*Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Algèbre Générale

Exercice 1.1. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe tel que $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que f_p, f_{p+1}, f_{p+2} soient des morphismes où*

$$f_p : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & x^p \end{array}$$

Montrer que G est un groupe abélien.

Remarque 1.
- Pour $(\Sigma_3, \circ)$, on a f_0, f_1, f_6 des morphismes mais Σ_3 n'est pas commutatif.
- Si f_2 est un morphisme, pour tout $x, y \in G^2$, on a

$$\begin{aligned}(xy)^2 &= xyxy \\ &= x^2y^2\end{aligned}$$

  d'où $xy = yx$.

Exercice 1.2. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini. Soit $A = \{x \in G,\ \omega(x) \text{ est impair}\}$ où $\omega(x)$ désigne l'ordre de x. Montrer que A est non vide, et que $x \mapsto x^2$ est une permutation de A.*

Exercice 1.3. *Soit $\sigma \in \Sigma_n$. On note $\theta(\sigma)$ le nombre d'orbite de σ. Montrer que le nombre minimal de transposition dont σ est le produit est $n - \theta(\sigma)$.*

Exercice 1.4. *Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Combien y a-t-il de morphismes de groupe de $\Big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\Big) \to \Big(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +\Big)$?*

Remarque 2. Exemple pour $f : \Big(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +\Big) \to \Big(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +\Big)$. On note $f(\bar{1}) = \tilde{x}$, d'où $\tilde{4x} = \tilde{0}$ et $3 \mid x$, donc $x \in \{0, 3\}$. Ainsi, on a ou bien $f = f_0 : \bar{l} \mapsto \tilde{0}$, ou bien $f = f_1 : \bar{l} \mapsto \tilde{3l}$.

Exercice 1.5. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe abélien fini. Soit $P = \prod_{x \in G} x$. Montrer que $P = e_G$ (élément neutre de G) sauf dans un cas très particulier.*

Exercice 1.6. *Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un nombre fini n d'ensembles de la forme $(x+G)_{x \in \mathbb{R}}$ avec $x + G = \{x + y,\ y \in G\}$. Montrer que $G = \mathbb{R}$.*

Exercice 1.7. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il d'automorphismes de $\Big(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +\Big)$?*

Exercice 1.8. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini et φ un morphisme de $G \to G$. Montrer que $|G| = |\mathrm{Im}\ \varphi| \times |\ker \varphi|$. En déduire que $\ker \varphi = \ker \varphi^2$ si et seulement si $\mathrm{Im}\ \varphi = \mathrm{Im}\ \varphi^2$.*

Exercice 1.9. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini d'ordre n, et $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \wedge m = 1$. Montrer que pour tout $y \in G$, il existe un unique $x \in G$ tel que $x^m = y$.*

Exercice 1.10. *Soit $(G,\cdot)$ un groupe fini. Pour $g \in G$, on note*

$$C(g) = \{hgh^{-1},\ h \in G\}$$

et

$$S_g = \{x \in G,\ xg = gx\}$$

1. *Montrer que S_g est un sous-groupe de G.*
2. *Montrer que $|G| = |S_g| \times |C(g)|$.*
3. *On note $Z(G) = \{x \in G,\ \forall y \in G,\ xy = yx\}$. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G, et que pour tout $g \in G$, $Z(G) \subset S_g$.*
4. *On suppose que $|G| = p^\alpha$ où p est premier et $\alpha \geqslant 1$. Montrer que $|Z(G)| \neq 1$. On pourra utiliser le fait que $x\mathcal{R}y$ si et seulement si il existe $h \in G$ tel que $y = hxh^{-1}$ est une relation d'équivalence.*
5. *On suppose que $|G| = p^2$. Montrer que G est abélien et qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $\Big(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Big)^2$.*

Remarque 3. Les groupes de cardinal p^3 ne sont pas nécessairement abélien, un exemple est donné par D_4, le groupe des isométries du carré (qui est de cardinal $2^3 = 8$).

Exercice 1.11. *Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ (respectivement $(\mathbb{Q}, +)$) dans $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$. On pourra poser, pour p premier et $n \in \mathbb{Z}$, $\nu_p(n)$ la puissance de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n.*

Exercice 1.12. *Soit G un groupe engendré par deux éléments $x, y \neq e_G$ tels que $x^5 = e_G$ et $xy = y^2x$. Montrer que $|G| = 155 = 5 \times 31$ et qu'il est unique à un isomorphisme près.*

Exercice 1.13. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe abélien fini. On note $N = \vee_{x \in G}\omega(x)$ (ppcm des ordres des éléments de G) appelé exposant de G, caractérise par $\forall k \in \mathbb{Z}, (\forall x \in G, x^k = e)$ si et seulement si $(\forall x \in G,\ \omega(x) \mid k)$ si et seulement si $(N|k)$. En particulier, $N \mid |G|$.*

On pose $N = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en nombres premiers de N.

