d dans $\mathbb{K}$. Soit d tel que $d \mid n$, on note $H_d = \{x \in K \bigm| \omega(x) = d\}$. On a*

$$\mathbb{K}^* = \bigcup_{d|n} H_d$$

Alors

$$n = \sum_{d|n} |H_d| \leqslant \sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

Alors pour tout d tel que $d \mid n$, on a $|H_d| = \varphi(d)$. En particulier, on a $|H_n| = \varphi(n) \geqslant 1$ donc H_n est non vide. Donc il existe (au moins) un élément d'ordre n, on $(\mathbb{K}^*, \times)$ est cyclique.

Solution 1.44.

1. *Soit $x \in M$. On a $\overline{1} - \overline{x}^{-1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{1}$ et $\overline{1} - \overline{x}^{-1} = \overline{1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{0}$, ce qui n'est pas possible pour les deux cas. Donc f est bien définie.*

Soit $x \in M$, on a

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(\overline{1} - \overline{x}^{-1}) \\ &= \overline{1} - (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1} \\ &= (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1} - \overline{1}) \\ &= -\overline{x}^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f^3(x) &= \overline{1} - (\overline{1} - (\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1})^{-1} \\ &= \overline{1} - (-x\overline{x}^{-1}(\overline{1} - \overline{x}^{-1})^{-1})^{-1} \\ &= \overline{1} + \overline{x}(\overline{1} - \overline{x}^{-1}) \\ &= \overline{1} + \overline{x} - \overline{1} \\ &= \overline{x} \end{aligned}$$

Donc $f^3 = id_M$.

2. *Soit $x \in M$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \overline{1} - \overline{x}^{-1} = x \\ &\iff \overline{x}^2 - \overline{x} + \overline{1} = \overline{0} \\ &\iff (\overline{x} - \overline{2}^{-1})^2 + \overline{3} \times \overline{4}^{-1} = \overline{0} \\ &\iff \overline{-3} = (\overline{2}\overline{x} - \overline{1})^2 \end{aligned}$$

f admet un point fixe si et seulement $\overline{-3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ car $\overline{y} = \overline{2}\overline{x} - \overline{1}$ si et seulement si $\overline{x} = \overline{2}^{-1}(\overline{y} + \overline{1})$.

3. *Comme p est premier plus grand que 5, on a $p \equiv 1$ ou $2[3]$ donc $p - 2 \equiv 0$ ou $2[3]$ car $f^3 = id_M$, les longueurs des cycles qui composent f valent 1 ou 3.*

   Si f n'a pas de point fixe, tous les cycles sont de longueur 3, donc $3 \mid p-2$ donc $p \equiv 2[3]$. Si $p \equiv 2[3]$, alors $3 \mid p - 2$, le nombre de points fixes est un multiple de 3 donc aussi du nombre de racine carrés de $\overline{-3}$. Et puisque l'on est dans un corps, il y a au plus 2 racines de $\overline{-3}$. Donc si $p \equiv 2[3]$, il n'y a pas de point fixe.

Solution 1.45. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que x possède un développement décimal périodique. Alors il existe $(n_0, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_{n+T} = a_n$. On a alors*

$$|x| = \underbrace{b_m \dots b_0, a_0 \dots a_{n_0-1}}_{\in\mathbb{Q}} + \frac{1}{10^{n_0-1}} \underbrace{(0, a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} a_{n_0} \dots)}_{=y}$$

$$10^T y - y = a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} \in \mathbb{N}$$

et donc

$$y = \frac{a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1}}{10^T - 1} \in \mathbb{Q}$$

Donc $x \in Q$.

Réciproquement, soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p = aq + b$ avec $b \in \{0, \dots, q-1\}$. Si $b = 0$, on arrête. On a sinon

$$x = a + \frac{1}{10^k} \frac{10^k b}{q}$$

où $k = \min\{m \geqslant 1 \mid 10^m b > q\}$. On réitère l'algorithme avec $\frac{10^k b}{q}$ car on a $\left\lfloor \frac{10^k b}{q} \right\rfloor \in \{1, \dots, 9\}$ par définition de k.

Il y a q restes possibles dans la division euclidienne par q. Ainsi, au bout d'au plus de $q+1$ itérations, on retrouve un reste précédent. Par unicité de la division euclidienne, on obtient un développement décimal périodique.

Remarque 1.19. On peut écrire $q = 2^a 5^b q'$ avec $q' \wedge 2 = q' \wedge 5 = 1$. On se ramène alors à $q \wedge 2 = q \wedge 5 = 1$. En reportant dans l'écriture décimale de x, on a

$$\frac{\alpha}{q} = \frac{\beta}{10^T - 1}$$

avec $\alpha \wedge q = 1$. On a donc $q \mid 10^T - 1$ d'après le lemme de Gauss. T revient donc à l'ordre de $\overline{10}$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times, \times)$ qui contient $\varphi(q)$ éléments. Par défaut, on a donc $T = \varphi(q)$.

Solution 1.46.

1. *Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $H_n(m) = 0 \in \mathbb{Z}$. Si $m \geqslant n$, on a $H_n(m) = \binom{m}{n} \in \mathbb{Z}$. Si $m < 0$, on a*

   $$H_n(m) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} = (-1)^n \binom{-m+n-1}{-m-1} \in \mathbb{Z}$$

   Donc $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

2. *Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$. On a $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ donc $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Supposons $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base étagée en degré de $\mathbb{C}[X]$. Donc il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$. Par récurrence, on a $P(0) = a_0 \in \mathbb{Z}$. Soit $k \in \{0, n-1\}$, supposons $(a_0, \ldots, a_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$. On a alors*

   $$P(k+1) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \underbrace{a_k}_{\in \mathbb{Z}} H_k}_{\in \mathbb{Z}} + a_{k+1} \underbrace{H_{k+1}(k+1)}_{=1}$$

   Donc $a_{k+1} \in \mathbb{Z}$.

Remarque 1.20. Les translation $X + \alpha$ sont les seules pour lesquelles on a $(X+\alpha)(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. En effet, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, on a $P \in \mathbb{Q}[X]$ d'après ce qui précède. Si $\deg(P) \geqslant 2$, quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer le coefficient dominant de P strictement positif. On a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} P'(x) = +\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que P est strictement croissant sur $[A, +\infty[$. De plus, $P(x+1) - P(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Donc il existe $A' > 0$ tel que $P(x+1) > P(x) + 1$. Pour $n \geqslant \max(A, A')$, on a $P(n+1) \geqslant P(n) + 2$ ce qui contredit $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Donc le degré de P est inférieur à 1.

Solution 1.47. *Le coefficient en X^k s'écrit $a_{k-1} - \alpha a_k \in \mathbb{Q}$. Si $a_k \in \mathbb{Q}$, on a donc $a_{k-1} \in \mathbb{Q}$. Il est donc impossible d'avoir deux coefficients consécutifs rationnels. Or $x_{n-1} \in \mathbb{Q}$ car c'est le coefficient dominant de P. Donc α est nécessairement racine simple.*

Solution 1.48. *Soit $\Delta = P \wedge P' = \Delta$. On a $\deg(\Delta) \in \{1,2,3,4\}$ car $\Delta \mid P'$.*

Si $\deg(\Delta) = 4$, alors $\Delta = P'$ (car associé). Donc il existe $\beta \in \mathbb{C}$ d'où $\underbrace{P}_{\in\mathbb{Q}[X]} = (X-\beta)\underbrace{P'}_{\in\mathbb{Q}[X]}$. Par division euclidienne, $X - B \in \mathbb{Q}[X]$ et $\beta \in \mathbb{Q}$ d'après l'algorithme de la division euclidienne.

Si $\deg(\Delta) = 1$, on a $P = X - \beta$ avec $\beta \in \mathbb{Q}$ racine de P.

Si $\deg(\Delta) = 2$, si $\Delta = (X-\beta)^2$, on a $\Delta' = 2(X-\beta) \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\beta \in \mathbb{Q}$ racine de Δ donc de P. Si $\Delta = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$. α_1 et α_2 sont racines doubles de P donc $P = (X-\beta)\underbrace{(X-\alpha_1)^2(X-\alpha_2)^2}_{=\Delta^2\in\mathbb{Q}[X]}$ Par division euclidienne, $X-\beta \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $\beta \in \mathbb{Q}$.

Si $\deg(\Delta) = 3$, si $\Delta = (X-\beta)^3$, on a $\Delta^{(2)} = 6(X-\beta) \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\beta \in \mathbb{Q}$. Si $\Delta = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)(X-\alpha_3)$ avec α_1, α_2 et α_3 distinctes. α_1, α_2 et α_3 seraient racines doubles de P ce qui contredit $\deg(P) = 5$. Si $\Delta = (X-\alpha)^2(X-\beta)$, α est racine triple de P et β racine double de P donc $P = (X-\alpha)^3(X-\beta)^2 \in \mathbb{Q}[X]$. Par division euclidienne, $(X-\alpha)(X-\beta) \in \mathbb{Q}[X]$ et

$$X - \alpha = \frac{\Delta}{(X-\alpha)(X-\beta)} \in \mathbb{Q}[X]$$

donc $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Solution 1.49.

1. $1 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}], 0 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}], \mathrm{i} \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$. *Soit $(a,b,a',b') \in \mathbb{Z}^4$:*

$$\begin{cases} (a+\mathrm{i}b) - (a'+\mathrm{i}b') = (a-a') + \mathrm{i}(b-b') \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \\ (a+\mathrm{i}b) \times (aa'-bb') + \mathrm{i}(ab'+ba') \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \end{cases}$$

Donc $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant i.

Soit A un sous anneau de $\mathbb{C}$ contenant i. A est stable par x donc $i^4 = 1 \in A$. A est stable par $+$ donc $\mathbb{Z} \subset A$, puis $\mathrm{i}\mathbb{Z} \subset A$ donc $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset A$. $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est donc le plus petit sous anneau de $\mathbb{C}$ contenant i.

2. *Si* $|z|^2 = 1$ *c'est-à-dire* $a^2 + b^2 = 1$*, alors*

$$\frac{1}{z} = \frac{a - \mathrm{i}b}{|z|^2} = a - \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$$

Si z *est inversible dans* $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$*, il existe* $' \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ *tel que* $zz' = 1$ *donc* $|z|^2|z'|^2 = 1$ *donc* $|z|^2 = 1$.

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$*. Si* $|a| \geqslant 2$ *ou* $|b \geqslant 2$*, alors* $a^2 + b^2 \geqslant 4$ *donc si* $|z|^2 = 1$*, alors* $a^2 + b^2 = 1$ *et* $\Big(|a| = 1 \text{ et } |b| = 0\Big)$ *ou* $\Big(|a| = 0 \text{ et } |b| = 1\Big)$*. Donc*

$$U = \{1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$$

3. (a) *Si* $x \in \mathbb{R}$*, il existe* $n \in \mathbb{Z}$ *tel que* $|x - n| \leqslant \frac{1}{2}$ *(faire un dessin et le montrer grâce aux parties entières). Soit alors* $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$*, on prend un* $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $|x_0 - a| \leqslant \frac{1}{2}, |y_0 - b| \leqslant \frac{1}{2}$*. Et pour* $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$*, on a* $|z - z_0|^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \leqslant \frac{1}{2}$.

   (b) *Soit* $(q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$*, on a* $z_1 = qz_2 + r$ *si et seulement si* $\frac{z_1}{z_2} - q = \frac{r}{z_2}$*. On a* $|r| < |z_1|$ *si et seulement si* $\left|\frac{z_1}{z_2} - q\right| < 1$*. On a* $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$ *donc d'après 3.(a), il existe* $q \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ *tel que* $\left|\frac{z_1}{z_2} - q\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$*. On pose alors* $r = z_1 - qz_2 \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ *par stabilité. Il vient donc* $|r| < |z_2|$

   Il n'y a pas unicité : par exemple $z_2 = 1$ *et* $z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{2}$*. On peut prendre* $q \in \{0, 1, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i}\}$.

   (c) *Soit* $I \neq \{0\}$ *un idéal de* $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$*. On note* $n_0 = \min\{|z|^2 \mid z \in I \setminus \{0\}\}$ *(partie non vide de* $\mathbb{N}^*$*). Soit* $z_0 \in I \setminus \{0\}$ *tel que* $|z_0|^2 = n_0$*. On a directement* $z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}] \subset I$ *(*I *est un idéal).*

   Réciproquement, soit $z \in I$*, d'après 3.(b), il existe* $(q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ *tel que*

$$r = \underbrace{z}_{\in I} - \underbrace{z_0}_{\in I}\underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]} \in I$$

   et $|r|^2 < n_0$*. Nécessairement,* $r = 0$ *et* $z = z_0q \in z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$*. Donc* $I = z_0\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$*. Finalement,* $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ *est principal.*

4. *Si* $|z|^2 = 1$*, alors* $z \in U$ *donc c'est bon. On travaille ensuite par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}^*$*. Supposons que la décomposition existe pour* $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ *avec* $|z|^2 \leqslant n$*. Soit* $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ *tel que* $|z|^2 = n + 1$*. On a* $|z|^2 \geqslant 2$ *donc* $z \in U$*. Si* z *est irréductible, c'est bon. Sinon, il existe*

$(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ tel que $z = z_1 z_2$ et z_1 et z_2 non inversibles. Alors $|z_1|^2 \geqslant 2$ et $|z_2|^2 \geqslant 2$. Or $|z|^2 = n+1 = |z_1|^2 |z_2|^2$ donc $|z_1|^2 \leqslant n$ et $|z_2|^2 \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, on peut décomposer z_1 et z_2, donc z est décomposable.

Pour l'unicité, soit $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \setminus \{0\}$ tel que $z = u \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\nu_\rho(z)} = v \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\mu_\rho(z)}$. Le théorème de Gauss est valable dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, car c'est un anneau principal. S'il existe $\rho_0 \in \mathcal{P}_0$ tel que $\nu_{\rho_0}(z) < \mu_{\rho_0}(z)$, alors

$$\rho_0 \,\Big|\, \prod_{p \in \mathcal{P}_0 \setminus \{\rho_0\}} \rho^{\nu_\rho(z)}$$

ce qui est proscrit par le théorème de Gauss. On a donc pour tout $\rho \in \mathcal{P}_0$, $\nu_\rho(z) = \mu_\rho(z)$. En reportant, on a $u = v$. D'où l'unicité de la décomposition.

Solution 1.50.

1. *On a $\overline{1} \in R$. Soit $(\overline{x_1}, \overline{x_2}) \in R^2$, il existe $(\overline{y_1}, \overline{y_2}) \in (\mathbb{F}_p^*)^2$ tel que $\overline{x_1} = \overline{y_1}^2$ et $\overline{x_2} = \overline{y_2}^2$. On a alors*

$$\overline{x_1 x_2}^{-1} = (\overline{y_1 y_2}^{-1})^2 \in R$$

donc R est un sous groupe de $(\mathbb{F}_p^*, \times)$. Soit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{F}_p^* & \to & \mathbb{F}_p^* \\ & \overline{y} & \mapsto & \overline{y}^2 \end{array}$$

On a $\mathrm{Im}(\varphi) = R$. Comme $\mathbb{F}_p$ est un corps, chaque éléments de R a exactement 2 antécédents par φ. Donc $|R| = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{2} = \frac{p-1}{2}$.

S'il existe $\overline{y} \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $\overline{a} = \overline{y}^2$, on a $\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{y}^{p-1} = \overline{1}$ par le théorème de Fermat.

Réciproquement, si $\overline{a}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$, $X^{\frac{p-1}{2}} - \overline{1}$ admet au plus $\frac{p-1}{2}$ racines dans $\mathbb{F}_p^*$. Tous les éléments de R sont racines de ce polynôme, ce sont donc ses seules racines. Donc $a \in R$.

2. *Si $p = a^2 + b^2$, alors $\overline{0} = \overline{a}^2 + \overline{b}^2$. Si $\overline{a} = \overline{b} = \overline{0}$, on a $p \mid a$ et $p \mid b$ donc $p^2 \mid p$ ce qui est exclu. Par exemple, si $\overline{a} \neq \overline{0}$, on a $\overline{1} = -\overline{b}^2 \overline{a}^{-2}$ donc $\overline{-1} = (\overline{a}^{-1}\overline{b})^2 \in R$ d'après 1. On a donc $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ si et seulement si $2 \,\big|\, \frac{p-1}{2}$ (car p est premier plus grand que 3) d'où $4 \mid p-1$ donc $p \equiv 1[4]$.*

3. *On a $|\mathbb{F}_p| = p$, $E(\sqrt{p}) \leqslant \sqrt{p} < E(\sqrt{p}) + 1$ et $|\{0, \ldots, E(\sqrt{(p)})\}|^2 = (E(\sqrt{p}) + 1)^2 > p$ (p est premier, ce n'est pas un carré) donc f n'est pas injective (cardinalité).*

Donc il existe

$$((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \in (\{0,\dots,E(\sqrt{p})\}^2)^2$$

avec $(a_1,b_1) \neq (a_2,b_2)$ *et* $f(a_1,b_1) = f(a_2,b_2)$. *Donc*

$$\overline{a_1} - \overline{kb_1} = \overline{a_2} - \overline{kb_2} \Rightarrow \overline{a_1} - \overline{a_2} = \overline{k}(\overline{b_1} - \overline{b_2})$$

Si $\overline{b_1} = \overline{b_2}$, *alors* $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ *donc* $p \mid b_1 - b_2$ *et* $p \mid a_1 - a_2$ *donc* $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$ *ce qui n'est pas vrai. Donc* $\overline{b_1} \neq \overline{b_2}$. *Posons* $b_0 = b_1 - b_2$ *et* $a_0 = a_1 - a_2$. *On a* $\overline{b_0} \neq \overline{0}$. *Il vient donc* $(|a_0|,|b_0|) \in \{1,\dots,E(\sqrt{p})\}^2$, $\overline{a_0} = \overline{kb_0}$ *donc* $\overline{k} = \overline{a_0}\overline{b_0}^{-1}$.

