Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Suites et séries de fonctions

Solution 1.1. Pour $x \geqslant 0$, on a $F_n(x) > 0$, on a

$$\ln(F_n(x)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{kx}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+tx)\,dt = G(x) \tag{1.1}$$

On a $G(0) = 0$ et pour $x > 0$, on a

$$G(x) = \left[\left(t+\frac{1}{x}\right)\ln(1+tx)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+tx}\left(t+\frac{1}{x}\right) dt \tag{1.2}$$

$$= \frac{x+1}{x}\ln(1+x) - 1 \tag{1.3}$$

(utiliser le fait que G est continue sur $[0,1]$ et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$).

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 1 = F(0)$. Pour $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = (1+x)^{\frac{x+1}{x}} \times \frac{1}{e} = F(x)$.

F est continue sur $[0,1]$. Soit $x \geqslant 0$. On écrit

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\mathrm{e}^{G_n(x)} - \mathrm{e}^{G(x)}\right| \tag{1.4}$$

On a d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \mathrm{e}^{G_n(x)}\,|G_n(x) - G(x)| \leqslant \mathrm{e}^{G_n(x)} \times \frac{x}{2n} \tag{1.5}$$

Si $f(t) = \ln(1+tx)$, on a $f'(t) = \frac{x}{1+tx} \geqslant 0$. Donc f est croissante et $G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \ln(1+x)$. Finalement,

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \frac{x(1+x)}{2n} \tag{1.6}$$

On a donc convergence uniforme sur $[0,A]$ pour tout $A \geqslant 0$. ■

Solution 1.2.

1. Si $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha}\,|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| \tag{1.7}$$

Ainsi, si $|x| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n(x)$ converge absolument. Si $|x| > 1$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|U_{n+1}(x)| > |U_n(x)|$, donc $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 : $\sum u_n(x)$ diverge.

Si $x = 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $\frac{U_{n+1}(1)}{U_n(1)} > 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant N_0}$ gare un signe constant. On a

$$\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.8}$$

Ainsi, d'après la règle de Raabe-Duhamel, on a

$$|U_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \tag{1.9}$$

Ainsi, on a convergence si et seulement si $\alpha > 2$.

Si $x = -1$, on a toujours $|U_n(-1)| = |U_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. Si $\sum u_n(-1)$ converge, on a $\alpha > 0$. Réciproquement, si $\alpha > 0$, on a $|U_n(-1)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum u_n(-1)$ est une série alternée. On a donc

$$\left|\frac{u_{n+1}(-1)}{u_n(-1)}\right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} < 1 \tag{1.10}$$

donc $(|u_n(-1)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : d'après le critère spéciale des séries alternées, $\sum u_n(-1)$ converge. Ainsi, $\sum u_n(-1)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

2. Supposons la convergence uniforme sur $[0, 1[$. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $\lim_{x\to 1^-} u_n(x) = u_n(1)$, d'après le théorème d'interversion des limites, comme il ya convergence uniforme au voisinage de 1, $\sum u_n(1)$ converge. Donc d'après ce qui précède, on a $\alpha > 2$.

   Réciproquement, si $\alpha > 2$, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $|u_n(x)| \leqslant |u_n(1)|$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). Donc on a convergence normale sur $[0, 1]$.

3. Supposons convergence uniforme sur $]-1, 0]$. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $\lim_{x\to -1^+} u_n(x) = u_n(-1)$. D'après le théorème d'interversion des limites, comme il y a convergence uniforme au voisinage de -1, $\sum u_n(-1)$ converge. D'après ce qui précède, on a $\alpha > 0$.

   Réciproquement, si $\alpha > 0$, soit $x \in [-1, 0]$, $\sum u_n(x)$ est alternée dont le terme général décroît en valeur absolue (et tend vers 0). Donc pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant |u_N(x)| \leqslant |u_N(-1)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \tag{1.11}$$

   On a donc convergence uniforme de $\sum u_n(x)$ sur $[-1, 0]$

$\blacksquare$

Remarque 1.1. *Pour rappel, on redonne la règle de Raabe-Duhamel : si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ *et*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{\frac{1}{n^2}} \tag{1.12}$$

alors il existe $C > 0$ *telle que* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\beta}$. *En effet, on écrit*

$$\ln\left((n+1)^\beta v_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta v_n\right) = \beta \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.13}$$

donc $(n^\beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 1.2. *On peut aussi éviter la règle de Raabe-Duhamel. On forme*

$$\ln\left(|u_n(1)|\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{2k-1}{2k-1+\alpha}\right| = -\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\alpha}{2}\ln(n) - \frac{\gamma\alpha}{2} + K + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{1.14}$$

donc $|u_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ *avec* $C > 0$.