1. *Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Justifier qu'il existe $y_i \in G$, tel que $p_i^{\alpha_i} \mid \omega(y_i)$.*
2. *Soit $i \in \{1, \dots, r\}$. Justifier qu'il existe $x_i \in G$, tel que $\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}$.*
3. *Montrer qu'il existe $x \in G$ tel que $\omega(x) = N$.*

Exercice 1.14. *Soit $\mathbb{K}$ un corps fini commutatif, $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe abélien fini. Soit $N = \vee_{x \in \mathbb{K}^*}\omega(x)$ (ordre multiplicatif). On sait d'après l'exercice précédent qu'il existe $x_0 \in \mathbb{K}^*$ tel que $\omega(x_0) = N$. En étudiant le polynôme $X^N - 1_K$, montrer que $(\mathbb{K}^*, \times)$ est cyclique.*

En exemple, soit $\Big(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +, \times\Big)$ (c'est un corps).

Trouver un générateur du groupe $\Big(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*, \times\Big)$.

Exercice 1.15. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe tel que $\forall x \in G,\ x^2 = e_G$.*

1. *Montrer que G est abélien.*
2. *Montrer que si G est fini, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que G soit isomorphe à $\Big(\big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)^n, +\Big)$. On pourra considérer une famille génératrice minimale.*

Exercice 1.16. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe, on appelle groupe dérivé de G et on note*

$$D(G) = \{xyx^{-1}y^{-1},\ (x, y) \in G^2\}$$

.

1. *Si G est abélien, que vaut $D(G)$?*
2. *Montrer que pour $n \geqslant 3$, les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$ (groupe des permutations de signature égale à 1).*
3. *Montrer que deux 3-cycles (a_1, a_2, a_3) et (b_1, b_2, b_3) sont conjugués dans Σ_n (c'est-à-dire qu'il existe $\sigma \in \Sigma_n$ telle que $(b_1, b_2, b_3) = \sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1}$). Est-ce encore vrai dans $\mathcal{A}_n$?*
4. *En déduire $D(\Sigma_n)$.*

Remarque 4. Pour $n \geqslant 5$, on a $D(\mathcal{A}_n) = D(\mathcal{A}_n)$.

Exercice 1.17. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini de cardinal n.*

1. *Soit $g \in G$ et*
$$\begin{array}{rccc} \tau_g : & G & \to & G \\ & x & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$
Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \tau : & G & \to & \Sigma(G) \\ & g & \mapsto & \tau_g \end{array}$$
(où $\Sigma(G)$ est le groupe des permutations de G) est un morphisme injectif. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de $(\Sigma_n, \circ)$.
2. *Montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{C}), \times)$.*

Exercice 1.18. *Montrer qu'il n'existe pas $(x, y, z, t, n) \in \mathbb{N}^5$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = (8t + 7) \times 4^n$.*

Exercice 1.19. *Montrer que $10^{10^n} \equiv 4[7]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*

Exercice 1.20. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.*

1. *Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.*
2. *En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.*

Remarque 5. Si $n \neq m$, alors $F_n \wedge F_m = 1$.

Exercice 1.21. *Soit U le groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$.*

1. *Quel est l'ordre de $\bar{5}$?*
2. *Montrer que $U = gr\{\overline{-1}, \bar{5}\}$ (groupe engendré) et qu'il est isomorphe à un groupe produit.*

Exercice 1.22. *On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ k \wedge n = 1\}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité, on définit $\mu(n) = \sum_{\xi \in G_n} \xi$.*

1. *Montrer que si $n \wedge m = 1$, alors $\mu(nm) = \mu(m)\mu(n)$.*
2. *Calculer $\mu(1)$. Que vaut $\mu(n)$ si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ (décomposition en nombres premiers) ?*
3. *Soit $\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ muni de*
$$\begin{array}{rccc} f \star g : & \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{C} \\ & n & \mapsto & (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g(n/d) \end{array}$$
Montrer que $\star$ est une loi associative et commutative, qu'elle admet un élément neutre noté e. Déterminer l'inverse de μ pour $\star$. On pourra calculer, pour $n \geqslant 2$, $\sum_{d|n} \mu(d)$.

4. *Que vaut pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} d\mu(d/n)$?*

Exercice 1.23. *Soit p premier. Montrer que*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}\binom{p+k}{k} \equiv 2^p + 1[p^2]$$

Exercice 1.24.

