

*Solutions Exercices MP/MP**

Table des matières

1	Séries numériques et familles sommables	2
----------	--	----------

1 Séries numériques et familles sommables

Solution 1.1.

1. On a $b_0 = a_1 = 5, b_1 = a_3 = 13$ et pour $p \geq 2, b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$.

On a donc l'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les deux solutions sont 3 et -1.

Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$.

On a alors $b_0 = 5 = \lambda + \mu$ et $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$. On trouve alors

$$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}}$$

2. On le montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

3. Si $3^p \leq n < 3^{p+1}$, on a $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$. Alors

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leq \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p}$$

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$$

Soit $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{p_n} \leq \sigma(n) < 3^{p_n+1}$. On a

$$p_n = \lfloor \log_3(\sigma(n)) \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

En reportant, on a $\frac{3}{2} \leq \lambda \leq \frac{9}{2}$.

Si $\sigma(n) = 3^n$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2}$$

Si $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$$

Soit $\mu \in [1, 3[$ et $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n \mu$. Alors

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2\mu}$$

Donc tout réel compris dans $\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right]$ est valeur d'adhérence.

Solution 1.2.

1.

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - x \end{aligned}$$

est continue, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $l \in [a, b]$ avec $g(l) = 0$, d'où

$$\boxed{f(l) = l}$$

2. On note $A = \{\lambda \mid \lambda \text{ est valeur d'adhérence}\}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que A est non vide. De plus, A est borné car $A \subset [a, b]$. Soit $\lambda = \inf(A)$ et $\mu = \sup(A)$.

Si $\lambda = b$, on a $\mu = b$ et $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$.

Si $\lambda < b$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \notin A$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in]\lambda, \lambda + \varepsilon[\}$ est infini. Par définition, λ est valeur d'adhérence. Donc $\lambda \in A$, et de même $\mu \in A$.

Soit $\nu \in]\lambda, \mu[$ avec $\lambda < \mu$. Si $\nu \notin A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$ est fini. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $x_n \notin]\nu - \varepsilon_0, \nu + \varepsilon_0[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0$. Soit alors $n \geq \max(N_0, N_1)$. Si $x_n \leq \nu - \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \leq \nu - \varepsilon_0$. Si $x_n \geq \nu + \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \geq \nu + \varepsilon_0$. Ceci contredit que λ et μ sont valeur d'adhérence.

Ainsi, $\nu \in A$ et

$$\boxed{[\lambda, \mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}}$$

3. Si (x_n) converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Réciproquement, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, d'après 2., on a $A = [\lambda, \mu]$. On suppose $\lambda < \nu$. Ainsi, $\frac{\lambda + \nu}{2} = \alpha$ est valeur d'adhérence. Donc il existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$ par continuité de f et c'est aussi égale à $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Ainsi,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha}$$

Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda, \mu]$ et $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$, alors pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n = x_{n_0}$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lambda = \mu : (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et a une

unique valeur d'adhérence.

Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Solution 1.3. On a $u_n = e^{i2^n \theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ car $l = l^2$ et $|l| = 1$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique au-delà d'un certain rang, il existe $T \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_{n+T} = u_n$. En particulier, $u_{N_0+T} = u_{N_0}$. On veut alors $2^{N_0+T} \theta \equiv 2^{N_0} \theta [2\pi]$. D'où $2^{N_0+T} \theta = 2\theta + 2k\pi$ donc $2^{N_0}(2^T - 1)\theta = 2k\pi$. Donc $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $U_{n+1} = U_n = U_{n^2}$. Comme $|U_n| = 1$, alors $2^n \theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $\frac{\theta}{2\pi}$ est dyadique.

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$ (nombre dyadique). Alors pour tout $n \geq n_0$, $2^n \theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $u_n = u_{n_0} = 1$.

Pour la densité, on prend une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en écrivant successivement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous les paquets de k entiers sont dans $\{0, 1\}^k$. Soit $x \in [0, 1[$ tel que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $p_N \in \mathbb{N}$,

$$2^{p_N} \theta = 2\pi \underbrace{(\dots)}_{\in \mathbb{N}} + 2\pi \left(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in [0, \frac{1}{2^N}[} \right)$$

On a alors

$$e^{i2^{p_N} \theta} = e^{i2\pi \left(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \dots \right)}$$

et

$$\left| \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} - x \right| \leq \frac{1}{2^N}$$

D'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_{p_N} = e^{i2\pi x}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans \mathbb{U} .

Solution 1.4. Si $a = 0$ et $b = 0$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou inversement), $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $a > 0$ ou $b > 0$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{e^{\frac{1}{n} \ln(a)} + e^{\frac{1}{n} \ln(b)}}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{2n} \ln(ab) + \frac{1}{4n^2} (\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{n}{2} \ln(ab) + \frac{1}{4} (\ln(a)^2 + \ln(b)^2 + o(1))\right) \end{aligned}$$

Si $ab > 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

Si $ab < 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Si $ab = 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{\frac{1}{2} \ln(a)^2}}$$

Solution 1.5.

1. Soit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 0$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$).

$$J = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid x_k \geq \frac{M}{2} \right\}$$

est fini car $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et est non vide. On définit

$$\varphi(0) = \min \left\{ k \in J \mid x_k = \max\{x_n \mid n \in J\} \right\}$$

Pour tout $n \in J$, $x_{\varphi(0)} \geq x_n$. Si $n \notin J$, $x_n \leq \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$. Ainsi,

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

Puis on recommence avec

$$\left\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\} \right\}$$

2. Pour $l = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_N < \varepsilon$. On pose

$$I = \{N\}$$

et on a bien

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leq \varepsilon$$

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^N x_k > A$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$).