Solution 1.3. Pour $k \geqslant \lfloor x \rfloor$, on a

$$\arctan(k+x) - \arctan(k) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{1.15}$$

On a

$$f_k(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+k(k+x)}\right) = \arctan\left(\frac{x}{k^2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2} \tag{1.16}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ converge absolument et f définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f_k'(x) = \frac{1}{1+(k+x)^2} \tag{1.17}$$

On fixe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|k+x| \geqslant k - |x| \geqslant k - \underbrace{\max\left(|a|, |b|\right)}_{=M} \geqslant 0 \tag{1.18}$$

pour $k \geqslant \lfloor M+1 \rfloor$.

On a de plus $0 \leqslant f_k'(x) \leqslant \frac{1}{1+(k-M)^2}$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). On $\sum_{k\geqslant \lfloor M\rfloor+1} f_k'$ converge normalement sur $[a,b]$. Enfin,

$$f - \sum_{k=1}^{\lfloor M\rfloor} f_k = \sum_{k=\lfloor M\rfloor+1}^{+\infty} f_k \tag{1.19}$$

est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ d'après le théorème de dérivation terme à terme, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (car $\sum_{k=1}^{\lfloor M\rfloor} f_k$ est une somme finie de fonctions $\mathcal{C}^1$ donc est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} f_k(n) &= \sum_{k=0}^{N} \arctan(k+n) - \arctan(k) && (1.20)\\
&= \sum_{k=n}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{N} \arctan(k) && (1.21)\\
&= \sum_{k=N+1}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) && (1.22)\\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} n\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \arctan(\frac{1}{k}) = f(n) && (1.23)
\end{aligned}$$

On a $\arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k} > 0$, d'après le théorème de comparaison des sommes partielles de séries à termes positifs divergente, donc $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Par ailleurs, f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$\ln|x| \underset{x\to+\infty}{\sim} f\left(\lfloor x\rfloor\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\lfloor x\rfloor + 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x) \tag{1.24}$$

donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. ∎

Solution 1.4. Soit $t > 0$, on a $\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-nt}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-nt}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} -\mathrm{e}^{nt} = 0$ (terme général d'une série à termes positifs convergente car $t > 0$).

On définit

$$\begin{array}{rccl}
g_+ : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\
& x & \mapsto & -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-xt}\right) \geqslant 0
\end{array}$$

On a $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_t(x)$. De plus, $g_t'(x) = -\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1-\mathrm{e}^{-xt}} \leqslant 0$. g_+ est décroissante, et on a

$$\int_n^{n+1} g_+(x)dx \leqslant g_+(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_+(x)dx \tag{1.25}$$

On somme de $n=1$ à $+\infty$ (on admet l'existence pour $n=0$). On obtient

$$-\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xt}\right) = \int_1^{+\infty} g_+(x)dx \leqslant -f(t) \leqslant \int_0^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xt}\right)dx \tag{1.26}$$

On pose $u = xt$ et $dx = \frac{du}{t}$ car $t > 0$. On a

$$\int_1^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xt}\right)dx = \frac{1}{t}\int_t^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{u}\right)du \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}I \tag{1.27}$$

et

$$\int_0^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xt}\right)dx = \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-u}\right)du = \frac{I}{t} \tag{1.28}$$

donc

$$\boxed{f(t) \underset{t\to+0^+}{\sim} -\frac{I}{t}} \tag{1.29}$$

■

Solution 1.5.

1. On a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{2}$ donc
$$\left|\frac{1}{2^p} f_n(x-a_p)\right| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}, \tag{1.30}$$
et $g_n(x)$ est définie. Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose
$$\begin{array}{rccc} F_p : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \frac{1}{2^p} f_n(x-a_p) \end{array}$$
On a $|F_p(n)| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}$ et pour p fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_p(n) = 0$. Donc $\sum_{p\geqslant 0} F_p$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. D'après le théorème d'interversion des limites, on a
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.} \tag{1.31}$$

2. S'il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_{p_0} \in [a,b]$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $a_{p_0} + \frac{1}{n}$ ou $a_{p_0} - \frac{1}{n} \in [a,b]$ et $g_n(a_{p_0} \pm \frac{1}{n}) \geqslant \frac{1}{2^{p_0+1}}$ (série à termes positifs).

Si pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p \notin [a,b]$, soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{p=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$0 \leqslant \sum_{p=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.32}$$

Notons $\alpha) \min_{\substack{0 \leqslant p \leqslant N_0 \\ x \in [a,b]}} |x - a_p| > 0$. Pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $p \in [\![0, N_0]\!]$, $|x - a_p| \geqslant \alpha$ et il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $\frac{1}{n} \leqslant \alpha$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $p \in [\![0, N_0]\!]$, $f_n(x - a_p) \leqslant f_n(\alpha)$ et

$$0 \leqslant \sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \leqslant \sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(\alpha) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{1.33}$$

Ainsi, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_2$, pour tout $x \in [a,b]$, $\sum_{p=0}^{N_0} \frac{1}{2^p} f_n(x - a_p) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, pour tout $x \in [a,b]$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \varepsilon$. D'où le résultat.

$\blacksquare$

Solution 1.6. f_n est définie car $\frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Soit $a > 0$. Sur $[-a,a]$, $|f_n(x)| \leqslant \frac{|a|}{n^2}$, terme général d'une série à termes positifs convergente. Il y a donc convergence normale sur $[-a,a]$, et f_n est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc f l'est aussi. Soit $g_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$. On a $g_n'(x) = -\frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$ et pour tout $x \in [-a,a]$, $|g_n'(x)| \leqslant \frac{2|a|}{n^4}$. Il y a à nouveau convergence normale sur $[-a,a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et donc $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$ et donc f aussi.

Sur $[-1,1]$, on peut intervertir les limites :

$$\boxed{\lim_{x \to 0} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to 0} f_n(x) = 0.} \tag{1.34}$$

Fixons $x > 0$, on pose $\psi_x(t) = \frac{x}{x^2+t^2}$. ψ_x est positive décroissante. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\int_n^{n+1} \psi_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \psi_x(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} \psi_x(t)\mathrm{d}t. \tag{1.35}$$

On a

$$\int_A^X \frac{x\mathrm{d}t}{x^2+t^2} = \int_A^X \frac{\frac{\mathrm{d}t}{x}}{1 + \left(\frac{t}{x}\right)^2} \xrightarrow[X \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{A}{x}\right). \tag{1.36}$$

Ainsi, en sommant pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_1^{+\infty} \psi_x(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_x(n) \leqslant \int_0^{+\infty} \psi_x(t)\mathrm{d}t. \tag{1.37}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

En 0, on a $f(x) = xg(x)$ avec convergence normale sur $\mathbb{R}$ pour g, g continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = \frac{\pi^2}{6}$. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\frac{\pi^2}{6}.} \tag{1.38}$$

■

Solution 1.7. Les f_n sont M-Lipschitziennes. Soient $x, y \in [a,b]$. On a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant M\,|x-y|$ donc par passage à la limite, f est M-Lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$, on considère la subdivision $(a_1, \ldots, a_N)$ de $[a,b]$ de pas δ. Soit $x \in [a,b]$ et $K \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $x \in [a_K, a_{K+1}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(a_K)| + |f_n(a_K) - f(a_K)| + |f(a_K) - f(x)| \leqslant M\delta + |f_n(a_k) - f(a_k)| + M\delta. \tag{1.39}$$

On s'impose $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $n \geqslant N_1$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. ■

Remarque 1.3. *L'existence de M est nécessaire, cf $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = x^n$.*

Remarque 1.4. *f n'est pas nécessairement dérivable, cf $f_n\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ et*

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}\right| \leqslant 1. \tag{1.40}$$

Solution 1.8. Si $x = 2$, on a

$$f_n(2) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{n}\right)^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \left[\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^1 = \ln(2). \tag{1.41}$$

Si $x < 2$, on a pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{1}{n}. \tag{1.42}$$

On somme pour obtenir

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant f_n(x) \leqslant 1 \tag{1.43}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 1.} \tag{1.44}$$

De plus, soit $a < 2$, pour tout $x \in]-\infty, a]$, on a

$$0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant 1 - \frac{n}{\sqrt{n + n^a}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{1.45}$$

Donc $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers 1 sur $]-\infty, a]$.

Si $x > 2$, soit $\alpha \in [0, 1]$, on a

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} + \sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor + 1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}. \tag{1.46}$$

On a

$$\sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{n^\alpha}{\sqrt{1 + n^2}} \underset{n \to +\infty}{\sim} n^{\alpha - 1}, \tag{1.47}$$

et

$$\sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor + 1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^{x\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^{x\alpha - 2}}}. \tag{1.48}$$

On choisit α tel que $\alpha < 1$ et $x\alpha - 2 > 0$ (possible car $x > 2$). Si $a > 2$, pour $\alpha = \left(1 + \frac{2}{a}\right) \times \frac{1}{2}$, si $x \geqslant a$, on a $\frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{a} < \alpha < 1$ donc

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + n^{\alpha x - 2}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0. \tag{1.49}$$

Il y a donc convergence uniforme vers 0 sur $[a, +\infty[$. ■

Solution 1.9.

1. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times [\![0,n]\!]$,

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \times n \times \dots \times n} \leqslant \frac{1}{k!}. \tag{1.50}$$

Ainsi,

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - f_n(a) \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} \right\|, \tag{1.51}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) \|a\|^k, \tag{1.52}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\|a\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|a\|}{n} \right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.53}$$

On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = \exp(a)$.

Soit $R \geqslant 0$, pour tout $a \in \overline{B(0,R)}$,

$$\|\exp(a) - f_n(a)\| \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right\| \tag{1.54}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) R^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.55}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\exp(a)$ sur les compacts.

2. D'après ce qui précède, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sin(z)$. Et on a convergence sur les compacts.

3. On peut déjà dire que $\deg(P_n) \leqslant 2n+1$. Le coefficient en X^{2n+1} de P_n est

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\mathrm{i}}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(\frac{-\mathrm{i}}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}} \times \frac{(-1)^n}{2\mathrm{i}}[\mathrm{i} - (-\mathrm{i})] \neq 0 \tag{1.56}$$

et donc $\deg(P_n) = 2n+1$.

Le coefficient en X est $\frac{(2+1)\left(\frac{\mathrm{i}}{2n+1} - \left(\frac{-\mathrm{i}}{2n+1}\right)\right)}{2\mathrm{i}} = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$P_n(z) = 0 \Longleftrightarrow \left(1 + \frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 - \frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)^{2n+1}, \tag{1.57}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!]\,,\ 1 - \frac{\mathrm{i}z}{2n+1} = \left(1 + \frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right) \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right), \tag{1.58}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!]\,,\ 1 - \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\left(1 + \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{1.59}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!]\,,\ z = (2n+1) \times (-\mathrm{i}) \times \frac{(-2\mathrm{i}) \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, \tag{1.60}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!]\,,\ = -(2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right). \tag{1.61}$$

On a

$$P_n = aX \times \prod_{k=1}^{2n} \left(X + (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{1.62}$$

$$= aX \prod_{k=1}^{n} \left(X + (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n} \left(X + (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{1.63}$$

$$= aX \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - (2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{1.64}$$

$$= a'X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right). \tag{1.65}$$

Comme le coefficient de X vaut 1, on a $a' = 1$, d'où le résultat.

4. Soit $f_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telle que $f(p) = a_{n,p}$. D'après (i), $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{N}$, et d'après (ii), on peut intervertir et $\lim\limits_{p \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$.

5. tan est impaire, et $\tan'' = 2\tan(1 + \tan^2) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc tan est convexe et $\tan(t) > t$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et c'est bon par imparité.

   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $\frac{x^2}{k^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{2}$, alors pour tout $n \geqslant k_0$, pour tout $k \in [\![k_0, n]\!]$, $1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \geqslant \frac{1}{2} > 0$. Alors

$$0 \leqslant -\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{3n+1}\right)}\right)\right) = \sum_{k=k_0}^{n} -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right). \tag{1.66}$$

On a

$$0 \leqslant -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \leqslant -\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \underset{k \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{1.67}$$

terme général d'une série à termes positifs convergente.

Si $g_n(x) = -\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{3n+1}\right)}\right)\right)$, alors $g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_{n,k}$ où l'on définit pour tout $k \geqslant k_0, n \geqslant k_0$,

$$a_{n,k} = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \tag{1.68}$$

si $k \leqslant n$, et 0 sinon. On pose aussi $\alpha_k = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. On a bien $|a_{n,k}| \leqslant \alpha_k$ terme général d'une série à termes positifs convergente.

Pour $k \geqslant k_0$ fixé, pour $n \geqslant k$, on a

$$a_{n,k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha_k. \tag{1.69}$$

On peut donc appliquer ce qui précède, et on a

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \alpha_k, \tag{1.70}$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=k_0}\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=k_0}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{1.71}$$

Soit $R_n(x) = x\prod_{k=1}^{k_0}\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x\prod_{k=1}^{k_0}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\sin(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).} \tag{1.72}$$

■

Solution 1.10.

1. Soit $\alpha \in [a, b]$. f est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. On a $f([0,1]) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) \geqslant x$. $(f_n(x))_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, donc converge vers $\frac{1}{2}$ seul point fixe de f (continue). Ainsi (f_n) converge simplement vers $\frac{1}{2}$ sur $[a, b]$.

Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - f_n(x) \leqslant \max\left(\frac{1}{2} - f_n(a), \frac{1}{2} - f_n(b)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.73}$$

Donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

On a $f_n(0) = f_n(1) = 0 \neq \frac{1}{2}$, on n'a donc pas la continuité de la limite simple. Donc il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0,1]$ (même sur $]0,1[$).

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Q_2 est dense dans $\mathbb{R}$, donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $(\alpha_{k,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_2^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n \alpha_{k,m} = a_k$. Soit $Q_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,m} X^k \in \mathbb{Q}_2[X]$. Pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$|P(x) - Q(x)| \leqslant \sum_{k=0}^n |a_k - \alpha_{k,m}|\, |x|^k \leqslant \sum_{k=0}^n |a_k - \alpha_{k,m}| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \tag{1.74}$$

donc il existe $M \in \mathbb{N}$, si $Q = Q_M$, alors $\|P - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Si $Q = \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{2^{n_k}} X^k$, soit pour $m \in \mathbb{N}$, $Q_m = \sum_{k=0}^n p_k (f_m)^{n_k} X^k$ converge uniformément vers Q sur $[a,b]$ (n est fixé), et $Q_m \in \mathbb{Z}[X]$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathbb{Z}[X]$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|Q_{n_0} - Q\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Si $A = Q_{n_0} \in \mathbb{Z}[X]$, on a bien $\|f - A\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$.

   Sur $[0,1]$, on n'a pas de suite de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f = \frac{1}{2}$ car pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(0) \in \mathbb{Z}$.

■

Solution 1.11.

1. Par croissance des taux d'accroissements (en un point fixé) :

$$\frac{u_n(y) - u_n(x)}{y - x} \leqslant \frac{u_n(y) - u_n(b)}{y - b} \leqslant \frac{u_n(\beta) - u_n(b)}{\beta - b}, \tag{1.75}$$

et de même

$$\frac{u_n(y) - u_n(x)}{y - x} \geqslant \frac{u_n(\alpha) - u_n(a)}{\alpha - a}. \tag{1.76}$$

Finalement, on a

$$\left|\frac{u_n(x) - u_(y)}{x - y}\right| \leqslant \max\left(\left|\frac{u_n(\alpha) - u_n(a)}{\alpha - a}\right|, \left|\frac{u_n(\beta) - u_n(b)}{\beta - b}\right|\right), \tag{1.77}$$

qui sont des suites bornées car convergent. D'où l'existence de A.

2. Par passage à la limite (simple), u est A-Lipschitzienne sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ une subdivision de pas d de $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, il existe $k \in [\![1, N-1]\!]$ tel que $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n(x) - u(x)| \leqslant |u_n(x) - u_n(a_k)| + |u_n(a_k) - u(a_k)| + |u(a_k) - u(x)|\,, \tag{1.78}$$
$$\leqslant 2Ad + |u_n(a_k) - u(a_k)|\,. \tag{1.79}$$

On choisit d tel que $2Ad \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par convergence simple, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $|u_n(a_k) - u(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant N_0$, pour tout $x \in [a,b]$, $|u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$. Donc (u_n) converge uniformément vers u sur $[a,b]$.

■

Remarque 1.5. *C'est faux si $I = [a,b]$, cf $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f_n(x) = x^n$.*

Solution 1.12. Soit $f \in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. Si φ est une fonction polynômiale, $\varphi = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$. Pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, (f_n^k) converge uniformément vers f^k sur $[a,b]$. Par combinaison linéaire, $(\varphi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi \circ f$ sur $[a,b]$. $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée (car converge), donc il existe $A \geqslant 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty \leqslant A$ et $\|f\|_\infty \leqslant A$.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ telle que $\|\varphi - P\|_{\infty,[-A,A]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ d'après le théorème de Weierstrass. Ainsi, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|(\varphi \circ f_n)(x) - (\varphi \circ f)(x)| \leqslant |(\varphi \circ f_n)(x) - (P \circ f_n)(x)| \tag{1.80}$$
$$+ |P \circ f_n(x) - P \circ f(x)| + |P \circ f(x) - \varphi \circ f(x)|\,, \tag{1.81}$$
$$\leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} + \|P \circ f_n - P \circ f\|_{\infty,[a,b]} \tag{1.82}$$

et le dernier terme tend vers 0 donc est plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$ pour n suffisamment grand. D'où le résultat.

■

Remarque 1.6. *Pour la deuxième partie du raisonnement, on peut aussi invoquer la continuité uniforme de φ sur $[-A,A]$.*

Table des figures