4. *Si* $p \equiv 1[4]$, *en remontant les calculs, on a* $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ *donc* $\overline{-1} \in R$ *et il existe* $\overline{k} \in \mathbb{F}_p^*$ *tel que* $\overline{-1} = \overline{k}^2$. *Alors d'après 3., il existe* (a_0,b_0) *tels que* $\overline{k} = \overline{a_0}\overline{b_0}^{-1}$. *Il vient alors* $\overline{-1} = \overline{a_0}^2(\overline{b_0}^{-1})^2$ *donc* $\overline{-b_0}^2 = \overline{a_0}^2$. *On a*

$$p \mid a_0^2 + b_0^2 \in \{2,\dots,2E(\sqrt{p})\}^2 \subset \{2,\dots,2p-1\}$$

Nécessairement, $a_0^2 + b_0^2 = p$ *et* p *est somme de deux carrés.*

Solution 1.51.

1. *Soit* $(m,n) \in A^2$. *Il existe* $(a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4$ *tel que* $m = a^2 + b^2 = |a + \mathrm{i}b|^2$ *et* $n = c^2 + d^2 = |c + \mathrm{i}d|^2$. *Donc*

$$m \times n = |ac - bd6\mathrm{i}(bc + ad)|^2 = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \in A$$

2. *On a*

$$n = \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_1} p^{\nu_p(n)}}_{\in A \text{ car } \mathcal{P}_1 \subset A} \times \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{\nu_p(n)}}_{= \prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{2\alpha_p} \in A} \in A$$

3. *Soit* $n \in A$, *il existe* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $n = a^2 + b^2$. *Soit* $p \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, *on a* $p \mid a^2 + b^2$ *donc* $\overline{a^2 + b^2} = \overline{0}$ *dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. *Si* $p \nmid a$ *ou* $p \nmid b$, *alors* $\overline{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \overline{0}$ *donc* $\overline{-1} \in R$ *(résidus quadratiques, voir exercice précédent). Donc* $p = 2$ *ou* $p \equiv 1[4]$.

   Si $p \mid a$ *et* $p \mid b$, $a = p^k a', b = p^l b'$ *avec* $p \nmid a'$ *et* $p \nmid b'$. *On suppose* $1 \leqslant k \leqslant l$ *(quitte à échanger* a *et* b*). On a*

$$a^2 + b^2 = p^{2k}(a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2) = n$$

donc

$$p \mid a'^2 + p^{2(l-k)b'^2}$$

et $\overline{a'}^2 + \overline{p^{2(l-k)}}\overline{b'}^2 = \overline{0}$. *Nécessairement,* $l = k$. *De même* $p \in \mathcal{P}_1$. *Par contraposée,* ν_p *est pair.*

2 Séries numériques et familles sommables

Solution 2.1.

1. *On a* $b_0 = a_1 = 5, b_1 = a_3 = 13$ *et pour* $p \geqslant 2$, $b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$.

   On a donc l'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$. *Les deux solutions sont 3 et -1.*

   Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$.

   On a alors $b_0 = 5 = \lambda + \mu$ *et* $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$. *On trouve alors*

   $$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}}$$

2. *On le montre par récurrence sur* $p \in \mathbb{N}$.

3. *Si* $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, *on a* $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$. *Alors*

   $$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p}$$

   Soit $\sigma\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que*

   $$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$$

   Soit $p_n \in \mathbb{N}$ *tel que* $3^{p_n} \leqslant \sigma(n) < 3^{p_n+1}$. *On a*

   $$p_n = \lfloor \log_3(\sigma(n)) \rfloor \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

   En reportant, on a $\frac{3}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{9}{2}$.

   Si $\sigma(n) = 3^n$, *on a*

   $$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{9}{2}$$

   Si $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$, *on a*

   $$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{2}$$

   Soit $\mu \in [1, 3[$ *et* $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} 3^n \mu$. *Alors*

   $$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{9}{2\mu}$$

   $$\boxed{\text{Donc tout réel compris dans } \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right] \text{ est valeur d'adhérence.}}$$

Solution 2.2.

1.
$$\begin{array}{rccc} g: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$$

   est continue, $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $l \in [a,b]$ avec $g(l)=0$, d'où

$$\boxed{f(l)=l}$$

2. *On note $A = \{\lambda \mid \lambda$ est valeur d'adhérence$\}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que A est non vide. De plus, A est borné car $A \subset [a,b]$. Soit $\lambda = \inf(A)$ et $\mu = \sup(A)$.*

   Si $\lambda = b$, on a $\mu = b$ et $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$.

   Si $\lambda < b$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \notin A$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in]\lambda, \lambda+\varepsilon[\}$ est infini. Par définition, λ est valeur d'adhérence. Donc $\lambda \in A$, et de même $\mu \in A$.

   Soit $\nu \in]\lambda,\mu[$ avec $\lambda < \mu$. Si $\nu \notin A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$ est fini. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $x_n \notin]\nu - \varepsilon_0, \nu+\varepsilon_0[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|x_{n+1}-x_n| < 2\varepsilon_0$. Soit alors $n \geqslant \max(N_0, N_1)$. Si $x_n \leqslant \nu - \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \leqslant \nu - \varepsilon_0$. Si $x_n \geqslant \nu + \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \geqslant \nu + \varepsilon_0$. Ceci contredit que λ et μ sont valeur d'adhérence.

   Ainsi, $\nu \in A$ et

$$\boxed{[\lambda,\mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}}$$

3. *Si (x_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, d'après 2., on a $A = [\lambda, \mu]$. On suppose $\lambda < \nu$. Ainsi, $\frac{\lambda+\nu}{2} = \alpha$ est valeur d'adhérence. Donc il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$ par continuité de f et c'est aussi égale à $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Ainsi,*

$$\boxed{f(\alpha)=\alpha}$$

   Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda, \mu]$ et $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x_n = x_{n_0}$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lambda = \mu$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et a une *unique valeur d'adhérence.*

$$\boxed{\text{Donc } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Solution 2.3. *On a $u_n = e^{\mathrm{i}2^n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ car $l = l^2$ et $|l| = 1$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique au-delà d'un certain rang, il existe $T \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $u_{n+T} = u_n$. En particulier, $u_{N_0+T} = u_{N_0}$. On veut alors $2^{N_0+T}\theta \equiv 2^{N_0}\theta[2\pi]$. D'où $2^{N_0+T}\theta = 2\theta + 2k\pi$ donc $2^{N_0}(2^T-1)\theta = 2k\pi$. Donc $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $U_{N+1} = U_N = U_{N^2}$. Comme $|U_N| = 1$, alors $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $\frac{\theta}{2\pi}$ est dyadique.

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$ (nombre dyadique). Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $u_n = u_{n_0} = 1$.

Pour la densité, on prend une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en écrivant successivement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous les paquets de k entiers sont dans $\{0,1\}^k$. Soit $x \in [0,1[$ tel que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $p_N \in \mathbb{N}$,

$$2^{p_N}\theta = 2\pi\underbrace{(\dots)}_{\in\mathbb{N}} + 2\pi\Big(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in[0,\frac{1}{2^N}[}\Big)$$

On a alors

$$e^{\mathrm{i}2^{p_N}\theta} = e^{\mathrm{i}2\pi(\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_N}{2^N}+\dots)}$$

et

$$\left|\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} - x\right| \leqslant \frac{1}{2^N}$$

D'où $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{p_N} = e^{\mathrm{i}2\pi x}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $\mathbb{U}$.

Solution 2.4. *Si* $a = 0$ *et* $b = 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a = 0$ *et* $b \neq 0$ *(ou inversement),* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a > 0$ *ou* $b > 0$, *on a*

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(\frac{e^{\frac{1}{n}\ln(a)} + e^{\frac{1}{n}\ln(b)}}{2}\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + \frac{1}{4n^2}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{n}{2}\ln(ab) + \frac{1}{4}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2 + o(1))\Big) \end{aligned}$$

Si $ab > 1$, *on a*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Si $ab < 1$, *on a*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Si $ab = 1$, *on a*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}\ln(a)^2}}$$

Solution 2.5.

1. *Soit* $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n > 0$ *(car* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$*).*

$$J = \left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; x_k \geqslant \frac{M}{2}\right\}$$

est fini car $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et est non vide. On définit*

$$\varphi(0) = \min\left\{k \in J \;\middle|\; x_k = \max\{x_n \mid n \in J\}\right\}$$

Pour tout $n \in J$, $x_{\varphi(0)} \geqslant x_n$. *Si* $n \notin J$, $x_n \leqslant \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$. *Ainsi,*

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

Puis on recommence avec

$$\left\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\}\right\}$$

2. Pour $l = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_N < \varepsilon$. On pose

$$\boxed{I = \{N\}}$$

et on a bien

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leqslant \varepsilon$$

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{N} x_k > A$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$). Donc on peut prendre

$$\boxed{I = \{0, \dots, N\}}$$

Si $l \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < l$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $x_n < \varepsilon$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$. Donc il existe un plus petit entier N_1 tel que $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geqslant l - \varepsilon$. Comme $x_{N_1} < \varepsilon$, on a $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leqslant l + \varepsilon$. Donc

$$\boxed{I = \{N_0, \dots, N_1\}}$$

Solution 2.6. *On pose*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$$

Montrons que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. D'abord, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} >$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = l \in \overline{R}_+^*$. Si $l < +\infty$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l}$ et donc $u_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l^2}$ et la série diverge. Donc $l = +\infty$ et comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On observe ensuite que $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$ donc $S_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} S_n$. Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{= \ (S_n - S_{n-1}) S_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{= \ S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$$

On applique le théorème de Césaro à la suite $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$, *et comme* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, *on a bien*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Réciproquement, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ *avec* $u_0 = 1$. *On a*

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}}$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}}$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1}$$

Remarque 2.1. On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha}$$

Solution 2.7. *Tout d'abord, on montre que pour tout* $x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$$

en posant

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $[0,1]$ *et on a* $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geqslant 0$ *et* $f'(0) = 0$. *Comme* $f(0) = 0$, *on a pour tout* $x \in [0,1], f(x) \geqslant 0$.

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur f, on a

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leqslant \cosh(1)} \leqslant x^4$$

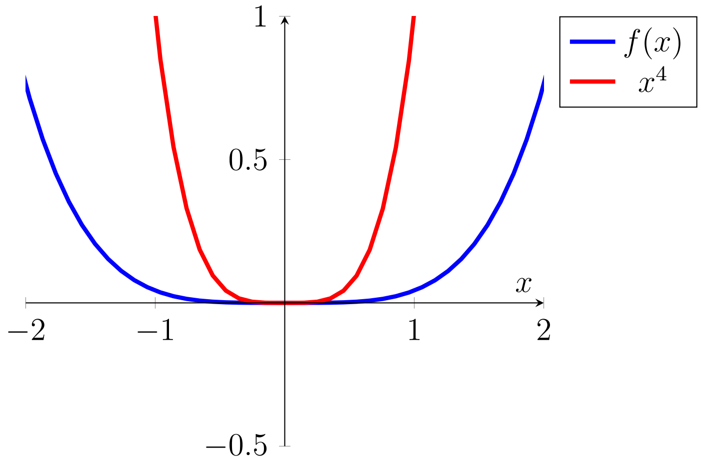

FIGURE 1 – $0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^{n} \Big[\cosh\Big(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\Big) - 1\Big]$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}}$$

Solution 2.8. *φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$.*

On a

$$0\varphi(a_n) \leqslant \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$$

Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| > \varepsilon$. Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geqslant \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0$$

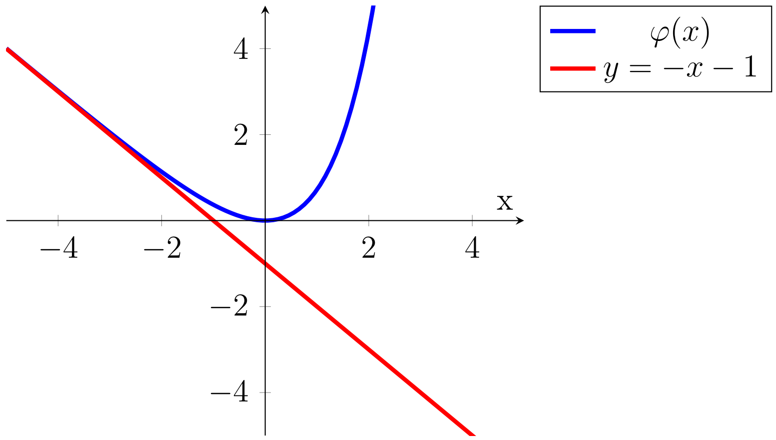

FIGURE 2 – $e^x - x - 1 \geqslant -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ce qui contredit $\lim_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$. *Donc*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

et c'est pareil pour b_n *et* c_n.

Solution 2.9.

1. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x(1-x) \end{array}$$

On a $f(x) \in]0, \frac{1}{4}]$. *Pour tout* $n \in \geqslant 1$, $u_n \in]0, \frac{1}{4}]$. *Par récurrence, on a donc* $u_{n+1} \leqslant u_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\textit{Donc } v_n \textit{ est bien définie.}}$$

2. *On a*

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1)$$

Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. *D'après le théorème de Césaro, on a*

$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ *et* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

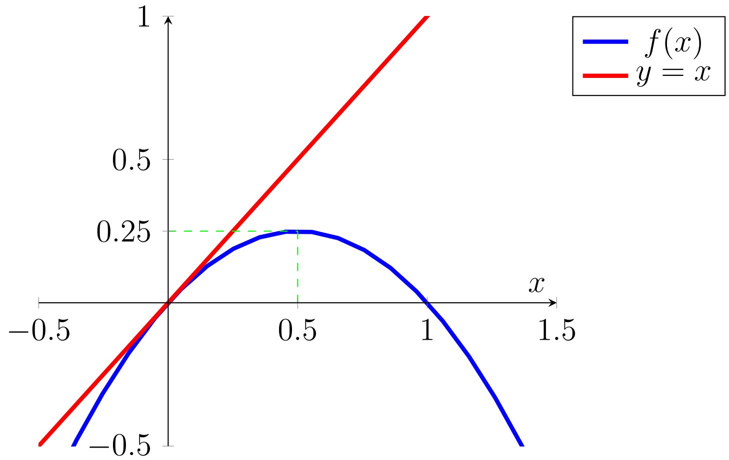

FIGURE 3 – $x(1-x) \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ pour $x \in]0,1[$.

On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{= O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ *donc* $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. *En sommant, on a donc*

$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n + \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})} \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \alpha_n} \end{aligned}$$

α_n *est le terme genéral d'une série à termes positifs convergentes car* $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. *Donc*

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et en sommant,

$$\boxed{v_n = n + \ln(n) + O(1)}$$

et comme montré auparavant,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}$$

Solution 2.10.

1. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n - x - n \end{array}$$

On a $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 = 0$ *si et seulement si*

$$x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n$$

$f_n(0) = 0$ *et* $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. f_n *est monotone strictement sur* $]\alpha_n, +\infty[$.

$$\boxed{\textit{Donc il existe un unique } x_n \in \mathbb{R}^+ \textit{ tel que } f_n(x_n) = 0}$$

On a $f_n(1) = -n < 0$ *donc* $x_n > 1$ *et* $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ *pour* $n \geqslant 3$ *(on a* $x_2 = 2$*).*

Donc pour $n \geqslant 3$, $x_n \in]1, 2[$.

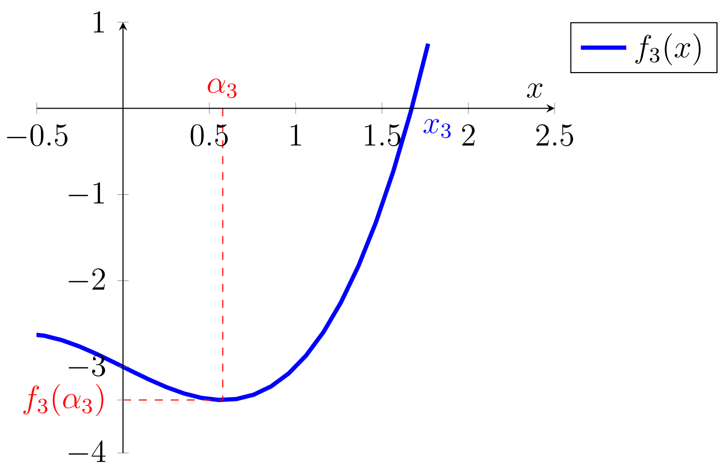

FIGURE 4 – $x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur $\mathbb{R}_+$.

2. *On a* $x_n^n = x_n + n \leqslant 2 + n$ *donc*

$$1 \leqslant x_n \leqslant (2+n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(2+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$$

3. *On peut poser* $x_n = 1 + \varepsilon_n$ *avec* $\varepsilon_n > 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. *On a*

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n$$

donc

$$n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln(1+\varepsilon_n+n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\Big(1 + \frac{1+\varepsilon_n}{n}\Big)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}}$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)$$

On a enfin

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n = 1 + n + \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\ln(1+\varepsilon_n) &= \frac{1}{n}\ln(n + 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)) \\
&= \frac{1}{n}\Big[\ln(n) + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{=\ o\left(\frac{1}{n}\right)}\Big)\Big] \\
&= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)
\end{aligned}$$

donc

$$1 + \varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)}$$

Solution 2.11. *On note*

$$v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1}a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a$ alors $v_n = a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. De manière générale, on a

$$v_n - a = v_n - a\frac{u_n + \cdots + u_0}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}(a_k - a)}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Ainsi,

$$|u_n - a| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}|a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $|a_k - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge, on note $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k - a|$. Soit $n \geqslant N$, on a

$$\begin{aligned}
|v_n - a| &\leqslant \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k}|a_k - a| + \sum_{k=N}^n |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \\
&\leqslant \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k M}{u_0 + \cdots + u_n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N}^n u_{n-k}\frac{\varepsilon}{2}}{u_0 + \cdots + u_n}}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}}
\end{aligned}$$

car les u_i sont positifs.

On remarque enfin que

$$\begin{aligned}
u_n &= o(u_0 + \cdots + u_n) \\
u_{n-1} &= o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\
&\vdots \\
u_{n-N+1} &= o(u_0 + \cdots + u_n)
\end{aligned}$$

Donc

$$M\frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et il existe $N' \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$, on a

$$M\frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, on a $|v_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ et ainsi

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = a}$$

3 Probabilités sur un univers dénombrable

4 Calcul matriciel

5 Réduction des endomorphismes

Solution 5.1. *Si on a (i), soit x un vecteur propre associé à $\rho(u) = \rho e^{i\theta}$. On a $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$ et comme $x \neq 0$, on a $\rho(u) \leqslant \|\!|\rho(u)|\!\| < 1$ d'où (ii).*

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford $u = n + d$ avec n nilpotent, d diagonalisable et $dn = nd$. Soit $m = \dim(E)$. Pour tout $p \geqslant m$, on a

$$u^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{} 0}$$

En effet, on a $k \geqslant m-1$ fixé, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\binom{p}{k} \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \operatorname{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

car $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et

$$\binom{p}{k} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\rho(u)^p}\right)$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit x un vecteur propré associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ donc en particulier, $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, donc $\rho(u)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\rho(u) \geqslant 0$ donc $\rho(u) < 1$. Posons encore $u = d + n$ la décomposition de Dunford de u. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ base de E dans laquelle les coefficients de $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$ sont en module $\leqslant \varepsilon$. Définissons sur E

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} x_i e_i\right\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i|$$

Soit $M = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$ triangulaire supérieure avec $m_{ii} = \lambda_i$ et pour tout $j \neq i$, $|m_{i,j}| < \varepsilon$. Soit donc $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \in \mathbb{C}^m$, on a

$$\|Mx\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \underbrace{\left|\sum_{j=1}^{m} m_{i,j} x_j\right|}_{(|\lambda_i| + (m-1)\varepsilon)\|x\|_\infty}$$

donc

$$\|\!|u|\!\| \leqslant \underbrace{\rho(u)}_{<1} + (m-1)\varepsilon$$

et on choisit

$$\varepsilon < \frac{1-\rho(u)}{\underbrace{m-1}_{>0}}$$

d'où $|||u||| < 1$ *et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence.*

Remarque 5.1. $u \mapsto \rho(u)$ n'est pas une norme car pour u nilpotente non nulle, $\rho(u) = 0$.

Solution 5.2. *Supposons (i), soit* Y *un vecteur propre de* A *avec* $AY = \lambda Y$ *pour* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}, BA^kY = \lambda^k BY$ *et il existe* $k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\lambda^{k_0}BY \neq 0$ *et* $BY \neq 0$ *donc on a (ii).*

Si (ii), supposons qu'il existe $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ *tel que* $\varphi = 0$. *On note*

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{r} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

avec les λ_i *distincts. Alors* $Y = \sum_{i=1}^r Y_i$ *où* $Y_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)$. *Il existe* $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ *tel que* $Y_{i_0} \neq 0$ *car* $Y \neq 0$. *On a alors, pour* $t \in \mathbb{R}$,

$$B\exp(tA)Y = \sum_{i=1}^{r} B\exp(t\lambda_i)Y_i = 0$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, *on a* $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^r B\lambda_i^k \exp(t\lambda_i)Y_i = 0$. *Pour* $t = 0$ *on a* $\sum_{i=1}^r \lambda_i^k BY_i = 0$ *ce qui, pour* $t = 0$, *donne le système*

$$\begin{cases} BY_1 + \cdots + BY_r & = 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \cdots + \lambda_r BY_r & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_1^{r-1}BY_1 + \cdots + \lambda_r^{r-1}BY_r & = 0 \end{cases}$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$, *on a donc* $\sum_{i=1}^r P(\lambda_i)BY_i = 0$. *Pour* $i \in \{0, \dots, r-1\}$ *et* $P = \prod_{i \neq j} \frac{(X-\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$, *on obtient pour tout* $i \in \{1, \dots, r\}, BY_i = 0$. *En particulier,* $BY_{i_0} = 0$ *et* Y_{i_0} *est un vecteur propre de* A *car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).*

Soit $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, *supposons que pour tout* $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $BA^kY = 0$. *Soit* $k \geqslant n$, *il existe* $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$ *tel que*

$$X^k = Q_k \chi_A + R_k$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc $A^k = R_k(A)$ *d'où* $BA^kY = BR_k(A)Y = 0$*. Alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned} B\exp(tA)Y &= B\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} Y \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (BA^kY)}{k!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence.

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. *A $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & x\cos(t) + y\sin(2t) \end{array}$$

est bornée, donc le sup *sur $\mathbb{R}$ existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au* sup *sur $\mathbb{R}$.*

2. *Si $|x| + |y| \leqslant 1$, alors $N(x,y) \leqslant 1$ donc on a la première inclusion.*

Si $N(x,y) \leqslant 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leqslant 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leqslant \left| x\frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x\frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leqslant 2$$

et donc $|y| \leqslant 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. *On fixe $(x,y) \in S_N(0,1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π-périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limite à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ.*

On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leqslant x|\cos(t)| + y|\sin(2t)| = |\varphi(-t)|$$

et $-t \in [0, \pi]$. Donc le sup *est atteint sur $[0, \pi]$.*

On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leqslant \varphi(t) = x \underbrace{\cos(t)}_{\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]} + y\sin(2t) \leqslant x \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]} + y\sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t)$$

Donc le sup *est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le* sup *(existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le* sup *sur $\mathbb{R}$ qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.*

On a donc $x\cos(t_0) + y\sin(2t_0) = 1$ et $-x\sin(t_0) + 2y\cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0, en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.

Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que x et y s'écrivent de la façon demandée, alors t_0 est l'unique point satisfaisant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$. Mais alors le sup *de φ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est atteint en un point t_1 qui vérifie les mêmes choses, donc $t_1 = t_0$ d'où $N(x, y) = 1$.*

Solution 6.2.

1. *Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur E*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (f, g) & \mapsto & f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \end{array}$$

   Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$ et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. *Pour $x \in [0, 1]$, écrire $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, utiliser Cauchy-Schwarz avec f' et 1 puis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a + b}$, pour enfin passer au* sup *sur x.*

3. *Utiliser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction*

$$\begin{array}{rccl} f_n : & [0, 1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^n \end{array}$$

Solution 6.3. *Si f est ouverte, $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de R^p. Donc f est surjective.*

Si f est surjective, on prend F un supplémentaire de $\ker(f)$ *dans $\mathbb{R}^n$ avec* $\dim(\ker(f)) = n - p$ *et* $\dim(F) = p$. *Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de* $\ker(f)$. *On vérifie que $(f(e_1, \ldots, f(e_p))$ est une base de $\mathbb{R}^p$. On définit*

$$\begin{array}{rccl} N_1 : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & \sum_i^n x_i e_i & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^n$ et

$$\begin{array}{rccl} N_2 : & \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ & \sum_i^p y_i f(e_i) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |y_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^p$.

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $y_0 \in f(\Theta)$, il existe $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. Comme Θ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta$$

Soit $y = \sum_{i=}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, si $N_2(y - y_0) < r_0$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{def}{=} f(x)$$

avec $N_1(x - x_0) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. Ainsi $x \in \Theta$ et $y \in f(\Theta)$, donc $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ et $f(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.4.

1. *Classique.*

2. $$|f(x)| \leqslant |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leqslant |f(0)| + \kappa(f)x \leqslant N(f)$$

   car $x \leqslant 1$, donc $N_\infty \leqslant N$. Pour la non-équivalence, prendre

   $$\begin{array}{rccc} f_n : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & t^n \end{array}$$

3. *On a $|f(0)| \leqslant N_\infty(f)$ donc $N(f) \leqslant N'(f)$. Ensuite, $N_\infty \leqslant N$ donne $N' \leqslant N + \kappa \leqslant 2N$. Donc N est N' sont équivalentes.*

Remarque 6.1. Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend $(e_i)_{i \in I}$ une base (de Hamel), $J = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ dénombrable. Si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, on peut vérifier que

$$N_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n |x_{i_{2n}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. *Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$. Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$. Alors*

$$\left\| T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right) - I_n \right\|_\infty = \left|\frac{\lambda}{p}\right| < \alpha$$

donc $T_{i,j}(\lambda) \in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left(T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)^p \in G$$

Soit $\delta = \rho e^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}} = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$.

On a alors

$$\left\| D_n\left(\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}}\right) - I_n \right\|_\infty < \alpha$$

donc $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}})^p \in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G = GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 6.2. C'est faux sur $\mathbb{R}$. Contre-exemple : matrices de déterminant positif.

Solution 6.6. *Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $h \in E$ avec $\|h\| \leqslant \alpha$ et $\|f(h)\| > \varepsilon_0$. On prends $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\| \leqslant 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leqslant M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x \in E$,*

$$\lim_{\|h\| \to 0} f(x+h) = \lim_{\|h\| \to 0} f(x) + f(h) = f(x)$$

donc f est continue.

On a $f(px) = p(fx)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que

$\lim_{n \to +\infty} r_n = \lambda$. *Comme* f *est continue, on a*

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lim_{n \to +\infty} f(r_n x) \\ &= \lim_{n \to +\infty} r_n f(x) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Donc f *est linéaire.*

Remarque 6.3. Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i \in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ $(0 \in I)$. On définie

$$f\Big(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\Big) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i \in I \setminus \{0\}} \lambda_i e_i$$

f vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \to \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. *On a* $\alpha(A) \subset \overline{A}$ *donc* $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ *donc* $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. *Comme* $\alpha(A)$ *est un ouvert inclus dans* $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ *donc* $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.
2. *Si* $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$, *on montre aussi que* $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. *On a donc* $A, \overline{A}, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ *et* $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ *et c'est tout.*

Solution 6.8.

1. *Si* $d_A = d_B$,
$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B}$$
Réciproquement, soit $x \in E$ *et* $\varepsilon > 0$, *il existe* $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_i\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ *(par définition de l'inf). Il existe* $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ *(par définition de la fermeture). Ainsi,*
$$d_A(x) \leqslant \|x - a_2\| \leqslant \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$$
Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$. *Comme* $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leqslant d_A$, *on a* $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.
2. *Soit* $x \in A$, *on a* $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leqslant \rho(A, B)$ *donc* $\sup_{x \in A} d_B(x) \leqslant \rho(A, B)$, *de même pour* $\sup_{y \in B} d_A(y)$ *donc on on a un première inégalité.*

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x-a\| \leqslant d_A(x)+\varepsilon$ et $\|x-b\| \leqslant d_B(x)+\varepsilon$. On a alors

$$d_A(x) \leqslant \|x-a\| \leqslant \|a-b\| + \|x-b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A,B)$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leqslant d_B(x) + \alpha(A,B)$. De même, $d_B(x) \leqslant d_A(x) + \alpha(A,B)$ donc $\rho(A,B) \leqslant \alpha(A,B)$.

Solution 6.9.

1. *Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\lim\limits_{z\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \to x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur $\mathbb{C}$, on a $y = P(x) \in P(F)$.*

2. *Soit Θ un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $y \in P(\Theta), \exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x,r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x-x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominatrice de P. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi*

$$|Q(x)| = |y-y'| \geqslant |a|r^n$$

Par contraposée, si $|y-y'| \leqslant \frac{|a|r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x'-x| < r$.Ainsi, $x' \in B(x,r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y,|a|r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.10.

1. *Si $P \notin \mathcal{S}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$ et $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$. Par contraposée, si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$,alors $P \in \mathcal{S}$.*

   Réciproquement, si $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$ avec $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ réels, soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$. On a

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^{n} |a - \lambda_i + ib| \geqslant |b|^n$$

2. *Soit $(P_p)_{p\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $P_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} P \in F$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|P_p(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc quand $p \to +\infty$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$ donc $P \in \mathcal{S}$ et S est fermé.*

3. *Soit* $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite de matrice trigonalisable sur* $\mathbb{R}$ *qui converge vers* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Ib bite* χ_p *le polynôme caractéristique de* M_p. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $\chi_p \in \mathcal{S}$ *et* $\chi_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \chi_M$. *Comme* $\mathcal{S}$ *est fermé,* $\chi_M \in \mathcal{S}$ *et* M *est trigonalisable sur* $\mathbb{R}$.

Solution 6.11.

1. φ *est linéaire et* $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n + = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$.

   Si φ *est bijective, elle est surjective et il existe* $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ *tel que* $UA + BV = 1$ *et d'après le théorème de Bézout, on a* $A \wedge B = 1$.

   Réciproquement, si φ *n'est pas surjective, il existe* $(U, V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \backslash \{(0, 0)\}$ *tel que* $\varphi(U, V) = 0$ *d'où* $AU = -BV$. *Soit* $\delta = A \wedge B$, *on écrit* $A = \delta A_1$ *et* $B = \delta B_1$ *avec* $A_1 \wedge B_1 = 1$ *et on a* $A_1 U = -B_1 V$. *D'après le théorème de Gauss, on a* $A_1 \mid V$ *et* $B_1 \mid U$. *Si* $U = 0$, *on a* $V = 0$ *et de même si* $V = 0$, *on a* $U = 0$. *On peut donc supposer* $U \neq 0$ *et* $V \neq 0$, *et on a alors* $\deg(A_1) \leqslant \deg(V) \leqslant n - 1 < n = \deg(A)$ *mais* $A = \delta A_1$ *donc* $\deg(\delta) \geqslant 1$ *et* $A \wedge B \neq 1$.

2. Φ *est continue car* $R_{A,B}$ *est un polynôme en les coefficients de* A *et* B.

3. *Comme on est dans* $\mathbb{C}$, $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$. $\Phi_{P,P'}$ *est continue d'après la question précédente,* $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$ *donc* Δ *est ouvert.*

   Sur $\mathbb{R}$, *on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si* $P \wedge P' = 1$ *(contre-exemple :* $P = X^2 + 1$*). Dans* $\mathbb{R}_3[X]$, X *est scindé à racines simples et* $X(1 + \varepsilon X)^2 \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} X$ *et* $-\frac{1}{\varepsilon}$ *est racine double, donc* Δ *n'est pas ouvert.*

Remarque 6.4. On peut cependant considérer

$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\}$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ sont les racines (distinctes) de R sur $\mathbb{R}$, on choisit $\alpha_0 \in]-\infty, \lambda_1$, $\alpha_n \in]\lambda_n, +\infty[$ et $\alpha_i \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ si $i = 1, \ldots, n-1$.

Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$ (car les racines de P provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ & Q & \mapsto & (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0\leqslant k\leqslant n-1} \end{array}$$

Ψ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$ qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que si $\|P-Q\| < r$, alors $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$. Donc Q change n fois de signe, et admet au moins n racines. Mais $\deg(Q) = n$, donc Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc Δ_n est ouvert dans $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$.

Remarque 6.5.

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ diagonalisable à racines simples}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M \text{ sciné à racines simples}\}$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et c'est aussi vrai sur $\mathbb{R}$.

Solution 6.12.

1. *Soit*
$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & A^n \end{array}$$
f *est continue et* $F = f^{-1}(\{0\})$ *donc* $F = \overline{F}$.

   Soit $M_0 \in F$, X^n *annule* M_0 *donc* M_0 *est trigonalisable : on écrit* M_0 *dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors* M_ε *la même matrice dans la même base en rajoutant simplement* ε *en première position de la diagonale. Alors* $M_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} M_0$ *et* $M_\varepsilon \notin F$ *donc* $\mathring{F} = \emptyset$. *Notons que cela signifie que* F *est dense.*

2. *La norme dérive du produit scalaire* $(A|B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^\mathsf{T} B)$. *Soit* $M \in F$, *on a* $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$. *On a* $(M|I_n) = \mathrm{Tr}(M) = 0$ *car* M *est nilpotente. Donc* $\|M - I_n\|^2$ *est minimale pour* $\|M\|^2$ *minimale, donc pour* $M = 0 \in F$. *Donc* $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$ *(et la distance est atteinte pour* $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$*).*

Solution 6.13.

1. $A \mapsto \det(A)$ *est continue et* $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ *est donc ouvert. Si* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *pour* $p \in \mathbb{N}$, *on pose* $A_p = A - \frac{1}{p+1} I_n$. *Comme* $\mathrm{Sp}(A)$ *est fini, il existe* $N \in \mathbb{N}$, *tel que pour tout* $p \geqslant N$, $\frac{1}{p+1} \notin \mathrm{Sp}(A)$. *Donc pour tout* $p \geqslant N$, $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$, *et* $A_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} A$ *donc* $GL_n(\mathbb{K})$ *est dense dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. *On fixe* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{K})$. *On écrit* $BA = A^{-1}(AB)A$ *donc* AB *et* BA *sont semblables donc* $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. *Comme, à* B *fixé,* $A \mapsto \chi_{AB}$ *et* $A \mapsto \chi_{BA}$ *sont continues sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *on a le résultat par densité.*

Solution 6.14.

1. *On a* $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u) \circ v_p = \frac{1}{p}(id_E - u^p)$, *donc* $\|v_p \circ (id_E - u)\| \leqslant \frac{1}{p}(\|id_E\| + \|u^p\|) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.

   Soit $x \in \ker(u - id_E) \cap \mathrm{Im}(u - id_E)$, *on a* $u(x) = x$ *et il existe* $y \in E$, $x = (u - id_E)(y)$. *On a* $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$ *et* $v_p(x) = v_p \circ (u - id_E)(y) \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ *d'où* $x = 0$. *Le théorème du rang permet de conclure.*

2. *Soit* $x \in E$, *on écrit* $x = x_1 + x_2$ *avec* $\Pi(x) = x_1$ *et* $x_2 = (u - id_E)(y_2)$. *Alors* $v_p(x) = x_1 + v_p \circ (u - id_E)(y_2) \xrightarrow[p \to +\infty]{} x_1 = \Pi(x)$.

Solution 6.15.

1. *Pour tout* $x \in A$, $f_n(x) \in A$ *car* A *est convexe. Soit* $(x, y) \in A^2$, *on a*

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f(x) - f(y)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - y\|$$

   Donc f_n *est* $(1 - \frac{1}{n})$*-lipschitzienne. On forme*

$$\begin{array}{rccc} g_n : & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|f_n(x) - x\| \end{array}$$

   qui est continue. Soit $x_n \in A$ *telle que* $g_n(x_n) = \min_{x \in A} g_n(x)$ *(existe car* A *est compact et* g_n *continue). On a* $x_n \in A$, *d'où* $f_n(x_n) \in A$ *et*

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f_n(x_n) - x_n\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)g_n(x_n)$$

   Si $g_n(x_n) \neq 0$, *alors on aurait* $g_n(f(x_n)) < g_n(x_n)$ *ce qui n'est pas possible. Donc* $g_n(x_n) = 0$ *et* $f_n(x_n) = x_n$.

   Soit y_n *un autre point fixe, on a*

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x_n - y_n\|$$

   donc $x_n = y_n$.

2. *On a* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *et on extrait (car* A *est compact) et on a*

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x \in A$$

On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)}f(x_0)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} + \underbrace{\left(1-\frac{1}{\sigma(n)}\right)f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}f(x)}$$

par continuité de f. Donc $f(x) = x$.

3. *Soit $(x, y) \in A^2$, points fixes de f, et $t \in [0, 1]$, on pose $z = tx + (1-t)y$. On a*

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \|f(x)-f(y)\| \\ &\leqslant \|f(x)-f(z)\| + \|f(z)-f(y)\| \\ &\leqslant \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= (1-t)\|x-y\| + t\|x-y\| \\ &= \|x-y\|\end{aligned}$$

On a donc égalité partout : $\|f(x)-f(y)\| = \|f(x)-f(z)\| + \|f(z)-f(y)\|$ et $\|f(x)-f(z)\| = \|x-z\|$, $\|f(z)-f(y)\| = \|z-y\|$ car f est 1-lipschitzienne.

Comme la norme est euclidienne, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x)-f(z) = \lambda(f(z)-f(y))$ d'où $f(x)+\lambda f(y) = (\lambda+1)f(z)$ d'où $f(z) = \frac{x+\lambda y}{\lambda+1} = t'x+(1-t')y$ avec $t' = \frac{1}{\lambda+1} \in [0, 1]$.

En reportant, on a

$$\|f(x)-f(z))\| = \|x-t'x-(1-t')y\| = (1-t')\|x-y\| = \|x-z\| = (1-t)\|x-y\|$$

Si $x \neq y$, alors $t = t'$ et $f(z) = tx + (1-t)y = z$.

4. *Soit dans $\mathbb{R}^2$, $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} = [-1,1]^2 = A$. Soit*

$$f : \begin{array}{ccc} A & \to & A \\ (x,y) & \mapsto & (x,|x|) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned}\|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\|_\infty &= \|(x_1,|x_1|)(x_2,|x_2|)\|_\infty \\ &= \max\{|x_1-x_2|, \big||x_1|-|x_2|\big|\} \\ &= |x_1-x_2| \\ &\leqslant \|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\|_\infty\end{aligned}$$

Donc f est 1-lipschitzienne, on a $f(x,y) = (y,x)$ si et seulement si $y = |x|$. Donc ici, F n'est pas convexe.

Solution 6.16.

1. *On a pour tout* $(x, y) \in E^2$*,* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *et par récurrence, pour tout* $n \in \mathbb{Z}$*,* $f(nx) = nf(x)$*. Pour* $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$*, on a* $f(qrx) = qf(rx) = f(px) = pf(x)$ *donc* $f(rx) = rf(x)$*. Par densité de* $\mathbb{Q}$ *dans* $\mathbb{R}$ *et continuité de* f*, on a pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*,* $f(\lambda x) = \lambda f(x)$*. Donc* f *est linéaire.*

   Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans* $\mathbb{C}$*.*

2. *On étudie la série, pour* x *fixé de terme général*

$$\|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| = \frac{1}{2^n}\|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}$$

   qui est donc convergente. Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

3. *On a* $v_0(x) = f(x)$*, donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) = g(x) - f(x)$*.* f *étant continue,* v_n *l'est aussi, et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, comme pour tout* $x \in E$*,* $\|(v_{n+1} - v_n)(x)\| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}$*, donc* g *est continue.*

4. *On a, pour tout* $(x, y) \in E^2$*,*

$$\|v_n(x+y) - v_n(x) - v_n(y)\| = \|\frac{1}{2^n}f(2^n(x+y)) - \frac{1}{2^n}(f(2^n x) + f(2^n y))\| \leqslant \frac{M}{2^n}$$

   Donc quand $n \to +\infty$*,* $g(x+y) = g(x) + g(y)$*.*

   On a pour tout $x \in E$*,*

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\|\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x)\right\|\| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M$$

   Soit maintenant h *linéaire continue telle que* $h - f$ *soit bornée, soit* $M' = \sup_{x\in E} \|h(x) - f(x)\|$*. On a donc*

$$\|v_n(x) - h(x)\| = \left\|\frac{1}{2^n}f(2^n x) - \frac{1}{2^n}h(2^n x)\right\| \leqslant \frac{M'}{2^n}$$

   car h *est linéaire. Donc quand* $n \to +\infty$*,* $g(x) = h(x)$ *car* $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = g(x)$*.*

Solution 6.17. *En particulier, pour* $t = f(0)$*,* $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{x \in E \mid f(x) = f(0)\}$ *est borné (car compact). Donc il existe* A *tel que* $f^{-1}(\{f(0)\}) \subset \overline{B(0, A)}$*. Par contraposée, pour tout* $x \in E$*, si* $\|x\| > A$*, alors* $f(x) \neq f(0)$*.*

On montre alors que $E \setminus \overline{B(0,A)}$ est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout $x \in E \setminus \overline{B(0,A)}$, $f(x) > f(0)$ soit $f(x) < f(0)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on se place dans le cas $f(x) > f(0)$. Comme on est en dimension finie sur $\overline{B(0,A)}$ compact, f atteint son minimum et ce minimum est plus petit que $f(0)$, c'est donc un minimum global.

Remarque 6.6. C'est faux pour $n = 1$. Contre-exemple : $f = id_{\mathbb{R}}$.

Solution 6.18. *Si c'était le cas, on prend un cercle $\mathcal{C}$ compact (et connexe par arcs). $f(\mathcal{C})$ est compact connexe par arc dans $\mathbb{R}$. On note $f(\mathcal{C}) = [a,b]$ (avec $a < b$ car f injective). Si $x \in \mathcal{C}$ est tel que $f(x) = \frac{a+b}{2}$, on $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a,b] \setminus \left\{\frac{a+b}{2}\right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$ donc une telle fonction n'existe pas.*

Solution 6.19.

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_{l^1} = 1$ et $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leqslant |||\varphi|||$ donc $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. On note $M = \sup |K_n| \leqslant |||\varphi|||$.*

   Soit maintenant $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,
   $$\left\| u - \sum_{n=0}^{N} u_n e_n \right\|_1 \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$
   (reste d'une série convergente). Par continuité de φ, on a donc
   $$|\varphi(u)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n||K_n| \leqslant M\|u\|_1$$
   Ainsi, $|||\varphi||| \leqslant M$ et donc $|||\varphi||| = M$.

2. *F est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective.*

   Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$. On définit
   $$\begin{array}{cccc} \varphi : & l^1 & \to & \mathbb{R} \\ & u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{array}$$
   Elle est bien définie car $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle est linéaire, et continue car $|\varphi(u)| \leqslant \|(K_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$.

   Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}, \varphi(e_n) = K_n$. Donc $F(\varphi) = (K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et F est surjective. Donc F est une isométrie bijective et le dual topologique de l^1 est équivalent à l^∞.

Solution 6.20.

1. *Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $K = \ker(\varphi)$/ Si F est dense, φ est discontinue. Soit $(a,b) \in (E \setminus H)^2$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $b-a$ (existe car H est dense). La suite $(a+x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(a+x_n) = \varphi(a) \neq 0$, et pour $t \in [0,1]$, $\varphi(t(a+x_n)+(1-t)(a+x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$. Donc $[a+x_n, a+x_{n+1}] \subset E\setminus H$. Soit $\gamma : [0,1] \to E \setminus H$ telle que*

$$\begin{cases} \gamma(t) &= \alpha_n t + \beta_n \in [a+x_n, a+x_{n+1}] \subset E \setminus H \quad \textit{si } t \in [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) &= b \\ \gamma(t) &= a + t x_0 \quad \textit{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

On cherche à définir α_n et β_n : on veut $\gamma(1-\frac{1}{n}) = a + x_n$ et $\gamma(1-\frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$ (pour la continuité en se raccordant au x_n). En résolvant le système, on trouve $\alpha_n = n(n+1)(x_n - x_{n+1})$ et $\beta_n = a + x_n - (n-1)(n+1)(x_n - x_{n+1})$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$: $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$ et pour tout $n \geqslant N$, pour tout $t \in [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}[$, $\gamma(t) \in [a+x_n, a+x_{n+1}] \subset B(b,\varepsilon)$ par convexité de la boule. Donc $\lim\limits_{t\to 1} \gamma(t) = b$ et γ est continue. Donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

2. *Soit φ une forme linéaire telle que $\ker(f) = H$ est fermé. Alors φ est continue (à redémontrer). Soit $x \in E \setminus H$, on a $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $E \setminus H$ était connexe par arcs, φ s'annulerait sur $E \setminus H$ ce qui n'est pas vrai. Donc $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.*

3. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si H est dense alors $E \setminus H$ est connexe par arc d'après la première question. Si H est fermé, soit φ une forme linéaire continue telle que $\ker(f) = H$. Soit $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$.*
   - *Si $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_-^*$, alors pour tout $t \in [0,1]$, $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in E\setminus H}) \neq 0$ et on peut relier directement x_1 et x_2.*
   - *Sinon, il existe $\theta \in \mathbb{R}, (\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\varphi(x_1) = \rho e^{i\theta}$ et $\varphi(x_2) = \rho' e^{i(\theta+\pi)}$. Alors $x_3 = ix_1$ est tel que $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$ et $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$ (on contourne l'origine par une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$). Par conséquent, on peut utiliser x_3 pour relier x_1 et x_2 donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.*

Solution 6.21. *Soit*

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ((x, \sin(\frac{1}{x})))\end{array}$$

φ *est continue et* $\Gamma)\varphi(\mathbb{R}_+^*)$ *est connexe par arcs.*

On a $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$ *avec* $\Gamma' = \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$*. En effet, pour tout* $y \in [-1,1]$*, on pose* $x_k = \frac{1}{\arcsin(y)+2k\pi}$*. On a* $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow[k\to+\infty]{} y$ *donc* $(0,y) = \lim\limits_{k\to=+\infty}(x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \overline{\Gamma}$*.*

Réciproquement, si $(x,y) \in \overline{\Gamma}$*, il existe* $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ *avec* $x = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$ *et* $y = \lim\limits_{k\to+\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$*. Si* $x > 0$*, par continuité,* $y = \sin(\frac{1}{x})$ *et* $(x,y) \in \Gamma$*. Si* $x = 0$*,* $y \in [-1,1]$ *donc* $(x,y) \in \Gamma'$*.*

Si $\overline{\Gamma}$ *est connexe par arcs, il existe*

$$\begin{array}{rccc}\gamma: & [0,1] & \to & \overline{\Gamma} \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t))\end{array}$$

continue telle que $\gamma(0) = (0,0)$ *et* $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$*. La première projection* $t \mapsto x(t)$ *est continue avec* $x(0) = 0$ *et* $x(1) = \frac{1}{\pi}$*. On définit maintenant* $t_1 = \sup\{t \in [0,1] \mid x(t) = 0\}$*. Par continuité,* $x(t_1) = 0$ *et donc* $t_1 < 1$*. Donc pour tout* $t > t_1$*,* $x(t) > 0$ *et* $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$ *pour* $t > t_1$ *et* $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ *avec* $y_1 \in [-1,1]$*.*

Or, -1 et 1 n'appartiennent pas simultanément à $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$*. On peut supposer que* $1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$*. Comme* γ *est continue, il existe* $t_2 > t_1$ *tel que pour tout* $t \in]t_1, t_2]$*,* $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$*. Or* $x(t_2) > 0$ *et* $x(t_1) = 0$ *donc il existe* $k \in \mathbb{N}^*$*,* $t_0 \in]t_1, t_2]$ *tel que* $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ *(théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors* $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ *ce qui contredit ce qui précède.*

Donc $\overline{\Gamma}$ *n'est pas connexe par arcs.*

Solution 6.22.

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n \in K$ *car* u_n *est le barycentre de* $(a, T(a), \dots, T^n(a))$ *et* K *est convexe. Comme* K *est compact, on peut extraire* $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u \in K$*. Alors*

$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n)+1}(id_E - T^{\sigma(n)+1})(a)$$

d'où

$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leqslant \frac{1}{\sigma(n)+1} \times 2M \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

avec $M = \sup_{x\in K} \|x\|$ *(existe car* K *est compact donc borné). Par continuité de* T*, on a* $T(u) = u$*.*

2. *Posons* $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$ *fermé car* $K' = K \cap \Big(\big(\underbrace{id_E - T}_{continu}\big)^{-1}\{0\}\Big)$*. Donc* K' *est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout* $(u_1, u_2) \in K'^2$*, pour tout* $t \in [0,1]$*, par linéarité de* T*, on a*

$$T(tu_1 + (1-t)u_2) = tu_1 + (1-t)u_2$$

donc K' *convexe. De plus, comme* $U \circ T = T \circ U$*, pour tout* $u \in K'$*, on a* $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$ *donc* $U(u) \in K'$*. On applique alors la question 1 à* K' *est il existe* $y \in K' \colon U(y) = y$ *et* $T(y) = y$*.*

Solution 6.23.

1. *C'est le théorème du rang car* $\mathrm{rg}(u) \leqslant n \leqslant p-2$*, et* $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0\}$ *est de dimension* $p-1$ *donc* $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$ *(formule de Grassmann).*

2. *On a*

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i)x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + t\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = x$$

et

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i + t\sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$$

Soit $I_+ = \{i \in \{1,\dots,p\} \mid \alpha_i > 0\}$ *et* $I_- = \{i \in \{1,\dots,p\} \mid \alpha_i < 0\}$*. On a* $I_+ \neq \emptyset$ *et* $I_- \neq \emptyset$ *car* $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$ *et* $(\alpha_1,\dots,\alpha_p) \neq (0,\dots,0)$*. Soit* $t \geqslant 0$*. Pour tout* $i \in I_+$*,* $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$*. Pour* $i \in I_-$*,* $\lambda_i + t\underbrace{\alpha_i}_{<0} \geqslant 0$ *si et seulement si* $t \leqslant -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$*. Prenons alors*

$$t = \min_{i\in I_-}\Big(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\Big)$$

On au aussi pour tout $i \in I_-$*,* $\lambda_i + t\alpha_i \geqslant 0$ *et il existe* $i_0 \in I_-$ *tel que* $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$*.*

3. *Par récurrence descendante, on se ramène à n+1 points car si* x *est barycentre de* p *points avec* $p \geqslant n+2$*, alors il est barycentre de* $p-1$ *points.*

4. Soit $A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ *fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit*

$$\begin{array}{cccc} f: & A \times K^{n+1} & \to & \mathrm{conv}(K) \\ & ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (x_1, \dots, x_{n+1})) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{array}$$

f *est surjective et continue, donc* $\mathrm{conv}(K)$ *est l'image continue d'un compact donc* $\mathrm{conv}(K)$ *est compact.*

Solution 6.24. *Pour tout* $u \in A_p$, $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ *distincts et* u *est diagonalisable. Réciproquement, si* u *est diagonalisable et* $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ *alors dans une base la matrice de* u *est diagonale avec des* α_i *(éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc* $u \in A_p$.

Si $u \in A_p$, *on écrit donc le polynôme caractéristique de* u

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $0 \leqslant m_i \leqslant \dim(E) = n$ *et* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$. $u \mapsto \chi_u$ *est continue. Pour* $(m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r$ *tel que* $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$, *notons*

$$A_{m_1,\dots,m_r} = \left\{ u \in A_p \,\middle|\, \chi_u = \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right\}$$

et

$$\Big[u \mapsto \chi_u(A_p)\Big] = \left\{ \bigcup_{(m_1,\dots,m_r) \in D_{n,r}} \left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\}$$

où

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \,\middle|\, \sum_{i=1}^{r} m_i = n \right\}$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires,
si $(m_1, \dots, m_r) \neq (m'_1, \dots, m'_r)$, *alors* $A_{m_1,\dots,m_r}$ *et* $A_{m'_1,\dots,m'_r}$ *ne sont pas dans la même composante connexe par arcs car*

$$\Big[u \mapsto \chi_u \Big(A_{m_1,\dots,m_p} \bigcup A_{m'_1,\dots,m'_r} \Big)\Big] = \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \bigcup \left\{ \prod_{i=1}^{r} (X - \alpha_i)^{m'_i} \right\}}_{\text{pas connexe par arcs}}$$

Si $\gamma\colon [0,1] \to A_p$ est continue, $t \mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t) + a_1(t)X + \cdots + a_{n-1}(t)X^{n-1} + X^n$ est continue sur $[0,1]$ et prend un nombre fini de valeurs donc est constante. $a_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.

Soit $u_0 \in A_{m_1,\dots,m_r}$, soit $u \in A_{m_1,\dots,m_r}$, alors il existe une base $\mathcal{B}_0$ base de E telle que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$ soit diagonale avec des α_1 sur les m_1 premières lignes de la diagonale, α_2 sur les m_2 lignes suivantes, etc. Soit $M = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$. M est semblable à M_0 donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PM_0P^{-1}$.

Or $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc il existe $\varphi\colon [0,1] \to GL_n(\mathbb{C})$ continue telle que $\varphi(0) = P$ et $\varphi(1) = I_n$. On pose alors

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & [0,1] & \to & A_{m_1,\dots,m_r} \\ & t & \mapsto & \varphi(t)M_0\varphi^{-1}(t) \end{array}$$

Alors $A_{m_1,\dots,m_r}$ est connexe par arcs.

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \left\{(m_1,\dots,m_r) \in \{0,\dots,n\}^r \;\Big|\; \sum_{i=1}^{r} m_i = n\right\}$$

qui vaut $\binom{m+r-1}{r-1}$ possibilités (place n points sur une droite et les séparer avec $r-1$ barres : le nombre de points dans chaque segment donne un m_i, il y a $m+r-1$ possibilités pour placer les $r-1$ barres).

Solution 6.25.

1. *Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $|AX|_i = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{a_{i,j}x_j}_{>0} \geqslant 0$. Si $|AX|_i = 0$ alors pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$, $\underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j = 0$ donc $x_j = 0$, impossible car $X \neq 0$.*
2. *Si $|AX| = A|X|$. On a pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$,*

$$\Big|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\Big| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|$$

   donc les $(a_{i,j}x_j)_{1\leqslant j\leqslant n}$ ont tous même argument. On prend $\theta = \arg(x_j)$.
3. *K est fermé et borné en dimension finie : c'est un compact. On a $I_x \neq \emptyset$ car $AX \geqslant 0$ donc $0 \in I_x$. Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AX - t_kX \geqslant 0$*

donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(AX - t_k X)_i \geqslant 0$ et par passage à la limite, $AX - tX \geqslant 0$ donc I_x est fermé.

Si $t \in I_x$,

$$|tX|_1 = t = \sum_{i=1}^{n} t \underbrace{x_i}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j}_{=(AX)_i} \leqslant n \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$$

car $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$. On note $M = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$.

4. *Pour tout $x \in K$, $\theta(X) \leqslant M$ donc θ est bien borné sur K. Par définition de r_0, il existe $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{k \to +\infty} \theta(X_k) = r_0$. On note $\theta(X_k) = t_k$. Comme K est compact, il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $X_{\sigma(k)}$ converge vers $X^+ \in K$. A priori, $\theta(X^+) \leqslant r_0$. On a $AX_{\sigma(k)} - t_{\sigma(k)} X_{\sigma(k)} \geqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc par passage à la limite, $AX^+ - r_0 X^+ \geqslant 0$ et donc $r_0 \leqslant \theta(X^+)$ donc $r_0 = \theta(X^+)$.*

5. *Soit $Y = A^+ - r_0 X^+ \geqslant 0$. Si $Y \neq 0$, alors $AY > 0$ d'après la question 1 donc*

$$AY = A \underbrace{(AX^+)}_{>0} - r_0 \underbrace{(AX^+)_{>0}} > 0$$

On a $AY > \varepsilon AX^+$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|AY|_i > \varepsilon |AX^+|_i$ (car $AY > 0$). On pose alors

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \frac{|AY|_i}{|AX^+|_i}$$

On a alors $AY - \varepsilon AX^+ > 0$ d'où

$$A \underbrace{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}_{\in K} - (r_0 + \varepsilon) \frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} > 0$$

donc $r_0 + \varepsilon \in I_{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}$ c'est-à-dire

$$r_0 + \varepsilon \leqslant \theta\Big(\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} \Big) \leqslant r_0$$

ce qui est impossible. Nécessairement $Y = 0$.

6. *Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a*

$$|AV|_i = \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} v_j \Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} |v_j| = (A|V|)_i$$

donc $|\lambda| = |AV| \leqslant A|V|$*. De plus,* $|V| \in K$ *donc* $|\lambda| \leqslant \theta(|V|) \leqslant r_0$*. Notons que cela implique que le rayon spectral de* A *est* $\rho(A)$ *est plus petit que* r_0 *et que l'on a même égalité.*

7. *Si* $|\lambda| = r_0$*, on a* $|\lambda| = \theta(|V|) = r_0$ *et d'après la question 5 on a* $A|V| = r_0|V| = |AV|$*. D'après la question 2, il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $V = e^{i\theta}|V|$*. Or*

$$AV = \lambda V = e^{i\theta}A|V| = e^{i\theta}r_0|V|$$

et comme $|K| \in K, |V| \neq 0$ *et on a donc* $\lambda = r_0$*.*

8. *Soit* $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ *tel que* $\|V\|_1 = 1$ *et* $AV = r_0V$*. D'après la question précédente, on a* $V = e^{i\theta}|V|$ *et* $A|V| = r_0|V|$*. Soit alors* $t \in \mathbb{R}$*, on a*

$$A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$$

Notons maintenant que si $Y \geqslant 0$ *avec* $Y \neq 0$ *vérifie* $AY = r_0Y$*, alors* $Y > 0$*. En effet, d'après la première question,* $AY > 0$*. On a* $r_0 \neq 0$ *car sinon* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ *et* $A^n = 0$ *ce qui est impossible car ses coefficients sont strictement positifs. D'où* $Y > 0$*.*

Ainsi, par définition de X^+*, on a* $X^+ > 0$ *et* $|V| > 0$*. On a alors*

$$(X^+)_i + t|v_i| \geqslant 0$$

si et seulement si

$$t \geqslant -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

On prend

$$t = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

Finalement, on a $X^+ + t|V| \geqslant 0$ *et une de ses coordonnées vaut 0 (car on a pris le minimum sur les* i*). Nécessairement,* $X^+ + t|V| = 0$ *(car* $A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$*) et donc* $|V| \in \mathbb{R}X^+$*. Donc* $V = e^{i\theta}|V| \in \mathbb{C}X^+$ *et ainsi*

$$\dim(\ker(A - r_0I_n)) = 1$$

Solution 6.26. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & U \times V & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$$

On a

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x',y') = |\|x-y\|-\|x'-y'\|| \leqslant \|(x-y)-(x'-y')\| \leqslant \|x-x'\|+\|y-y'\| \leqslant 2\|(x,y)-(x',y')\|_\infty$$

donc φ est continue.

$U \times V$ est compact, donc il existe $(x_1, y_1) \in (U \times V)$ telle que $\varphi(x_1, y_1) = \min_{(x,y)\in U\times V} \varphi(x, y)$. Comme U et V sont disjoints, $x_1 \neq y_1$ et $\varphi(x_1, y_1))d(U, V) > 0$.

Soit $\alpha = \frac{d(U,V)}{3}$. On pose $U' = \{x \in E \mid d(x, U) < \alpha\}$ et $V' = \{x \in E \mid d(x, V) < \alpha\}$. $x \mapsto \|x\|$ est continue car 1-lipschitzienne donc U' est V' sont des ouverts et on a bien $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Soit ensuite $x \in U' \cap V'$, on a $d(x, U) < \alpha$ et $d(x, V) < \alpha$ donc il existe $(u, v) \in U \times V$, $d(x, u) < \alpha$ et $d(x, v) < \alpha$. Alors $d(u, v) \leqslant 2\alpha$ ce qui est absurde. Donc $U' \cap V' = \emptyset$.

Solution 6.27.

1. *f est 1-lipschitzienne donc est continue. On forme*

$$g : \begin{array}{ccc} K & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x - f(x)\| \end{array}$$

   g est continue, K est compact donc il existe $a \in K$ tel que $g(a) = \min_{x\in K} g(x)$. Si $a \neq f(a)$, alors $\|f(a) - f^2(a)\| = g(f(a)) < \|a - f(a)\| = g(a)$ ce qui est impossible par définition de a. Donc $f(a) = a$. S'il existe $a' \neq a$ tel que $f(a') = a'$, alors $\|f(a)-f(a')\| = \|a - a'\| < \|a - a'\|$ ce qui est impossible. Donc a est unique.

2. *S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = a$ alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\|u_{n+1} - a\| = \|f(u_n) - f(a)\| < \|u_n - a\|$$

   donc la suite $(\|u_n - a\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante dans $\mathbb{R}_+$ donc elle converge vers $l \geqslant 0$. Par compacité de K, il existe une extraction σ telle que $\lim_{n\to+\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha \in K$. Par continuité,

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{\sigma(n)} - a\| = \|\alpha - a\| = l$$

   et

$$\lim_{n\to+\infty} \|\underbrace{u_{\sigma(n)+1}}_{f(u_{\sigma(n)}} -f(a)\| = \|f(\alpha) - f(a)\| = l = \|\alpha - a\|$$

par continuité de f. Ainsi, on a $\alpha = a$ et $l = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

3. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x < y \in \mathbb{R}^2$, il existe $z \in]x, y[$ tel que (égalité des accroissements finis)
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(z)| = \left|\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}\right| < 1$$
donc f vérifie bien l'hypothèse de contraction. Cependant, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2+1} > a$ donc pas de point fixe. La démonstration tombe en défaut car $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Solution 6.28. *La condition est équivalente à pour tout $(M_1, M_2, M_3) \in K_1 \times K_2 \times K_3$, M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.*

On forme alors
$$\begin{array}{rrcl} f: & K_1 \times K_2 \times K_3 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (M_1, M_2, M_3) & \mapsto & R(M_1, M_2, M_3) \end{array}$$
où $R(M_1, R_2, M_3)$ est le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par M_1, M_2 et M_3.

On note $M_i = (x_i, y_i)$ et Δ_i la médiatrice de $[M_jM_k]$. Établissons une équation de Δ_i. On a $M = (x, y) \in \Delta_i$ si et seulement si $\|\vec{MM_j}\|_2^2 = \|\vec{MM_k}\|_2^2$ si et seulement si $(\vec{MM_j} + \vec{MM_k} \mid \vec{MM_j} - \vec{MM_k}) = 0$ (produit scalaire), si et seulement si $(\vec{MC_i} \mid \vec{M_jM_k}) = 0$ où C_i est le milieu de $[M_jM_k]$, si et seulement si (calculer le produit scalaire)
$$\Big(\frac{x_j+x_k}{2} - x\Big)(x_k - x_j) + \Big(\frac{y_j+y_k}{2} - y\Big)(y_k - y_j) = 0$$
Soit alors $M_0 = (x_0, y_0)$ le centre du cercle circonscrit. $M_0 \in \Delta_i \cap \Delta_j$ avec $i \neq j$. Par exemple, $M_0 \in \Delta_3 \cap \Delta_1$ si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{rcl} \Big(\frac{x_2+x_1}{2} - x_0\Big)(x_2 - x_1) + \Big(\frac{y_2+y_1}{2} - y_0\Big)(y_2 - y_1) & = & 0 \\ \Big(\frac{x_3+x_2}{2} - x_0\Big)(x_3 - x_2) + \Big(\frac{y_3+y_2}{2} - y_0\Big)(y_3 - y_2) & = & 0 \end{array}\right.$$
si et seulement si ($L_2 \leftarrow L_1(x_3 - x_2) + L_2(x_1 - x_2)$)
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) & = & \dfrac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} \\ x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) & = & \dfrac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2} \end{array}\right.$$

si et seulement si $(L_1 \leftarrow L_2(y_2 - y_1) + L_1(y_2 - y_3))$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & \dfrac{\frac{x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2}{2}(y_2-y_3)-(y_1-y_2)\frac{x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2}{2}}{(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)} \\ y_0 & = & \dfrac{\frac{x_2^2-x_3^2+y_2^2-y_3^2}{2}(x_1-x_2)-(x_2-x_3)\frac{x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2}{2}}{(x_1-x_2)(y_2-y_3)-(x_2-x_3)(y_1-y_2)} \end{array}\right.$$

et $R(M_1, M_2, M_3) = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}$. *En reportant,* f *est continue sur* $K_1 \times K_2 \times K_3$ *compact donc* f *atteint son minimum.*

Solution 6.29.

1. *Pour tout* $f \in E$, $T(f)$ *est* $\mathcal{C}^1$ *et* $(T(f))' = f$, $T(f)(0) = 0$. T *est clairement linéaire, soit ensuite* $x \in [0, 1]$, *on a*

$$|T(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)dt\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|dt \leqslant x\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

Donc $\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ *donc* T *est continue et* $|||T||| \leqslant 1$. *Pour* $f = 1$, *on a* $\|f\|_\infty = 1$ *et pour tout* $x \in [0, 1]$, $T(f)(x) = x$ *donc* $\|T(1)\|_\infty = 1$. *Ainsi,* $|||T||| = 1$.

2. $id_E - T$ *est continue. Soit* $(f, g) \in E^2$, *on a* $g = f - T(f)$ *si et seulement si* $g = y' - y$ *et* $y(0) = 0$. *On a* $g(x)e^{-x} = \underbrace{e^{-x}(y'(x) - y(x))}_{(e^{-x}y(x))'}$ *donc en intégrant de 0 à* x *on a*

$$y(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t)dt$$

Donc $T(f)$ *vérifie le problème de Cauchy si et seulement si pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-t}g(t)dt$ *si et seulement si pour tout* $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t)dt$$

Donc $id_E - T$ *est bijective. Enfin, on a pour tout* $x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| \leqslant |g(x)| + \left|\int_0^x g(t)e^{x-t}dt\right| \leqslant \|g\|_\infty(1 + xe^x) \leqslant \|g\|_\infty(1 + e)$$

Ainsi,

$$\|f\|_\infty = \|(id_E - T)^{-1}(g)\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty(1 + e)$$

donc $(id_E - T)^{-1}$ *est continue. Ainsi,* $id_E - T$ *est un homéomorphisme.*

Solution 6.30.

(i) ⇒ (ii) $f^{-1}(K)$ *est fermé car* f *est continue.* K *est borné, donc il existe* $M > 0$*, tel que pour tout* $y \in K$*,* $\|y\| \leqslant M$*. Donc pour tout* $x \in f^{-1}(K)$*,* $\|f(x)\| \leqslant M$*. Par contraposée de (i) pour* $A = M + 1$*, il existe* $B > 0$ *tel que* $\|f(x)\| < A \Rightarrow \|x\| < B$*. Donc pour* $x \in f^{-1}(K)$*,* $\|x\| < B$ *donc* $f^{-1}(K)$ *est borné. C'est donc un compact.*

(ii) ⇒ (i) *Soit* $A \geqslant 0$*. Soit* $K = \overline{B(0, A)}$ *compact car fermé et borné en dimension finie. D'après (ii),* $f^{-1}(K)$ *est compact donc borné : il existe* $B > 0$ *tel que pour tout* $x \in f^{-1}(K)$*,* $\|x\| \leqslant B$*. Par contraposée, si* $\|x\| > B$ *alors* $x \notin f^{-1}(K)$ *et* $f(x) \notin K$ *donc* $\|f(x)\| > A$*. Ainsi,* $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} \|f(x)\| = +\infty$*.*

Remarque 6.7. Exemple pour l'exercice précédent : les fonctions polynômiales non constantes. Contre-exemple : l'exponentielle, cf $\exp([0, 1]) = \mathbb{R}_-$ non compact.

Solution 6.31.

1. *Soit* $(x, y) \in K^2$ *compact. Soit* σ *un extraction telle que*

$$(f^{\sigma(n)}(x), f^{\sigma(n)}(y)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} (l, l') \in K^2$$

On a

$$f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

de même pour y*. Soit* $\varepsilon > 0$*,*

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x)\| \leqslant \varepsilon \\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(y) - f^{\sigma(n)}(y)\| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Pour $N = \max(N_1, N_2)$ *et* $p = \sigma(N + 1) - \sigma(N) \in \mathbb{N}^*$*, on a*

$$d(x, f^p(x)) \leqslant d(f^{\sigma(n+1)}(x), f^{\sigma(n)}(x)) \leqslant \varepsilon$$

et de même pour y *avec le même* p*.*

2. *On a*

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leqslant d(f(x), f(y)) \\ &\leqslant d(f^p(x), f^p(y)) \\ &\leqslant d(f^p(x), x) + d(x, y) + d(y, f^p(y)) \\ &\leqslant 2\varepsilon + d(x, y) \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a égalité tout du long. On a donc notamment, $\|x-y\| = \|f(x)-f(y)\|$ et donc f est une isométrie.

3. *f est 1-lipschitzienne donc continue. Donc $f(K)$ est compact donc fermé. Il suffit donc de montrer que $f(K)$ est dense dans K. Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x - \underbrace{f^p(x)}_{\in f(K)}\| \leqslant \varepsilon$ d'après la première question. Donc $f(K)$ est dense dans K et $f(K) = \overline{f(K)} = K$.*

Remarque 6.8. Exemple pour l'exercice précédent : une rotation sur la sphère unité.

Solution 6.32. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & K & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & f(M) = \textit{rayon du cercle circonscrit au triangle } MAB \end{array}$$

On a $F = f(K)$. Soit (C, i, j) un repère orthonormé où C est le milieu de $[AB]$ et $A(-\alpha, 0)$ et $B(\alpha, 0)$ avec $\alpha > 0$. La médiatrice Δ de $[A, B]$ a pour équation $x = 0$. Si $M(x, y)$, soit $\varphi(M)$ le centre du cercle circonscrit. On a $\varphi(M) \in \Delta$ donc $\varphi(M)(0, y_1)$ et $\varphi(M)$ appartient à la médiatrice de $[MA]$. On a $y_1 \neq 0$ car $M \notin (AB)$.

Notons M' le milieu de $[MA]$. On a $M'(\frac{x-\alpha}{2}, \frac{y}{2})$ d'où $\vec{M'\varphi(M)} \cdot \vec{MA} = 0$ d'où (en développant le produit scalaire),

$$y_1 = \Big((\alpha + x)\Big(\frac{\alpha - x}{2}\Big) - \frac{y^2}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{y}\Big)$$

φ est donc continue donc f également et $f(K) = F$ est compact.

Solution 6.33.

1. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\tau)$ et $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ avec $\tau(P) = \lambda P$. Si P n'est pas constant, notons $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $P(\alpha) = 0$. Alors $P(\alpha + 1) = 0$. En itérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$, impossible car P n'est pas constant donc pas nul. Finalement, P est constant et $\lambda = 1$: $\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}$.*

2. *$f: x \mapsto P(x)e^{-x}$ est continue et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ donc le $\sup$ est bien défini. Il est ensuite facile de vérifier que $\|P\|$ est une norme.*

3. *On a*

$$\|\tau(P)\| = \sup_{x \geqslant 0} |P(x+1)e^{-x}| = \sup_{x' \geqslant 1} |P(x')e^{-x'}e| \leqslant \sup_{x' \geqslant 0} |P(x')e^{-x'}e| \leqslant e\|P\|$$

4. Utiliser $P = X$.

Solution 6.34.

1. *Pour x fixé,* $\min(x, \varphi(t)) = \frac{x+\varphi(t)-|x-\varphi(t)|}{2}$ *est continue. Donc $T(f)$ est définie.*

   Si $x \leqslant \varphi(0)$,
$$T(f)(x) = \int_0^1 xf(t)dt = x\int_0^1 f(t)dt$$
   et si $x \geqslant \varphi(1)$,
$$T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(t)f(t)dt$$
   et si $\varphi(0) \leqslant x \leqslant \varphi(1)$, il existe un unique $t_1 = \varphi^{-1}(x)$ (car φ induit un homéomorphisme de $[0,1]$ dans $\varphi([0,1])$).

   Si $t \leqslant t_1$, on a $\varphi(t) \leqslant x$, donc $\min(x, \varphi(t)) = \varphi(t)$. *Si $t \geqslant t_1$, on a* $\min(x, \varphi(t)) = x$. *On a donc*
$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^{t_1} \varphi(t)f(t)dt + \int_{t_1}^1 xf(t)dt \\ &= \underbrace{\int_0^{\varphi^{-1}(x)} \varphi(t)f(t)dt}_{=F_1(\varphi^{-1}(x))} + x\underbrace{\int_{\varphi^{-1}(x)}^1 f(t)dt}_{=F_2(\varphi^{-1}(x))} \end{aligned}$$
   et f et φ étant continues, F_1 et F_2 sont continues.

   Donc $T(f)$ continue et T linéaire, c'est un endomorphisme de E.

2. *On a*
$$|T(f)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 \min(x, \varphi(t))dt}_{=A(x)}$$
   donc
$$\|T(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|A\|_\infty$$
   donc T est continue et $|||T||| \leqslant \|A\|_\infty$. De plus pour $f = 1$, on a $|||T||| = \|A\|_\infty$.

3. *On a*
$$A(x) = \int_0^1 \min(x, \varphi(t))dt = \begin{cases} x & si \quad x \leqslant \varphi(0) \\ \int_0^1 \varphi(t)dt & si \quad x \geqslant \varphi(1) \end{cases}$$
   Dans tous les cas,
$$\|A\|_\infty \leqslant \int_0^1 \varphi(t)dt$$

donc

$$\|A\|_\infty = \int_0^1 \varphi(t)dt$$

Solution 6.35.

1. *φ est une forme linéaire. et on a*

$$|\varphi(P)| \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{a_k}{2^k}\right| \leqslant 2\|P|_\infty$$

donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 2$. Pour $p \neq 0$, $|\varphi(P)| < 2\|P\|_\infty$: pour avoir égalité, il faudrait pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k =$ constante $\neq 0$ ce qui n'est pas possible. Pour $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |\varphi(P_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc $|||\varphi||| = 2$. De plus, $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé.

2. *Soit $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi(P) = 0$ d'où $a_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$ (et il existe $N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, a_n = 0$). On a donc*

$$P(X) - 1 = (a_0 - 1) + \sum_{k\in\mathbb{N}^*} a_k X^k$$

et si $\|P-1\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{cases} |a_0 - 1| \leqslant \frac{1}{2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$|a_0| = \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

Et $\frac{1}{2} \leqslant 1 - |a_0| \leqslant |1 - a_0| \leqslant \frac{1}{2}$. Donc $|a_0| = \frac{1}{2}$ et $|1 - a_0| = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\theta} &\Rightarrow \left|1 - \frac{1}{2}e^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin(\theta)\right)^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 1 - \cos(\theta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \cos(\theta) = 1 \end{aligned}$$

et donc $a_0 = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| = \frac{1}{2}$, impossible car $P \in \mathbb{C}[X]$, ainsi $\|P - 1\|_\infty > \frac{1}{2}$.

3. *On définit, pour* $n \geqslant 1$, $P_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n)X^k$ *avec* $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$ *tel que* $P_n \in \ker(\varphi)$. *On a*

$$\begin{aligned} P_n \in \ker(\varphi) &\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\Big(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n\Big)\frac{1}{2^k} = 0 \\ &\Rightarrow \varepsilon_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

et donc $\varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ *(et* $\varepsilon_n < 0$*). On a donc* $\|P_n - 1\|_\infty = \frac{1}{2} - \varepsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$.
Donc $d(1, \ker(\varphi)) = \frac{1}{2}$ *et cette distance n'est pas atteinte.*

Solution 6.36. *Prouvons d'abord l'existence. Soit* $M \in \mathbb{R}^n$, *on définit* $r(M) = \sup\{\|M - A\| \mid A \in K\}$ *et* $\varphi\colon A \mapsto \|M - A\|$ *est continue sur* K *compact donc le sup est en fait un max. On a notamment* $r(M) = \{R > 0 \mid K \subset B(M, R)\}$. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & M & \mapsto & r(M) \end{array}$$

Soit $(M, M') \in (\mathbb{R}^n)^2$. *Pour tout* $A \in K$, *on a*

$$\|M - A\| \leqslant \|M - M'\| + \|M' - A\| \leqslant \|M - M'\| + r(M')$$

En particulier, on a

$$r(M) \leqslant \|M - M'\| + r(M')$$

et en échangeant M *et* M', *on a* $|r(M) - r(M')| \leqslant \|M - M'\|$. *Donc* r *est 1-lipschitzienne donc continue. Soit* $A_0 \in K$, $R(M) \geqslant \|M - A_0\| \geqslant \|M\| - \|A_0\| \xrightarrow[\|M\| \to +\infty]{} +\infty$. *Donc il existe* $M_0 \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $r(M_0) = \min_{M \in \mathbb{R}^n} r(M) = r_0$, *d'où l'existence d'une boule fermée de rayon minimal.*

Pour l'unicité, soit $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ *tel que* $r(M_1) = r(M_2) = r_0$. *On suppose que* $\|M_1 - M_2\| = \varepsilon > 0$. *Soit* M_3 *le milieu de* $[M_1 M_2]$. *On a* $K \subset B_{M_1, r_0} \cap B_{M_2, r_0}$. *On prend* $r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = r_0^2$ *d'où*

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < r_0$$

Soit $M \in B(M_1, r_0) \cap B(M_2, r_0)$, *on a*

$$\begin{aligned}
\|M - M_3\|^2 &= \frac{1}{4}\Big(\|M - M_1 + M - M_2\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(2\|M - M_1\|^2 + 2\|M - M_2\|^1 - \underbrace{\|M_1 - M_2\|^2}_{=\varepsilon^2}\Big) \\
&\leqslant \frac{1}{4}(2r_0^2 + 2r_0^2 - \varepsilon^2) \\
&\leqslant r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} = r^2
\end{aligned}$$

Donc $B_1 \cap B_2 \subset \overline{B(M_3, r)}$ *d'où* $K \subset \overline{B(M_3, r)}$, *ce qui est absurde car* $r < r_0$. *Donc* $M_1 = M_2$.

Solution 6.37. φ *est évidemment définie et linéaire. Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)| &= \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^{\frac{1}{2}} f\right| + \left|\int_{\frac{1}{2}}^1 f\right| \\
&\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} |f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f| \\
&\leqslant \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc φ est continue et $|||\varphi||| \leqslant 1$. Notons que si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors on a égalité partout au-dessus et pour tout $t \in [0,1]$, $|f(t)| = \|f\|_\infty$ et comme $\left|\int f\right| = \int |f|$ implique que f est de signe constant sur l'intervalle d'intégration, si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors f est de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Or $|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f| = |\int_0^{\frac{1}{2}} f| + |\int_{\frac{1}{2}}^1|$, f est de signe opposé sur les deux segments. Or f est continue en $\frac{1}{2}$, donc f est nulle. Donc pour f non nulle, on a $|\varphi(f)| < \|f\|_\infty$ donc la norme triple n'est pas atteinte. Enfin, pour montrer que $|||\varphi||| = 1$, on utilise pour $n \geqslant 1$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ (\frac{1}{2} - t)n & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ -1 & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

On a bien $\|f_n\|_\infty = 1$.

Solution 6.38.

1. *Non car on applique l'application trace.*

2. *On a le résultat par récurrence.*

3. *On a*

$$(n+1)|||v^n||| = |||u \circ v^n \circ v - v^n \circ v \circ r||| \leqslant 2|||u||| |||v||| |||v^n|||$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v^n = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n+1 \leqslant 2|||u||| |||v|||$$

ce qui est impossible. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^n = 0$. Alors $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1} = 0$ donc $v^{n-1} = 0$ et de proche en proche $v = 0$: contradiction.

4. *Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,*

$$(D \circ T - T \circ D)(P) = (XP)' - XP' = P$$

donc $D \circ T - T \circ D = id$. D'après ce qui précède, T et D ne peuvent pas être continus simultanément.

Solution 6.39.

1. *$\sum_{k \geqslant 0} (A - I_n)^k$ converge absolument car $|||A - I_n|||^k \leqslant \alpha_k$ et $\alpha <$.*

Si $AX = 0$, $\|(A - I_n)X\| = \|X\| \leqslant \alpha\|X\|$ donc $\|X\| = 0$ et $X = 0$ donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$, idem pour B. On a alors

$$A \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k = ((A - I_n) + I_n) \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k = I_n$$

par téléscopage. Donc

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k$$

et

$$|||A^{-1}||| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$$

et de même pour B. On écrit alors

$$ABA^{-1}B^{-1} - I_n = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - I_n)(B - I_n) - (B - I_n)(A - I_n))A^{-1}B^{-1})$$

d'où

$$|||ABA^{-1}B^{-1} - I_n||| \leqslant \frac{2|||A - I_n||| |||B - I_n|||}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

2. *On prend* $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.

3. *Pour tout* $M \in G$, *il existe* $r > 0$ *tel que* $B(M, r) \cap G = \{M\}$. *Montrons que* G *est discret si et seulement si* I_n *est isolé. En effet, si* I_n *est isolé, il existe* $r_0 > 0$ *tel que* $B(I_n, r_0) \cap G = \{I_n\}$. *Soit* $M \in G$, *alors pour tout* $M' \in G$, $M - M' = M(I_n - M^{-1}M')$ *d'où* $I_n - M^{-1}M' = M^{-1}(M - M')$. *Si*

$$|||M - M'||| < \frac{r_0}{|||M^{-1}|||}$$

on a $|||I_n - M^{-1}M'||| < r_0$ *et donc* $M' = M$ *et* M *est isolé. Ainsi* G *est isolé. La réciproque est évidente.*

C *est dans le commutant si et seulement si* C *commute avec* A *et* B *si et seulement si*

$$\begin{cases} ACA^{-1}C^{-1} = I_n \\ BCB^{-1}C^{-1} = I_n \end{cases}$$

Notons maintenant que

$$\overline{B_{\|\cdot\|}(I_n, \frac{1}{4})} \cap G = \mathcal{A}$$

est fini. En effet, si cet ensemble était infini, il existerait $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *une suite injective dans* $\mathcal{A}$. *La suite étant bornée, on peut extraite* $(M_{\sigma(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ *qui converge et alors pour tout* $p \in I_n$

$$\underbrace{M_{\sigma(p)} M_{\sigma(p+1)}^{-1}}_{\xrightarrow[pto+\infty]{} I_n} \in G \setminus \{I_n\}$$

ce qui est impossible car I_n *est isolé.*

Comme $A \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$, *il existe* $C \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$ *telle que* $|||C - I_n|||$ *soit minimale et* $|||c - I_n||| \leqslant \frac{1}{4}$. *D'après la question 2 on a*

$$\left|\left|\left|ACA^{-1}C^{-1} - I_n\right|\right|\right| < |||C - I_n|||$$

et même chose pour B. *Donc nécessairement,* $ACA^{-1}C^{-1} = I_n$ *et de même pour* B. *Ainsi,* C *commute avec toutes les matrices de* G.

Solution 6.40.

1. $\mathbb{C}_{n-1}[A]$ *est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc c'est un fermé. Par division euclidienne par* χ_A*, d'après le théorème de Cayley-Hamilton,* $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$*. Comme*

$$\exp(A) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$$

$\exp(A) \in \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$.

2. *Si* A *est diagonalisable, il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *tel que*

$$A = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P$$

et donc

$$\exp(A) = P^{-1} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}) P$$

et $\exp(A)$ *est diagonalisable.*

Si $\exp(A)$ *est diagonalisable, on utilise la décomposition de Dunford :* $A = D + N$ *avec* $DN = ND$*,* D *diagonalisable et* N *nilpotente. On a donc*

$$\exp(A) = \exp(D) \underbrace{\exp(N)}_{=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}} = \exp(D) + \exp(D)\Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!}\Big) = \exp(D) + N'$$

avec N' *nilpotente et* $\exp(D)$ *est diagonalisable d'après le sens direct.* N' *commute avec* $\exp(D)$*. Par unicité de la décomposition de Dunford,* $\exp(A)$ *étant diagonalisable, on a* $N' = 0$*. Comme* $\exp(D)$ *est inversible,*

$$N \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}}_{=I_n+N''} = 0$$

avec N'' *nilpotente.* $I_n + N''$ *est donc inversible et ainsi* $N = 0$ *et* A *est diagonalisable.*

3. *D'après ce qui précède,* $\exp(A) = I_n$ *est diagonalisable et*

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{e^{\lambda} \mid \lambda \in \operatorname{Sp}_{\lambda}(\mathbb{C})\} = \{I_n\}$$

Donc $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$*.*

Réciproquement, si A *est diagonalisable avec* $\operatorname{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$*, en diagonalisant, on a bien* $\exp(A) = I_n$*.*

4. *Sur $\mathbb{R}$, si A est diagonalisable,* $\exp(A)$ *l'est aussi. Cependant, la réciproque n'est pas vrai, par exemple*

$$M = \begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{pmatrix} \text{ semblable à } \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

On a $\chi_M = X^2 + 4\pi^2$, $\exp(A) = I_2$ *et A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$.*

Solution 6.41.

1. *On a* $\ln(1-x) = P(x) + x^2 O(1)$ *et* $\exp(y) = Q(y) + y^n O(1)$ *d'où*

$$\exp(\ln(1+x)) = 1 + x = Q(\ln(1+x)) + \underbrace{\ln(1+x)^n O(1)}_{O(x^n)}$$

alors $1 + x = Q(P(x) + O(x^n)) + O(x^n) = Q(P(x)) + O(x^n)$. *Soit* $B(X) = Q(P(X)) + O(x^n) \in \mathbb{R}[X]$, *on a* $\frac{B(x)}{x^n} = O(1)$ *donc* $X^n \mid B$ *et*

$$Q(P(X)) = 1 + X + B(X) = 1 + X + X^n A(X)$$

2. *On a* $N^n = 0$ *donc $P(N)$ est aussi nilpotente et on a*

$$\exp(P(N)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(N)^k}{k!} = Q(P(N)) = I_n + N + 0$$

3. *Soit* $M \in GL_n(\mathbb{C})$ *et sa décomposition de Dunford :* $M = D + N$ *avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. On a* $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{C}^*$ *et on écrit*

$$M = D \underbrace{(I_n + \underbrace{D^{-1}N}_{\textit{nilpotente}})}_{=\exp(P(D^{-1}N))}$$

si $D = P_1 \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P_1^{-1}$, *pour tout* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *il existe* $\mu_k \in \mathbb{C}$ *tel que* $\lambda_k = \exp(\mu_k)$ *(car* $\exp$ *est surjectif sur $\mathbb{C}^*$). Alors*

$$D = \exp(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) P_1^{-1}) \in \mathbb{C}[D]$$

puis

$$\begin{aligned} M &= \exp\Big(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) P_1^{-1}\Big) \exp\Big(P(D^{-1}N)\Big) \\ &= \exp\Big(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) P_1^{-1} + P(D^{-1}N)\Big) \end{aligned}$$

car les matrices commutent.

Donc $\exp$ *est surjective.*

Solution 6.42. *On a* $A \subset \overline{A}$, $0 = \lim_{n\to+\infty} (\frac{2}{n})^{2n} \in \overline{A}$ *et* $e = \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{1}{n})^{n+1} \in \overline{A}$.

Si $n \geqslant 2$ *et* $p \geqslant 2$, $(\frac{1}{n}+\frac{1}{p})^{n+p} \leqslant 1$. *Donc si* $(\frac{1}{n}+\frac{1}{p})^{n+p} \geqslant 1$, *alors* $n = 1$ *ou* $p = 1$.

Si $x > e$, *à partir d'un certain rang, on a* $(1+\frac{1}{n})^{n+1} \leqslant \frac{e+x}{2}$ *et si* $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$. *Si* $1 \leqslant x < e$, *à partir d'un certain rang, on a* $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > x$ *donc si* $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$.

Soit $x < 1$, *si* $n \geqslant 2$ *et* $p \geqslant 3$ *ou* $n \geqslant 3$ *et* $p \geqslant 2$, *on a* $\frac{1}{n}+\frac{1}{p} \leqslant \frac{5}{6}$ *et*

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)^{n+p} &= \exp\left((n+p)\ln\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\right)\\ &\leqslant \exp\left((n+p)\ln\left(\frac{5}{6}\right)\right)\\ &\leqslant \max\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}, \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^p}_{\xrightarrow[p\to+\infty]{}0}\right)\end{aligned}$$

Il existe N_0 *tel que pour tout* $n \geqslant N_0$, $(\frac{5}{6})^n \leqslant \frac{x}{2}$. *Si* n *ou* p *est plus grand que* N_0, *on a donc*

$$\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)^{n+p} \leqslant \frac{x}{2}$$

Donc il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de A *plus grand que* $\frac{x}{2}$. *Ainsi,*

$$\overline{A} = A \cup \{e, 0\}$$

Solution 6.43. *On note*

$$\mathbb{V} = \bigcup_{m\geqslant 1} \mathbb{U}_m = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{m}} \,\middle|\, m \geqslant 1, k \in \{0,\dots,m-1\} \right\}$$

Soit $M \in H$. $X^m - 1$ *est scindé à racines simples sur* $\mathbb{C}$ *donc* M *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *avec ses valeurs propres dans* $\mathbb{V}$. *Réciproquement, si* M *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *et* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{V}$. *Alors pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M), \exists m_\lambda \in \mathbb{N}^*, \lambda \in \mathbb{U}_{m_\lambda}$ *et soit* $m = \mathrm{ppcm}_{\lambda\in\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)}(m_\lambda)$. *Alors* $M^m = I_n$.

Soit $A \in \overline{H}$, *il existe* $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{p\to+\infty} M_p = A$. *Comme le polynôme caractéristique est une fonction continue des coefficients, pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, *on a*

$$\lim_{p\to+\infty} \chi_{M_p}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = 0$$

Or

$$|\chi_{M_p}(\lambda)| = |\lambda - \lambda_{1,p}| \dots |\lambda - \lambda_{n,p}| \geqslant d(\lambda, \mathbb{U})^n$$

avec $\lambda_{i,p} \in \mathbb{V}$ *pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$*. Donc* $d(\lambda, \mathbb{U}) = 0$ *et comme* $\mathbb{U}$ *est fermé,* $\lambda \in \mathbb{U}$*.*

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *tel que* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$*. Soit*

$$\left\{e^{\mathrm{i}\theta_1}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_r}\right\}$$

les valeurs propres distinctes de A *de multiplicités* $m_1, \dots, m_r$*. Il existe* $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ *tel que*

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_1}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_1}}_{m_1 \textit{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_r}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_r}}_{m_r \textit{ fois}})Q^{-1}$$

On a

$$\theta = \lim_{k\to+\infty} \frac{2\pi}{k} \lfloor k\frac{\theta}{2\pi} \rfloor$$

donc on peut former, pour $p \in \mathbb{N}^*$*,*

$$A = Q\,\mathrm{diag}(\underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_{1,p}}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_{1,p}}}_{m_1 \textit{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{\mathrm{i}\theta_{r,p}}, \dots, e^{\mathrm{i}\theta_{r,p}}}_{m_r \textit{ fois}})Q^{-1}$$

avec $\theta_{i,p} = \frac{2\pi}{p}\lfloor p\frac{\theta_j}{2\pi}\rfloor + \frac{2j\pi}{p}$*. Pour* p *suffisamment gand, les* $(\theta_{j,p})$ *sont deux à deux distincts donc* A_p *est diagonalisable et* $A_p \in H$*, et donc* $A \in \overline{H}$*.*

Solution 6.44.

1. *On a l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. On a cependant* $N_a(X^k) = |a_k|$ *et pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,* $X^k \neq 0$*. Donc* N_a *est une norme implique que* a *ne s'annule pas sur* $\mathbb{N}$*. Réciproquement, si pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,* $a_k \neq 0$*, si* $P \neq 0$*, il existe* $k \in \mathbb{N}$ *avec* p_k *et donc* $N_a(P) > 0$*. Donc* N_a *est une norme si et seulement si pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,* $a_k \neq 0$*.*
2. *Si* N_a *et* N_b *sont équivalentes, alors il existe* $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ *tel que pour tout* $k \in \mathbb{N}$*,*

$$\beta N_b(X^k) \leqslant N_a(X^k) \leqslant \alpha N_b(X^k)$$

d'où

$$\beta |b_k| \leqslant N_a(X^k) \leqslant \alpha |b_k|$$

Donc $a = O(b)$ *et* $b = O(a)$*.*

Réciproquement, si $a = O(b)$ et $b = O(a)$, alors on a l'inégalité précédente sur les a_k et b_k, d'où

$$\beta \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k a_k| \leqslant \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k|$$

et donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\beta N_b(P) \leqslant N_a(P) \leqslant \alpha N_b(P)$$

et N_a et N_b sont équivalentes.

3. *Δ est continue pour N_a si et seulement s'il existe $c \geqslant 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $N_a(\Delta P) \leqslant CN_a(P)$. Si Δ est continue alors il existe $c \geqslant 0$ tel que $N_a(kX^k) \leqslant cN_a(X^k)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$|ka_{k-1}| \leqslant c|a_k| \tag{6.1}$$

Réciproquement, si on a (6.1), pour tout $P \in \mathbb{C}[X] = N_a(\Delta P) \leqslant cN_a(P)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}, a_k = k!$, (6.1) est vérifiée pour $c = 1$. Si $b_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, (6.1) n'est pas vérifiée donc Δ n'est pas continue pour N_b.

Solution 6.45.

1. *On a $d(x, A) = 0$ si et seulement si $\inf\limits_{a \in A} \|x - a\| = 0$ si et seulement si $\varepsilon > 0, \exists a \in A\colon \|x - a\| < \varepsilon$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.*

   On a $A \subset \overline{A}$ donc $d(x, \overline{A}) \leqslant d(x, A)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a' \in \overline{A}$ tel que $\|x - a'\| < d(x, \overline{A}) + \varepsilon$ et il existe $a \in A$ tel que $\|a - a'\| < \varepsilon$. Ainsi,

$$d(x, A) \leqslant \|x - a\| \leqslant d(x, \overline{A}) + 2\varepsilon$$

   Ceci calant pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(x, A) \leqslant d(x, \overline{A})$ et donc on a égalité.

2. *$A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B}$ donc $d(A, B) \geqslant d(\overline{A}, \overline{B})$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a', b') \in \overline{A} \times \overline{B}$ tel que $\|a' - b'\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + \varepsilon$ et il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $\|a - a'\| < \varepsilon$ et $\|b - b'\|\varepsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a donc*

$$d(A, B) \leqslant \|a - b\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + 3\varepsilon$$

   Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien l'égalité.

Solution 6.46. *φ_{x_0} est une forme linéaire. Elle est continue si et seulement $C > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,*

$$|P(x_0)| \leqslant C\|P\|_\infty$$

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a

$$|P(x_0)| \leqslant \|P\|_\infty \sum_{k=0}^n |x_0|^k$$

Si $|x_0| < 1$, on a

$$|P(x_0)| \leqslant \|P\|_\infty \frac{1}{1-|x_0|}$$

donc φ_{x_0} est continue et si $x_0 = |x_0|e^{\mathrm{i}\theta_0}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = \sum_{k=0}^n e^{-\mathrm{i}k\theta_0} X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et

$$|\varphi_{x_0}(P_n) = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-|x_0|}$$

donc $|||\varphi_{x_0}||| = \frac{1}{1-|x_0|}$.

Si $|x_0| \geqslant 1$,

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

donc φ_{x_0} n'est pas continue.

Solution 6.47. *Pour le sens indirect, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$ donc $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$. Par continuité du déterminant, on a $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \det(-\lambda I_n)$. Donc $\lambda = 0$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ donc M est nilpotente.*

Pour le sens direct, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M. On trigonalise u sur une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \cdots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$. Posons pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$. On pose $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$ et $M_p = \mathrm{mat}_{B_p}(u)$, semblable à M et $M_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$ car $\|M_p\| \leqslant \frac{1}{p}\|M_1\|$.

Solution 6.48. *On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M.*

Pour le sens indirect, si M n'est pas diagonalisable, il existe une base $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{C}^n$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = D + N$$

où D est diagonale et N est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases $\mathcal{B}_p$ définies à l'exercice précédent, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} D$$

Si $D \in S_M$, alors M est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc S_M n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si M est diagonalisable, soit $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$ avec $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} M'$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$ car M et M_p sont semblables. Par continuité du déterminant, on a $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$, donc $\chi_{M'} = \chi_M$. De plus, $A \mapsto \Pi_M(A)$ (polynôme minimal) est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Pi_M(M_p) = 0$ donc $\Pi_M(M') = 0$. M' est donc annulée par Π_M, donc M' est diagonalisable et comme $\chi_M = \chi_{M'}$, M et M' ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc $M' \in S_M$.

Remarque 6.9. Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$

On a $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$ donc $\lim\limits_{p\to+\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim\limits_{p\to+\infty} M_p}$.

Solution 6.49. *On note $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x,y) \in I^2 \text{ et } |x-y| \leqslant h\}$.*

1. *ω_φ est bien défini car $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2\|\varphi\|_\infty$). Si $0 < h \leqslant h'$, alors $A_h \subset A_{h'}$ donc $\sup(A_h) \leqslant \sup(A_{h'})$ donc $\omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h')$.*

2. *Soit $(h,h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, soit $(x,y) \in I^2$ tel que $|x-y| \leqslant h+h'$ (où on peut supposer que $x \leqslant y$).*
   - *Si $y \in [x, x+h]$, alors $|x-y| \leqslant h$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$*
   - *Si $y \in [x+h, x+h+h']$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x+h)| + |\varphi(x+h) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$ car $|x - (x+h)| \leqslant h$ et $|x+h-y| \leqslant h'$.*

   Donc $\omega_\varphi(h+h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.

3. *Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda h \leqslant (\lfloor\lambda\rfloor + 1)h$ et par croissance et ce qui précède, on a*

$$\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (\lfloor\lambda\rfloor + 1)\omega_\varphi(h) \leqslant (\lambda+1)\omega_\varphi(h)$$

4. *Soit $\varepsilon > 0$. φ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, si $|x - y|\alpha$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$ et on a pour $h \leqslant \alpha$, $\omega_\varphi(h) \leqslant \varepsilon$ d'où $\lim\limits_{h \to 0} \omega_\varphi(h) = 0$.*
   Soit alors $h_0 > 0$ fixé et $h > 0$,
   — *si $h_0 \leqslant h$, on a $0 \leqslant \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leqslant \omega_\varphi(h - h_0)$.*
   — *si $h \leqslant h_0$, on a $0 \leqslant \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h_0 - h)$.*
   Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leqslant \omega_\varphi(|h_0 - h|)$. Donc on a bien $\lim\limits_{h \to h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$. Donc ω_φ est continue (et même uniformément).

Solution 6.50. *G est borné car si $M \in G$, $|||M||| \leqslant |||I_n||| + \mu = 1 + \mu$. Montrons donc que si G_0 est un sous-groupe borné de $GL_n(\mathbb{C})$, alors les valeurs propres de ses éléments sont de module 1, et ceux-ci sont diagonalisables.*

En effet, soit $M \in G$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, soit X un vecteur propre associé. On a $\|MX\| = |\lambda|\|X\| \leqslant |||M|||\|X\|$ donc $|\lambda| \leqslant |||M||| \leqslant \sup\limits_{M \in G} |||M|||$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $M^k \in G$ et $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$, donc si $|\lambda| > 1$, on a $\lim\limits_{k \to +\infty} |\lambda|^k = +\infty$, et si $|\lambda|^\lambda < 1$, on a $\lim\limits_{k \to -\infty} |\lambda|^k = +\infty$. Comme G est borné, $|\lambda| = 1$.

On utilise ensuite la décomposition de Dunford pour M : $M = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. Grâce au binôme de Newton, pour $k \geqslant r$ p r est l'indice de nilpotence de N, on a*

$$M^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} N^p D^{k-p} = \underbrace{D^k}_{\textit{borné}} + kND + \sum_{p=2}^{r-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}} N^p \underbrace{D^{k-p}}_{\textit{borné car } \mathrm{Sp}(D) \subset \mathbb{U}}$$

Donc

$$M^k \underset{k \to +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{k^{r-1}}{(r-1)!} \underbrace{N^{r-1}}_{\neq 0} D^{k-r+1}}_{\textit{non borné si } N \neq 0}$$

Donc $N = 0$ et $M = D$ est diagonalisable.

Revenons donc à l'exercice. Soit $M \in G$ et $\lambda = e^{i\theta} \in \mathrm{Sp}(M)$ avec $\theta \in]-\pi, pi]$. Si X est un vecteur propre associé à λ, on a

$$(\lambda - 1)\|X\| = \|(M - I_n)X\| \leqslant \mu\|X\|$$

donc $|\lambda - 1| = 2|\underbrace{\sin(\frac{\theta}{2})}_{\geqslant 0}| \leqslant \mu$. Donc $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ où $\theta_0 = \arcsin(\frac{\mu}{2}) \in [0, \pi[$.

Si $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, $e^{ik\pi} \in \mathrm{Sp}(M^k)$, $|e^{ik\theta} - 1| \leqslant \mu$. *Alors* $\{k\theta + 2l\pi \mid (k,l) \in \mathbb{Z}^2\}$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$ *non monogène et donc dense, et alors* $(e^{ik\theta})_{k\in\mathbb{Z}}$ *est dense dans* $\mathbb{U}$*, donc il existe* $k_0 \in \mathbb{Z}$ *tel que* $|e^{ik_0\theta} + 1| = |2 - (1 - e^{ik_0\theta_0})| < 2 - \mu$*, ce qui est impossible car* $|2 - (1 - e^{ik_{0\theta}})| \geqslant 2 - |1 - e^{ik_0\theta_0}| \geqslant 2 - \mu$.

Ainsi, $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ *et il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\lambda = e^{i\theta} \in \mathbb{U}_m$*. Ce n'est pas forcément le même* m *pour tout les* M *dans* G*. Notons alors pour*

$$\lambda \in \bigcup_{M\in G} \mathrm{Sp}(M) = \mathcal{A}$$

$\omega(\lambda)$ *l'ordre (multiplicatif) de* λ *dans* $\mathbb{U}$.

Si $\omega(\lambda) = m$*, on a* $gr(\lambda) = \mathbb{U}_m$ *donc il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\lambda^k = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathcal{A}$ *(car* $\lambda^k \in \mathrm{Sp}(M^k)$*). Supposons que* $\{\omega(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{A}\}$ *non borné. Alors il existe* $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *tel que* $m_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ *et* $e^{\frac{2i\pi}{m_k}} \in \mathcal{A}$*. Alors*

$$\underbrace{e^{2i\lfloor\frac{m_k}{2}\rfloor\frac{\pi}{m_k}}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{} e^{i\pi}=-1} \in \mathcal{A}$$

ce qui est impossible car $|\lambda + 1| \geqslant 2 - \mu > 0$*. On peut donc noter*

$$m = \bigvee_{\lambda\in\mathcal{A}} \omega(\lambda)$$

et pour tout $M \in G$*, pour tout* $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$*,* $\lambda^m = 1$*. Or* M *est diagonalisable, donc* $M^m = I_n$.

Solution 6.51. *Si* $M \in \mathcal{G}_q$*,* $P(X) = X^q - 1$ *annule* M *donc* M *est diagonalisable à valeurs propres dans* $\mathbb{U}_q$*. Réciproquement, si* M *est diagonalisable et* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_q$ *alors il existe* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *avec*

$$M = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)P^{-1}$$

et donc

$$M^q = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1^q, \ldots, \lambda_n^q)P^{-1} = I_n$$

Si $M \in \mathcal{G}_q$ *n'est pas une homothétie, il existe* $\lambda \neq \mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)^2$ *et* $P \in GL_n(\mathbb{C})$ *tel que*

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} M$$

Or

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est semblable } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

car $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)$ *donc est diagonalisable. Donc* $M_k \sim M$ *et* $M_k \in \mathcal{G}_q$ *et* M *n'est pas isolé.*

Montrons le petit lemme suivante : soit $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbb{C}^n$ *et* $|||\cdot|||$ *la norme subordonnée, soit* $\lambda \in \mathbb{C}$ *et* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\varepsilon > 0$*. Si* $|||M - \lambda I_n||| \leqslant \varepsilon$ *alors* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \overline{B(\lambda, \varepsilon)}$*. En effet, soit* X *un vecteur propre de* M *associé à* $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$*. On a*

$$\|(M - \lambda I_n)X\| = |\mu - \lambda| \|X\| \leqslant |||M - \lambda I_n||| \|X\| \leqslant \varepsilon \|X\|$$

donc $|\mu - \lambda| \leqslant \varepsilon$*.*

Pour $\varepsilon = \sin(\frac{\pi}{q}) > 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{U}_q$ *; si* $M \in B_{|||\cdot|||}(\lambda I_n, \varepsilon) \cap \mathcal{G}_q$ *alors pour tout* $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$*, on a* $|\lambda - \mu| \leqslant \sin(\frac{\pi}{q})$ *donc* $\lambda = \mu$*. Donc si* $M = \lambda I_n$ *alors* M *est isolé (avec* $\lambda \in \mathbb{U}_q$*). Donc les matrices scalaires sont isolées.*

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. *Tout d'abord,* $\deg(L_n) = n$ *et son coefficient dominant et* $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. -1 *et* 1 *sont racines d'ordre* n *de* P_n *donc pour tout* $k \in \{0,\dots,n-1\}$ $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$. *Ainsi, on a par intégrations par parties successives :*
$$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t)P_n(t)dt$$
Notamment, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P^{(n)} = 0$ *et* $(P|L_n) = 0$. *En particulier, pour tout* $m < n$, $\deg(L_m) \leqslant n-1$ *et* $(L_m|L_n) = 0$ *donc* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de* L_n *grâce aux intégrales de Wallis :*
$$\begin{aligned}\|L_n\|_2^2 &= (L_n|L_n)\\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} L_n^{(n)}(t^2-1)^n dt\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt\end{aligned}$$
On pose $t = \cos(\theta)$ *d'où* $dt = -\sin(\theta)d\theta$, *d'où*
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt &= \int_0^{\pi} \sin(\theta)^{2n+1}d\theta\\ &= 2I_{2n+1} \text{ [Wallis]}\end{aligned}$$
On a classiquement $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}I_n$. *D'où*
$$\begin{aligned}I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\underbrace{I_1}=1\\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$
d'où
$$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times 2\times\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

2. *On utilise la formule de Leibniz en écrivant* $X^2-1 = (X+1)(X-1)$.

3. *On montre le résultat par récurrence sur* $k \in \{0,\dots,n\}$ *en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que* $L_n = P_n^{(n)}$ *s'annule au moins* n *fois sur* $]-1,1[$. *Or* $\deg(L_n) = n$, *donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.*

4. $(L_0,\dots,L_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$ *(étagée en degré). Donc il existe* $(\alpha_{n,0},\dots,\alpha_{n,k})\in\mathbb{R}^{k+1}$ *tel que* $XL_{n-1}=\sum_{k=0}^n\alpha_{n,k}L_k$*. Si* $k\leqslant n-3$*, on a*

$$(XL_{n-1}L_k)=\alpha_{n,k}\|L_k\|_2^2=(L_{n-1}XL_k)=0$$

car $\deg(XL_k)=k+1\leqslant n-2$*. Donc*

$$XL_{n-1}=\alpha_{n,n-2}L_{n-2}+\alpha_{n,n-1}L_{n-1}+\alpha_{n,n}L_n$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(Xl_{n-1}|L_{n-1})=\int_{-1}^1 tL_{n-1}(t)^2dt$$

Or P_n *est paire, donc* L_n *est de la parité de* n *et donc* L_n^2 *est paire puis* XL_n^2 *est impaire. Donc* $\alpha_{n,n-1}=0$*.*

$$\begin{aligned}(XL_{n-1}|L_{n-2})&=\alpha_{n,n-2}\underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{=\frac{2}{2n-3}}\\&=(-1)^n\int_{-1}^1P_{n-1}(t)\underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}}\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\int_{-1}^1P_{n-1}(t)dt&=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\underbrace{\int_{-1}^1(1-t^2)^{n-1}dt}_{2I_{2n-1}}\\&=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\times2\times\frac{2^{2n-2}(n-1)!)^2}{(2n-1)!}\\&=\frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!}\end{aligned}$$

donc $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}}=\frac{n-1}{n}$*. D'où le résultat.*

Solution 7.2. *On forme*

$$\begin{array}{rccl}g: & [a,b] & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \underbrace{\Delta f(x_0,\dots,x_{n-1},x)}_{\varphi(x)}-\underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)A}_{P(x)}\end{array}$$

On a $g(x_n)=0$. *On suppose les* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *distincts, et on pose*

$$A=\frac{V(x_0,\dots,x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1}(x_n-x_i)}$$

g *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *et pour tout* $i\in\{0,\dots,n\}$, *on a* $g(x_i)=0$. *Donc il existe* $\xi\in]a,b[$ *tel que* $g^{(n)}(\xi)=0$ *(théorème de Rolle appliqué* n *fois.* $\deg(P)=n$ *et son coefficient dominant est* A *donc* $P^{(n)}(\xi)=An!=\varphi^{(n)}(\xi)$.

On développe maintenant $\varphi(x)$ *par rapport à la dernière colonne :*

$$\varphi(x)=f(x)\times V_n(x_0,\dots,x_{n-1})+Q(X)$$

avec $\deg(Q)\leqslant n-1$ *et* $V_n(x_0,\dots,x_{n-1})=\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i-x_j)$ *(déterminant de Vandermonde). On a donc*

$$\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)\prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_j-x_i)$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}=\frac{A}{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j-x_i)}=\Delta f(x_0,\dots,x_n)$$

Solution 7.3. *On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.*

$$f(0)=f\Big(\frac{1}{2}\Big)-\frac{1}{2}f'\Big(\frac{1}{2}\Big)+\int_{\frac{1}{2}}^{0}-tf''(t)dt$$

et de même

$$f(1)=f\Big(\frac{1}{2}\Big)-\frac{1}{2}f'\Big(\frac{1}{2}\Big)+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f''(t)dt$$

D'où

$$\begin{aligned}A(f)&=f(0)-f\Big(\frac{1}{2}\Big)+f(1)-f\Big(\frac{1}{2}\Big)\\&=\int_0^{\frac{1}{2}}tf''(t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)f''(t)dt\\&\leqslant\int_0^{\frac{1}{2}}tdt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)dt\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

Et c'est atteint pour $f(t)=\frac{t^2}{4}$.

Solution 7.4. *Pour tout* $(x,h)\in\mathbb{R}^2$*,* $f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)$ *donc*

$$f'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1)) \tag{7.1}$$

donc f' *est* $\mathcal{C}^1$ *et donc* f *est* $\mathcal{C}^2$*. On fixe alors* x *et on dérive deux fois (7.1) en fonction de* h*. On a alors*

$$f''(x+h)=f''(x-h)$$

pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$ *donc* f'' *est constante et* f *est polynômiale de degré 2.*

Réciproquement, si $f(x)=ax^2+bx+c$*, on a bien la relation de l'énoncé.*

Solution 7.5.

1. *Soit* $a>0$*,*

$$\begin{array}{rccc}\tau_a: & \mathbb{R} & \to &]a,+\infty[\\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{array}$$

est croissante. Donc il existe $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_a(x)\in\overline{\mathbb{R}}$*. On écrit alors*

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{x}+\frac{f(a)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} l$$

2. *S'il existe* $a<b\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ *tel que* $f(a)<f(b)$*, alors* $\tau_a(b)>0$*. Comme* τ_a *est croissante,* $l\geqslant\tau_a(b)>0$*. Par contraposée, si* $l\geqslant 0$*,* f *est décroissante.*

3. *Posons pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$*,* $\varphi(x)=f(x)-lx$*. Pour* $x<y$*, on a*

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-l\leqslant 0$$

Donc φ *est décroissante et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\in\overline{\mathbb{R}}$ *existe.*

Solution 7.6.

1. *On forme*

$$\begin{array}{rccc}g: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{\frac{1}{p}+x}\end{array}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{np}\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{k}{np}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{dx}{\frac{1}{p}+x}=\ln(p+1)=l_p$$

2. *On note* $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$.

   Soit $\varepsilon_0 > 0$. *Il existe* $\alpha_0 > 0$ *tel que si* $0 < x < \alpha_0$, *alors* $|\varepsilon(x_0)| \leqslant \varepsilon_0$, *et il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{n} \leqslant \alpha_0$. *Alors pour tout* $n \geqslant N_0$, *pour tout* $k \in \{0, \dots, np\}$,

$$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left|\varepsilon\Big(\frac{1}{k+n}\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}$$

   et

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{k+n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}\frac{np+1}{n+1} \leqslant \varepsilon_0$$

   On a donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{n+k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ln(p+1) f'(0)$$

3. *On peut penser à* $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ *continue et* $f(0) = 0$. *De plus,*

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

   donc v_n *diverge.*

4. *On écrit* $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + x^2\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to +\infty]{} 0$. *Ainsi,*

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{bp} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{(k+n)^2}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$, *pour tout* $k \in \{0, \dots, np\}$, $|\varepsilon(\frac{1}{n+k})| \leqslant \varepsilon$ *et donc*

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2}$$

   donc

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right)$$

   puis

$$v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{(n+k)^2}=\frac{1}{(np)^2}\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{(\frac{1}{p}+\frac{k}{np})^2}$$
$$=\frac{1}{np}\times\underbrace{\frac{1}{np}\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{(\frac{1}{p}+\frac{k}{np})^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{dx}{(\frac{1}{p}+x)^2}}$$

donc

$$v_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{f''(0)p}{n(p+1)}$$

Solution 7.7. *Supposons que f' ne tend pa vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon_0>0,\forall A>0,\exists x_A\geqslant A,|f'(x_A)|\geqslant\varepsilon_0>0$. Par continuité uniforme, il existe $\alpha_0\geqslant 0$, $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$, si $|x-y|\leqslant\alpha_0$ alors $|f'(x)-f'(y)|\leqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $t\in[x_A-\alpha,x_A+\alpha]$, on a*

$$|f'(t)|\geqslant|f'(x_A)|-|f'(x_A)-f'(t)|\geqslant\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}$$

et pour $A=n$, pour tout $n\in\mathbb{N},\exists x_n\geqslant n,\forall t\in[x_n-\alpha,x_n+\alpha],|f'(t)|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{n}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $[x_n-\alpha,x_n+\alpha]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il existe une infinité de $n\in\mathbb{N}$ tels que $f'>0$ sur les $[x_n-\alpha,x_n+\alpha]$. Alors

$$f(x_n+\alpha_0)-f(x_n-\alpha_0)=\int_{x_n-\alpha_0}^{x_n+\alpha_0}f'(t)dt\geqslant\varepsilon_0\alpha_0>0$$

mais comme $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\in\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}f(x_n+\alpha_0)-f(x_n-\alpha_0)=0$$

d'où la contradiction.

Si $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$, on applique ce qui précède à $\Im(f)$ et $\Re(f)$.

Si f' n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x)=\frac{\sin(x^2)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

car $|f(x)|\leqslant\frac{1}{x}$ et

$$f'(x)=\underbrace{-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}+\underbrace{\frac{2x\cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en }+\infty}$$

Solution 7.8. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x+\frac{h}{2}) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x)$$

par continuité de g. Donc f est dérivable et $f' = g$. Par ailleurs, pour $y = \frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2})$$

par récurrence f est $\mathcal{C}^\infty$.

En outre, en fixant x et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à y, on a

$$f''(x+y) - f''(x-y) = 0$$

Donc f'' est constante donc f est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec $f' = g$).

Solution 7.9. *On a*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt$$

On note $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \int_a^b F''(t)(b-t)dt$$

Pour $a = k$ et $b = k+\frac{1}{2}$, on a

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}-u)du$$

et pour $a = k+1, b = k+\frac{1}{2}$,

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}+u)du$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(f(k)-f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u(f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u))du$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u)}_{\geqslant 0 \text{ car } u \geqslant 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du$$

et $f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u) \leqslant f'(k+1) - f'(k)$ *d'où*

$$S_n \leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} udu}_{=\frac{1}{8}}(f'(n) - f'(1))$$

Solution 7.10.

1. *D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a*

$$\begin{cases} \|A\| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2 \\ \|B\| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2 \end{cases}$$

On a $B - A - f(x-h) + f(x+h) = 2hf'(x)$ *d'où*

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}$$

Donc f' *est bornée sur* $\mathbb{R}$. *On a ensuite un majorant qui dépend de* h *que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.*

2. *L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau*

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|A_k\| \leqslant \frac{k^n}{n!} M_n$$

On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1 - f(x+1) \\ \vdots \\ A_k - f(x+k) \\ \vdots \\ A_n - f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(M) = \frac{(-1)^n}{1! \times 2! \times \cdots \times (n-1)!} V(1, \dots, n)$$

où V est le déterminant de Vandermonde. Donc $\det(M) \neq 0$. *On peut former les* $f^{(j)}(x)$ *en fonction des* $(A_i - f(x+i))_{1\leqslant i\leqslant n}$ *: il existe* $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ *tel que pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(A_i - f(x+i))$. *Donc*

$$\|f^{(j)}(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^n |\alpha_i|\Big(\frac{n}{n!}M_n + M_0\Big)$$

Donc $f^{(j)}$ *est bornée pour tout* $j\in\{1,\dots,n-1\}$.

Solution 7.11.

1.
$$l_{\sigma,\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1}\Big\|\int_{a_i}^{a_{i+1}}\gamma'(t)dt\Big\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt$$

2. *On a*
$$\begin{aligned}\Big|l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1}-a_i)\Big| &= \Big|\sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma(a_{i+1})-\gamma(a_i)\| - \|\underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{>0}\gamma'(a_i)\|\Big| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma(a_{i+1})-\gamma(a_i)-(a_{i+1}-a_i)\gamma'(a_i)\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}\|\gamma'(t)-\gamma'(a_i)\|dt\end{aligned}$$

3. $\|\gamma'\|$ *est continue donc*
$$\int_a^b\|\gamma'(t)\|dt = \lim_{\delta(\sigma)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1}\|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1}-a_i)$$

Donc α_0 *existe.*

γ' *est continue sur* $[a,b]$ *donc uniformément continue sur* $[a,b]$, *et il existe* $\alpha_1>0$ *tel que pour tout* $(x,y)\in[a,b]^2$, *on a*

$$|x-y|\leqslant\alpha \Rightarrow \|\gamma'(x)-\gamma'(y)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Alors si $\delta(\sigma)\leqslant\alpha_1$, *pour tout* $i\in\{0,\dots,n-1\}$, *pour tout* $t\in[a_i,a_{i+1}]$, *on a*

$$|t-a_i|\leqslant(a_{i+1}-a_i)\leqslant\alpha_1$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i)-\gamma'(t)\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, si $@d(\sigma) \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1)$, *on a*

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

4. *On a*

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$$

donc $\|\gamma'(t)\| = R$ *et* $l(\gamma) = 2\pi R$.

Solution 7.12.

1. *Pour tout* $t \in I$, *on a*

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_2(t)}$$

donc

$$e^{\mathrm{i}(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, *il existe* $k(t) \in \mathbb{Z}$ *telle que* $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$. *On a*

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi}$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à k_0 *d'après le théorème des valeurs intermédiaires.*

2. *Si* $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$,

$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *par composition,* f *est* $\mathcal{C}^k$. *On a alors*

$$f(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = \mathrm{i}\theta'(t) e^{\mathrm{i}\theta(t)} = \mathrm{i}\theta'(t) f(t)$$

Donc

$$\theta(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)}$$

De plus, on a

$$\theta(t) = \theta(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

pour $t_0 \in I$.

3. *On fixe* $t_0 \in I$. *Soit* θ_0 *un argument de* $\gamma(t_0)$, *on pose*

$$\theta(t) = \theta_0 - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

Comme $\frac{f'}{f}$ *est* $\mathcal{C}^{k-1}$, θ *est bien* $\mathcal{C}^k$. *On forme* $g(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)}$ *qui est de classe* $\mathcal{C}^k$. *On a*

$$g'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t)$$

donc $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$, *donc* $\frac{g}{f}$ *est constante sur* I *et* $g(t_0) = e^{\mathrm{i}\theta_0} = f(t_0)$ *donc* $g = f$ *sur* I. *Ainsi, pour tout* $t \in I$, *on a* $|f(t)| = |e^{\mathrm{i}\theta(t)}| = 1$ *et si* $\theta(t) = a(t) + \mathrm{i}(t)$, *on a donc*

$$e^{\mathrm{i}\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{\mathrm{i}a(t)}$$

donc $b(t) = 0$ *et* $\theta(t) \in \mathbb{R}$.

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires

Table des figures