Donc on peut prendre

$$I = \{0, \dots, N\}$$

Si $l \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < l$. Il existe

$N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on a $x_n < \varepsilon$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$. Donc il existe un plus petit entier N_1 tel que $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geq l - \varepsilon$. Comme $x_{N_1} < \varepsilon$, on a $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leq l + \varepsilon$.

Donc

$$I = \{N_0, \dots, N_1\}$$

Solution 1.6. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$$

Montrons que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. D'abord, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$.

Si $l < +\infty$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}$ et donc $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l^2}$ et la série diverge. Donc $l = +\infty$ et comme

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On observe ensuite que $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$ donc $S_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$. Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{= (S_n - S_{n-1}) S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{= S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$$

On applique le théorème de Césaro à la suite $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$$

donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$, et comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a bien

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Réciproquement, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ avec $u_0 = 1$. On a

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}}$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}}$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1}$$

Remarque 1.1. On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha}$$

Solution 1.7. Tout d'abord, on montre que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$$

en posant

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$ et on a $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geq 0$ et $f'(0) = 0$. Comme $f(0) = 0$, on a pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$.

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur f , on a

$$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t \in [0, 1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leq \cosh(1)} \leq x^4$$

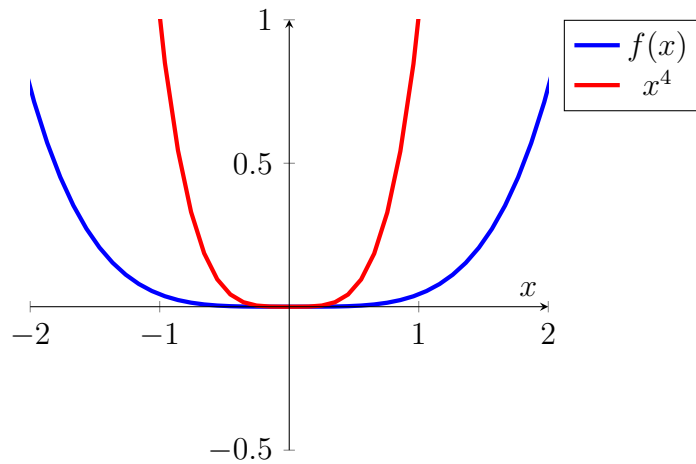


FIGURE 1 $1 - 0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^n \left[\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - 1 \right]$$

Ainsi,

$$0 \leq x_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}$$

Solution 1.8. φ est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$.

On a

$$0\varphi(a_n) \leq \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(a_n) = 0$$

Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| > \varepsilon$.

Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geq \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0$$

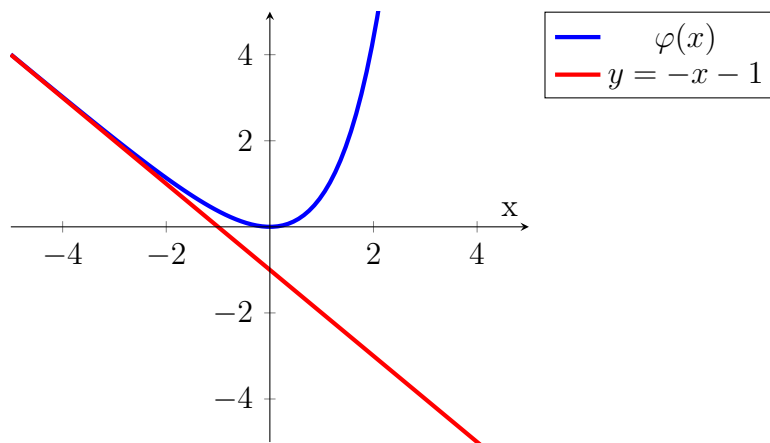


FIGURE 2 – $e^x - x - 1 \geq -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ce qui contredit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(a_n) = 0$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

et c'est pareil pour b_n et c_n .

Solution 1.9.

1. Soit

$$\begin{aligned} f :]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(1 - x) \end{aligned}$$

On a $f(x) \in]0, \frac{1}{4}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \frac{1}{4}]$. Par récurrence, on a donc $u_{n+1} \leq u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Donc v_n est bien définie.

2. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{u_n} (1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1)$$

Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. D'après le théorème de Césaro, on a

$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

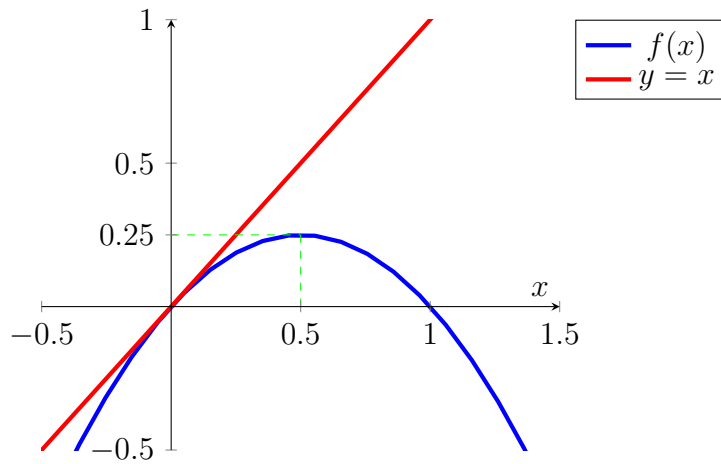


FIGURE 3 – $x(1-x) \in]0, \frac{1}{4}]$ pour $x \in]0, 1[$.

