Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Probabilités sur un univers dénombrable

Solution 1.1.

1. On note P :'le lancer initial donne pile', F :'le lancer initial donne face', B_k :'la k-ième boule est blanche', N_k :'la k-ième boule est noire'.

   On a
   $$\mathbb{P}\left(B_k\right)=\mathbb{P}\left(P\right)\mathbb{P}_P\left(B_k\right)+\mathbb{P}\left(F\right)\mathbb{P}_F\left(B_k\right)=\frac{1}{2}\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{k+1} \tag{1.1}$$
   donc
   $$\boxed{\mathbb{P}\left(B_k\right)=\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

2. On a
   $$\boxed{\mathbb{P}_{B_k}\left(P\right)=\mathbb{P}_P\left(B_k\right)\frac{\mathbb{P}\left(P\right)}{\mathbb{P}\left(B_k\right)}=\frac{k}{k+1}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1} \tag{1.3}$$

3. On a
   $$\mathbb{P}\left(B_1\bigcap\ldots\bigcap B_k\right)=\frac{1}{2}\mathbb{P}_P\left(B_1\bigcap\ldots\bigcap B_k\right)+\frac{1}{2}\mathbb{P}_F\left(B_1\bigcap\ldots\bigcap B_k\right) \tag{1.4}$$
   $$=\frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{j}{j+1}+\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right) \tag{1.5}$$
   $$\boxed{=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)!}\right)} \tag{1.6}$$

4. On a
   $$\mathbb{P}\left(B_k\bigcap B_{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}\times\frac{k+1}{k+2}+\frac{1}{k+1}\times\frac{1}{k+2}\right) \tag{1.7}$$
   $$=\frac{1}{2}\left(\frac{k\left(k+1\right)+1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}\right) \tag{1.8}$$

   Donc on a indépendance si et seulement si
   $$\mathbb{P}\left(B_k\bigcap B_{k+1}\right)=\mathbb{P}\left(B_k\right)\mathbb{P}\left(B_{k+1}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{k\left(k+1\right)+1}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}=\frac{1}{2} \tag{1.9}$$
   $$\Leftrightarrow 2k\left(k+1\right)+2=\left(k+2\right)\left(k+2\right) \tag{1.10}$$
   $$\Leftrightarrow 2k^2+2k=k^2+3k \tag{1.11}$$
   $$\Leftrightarrow \boxed{k=1} \tag{1.12}$$

   Ainsi, seuls les deux premiers tirages sont indépendants.

■

Remarque 1.1. *Seuls les deux premiers tirages sont indépendants car le premier tirage est indépendant du lancer de pièce.*

Solution 1.2.

1. $$\boxed{p_0 = 1, q_0 = 0, p_N = 0, q_N = 1} \tag{1.13}$$

2. Soit $a \in [\![1, N-1]\!]$. Puisque les lancers de pièce sont indépendants, on peut partitionner selon le résultat du premier lancer. On a donc [probabilités conditionnelles]

$$\boxed{p_a = p \times p_{a+1} + q \times p_{a-1}} \tag{1.14}$$

L'équation caractéristique est

$$pX^2 - x + q = 0 \tag{1.15}$$

On a $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4(1-p)p = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$.

Ainsi, si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $a \in [\![0, N]\!]$, on a

$$p_a = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^a \tag{1.16}$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \times \left(\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right)} \tag{1.17}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$p_a = \alpha a + \beta \tag{1.18}$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{N}(N - a)} \tag{1.19}$$

3. Pour tout $a \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, on a
$$q_a = pq_{a+1} + qp_{a-1} \tag{1.20}$$
donc pour tout $a \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, on a
$$p_a + q_a = p\left(p_{a+1} + q_{a+1}\right) + q\left(p_{a-1} + q_{a-1}\right) \tag{1.21}$$
Comme $p_0 + q_0 = p_N + q_N = 1$, on a pour tout $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$,
$$\boxed{p_a + q_a = 1} \tag{1.22}$$
Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement en temps fini.

■

Solution 1.3.