1. *Montrer que les sous-groupes finis de $(\mathbb{U}, \times)$ sont cycliques (où $\mathbb{U}$ est le cercle unité).*
2. *Quels sont les sous-groupes finis de $SO_2(\mathbb{R})$?*
3. *Soit G un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{R})$. Montrer que*

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (X,Y) & \mapsto & \sum_{M\in G}\langle MX, MY\rangle \end{array}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}$. Montrer que φ est un produit scalaire pour lequel les matrices de M sont des isométries. En déduire que G est cyclique.

Exercice 1.25. *Soit $E = \{x + y\sqrt{2},\ x \in \mathbb{N}^*,\ y \in \mathbb{Z},\ \text{et } x^2 - 2y = 1\}$.*

1. *Montrer que E est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.*
2. *Montrer que $E = \{(x_0 + y_0\sqrt{2})^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ où $x_0 + y_0\sqrt{2} = \min E \cap]1, +\infty[$.*

Exercice 1.26. *Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $7 \mid n^n - 3$.*

Exercice 1.27. *Soit p premier plus grand que 5. Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} = \frac{a}{(p-1)!}$. Montrer que $p^2 \mid a$.*

Exercice 1.28. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $P = A^2 + B^2$.*

Exercice 1.29.

1. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $(\sin(n\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.*
2. *Montrer qu'il y a une infinité de puissance de 2 qui commencent par 7 en base 10.*

Exercice 1.30. *Soit A un anneau commutatif intègre, on dit que A est euclidien si et seulement s'il existe $v : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ tels que pour tout $(a, b) \in A \times A \setminus \{0\}$, il existe $(q, r) \in A^2$ tels que $a = bq + r$ et $v(r) < v(b)$ ou $r = 0$.*

1. *Montrer que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est euclidien.*
2. *Montrer que tout anneau euclidien est principal.*

Exercice 1.31.

1. *Soit p premier plus grand que 3. Soit $\bar{x} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{\bar{0}\}$. Montrer que $\bar{x}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement $\bar{x}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$.*
2. *En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.*

Exercice 1.32. *Soit* $P = \sum_{i=0}^n r_i X^i \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$*. On pose*

$$c(P) = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\min\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} (\nu_p(r_i))}$$

où $\mathcal{P}$ *est l'ensemble des nombres premiers. On écrit* $P = c(P) \times P_1$*.*

1. *Montrer que* $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$*, que ses coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble et qu'une telle écriture est unique.*
2. *Soit* $(P, Q) \in \Big(\mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}\Big)^2$*. Montrer que* $c(PQ) = c(P)c(Q)$*. On justifiera en passant dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ *que si* p *premier divise tous les coefficients de* $P_1 \times Q_1$*, alors il divise tous les coefficients de* P_1 *ou tous ceux que* Q_1 *[Lemme de Gauss].*
3. *En déduire que si* $P \in \mathbb{Z}[X]$ *est irréductible sur* $\mathbb{Z}[X]$*, alors il l'est aussi sur* $\mathbb{Q}[X]$*. La réciproque est-elle vraie ?*
4. *Trouver tous les* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tels que* $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ *et* $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$*. Si* $\theta \not\equiv 0[\pi]$ *et si* $\theta = 2\pi p/q$ *avec* $p \wedge q = 1$*, on appliquera ce qui précède à* $A = X^q - 1$ *et* $P = X^2 - (2\cos(\theta))X + 1$*.*

Exercice 1.33. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *scindé sur* $\mathbb{R}$*.*

1. *Montrer que pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*,* $P + \alpha P'$ *est scindé sur* $\mathbb{R}$*.*
2. *Soit* $R = \sum_{i=0}^r a_i X^i$ *scindé sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que* $\sum_{i=0}^r a_i P^{(i)}$ *l'est aussi.*

Exercice 1.34. *Soit* $P \in \mathbb{R}[X]$ *de degré* $n \geqslant 1$*, scindé sur* $\mathbb{R}$*. Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $(n-1)(P'^2)(x) \geqslant nP(x)P''(x)$*.*

Exercice 1.35.

1. *Soit* $P \in \mathbb{Q}[X]$ *irréductible sur* $\mathbb{Q}[X]$*, montrer que* R *n'a que des racines simples sur* $\mathbb{C}$*. On pourra évaluer* $P \wedge P'$ *sur* $\mathbb{Q}[X]$*.*
2. *Soit* $A \in \mathbb{Q}[X]$ *et* $\alpha \in \mathbb{C}$ *une racine de* A *de multiplicité* $m(\alpha) > d(A)/2$ *où* $d(A)$ *est le degré de* A*. Montrer que* $\alpha \in \mathbb{Q}$*.*
3. *Soit* $A \in \mathbb{Q}[X]$ *de degré* $2m+1$*. On suppose que* A *admet une racine complexe de multiplicité plus grande que* m*. Montrer que* A *possède une racine rationnelle.*