On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} (1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{= o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. En sommant, on a donc

$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o(\ln(n))$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n + \ln(n) + o(\ln(n))} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \alpha_n} \end{aligned}$$

α_n est le terme général d'une série à termes positifs convergentes car $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Donc

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et en sommant,

$$v_n = n + \ln(n) + O(1)$$

et comme montré auparavant,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

Solution 1.10.

1. Soit

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n - x - n \end{aligned}$$

On a $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 = 0$ si et seulement si

$$x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n$$

$f_n(0) = -n < 0$ et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. f_n est monotone strictement sur $]\alpha_n, +\infty[$.

Donc il existe une unique $x_n \in \mathbb{R}^+$ tel que $f_n(x_n) = 0$

On a $f_n(1) = -n < 0$ donc $x_n > 1$ et $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ pour $n \geq 3$ (on a $x_2 = 2$).

Donc pour $n \geq 3$, $x_n \in]1, 2[$.

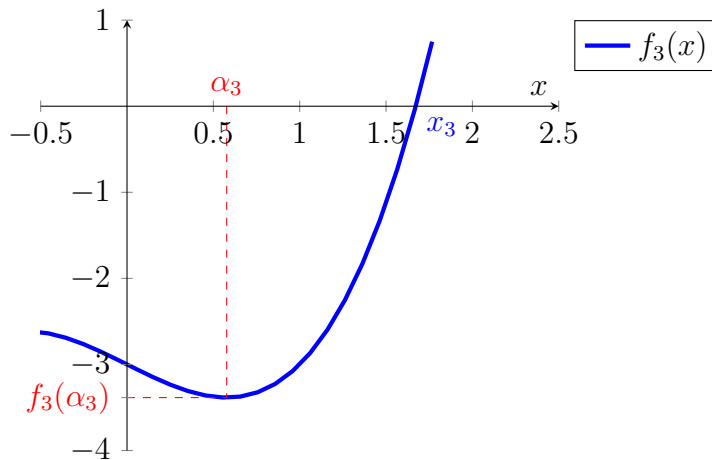


FIGURE 4 — $x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur \mathbb{R}_+ .

2. On a $x_n^n = x_n + n \leq 2 + n$ donc

$$1 \leq x_n \leq (2 + n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(2+n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1}$$

3. On peut poser $x_n = 1 + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. On a

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n$$

donc

$$n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(1 + \varepsilon_n + n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1 + \varepsilon_n}{n}\right)}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

On a enfin

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n = 1 + n + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \ln(1 + \varepsilon_n) &= \frac{1}{n} \ln\left(n + 1 + \frac{\ln(n)}{n}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \right] \\ &= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc

$$1 + \varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)}$$

Solution 1.11. *On note*

$$v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a$ alors $v_n = a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. De manière générale, on a

$$v_n - a = v_n - a \frac{u_n + \cdots + u_0}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}(a_k - a)}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Ainsi,

$$|u_n - a| \leq \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k} |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, on note $M = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k - a|$. Soit $n \geq N$, on a

$$\begin{aligned} |v_n - a| &\leq \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k} |a_k - a| + \sum_{k=N}^n |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \\ &\leq \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k M}{u_0 + \cdots + u_n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N}^n u_{n-k} \frac{\varepsilon}{2}}{u_0 + \cdots + u_n}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

car les u_i sont positifs.

On remarque enfin que

$$\begin{aligned} u_n &= o(u_0 + \cdots + u_n) \\ u_{n-1} &= o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\ &\vdots \\ u_{n-N+1} &= o(u_0 + \cdots + u_n) \end{aligned}$$

Donc

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc pour tout $n \geq \max(N, N')$, on a $|v_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et ainsi

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a}$$

Solution 1.12.

1. Pour $n \geq 2$, (iii) donne

$$x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

Ainsi,

$$0 \leq x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_n}{n!} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}$$

où l'inégalité est stricte d'après (ii). Pour $n \geq 2$, on a

$$x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2!}$$

donc

$$0 \leq 2x - \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Donc $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$. On a ensuite

$$0 \leq n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

donc

$$a_n = \left\lfloor n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \right\rfloor$$

On a donc bien unicité.

Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus. On a, pour tout $n \geq 2$, on a

$$0 \leq n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Or

$$0 - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

donc

$$a_n \in \{0, \dots, n-1\}$$

et (i) est vérifié.

On a

$$0 \leq x - \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k!} < \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc (iii) est vérifié, et supposons qu'il existe $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $m \geq n_0 + 1$, on a $a_m = m - 1$. Alors

$$x = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!}$$

et

$$x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n_0!}$$

donc

$$n_0! \left(x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} \right) = 1$$

et

$$n_0! \left(x - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_{n_0-1}}{(n_0-1)!} \right) - a_{n_0} = 1$$

En prenant la partie entière, on a donc $0 = 1$ ce qui est absurde.

Donc (ii) est vérifié.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n = 0$ alors $x \in \mathbb{Q}$.

Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a

$$x = \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n!}$$

si et seulement si

$$a_n = n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

si et seulement si

$$n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \in \mathbb{N}$$

ce qui est vrai dès que $n \geq q$. Donc pour tout $n > q$, on a $a_n = 0$ par unicité.

3. Soit $l \in [-1, 1]$. Soit $x \in [0, 1[$ avec

$$x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

On a alors

$$n!2\pi x = \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \underbrace{\sum_{k \geq n+2} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{= \varepsilon_n}$$

On a

$$0 \leq \varepsilon_n < \frac{2\pi n!}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc

$$\sin(n!2\pi x) = \sin\left(\frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \varepsilon_n\right)$$

et il suffit d'avoir, comme $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin(l)}{2\pi} \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

On pose alors

$$a_n = \left\lfloor \frac{n \arcsin(l)}{2\pi} \right\rfloor$$

pour $n \geq 2$ et on a $0 \leq a_n \leq \frac{n}{4} < n-1$ pour tout $n \geq 2$. On a donc le résultat.

Remarque 1.2. Il n'y a pas unicité. Par exemple, pour $l = 0$, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ convient. Plus généralement, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \geq q$, on a

$$\sin\left(n!2\pi\left(x + \frac{p}{q}\right)\right) = \sin(n!2\pi x)$$

Solution 1.13. Par récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 \ln(1+x) - x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 \ln(1+x) \end{aligned}$$

g est dérivable est

$$g'(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

donc g est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $l \in]0, +\infty[$ tel que $g(l) = 0$ d'où $f(l) = l$.

Pour tout $x \in]0, l]$, on a $x \leq f(x) \leq l$ et pour tout $x > l$, on a $l \leq f(x) \leq x$.

Soit $n \geq 1$. Si $u_n \geq l$ et $u_{n-1} \geq l$, on a $m_n = l$ et $M_n \in \{u_n, u_{n-1}\}$. Il vient donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(f(u_n) + f(u_{n-1})) \geq f(l) = l$$

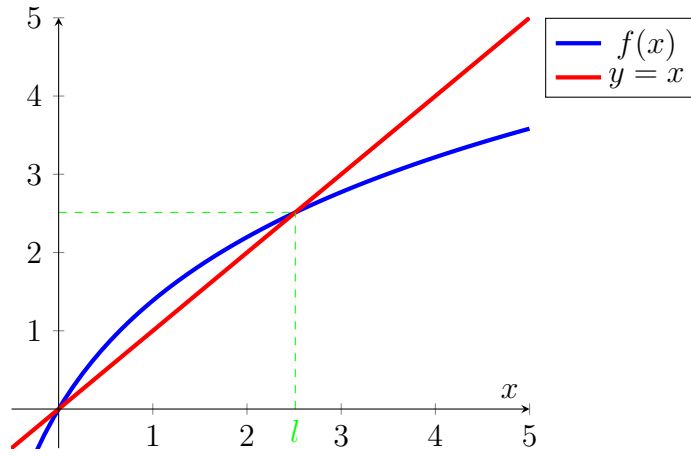


FIGURE 5 – $x \mapsto 2 \ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur \mathbb{R}_+^* .

et

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \leq M_n$$

Donc $m_{n+1} = l = m_n$ et $M_{n+1} \leq M_n$.

Par récurrence, on a pour tout $k \geq n$, $u_k \geq l$ et $(M_k)_{k \geq n}$ converge vers $\lambda \geq l$ (car décroissante et plus grande que l) et $m_k = l$ pour tout $k \geq n$.

De plus pour tout $k \geq n$, on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(f(u_k) + f(u_{k-1})) \leq f(M_k)$$

car f est croissante et donc

$$u_{k+2} \leq f(M_{k+1}) \leq f(M_k)$$

Par passage à la limite, on a $\lambda \leq f(\lambda)$ donc $\lambda = f(\lambda)$ et donc $\lambda = l$. Or pour tout $k \geq n$, on a

$$\underbrace{m_k}_{=l} \leq u_k \leq M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$$

donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l}$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0-1} \geq l$ et $u_{n_0} \geq l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Or même s'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_1-1} \leq l$ et $u_{n_1} \leq l$, alors on inverse les rôles de M_{n_1} et m_{n_1} .

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n - l)(u_{n+1} - l) \leq 0$$

Supposons par exemple $u_0 \geq l$ et $u_1 \leq l$. Alors

$$0 \leq u_2 - l \leq \frac{u_0 - l}{2}$$

et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_{2k} - l \leq \frac{u_0 - l}{2^k}$. Donc $u_{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$ et de même $u_{2k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$ (par valeurs inférieures). Donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l}$$

Solution 1.14. Soit $(\theta, \theta') \in [2, 2\pi[{}^2$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{ipx_n} = e^{i\theta}$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{iqx_n} = e^{i\theta'}$$

Soient x, x' deux valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ distinctes. On a

$$\begin{cases} e^{ipx} = e^{i\theta} = e^{ipx'} \\ e^{iqx} = e^{i\theta'} = e^{iqx'} \end{cases}$$

Il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} px = px' + 2k\pi \\ qx = qx' + 2k'\pi \end{cases}$$

et donc $p(x - x') = 2k\pi$ et $q(x - x') = 2k'\pi$ et alors $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence. Comme elle est bornée,

$$\boxed{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut prendre

$$\boxed{x_n = n!}$$

On a

$$e^{2i\pi n!} = 1$$

et

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}}_{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0}$$

Si on veut x_n divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut prendre

$$\boxed{x_n = (-1)^n n!}$$

Solution 1.15.

1. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \boxed{\frac{n^k}{k!}}$$

2. On a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right| &\leq \sum_{k=0}^n |z|^k \underbrace{\left| \frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right|}_{\geq 0} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \frac{|z|^k}{n^k} \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

3. On sait que

$$\sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e^{|z|}$$

et

$$\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{|z|}{n})} = e^{n(\frac{|z|}{n} + o(\frac{|z|}{n}))} = e^{|z|} e^{o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{|z|}$$

En reportant dans la question précédente, on a donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z}$$

Remarque 1.3. Une autre méthode est d'écrire, pour $z = a + ib$,

$$1 + \frac{z + ib}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n} = \rho_n e^{i\theta_n}$$

. On a alors

$$\left| 1 + \frac{a + ib}{n} \right| = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}} = \rho_n$$

et alors

$$\begin{aligned} \rho_n^n &= \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right|^n \\ &= e^{\frac{n}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2} \right)} \\ &= e^{\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \\ &= e^{a+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a = |e^z| \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$1 + \frac{a + ib}{n} = \rho_n \left(\underbrace{\frac{1 + \frac{a}{n}}{\rho_n}}_{= \cos(\theta_n)} + i \underbrace{\frac{b}{n\rho_n}}_{= \sin(\theta_n)} \right)$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n\rho_n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{a}{n}}{\rho_n} = 1$$

On peut imposer $\theta_n \in] -\pi, \pi]$ et il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\cos(\theta_n) \geq 0$. Pour $n \geq N$, on a alors $\theta_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc

$$\theta_n = \arcsin \left(\frac{b}{n\rho_n} \right)$$

et $n\theta_n = n \arcsin \left(\frac{b}{n\rho_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b$. Finalement, on a bien

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \rho_n^n e^{i\theta_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a e^{ib} = e^z$$

Solution 1.16. Pour tout $n \geq 2$, $u_n > 0$. On a

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}}_{<1} u_n$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc converge. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n \underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}_{= v_k} < 0$$

Ensuite,

$$v_k = -\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{k}}$$

Comme $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

On a ensuite

$$u_n = \exp\left(\sum_{k=2}^n \left[\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right]\right)$$

et

$$\ln\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Donc

$$v_k = -\frac{2}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Le terme dans le O est le terme générale d'une série absolument convergent donc convergent, on note ce terme α_k . On a alors

$$\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{2}{\sqrt{k}} + \alpha_k\right) = -2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k}_{=C} + o(1)$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \int_2^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Posons

$$w_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

On étudie la série de terme général $w_n - w_{n-1}$. On a

$$\begin{aligned}
 w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\
 &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)
 \end{aligned}$$

Donc la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ converge et ainsi $(w_n)_{n \geq 2}$ converge : il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + C' + o(1)$$

On a donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n v_k = -4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)$$

Ainsi,

$$u_n = \exp(-4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K e^{-4\sqrt{n}}$$

où $K = e^{-2C'+C} > 0$.

Donc

$$u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K^\alpha e^{-4\alpha\sqrt{n}}$$

Si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha \not\rightarrow 0$ donc

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ diverge.}}$$

Si $\alpha > 0$, $u_n^\alpha = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ converge.}}$$

Solution 1.17. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a

$$u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \geq nu_{2n} \geq 0$$

Si (S_n) converge alors $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_{2n} = 0$.

Comme on a $(2n+1)u_{2n} \geq (2n+1)u_{2n+1} \geq 0$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n} = 0$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0 \text{ et donc } u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Si $\{p \in \mathbb{N} | pu_p \geq 1\}$ est infini, alors $u_p \neq o\left(\frac{1}{p}\right)$ donc

$$\boxed{\sum u_p \text{ diverge.}}$$

Remarque 1.4. Ce n'est pas vrai si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, par exemple si $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré et 0 sinon.

Solution 1.18. 1. C'est une série à termes positifs. On a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

2. C'est une série à termes positifs. On a

$$u_n \geq \int_1^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(1) dt = \frac{\sin(1)}{n+1} \times \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

3. On écrit

$$\frac{n!}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (-1)^k}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k$$

et

$$\left| \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k \right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

d'après le critère spécial des séries alternées.

Donc

$$\begin{aligned} \sin \left(2\pi \frac{n!}{e} \right) &= \sin \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O \left(\frac{1}{n^2} \right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

4. Si $\alpha \leq 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ et comme $\frac{1}{n} = O \left(\frac{1}{\ln(n)} \right)$,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

Si $\alpha > 1$, $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge.}}$$

Si $\alpha \in]0, 1]$, on écrit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \underbrace{(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}}_{\substack{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left(1 - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha} + o \left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha} \right) \right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o \left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} \right)}_{\substack{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} < 0 \\ \text{terme général} \\ \text{d'une série convergente} \\ \text{ssi } \alpha > \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

