*Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Algèbre Générale

Exercice 1.1. *Soit* $(G,\cdot)$ *un groupe tel que* $\exists p \in \mathbb{N}$ *tel que* f_p, f_{p+1}, f_{p+2} *soient des morphismes où*

$$f_p : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^p \end{array}$$

Montrer que G *est un groupe abélien.*

Exercice 1.2. *Soit* $(G,\cdot)$ *un groupe fini. Soit* $A = \{x \in G,\ \omega(x) \text{ est impair}\}$ *où* $\omega(x)$ *désigne l'ordre de* x*. Montrer que* A *est non vide, et que* $x \mapsto x^2$ *est une permutation de* A*.*

Exercice 1.3. *Soit* $\sigma \in \Sigma_n$*. On note* $\theta(\sigma)$ *le nombre d'orbite de* σ*. Montrer que le nombre minimal de transposition dont* σ *est le produit est* $n - \theta(\sigma)$*.*

Exercice 1.4. *Soit* $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$*. Combien y a-t-il de morphismes de groupe de* $\Big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\Big) \to \Big(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+\Big)$ *?*

Exercice 1.5. *Soit* $(G,\cdot)$ *un groupe abélien fini. Soit* $P = \prod_{x\in G} x$*. Montrer que* $P = e_G$ *(élément neutre de* G*) sauf dans un cas très particulier.*

Exercice 1.6. *Soit* G *un sous-groupe additif de* $\mathbb{R}$*. On suppose qu'il existe un nombre fini* n *d'ensembles de la forme* $(x+G)_{x\in\mathbb{R}}$ *avec* $x + G = \{x+y,\ y \in G\}$*. Montrer que* $G = \mathbb{R}$*.*

Exercice 1.7. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*. Combien y a-t-il d'automorphismes de* $\Big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+\Big)$ *?*

Exercice 1.8. *Soit* $(G,\cdot)$ *un groupe fini et* φ *un morphisme de* $G \to G$*. Montrer que* $|G| = |\mathrm{Im}\varphi| \times |\ker\varphi|$*. En déduire que* $\ker\varphi = \ker\varphi^2$ *si et seulement si* $\mathrm{Im}\varphi = \mathrm{Im}\varphi^2$*.*

Exercice 1.9. *Soit* $(G,\cdot)$ *un groupe fini d'ordre* n*, et* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \wedge m = 1$*. Montrer que pour tout* $y \in G$*, il existe un unique* $x \in G$ *tel que* $x^m = y$*.*

Exercice 1.10. *Soit* $(G,\cdot)$ *un groupe fini. Pour* $g \in G$*, on note*

$$C(g) = \{hgh^{-1},\ h \in G\}$$

et

$$S_g = \{x \in G,\ xg = gx\}$$

1. *Montrer que* S_g *est un sous-groupe de* G.

2. *Montrer que* $|G| = |S_g| \times |C(g)|$.

3. *On note* $Z(G) = \{x \in G,\ \forall y \in G,\ xy = yx\}$. *Montrer que* $Z(G)$ *est un sous-groupe de* G, *et que pour tout* $g \in G$, $Z(G) \subset S_g$.

4. *On suppose que* $|G| = p^\alpha$ *où* p *est premier et* $\alpha \geqslant 1$. *Montrer que* $|Z(G)| \neq 1$. *On pourra utiliser le fait que* $x\mathcal{R}y$ *si et seulement si il existe* $h \in G$ *tel que* $y = hxh^{-1}$ *est une relation d'équivalence.*

5. *On suppose que* $|G| = p^2$. *Montrer que* G *est abélien et qu'il est isomorphe à* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ *ou à* $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$.

Exercice 1.11. *Trouver tous les morphismes de* $(\mathbb{Z},+)$ *(respectivement* $(\mathbb{Q},+)$*) dans* $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$. *On pourra poser, pour* p *premier et* $n \in \mathbb{Z}$, $\nu_p(n)$ *la puissance de* p *dans la décomposition en produit de facteurs premiers de* n.

Exercice 1.12. *Soit* G *un groupe engendré par deux éléments* $x, y \neq e_G$ *tels que* $x^5 = e_G$ *et* $xy = y^2x$. *Montrer que* $|G| = 155 = 5 \times 31$ *et qu'il est unique à un isomorphisme près.*

Exercice 1.13. *Soit* $(G,\cdot)$ *un groupe abélien fini. On note* $N = \vee_{x\in G}\omega(x)$ *(ppcm des ordres des éléments de* G*) appelé exposant de* G, *caractérisé par* $\forall k \in \mathbb{Z}, (\forall x \in G, x^k = e)$ *si et seulement si* $(\forall x \in G,\ \omega(x) \mid k)$ *si et seulement si* $(N|k)$. *En particulier,* $N \mid |G|$.

On pose $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ *la décomposition en nombres premiers de* N.

1. *Soit* $i \in \{1,\dots,r\}$. *Justifier qu'il existe* $y_i \in G$, *tel que* $p_i^{\alpha_i} \mid \omega(y_i)$.

2. *Soit* $i \in \{1,\dots,r\}$. *Justifier qu'il existe* $x_i \in G$, *tel que* $\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}$.

3. *Montrer qu'il existe* $x \in G$ *tel que* $\omega(x) = N$.

Exercice 1.14. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps fini commutatif,* $(\mathbb{K}^*,\times)$ *est un groupe abélien fini. Soit* $N = \vee_{x\in\mathbb{K}^*}\omega(x)$ *(ordre multiplicatif). On sait d'après l'exercice précédent qu'il existe* $x_0 \in \mathbb{K}^*$ *tel que* $\omega(x_0) = N$. *En étudiant le polynôme* $X^N - 1_K$, *montrer que* $(\mathbb{K}^*,\times)$ *est cyclique.*

En exemple, soit $\left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z},+,\times\right)$ *(c'est un corps).*
Trouver un générateur du groupe $\left(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*,\times\right)$.

Exercice 1.15. *Soit* $(G, \cdot)$ *un groupe tel que* $\forall x \in G,\ x^2 = e_G$.

1. *Montrer que* G *est abélien.*
2. *Montrer que si* G *est fini, il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que* G *soit isomorphe à* $\left((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +\right)$*. On pourra considérer une famille génératrice minimale.*

Exercice 1.16 (Groupe des commutateurs)**.** *Soit* $(G, \cdot)$ *un groupe, on appelle groupe dérivé de* G *et on note*

$$D(G) = \{xyx^{-1}y^{-1},\ (x, y) \in G^2\}$$

.

1. *Si* G *est abélien, que vaut* $D(G)$ *?*
2. *Montrer que pour* $n \geqslant 3$*, les 3-cycles engendrent* $\mathcal{A}_n$ *(groupe des permutations de signature égale à 1).*
3. *Montrer que deux 3-cycles* (a_1, a_2, a_3) *et* (b_1, b_2, b_3) *sont conjugués dans* Σ_n *(c'est-à-dire qu'il existe* $\sigma \in \Sigma_n$ *telle que* $(b_1, b_2, b_3) = \sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1}$*). Est-ce encore vrai dans* $\mathcal{A}_n$ *?*
4. *En déduire* $D(\Sigma_n)$.

Exercice 1.17. *Soit* $(G, \cdot)$ *un groupe fini de cardinal* n.

1. *Soit* $g \in G$ *et*

$$\begin{array}{rccc} \tau_g : & G & \to & G \\ & x & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

Montrer que

$$\begin{array}{rccc} \tau : & G & \to & \Sigma(G) \\ & g & \mapsto & \tau_g \end{array}$$

(où $\Sigma(G)$ *est le groupe des permutations de* G*) est un morphisme injectif. En déduire que* G *est isomorphe à un sous-groupe de* $(\Sigma_n, \circ)$.

2. *Montrer que* G *est isomorphe à un sous-groupe de* $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.

Exercice 1.18. *Montrer qu'il n'existe pas* $(x, y, z, t, n) \in \mathbb{N}^5$ *tel que* $x^2 + y^2 + z^2 = (8t + 7) \times 4^n$.

Exercice 1.19. *Montrer que* $10^{10^n} \equiv 4[7]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.20. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.*

1. *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.*
2. *En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.*

Exercice 1.21. *Soit U le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$.*

1. *Quel est l'ordre de $\overline{5}$?*
2. *Montrer que $U = gr\{\overline{-1}, \overline{5}\}$ (groupe engendré) et qu'il est isomorphe à un groupe produit.*

Exercice 1.22. *On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \wedge n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, on définit $\mu(n) = \sum_{\xi \in G_n} \xi$.*

1. *Montrer que si $n \wedge m = 1$, alors $\mu(nm) = \mu(m)\mu(n)$.*
2. *Calculer $\mu(1)$. Que vaut $\mu(n)$ si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ (décomposition en nombres premiers) ?*
3. *Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ muni de*

$$\begin{array}{rccl} f \star g : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{C} \\ & n & \mapsto & (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) \end{array}$$

Montrer que $\star$ est une loi associative et commutative, qu'elle admet un élément neutre noté e. Déterminer l'inverse de μ pour $\star$. On pourra calculer, pour $n \geqslant 2$, $\sum_{d|n} \mu(d)$.

4. *Que vaut pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} d\mu(d/n)$?*

Exercice 1.23. *Soit p premier. Montrer que*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 2^p + 1 [p^2]$$

Exercice 1.24.

1. *Montrer que les sous-groupes finis de $(\mathbb{U}, \times)$ sont cycliques (où $\mathbb{U}$ est le cercle unité).*
2. *Quels sont les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$?*
3. *Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{R})$. On définit*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \mapsto & \sum_{M \in G} \langle MX, MY \rangle \end{array}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}$. Montrer que φ est un produit scalaire pour lequel les matrices de M sont des isométries. En déduire que G est cyclique.

Exercice 1.25. *Soit* $E = \{x + y\sqrt{2},\ x \in \mathbb{N}^*,\ y \in \mathbb{Z},\ \text{et } x^2 - 2y = 1\}$.

1. *Montrer que* E *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.
2. *Montrer que* $E = \{(x_0 + y_0\sqrt{2})^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ *où* $x_0 + y_0\sqrt{2} = \min E \cap]1, +\infty[$.

Exercice 1.26. *Déterminer les entiers* $n \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $7 \mid n^n - 3$.

Exercice 1.27. *Soit* p *premier plus grand que 5. Soit* $a \in \mathbb{N}$ *tel que* $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{(p-1)!}$. *Montrer que* $p^2 \mid a$.

Exercice 1.28. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. *Montrer qu'il existe* $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ *tel que* $P = A^2 + B^2$.

Exercice 1.29.

1. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\alpha \notin \mathbb{Q}$. *Montrer que* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$. *En déduire que* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$.
2. *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. *Montrer que* $(\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ *est dense dans* $[-1, 1]$.
3. *Montrer qu'il y a une infinité de puissance de 2 qui commencent par 7 en base 10.*

Exercice 1.30 (Anneau euclidien)**.** *Soit* A *un anneau commutatif intègre, on dit que* A *est euclidien si et seulement s'il existe* $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ *tels que pour tout* $(a, b) \in A \times A \setminus \{0\}$, *il existe* $(q, r) \in A^2$ *tels que* $a = bq + r$ *et* $v(r) < v(b)$ *ou* $r = 0$.

1. *Montrer que* $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ *est euclidien.*
2. *Montrer que tout anneau euclidien est principal.*

Exercice 1.31.

1. *Soit* p *premier plus grand que 3. Soit* $\overline{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\overline{0}\}$. *Montrer que* $\overline{x}$ *est un carré dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *si et seulement* $\overline{x}^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$.
2. *En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.*

Exercice 1.32. *Soit* $P = \sum_{i=0}^{n} r_i X^i \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$. *On pose*

$$c(P) = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\min\limits_{0\leqslant i\leqslant n}(\nu_p(r_i))}$$

où $\mathcal{P}$ *est l'ensemble des nombres premiers. On écrit* $P = c(P) \times P_1$.

1. *Montrer que $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$, que ses coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble et qu'une telle écriture est unique.*
2. *Soit $(P,Q) \in \Big(\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}\Big)^2$. Montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$. On justifiera en passant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ que si p premier divise tous les coefficients de $P_1 \times Q_1$, alors il divise tous les coefficients de P_1 ou tous ceux de Q_1 [Lemme de Gauss].*
3. *En déduire que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$, alors il l'est aussi sur $\mathbb{Q}[X]$. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Trouver tous les $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$. Si $\theta \not\equiv 0[\pi]$ et si $\theta = 2\pi p/q$ avec $p \wedge q = 1$, on appliquera ce qui précède à $A = X^q - 1$ et $P = X^2 - (2\cos(\theta))X + 1$.*

Exercice 1.33. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $P + \alpha P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soit $R = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\sum_{i=0}^{r} a_i P^{(i)}$ l'est aussi.*

Exercice 1.34. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$, scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(n-1)(P'^2)(x) \geqslant nP(x)P''(x)$.*

Exercice 1.35.

1. *Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, montrer que P n'a que des racines simples sur $\mathbb{C}$. On pourra évaluer $P \wedge P'$ sur $\mathbb{Q}[X]$.*
2. *Soit $A \in \mathbb{Q}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de A de multiplicité $m(\alpha) > d(A)/2$ où $d(A)$ est le degré de A. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$.*

Exercice 1.36. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe et A une partie finie de G stable pour $\cdot$. Montrer que A est en fait un sous-groupe de G.*

Exercice 1.37. *Soit p premier plus grand que 3. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}$,*

$$(1+p)^{p^\alpha} \equiv 1 + p^{\alpha+1} [p^{\alpha+2}]$$

Exercice 1.38. *Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$, $7 \neq 2x^2 - 5y^2$.*

Exercice 1.39. *Résoudre $x^3 = 1$ dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.*

Exercice 1.40. *Soit $n \geqslant 3$.*

1. *Combien y a-t-il d'inversibles dans* $\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}, +, \times\right)$ *? On note* $\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\right)^\times$ *le groupe (multiplicatif) de ses inversibles.*
2. *Montrer que* $5^{2^{n-3}} \equiv 1 + 2^{n-1}[2^n]$.
3. *Évaluer l'ordre de 5 dans* $\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\right)^\times$.
4. *Montrer que* $gr\{-1\} \cap gr\{5\} = \{1\}$ *où gr indique le groupe engendré par l'ensemble. En déduire que* $\left(\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\right)^\times, \times\right)$ *est isomorphe à* $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}, +\right)$.

Exercice 1.41. *Soit $(G, \cdot)$ un ensemble non vide muni d'une loi interne associative. On suppose que*

(i) $\exists e \in G, \forall x \in G,\ x \cdot e = x,$

(ii) $\forall x \in G, \exists x' \in G,\ x \cdot x' = e.$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 1.42. *Montrer qu'il existe une infinité de multiples de 21 qui s'écrivent avec uniquement des 1 en base 10.*

Exercice 1.43. *Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif fini. Soit $n = |\mathbb{K}^*|$.*

1. *Soit d un diviseur de n, on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{K}^*$ d'ordre (multiplicatif) d dans le groupe $(\mathbb{K}^*, \times)$. Montrer qu'il existe exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d dans $(\mathbb{K}^*, \times)$ (φ indique la fonction d'Euler). On pourra s'intéresser au polynôme $X^d - 1_{\mathbb{K}}$.*
2. *En utilisant $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, montrer que $(\mathbb{K}^*, \times)$ est cyclique.*

Exercice 1.44. *Soit p premier plus grand que 5. et $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.*

1. *Montrer que*
$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & M \\ & x & \mapsto & 1 - x^{-1} \end{array}$$
est bien définie et calculer f^3.
2. *Montrer que -3 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si f admet un point fixe.*
3. *Montrer que -3 est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1[3]$ (on pourra décomposer f en produit de cycles de supports disjoints).*

Exercice 1.45. *Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x = \pm b_m b_{m-1} \dots b_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ (écriture décimale). Montrer que $x \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant n_0,\ a_{n+T} = a_n$ (la suite des décimales et périodique à partir du rang n_0).*

Exercice 1.46. *On définit $H_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $H_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.*

1. *Montrer que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.*
2. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ et et seulement si $\exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$.*

Exercice 1.47. *Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Q}$ racine de P. Montrer que α est racine simple de P. On pourra se demander, si le degré de P est n et $P = (X-\alpha)(a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1})$, quels sont les coefficients a_k tels que $a_k \in \mathbb{Q}$.*

Exercice 1.48. *Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 5 tel que P admette une racine complexe α d'ordre plus grand que 2. Montrer que P admet au moins une racine rationnelle.*

Exercice 1.49. *On définit $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.*

1. *Montrer que c'est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant i.*
2. *On définit, pour $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $|z|^2 = a^2 + b^2$. Montrer que z est inverse dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ si et seulement si $|z|^2 = 1$. En déduire l'ensemble U des inversibles.*
3. *(a) Montrer que pour tout $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$, il existe $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $|z - z_0|^2 \leqslant \frac{1}{2}$.*
   (b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ avec $z_2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ tel que $z_1 = qz_2 + r$ et $|r| < |z_1|$. A-t-on unicité ?
   (c) En déduire que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est principal.
4. *Montrer que tout élément $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \setminus \{0\}$ peut se décomposer en $z = u \times \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\nu_\rho(z)}$ où $u \in U$ et $\mathcal{P}_0$ est un ensemble d'irréductibles tel que tout élément de $\mathcal{P}$ (irréductibles de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$) est associé à un unique élément de $\mathcal{P}_0$ (on pourra raisonner par récurrence sur $|z|^2 \in \mathbb{N}$). Montrer l'unicité de cette décomposition.*

Exercice 1.50. *Soit p premier plus grand que 3. On note $\mathbb{F}_p$ le corps $\Big(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times\Big)$. On dit que $\overline{x} \in \mathbb{F}_p^*$ est un résidu quadratique si et seulement si il existe $\overline{y} \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $\overline{x} = \overline{y}^2$. On note R l'ensemble des résidus quadratiques.*

1. *Montrer que R est un sous-groupe de $(\mathbb{F}_p, \times)$ de cardinal $\frac{p-1}{2}$ et $a \in R$ si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$.*

2. *Montrer que si $p = a^2 + b^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, alors $p \equiv 1[4]$. On pourra montrer que $\overline{-1} \in R$.*

3. *Montrer que, pour $k \in \{1, \ldots, p-1\}$,*

$$\begin{array}{rccl} f: & \{0, \ldots E(\sqrt{p})\}^2 & \to & \mathbb{F}_p \\ & (a, b) & \mapsto & a - kb \end{array}$$

   n'est pas injective. En déduire qu'il existe $(a_0, b_0) \in \{1, \ldots E(\sqrt{p})\}^2$ tel que $k = a_0 \times b_0^{-1}$.

4. *Soit p premier tel qe $p \equiv 1[4]$. Montrer que p est somme de deux carrés.*

Exercice 1.51 (Fermat)**.** *Soit p premier. On sait, d'après l'exercice précédent, que p est somme de deux carrés si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$. On note $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists (a, b) \in \mathbb{N}^2,\ n = a^2 + b^2\}$.*

1. *Montrer que A est stable par produit. On note alors $P_1 = \{p \text{ premier} \mid p = 2 ou p \equiv 1[4]\}$ et $P_2 = \{p \text{ premier} \mid p \equiv 3[4]\}$.*

2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $p \in P_2$, $\nu_p(n)$ est pair (où $\nu_p(n)$ la puissance de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n). Montrer que $n \in A$.*

3. *Montrer la réciproque (pour $n \in A$, pour $p \in P_1 \cup P_2$ tel que $\nu_p(n)$ est impair, on montrera que -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$).*

2 Séries numériques et familles sommables

Exercice 2.1. *Soit la suite définie par* $a_0 = 1$ *et pour tout* $n \geqslant 1$,

$$a_n = 2a_{\lfloor n/3 \rfloor} + 3a_{\lfloor n/9 \rfloor}$$

1. *On pose pour* $p \in \mathbb{N}$, $b_p = a_{3^p}$. *Calculer* b_p *en fonction de* p.
2. *Montrer que si* $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, *alors* $a_n = b_p$.
3. *Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de* $(\frac{a_n}{n})_{n \geqslant 2}$.

Exercice 2.2. *Soit* $[a,b] \subset\in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to [a,b]$ *continue. Soit* $x_0 \in [a,b]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. *Montrer que* f *admet au moins un point fixe* $l \in [a,b]$.
2. *Si* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, *montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est un segment.*
3. *En déduire que* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge si et seulement si* $\lim\limits_{n \to +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

Exercice 2.3. *Soit* $\theta \in [0, 2\pi[$, *on définit* $u_0 = e^{i\theta}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. *Peut-on avoir* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

— *stationnaire ?*

— *convergente ?*

— *périodique ?*

— *dense dans* $\mathbb{U}$ *?*

On pourra étudier le développement binaire de $\frac{\theta}{2\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$.

Exercice 2.4. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, *étudier* $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n^2}$.

Exercice 2.5. *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n \to +\infty} = 0$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

1. *Montrer qu'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijective telle que* $(x_{\varphi(n)})$ *est décroissante.*
2. *Montrer que pour tout* $l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un sous-ensemble* $I \subset \mathbb{N}$ *fini tel que*

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leqslant \varepsilon$$

ou si $l = +\infty$: $\forall A > 0$, *il existe un sous-ensemble* I *fini tel que* $\sum_{k \in I} x_k \geqslant A$.

Exercice 2.6. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \sum_{k=0}^n u_k^2 = 1$. *Montrer que* $u_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$. *Une telle suite existe-t-elle ?*

Exercice 2.7. *Étudier* $x_n = n - \sum_{k=1}^n \cosh(\frac{1}{\sqrt{k+n}})$.

Exercice 2.8. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites réelles telles que*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n + c_n = 0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} = 3$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. *On pourra étudier* $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$.

Exercice 2.9. *Soit* $u_0 \in]0,1[$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. *On pose* $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*
2. *Montrer que* $v_n = n + \ln(n) + O(1)$, *en déduire un développement de* u_n.

Exercice 2.10.

1. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 2$, *il existe un unique* $u_n \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $u_n^n = u_n + n$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\geqslant 2}$ *converge vers* $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
3. *Donner un développement asymptotique à deux termes de* $x_n - \lambda$.

Exercice 2.11. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs non tous nuls. On suppose que*

$$u_n = o\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *de limite* a. *En cas d'existence, évaluer*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Exercice 2.12.

1. *Soit* $x \in [0,1[$, *montrer qu'il existe une unique suite* $(a_n)_{n\geqslant 2}$ *d'entiers naturels telle que*

   (i) $0 \leqslant a_n \leqslant n-1$ *pour tout* $n \geqslant 2$,

   (ii) il existe $m \geqslant n$ *tel que* $a_m < m-1$ *pour tout* $n \geqslant 2$,

   (iii) $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}$.

2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_n)_{n\geqslant 2}$ pour que $x \in \mathbb{Q}$.*

3. *Soit $l \in [-1,1]$, montrer qu'il existe $x \in [0,1[$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} sin(n!2\pi x) = l$.*

Exercice 2.13. *Soit $u_0 > 0, u_1 > 0$ et pour tout $n \geqslant 1$,*

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n-1})$$

Étudier la suite (u_n). On pourra poser $M_n = \max(u_n, u_{n-1}, l)$, $m_n = \min(u_n, u_{n-1}, l)$ où $l = 2\ln(1+l)$ et $l > 0$.

Exercice 2.14. *Soit $(p,q) \in (\mathbb{R}^*)^2$ avec $\frac{p}{q} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On suppose que $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}px_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}qx_n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ?*

Exercice 2.15.

1. *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}$.*

2. *Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \left(1 + \frac{z}{n}^n\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n$$

3. *En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$.*

Exercice 2.16. *Soit $u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}$ pour $n \geqslant 2$. Quelle est la limite de cette suite ? Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$?*

Exercice 2.17. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. On pourra minorer $u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$. Montrer ensuite que si $\{p \in \mathbb{N}, pu_p \geqslant 1\}$ est infini, alors $\sum u_n$ diverge.*

Exercice 2.18. *Nature de $\sum u_n$ où $u_n =$*

1. $n^{-1-\frac{1}{n}}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(t)dt$

3. $\sin\left(2\pi \frac{n!}{e}\right)$

4. $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$ *où $\alpha \in \mathbb{R}$*

Exercice 2.19. *Montrer la convergence et calculer la somme des différentes séries suivantes :*

1. $\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant n}\frac{(-1)^k}{k}$
2. $\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(3n)!}$
3. $\sum_{n\geqslant 1}\frac{E\left(n^{\frac{1}{3}}\right)-E\left((n-1)^{\frac{1}{3}}\right)}{4n-n^{\frac{1}{3}}}$ *où E désigne la partie entière.*

Exercice 2.20. *Soit $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=a<0$. Montrer la convergence de $\sum_{n\geqslant 1}f(n)$. Donner un équivalent de $R_n=\sum_{k=n}^{+\infty}f(k)$.*

Exercice 2.21. *Donner un équivalent de $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{e^k}{k}$.*

Exercice 2.22. *Donner la nature de $\sum u_n$ quand u_n vaut*

1. $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$ *où $\alpha\in\mathbb{R}$*
2. $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}$
3. $\frac{\sin(n!\pi e)}{\ln(n)}$

Exercice 2.23. *Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$ où u_n vaut*

1. $a\ln(n)+b\ln(n+1)+c\ln(n+2)$ *pour $n\geqslant 1$.*
2. $\frac{2^n}{3^{2^{n-1}}+1}$ *pour $n\geqslant 1$.*
3. $\frac{n-k\lfloor\frac{n}{k}\rfloor}{n(n+1)}$ *avec $k\in\mathbb{N}^*$ est fixé.*
4. $\arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$ *pour $n\geqslant 0$.*

Exercice 2.24. *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $v_n=n(u_n-u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature lorsque*

(i) $(nu_n)_{n\geqslant 1}$ *converge vers 0 OU*

(ii) $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *décroît et tend vers 0.*

Comparer alors les sommes respectives. En déduire, pour $p\geqslant 1$ fixé,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$$

Exercice 2.25. *Soit $q\geqslant 2$ et $v_n=\frac{1}{(n+q)!}\sum_{k=1}^{n}k!$. Donner la nature de $\sum v_n$. En cas de divergence, donner un équivalent des sommes partielles.*

Exercice 2.26. *Soit $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Montrer, en justifiant l'existence :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{nc}}{1-z^{na+b}}$$

Exercice 2.27. *Soit $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ une série complexe absolument convergente. On pose pour $q \in \mathbb{N}^*$, $b_q = \frac{1}{q(q+1)}(a_1 + 2a_2 + \cdots + qa_q)$. Montrer que $\sum_{q\geqslant 1} b_q$ converge et évaluer sa somme en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. On pourra poser $u_{n,q} = \frac{na_n}{q(q+1)}$ si $n \leqslant q$ et 0 sinon.*

Exercice 2.28 (Inégalité de Carleman)**.** *Soit $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n < +\infty$. On pose $v_n = \frac{1}{n(n+1)}(u_1 + \cdots + nu_n)$ et $w_n = \sqrt[n]{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n}$. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a l'inégalité entre la moyenne géométrique et arithmétique :*

$$\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \cdots = a_n$.

Montrer que $\sum w_n$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. On pourra utiliser l'exercice précédent. Montrer que e est la "meilleure" constante possible, c'est-à-dire que si $\forall (u_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\sum u_n$ converge, on a $\sum w_n \leqslant C \sum u_n$ alors $C \geqslant e$.

Exercice 2.29.

1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ soit sommable et exprimer alors la somme en fonction de la fonction ζ de Riemann.*
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ soit sommable.*

Exercice 2.30. *Étudier la sommabilité de $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$.*
En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}$.

Exercice 2.31.

1. *Montrer que*

$$\prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{p_k}$$

converge (où les p_k sont les nombres premiers). En déduire la nature de

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{p_k}$$

2. Montrer que pour tout $s\in]1,+\infty[$, le produit infini

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$$

converge. Donner sa valeur en fonction de $\zeta(s)$.

3. Généraliser ce résultat à $s\in\mathbb{C}$ avec $\Re(s)>1$.

Exercice 2.32. On note $\varphi(n)=|\{k\in\{1,\dots,n\},\ k\wedge n=1\}|$ (fonction d'Euler). Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ la somme $\sum\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ converge-t-elle ? Donner alors sa somme en fonction de $\zeta(\alpha)$.

Exercice 2.33. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\in(\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n\neq m$, $|z_n-z_m|\geqslant 1$. Montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{z_n^3}$ converge.

Exercice 2.34. Donner la nature de $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

Exercice 2.35. Pour $(a,b)\in(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}^*)$, on définit $u_n=\frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)}$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge.
2. Dans ce cas, calculer sa somme.
3. Faire le cas où $a=-\frac{1}{2}$ et $b=1$.

Exercice 2.36. Soit $u_n=\frac{\ln(n)}{n}$ et $v_n=(-1)^n u_n$ pour $n\geqslant 1$.

1. Donner la nature de $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
2. Soit $S_N=\sum_{n=1}^N u_n$. Donner un équivalent de S_N puis développer jusqu'au o(1).
3. Exprimer $\sum_{n=2}^{+\infty}v_n$ en fonction de γ (constante d'Euler) et $\ln(2)$.

Exercice 2.37. Soit pour $n\in\mathbb{N}^*$, $q_1(n)$ la nombre de chiffres de l'écriture décimale de n. On définit par récurrence $q_{k+1}(n)=q_1(q_k(n))$. Étudier la convergence de

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{nq_1(n)q_2(n)\dots q_n(n)}$$

Exercice 2.38. Soit $P_n(X)=\sum_{k=0}^n\frac{X^k}{k!}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n} > 0$ sur $\mathbb{R}$ et P_{2n+1} s'annule une seule fois en $a_{2n+1} < 0$.
2. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} a_{2n+1}$.

Exercice 2.39. *Montrer qu'il existe un unique $x_n \geqslant 0$ tel que $e^{x_n} = x_n + n$. Donne un développement asymptotique à deux termes de x_n pour $n \geqslant 1$.*

Exercice 2.40. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$.*

1. On suppose que $\sum u_n$ converge, étudier $\sum v_n$.
2. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Pour $\alpha = 1$, montrer que pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $v_{n+1} + \cdots + v_{n+p} \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$. En déduire que $\sum v_n$ diverge.
3. On suppose que $\sum u_n$ diverge. Pour $\alpha > 1$, on forme $w_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$. Montrer que $\sum v_n$ converge. Et si $\alpha < 1$?
4. On suppose que $\sum u_n$ converge. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ et $w_n = \frac{u_n}{R_n^\alpha}$. Étudier la nature de $\sum w_n$.

Exercice 2.41 (Principe des tiroirs de Dirichlet)**.** *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, n\}$ tel que $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}$. On pourra étudier les $n+1$ réels $(kx - \lfloor kx \rfloor) = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ et montrer qu'il existe $k \neq k'$ avec $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$.
2. Montrer qu'il existe $(p_n, q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ telles que $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ et $\lim_{n\to+\infty} q_n = +\infty$.
3. Étudier la convergence de la suite $\left(\frac{1}{n\sin(n)}\right)_{n \geqslant 1}$ (on admet que $\pi \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Exercice 2.42. *Soit $(a_{n,p}) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^*)^2}$ telle que*

(i) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $\lim_{n\to+\infty} a_{n,p} = a_p \in \mathbb{C}$,

(ii) il existe une suite de réels positifs (b_p) donc la série converge telle que pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $|a_{n,p}| \leqslant b_p$.

1. Évaluer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} a_{n,p}$.
2. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \right)$.

Exercice 2.43. *Soit* $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ *une série complexe absolument convergente.*

1. *Montrer que pour tout* $k \geqslant 1$*, on peut définir* $S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{kn}$.
2. *On suppose que pour tout* $k \geqslant 1$, $S_k = 0$*. Montrer que pour tout* $n \geqslant 1$, $u_n = 0$.

Exercice 2.44. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que pour toute suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, si* $\sum u_n$ *converge, alors* $\sum f(u_n)$ *converge.*

1. *Montrer que* $f(0) = 0$ *et que* f *est continue en 0.*
2. *Montrer qu'il existe* $\alpha > 0$, $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$, $f(x) = -f(x)$ *(*f *est impaire au voisinage de 0).*
3. *Montrer qu'il existe* $\beta > 0$ $\forall (x, y) \in]-\beta, \beta[^2$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *(*f *est linéaire au voisinage de 0).*
4. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\gamma > 0$ *tels que* $\forall x \in]-\gamma, \gamma[$, $f(x) = \lambda x$ *(*f *est une homothétie au voisinage de 0).*

3 Probabilités sur un univers dénombrable

Exercice 3.1. *On lance une seule fois une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages avec remise dans une urne contenant initialement 1 boule noire et 1 boule blanche : si la pièce a donné pile (respectivement face), on rajoute à chaque fois une boule blanche (respectivement noire).*

1. *Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage ?*
2. *Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k-ième tirage, quelle est la probabilité p_k d'avoir obtenu pile au lancer initial de la pièce ?*
3. *Quelle est la probabilité d'obtenir k boules blanches au cours des k premiers tirages ?*
4. *On note B_k l'évènement où la k-ième boule est blanche. B_k et B_{k+1} sont-ils indépendants ?*

Exercice 3.2. *A et B s'affrontent dans une partie de pile ou face : $\mathbb{P}(P) = p$, $\mathbb{P}(F) = 1 - p = q$ avec $p \in]0, 1[$. Au départ, ils possèdent un total de N euros. Après chaque lancer, le perdant donne un euro au gagnant. A gagne si pile, perd si face. Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs est ruiné (ou s'ils avaient 0 au départ).*

On note p_a (respectivement q_a) la probabilité que A (respectivement B) soit ruiné (en temps fini) si A a a euros au départ.

1. *Évaluer p_0, p_N, q_0, q_N.*
2. *Montrer que pour tout $a \in \{1, \dots, N-1\}$, $p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$. En déduire l'expression de p_a.*
3. *Calculer de même q_a, puis $p_a + q_a$. Qu'en déduit-on ?*

Exercice 3.3. *Deux archers tirent alternativement sur une cible, jusqu'à ce que l'un des deux la touche. A commence. Il touche la cible avec une probabilité $a \in]0, 1[$. B touche la cible avec une probabilité $b \in]0, 1[$. On note G_A (respectivement G_B) l'évènement où A (respectivement B) l'emporte.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, quelle est la probabilité pour que A (respectivement B) l'emporte au rang $2n+1$ (respectivement $2n+2$). On note A_n (respectivement B_n) l'évènement correspondant.*
2. *En déduire $\mathbb{P}(G_A)$ et $\mathbb{P}(G_B)$. Que vaut $\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B)$?*

3. *A quelle condition a-t-on* $\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_B)$ *?*

Exercice 3.4. *Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu* n *lancers pour l'obtenir, on lui fait tirer un billet de loterie parmi* n *(un seul billet gagnant).*

1. *Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne ?*
2. *Sachant qu'il a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu pile au* n*-ième lancer ? Et qu'il ait obtenu pile ?*

Exercice 3.5. *Dans une famille donnée, la probabilité pour qu'il y ait* k *enfants est* p_k $(k \in \mathbb{N})$ *avec* $p_0 = p_1 = \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ *et pour tout* $k \geqslant 2$, $p_k = \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}}$. *La probabilité qu'il y ait un garçon ou une fille est la même.*

1. *Vérifier que c'est une probabilité sur* $\mathbb{N}$.
2. *Quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement deux garçons ?*
3. *Quelle est la probabilité qu'une famille au au moins deux filles sachant qu'elle a au moins deux garçons ?*

Exercice 3.6. *Deux joueurs jouent avec deux dés non pipés. A (respectivement) gagne s'il obtient un total de 6 (respectivement 7). A commence. On s'arrête lorsqu'un des deux joueurs gagne. Quelle est la probabilité de succès des deux joueurs ?*

Exercice 3.7. *Une urne contient* a *boules blanches et* b *noires. On en tire successivement* n *au hasard avec remise. Quelle est la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit pair ?*

Exercice 3.8. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *calculer la probabilité* p_n *pour qu'une bijection de* $\{1, \ldots, n\}$ *possède au moins un point fixe. Donner la limite de* p_n *quand* $n \to +\infty$.

Exercice 3.9. *Soit* $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ *et* $q = 1 - p$. *On joue à pile ou face avec une probabilité* p *d'obtenir pile. On gagne 1 euro si on tombe sur face, on perd un euro sinon. Le jeu s'arrête lorsque l'on a 0 ou* N *euros. Pour* $n \in \{0, \ldots, N\}$, *on note* $p_N(n)$ *la probabilité de gagner (respectivement de perdre) si on dispose au départ de* n *euros.*

1. *Calculer* $p_N(0)$ *et* $p_N(N)$.
2. *Calculer* $p_N(n)$, $q_N(n)$ *et* $\lim\limits_{N \to +\infty} p_N(n)$ *à* n *fixé.*

Exercice 3.10. *Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Soit une urne contenant initialement une boule blanche et une noire. Après tirage, la boule tirée est remise avec c autres boules de sa couleur. Soit, pour $n \geqslant 1$, p_n la probabilité pour que la première boule blanche apparaisse au n-ième tirage. Calculer p_n et $\sum_{n\geqslant 1} p_n$ lorsque*

1. *$c = 1$*
2. *c quelconque.*

Exercice 3.11. *Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Une bactérie vit un seul jour. À l'issue de cette journée, elle peut se diviser en deux avec la probabilité p ou bien disparaître tristement sans laisser de traces avec la probabilité q. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par U_n l'évènement indiquant que la lignée d'une bactérie donnée est éteinte au n-ième jour. On note $u_n = \mathbb{P}(U_n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \min(1, \frac{p}{q})$. Interpréter. Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, chercher un développement asymptotique en $o\big(\frac{1}{n}\big)$ de u_n.*

Exercice 3.12. *Une puce se déplace sur une droite. Elle part de 0 et fait des sauts successifs de longueur 1. A chaque saut, elle avec avec la probabilité $p \in]0,1[$ et recule avec la probabilité $q = 1-p$. Quelle est la probabilité pour que la puce repasse en 0 ? Montrer que si $p \neq \frac{1}{2}$, le nombre de retours à l'origine est presque sûrement fini.*

Exercice 3.13. *Soit un lancer infini d'une pièce donnant pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et face avec la probabilité $q = 1-p$. On désigne, pour $n \in \mathbb{N}^*$, A_n l'évènement qu'après le n-ième lancer, on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs (donc au $n-1$-ième et au n-ième). On note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.*

1. *Calculer a_1, a_2, a_3.*
2. *Calculer a_n et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Interpréter.*

Exercice 3.14. *On dispose de $N+1$ urnes numérotées de 0 à N. Pour tout $k \in \{0,\ldots,N\}$, la k-ième urne possède k boules blanches et $N-k$ boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire n fois une boule avec remise.*

Quelle est la probabilité qu'au $n+1$-ième tirage, on ait obtenu une blanche sachant qu'au cours des n premiers lancers on a obtenu des blanches ? On note cette probabilité $\mathbb{P}_N(n)$. Que vaut $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{P}_N(n)$ à n fixé ?

Exercice 3.15. *Quelle est la probabilité pour que deux entiers naturels soient premiers entre eux ?*

Exercice 3.16. *A écrit à B avec une probabilité p_1 s'il lui a écrit la veille, p_2 sinon (avec $(p_1, p_2) \in [0,1]^2$). Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n qui vaut 1 si A a écrit à B le jour n et 0 sinon. Déterminer la loi et l'espérance (sous réserve d'existence) de X_n.*

Exercice 3.17. *On lance deux dés non pipés. On note D_i le résultat du i-ième dé, $X = \max(D_1, D_2)$ et $Y = \min(D_1, D_2)$.*

1. *Déterminer les lois de X et Y ainsi que leurs espérances et variances.*
2. *X et Y sont-elles indépendantes ?*
3. *Et si $\mathbb{P}(D_i = k) = p_{k,i}$ avec $\sum_{k=1}^{6} p_{k,i} = 1$?*

Exercice 3.18. *Soit $(a,b) \in]0,1[\times\mathbb{R}_+^*$, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est*

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{b^i e^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } i \geqslant j \end{cases}$$

1. *Vérifier que cette définition est cohérente.*
2. *Déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?*
3. *Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Y et Z sont-elles indépendantes ?*

Exercice 3.19. *Soit $x \in]0,1[$. Soit une succession d'épreuves de Bernoulli, indépendantes, de probabilité d'échec x. On définit deux suites de variables aléatoires : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est la nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir le n-ième succès, et $T_1 = S_1$ et pour $n \geqslant 2$, T_n est le nombre d'épreuves séparant le n-ième succès du $n-1$-ième.*

1. *Exprimer, pour tout $n \geqslant 1$, S_n en fonction des $(T_i)_{i\geqslant 1}$.*
2. *Déterminer la loi, l'espérance et la variance de T_n.*
3. *Déterminer la loi, l'espérance et la variance de S_n.*
4. *Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$$

Exercice 3.20. *Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$. Montrer que X possède une espérance si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge, et qu'on a alors*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$$

Exercice 3.21. *Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ (loi de Poisson) avec $\lambda > 0$. Quelle est la valeur que prend X avec la plus grande probabilité ? Évaluer la limite de cette valeur quand $\lambda \to +\infty$.*

Exercice 3.22. *Un veilleur de nuit doit ouvrir une porte, ils possède un trousseau de 10 clés indiscernables dont une seule ouvre la porte. S'il est sobre, après chaque échec, il met de côté la mauvaise clé et poursuit avec les autres. S'il est ivre, il remet la clé dans le trousseau après chaque échec. Soit X (respectivement Y) la nombre d'essais au bout desquels il ouvre la porte s'il est sobre (respectivement ivre).*

1. *Donner les lois de X et Y, leurs espérances et variances (si définies).*
2. *Le gardien est ivre un jour sur 3. Sachant qu'un jour il a essayé au moins 9 clés, quelle est la probabilité qu'il ait été sobre ce jour-là ?*

Exercice 3.23. *Soit $(n, N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Une urne contient N jetons à deux faces. L'une porte un numéro bleu, l'autre un rouge. Pour tout $1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$, un seul jeton porte i bleu et j rouge. On tire au hasard un jeton. On note B (respectivement R) le numéro bleu (respectivement rouge) tiré et $G = B - R$.*

1. *Déterminer N en fonction de n.*
2. *Donner les lois conjointes et marginales de B et R.*
3. *Déterminer les espérances et variances de B, R et G.*

Exercice 3.24. *Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières (naturelles) d'un axe d'origine 0. Au départ, le mobile est en 0. S'il est au point d'abscisse k à l'instant n, à l'instant $n+1$ il est au point $k+1$ avec une probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ et 0 avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$. On note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n et $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{1, \dots, n+1\}$, $\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{k}{k+1}\mathbb{P}(X_n = k-1)$.*
2. *En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\mathbb{P}(x_n = k) = \frac{1}{k+1}u_{n-k}$.*

3. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{j=0}^{n} \frac{u_n}{n-j+1} = 1$. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.*
4. *Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + u_{n+1}$. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
5. *On note T l'instant auquel le mobile revient pour la première fois à l'origine ($T = 0$ s'il ne repasse pas par l'origine). Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$. En déduire $\mathbb{P}(T = 0)$.*
6. *T admet-elle une espérance ?*

Exercice 3.25. *Le nombre N de clients arrivant dans un magasin au cours d'une journée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Ces clients se répartissent de manière équiprobable entre les m caisses du magasin ($m \in \mathbb{N}^*$). Soit X_1 le nombre de clients qui arrivent à la caisse 1 au cours d'une journée.*

1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $N = n$.*
2. *En déduire la loi de X_1.*

Exercice 3.26. *Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes discrètes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.*

1. *Quelle est la conjointe de (U, V) ?*
2. *Déterminer la covariance de X, Y ?*
3. *U et V sont-elles indépendantes ?*

Exercice 3.27. *On tire indéfiniment à pile ou face, avec une probabilité $p \in]0,1[$ d'obtenir pile, $q = 1 - p$ d'obtenir face. On note P (respectivement F) le rang d'apparition du premier pile (respectivement du premier face) et on note X (respectivement Y) la longueur de la première (respectivement deuxième) suite de tirages égaux (ex : (pile, pile, face, pile,...) donne $X = 2$ et $Y = 1$).*

1. *Donner les lois de P et F et leurs espérances et variances.*
2. *P et F sont-elles indépendantes ?*
3. *Donner les lois conjointes et marginales de X et Y. Sont-elles indépendantes ?*
4. *Montrer que $\mathbb{E}(X) \geqslant 2$.*
5. *Quelle est la probabilité que $X = Y$?*
6. *Donner la loi de $X + Y$ lorsque $p = \frac{1}{2}$.*

Exercice 3.28. *Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes de même loi, centrées à valeurs dans $[-1,1]$.*

1. *Montrer que pour tout $\lambda \geqslant 0, \forall x \in [-1,1],\ \mathrm{e}^{\lambda x} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}} + x\sinh(\lambda)$.*
2. *En déduire que si X est une variable aléatoire discrète centrée à valeurs dans $[-1,1]$, alors pour tout $\lambda \geqslant 0$, $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$ et $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda X}) \leqslant \mathrm{e}^{\frac{\lambda^2}{2}}$.*
3. *Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $\lambda > 0$, $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda a}\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda X})$.*
4. *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $a \geqslant 0$, $\mathbb{P}\Big(\big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\big| \geqslant a\Big) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}$.*

Exercice 3.29.

1. *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérances finies. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit*
$$\mathbb{E}_{(X=k)}(Y) = \sum_{l=0}^{+\infty} l\mathbb{P}_{(X=k)}(Y=l)$$
Montrer que
$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X=k)}(Y) \times \mathbb{P}(X=k)$$
2. *Soit $\lambda \geqslant 0$, on suppose que le nombre de descendants poules à la première génération d'une poule donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ. Soit X_n le nombre de poules à la n-ième génération avec $X_0 = N \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$.*

Exercice 3.30. *Au cours de sa vie, une poule pond N œufs où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Chaque œuf éclot avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note K le nombre de poussins. Donner la loi et l'espérance de K.*

Exercice 3.31. *Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'évènements indépendants de Ω (où $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé) telle que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{n}$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \chi_{A_k}$ (indicatrice de l'ensemble).*

1. *Évaluer l'espérance et variance de S_n, et en donner des équivalents.*
2. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé, montrer que*
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) = 0$$

Exercice 3.32. *Soit $n \geqslant 1$, $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires indépendantes discrètes telles que $X_i \sim \mathcal{G}(p)$ (loi géométrique) avec $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$ et $U = \min_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ et $V = \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$.*

1. *Donner la loi de U et son espérance (dont on justifiera l'existence).*

2. *Donner la loi de V, montrer que*

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1-q^i}$$

Exercice 3.33. *Un joueur arrive au casino avec une fortune $k \in \{0, \dots, N\}$ où N est la "banque", c'est-à-dire la limite que paiera le casino. A chaque étape, il gagne 1 avec une probabilité $p \in]0,1[$ et perd 1 avec une probabilité $q = 1-p$. Il s'arrête lorsqu'il a 0 (ruine) ou N (banque). On sait que l'arrêt en temps fini est presque sûr. On note t_k le temps d'arrêt du joueur (le nombre de fois où il joue avant de s'arrêter).*

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(t_k > N(n+1)) \leqslant \mathbb{P}(t_k > Nn) \times (1-p^N)$$

   En déduire que t_k possède une espérance notée T_k.

2. *Montrer que pour tout $k \in \{1, \dots, N-1\}$, $T_k = p(1+T_{k+1}) + q(1+T_{k-1})$.*

3. *En déduire que*

$$T_k = \begin{cases} \dfrac{1}{q-p}\left[k - N\left(\dfrac{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^n}\right)\right] & si\ p \neq \dfrac{1}{2} \\ k(N-k) & si\ p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 3.34. *Soit $s > 1$. On munit $\mathbb{N}^*$ de la probabilité :*

$$\forall n \geqslant 1,\ \mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(s) n^s}$$

1. *Vérifier que c'est une probabilité sur $\mathbb{N}^*$. On forme, pour $n \geqslant 1$, $A_n = n\mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(A_n)$.*

2. *Montrer que si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, alors $(A_p)_{p\in\mathcal{P}}$ sont indépendants.*

3. *En déduire que*

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

   puis que

$$\zeta(s) = \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)\right)^{-1}$$

Exercice 3.35. *On dispose de deux pièces de monnaie. La pièce A (respectivement B) amène pile avec la probabilité $a \in]0,1[$ (respectivement $b \in]0,1[$). On choisit au départ de façon équiprobable une des deux pièces et on effectue le premier lancer avec celle là. Si on obtient pile, on garde la même, sinon on change. Soit, pour $n \geqslant 1$, E_n l'évènement désignant le fait que l'on utilise pour la première fois la pièce A au n-ième lancer. On indique de même par U_n l'évènement désignant le fait que l'on obtient n piles au cours des n premiers lancers.*

Calculer $\mathbb{P}(E_n), \mathbb{P}(U_n), \mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n), \mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n)$.

Exercice 3.36. *Soit N pièces de monnaie, dont chacune amène pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. A chaque lancer, on laisse de côté les pièces tombées sur pile, et on relance les autres jusqu'à que toutes arrivent sur pile.*

1. *Pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'évènement $A_{i,n}$ désignant le fait que la pièce numéro i est lancée au plus n fois.*
2. *Soit B_n l'évènement indiquant que l'on effectue au plus n relances. Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.*
3. *Pour $n \geqslant 1$, quelle est la probabilité d'effectuer exactement n relances ?*

Exercice 3.37. *Soit p premier et $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (en tant que corps). Soit $n \geqslant 1$. On définit $\mathbb{K}_{<n}[X] = \{Q \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(Q) < n\}$ et $\mathbb{K}_{=n}[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) = n\}$. Ces espaces sont munis de la probabilité uniforme. On forme $\Omega = \mathbb{K}_{<n}[X] \times \mathbb{K}_{=n}[X]$ muni de la probabilité uniforme.*

1. *Quelle est la loi de* $\deg(Q)$ *?*
2. *Quelle est la probabilité pour que $Q \mid P$? On pourra poser $A = \{(Q,P) \in \Omega | Q \mid P\}$ et $B = \{(Q,A) \in \mathbb{K}_{<n}[X] \times \mathbb{K}_{=n}[X] | \deg(Q) + \deg(A) = n\}$ et montrer que*
$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & (Q,P) & \mapsto & (Q, \frac{P}{Q}) \end{array}$$
est définie et bijective.
3. *Soit $R \in \mathbb{K}_{<n-1}[X]$, on pose pour $(Q,P) \in \Omega$ avec $Q \neq 0$, R_1 le reste de la division euclidienne de P par Q. Calculer $\mathbb{P}(R_1 = R)$ et $\mathbb{P}_{\deg(Q)=k}(R_1 = R)$.*

Exercice 3.38. *On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. On note X_1 le premier tirage et X_2 le deuxième.*

1. *Donner la loi conjointe de* (X_1, X_2).
2. *Donner la loi de* X_2 *puis la loi de* $X_{1_{|X_2=j}}$ *pour* $j \in \{1, \ldots, n\}$.
3. X_1 *et* X_2 *sont-elles indépendantes ?*
4. *Généraliser à* k *tirages sans remise pour* $1 \leqslant k \leqslant n$.
5. *Quelle est l'espérance de* (X_1, X_2) *?*

4 Calcul matriciel

Exercice 4.1. *Soit* $M = \left(\omega^{(k-1)(l-1)}\right)_{1\leqslant k,l\leqslant n}$ *où* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. *Montrer que* $M \in GL_n(\mathbb{C})$ *et calculer* M^{-1}. *Que vaut* $\det(M)$ *?*

Exercice 4.2. *On dit que* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ *est positive et on note* $A \geqslant 0$ *si et seulement si tous ses coefficients le sont.*

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Montrer que* $A \geqslant 0$ *si et seulement si pour tout* $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, *si* $X \geqslant 0$ *alors* $AX \geqslant 0$.
2. *Quelles sont les matrices* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *telles que* $A \geqslant 0$ *et* $A^{-1} \geqslant 0$ *?*

Exercice 4.3. *Soit* $A = \left(\binom{j-1}{i-1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. *Calculer* A^{-1} *et* A^k *pour* $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4.4. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps de caractéristique non nulle* ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$). *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *avec* $\mathrm{Tr}(A) = 0$.

1. *Montrer que* A *est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra procéder par récurrence, en distinguant selon qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n$ *ou non. Dans le deuxième cas, pour* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ *canoniquement associée à* A, *on montrera qu'il existe* $e_1 \in \mathbb{K}^n$ *telle que* $(e_1, u(e_1))$ *est libre.*
2. *Montrer qu'il existe* $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ *tel que* $A = [X, Y] = XY - YX$. *On pourra considérer*
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & DM - MD \end{array}$$
avec $D = \mathrm{diag}(1, 2, \dots, n)$ *et déterminer* $\ker(\varphi)$.

Exercice 4.5. *Soit* $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2$.

1. *Pour quelles valeurs de* λ, $I_n + \lambda XY^\mathsf{T}$ *est inversible ?*
2. *Soit* $A \in GL_n(\mathbb{R})$. *A quelle condition nécessaire et suffisante* $A + \lambda XY^\mathsf{T} \in GL_n(\mathbb{R})$ *? Montrer alors que*
$$(A + \lambda XY^\mathsf{T})^{-1} = A^{-1} - \frac{\lambda}{1 + \lambda Y^\mathsf{T} A^{-1} X} A^{-1} XY^\mathsf{T} A^{-1}$$

Exercice 4.6. *Soit $n \geqslant 1$ et pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $S_j = X^j(1-X)^{n-j}$. Montrer que c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et exprimer $(1, X, \ldots, X^n)$ en fonction de $(S_0, \ldots, S_n)$.*

Exercice 4.7. *Soit $\mathbb{K}$ un corps et H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq 0$ pour $n \geqslant 2$.*

Exercice 4.8. *Soit $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$ telle que :*

(i) $\forall \lambda \geqslant 0, \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ N(\lambda A) = \lambda N(A)$,

(ii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$,

(iii) $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2,\ N(AB) = N(BA)$.

1. *Calculer $N(0)$.*
2. *Évaluer $N(E_{i,j})$ pour $i \neq j$ (matrice élémentaire de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).*
3. *Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est telle que $\operatorname{Tr}(A) = 0$, alors A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls. On pourra procéder par récurrence, en distinguant selon qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda I_n$ ou non. Dans le deuxième cas, pour $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A, on montrera qu'il existe $e_1 \in \mathbb{K}^n$ telle que $(e_1, u(e_1))$ est libre.*
4. *En déduire $N(A)$ si $\operatorname{Tr}(A) = 0$.*
5. *Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N(A) = a|\operatorname{Tr}(A)|$.*

Exercice 4.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension n, $f \in GL(E)$ et g un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que $f + g \in GL(E)$ si et seulement $\operatorname{Tr}(g \circ f^{-1}) \neq 1$.*

Exercice 4.10. *On considère un carré dans $\mathbb{Z}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre de chemins de longueur n qui relient un sommet à un autre ? Généraliser à un cube dans $\mathbb{Z}^3$.*

Exercice 4.11 (Matrice à diagonale strictement dominante)**.** *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. On dit que A est à diagonale strictement dominante. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Est-ce encore vrai si on a seulement l'inégalité large ?*

Exercice 4.12. *Calculer, pour $n \geqslant 1$, $\det\Big((i \wedge j)\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. On pourra utiliser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n = \sum_{k|n} \varphi(k)$.*

Exercice 4.13. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. On pose, pour* $k \in \{1, \dots, n\}$*,*$A_k = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$*. On suppose que pour tout* $k \in \{1, \dots, n\}$*,* $A_k \in GL_k(\mathbb{C})$*. Montrer qu'il existe une unique décomposition* $(L, U) \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{C}) \times \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C})$ *(matrices triangulaires inférieures et supérieures) où* L *a des* 1 *sur la diagonale et* $A = LU$*.*

Exercice 4.14. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a_1, \dots, a_{2n+1}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ *tel que pour tout* $i \in \{1, \dots, 2n+1\}$*, il existe des parties disjointes* A_i *et* B_i *de* $\{1, \dots, 2n+1\} \setminus \{i\}$ *avec* $|A_i| = |B_i| = n$ *et* $\sum_{k \in A_i} a_k = \sum_{k \in B_i} a_k$*.*

Monter que $a_1 = \cdots = a_{2n+1}$*.*

Exercice 4.15. *Soit* $M \in GL_n(\mathbb{C})$*, montrer qu'il existe une unique permutation* $\sigma \in \Sigma_n$ *et il existe* $(T, T') \in (\mathcal{T}_n^+)^2$ *telles que* $M = TP_\sigma T'$ *où* $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *et* δ *est le symbole de Kronecker. Cette décomposition est-elle unique ?*

Exercice 4.16. *Soit* $\mathbb{K}$ *un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *et* J *un idéal non nul de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*

1. *Montrer que si* $J \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$*, alors* $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*
2. *Montrer que* J *contient une matrice de rang 1.*
3. *Montrer que* $J = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*.*

Exercice 4.17. *Soit* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\lambda \neq 0$ *avec* $\lambda AB + A + B = 0$*, montrer que* A *et* B *commutent.*

Exercice 4.18. *Soit* $(a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$*. Inverser, si possible,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & \dots & -a_n \\ a_2 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.19. *Soit* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$*,* $a_{i,i} = 0$ *et pour tout* $i \neq j$*,* $a_{i,j} + a_{j,i} = 1$*. Soit* $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *canoniquement associé à* A*. Soit* $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$*.*

1. *Déterminer* $\ker(u) \cap H$*. En déduire que* $\mathrm{rg}(A) \in \{n-1, n\}$*.*
2. *Est-il possible que toutes les matrices* A *vérifiant ces conditions soient de rang* $n - 1$ *?*

3. *Même question avec n.*

Exercice 4.20. *Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ tel que $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(N) = 1$. Montrer que M et N sont semblables si et seulement si $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Tr}(N)$.*

Exercice 4.21. *Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $r = \max\{\mathrm{rg}(M) \mid M \in F\}$.*

1. *Montrer qu'il existe $(P_0, Q_0) \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que*

$$P_0^{-1} \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & O_{n-r,n-r} \end{array}\right)}_{J_r} Q_0 \in F$$

On note $F_0 = \{P_0 M Q_0^{-1} \mid M \in F\}$.

2. *Montrer que F_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ isomorphe à F, et que $r = \max\{\mathrm{rg}(M_0) \mid M_0 \in F_0\}$.*

3. *On définit*

$$G_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & B^{\mathsf{T}} \\ \hline B & C \end{array}\right)$$

où $B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{R})$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par G_0 ?

4. *Soit $M_0 \in G_0 \cap F_0$ avec*

$$M_0 = \left(\begin{array}{c|c} 0_r & B^{\mathsf{T}} \\ \hline B & C \end{array}\right) \in F_0$$

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda I_r & B^{\mathsf{T}} \\ \hline B & C \end{array}\right) \in F_0$$

En déduire que pour tout $(i,j) \in \{1, \dots, n-r\}^2$, pour tout $\lambda \neq 0$,

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & \lambda I_r & & \vdots \\ & & & b_{j,r} \\ \hline b_{i,1} & \dots & b_{i,r} & c_{i,j} \end{array}\right) = 0$$

5. *Montrer que* $C = 0$*, puis que* $B = 0$*.*

6. *Conclure.*

7. *Si* $\dim(F) \geqslant n^2 - n + 1$*, montrer que* $F \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$*.*

8. *Et sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *?*

Exercice 4.22. *Soit* $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ *non constante telle que pour tout* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$*,* $f(AB) = f(A) \times f(B)$*. Montrer que* $f(M) \neq 0$ *si et seulement si* $M \in GL_n(\mathbb{C})$*.*

5 Réduction des endomorphismes

Exercice 5.1. *Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour $(A, B) \in E^2$ et*

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ M & \mapsto & MB \end{array}$$

et $h = f \circ g$.

1. *Montrer que f (respectivement g) est diagonalisable si et seulement si A (respectivement B) l'est.*
2. *Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ deux bases de $\mathbb{C}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.*
   Montrer que $(X_i Y_i^\mathsf{T})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de E.
3. *On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que h l'est. A-t-on la réciproque ?*

Exercice 5.2 (Lemme des noyaux généralisé)**.** *Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ unitaires. Soient $D = P \wedge Q$, $M = P \vee Q$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer les différentes assertions suivantes :*

1. $\ker D(f) = \ker P(f) \cap \ker Q(f)$.
2. $\ker M(f) = \ker P(f) + \ker Q(f)$.
3. $\mathrm{Im} D(f) = \mathrm{Im} P(f) + \mathrm{Im} Q(f)$.
4. $\mathrm{Im} M(f) = \mathrm{Im} P(f) \cap \mathrm{Im} Q(f)$.

Exercice 5.3. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 - 4A + 5I_n = 0$. A est-elle inversible ? Que dire de A ? Que dire de n ? Calculer les puissances de A ?*

Exercice 5.4. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si et seulement si*

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ a_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1 \end{cases}$$

1. *Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A)$.*
2. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.*

3. *Soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ *et* x *un vecteur propre associé.*

   Montrer que si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, a_{i,i} > 0$ *alors* $\lambda = 1$.

4. *Soit* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ *telle que* $|\lambda| = 1$. *Montrer que* λ *est une racine de l'unité.*

5. *Reconnaître les matrices stochastiques dont toutes les valeurs sont de module 1.*

Exercice 5.5. *Soit* $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ *et*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{A,B} : & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ & M & \mapsto & AM - MB \end{array}$$

1. *Déterminer* $\mathrm{Sp}(\Phi_{A,B})$ *en fonction de* $\mathrm{Sp}(A)$ *et* $\mathrm{Sp}(B)$.

2. *Montrer que si* A *et* B *sont diagonalisables,* $\Phi_{A,B}$ *l'est aussi.*

Exercice 5.6. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *et* $\theta \in \mathbb{C}$. *Soit* $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = \theta MA\}$.

1. *Montrer que pour tout* $P \in \mathbb{C}[X]$, *pour tout* $M \in F$, *on a* $P(A)M = MP(\theta A)$. *Établir une relation analogue portant sur* $P(M)$.

2. *On suppose* A *diagonalisable. Quelle est l'action de* F *sur les sous-espaces propres de* A *? Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ *pour que* $F = \{0\}$.

Exercice 5.7. *Réduire sur* $\mathbb{C}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.8. *Soit* $0 < a_1 < \cdots < a_n$ *et* $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i} = 0$ *et si* $i \neq j$, $a_{i,j} = a_j$.

1. *Montrer que* $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ *si et seulement si*

$$\sum_{k=i}^{n} \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$$

2. *A est-elle diagonalisable ?*

Exercice 5.9. *Soit* G *le sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{R})$ *engendré par les matrices diagonalisables inversibles. Montrer que* $G = GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5.10. *Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$ et $p \geqslant 2$. Montrer que u^p est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable et* $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Exercice 5.11 (Matrice circulante)**.** *Soit $n \geqslant 1$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ et*

$$A(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Donner les éléments propres de $A(a_0, \dots, a_{n-1})$. Est-elle diagonalisable ? Calculer son déterminant.

Exercice 5.12. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tel que* $\dim(\ker(f)) = 1$. *Montrer que $f^{n-1} \neq 0$ et qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$, $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E.*

Exercice 5.13 (Endomorphisme cyclique)**.** *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit $u \in \mathcal{L}(V)$. Montrer qu'il existe $x \in V$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de V si et seulement si les sous-espaces propres de u sont de dimension 1.*

Exercice 5.14. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension d.*

1. *Pour $f \in \mathcal{L}(V)$, montrer qu'il existe $r(f) = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{rg}(f^n)$.*
2. *Si f et g commutent, montrer que $r(f+g) \leqslant r(f) + r(g)$. Et si f et g ne commutent pas ?*
3. *Exprimer $r(f)$ en fonction du degré du polynôme caractéristique de f.*

Exercice 5.15. *Soit $q \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{G}_q = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid A^q = I_n\}$. Quels sont les points isolés de $\mathcal{G}_q$?*

Exercice 5.16. *Soit*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $u \in \mathcal{L}(R^3)$ canoniquement associée à M. Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

Exercice 5.17. *Soit*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & I_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 0 \end{array}\right)$$

1. *A est-elle diagonalisable ?*

2. *Donner ses éléments propres.*

Exercice 5.18. *Soit G un sous-groupe borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que pour tout $M \in G$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$ et M est diagonalisable. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|||M - I_n||| < \alpha$ alors $G = \{I_n\}$.*

Exercice 5.19. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A.

1. *Trouver tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par u.*

2. *Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$?*

Exercice 5.20. *Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $A^3 + A^2 + A + I_3 = 0$ et $A \neq -I_3$. Montrer que A est semblable à*

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.21. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$.*

1. *Montrer qu'il existe un unique P_x unitaire tel que pour tout $A \in P_x\mathbb{K}$, $A(f)(x) = 0$.*

2. *Montrer que μ_f (polynôme minimal de f) est égal à*

$$\mu_f = \bigvee_{x \in E} P_x$$

3. *Soit $(x, y) \in E^2$, montrer que si $P_x \vee P_y = 1$ alors $P_{x+y} = P_x P_y$.*

4. *Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $P_x = \mu_f$.*

5. *Montrer qu'il existe $v \in E$, tel que $(v, f(v), \dots f^{n-1}(v))$ est une base de E si et seulement si $\deg(\mu_f) = n$ (donc le polynôme minimal est égal au polynôme caractéristique).*

Exercice 5.22. *Soit $S = \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, pour $s = (s_n)_{n\geqslant 1} \in S$, on définit*

$$s^* = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right)_{n\geqslant 1}$$

1. *Montrer que*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & S & \to & S \\ & s & \mapsto & s^* \end{array}$$

   est un automorphisme.

2. *Déterminer les éléments propres de φ.*

Exercice 5.23 (Disques de Gershgorin)**.** *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $L_i = \sum_{k\neq i} |a_{i,k}|$ et $C_j = \sum_{k\neq j} |a_{k,j}|$. Soit $D_i = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{i,i}| \leqslant L_i\}$ et $S_j = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{j,j}| \leqslant C_j\}$.*

1. *Montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \left[\left(\bigcup_{i=1}^n D_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j=1}^n S_j\right)\right]$*
2. *Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, il existe $i_1 \neq i_2 \in \{1, \dots, n\}^2$ tels que*

$$|\lambda - a_{i_1,i_1}| \times |\lambda - a_{i_2,i_2}| \leqslant L_{i_1} \times L_{i_2}$$

Exercice 5.24. *Soit*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & 0_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

Réduire A.

Exercice 5.25. *Soient f et g dans $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ diagonalisables. Montrer que f et g ont les mêmes sous-espaces propres si et seulement s'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tels que $f = P(g)$ et $g = Q(f)$.*

Exercice 5.26. *Soit G un sous-groupe fini abélien de $GL_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ et donner un exemple d'un tel sous-groupe dans chaque cas.*

Exercice 5.27. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.*

Exercice 5.28. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & A & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M est-elle diagonalisable ?

Exercice 5.29. *Soit*

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & I_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 1 \end{array}\right)$$

Exercice 5.30. *Soit $n \geqslant 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$.*

1. $$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x_n \\ \vdots & & x_{n-1} & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ x_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

   est-elle diagonalisable ?

2. *La suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converger-t-elle ?*

Exercice 5.31.

1. *Donner les valeurs propres et vecteurs propres de*

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & XP' - nP \end{array}$$

2. *Donner les valeurs propres et vecteurs propres de*

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \mapsto & XP' - nP'' \end{array}$$

Exercice 5.32. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

avec $a+b+c=1$ *pour* $(a,b,c) \in \mathbb{R}_+^3$.

1. *Donner le* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.
2. *La suite* $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge-t-elle ?*

Exercice 5.33. *Soit* $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *et*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0_{n_2,n_1} & D \end{pmatrix}$$

avec $B \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n_1,n_2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ *et* $D \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$.

1. *Donner une formule pour* A^p *pour* $p \in \mathbb{N}$.
2. *Comparer, du point de vue de la divisibilité* μ_A, $\mu_B \vee \mu_D$ *et* $\mu_B \times \mu_D$ *(polynômes minimaux).*
3. *Que dire si* $C = 0$ *?*
4. *Que dire si* $B = D$ *et* $C = I_{n_1}$ *?*
5. *Trouver une matrice* A *telle que* $\mu_A \neq \mu_B \vee \mu_D$ *et* $\mu_A \neq \mu_B \times \mu_D$.

Exercice 5.34. *Soit* E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \geqslant 1$. *Soit* $f \in \mathcal{L}(E)$ *et*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_f : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ & g & \mapsto & f\circ g - g \circ f \end{array}$$

1. *Montrer que si* f *est nilpotente,* Φ_f *l'est aussi. A-t-on la réciproque ?*
2. *Montrer que* f *est diagonalisable si et seulement si* Φ_f *l'est.*
3. *Déterminer* $\mathrm{Sp}(\Phi_f)$ *en fonction de celui de* f.
4. *Montrer que si* g *est vecteur propre de* Φ_f, *il existe une base* $\mathcal{B}$ *de* E *telle que* $\mathrm{mat}(f,\mathcal{B})$ *et* $\mathrm{mat}(g,\mathcal{B})$ *sont triangulaires supérieures.*

Exercice 5.35. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. On pose $g = P(f)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g - \lambda id_E$ n'est pas inversible. Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = P(\mu)$ et $f - \mu id_E$ n'est pas inversible. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$, montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda = P(\mu)$ et $\mu \in \mathrm{Sp}(f)$.*

Exercice 5.36. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ tel que $V\{0\} \subset GL(E)$.*

1. *Montrer que* $\dim(V) \leqslant \dim(E)$.
2. *Trouver tous les V possibles pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
3. *Trouver tous les V possibles pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$.*
4. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\dim(V) \geqslant 2$, montrer qu'il existe $(f, g) \in V^2$ tel que si $\mathcal{B}$ est une base de E, $A = \mathrm{mat}(f, \mathcal{B})$ et $B = \mathrm{mat}(g, \mathcal{B})$ alors $i \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(AB^{-1})$.*

Exercice 5.37. *Soit $GL_2(\mathbb{Z}) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversibles $\mid M^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})\}$.*

1. *Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, montrer que $M \in GL_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si* $\det(M) = \pm 1$.
2. *Soit G un sous-groupe abélien fini de $GL_2(\mathbb{Z})$, montrer que $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ et décrire G.*

Exercice 5.38. *Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque, $n \geqslant 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\chi_A = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$ (polynôme caractéristique).*

1. *Montrer qu'il existe $(M_0, \ldots, M_{n-1}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^n$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\mathsf{T} = M_0 + \lambda M_1 + \cdots + \lambda^{n-1} M_{n-1}$ (où* com *indique la comatrice.)*
2. *En formant $(\lambda I_n - A)\,\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\mathsf{T}$, calculer $(M_0, \ldots, M_{n-1})$ en fonction de $A, A^2, \ldots, A^n$. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton.*
3. *Pour les questions suivantes, on suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est 0. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A'(\lambda) = \mathrm{Tr}(\mathrm{com}(\lambda I_n - A)^\mathsf{T})$.*
4. *En déduire qu'il existe $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ telle que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(a_0, \ldots, a_{n-1}) = f(\mathrm{Tr}(A), \ldots, \mathrm{Tr}(A^n))$.*
5. *Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que si pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ $\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$ alors $\chi_A = \chi_B$.*

Exercice 5.39. *On admet que si $P \in \mathbb{K}[X]$ (avec $\mathbb{K}$ un corps), il existe $\mathbb{L}$ sur-corps de $\mathbb{K}$ tel que P soit scindé sur $\mathcal{L}$ avec la caractéristique de $\mathbb{L}$ égale à la caractéristique de $\mathbb{K}$.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et p premier, montrer que $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A)[p]$.

Exercice 5.40. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $\rho(u) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$. Montrer l'équivalence*

(i) *il existe une norme sur E telle que $|||u||| < 1$,*

(ii) $\rho(u) < 1$,

(iii) $\lim\limits_{p \to +\infty} u^p = 0$.

Exercice 5.41. *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(C)^2$ avec A diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer l'équivalence*

(i) $\forall Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \exists h \in \{0, \ldots, n-1\}$, $BA^kY \neq 0$,

(ii) $\forall Y$ *vecteur propre de* A, $BY \neq 0$,

(iii) $\forall Y \in \mathbb{C}^n\{0\}$,

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{C}^n \\ & t & \mapsto & B\exp(tA)Y \end{array}$$

n'est pas l'application nulle.

6 Espaces vectoriels normés

Exercice 6.1. *On définit*

$$\begin{array}{rccl} N: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |x\cos(t) + y\sin(2t)| \end{array}$$

1. *Montrer que N est une norme.*

2. *Montrer que*

$$\overline{B_{\|\cdot\|_1}(0,1)} \subset \overline{B_N(0,1)} \subset \overline{B_{\|\cdot\|_\infty}(0,1)}$$

3. *Montrer que*

$$S_N(0,1)\bigcap(\mathbb{R}_+)^2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists t\in[0,\frac{\pi}{4}] \colon x\cos(t) + y\sin(2t) = 1\right\}$$

En déduire que

$$S_N(0,1)\bigcap(\mathbb{R}_+)^2 = \left\{\left(\frac{\cos(2t)}{\cos(t)^3}, \frac{\sin(t)}{2\cos(t)^3}\right) \;\middle|\; t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\right\}$$

Exercice 6.2. *Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et*

$$\begin{array}{rccl} N: & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \sqrt{f(0)^2 + \int_0^1 f'^2} \end{array}$$

1. *Montrer que N est une norme sur E et que $\|\cdot\|_\infty \leqslant \sqrt{2}N$.*

2. *N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?*

Exercice 6.3. *Soit $n \geqslant p$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que f est ouverte, c'est-à-dire que pour tout Θ ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f(\Theta)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$, si et seulement si f est surjective.*

Exercice 6.4. *Soit $E = \Big\{$fonctions lipschitziennes: $[0,1] \to \mathbb{R}\Big\}$. Pour $f \in E$, on pose*

$$\kappa(f) = \sup\left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \;\middle|\; (x,y)\in[0,1]^2, x\neq y\right\}$$

1. *Montrer que $N(f) = |f(0)| + \kappa(f)$ est une norme sur E.*

2. *Montrer que N et N_∞ ne sont pas équivalentes.*

3. Montrer que $N' = N_\infty + \kappa$ est équivalente à N.

Exercice 6.5. *Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que $G \in \mathcal{V}(I_n)$ où $\mathcal{V}$ un voisinage de I_n, muni de la norme*

$$\|(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_{i,j}|$$

. Montrer que $G = GL_n(\mathbb{C})$.

Exercice 6.6. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une fonction telle que*

(i) $\forall (x,y) \in E^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

(ii) $\exists M \geqslant 0, \forall x \in B_{\|\cdot\|}(0,1), \|f(x)| \leqslant M$.

Montrer que f est continue et linéaire.

Exercice 6.7. *Soit E un espace vectoriel normé. Pour $A \subset E$, on pose $\alpha(A) = \overset{\circ}{\overline{A}}$.*

1. *Montrer que $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$.*
2. *Combien au plus de parties différentes obtient-on à partir de A par itérations d'intérieur et d'adhérence ?*

Exercice 6.8. *Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E. On définit*

$$\begin{array}{rccl} d_A : & E & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x,A) = \inf\{\|x-a\| \big| a \in A\} \end{array}$$

avec $d_\emptyset(x) = +\infty$ pour tout $x \in E$.

1. *Soit $A, B \subset E$. Montrer que $\overline{A} = \overline{B}$ si et seulement si $d_A = d_B$.*
2. *On pose $\rho(A,B) = \sup_{x\in E} |d_A(x) - d_B(x)|$ (vaut $+\infty$ si non borné). Montrer que*

$$\rho(A,B) = \max\Big(\sup_{x\in A} d_B(x), \sup_{y\in B} d_A(y)\Big) \overset{def}{=} \alpha(A,B)$$

Exercice 6.9. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.*

1. *Montrer que si F est un fermé de $\mathbb{C}$, alors $P(F)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.*
2. *Si Θ est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$, montrer que $P(\Theta)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Exercice 6.10. *On définit $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \bigm| P \text{ unitaire et } \deg(P) = n\}$. F est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $\mathcal{S} = \{P \in F \bigm| P \text{ est scindé sur } \mathbb{R}\}$.*

1. *Montrer que $P \in \mathcal{S}$ si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geqslant |\Im(z)|^n$.*

2. *En déduire que $\mathcal{S}$ est fermé.*

3. *Montrer que $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M \text{ trigonalisable sur } \mathbb{R}\}$ est fermé.*

Exercice 6.11. *Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A = \sum_{i=1}^n a_i X^i$, $B = \sum_{i=1}^m b_i X^i$ avec $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.*

1. *Montrer que*
$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}_{n+m-1}[X] \\ & (U,V) & \mapsto & AU + BV \end{array}$$
est bijective si et seulement si $A \wedge B = 1$.

   On note $M_{A,B}$ la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et on définit le résultant $R_{A,B} = \det(M_{A,B})$.

2. *Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $p \in \mathbb{N}$ fixé, on munit $\mathbb{K}_p[X]$ d'une norme quelconque. Montrer que*
$$\begin{array}{rccc} \Phi_{A,B}: & \mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K} \\ & (A,B) & \mapsto & R_{A,B} \end{array}$$
est continue.

3. *En déduire que $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{C}\}$ est ouvert. Et sur $\mathbb{R}$?*

Exercice 6.12. *Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^n = 0\}$. F est donc l'ensemble des matrices nilpotentes.*

1. *Déterminer $\overline{F}$ et $\mathring{F}$.*

2. *On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de $\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(M^\intercal M)}$. Vérifier que c'est une norme et calculer $d(I_n, F)$.*

Exercice 6.13.

1. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{K})$.*

2. *En déduire que pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_{AB} = \chi_{BA}$.*

Exercice 6.14. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée (pour une norme quelconque). On pose $v_p = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} u^p$.*

1. *Montrer que*

$$E = \ker(u - id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - id_E)$$

On pourra évaluer $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u)$ *et faire tendre* p *vers* $+\infty$.

2. *Montrer que* $(v_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *converge vers* Π, *le projecteur sur* $\ker(u - id_E)$ *parallèlement à* $\mathrm{Im}(u - id_E)$.

Exercice 6.15. *Soit* A *compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé,* $f : A \to A$ *1-lipschitzienne.*

1. *Soit* $x_0 \in A$, *et pour* $n \geqslant 1, \forall x \in A$, $f_n(x) = \frac{1}{n}f(x_0) + (1 - \frac{1}{n})f(x_0)$. *Montrer que* f *possède un unique point fixe* x_n.
2. *Montrer que* f *possède au moins un point fixe.*
3. *Si l'espace est euclidien, montrer que* $F = \{x \in A \mid f(x) = x\}$ *est convexe.*
4. *Contre-exemple dans le cas général.*

Exercice 6.16. *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{R}$*-espaces vectoriels normés avec* $\dim(F) < +\infty$. *Soit* $f : E \to F$ *continue telle qu'il existe* $M \geqslant 0$, *pour tout* $(x, y) \in E^2$, *on a* $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M$.

1. *Si* $M = 0$, *montrer que* f *est linéaire (continue). Est-ce encore vrai si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *?*
2. *On suppose* $M > 0$, *soit pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rccc} v_n : & E & \to & F \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2^n}f(2^n x) \end{array}$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $(v_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. On note* $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n(x)$.

3. *Montrer que* g *est l'unique application linéaire continue telle que* $g - f$ *soit bornée.*

Exercice 6.17. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé de dimension plus grande que 2 et* $f : E \to \mathbb{R}$ *continue telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}, f^{-1}(\{t\})$ *est compact. Montrer que* f *atteint son maximum ou son minimum sur* E.

Exercice 6.18. *Soit* $n \geqslant 2$. *Existe-t-il* f *continue injective de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 6.19. *Soit* $\varphi\colon l^1 \to \mathbb{R}$ *forme linéaire continue. On pose* $K_n = \varphi(e_n) \in \mathbb{R}$ *où* e_n *est la base canonique de* l^1.

1. *Montrer que* $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée et que* $|||\varphi||| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |K_n| = \|(K_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty$.
2. *Montrer que*

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathcal{L}_c(l^1,\mathbb{R}) & \to & l^\infty \\ & \varphi & \mapsto & (\varphi(e_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

est une isométrie bijective.

Exercice 6.20. *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé et* H *un hyperplan de* E.

1. *Montrer que si* H *est dense, alors* $E \setminus H$ *est connexe par arc.*
2. *Et si* H *est fermé ?*
3. *Et pour un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel normé ?*

Exercice 6.21. *Soit* $\Gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. *Montrer que* Γ *est connexe par arcs mais que* $\overline{\Gamma}$ *ne l'est pas.*

Exercice 6.22. *Soit* K *compact convexe non vide d'un espace vectoriel normé* E. *Soit* $T \in \mathcal{L}_c(E)$ *tel que* $T(K) \subset K$.

1. *Soit* $a \in K$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n T^k(a)$. *Montrer que* T *admet au moins un point fixe dans* K.
2. *Soit* $U \in \mathcal{L}_c(E)$ *qui commute avec* T *et tel que* $U(K) \subset K$. *Montrer que* U *et* T *ont un point fixe commun.*

Exercice 6.23 (Théorème de Carathéodory)**.** *Soit* E *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel normé de dimension* n.

1. *Soit* $p \geqslant n+2$ *et* $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$. *Soit* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_-^p$ *tel que* $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ *et* $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. *Soit*

$$\begin{array}{cccc} u: & \mathbb{R}^p & \to & E \\ & (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) & \mapsto & \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i \end{array}$$

Montrer que $\dim(\ker(u)) \geqslant 2$. *En déduire qu'il existe* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p \setminus \{0, \ldots, 0\}$ *tel que* $\sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = 0$ *et* $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$.

2. *Montrer que pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i)x_i$ *et que* $\sum_{i=1}^p \lambda_i + t\alpha_i = 1$. *Prouver que l'on peut choisir* t *tel que* $\min_{1\leqslant i\leqslant p}(\lambda_i + t\alpha_i) = 0$.
3. *En déduire que* x *est barycentre à coefficients positifs de* $n+1$ *éléments* $(x_i, \ldots, x_p)$.

4. *Soit K un compact de E. Montrer que* $\operatorname{conv}(K)$ *est compact.*

Exercice 6.24. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $r \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{C}^r$ distincts et $P = (X-\alpha_1)\dots(X-\alpha_r)$. Déterminer les composantes connexes par arcs de $A_P \in \{u \in \mathcal{L}(E) \mid P(u) = 0\}$.*

Exercice 6.25 (Théorème de Perron-Frobenius)**.** *Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}$, $a_{i,j} > 0$. On note alors $A > 0$, et on peut définir de même $A \geqslant 0$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. On pose, pour $X = (x_1,\dots,x_n)^\mathsf{T}$, $|X| = (|x_1|,\dots,|x_n|)^\mathsf{T}$. On définit $\rho(A) = \max\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)} |\lambda|$ le rayon spectral de A.*

1. *Montrer que si $X \geqslant 0$ et $X \neq 0$, on a $AX > 0$.*
2. *Montrer que pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, si $|AX| = A|X|$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}X \geqslant 0$.*
3. *On définit*
$$K = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid X \geqslant 0 \text{ et } \|X\|_1 = 1\}$$
et pour tout $X \in K$,
$$I_X = \{t \geqslant 0 \mid AX - tX \geqslant 0\}$$
Montrer que I_X est non vide, fermé et borné. On pose $\theta(X) = \max(I_X)$.
4. *Montrer que θ est borné sur K. On pose $r_0 = \sup\limits_{x\in K} \theta(X)$. Établir qu'il existe $X^+ \in K$ tel que $\theta(X^+) = r_0$.*
5. *Montrer que $AX^+ = r_0X^+$. On pourra poser $Y = AX^+ - r_0X^+$ et on montrera que si $Y \neq 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A(A^+) - (r_0+\varepsilon)AX^+ > 0$.*
6. *Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$ et $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|V\|_1 = 1$ et $AV = \lambda V$. Montrer que $|AV| \leqslant A|V|$, en déduire que $|\lambda| \leqslant r_0$.*
7. *Montrer que si $|\lambda| = r_0$, alors $A|V| = r_0|V| = |AV|$, en déduire que $\lambda = r_0$.*
8. *Montrer que* $\dim(\ker(A - r_0I_n)) = 1$.

Exercice 6.26. *Soit E un espace vectoriel normé, U et V deux compacts disjoints. Montrer qu'il existe U' et V' des ouverts disjoints tels que $U \subset U'$ et $V \subset V'$.*

Exercice 6.27. *Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $f\colon K \to K$ tel que pour tout $x \neq y \in K^2$, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.*

1. *Montrer qu'il existe un unique $a \in K$ tel que $f(a) = a$.*

2. *Soit $u_0 \in K$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.*

3. *Étudier $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 6.28. *Soient K_1, K_2, K_3 trois compacts non vides du plan tels qu'il n'existe pas de droite coupant K_1, K_2 et K_3 simultanément. Montrer qu'il existe un cercle de rayon minimal les coupant tous les trois.*

Exercice 6.29. *Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On définit pour tout $f \in E$, pour tout $x \in [0,1]$,*

$$T(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

1. *Montrer que $T \in \mathcal{L}_c(E)$ et calculer $|||T|||$.*

2. *Montrer que $\mathrm{id}_E - T$ est un homéomorphisme.*

Exercice 6.30. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ continue, montrer l'équivalence :*

(i) $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$,

(ii) pour tout compact K de $\mathbb{R}^p$, $f^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6.31. *Soit E un espace vectoriel normé et K un compact non vide de E et $f : K \to K$ tel que pour tout $(x,y) \in K^2$, $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x,y)$.*

1. *Montrer que pour tout $(x,y) \in K^2$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{cases} d(x, f^p(x)) < \varepsilon \\ d(y, f^p(y)) < \varepsilon \end{cases}$$

   On pourra former $(f^n(x), f^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$.

2. *Montrer que f est isométrie.*

3. *Montrer que f est surjective.*

Exercice 6.32. *Soit $(A,B) \in (\mathbb{R}^2)^2$ avec $A \neq B$, et K un compact ne coupant pas (AB). Soit*

$$F = \{r \geqslant 0, \text{ il existe un cercle de centre } r\text{, passant par } A \text{ et } B \text{ et rencontrant } K\}$$

Montrer que F est compact.

Exercice 6.33. *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$ *et* $\tau \in \mathcal{L}(E)$: $\tau(P)(X) = P(X+1)$.

1. *Déterminer* $\mathrm{Sp}(\tau)$.
2. *Vérifier que* $\|P\| = \sup_{x \geqslant 0} |P(x)e^{-x}|$ *est une norme sur* E.
3. *Montrer que* τ *est continue pour cette norme et vérifie* $|||\tau||| \leqslant e$.
4. *Calculer* $|||\tau|||$.

Exercice 6.34. $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *muni de* $\|\cdot\|_\infty$. *Soit* $\varphi\colon [0,1] \to [0,1]$ *continue strictement croissante. Pour* $f \in E$ *et* $x \in [0,1]$, *soit*

$$T(f)(x) = \int_0^1 \min(x, \varphi(t)) f(t) dt$$

1. T *définit-il un endomorphisme de* E *?*
2. *Est-il continue ?*
3. *Calculer* $|||T|||$.

Exercice 6.35. *Soit* $E = \mathbb{C}[X]$ *muni de* $\|\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. *Soit*

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & E & \to & \mathbb{C} \\ & \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k & \mapsto & \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{2^k} \end{array}$$

1. *Montrer que* $\ker(\varphi)$ *est fermé.*
2. *Soit* $P = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$. *Montrer que* $\|P - 1\|_\infty > \frac{1}{2}$.
3. *Évaluer* $d(1, \ker(\varphi))$. *Cette distance est-elle atteinte ?*

Exercice 6.36. *Soit* K *un compact non vide de* $\mathbb{R}^n$ *(muni de* $\|\cdot\|_2$*). Montrer qu'il existe une unique boule fermée de rayon minimal contenant* K.

Exercice 6.37. *Soit* $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *muni de* $\|\cdot\|_\infty$ *et*

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & E & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f \end{array}$$

Montrer que φ *est une forme linéaire continue. Calculer* $|||\varphi|||$. *Est-elle atteinte ?*

Exercice 6.38. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$*. On suppose que* $u \circ v - v \circ u = id$*.*

1. *Cette hypothèse sur* u *et* v *est-elle possible en dimension finie ?*
2. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = (n+1)v^n$*.*
3. *En utilisant la norme, mettre en évidente une contradiction.*
4. *Soit* $E = \mathbb{R}[X]$ *et*

$$\begin{array}{rccc} T: & E & \rightarrow & E \\ & P & \mapsto & XP(X) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} D: & E & \rightarrow & E \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

Montrer que T *et* D *ne sont pas simultanément continues pour aucune norme.*

Exercice 6.39. *Soit* $\|\cdot\|$ *une norme sur* $\mathbb{C}^n$ *et* $|||\cdot|||$ *la norme subordonnée sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Soit* $(\alpha, \beta) \in [0, 1[^2$*,* $A \neq I_n$ *et* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *tel que*

$$\begin{cases} |||A - I_n||| \leqslant \alpha \\ |||B - I_n||| \leqslant \beta \end{cases}$$

1. *Montrer que* A *et* B *sont inversibles et que*

$$\left|\left|\left|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\right|\right|\right| \leqslant \frac{2|||A - I_n||| |||B - I_n|||}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

2. *Montrer que si* α *et* β *sont suffisamment petits,*

$$\left|\left|\left|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\right|\right|\right| < |||A - I_n|||$$

3. *Soit* $G = gr\{A, B\}$ *(sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{C})$ *engendré par* A *et* B*). Montrer que si* G *est discret, alors il existe* $C \in G \setminus \{I_n\}$*, qui commute avec toutes les matrices de* G*.*

Exercice 6.40.

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*, montrer que* $\exp(A) \in \mathbb{C}_{n-1}[A]$ *: il existe* $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ *tel que* $\exp(A) = P(A)$*.*
2. *Montrer que* A *est diagonalisable sur* $\mathbb{C}$ *si et seulement si* $\exp(A)$ *l'est.*

3. *Résoudre* $\exp(A) = I_n$.

4. *Le résultat de la question 2 est-il valable sur* $\mathbb{R}$ *?*

Exercice 6.41. *On pose, pour* $n \geqslant 1$,

$$\begin{cases} P(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{X^{n-1}}{n-1} \\ Q(Y) = 1 + Y + \frac{Y^2}{2} + \cdots + \frac{Y^{n-1}}{(n-1)!} \end{cases}$$

1. *Montrer qu'il existe* $A \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $Q(P(X)) = 1 + X + X^n A(X)$. *On pourra écrire les développements limités à l'ordre* n *de* exp *et* ln.

2. *Soit* $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *nilpotente, montrer que* $\exp(P(N)) = Q(P(N)) = I_n + N$.

3. *En déduire que* $\exp\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ *est surjective.*

Exercice 6.42. *Soit*

$$A = \left\{ \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \,\middle|\, (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$$

Déterminer $\overline{A}$.

Exercice 6.43. *Soit*

$$H = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, \exists m \in \mathbb{N}^* \colon M^m = I_n \right\}$$

Montrer que

$$\overline{H} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U} \right\}$$

Exercice 6.44. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, *on définit*

$$\begin{array}{cccc} N_a : & \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{R}^+ \\ & P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k & \mapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k p_k| \end{array}$$

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* N_a *soit une norme.*

2. *Si* a *et* b *vérifient cette condition nécessaire et suffisante, à quelle condition nécessaire et suffisante* N_a *et* N_b *sont-elles équivalentes ?*

3. *Existe-t-il* $(a,b) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}})^2$ *tel que*

$$\begin{array}{cccc} \Delta : & \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C}[X] \\ & P & \mapsto & P' \end{array}$$

soit continue pour N_a *et discontinue pour* N_b *?*

Exercice 6.45. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $A \subset E$ non vide.*

1. *Montrer que pour tout $x \in E$, $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$ et que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.*
2. *Soit B non vide, montrer que $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$.*

Exercice 6.46. *On munit $\mathbb{C}[X]$ de $\| \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k X^k \|_\infty = \max\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k|$. Soit $x_0 \in \mathbb{C}$ et*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{x_0} : & \mathbb{C}[X] & \to & \mathbb{C} \\ & P & \mapsto & P(x_0) \end{array}$$

Pour quelles valeurs de x_0, φ_{x_0} est-elle continue ? Dans ce cas, calculer $|||\varphi_{x_0}|||$.

Exercice 6.47. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est nilpotente si et seulement s'il existe $(M_p)_{p\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, M_p est semblable à M et $M_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.*

Exercice 6.48. *Montrer que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si $S_M = \{P^{-1}MP \mid P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ est fermé. Pour le sens indirect, on pourra utiliser la décomposition de Dunford et l'exercice précédent.*

Exercice 6.49. *Soit $\varphi : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. On lui associe*

$$\begin{array}{rccl} \omega_\varphi : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & \sup\{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| < h\} \end{array}$$

1. *Montrer que ω_φ est définie et croissante.*
2. *Soit $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, montrer que $\omega_\varphi(h + h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.*
3. *Soit $(h, \lambda) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\omega_\varphi(nh) \leqslant n\omega_\varphi(h)$ et $\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (1+\lambda)\omega_\varphi(h)$.*
4. *Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0$. En déduire que ω_φ est continue.*

Exercice 6.50. *Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{C}^n$ et $|||\cdot|||$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel qu'il existe $\mu \in [0, 2[$,*

$$G \subset \overline{B_{|||\cdot|||}(I_n, \mu)}$$

Montrer qu'il existe $\in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $M \in G$, $M^m = I_n$.

Exercice 6.51. *Soit $n \geqslant 1$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On forme*

$$\mathcal{G}_q = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; M^q = I_n \right\}$$

Déterminer les points isolés de $\mathcal{G}_q$.

7 Fonction d'une variable réelle

Exercice 7.1 (Polnômes de Legendre)**.** *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L_n = P_n^{(n)}$ où*

$$P_n = \frac{(X^2-1)^n}{2^n n!}$$

1. *On munit $\mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire*

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

   Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

2. *Montrer que*

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x+1)^{n-k}(x-1)^k$$

3. *Montrer que L_n admet n zéros simples sur $]-1,1[$.*

4. *Montrer que pour $n \geqslant 2$,*

$$L_n = \frac{2n-1}{n} X L_{n-1} - \frac{n-1}{2n-1} L_{n-2}$$

Exercice 7.2. *Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, $(x_0,\dots,x_n) \in [a,b]^{n+1}$ avec $a < b$ et*

$$V(x_0,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_0 & \dots & \dots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_0^{n-1} & \dots & \dots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & \dots & \dots & f(x_n) \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j)\Delta f(x_0,\dots,x_n)$$

S'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $\Delta f(x_0,\dots,x_n)$ prend n'importe quelle valeur, sinon $\prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$\Delta f(x_0,\dots,x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

Exercice 7.3. *Soit*

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \;\middle|\; \|f''\|_\infty \leqslant 1 \right\}$$

Soit pour $f \in E$,

$$A(f) = f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)$$

Déterminer $\sup_{f\in E} A(f)$.

Exercice 7.4. *Trouver toutes les fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x)-f(y)=(x-y)f'\Big(\frac{x+y}{2}\Big)$.*

Exercice 7.5. *Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ convexe.*

1. *Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=l\in\overline{\mathbb{R}}$ existe.*
2. *Montrer que si $l\geqslant 0$, f est décroissante.*
3. *Montrer que si $l\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-lx$ existe dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Exercice 7.6. *Soit $p\in\mathbb{N}^*$.*

1. *Calculer*
$$l_p=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{n+k}$$
2. *Soit $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, f de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f(0)=0$. Montrer que*
$$v_n=\sum_{k=0}^{np}f\Big(\frac{1}{k+n}\Big)$$
3. *Si on suppose seulement f continue et $f(0)=0$, montrer que l'on peut avoir $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente.*
4. *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $f(0)=f'(0)=0$ et $f''(0)\neq 0$, trouver un équivalent de v_n.*

Exercice 7.7. *Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m$ existe et f' est uniformément continue. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. Et si $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{C})$? Et si f est seulement $\mathcal{C}^1$ sans f' uniformément continue ?*

Exercice 7.8. *Trouver toutes les fonctions f et g continues de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,*
$$f(x+y)-f(x-y)=2yg(x)$$

Exercice 7.9. *Soit $f\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ convexe de classe $\mathcal{C}^1$. Soit*
$$S_n=\frac{1}{2}f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_1^n f(t)dt$$
Montrer que pour tout $n\geqslant 2$,
$$0\leqslant S_n\leqslant\frac{1}{8}(f'(n)-f'(1))$$

Exercice 7.10.

1. *Soit $f\colon \mathbb{R} \to E$ où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie avec f de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$. On poe $M_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\|$ et $M_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f''(t)\|$. Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que*

$$M_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f'(t)\| \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on formera

$$\begin{cases} A = f(x+h) - f(x) - hf'(x) \\ B = f(x-h) - f(x) + hf'(x) \end{cases}$$

et on exprimera $f'(x)$ en fonction de A et B.

2. *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ et telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$, montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f^{(k)}$ l'est aussi. On pourra former*

$$\begin{cases} A_1 = f(x+1) - f(x) - f'(x) - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \\ A_k = f(x+k) - f(x) - kf'(x) - \cdots - k^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} \end{cases}$$

Exercice 7.11 (Longueur d'un arc)**.** *Soit $\gamma\colon [a,b] \to E$ un arc de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $\sigma = (a_0, \ldots, a_n) \in \Sigma([a,b])$ (ensemble des subdivisions de $[a,b]$), on définit*

$$l_{\sigma,\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\|$$

On dit que γ est de longueur finie si et seulement il existe $l(\gamma) = \sup_{\sigma\in\Sigma([a,b])} l_{\sigma,\gamma}$ appelée longueur de γ.

1. *Montrer que pour tout $\sigma \in \Sigma([a,b])$,*

$$l_{\sigma,\gamma} \leqslant \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

2. *Soit $\sigma = (a_1, \ldots, a_n) \in \Sigma([a,b])$, montrer que*

$$\Big| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \Big| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt$$

3. *Soit $\varepsilon > 0$, justifier qu'il existe $\alpha_0 >$ tel que si $\delta(\sigma) \leqslant \alpha_0$ (où δ est le pas de la subdivision, c'est-à-dire la longueur maximale entre deux a_i), alors*

$$\Big| \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

Puis montrer qu'il existe $\alpha_1 > 0$ *tel que si* $\delta(\sigma) \leqslant \alpha_1$, *alors*

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En déduire que

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

4. *Étudier*

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & \begin{pmatrix} R\cos(t) \\ R\sin(t) \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 7.12 (Théorème de relèvement)**.** *Soit* $\gamma \colon I \to \mathbb{C}^*$ *un arc* $\mathcal{C}^k$ *avec* $k \geqslant 0$. *On appelle relèvement continu de* γ *toute application continue* $\theta \colon I \to \mathbb{R}$ *telle que pour tout* $t \in I$, $\gamma(t) = |\gamma(t)|e^{\mathrm{i}\theta(t)}$.

1. *Montrer que si* θ_1 *et* θ_2 *sont deux relèvements continue de* γ, *alors il existe* $k_0 \in \mathbb{Z}$ *tel que pour tout* $t \in I$, $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k_0\pi$.
2. *On suppose* $k \geqslant 1$. *On pose* $f(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$. *Montrer que* f *est* $\mathcal{C}^k$ *et que s'il existe* θ *relèvement* C^1 *de* γ, *alors pour tout* $t \in I$,

$$\theta'(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)}$$

3. *Pour* $k \geqslant 1$, *en déduire qu'il existe un relèvement* $\mathcal{C}^k$ *de* γ.

8 Suites et séries de fonctions

9 Intégration

10 Espaces préhilbertiens

11 Espaces euclidiens

12 Calcul différentiel

13 Équation différentielles linéaires