1. Les tirs sont indépendants donc
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}\left(A_n\right) &= (1-a)^n \times (1-b)^n \times a \\ \mathbb{P}\left(B_n\right) &= (1-a)^n \times (1-b)^n \times (1-a) \times b \end{aligned}} \tag{1.23}$$
2. On a
$$G_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \tag{1.24}$$
réunion disjointe. Donc
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{P}\left(G_A\right) &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab} \\ \mathbb{P}\left(G_B\right) &= \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \frac{b(1-a)}{a+b-ab} \end{aligned}} \tag{1.25}$$
Ainsi,
$$\boxed{\mathbb{P}\left(G_A\right) + \mathbb{P}\left(G_B\right) = 1} \tag{1.26}$$
3. On a $\mathbb{P}\left(G_A\right) = \mathbb{P}\left(G_B\right)$ si et seulement si
$$\frac{a}{1-a} = b \tag{1.27}$$
Cela implique que $\frac{a}{1-a} \in]0, 1[$ ce qui est possible uniquement (après étude de fonction) si
$$\boxed{a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ et } b = \frac{a}{1-a}} \tag{1.28}$$

■

Solution 1.4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose E_n :'Le joueur gagne au bout du n-ième lancer' (évènement disjoints) et G :'Le joueur gagne'. On a $G \cup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$. Donc

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{n} = \ln(2)} \tag{1.29}$$

2. On note P_n :'le joueur obtient pile au n-ième lancer', P :'il obtient pile'. On a

$$\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\mathbb{P}(G \bigcap P_n)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}_{P_n}(G) \times \mathbb{P}(P_n)}{\mathbb{P}(G)} \tag{1.30}$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\ln(2)}} \tag{1.31}$$

Puis

$$\boxed{\mathbb{P}_G(P) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}_G(P_n) = 1} \tag{1.32}$$

■

Remarque 1.2. *On a utilisé le résultat suivant : pour tout $x \in]0,1[$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \tag{1.33}$$

Soit on connaît le résultat avec les séries entières, soit on le redémontre à la main : pour $N \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} x^n t^{n-1} dt \tag{1.34}$$

$$= x \int_0^1 \frac{1-(xt)^N}{1-xt} dt \tag{1.35}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1-xt} dt}_{=[\ln(1-xt)]_0^1} + R_N \tag{1.36}$$

avec $|R_N| \leqslant \frac{x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ d'où le résultat.

Solution 1.5.

1. On a
$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 + p_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} = 2\alpha + (1-2\alpha) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{1.37}$$
donc
$$\boxed{\text{c'est une probabilité sur } \mathbb{N}.} \tag{1.38}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note E_k :'la famille a k enfants et exactement 2 garçons', E :'la famille a exactement 2 garçons', A_k :'la famille a k enfants'.

   On a alors
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(E_k) \times \mathbb{P}(A_k) && (1.39)\\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \binom{k}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times p_k && (1.40)\\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k+1}} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} && (1.41)\\
&= (1-2\alpha) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{2k}} && (1.42)\\
&= (1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{2k+4}} && (1.43)\\
&= \frac{1}{16}(1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{4^k} = \frac{1}{16}(1-2\alpha) \times \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} && (1.44)\\
&\boxed{= \frac{4(1-2\alpha)}{27}} && (1.45)
\end{aligned}$$

3. On note F :'la famille a au moins 2 filles', F_k :'la famille a exactement k filles et au moins 4 enfants', G :'la famille a au moins 2 garçons', G_k :'la famille a exactement k garçons et au moins 4 enfants'.

   On a
$$\mathbb{P}_G(G) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} \tag{1.46}$$
   et $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G} = F_0 \cup F_1 \cup G_0 \cup G_1$. Donc, comme $\mathbb{P}(F_0) = \mathbb{P}(G_0)$ et $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(G_1)$, on a $\mathbb{P}(F \cap G) = 1 - 2(\mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1))$.

On a alors

$$\mathbb{P}(G_0) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{1.47}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{2k-1}} \tag{1.48}$$

$$= 2(1-2\alpha)\frac{1}{4^4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \tag{1.49}$$

$$= 2(1-2\alpha) \times \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{3} \tag{1.50}$$

et

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{1.51}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} k \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \tag{1.52}$$

$$= (1-2\alpha) \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{2^{2k-1}} \tag{1.53}$$

$$= (1-2\alpha) \times \frac{2}{4} \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{4^{k-1}} \tag{1.54}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k+1}{4^k} \tag{1.55}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} - 1 - \frac{2}{4} - \frac{3}{4^2} \right) \tag{1.56}$$

et on calcule enfin

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(G_0) - \mathbb{P}(G_1)} \tag{1.57}$$

■

Solution 1.6. Pour tout $k \geqslant 1$, on note A_k :'A gagne à son lancé k' et B_k de manière équivalente pour le joueur B. On note G_A :'A gagne' et de même pour B. On a ainsi

$$G_A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k \tag{1.58}$$

(réunion disjointe) et pareil pour G_B. On a

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} \tag{1.59}$$

d'où

$$\mathbb{P}(G_A) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1-\left(1-\frac{5}{36}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)} \tag{1.60}$$

et pareil

$$\boxed{\mathbb{P}(G_B) = \frac{1}{6} \times \left(1-\frac{5}{36}\right) \times \frac{1}{1-\left(1-\frac{5}{36}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)} > \mathbb{P}(G_A)} \tag{1.61}$$

et

$$\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) = 1 \tag{1.62}$$

donc $G_A \cup G_B$ est presque sur. ■

Solution 1.7. Soit $k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$. La probabilité que l'on tire $2k$ boules blanches est (loi binomiale) :

$$\binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{1.63}$$

donc la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit pair est

$$\mathbb{P}_P = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{1.64}$$

De même, la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit impair est

$$\mathbb{P}_I = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k+1} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k-1} \tag{1.65}$$

On a alors

$$\mathbb{P}_P + \mathbb{P}_I = 1 \tag{1.66}$$

et

$$\mathbb{P}_P - \mathbb{P}_I = \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} (-1)^{k'} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k'} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k'} = \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n} \tag{1.67}$$

On a donc

$$\boxed{\mathbb{P}_P = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n}\right)} \tag{1.68}$$

■

Remarque 1.3. *Si on note $\mathbb{P}_3$ la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit multiple de 3 :*

$$\mathbb{P}_3 = \sum_{0\leqslant 3k\leqslant n} \binom{n}{3k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{3k} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-3k} \tag{1.69}$$

On note $\mathbb{P}_2$ la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit congru à 2 module 3, et on définit $\mathbb{P}_1$ de même. Alors on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 &= 1 \\ \mathrm{j}\mathbb{P}_1 + \mathrm{j}^2\mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 &= \left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n \\ \mathrm{j}^2\mathbb{P}_1 + \mathrm{j}\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_3 &= \left(\frac{b+\mathrm{j}^2a}{a+b}\right)^n \end{cases} \tag{1.70}$$

et donc

$$\mathbb{P}_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n + \left(\frac{b+\mathrm{j}^2a}{a+b}\right)^n\right) \tag{1.71}$$

Solution 1.8. Soit pour $i \in [\![1,n]\!]$,

$$A_i = \{\sigma \in \Sigma_n | \sigma(i) = i\} \tag{1.72}$$

$$A = \{\sigma \in \Sigma_n | \sigma \text{ a un point fixe}\} \tag{1.73}$$

On a

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \tag{1.74}$$

On a

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!] \\ |J|=k}} \left|\bigcap_{i\in J} A_i\right| \tag{1.75}$$

Il y a $\binom{n}{k}$ tels J, et on a

$$\left|\bigcap_{i\in J} A_i\right| = |\{\sigma \in \Sigma_n | \forall i \in J, \sigma(i) = i\}| = (n-k)! \tag{1.76}$$

Ainsi,

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! \tag{1.77}$$

donc

$$\boxed{p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = -\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 1 - \frac{1}{e}} \tag{1.78}$$

■

Solution 1.9.

1.

$$\boxed{p_N(0) = 0, p_N(1) = 1} \tag{1.79}$$

2. Pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, on a

$$p_N(n) = p \times p_N(n+1) + (1-n) \times p_N(n-1) \tag{1.80}$$

et l'équation caractéristique est $X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{1-p}{p}$ et le discriminant vaut $\Delta = \left(\frac{1}{p} - 2\right)^2 \geqslant 0$. Donc les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{q}{p}$. Ainsi, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$,

$$p_N(n) = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^n \tag{1.81}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Avec les conditions initiales, on trouve

$$\begin{cases} \mu & = & \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ \lambda & = & \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases} \tag{1.82}$$

donc

$$\boxed{p_N(n) = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \text{ i.e. } p < \frac{1}{2} \\ 1-\left(\frac{q}{p}\right)^n & \text{si } q < p \text{ i.e. } p > \frac{1}{2} \end{cases}} \tag{1.83}$$

On vérifie d'ailleurs que l'arrêt en temps fini est presque sûr : $p_N(n) + q_N(n) = 1$ (utiliser la relation de récurrence et les conditions initiales).

■

Solution 1.10.

1. On note A_n :'la première boule blanche apparaît au n-ième tirage' et B_n :'on tire une boule noire au n-ième tirage'. On a

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \bigcap \overline{B_n} \tag{1.84}$$

ce qui implique donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(A_n\right) &= p_n && (1.85)\\
&= \mathbb{P}\left(B_1\right)\mathbb{P}_{B_1}\left(B_2\right)\ldots\mathbb{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{n-1}}\left(\overline{B_n}\right) && (1.86)\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n+1} && (1.87)\\
&= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}} && (1.88)
\end{aligned}$$

et par sommation téléscopique, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1} \tag{1.89}$$

Donc on tire une boule blanche presque sûrement.

2. On utilise le même principe : pour $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}\left(A_n\right) = p_n = \frac{1}{2}\times\frac{c+1}{c+2}\times\frac{2c+1}{2c+2}}\times\cdots\times\frac{(n-2)\,c+1}{(n-2)\,c+2}\times\frac{1}{(n-1)\,c+2} \tag{1.90}$$

Comme les $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles, on a

$$\sum_{n\geqslant 1}\mathbb{P}\left(A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant 1 \tag{1.91}$$

donc

$$\boxed{\text{la série converge.}} \tag{1.92}$$

On peut montrer à nouveau que le tirage d'une boule blanche reste presque sûr. En effet, on a

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{nc+2-c-1}{nc+2} = 1-\frac{c+1}{nc+2} = a-\frac{c+1}{nc}+\underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.93}$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, il existe $K>0$ tel que

$$p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{c+1}{c}}} \tag{1.94}$$

avec $\frac{c+1}{c}>1$. Notamment, $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = 0$. Comme

$$(nc+2)\,p_{n+1} = ((n-1)\,c+1)\,p_n \tag{1.95}$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ncp_{n+1} - (n-1)\,cp_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2p_{n+1} \tag{1.96}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n - u_1\right) \tag{1.97}$$

La première somme est téléscopique et vaut 0, et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc on trouve bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \tag{1.98}$$

■

Remarque 1.4. *On peut contourner la règle de Raabe-Duhamel. On écrit*

$$\ln(p_{n+1}) = -\ln(2) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{kc+1}{kc+2}\right) - \ln(nc+2) \tag{1.99}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{kc+2}\right) - \ln(n) + \ln(c) - \ln(2) + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{1.100}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{kc} + \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) - \ln(n) - A + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{1.101}$$

$$= -\frac{1}{c}\left(\ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) - \ln(n) - A + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{1.102}$$

$$= -\ln(n)\left(1 + \frac{1}{c}\right) + A' + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{1.103}$$

Ainsi,

$$p_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1+\frac{1}{c}}} \tag{1.104}$$

Table des figures