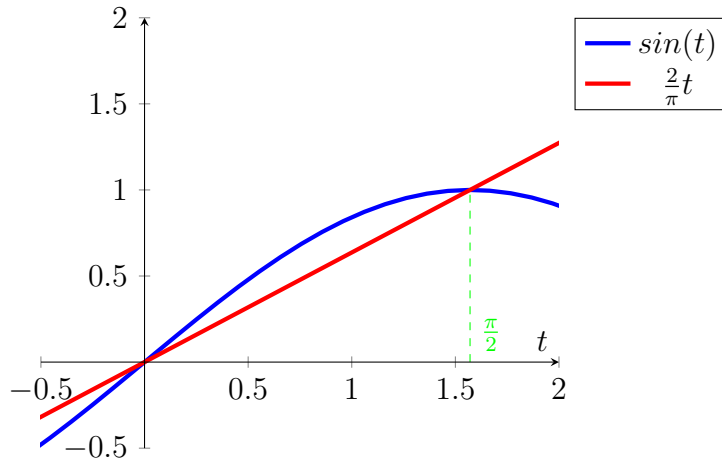


FIGURE 6 – $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Remarque 1.5. Soit $\alpha \in [0, 1]$ et

$$u_n = \int_0^\alpha t^n \sin(t) dt \geq 0$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \leq \alpha^{n+1}$, terme général d'une série convergente donc $\sum u_n$ converge.

Si $\alpha = 1$, on utilise

$$\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$$

Alors $u_n \geq \frac{2}{\pi(n+2)}$, terme générale d'une série divergente donc $\sum u_n$ diverge.

Solution 1.19.

On a

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

u_n est le reste d'ordre n d'une série alternée, donc u_n est du signe de $\frac{(-1)^n}{n}$. Donc on a

$$u_{n+1} \times u_n \leq 0$$

Par ailleurs,

$$|u_n| = \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{= \frac{1}{n(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{= \frac{1}{(n+2)(n+3)}} + \cdots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)}$$

Donc $(|u_n|)_{n \geq 1}$ est décroissante.

D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Pour calculer la somme, on peut chercher si la famille $(u_{n,p})_{\substack{n \geq 1 \\ p \in \mathbb{N}}}$ est sommable où

$$u_{n,p} = \frac{(-1)^n}{(n+2p)(n+2p+1)}$$

Soit $p \geq 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p} - \frac{1}{n+2p+1} \right) = \frac{1}{2p+1}$$

Donc

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n \geq 1} |u_{n,p}| = +\infty$$

Ainsi, cette famille n'est pas sommable. Essayons plutôt de calculer u_n d'abord : soit $n \geq 1$ fixé et

$N \geq n$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=n}^N (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= - \sum_{k=n}^N \int_0^1 (-t)^{k-1} dt \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=n}^N (-t)^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 (-t)^n \frac{1 - (-t)^{N-n+1}}{1+t} dt \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k} = - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{1}{N+2}$$

Donc

$$u_n = - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

Soit alors $M \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M u_n &= \sum_{n=1}^M \left(- \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right) \\ &= - \int_0^1 \frac{1}{1+t} \sum_{n=1}^M (-t)^n dt \\ &= - \int_0^1 \frac{-t}{1+t} \frac{1 - (-t)^{M+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \end{aligned}$$

Comme

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{M+1} dt = \frac{1}{M+2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t+1) - 1}{(1+t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt \\ &= [\ln(1+t)]_0^1 + \left[\frac{1}{2} - 1 \right] \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{(3n)!} = \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Posons

$$\begin{cases} S_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \\ S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \\ S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!} \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 &= e \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 &= \exp(j) \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 &= \exp(j^2) \end{cases}$$

où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. En sommant les trois lignes, on a

$$3S_0 = e + \exp(j) + \exp(j^2) = e + e^{-\frac{1}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3} \left(e + e^{-\frac{1}{2}} \left(2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) \right)}$$

S'il existe $p \geq 0$ tel que $n = p^3$, alors

$$\left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p$$

et

$$\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor (p^3-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p-1$$

Sinon, $n^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{N}$. Soit $k = \left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$. Alors $k^3 < n \leq (k+1)^3$ donc $k^3 \leq n-1 < (k+1)^3$ d'où $k \leq (n-1)^{\frac{1}{3}} < k+1$. Donc $\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = k$.

Donc $\sum u_n$ est une série lacunaire. Comme $u_{p^3} = O\left(\frac{1}{p^3}\right)$, d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^3 - p}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x(4x^2 - 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{2x + 1}$$

Donc la somme partielle jusqu'au rang n vaut

$$\begin{aligned}
S_n &= - \underbrace{\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}_{= H_n} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p+1} \\
&= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \\
&= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2 \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k}}_{= H_{2n-1}} - 1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2}H_{n-1}} \right) \\
&= -H_n + 2H_{2n-1} - H_{n-1} - 1 + \frac{1}{2n+1} \\
&= -\ln(n) + 2\ln(2n-1) - \ln(n-1) - 1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{= o(1)} + o(1) \\
&= \ln \left(\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)} \right) - 1 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(4) - 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(4) - 1}$$

Solution 1.20. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$a - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \leq a + \varepsilon$$

Alors

$$(a - \varepsilon)f(x) \leq f'(x) \leq (a + \varepsilon)f(x)$$

On voit donc que

$$f'(x) - f(x)(a + \varepsilon) \leq 0$$

On pose alors (sorte d'inéquation différentielle)

$$g_1(x) = f(x)e^{-(a+\varepsilon)x}$$

On a

$$g_1'(x) = e^{-(a+\varepsilon)x} (f'(x) - f(x)(a + \varepsilon)) \leq 0$$

pour tout $x \geq A$. Donc g_1 est décroissante sur $[A, +\infty[$. Alors

$$0 < g_1(x) \leq g_1(A) = f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}$$

Alors

$$0 < f(x) \leq (f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a+\varepsilon)x}$$

De même, pour $x \geq A$,

$$(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a-\varepsilon)x} \leq f(x)$$

car $g_2(x) = f(x)e^{-(a-\varepsilon)x}$ est croissante sur $[A, +\infty[$.

Donc

$$f(n) \leq (f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a+\varepsilon)n}$$

Comme $a + \varepsilon < 0$,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge.}}$$

De plus

$$f(A)e^{-(a-\varepsilon)A} \frac{e^{(a-\varepsilon)N}}{1 - e^{a-\varepsilon}} \leq R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leq f(A)e^{-(a+\varepsilon)A} \frac{e^{(a+\varepsilon)N}}{1 + e^{a+\varepsilon}}$$

Donc

$$\boxed{R_N = O_{n \rightarrow +\infty}(e^{aN}) \text{ et } e^{aN} = O_{n \rightarrow +\infty}(R_N)}$$

Solution 1.21. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{e^k}{k}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On utilise la règle d'Abel : on écrit $e^k = B_k - B_{k-1}$ avec

$$\begin{cases} B_k = \sum_{j=0}^k e^j = \frac{e^{k+1}-1}{e-1} \\ B_{-1} = 0 \end{cases}$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k+1} = -1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{k(k+1)}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{k+1}}{(e-1)k^2}} + \underbrace{\frac{B_n}{n}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n e}{n(e-1)}}$$

$$= \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(S_n)$$

Donc

$$\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{n(e-1)}}$$

Solution 1.22.

1. $u_n > 0$ et

$$u_n = e^{n^\alpha \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{n^\alpha(-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))} = e^{-n^{\alpha-1}} + O(n^{\alpha-2})$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Si $\alpha = 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n^{\alpha-1}$$

donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-1}) \leq \frac{-n^{\alpha-1}}{2}$$

d'où

$$u_n \leq e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

2. On a $u_n > 0$ et

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{k} \ln(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$$

donc par comparaison des sommes partielles, on a

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

3. On écrit $n!e = [n!e] + \alpha_n$. Alors

$$\sin(n!\pi e) = (-1)^{[n!e]} \sin(\alpha_n \pi)$$

On écrit

$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$$

On pose $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{n \times n!}$. On a

$$v_n \leq e \leq w_n$$

donc

$$0 \leq e - v_n \leq \frac{1}{n \times n!}$$

d'où

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \frac{n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc

$$n!e\pi = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} \pi}_{\text{pair}} + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement, a

$$\frac{\sin(n!e\pi)}{\ln(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln(n)} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\ln(n)(n+1)}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Solution 1.23.

1. On a

$$u_n = (a+b+c) \ln(n) + b \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = (a+b+c) \ln(n) + \frac{b+2c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } a = b \text{ et } b = -2c \text{ avec } c \in \mathbb{R}}$$

Prenons $c = 1$ pour calculer la somme. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) - \ln(n+1) \\ &= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) \\ &= \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)}$$

2. On a $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

On écrit

$$u_n = \frac{2^n (3^{2^{n-1}} - 1)}{(3^{2^{-1}} + 1)(3^{2^n} - 1)} = \frac{2^n (3^{2^{n-1}} + 1 - 2)}{3^{2^n} - 1} = \underbrace{\frac{2^n}{3^{2^{n-1}} - 1}}_{= v_n} - \underbrace{\frac{2^{n+1}}{3^{2^n} - 1}}_{= v_{n+1}}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 = 1}$$

3. On remarque que $k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ est le reste de la division euclidienne de k par n . Donc ce reste est borné par $k - 1$. Donc $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. D'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

On note alors

$$J_r = \{n \in \mathbb{N}^* | n \equiv r[k]\}$$

$(J_r)_{r \in \{0, \dots, k-1\}}$ forme une partition de \mathbb{N}^* . On a

$$\sum_{n \in J_r} \frac{r}{n(n+1)} = 0$$

si $r = 0$. Si $r \in \{1, \dots, k-1\}$, on a

$$S_r = r \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)}$$

et par sommabilité on a

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n - k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n(n+1)} = \sum_{r=1}^{k-1} S_r = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On a

$$\begin{aligned} v_p &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{(kp+r)(kp+r+1)} \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r+1} \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=2}^k \frac{r-1}{kp+r} \\ &= \frac{1}{kp+1} + \sum_{r=2}^{k-1} \frac{1}{kp+r} - \frac{k-1}{k(p+1)} \\ &= \sum_{r=1}^k \frac{1}{kp+r} - \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^N v_p = \sum_{n=1}^{k(N+1)} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln \left(\frac{k(N+1)}{N+1} \right) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (1) = \ln(k) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (1)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(k)}$$

Solution 1.24. On a

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = u_1 - n u_{n+1} + \sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1}$$

Si $(n u_n)_{n \geq 1}$, on a donc évidemment d'après ce qui précède

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

Si $(u_n)_{n \geq 1}$ décroît, $v_n \geq 0$ et on a

$$\frac{v_k}{k} = u_k - u_{k+1}$$

et donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k,n}$$

en définissant $w_{n,k} = \frac{v_k}{k}$ si $k \geq n$ et 0 sinon. On a $w_{k,n} \geq 0$ car $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sommable si et seulement si $(w_{n,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ si et seulement si (d'après le théorème de Fubini)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{\sum_{n=1}^k \frac{v_k}{k} = v_k} < +\infty$$

Et dans ce cas (toujours d'après le théorème de Fubini),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= u_n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= v_k} < +\infty$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)}$$

et

$$v_n = \frac{1}{(n+1) \dots (n+p)} - \frac{n}{(n+1) \dots (n+p+1)} = \frac{p+1}{(n+1) \dots (n+p+1)}$$

Soit

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)} = (p+1) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)} = (p+1) \left(S_p - \frac{1}{p!} \right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)}} = \frac{p+1}{p(p!)}$$

Solution 1.25. Montrons d'une manière générale que si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ est telle que $u_k = o_{k \rightarrow +\infty}(u_{k+1})$, alors $\sum u_k$ diverge et $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

En effet, on a alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = +\infty$ et d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_k$ diverge. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$0 \leq \frac{u_k}{u_{k+1}} \leq \varepsilon$$

Soit $n \geq N$. Pour $k \geq N+1$, on a

$$u_k \leq \varepsilon u_{k+1} \leq \dots \leq \varepsilon^{n-k} u_n$$

pour $k \leq n-1$.

Alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} u_k \leq (\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-N-1} u_n)$$

On peut supposer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ et alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_n \leq 2\varepsilon u_n$$

Donc on a bien le résultat voulu.

Pour revenir à l'exercice, on a alors

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+q)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^q}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente. Donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

Solution 1.26. On a

$$\left| \frac{z^{nb}}{z^{na+c} + 1} \right| = \frac{|z|^{nb}}{|1 + z^{na+c}|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|^{nb}$$

car $|z| < 1$. $|z|^{nb}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour n fini, on a

$$\frac{1}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z^{na+c})^k$$

Montrons donc que $\left(z^{nb} \left((-z^{na+c})^k \right) \right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^{nb} |z|^{k(na+c)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{nb}}{1 - |z|^{na+c}} < +\infty$$

d'après ce qui précède. On a sommabilité, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{nb} (-z^{na+c})^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{ck} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n(b+ak)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1 - z^{b+ak}} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1 - z^{b+ak}}}$$

Solution 1.27. On a

$$b_q = \sum_{n=1}^q u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q}$$

Montrons donc que la famille des $(u_{n,q})_{(n,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} |u_{n,q}| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=n}^{+\infty} \frac{n|a_n|}{q(q+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| \left(\sum_{q=n}^{+\infty} \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \end{aligned}$$

Donc le théorème de Fubini s'applique et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Donc

$$\boxed{\sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

Solution 1.28. D'après l'exercice précédent, $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

On applique l'inégalité de la moyenne géométrique et arithmétique à $(u_1, 2u_2, \dots, nu_n)$:

$$\sqrt[n]{u_1 \times 2u_2 \times \dots \times nu_n} = w_n \sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n} (u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n) = (n+1)v_n$$

Donc on a

$$w_n \leq \frac{(n+1)v_n}{\sqrt[n]{n!}}$$

On étudie donc $\sqrt[n]{n!}$:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n!} &= \exp \left(\frac{1}{n} \ln(n!) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{n} \ln \left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(\frac{1}{n} \left(n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(\pi n) + \ln \left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \right) \right) \\ &= n \exp \left(-1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e} \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Ainsi, $w_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}}$$

Montrons que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq e$$

Cela équivaut à $(n+1)^n \leq e^n n!$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \leq n! e^n$$

ce qui est vrai car pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$. Donc $w_n \leq e v_n$ pour tout $n \geq 1$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$$

Pour montrer que e est la meilleure constante possible, on forme pour $N \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,N} = \frac{1}{n}$ si $n \leq N$ et 0 sinon. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} = H_n < +\infty$$

Dans ce cas, on a

$$w_{n,N} = \sqrt[n]{u_{1,N} \dots u_{n,N}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n$$

pour $n \leq N$ et 0 sinon. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N} = \sum_{n=1}^N w_{n,N} = \sum_{n=1}^N \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n$$

En divisant par $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, on a donc

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N}}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N}} = \frac{\sum_{n=1}^N v_{n,N} \times \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

d'après le théorème de Césaro.

On a trouvé une suite donc la constante C est égale à e . D'après ce qui précède,

$$\boxed{e \text{ est la meilleure constante possible.}}$$

Remarque 1.6. Pour la fin de l'exercice précédent, on peut utiliser le fait que $H_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(N)$ et alors

$$\sum_{n=1}^N w_{n,N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{1}{n+1}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e \ln(N)$$

par le théorème de sommation des relations de comparaison.

Solution 1.29.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid p + q = n\}$$

On a alors

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n+1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Donc la condition nécessaire et suffisante est $\alpha > 2$.

Dans ce cas, par le théorème des sommation par paquets, on a

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1) + \zeta(\alpha)$$

2. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$\frac{(p+q)^2}{2} \leq p^2 + q^2 \leq (p+q)^2$$

Pour $\alpha \leq 0$, il est clair que l'on a divergence. Pour $\alpha > 0$, on a donc

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(p^2 + q^2)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{(p+q)^{2\alpha}}$$

Donc la condition nécessaire et suffisante est $\alpha > 1$.

d'après le 1.

Table des figures

1	$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$	8
2	$e^x - x - 1 \geq -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$	9
3	$x(1-x) \in]0, \frac{1}{4}]$ pour $x \in]0, 1[$	10
4	$x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur \mathbb{R}_+	11
5	$x \mapsto 2 \ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur \mathbb{R}_+^*	17
6	$\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$	25