Exercice 1.36. *Soit* $(G, \cdot)$ *un groupe et* A *une partie finie de* G *stable pour* $\cdot$*. Montrer que* A *est en fait un sous-groupe de* G*.*

Exercice 1.37. *Soit* p *premier plus grand que 3. Montrer que pour tout* $\alpha \in \mathbb{N}$*,*

$$(1+p)^{p^\alpha} \equiv 1 + p^{\alpha+1} [p^{\alpha+2}]$$

Exercice 1.38. *Soit pour* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $\mu(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \wedge n}}^n e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \sum_{\xi \in \Xi_n} \xi$ *où* Ξ_n *sont les racines primitives* n*-ièmes de l'unité. On a notamment* $|\Xi_n| = \varphi(n)$ *(fonction d'Euler).*

1. *Montrer que si* $m \wedge n = 1$*,* $\mu(m \times n) = \mu(m) \times \mu(n)$*.*
2. *Si* $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ *(décomposition en facteurs premiers), que vaut* $\mu(n)$ *?*

Exercice 1.39. *Montrer que pour tout* $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$*,* $7 \neq 2x^2 - 5y^2$*.*

Exercice 1.40. *Résoudre* $x^3 = 1$ *dans* $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$.

Exercice 1.41. *Soit* $n \geqslant 3$.

1. *Combien y a-t-il d'inversibles dans* $\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}, +, \times\right)$ *? On note* $\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\right)^{\times}$ *le groupe (multiplicatif) de ses inversibles.*
2. *Montrer que* $5^{2^{n-3}} \equiv 1 + 2^{n-1}[2^n]$.
3. *Évaluer l'ordre de 5 dans* $\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\right)^{\times}$.
4. *Montrer que* $gr\{-1\} \cap gr\{5\} = \{1\}$ *où gr indique le groupe engendré par l'ensemble. En déduire que* $\left(\left(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}\right)^{\times}, \times\right)$ *est isomorphe à* $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}, +\right)$.

Exercice 1.42. *Soit* $(G, \cdot)$ *un ensemble non vide muni d'une loi interne associative. On suppose que*

(i) $\exists e \in G, \forall x \in G,\ x \cdot e = x$,

(ii) $\forall x \in G, \exists x' \in G,\ x \cdot x' = e$.

Montrer que $(G, \cdot)$ *est un groupe.*

Exercice 1.43. *Montrer qu'il existe une infinité de multiples de 21 qui s'écrivent avec uniquement des 1 en base 10.*

Exercice 1.44. *Soit* $\mathbb{K}$ *un corps commutatif fini. Soit* $n = |\mathbb{K}^*|$.

1. *Soit d un diviseur de n, on suppose qu'il existe* $x_0 \in \mathbb{K}^*$ *d'ordre (multiplicatif) d dans le groupe* $(\mathbb{K}^*, \times)$. *Montrer qu'il existe exactement* $\varphi(d)$ *éléments d'ordre d dans* $(\mathbb{K}^*, \times)$ *(*φ *indique la fonction d'Euler). On pourra s'intéresser au polynôme* $X^d - 1_{\mathbb{K}}$.
2. *En utilisant* $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, *montrer que* $(\mathbb{K}^*, \times)$ *est cyclique.*

Exercice 1.45. *Soit p premier plus grand que 5. et* $M = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

1. *Montrer que*
$$f: \begin{array}{ccc} M & \to & M \\ x & \mapsto & 1 - x^{-1} \end{array}$$
est bien définie et calculer f^3.
2. *Montrer que -3 est un carré dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *si et seulement si f admet un point fixe.*
3. *Montrer que -3 est un carré dans* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *si et seulement si* $p \equiv 1[3]$ *(on pourra décomposer f en produit de cycles de supports disjoints).*

Exercice 1.46. *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *avec* $x = \pm b_m b_{m-1} \ldots b_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ *(écriture décimale). Montrer que* $x \in \mathbb{Q}$ *si et seulement si* $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant n_0,\ a_{n+T} = a_n$ *(la suite des décimales et périodique à partir du rang* n_0*).*

Exercice 1.47. *On définit* $H_0 = 1$ *et pour tout* $n \geqslant 1$, $H_n = \frac{X(X-1)\ldots(X-n+1)}{n!}$.

1. *Montrer que* $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
2. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X]$. *Montrer que* $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ *et et seulement si* $\exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ *avec* $P = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k$.

Exercice 1.48. *Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ racine de P. Montrer que α est racine simple de P. On pourra se demander, si le degré de P est n et $P = (X-\alpha)(a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1})$, quels sont les coefficients a_k de $\mathbb{Q}$ tels que $a_k \in \mathbb{Q}$.*

Exercice 1.49. *Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré 5 tel que P admette une racine complexe α d'ordre plus grand que 2. Montrer que P admet au moins une racine rationnelle. Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que si $P \in \mathbb{Q}[X]$ est de degré n admette une racine complexe multiple, alors P a une racine rationnelle ?*

Exercice 1.50. *On définit $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \{a + \mathrm{i}b \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.*

1. *Montrer que c'est le plus petit sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant i.*
2. *On définit, pour $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $|z|^2 = a^2 + b^2$. Montrer que z est inverse dans $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ si et seulement si $|z|^2 = 1$. En déduire l'ensemble U des inversibles.*
3. *(a) Montrer que pour tout $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$, il existe $z = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, $|z - z_0|^2 \leqslant \frac{1}{2}$.*
   (b) Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ avec $z_2 \neq 0$. Montrer qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]^2$ tel que $z_1 = qz_2 + r$ et $|r| < |z_1|$. A-t-on unicité ?
   (c) En déduire que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est principal.
4. *Montrer que tout élément $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}] \setminus \{0\}$ peut se décomposer en $z = u \times \prod_{\rho\in\mathcal{P}_0} \rho^{\nu_\rho(z)}$ où $u \in U$ et $\mathcal{P}_0$ est un ensemble d'irréductibles tel que tout élément de $\mathcal{P}$ (irréductibles de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$) est associé à un unique élément de $\mathcal{P}_0$ (on pourra raisonner par récurrence sur $|z|^2 \in \mathbb{N}$). Montrer l'unicité de cette décomposition.*

Exercice 1.51. *Soit p premier plus grand que 3. On note $\mathbb{F}_p$ le corps $\Big(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times\Big)$. On dit que $x \in \mathbb{F}_p^*$ est un résidu quadratique si et seulement si il existe $y \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $x = y^2$. On note R l'ensemble des résidus quadratiques.*

1. *Montrer que R est un sous-groupe de $(\mathbb{F}_p, \times)$ de cardinal $\frac{p-1}{2}$ et $a \in R$ si et seulement si $a^{\frac{p-1}{2}} = 1$.*
2. *Montrer que si $p = a^2 + b^2$ avec $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, alors $p \equiv 1[4]$.*
3. *Montrer que, pour $k \in \{1, \ldots, p-1\}$,*

$$f: \begin{array}{ccc} \{0, \ldots E(\sqrt{p})\}^2 & \to & \mathbb{F}_p \\ (a, b) & \mapsto & a - kb \end{array}$$

   n'est pas injective. En déduire qu'il existe $(a_0, b_0) \in \{1, \ldots E(\sqrt{p})\}^2$ tel que $k = a_0 \times b_0^{-1}$.

4. *Soit p premier tel qe $p \equiv 1[4]$. Montrer que p est somme de deux carrés.*

Exercice 1.52 (Fermat)**.** *Soit p premier. On sait, d'après l'exercice précédent, que p est somme de deux carrés si et seulement si $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$. On note $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \exists(a, b) \in \mathbb{N}^2,\ n = a^2 + b^2\}$.*

1. *Montrer que A est stable par produit. On note alors $P_1 = \{p premier \mid p = 2$ ou $p \equiv 1[4]\}$ et $P_2 = \{p$ premier $\mid p \equiv 3[4]\}$.*
2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $p \in P_2$, $\nu_p(n)$ est pair (où $\nu_p(n)$ la puissance de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n). Montrer que $n \in A$.*
3. *Montrer la réciproque (pour $n \in A$, pour $p \in P_1 \cup P_2$) tel que $\nu_p(n)$ est impair, on montrera que -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$.*

2 Séries numériques et familles sommables

Exercice 2.1. *Soit la suite définie par* $a_0 = 1$ *et pour tout* $n \geqslant 1$,

$$a_n = 2a_{\lfloor n/3 \rfloor} + 3a_{\lfloor n/9 \rfloor}$$

1. *On pose pour* $p \in \mathbb{N}$, $b_p = a_{3p}$. *Calculer* b_p *en fonction de* p.
2. *Montrer que si* $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, *alors* $a_n = b_p$.
3. *Déterminer l'ensemble des valeurs d'adhérence de* $(\frac{a_n}{n})_{n \geqslant 2}$.

Exercice 2.2. *Soit* $[a,b] \subset\in \mathbb{R}$ *avec* $a < b$ *et* $f : [a,b] \to [a,b]$ *continue. Soit* $x_0 \in [a,b]$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. *Montrer que* f *admet au moins un point fixe* $l \in [a,b]$.
2. *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, *montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un segment.*
3. *En déduire que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.

Exercice 2.3. *Soit* $\theta \in [0, 2\pi[$, *on définit* $u_0 = e^{i\theta}$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$. *Peut-on avoir* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *stationnaire ?*
- *convergente ?*
- *périodique ?*
- *dense dans* $\mathbb{U}$ *?*

On pourra étudier le développement binaire de $\frac{\theta}{2\pi} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$.

Exercice 2.4. *Soit* $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$, *étudier* $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^{n^2}$.

Exercice 2.5. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = +\infty$.

1. *Montrer qu'il existe* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijective telle que* $(x_{\varphi(n)})$ *est décroissante.*
2. *Montrer que pour tout* $l \in \overline{\mathbb{R}_+}$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un sous-ensemble* $I \subset \mathbb{N}$ *fini tel que*

$$\left| \sum_{k\in I} x_k - l \right| \leqslant \varepsilon$$

ou si $l = +\infty$: $\forall A > 0$, *il existe un sous-ensemble* I *fini tel que* $\sum_{k\in I} x_k \geqslant A$.

Exercice 2.6. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \sum_{k=0}^{n} u_k^2 = 1$. *Montrer que* $u_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$. *Une telle suite existe-t-elle ?*

Exercice 2.7. *Étudier* $x_n = n - \sum_{k=1}^{n} \cosh(\frac{1}{\sqrt{k+n}})$.

Exercice 2.8. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *des suites réelles telles que*

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n + c_n = 0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} = 3$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$. *On pourra étudier* $\varphi : x \mapsto e^x - x - 1$.

Exercice 2.9. *Soit* $u_0 \in]0,1[$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$. *On pose* $v_n = \frac{1}{u_n}$.

1. *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bien définie.*
2. *Montrer que* $v_n = n + \ln(n) + O(1)$, *en déduire un développement de* u_n.

Exercice 2.10.

1. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 2$, *il existe un unique* $u_n \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $u_n^n = u_n + n$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\geqslant 2}$ *converge vers* $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
3. *Donner un développement asymptotique à deux termes de* $x_n - \lambda$.

Exercice 2.11. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels positifs non tous nuls. On suppose que*

$$u_n = o\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *de limite* a. *En cas d'existence, évaluer*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1}a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Exercice 2.12.

1. *Soit* $x \in [0,1[$, *montrer qu'il existe une unique suite* $(a_n)_{n\geqslant 2}$ *d'entiers naturels telle que*
   (i) $0 \leqslant a_n \leqslant n-1$ *pour tout* $n \geqslant 2$,
   (ii) il existe $m \geqslant n$ *tel que* $a_m < m-1$ *pour tout* $n \geqslant 2$,
   (iii) $x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$.
2. *Donner une condition nécessaire et suffisante sur* $(a_n)_{n\geqslant 2}$ *pour que* $x \in \mathbb{Q}$.
3. *Soit* $l \in [-1,1]$, *montrer qu'il existe* $x \in [0,1[$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} sin(n!2\pi x) = l$.

Exercice 2.13. *Soit* $u_0 > 0, u_1 > 0$ *et pour tout* $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n-1})$$

Étudier la suite (u_n). *On pourra poser* $M_n = \max(u_n, u_{n-1}, l)$, $m_n = \min(u_n, u_{n-1}, l)$ *où* $l = 2\ln(1+l)$ *et* $l > 0$.

Exercice 2.14. *Soit* $(p,q) \in (\mathbb{R}^*)^2$ *avec* $p/q \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle bornée. On suppose que* $(e^{ipx_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(e^{iqx_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent. Montrer que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge. Et si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas bornée ?*

Exercice 2.15.

1. *Montrer que pour tout* $n \geqslant 1$, *pour tout* $k \in \{0,\ldots,n\}$, $\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}$.

2. *Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que*

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} - \Big(1 + \frac{z}{n}^{n}\Big)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{|z|^k}{k!} - \Big(1 + \frac{|z|}{n}\Big)^n$$

3. *En déduire* $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n$.

Exercice 2.16. *Soit $u_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}$ pour $n \geqslant 2$. Quelle est la limite de cette suite ? Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} u_n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$?*

Exercice 2.17. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\Big(\frac{1}{n}\Big)$. On pourra minorer $u_{n+1} + \cdots + u_{2n}$. Montrer ensuite que si $\{p \in \mathbb{N}, pu_p \geqslant 1\}$ est infini, alors $\sum u_n$ diverge.*

Exercice 2.18. *Nature de $\sum u_n$ où $u_n =$*

1. $n^{-1-\frac{1}{n}}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(t)dt$
3. $\sin(2\pi \frac{n!}{e})$
4. $\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n \ln(n)}$ *où $\alpha \in \mathbb{R}$*

Exercice 2.19. *Montrer la convergence et calculer la somme des différentes séries suivantes :*

1. $\sum_{n\geqslant 1} \sum_{k\geqslant n} \frac{(-1)^k}{k}$
2. $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(3n)!}$
3. $\sum_{n\geqslant 1} \frac{E(n^{\frac{1}{3}}) - E(n-1)^{\frac{1}{3}}}{4n - n^{\frac{1}{3}}}$ *où E désigne la partie entière.*

Exercice 2.20. *Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a < 0$. Montrer la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$. Donner un équivalent de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$.*

Exercice 2.21. *Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^k}{k}$.*

Exercice 2.22. *Donner la nature de $\sum u_n$ quand u_n vaut*

1. $\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n^\alpha}$ *où $\alpha \in \mathbb{R}$*
2. $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}}$
3. $\frac{\sin(n!\pi e)}{\ln(n)}$

Exercice 2.23. *Montrer la convergence et calculer la somme de $\sum u_n$ où u_n vaut*

1. $a\ln(n) + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$ *pour $n \geqslant 1$ (on cherchera d'abord une condition nécessaire et suffisante de convergence).*
2. $\frac{2^n}{3^{2^{n-1}}+1}$ *pour $n \geqslant 1$.*

3. $\frac{k-n\lfloor \frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)}$.
4. $\arctan(\frac{1}{n^2+n+1})$ *pour* $n \geqslant 0$.

Exercice 2.24. *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *et* $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. *Montrer que* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *ont même nature lorsque*

(i) $(nu_n)_{n\geqslant 1}$ *converge vers 0 OU*

(ii) $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *décroît et tend vers 0.*

Comparer alors les sommes respectives. En déduire, pour $p \geqslant 1$ *fixé,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$$

Exercice 2.25. *Soit* $q \in \mathbb{Z}$ *et* $v_n = \frac{1}{(n+q)!}\sum_{k=1}^{n} k!$. *Donner la nature de* $\sum v_n$. *En cas de divergence, donner un équivalent des sommes partielles.*

Exercice 2.26. *Soit* $(a,b,c) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. *Montrer, en justifiant l'existence :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{nc}}{1-z^{na+b}}$$

Exercice 2.27. *Soit* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *une série complexe absolument convergente. On pose pour* $q \in \mathbb{N}^*$, $b_q = \frac{1}{q(q+1)}(a_1 + 2a_2 + \dots + qa_q)$. *Montrer que* $\sum_{q\geqslant 1} b_q$ *converge et évaluer sa somme en fonction de* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. *On pourra poser* $u_{n,q} = \frac{na_n}{q(q+1)}$ *si* $n \leqslant q$ *et 0 sinon.*

Exercice 2.28. *Soit* $(u_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\sum u_n < +\infty$. *On pose* $v_n = \frac{1}{n(n+1)}(u_1 + \dots + nu_n)$ *et* $w_n = \sqrt[n]{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}$. *On admet que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *pour tout* $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, *on a l'inégalité entre la moyenne géométrique et arithmétique :*

$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = \dots = a_n$.

Montrer que $\sum w_n$ *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. *On pourra utiliser l'exercice précédent. Montrer que e est la "meilleure" constante possible, c'est-à-dire que si* $\forall (u_n)_{n\geqslant 1} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ *telle que* $\sum u_n$ *converge, on a* $\sum w_n \leqslant C \sum u_n$ *alors* $C \geqslant e$.

Exercice 2.29.

1. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* $\alpha \in \mathbb{R}$ *pour que* $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ *soit sommable et exprimer alors la somme en fonction de la fonction* ζ *de Riemann.*
2. *Trouver une condition nécessaire et suffisante sur* $\alpha \in \mathbb{R}$ *pour que* $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ *soit sommable.*

Exercice 2.30. *Étudier la sommabilité de* $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)}\right)_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{E(\sqrt{n})}{n(n+1)}$.

Exercice 2.31.

1. *Montrer que pour tout* $s \in]1, +\infty[$*, le produit infini* $\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^s}}$ *converge (où les* p_k *sont les nombres premiers). Donner sa valeur en fonction de* $\zeta(s)$*.*
2. *Généraliser ce résultat à* $s \in \mathbb{C}$ *avec* $\Re(s) > 1$*.*

Exercice 2.32. *On note* $\varphi(n) = |\{k \in \{1, \ldots, n\},\ k \wedge n = 1\}|$*. Pour quelles valeurs de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *la somme* $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ *converge-t-elle ? Donner alors sa somme en fonction de* $\zeta(\alpha)$*.*

Exercice 2.33. *Soit* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^*)^{\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $n \neq m$*,* $|z_n - z_m| \geqslant 1$*. Montrer que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{z_n^3}$ *converge.*

Exercice 2.34. *Donner la nature de* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{E(\sqrt{n})}}{n}$*.*

Exercice 2.35. *Pour* $(a, b) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*)$*, on définit* $u_n = \frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}\ldots$*.*

1. *Donner une condition nécessaire et suffisante pour que* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Dans ce cas, calculer sa somme.*
3. *Faire le cas où* $a = -\frac{1}{2}$ *et* $b = 1$*.*

Exercice 2.36. *Soit* $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$ *et* $v_n = (-1)^n u_n$ *pour* $n \geqslant 1$*.*

1. *Donner la nature de* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$*.*
2. *Soit* $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n$*. Donner un équivalent de* S_N *puis développer jusqu'au o(1).*
3. *Exprimer* $\sum_{n=2}^{+\infty} v_n$ *en fonction de* γ *(constante d'Euler) et* $\ln(2)$*.*

Exercice 2.37. *Soit pour* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $q_1(n)$ *la nombre de chiffres de l'écriture décimale de* n*. On définit par récurrence* $q_{k+1}(n) = q_1(q_k(n))$*. Étudier la convergence de*

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{nq_1(n)q_2(n)\ldots q_n(n)}$$

Exercice 2.38. *Soit* $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$*.*

1. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $P_{2n} > 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *et* P_{2n+1} *s'annule une seule fois en* $a_{2n+1} < 0$*.*
2. *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{2n+1}$*.*

Exercice 2.39. *Montrer qu'il existe un unique* $x_n \geqslant 0$ *tel que* $e^{x_n} = x_n + n$*. Donne un développement asymptotique à deux termes de* x_n *pour* $n \geqslant 1$*.*

Exercice 2.40. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$*, on pose* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$*. Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $v_n = \frac{u_n}{S_n^\alpha}$*.*

1. *On suppose que* $\sum u_n$ *converge, étudier* $\sum v_n$*.*
2. *On suppose que* $\sum u_n$ *diverge. Pour* $\alpha = 1$*, montrer que pour tout* $(n, p) \in \mathbb{N}^2$*,* $v_{n+1} + \cdots + v_{n+p} \geqslant 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$*. En déduire que* $\sum v_n$ *diverge.*
3. *On suppose que* $\sum u_n$ *diverge. Pour* $\alpha > 1$*, on forme* $w_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha}$*. Montrer que* $\sum v_n$ *converge. Et si* $\alpha < 1$*?*

4. *On suppose que* $\sum u_n$ *converge. On pose* $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$ *et* $w_n = \frac{u_n}{R_n^\alpha}$*. Étudier la nature de* $\sum w_n$*.*

Exercice 2.41 (Principe des tiroirs de Dirichlet)**.** *Soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*.*

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$*, montrer qu'il existe* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$ *tel que* $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qn}$*. On pourra étudier les* $n+1$ *réels* $(kx - \lfloor kx \rfloor) = (x_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ *et montrer qu'il existe* $k \neq k'$ *avec* $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$*.*
2. *Montrer qu'il existe* $(p_n, q_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ *telles que* $\left|x - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = +\infty$*.*
3. *Étudier la convergence de la suite* $\left(\frac{1}{n \sin(n)}\right)_{n \geqslant 1}$ *(on admet que* $\pi \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*).*

Exercice 2.42. *Soit* $(a_{n,p}) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^*)^2}$ *telle que*

(i) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$*, il existe* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,p} = a_p \in \mathbb{C}$*,*

(ii) il existe une suite de réels positifs (b_p) *donc la série converge telle que pour tout* $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$*,* $|a_{n,p}| \leqslant b_p$*.*

1. *Évaluer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} a_{n,p}$*.*
2. *Calculer* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \right)$*.*

Exercice 2.43. *Soit* $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ *une série complexe absolument convergente.*

1. *Montrer que pour tout* $k \geqslant 1$*, on peut définir* $S_k = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{kn}$*.*
2. *On suppose que pour tout* $k \geqslant 1$*,* $S_k = 0$*. Montrer que pour tout* $n \geqslant 1$*,* $u_n = 0$*.*

Exercice 2.44. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que pour toute suite* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*, si* $\sum u_n$ *converge, alors* $\sum f(u_n)$ *converge.*

1. *Montrer que* $f(0) = 0$ *et que* f *est continue en 0.*
2. *Montrer qu'il existe* $\alpha > 0$*,* $\forall x \in]-\alpha, \alpha[$*,* $f(x) = -f(x)$ *(*f *est impaire au voisinage de 0).*
3. *Montrer qu'il existe* $\beta > 0$ $\forall (x, y) \in]-\beta, \beta[^2$*,* $f(x + y) = f(x) + f(y)$ *(*f *est linéaire au voisinage de 0).*
4. *Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\gamma > 0$ *tels que* $\forall x \in]-\gamma, \gamma[$*,* $f(x) = \lambda x$ *(*f *est une homothétie au voisinage de 0).*

3 Probabilités sur un univers dénombrable

4 Calcul matriciel

5 Réduction des endomorphismes

6 Espaces vectoriels normés

7 Fonction d'une variable réelle

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires