

*Solutions Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Algèbre Générale	2
2 Séries numériques et familles sommables	3
3 Probabilités sur un univers dénombrable	4
4 Calcul matriciel	5
5 Réduction des endomorphismes	6
6 Espaces vectoriels normés	7
7 Fonction d'une variable réelle	20
8 Suites et séries de fonctions	21
9 Séries entières	22
10 Intégration	23
11 Espaces préhilbertiens	24
12 Espaces euclidiens	25
13 Calcul différentiel	26
14 Équation différentielles linéaires	27

1 Algèbre Générale

2 Séries numériques et familles sommables

3 Probabilités sur un univers dénombrable

4 Calcul matriciel

5 Réduction des endomorphismes

Solution 5.1. Pour le sens indirect, soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$ donc $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$. Par continuité du déterminant, on a $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \det(-\lambda I_n)$. Donc

$\lambda = 0$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ donc M est nilpotente.

Pour le sens direct, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M . On trigonalise u sur une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \dots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$. Posons pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$. On pose $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$ et $M_p = \text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u)$, semblable à M et $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ car $\|M_p\| \leq \frac{1}{p} \|M_1\|$.

Solution 5.2. On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M .

Pour le sens indirect, si M n'est pas diagonalisable, il existe une base $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{C}^n telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = D + N$$

où D est diagonale et N est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases \mathcal{B}_p définies à l'exercice précédent, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} D$$

Si $D \in S_M$, alors M est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc S_M n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si M est diagonalisable, soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$ avec $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M'$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$ car M et M_p sont semblables. Par continuité du déterminant, on a $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$, donc $\chi_{M'} = \chi_M$. De plus, $A \mapsto \Pi_M(A)$ (polynôme minimal) est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Pi_M(M_p) = 0$ donc $\Pi_M(M') = 0$. M' est donc annihilée par Π_M , donc M' est diagonalisable et comme $\chi_M = \chi_{M'}$, M et M' ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc $M' \in S_M$.

Remarque 5.1. Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$

On a $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p}$.

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. A $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x \cos(t) + y \sin(2t)\end{aligned}$$

est bornée, donc le sup sur \mathbb{R} existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au sup sur \mathbb{R} .

2. Si $|x| + |y| \leq 1$, alors $N(x, y) \leq 1$ donc on a la première inclusion.

Si $N(x, y) \leq 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leq 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leq \left| x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq 2$$

et donc $|y| \leq 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. On fixe $(x, y) \in S_N(0, 1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π -périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limiter à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ .

On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leq x |\cos(t)| + y |\sin(2t)| = |\varphi(-t)|$$

et $-t \in [0, \pi]$. Donc le sup est atteint sur $[0, \pi]$.

On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq \varphi(t) = \underbrace{x \cos(t)}_{\in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]} + y \sin(2t) \leq x \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \underbrace{y \sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t))}_{\in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]} = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Donc le sup est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le sup (existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le sup sur \mathbb{R} qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.

On a donc $x \cos(t_0) + y \sin(2t_0) = 1$ et $-x \sin(t_0) + 2y \cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0 , en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.

Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que x et y s'écrivent de la façon demandée, alors t_0 est l'unique point satisfaisant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$. Mais alors le sup de φ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est atteint en un point t_1 qui vérifie les mêmes choses, donc $t_1 = t_0$ d'où $N(x, y) = 1$.

Solution 6.2.

1. Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur E

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt\end{aligned}$$

Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$ et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. Pour $x \in [0, 1]$, écrire $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, utiliser Cauchy-Schwarz avec f' et 1 puis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$, pour enfin passer au sup sur x .
3. Utiliser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n \end{aligned}$$

Solution 6.3. Si f est ouverte, $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de \mathbb{R}^p . Donc f est surjective.

Si f est surjective, on prend F un supplémentaire de $\ker(f)$ dans \mathbb{R}^n avec $\dim(\ker(f)) = n - p$ et $\dim(F) = p$. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F et (e_{p+1}, \dots, e_n) une base de $\ker(f)$. On vérifie que $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de \mathbb{R}^p . On définit

$$\begin{aligned} N_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i^n x_i e_i &\mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

norme sur \mathbb{R}^n et

$$\begin{aligned} N_2 : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i^p y_i f(e_i) &\mapsto \max_{1 \leq i \leq p} |y_i| \end{aligned}$$

norme sur \mathbb{R}^p .

Soit Θ un ouvert de \mathbb{R}^n , soit $y_0 \in f(\Theta)$, il existe $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. Comme Θ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta$$

Soit $y = \sum_{i=1}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, si $N_2(y - y_0) < r_0$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$$

avec $N_1(x - x_0) = \max_{1 \leq i \leq p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. Ainsi $x \in \Theta$ et $y \in f(\Theta)$, donc $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ et $f(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.4.

1. Classique.
- 2.

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + \kappa(f)x \leq N(f)$$

car $x \leq 1$, donc $N_\infty \leq N$. Pour la non-équivalence, prendre

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n \end{aligned}$$

3. On a $|f(0)| \leq N_\infty(f)$ donc $N(f) \leq N'(f)$. Ensuite, $N_\infty \leq N$ donne $N' \leq N + \kappa \leq 2N$. Donc N et N' sont équivalentes.

Remarque 6.1. Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend $(e_i)_{i \in I}$ une base (de Hamel), $J = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ dénombrable. Si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, on peut vérifier que

$$N_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n |x_{i_{2n}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$. Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$. Alors

$$\left\| T_{i,j} \left(\frac{\lambda}{p} \right) - I_n \right\|_\infty = \left| \frac{\lambda}{p} \right| < \alpha$$

donc $T_{i,j}(\lambda) \in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left(T_{i,j} \left(\frac{\lambda}{p} \right) \right)^p \in G$$

Soit $\delta = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$.

On a alors

$$\left\| D_n \left(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} \right) - I_n \right\|_\infty < \alpha$$

donc $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}})^p \in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G = GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 6.2. C'est faux sur \mathbb{R} . Contre-exemple : matrices de déterminant positif.

Solution 6.6. Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $h \in E$ avec $\|h\| \leq \alpha$ et $\|f(h)\| > \varepsilon_0$. On prends $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\| \leq 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leq M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x) + f(h) = f(x)$$

donc f est continue.

On a $f(px) = p(fx)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lambda$.

Comme f est continue, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n f(x) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Remarque 6.3. Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i \in I}$ une \mathbb{Q} -base de \mathbb{R} ($0 \in I$). On définit

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i \in I \setminus \{0\}} \lambda_i e_i$$

f vérifie $f(x + y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \rightarrow \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. On a $\alpha(A) \subset \overline{A}$ donc $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Comme $\alpha(A)$ est un ouvert inclus dans $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.
2. Si $\beta(A) = \overline{\overline{A}}$, on montre aussi que $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. On a donc $A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overline{A}}}$ et c'est tout.

Solution 6.8.

1. Si $d_A = d_B$,

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B}$$

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_1\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de l'inf). Il existe $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de la fermeture). Ainsi,

$$d_A(x) \leq \|x - a_2\| \leq \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x)$. Comme $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leq d_A$, on a $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.

2. Soit $x \in A$, on a $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leq \rho(A, B)$ donc $\sup_{x \in A} d_B(x) \leq \rho(A, B)$, de même pour $\sup_{y \in B} d_A(y)$ donc on a une première inégalité.

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x - a\| \leq d_A(x) + \varepsilon$ et $\|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon$. On a alors

$$d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|a - b\| + \|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A, B)$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leq d_B(x) + \alpha(A, B)$. De même, $d_B(x) \leq d_A(x) + \alpha(A, B)$ donc $\rho(A, B) \leq \alpha(A, B)$.

Solution 6.9.

1. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car $\lim_{z \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \rightarrow x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur \mathbb{C} , on a $y = P(x) \in P(F)$.

2. Soit Θ un ouvert de \mathbb{C} , soit $y \in P(\Theta)$, $\exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x, r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x - x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominatrice de P . Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi

$$|Q(x)| = |y - y'| \geq |a|r^n$$

Par contraposée, si $|y - y'| \leq \frac{|a|r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x' - x| < r$. Ainsi, $x' \in B(x, r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.10.

1. Si $P \notin \mathcal{S}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$ et $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$. Par contraposée, si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$, alors $P \in \mathcal{S}$.
Réciproquement, si $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$ avec $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ réels, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^n |a - \lambda_i + ib| \geq |b|^n$$

2. Soit $(P_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $P_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} P \in F$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|P_p(z)| \geq |\Im(z)|^n$ donc quand $p \rightarrow +\infty$, $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$ donc $P \in \mathcal{S}$ et \mathcal{S} est fermé.
3. Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrice trigonalisable sur \mathbb{R} qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ib bite χ_p le polynôme caractéristique de M_p . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\chi_p \in \mathcal{S}$ et $\chi_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \chi_M$. Comme \mathcal{S} est fermé, $\chi_M \in \mathcal{S}$ et M est trigonalisable sur \mathbb{R} .

Solution 6.11.

1. φ est linéaire et $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n + 1 = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$.
Si φ est bijective, elle est surjective et il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UA + BV = 1$ et d'après le théorème de Bézout, on a $A \wedge B = 1$.
Réciproquement, si φ n'est pas surjective, il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\varphi(U, V) = 0$ d'où $AU = -BV$. Soit $\delta = A \wedge B$, on écrit $A = \delta A_1$ et $B = \delta B_1$ avec $A_1 \wedge B_1 = 1$ et on a $A_1 U = -B_1 V$. D'après le théorème de Gauss, on a $A_1 \mid V$ et $B_1 \mid U$. Si $U = 0$, on a $V = 0$ et de même si $V = 0$, on a $U = 0$. On peut donc supposer $U \neq 0$ et $V \neq 0$, et on a alors $\deg(A_1) \leq \deg(V) \leq n - 1 < n = \deg(A)$ mais $A = \delta A_1$ donc $\deg(\delta) \geq 1$ et $A \wedge B \neq 1$.
2. Φ est continue car $R_{A,B}$ est un polynôme en les coefficients de A et B .
3. Comme on est dans \mathbb{C} , $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$. $\Phi_{P,P'}$ est continue d'après la question précédente, $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc Δ est ouvert.
Sur \mathbb{R} , on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si $P \wedge P' = 1$ (contre-exemple : $P = X^2 + 1$). Dans $\mathbb{R}_3[X]$, X est scindé à racines simples et $X(1 + \varepsilon X)^2 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} X$ et $-\frac{1}{\varepsilon}$ est racine double, donc Δ n'est pas ouvert.

Remarque 6.4. On peut cependant considérer

$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\}$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ sont les racines (distinctes) de R sur \mathbb{R} , on choisit $\alpha_0 \in]-\infty, \lambda_1, \alpha_n \in]\lambda_n, +\infty[$ et $\alpha_i \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ si $i = 1, \dots, n-1$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$ (car les racines de P provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ Q &\mapsto (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0 \leq k \leq n-1} \end{aligned}$$

Ψ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que si $\|P - Q\| < r$, alors $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Donc Q change n fois de signe, et admet au moins n racines. Mais $\deg(Q) = n$, donc Q est scindé à racines simples sur \mathbb{R} , donc Δ_n est ouvert dans $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$.

Remarque 6.5.

$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ diagonalisable à racines simples}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M \text{ sciné à racines simples}\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et c'est aussi vrai sur \mathbb{R} .

Solution 6.12.

1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^n \end{aligned}$$

f est continue et $F = f^{-1}(\{0\})$ donc $F = \overline{F}$.

Soit $M_0 \in F$, X^n annule M_0 donc M_0 est trigonalisable : on écrit M_0 dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors M_ε la même matrice dans la même base en rajoutant simplement ε en première position de la diagonale. Alors $M_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M_0$ et $M_\varepsilon \notin F$

donc $\overset{\circ}{F} = \emptyset$. Notons que cela signifie que F est dense.

2. La norme dérive du produit scalaire $(A|B) \mapsto \text{Tr}(A^T B)$. Soit $M \in F$, on a $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$. On a $(M|I_n) = \text{Tr}(M) = 0$ car M est nilpotente. Donc $\|M - I_n\|^2$ est minimale pour $\|M\|^2$ minimale, donc pour $M = 0 \in F$. Donc $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$ (et la distance est atteinte pour $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

Solution 6.13.

1. $A \mapsto \det(A)$ est continue et $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est donc ouvert. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = A - \frac{1}{p+1}I_n$. Comme $\text{Sp}(A)$ est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \geq N$, $\frac{1}{p+1} \notin \text{Sp}(A)$. Donc pour tout $p \geq N$, $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$, et $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$ donc $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. On fixe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On écrit $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Comme, à B fixé, $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a le résultat par densité.

Solution 6.14.

1. On a $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u) \circ v_p = \frac{1}{p}(id_E - u^p)$, donc $\|v_p \circ (id_E - u)\| \leq \frac{1}{p}(\|id_E\| + \|u^p\|) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.
Soit $x \in \ker(u - id_E) \cap \text{Im}(u - id_E)$, on a $u(x) = x$ et il existe $y \in E$, $x = (u - id_E)(y)$. On a $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$ et $v_p(x) = v_p \circ (u - id_E)(y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ d'où $x = 0$. Le théorème du rang permet de conclure.

2. Soit $x \in E$, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $\Pi(x) = x_1$ et $x_2 = (u - \text{id}_E)(y_2)$. Alors $v_p(x) = x_1 + v_p \circ (u - \text{id}_E)(y_2) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x_1 = \Pi(x)$.

Solution 6.15.

1. Pour tout $x \in A$, $f_n(x) \in A$ car A est convexe. Soit $(x, y) \in A^2$, on a

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\|$$

Donc f_n est $(1 - \frac{1}{n})$ -lipschitzienne. On forme

$$\begin{aligned} g_n : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|f_n(x) - x\| \end{aligned}$$

qui est continue. Soit $x_n \in A$ telle que $g_n(x_n) = \min_{x \in A} g_n(x)$ (existe car A est compact et g_n continue). On a $x_n \in A$, d'où $f_n(x_n) \in A$ et

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f_n(x_n) - x_n\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) g_n(x_n)$$

Si $g_n(x_n) \neq 0$, alors on aurait $g_n(f_n(x_n)) < g_n(x_n)$ ce qui n'est pas possible. Donc $g_n(x_n) = 0$ et $f_n(x_n) = x_n$.

Soit y_n un autre point fixe, on a

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x_n - y_n\|$$

donc $x_n = y_n$.

2. On a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et on extrait (car A est compact) et on a

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in A$$

On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)} f(x_0)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\right) f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)}$$

par continuité de f . Donc $f(x) = x$.

3. Soit $(x, y) \in A^2$, points fixes de f , et $t \in [0, 1]$, on pose $z = tx + (1 - t)y$. On a

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|f(x) - f(y)\| \\ &\leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= (1 - t)\|x - y\| + t\|x - y\| \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

On a donc égalité partout : $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$ et $\|f(x) - f(z)\| = \|x - z\|$, $\|f(z) - f(y)\| = \|z - y\|$ car f est 1-lipschitzienne.

Comme la norme est euclidienne, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) - f(z) = \lambda(f(z) - f(y))$ d'où $f(x) + \lambda f(y) = (\lambda + 1)f(z)$ d'où $f(z) = \frac{x+\lambda y}{\lambda+1} = t'x + (1-t')y$ avec $t' = \frac{1}{\lambda+1} \in [0, 1]$. En reportant, on a

$$\|f(x) - f(z)\| = \|x - t'x - (1-t')y\| = (1-t')\|x - y\| = \|x - z\| = (1-t)\|x - y\|$$

Si $x \neq y$, alors $t = t'$ et $f(z) = tx + (1-t)y = z$.

4. Soit dans \mathbb{R}^2 , $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} = [-1, 1]^2 = A$. Soit

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto (x, |x|) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_\infty &= \|(x_1, |x_1|) - (x_2, |x_2|)\|_\infty \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, ||x_1| - |x_2||\} \\ &= |x_1 - x_2| \\ &\leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty \end{aligned}$$

Donc f est 1-lipschitzienne, on a $f(x, y) = (y, x)$ si et seulement si $y = |x|$. Donc ici, F n'est pas convexe.

Solution 6.16.

1. On a pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$. Pour $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $f(qrx) = qf(rx) = f(px) = pf(x)$ donc $f(rx) = rf(x)$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} et continuité de f , on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Donc f est linéaire.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans \mathbb{C} .

2. On étudie la série, pour x fixé de terme général

$$\|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| = \frac{1}{2^n} \|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$$

qui est donc convergente. Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3. On a $v_0(x) = f(x)$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) = g(x) - f(x)$. f étant continue, v_n l'est aussi, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme pour tout $x \in E$, $\|(v_{n+1} - v_n)(x)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$, donc g est continue.

4. On a, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|v_n(x + y) - v_n(x) - v_n(y)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n(x + y)) - \frac{1}{2^n} (f(2^n x) + f(2^n y)) \right\| \leq \frac{M}{2^n}$$

Donc quand $n \rightarrow +\infty$, $g(x + y) = g(x) + g(y)$.

On a pour tout $x \in E$,

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M$$

Soit maintenant h linéaire continue telle que $h - f$ soit bornée, soit $M' = \sup_{x \in E} \|h(x) - f(x)\|$.

On a donc

$$\|v_n(x) - h(x)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^n} h(2^n x) \right\| \leq \frac{M'}{2^n}$$

car h est linéaire. Donc quand $n \rightarrow +\infty$, $g(x) = h(x)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = g(x)$.

Solution 6.17. En particulier, pour $t = f(0)$, $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{x \in E \mid f(x) = f(0)\}$ est borné (car compact). Donc il existe A tel que $f^{-1}(\{f(0)\}) \subset \overline{B(0, A)}$. Par contraposée, pour tout $x \in E$, si $\|x\| > A$, alors $f(x) \neq f(0)$.

On montre alors que $E \setminus \overline{B(0, A)}$ est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout $x \in E \setminus \overline{B(0, A)}$, $f(x) > f(0)$ soit $f(x) < f(0)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on se place dans le cas $f(x) > f(0)$. Comme on est en dimension finie sur $\overline{B(0, A)}$ compact, f atteint son minimum et ce minimum est plus petit que $f(0)$, c'est donc un minimum global.

Remarque 6.6. C'est faux pour $n = 1$. Contre-exemple : $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

Solution 6.18. Si c'était le cas, on prend un cercle \mathcal{C} compact (et connexe par arcs). $f(\mathcal{C})$ est compact connexe par arc dans \mathbb{R} . On note $f(\mathcal{C}) = [a, b]$ (avec $a < b$ car f injective). Si $x \in \mathcal{C}$ est tel que $f(x) = \frac{a+b}{2}$, on $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a, b] \setminus \left\{ \frac{a+b}{2} \right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$ donc une telle fonction n'existe pas.

Solution 6.19.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_{l^1} = 1$ et $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\|$ donc $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On note $M = \sup |K_n| \leq \|\varphi\|$.

Soit maintenant $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| u - \sum_{n=0}^N u_n e_n \right\|_1 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

(reste d'une série convergente). Par continuité de φ , on a donc

$$|\varphi(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| |K_n| \leq M \|u\|_1$$

Ainsi, $\|\varphi\| \leq M$ et donc $\|\varphi\| = M$.

2. F est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : l^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{aligned}$$

Elle est bien définie car $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Elle est linéaire, et continue car $|\varphi(u)| \leq \|(K_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(e_n) = K_n$. Donc $F(\varphi) = (K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et F est surjective. Donc F est une isométrie bijective et le dual topologique de l^1 est équivalent à l^∞ .

Solution 6.20.

1. Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $K = \ker(\varphi)$. Si F est dense, φ est discontinue. Soit $(a, b) \in (E \setminus H)^2$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $b - a$ (existe car H est dense). La suite $(a + x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b . Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(a + x_n) = \varphi(a) \neq 0$, et pour $t \in [0, 1]$, $\varphi(t(a + x_n) + (1 - t)(a + x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$. Donc $[a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H$.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow E \setminus H$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(t) = \alpha_n t + \beta_n \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) = b \\ \gamma(t) = a + tx_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

On cherche à définir α_n et β_n : on veut $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = a + x_n$ et $\gamma(1 - \frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$ (pour la continuité en se raccordant au x_n). En résolvant le système, on trouve $\alpha_n = n(n+1)(x_n - x_{n+1})$ et $\beta_n = a + x_n - (n-1)(n+1)(x_n - x_{n+1})$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$: $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$ et pour tout $n \geq N$, pour tout $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}]$, $\gamma(t) \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$ par convexité de la boule. Donc $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = b$ et γ est continue. Donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

2. Soit φ une forme linéaire telle que $\ker(f) = H$ est fermé. Alors φ est continue (à redémontrer). Soit $x \in E \setminus H$, on a $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $E \setminus H$ était connexe par arcs, φ s'annulerait sur $E \setminus H$ ce qui n'est pas vrai. Donc $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si H est dense alors $E \setminus H$ est connexe par arc d'après la première question. Si H est fermé, soit φ une forme linéaire continue telle que $\ker(f) = H$. Soit $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$.
 - Si $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_+$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in E \setminus H}) \neq 0$ et on peut relier directement x_1 et x_2 .
 - Sinon, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\varphi(x_1) = \rho e^{i\theta}$ et $\varphi(x_2) = \rho' e^{i(\theta+\pi)}$. Alors $x_3 = ix_1$ est tel que $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$ et $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$ (on contourne l'origine par une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$). Par conséquent, on peut utiliser x_3 pour relier x_1 et x_2 donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

Solution 6.21. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ((x, \sin(\frac{1}{x}))) \end{aligned}$$

φ est continue et $\Gamma \cup \varphi(\mathbb{R}_+^*)$ est connexe par arcs.

On a $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$ avec $\Gamma' = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$. En effet, pour tout $y \in [-1, 1]$, on pose $x_k = \frac{1}{\arcsin(y) + 2k\pi}$. On a $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$ donc $(0, y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \bar{\Gamma}$.

Réciproquement, si $(x, y) \in \bar{\Gamma}$, il existe $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ avec $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ et $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$. Si $x > 0$, par continuité, $y = \sin(\frac{1}{x})$ et $(x, y) \in \Gamma$. Si $x = 0$, $y \in [-1, 1]$ donc $(x, y) \in \Gamma'$.

Si $\bar{\Gamma}$ est connexe par arcs, il existe

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \bar{\Gamma} \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

continue telle que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. La première projection $t \mapsto x(t)$ est continue avec $x(0) = 0$ et $x(1) = \frac{1}{\pi}$. On définit maintenant $t_1 = \sup\{t \in [0, 1] \mid x(t) = 0\}$. Par continuité, $x(t_1) = 0$ et donc $t_1 < 1$. Donc pour tout $t > t_1$, $x(t) > 0$ et $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$ pour $t > t_1$ et $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ avec $y_1 \in [-1, 1]$.

Or, -1 et 1 n'appartiennent pas simultanément à $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. On peut supposer que $1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Comme γ est continue, il existe $t_2 > t_1$ tel que pour tout $t \in]t_1, t_2]$, $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Or $x(t_2) > 0$ et $x(t_1) = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $t_0 \in]t_1, t_2]$ tel que $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ ce qui contredit ce qui précède.

Donc $\bar{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs.

Solution 6.22.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$ car u_n est le barycentre de $(a, T(a), \dots, T^n(a))$ et K est convexe. Comme K est compact, on peut extraire $u_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \in K$. Alors

$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n) + 1} (id_E - T^{\sigma(n)+1})(a)$$

d'où

$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leq \frac{1}{\sigma(n) + 1} \times 2M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

avec $M = \sup_{x \in K} \|x\|$ (existe car K est compact donc borné). Par continuité de T , on a $T(u) = u$.

2. Posons $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$ fermé car $K' = K \cap \underbrace{\left((id_E - T)^{-1}\{0\}\right)}_{\text{continu}}$. Donc K' est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout $(u_1, u_2) \in K'^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, par linéarité de T , on a

$$T(tu_1 + (1-t)u_2) = tu_1 + (1-t)u_2$$

donc K' convexe. De plus, comme $U \circ T = T \circ U$, pour tout $u \in K'$, on a $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$ donc $U(u) \in K'$. On applique alors la question 1 à K' est il existe $y \in K'$: $U(y) = y$ et $T(y) = y$.

Solution 6.23.

1. C'est le théorème du rang car $\text{rg}(u) \leq n \leq p-2$, et $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0\}$ est de dimension $p-1$ donc $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$ (formule de Grassmann).
2. On a

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i)x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = x$$

et

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$$

Soit $I_+ = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i > 0\}$ et $I_- = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i < 0\}$. On a $I_+ \neq \emptyset$ et $I_- \neq \emptyset$ car $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$. Soit $t \geq 0$. Pour tout $i \in I_+$, $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$. Pour $i \in I_-$, $\lambda_i + t \underbrace{\alpha_i}_{<0} \geq 0$ si et seulement si $t \leq -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$. Prenons alors

$$t = \min_{i \in I_-} \left(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)$$

On a aussi pour tout $i \in I_-$, $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$ et il existe $i_0 \in I_-$ tel que $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$.

3. Par récurrence descendante, on se ramène à $n+1$ points car si x est barycentre de p points avec $p \geq n+2$, alors il est barycentre de $p-1$ points.
4. Soit $A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit

$$\begin{aligned} f : A \times K^{n+1} &\rightarrow \text{conv}(K) \\ ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (x_1, \dots, x_{n+1})) &\mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{aligned}$$

f est surjective et continue, donc $\text{conv}(K)$ est l'image continue d'un compact donc $\text{conv}(K)$ est compact.

Solution 6.24. Pour tout $u \in A_p$, $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ distincts et u est diagonalisable. Réciproquement, si u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ alors dans une base la matrice de u est diagonale avec des α_i (éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc $u \in A_p$.

Si $u \in A_p$, on écrit donc le polynôme caractéristique de u

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $0 \leq m_i \leq \dim(E) = n$ et $\sum_{i=1}^r m_i = n$. $u \mapsto \chi_u$ est continue. Pour $(m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r$ tel que $\sum_{i=1}^r m_i = n$, notons

$$A_{m_1, \dots, m_r} = \left\{ u \in A_p \mid \chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\}$$

et

$$\left[u \mapsto \chi_u(A_p) \right] = \left\{ \bigcup_{(m_1, \dots, m_r) \in D_{n,r}} \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\}$$

où

$$D_{n,r} = \{(m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \mid \sum_{i=1}^r m_i = n\}$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, si $(m_1, \dots, m_r) \neq (m'_1, \dots, m'_r)$, alors A_{m_1, \dots, m_r} et $A_{m'_1, \dots, m'_r}$ ne sont pas dans la même composante connexe par arcs car

$$\left[u \mapsto \chi_u \left(A_{m_1, \dots, m_r} \cup A_{m'_1, \dots, m'_r} \right) \right] = \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \cup \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m'_i} \right\}}_{\text{pas connexe par arcs}}$$

Si $\gamma: [0, 1] \rightarrow A_p$ est continue, $t \mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t) + a_1(t)X + \dots + a_{n-1}(t)X^{n-1} + X^n$ est continue sur $[0, 1]$ et prend un nombre fini de valeurs donc est constante. $a_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.

Soit $u_0 \in A_{m_1, \dots, m_r}$, soit $u \in A_{m_1, \dots, m_r}$, alors il existe une base \mathcal{B}_0 base de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$ soit diagonale avec des α_1 sur les m_1 premières lignes de la diagonale, α_2 sur les m_2 lignes suivantes, etc. Soit $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$. M est semblable à M_0 donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PM_0P^{-1}$.

Or $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc il existe $\varphi: [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ continue telle que $\varphi(0) = P$ et $\varphi(1) = I_n$. On pose alors

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\rightarrow A_{m_1, \dots, m_r} \\ t &\mapsto \varphi(t)M_0\varphi^{-1}(t) \end{aligned}$$

Alors A_{m_1, \dots, m_r} est connexe par arcs.

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \{(m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \mid \sum_{i=1}^r m_i = n\}$$

qui vaut $\binom{m+r-1}{r-1}$ possibilités (place n points sur une droite et les séparer avec $r-1$ barres : le nombre de points dans chaque segment donne un m_i , il y a $m+r-1$ possibilités pour placer les $r-1$ barres).

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. On note $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leq h\}$.

1. ω_φ est bien défini car $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2\|\varphi\|_\infty$. Si $0 < h \leq h'$, alors $A_h \subset A_{h'}$ donc $\sup(A_h) \leq \sup(A_{h'})$ donc $\omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h')$.
2. Soit $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, soit $(x, y) \in I^2$ tel que $|x - y| \leq h + h'$ (où on peut supposer que $x \leq y$).
 - Si $y \in [x, x + h]$, alors $|x - y| \leq h$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
 - Si $y \in [x + h, x + h + h']$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x + h)| + |\varphi(x + h) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$ car $|x - (x + h)| \leq h$ et $|x + h - y| \leq h'$.
 Donc $\omega_\varphi(h + h') \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda h \leq ([\lambda] + 1)h$ et par croissance et ce qui précède, on a

$$\omega_\varphi(\lambda h) \leq ([\lambda] + 1)\omega_\varphi(h) \leq (\lambda + 1)\omega_\varphi(h)$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. φ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, si $|x - y| \leq \alpha$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$ et on a pour $h \leq \alpha$, $\omega_\varphi(h) \leq \varepsilon$ d'où $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_\varphi(h) = 0$.

Soit alors $h_0 > 0$ fixé et $h > 0$,

— si $h_0 \leq h$, on a $0 \leq \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leq \omega_\varphi(h - h_0)$.

— si $h \leq h_0$, on a $0 \leq \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h_0 - h)$.

Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leq \omega_\varphi(|h_0 - h|)$. Donc on a bien $\lim_{h \rightarrow h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$.

Donc ω_φ est continue (et même uniformément).

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires