Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Séries numériques et familles sommables

Solution 1.1.

1. *On a* $b_0 = a_1 = 5, b_1 = a_3 = 13$ *et pour* $p \geqslant 2$, $b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$.

   On a donc l'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$. *Les deux solutions sont 3 et -1.*

   Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$.

   On a alors $b_0 = 5 = \lambda + \mu$ *et* $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$. *On trouve alors*

   $$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}}$$

2. *On le montre par récurrence sur* $p \in \mathbb{N}$.

3. *Si* $3^p \leqslant n < 3^{p+1}$, *on a* $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$. *Alors*

   $$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p}$$

   Soit $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que*

   $$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda$$

   Soit $p_n \in \mathbb{N}$ *tel que* $3^{p_n} \leqslant \sigma(n) < 3^{p_n+1}$. *On a*

   $$p_n = \lfloor \log_3(\sigma(n)) \rfloor \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

   En reportant, on a $\frac{3}{2} \leqslant \lambda \leqslant \frac{9}{2}$.

   Si $\sigma(n) = 3^n$, *on a*

   $$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{9}{2}$$

   Si $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$, *on a*

   $$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{3}{2}$$

   Soit $\mu \in [1, 3[$ *et* $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n \to +\infty}{\sim} 3^n \mu$. *Alors*

   $$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu}\frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{9}{2\mu}$$

   $$\boxed{\text{Donc tout réel compris dans } \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right] \text{ est valeur d'adhérence.}}$$

Solution 1.2.

1.
$$\begin{array}{rccl} g: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-x \end{array}$$

est continue, $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $l \in [a,b]$ avec $g(l)=0$, d'où

$$\boxed{f(l)=l}$$

2. *On note $A = \{\lambda \mid \lambda$ est valeur d'adhérence$\}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que A est non vide. De plus, A est borné car $A \subset [a,b]$. Soit $\lambda = \inf(A)$ et $\mu = \sup(A)$.*

   Si $\lambda = b$, on a $\mu = b$ et $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$.

   Si $\lambda < b$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \notin A$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in]\lambda, \lambda+\varepsilon[\}$ est infini. Par définition, λ est valeur d'adhérence. Donc $\lambda \in A$, et de même $\mu \in A$.

   Soit $\nu \in]\lambda, \mu[$ avec $\lambda < \mu$. Si $\nu \notin A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$ est fini. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, $x_n \notin]\nu - \varepsilon_0, \nu + \varepsilon_0[$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_{n+1} - x_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0$. Soit alors $n \geqslant \max(N_0, N_1)$. Si $x_n \leqslant \nu - \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \leqslant \nu - \varepsilon_0$. Si $x_n \geqslant \nu + \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \geqslant \nu + \varepsilon_0$. Ceci contredit que λ et μ sont valeur d'adhérence.

   Ainsi, $\nu \in A$ et

$$\boxed{[\lambda, \mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}}$$

3. *Si (x_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Réciproquement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, d'après 2., on a $A = [\lambda, \mu]$. On suppose $\lambda < \nu$. Ainsi, $\frac{\lambda+\nu}{2} = \alpha$ est valeur d'adhérence. Donc il existe $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$ par continuité de f et c'est aussi égale à $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Ainsi,*

$$\boxed{f(\alpha)=\alpha}$$

   Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda, \mu]$ et $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$, alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $x_n = x_{n_0}$. Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lambda = \mu$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et a une *unique valeur d'adhérence.*

$$\boxed{\text{Donc } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Solution 1.3. *On a* $u_n = e^{\mathrm{i}2^n\theta}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ *car* $l = l^2$ *et* $|l| = 1$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est périodique au-delà d'un certain rang, il existe* $T \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N_0$, $u_{n+T} = u_n$. *En particulier,* $u_{N_0+T} = u_{N_0}$. *On veut alors* $2^{N_0+T}\theta \equiv 2^{N_0}\theta[2\pi]$. *D'où* $2^{N_0+T}\theta = 2\theta + 2k\pi$ *donc* $2^{N_0}(2^T - 1)\theta = 2k\pi$. *Donc* $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, *son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *l'est aussi.*

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est stationnaire, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$, $U_{N+1} = U_N = U_{N^2}$. *Comme* $|U_N| = 1$, *alors* $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ *et* $\frac{\theta}{2\pi}$ *est dyadique.*

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$ *(nombre dyadique). Alors pour tout* $n \geqslant n_0$, $2^n\theta \in 2\pi\mathbb{N}$ *et* $u_n = u_{n_0} = 1$.

Pour la densité, on prend une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en écrivant successivement, pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, *tous les paquets de* k *entiers sont dans* $\{0,1\}^k$. *Soit* $x \in [0,1[$ *tel que*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, *il existe* $p_N \in \mathbb{N}$,

$$2^{p_N}\theta = 2\pi\underbrace{(\dots)}_{\in\mathbb{N}} + 2\pi\Big(\frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in[0,\frac{1}{2^N}[}\Big)$$

On a alors

$$e^{\mathrm{i}2^{p_N}\theta} = e^{\mathrm{i}2\pi(\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_N}{2^N}+\dots)}$$

et

$$\left|\frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_N}{2^N} - x\right| \leqslant \frac{1}{2^N}$$

D'où $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{p_N} = e^{\mathrm{i}2\pi x}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dense dans* $\mathbb{U}$.

Solution 1.4. *Si* $a = 0$ *et* $b = 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a = 0$ *et* $b \neq 0$ *(ou inversement),* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Si $a > 0$ *ou* $b > 0$, *on a*

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(\frac{e^{\frac{1}{n}\ln(a)} + e^{\frac{1}{n}\ln(b)}}{2}\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(n^2 \ln\Big(1 + \frac{1}{2n}\ln(ab) + \frac{1}{4n^2}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\Big) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(\frac{n}{2}\ln(ab) + \frac{1}{4}(\ln(a)^2 + \ln(b)^2 + o(1))\Big) \end{aligned}$$

Si $ab > 1$, *on a*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

Si $ab < 1$, *on a*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Si $ab = 1$, *on a*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\frac{1}{2}\ln(a)^2}}$$

Solution 1.5.

1. *Soit* $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n > 0$ *(car* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$*).*

$$J = \Big\{k \in \mathbb{N} \;\Big|\; x_k \geqslant \frac{M}{2}\Big\}$$

est fini car $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et est non vide. On définit*

$$\varphi(0) = \min\Big\{k \in J \;\Big|\; x_k = \max\{x_n \mid n \in J\}\Big\}$$

Pour tout $n \in J$, $x_{\varphi(0)} \geqslant x_n$. *Si* $n \notin J$, $x_n \leqslant \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$. *Ainsi,*

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

Puis on recommence avec

$$\Big\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\}\Big\}$$

2. *Pour $l = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_N < \varepsilon$. On pose*

$$\boxed{I = \{N\}}$$

et on a bien

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leqslant \varepsilon$$

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{N} x_k > A$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$). Donc on peut prendre

$$\boxed{I = \{0, \ldots, N\}}$$

Si $l \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < l$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $x_n < \varepsilon$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$. Donc il existe un plus petit entier N_1 tel que $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geqslant l - \varepsilon$. Comme $x_{N_1} < \varepsilon$, on a $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leqslant l + \varepsilon$. Donc

$$\boxed{I = \{N_0, \ldots, N_1\}}$$

Solution 1.6. *On pose*

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$$

Montrons que $S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. D'abord, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} >$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = l \in \overline{R}_+^*$. Si $l < +\infty$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l}$ et donc $u_n^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{l^2}$ et la série diverge. Donc $l = +\infty$ et comme $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

On observe ensuite que $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$ donc $S_{n-1} \underset{n \to +\infty}{\sim} S_n$. Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{= \ (S_n - S_{n-1}) S_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{= \ S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 3$$

On applique le théorème de Césaro à la suite $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3$$

donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$, et comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a bien

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Réciproquement, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ avec $u_0 = 1$. On a

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}}$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}}$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^{n} u_k^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1}$$

Remarque 1.1. On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha}$$

Solution 1.7. *Tout d'abord, on montre que pour tout $x \in [0,1]$,*

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$$

en posant

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et on a $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geqslant 0$ et $f'(0) = 0$. Comme $f(0) = 0$, on a pour tout $x \in [0,1], f(x) \geqslant 0$.

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur f, on a

$$0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t\in[0,1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leqslant \cosh(1)} \leqslant x^4$$

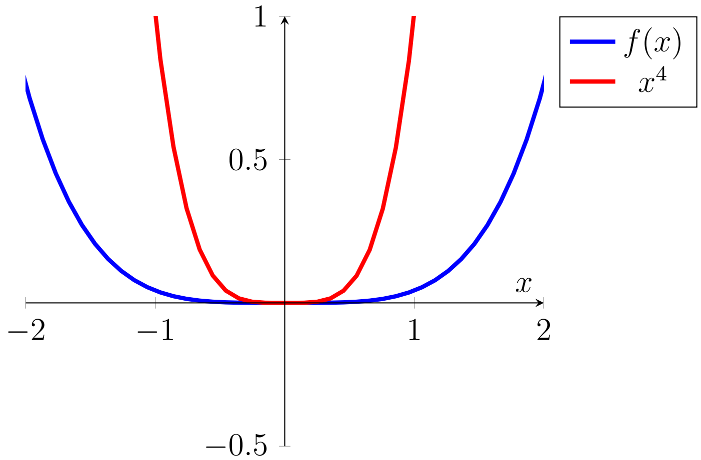

FIGURE 1 – $0 \leqslant \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - 1\right]$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}}$$

Solution 1.8. *φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$.*

On a

$$0\varphi(a_n) \leqslant \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$$

Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| > \varepsilon$. Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geqslant \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0$$

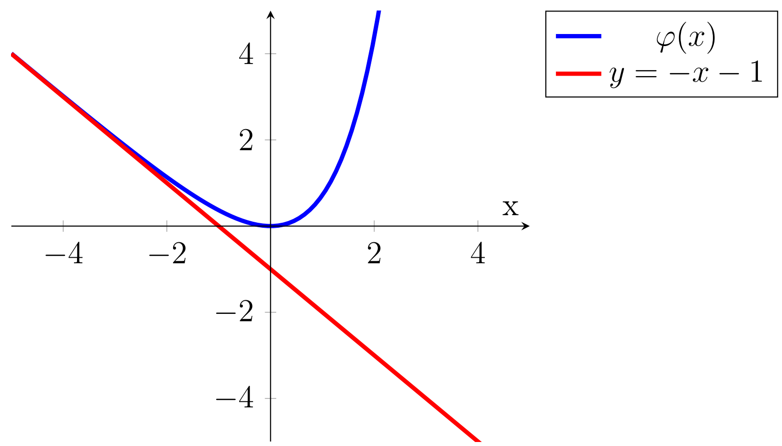

FIGURE 2 – $e^x - x - 1 \geqslant -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(a_n) = 0$. *Donc*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

et c'est pareil pour b_n *et* c_n.

Solution 1.9.

1. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x(1-x) \end{array}$$

   On a $f(x) \in]0, \frac{1}{4}]$. *Pour tout* $n \in \geqslant 1$, $u_n \in]0, \frac{1}{4}]$. *Par récurrence, on a donc* $u_{n+1} \leqslant u_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$$\boxed{\textit{Donc } v_n \textit{ est bien définie.}}$$

2. *On a*

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1)$$

   Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. *D'après le théorème de Césaro, on a*

$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

   donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ *et* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

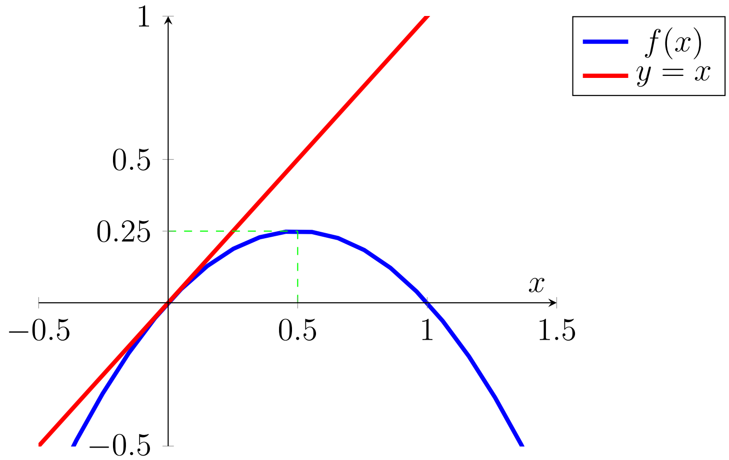

FIGURE 3 – $x(1-x) \in \left]0, \frac{1}{4}\right]$ pour $x \in]0,1[$.

On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n}(1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{= O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ *donc* $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. *En sommant, on a donc*

$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n + \ln(n) + o\big(\ln(n)\big)} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})} \\ &= \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{= \alpha_n} \end{aligned}$$

α_n *est le terme genéral d'une série à termes positifs convergentes car* $\alpha_n = O\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)$.
Donc

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

et en sommant,

$$\boxed{v_n = n + \ln(n) + O(1)}$$

et comme montré auparavant,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}$$

Solution 1.10.

1. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n - x - n \end{array}$$

On a $f_n'(x) = nx^{n-1} - 1 = 0$ *si et seulement si*

$$x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n$$

$f_n(0) = 0$ *et* $f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. f_n *est monotone strictement sur* $]\alpha_n, +\infty[$.

$$\boxed{\textit{Donc il existe un unique } x_n \in \mathbb{R}^+ \textit{ tel que } f_n(x_n) = 0}$$

On a $f_n(1) = -n < 0$ *donc* $x_n > 1$ *et* $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ *pour* $n \geqslant 3$ *(on a* $x_2 = 2$*).*

Donc pour $n \geqslant 3$, $x_n \in]1, 2[$.

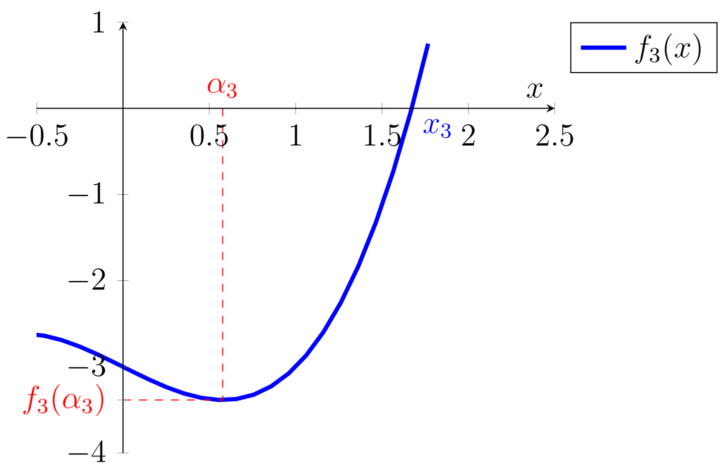

Figure 4 – $x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur $\mathbb{R}_+$.

2. *On a* $x_n^n = x_n + n \leqslant 2 + n$ *donc*

$$1 \leqslant x_n \leqslant (2+n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(2+n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 1}$$

3. *On peut poser* $x_n = 1 + \varepsilon_n$ *avec* $\varepsilon_n > 0$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$. *On a*

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n$$

donc

$$n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln(1+\varepsilon_n+n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\Big(1 + \frac{1+\varepsilon_n}{n}\Big)}_{\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}}$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)$$

On a enfin

$$(1+\varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n = 1 + n + \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)$$

d'où

$$\begin{aligned}\ln(1+\varepsilon_n) &= \frac{1}{n}\ln(n + 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n}\Big)) \\ &= \frac{1}{n}\Big[\ln(n) + \ln\Big(1 + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)}{n^2}\Big)}_{=\ o\left(\frac{1}{n}\right)}\Big)\Big] \\ &= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\end{aligned}$$

donc

$$1 + \varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\Big(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\Big)}$$

Solution 1.11. *On note*

$$v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1}a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a$ *alors* $v_n = a \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$. *De manière générale, on a*

$$v_n - a = v_n - a\frac{u_n + \cdots + u_0}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}(a_k - a)}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Ainsi,

$$|u_n - a| \leqslant \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}|a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n}$$

Soit $\varepsilon > 0$. *Il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $k \geqslant N$, $|a_k - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. *Comme* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *converge, on note* $M = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |a_k - a|$. *Soit* $n \geqslant N$, *on a*

$$\begin{aligned} |v_n - a| &\leqslant \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k}|a_k - a| + \sum_{k=N}^n |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \\ &\leqslant \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k M}{u_0 + \cdots + u_n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N}^n u_{n-k}\frac{\varepsilon}{2}}{u_0 + \cdots + u_n}}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

car les u_i *sont positifs.*

On remarque enfin que

$$\begin{aligned} u_n &= o(u_0 + \cdots + u_n) \\ u_{n-1} &= o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\ &\vdots \\ u_{n-N+1} &= o(u_0 + \cdots + u_n) \end{aligned}$$

Donc

$$M\frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et il existe $N' \in \mathbb{C}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N'$, *on a*

$$M\frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc pour tout $n \geqslant \max(N, N')$, *on a* $|v_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ *et ainsi*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = a}$$

Solution 1.12.

1. *Pour $n \geqslant 2$, (iii) donne*

$$x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

Ainsi,

$$0 \leqslant x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}$$

où l'inégalité est stricte d'après (ii). Pour $n \geqslant 2$, on a

$$x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2!}$$

donc

$$0 \leqslant 2x - \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Donc $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$. On a ensuite

$$0 \leqslant n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

donc

$$\boxed{a_n = \left\lfloor n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) \right\rfloor}$$

On a donc bien unicité.

Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus. On a, pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Or

$$0 - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{1}{(n-1)!}$$

donc

$$a_n \in \{0, \dots, n-1\}$$

et (i) est vérifié.

On a

$$0 \leqslant x - \sum_{k=2}^{n} \frac{a_k}{k!} < \frac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc (iii) est vérifié, et supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 2$ tel que pour tout $m \geqslant n_0+1$, on a $a_m = m-1$. Alors

$$x = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!}$$

et

$$x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n_0!}$$

donc

$$n_0!\Big(x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!}\Big) = 1$$

et

$$n_0!\Big(x - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_{n_0-1}}{(n_0-1)!}\Big) - a_{n_0} = 1$$

En prenant la partie entière, on a donc $0 = 1$ ce qui est absurde.

Donc (ii) est vérifié.

2. *S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $a_n = 0$ alors $x \in \mathbb{Q}$.*

   Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a

$$x = \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n!}$$

si et seulement si

$$a_n = n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big)$$

si et seulement si

$$n!\Big(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}\Big) \in \mathbb{N}$$

ce qui est vrai dès que $n \geqslant q$. Donc pour tout $n > q$, on a $a_n = 0$ par unicité.

3. *Soit $l \in [-1,1]$. Soit $x \in [0,1[$ avec*

$$x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

On a alors

$$n!2\pi x = \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \underbrace{\sum_{k\geqslant n+2} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{=\ \varepsilon_n}$$

On a

$$0 \leqslant \varepsilon_n < \frac{2\pi n!}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc

$$\sin(n!2\pi x) = \sin\Big(\frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \varepsilon_n\Big)$$

et il suffit d'avoir, comme $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\arcsin(l)}{2\pi} \in \Big[0, \frac{1}{4}\Big]$$

On pose alors

$$\boxed{a_n = \left\lfloor \frac{n\arcsin(l)}{2\pi} \right\rfloor}$$

pour $n \geqslant 2$ *et on a* $0 \leqslant a_n \leqslant \frac{n}{4} < n-1$ *pour tout* $n \geqslant 2$. *On a donc le résultat.*

Remarque 1.2. Il n'y a pas unicité. Par exemple, pour $l = 0$, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ convient. Plus généralement, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \geqslant q$, on a

$$\sin\left(n!2\pi\Big(x + \frac{p}{q}\Big)\right) = \sin(n!2\pi x)$$

Solution 1.13. *Par récurrence, on a* $u_n > 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\ln(1+x) - x \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2\ln(1+x) \end{array}$$

g *est dérivable est*

$$g'(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

donc g *est croissante sur* $[0,1]$ *et décroissante sur* $[1,+\infty[$. *Comme* $g(0) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, *d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel* $l \in]0,+\infty[$ *tel que* $g(l) = 0$ *d'où* $f(l) = l$.

Pour tout $x \in]0,l]$, *on a* $x \leqslant f(x) \leqslant l$ *et pour tout* $x > l$, *on a* $l \leqslant f(x) \leqslant x$.

Soit $n \geqslant 1$. *Si* $u_n \geqslant l$ *et* $u_{n-1} \geqslant l$, *on a* $m_n = l$ *et* $M_n \in \{u_n, u_{n-1}\}$. *Il vient donc*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(f(u_n) + f(u_{n-1})) \geqslant f(l) = l$$

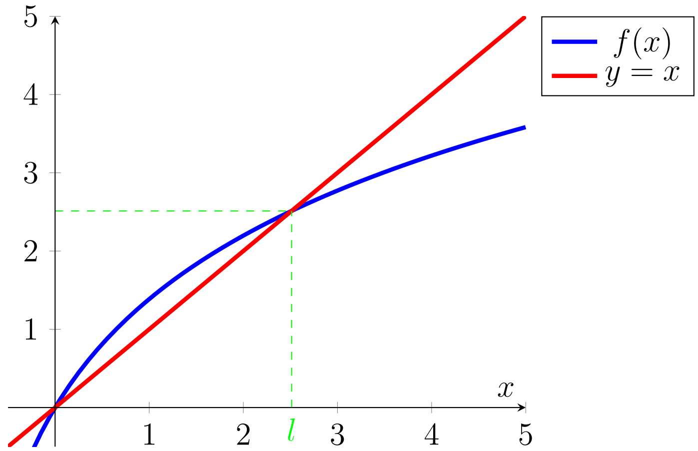

FIGURE 5 – $x \mapsto 2\ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$.

et

$$u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \leqslant M_n$$

Donc $m_{n+1} = l = m_n$ *et* $M_{n+1} \leqslant M_n$.

Par récurrence, on a pour tout $k \geqslant n$, $u_k \geqslant l$ *et* $(M_k)_{k\geqslant n}$ *converge vers* $\lambda \geqslant l$ *(car décroissante et plus grande que* l*) et* $m_k = l$ *pour tout* $k \geqslant n$.

De plus pour tout $k \geqslant n$, *on a*

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(f(u_k) + f(u_{k-1})) \leqslant f(M_k)$$

car f *est croissante et donc*

$$u_{k+2} \leqslant f(M_{k+1}) \leqslant f(M_k)$$

Par passage à la limite, on a $\lambda \leqslant f(\lambda)$ *donc* $\lambda = f(\lambda)$ *et donc* $\lambda = l$. *Or pout tout* $k \geqslant n$, *on a*

$$\underbrace{m_k}_{=\,l} \leqslant u_k \leqslant M_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} l$$

donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} l}$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $u_{n_0-1} \geqslant l$ *et* $u_{n_0} \geqslant l$ *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. *Or même s'il existe* $n_1 \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $u_{n_1-1} \leqslant l$ *et* $u_{n_1} \leqslant l$, *alors on inverse les rôles de* M_{n_1} *et* m_{n_1}.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n - l)(u_{n+1} - l) \leqslant 0$$

Supposons par exemple $u_0 \geqslant l$ et $u_1 \leqslant l$. Alors

$$0 \leqslant u_2 - l \leqslant \frac{u_0 - l}{2}$$

et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_{2k} - l \leqslant \frac{u_0-l}{2^k}$. Donc $u_{2k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} l$ et de même $u_{2k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} l$ (par valeurs inférieures). Donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} l}$$

Solution 1.14. *Soit $(\theta, \theta') \in [2, 2\pi[^2$ tel que*

$$\lim_{k\to+\infty} e^{\mathrm{i}px_n} = e^{\mathrm{i}\theta}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} e^{\mathrm{i}qx_n} = e^{\mathrm{i}\theta'}$$

Soient x, x' deux valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ distinctes. On a

$$\begin{cases} e^{\mathrm{i}px} = e^{\mathrm{i}\theta} = e^{\mathrm{i}px'} \\ e^{\mathrm{i}qx} = e^{\mathrm{i}\theta'} = e^{\mathrm{i}qx'} \end{cases}$$

Il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} px = px' + 2k\pi \\ qx = qx' + 2k\pi \end{cases}$$

et donc $p(x - x') = 2k\pi$ et $q(x - x') = 2k'\pi$ et alors $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence. Comme elle est bornée,

$$\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut prendre

$$\boxed{x_n = n!}$$

On a

$$e^{2\mathrm{i}\pi n!} = 1$$

et

$$n!e = n!\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}}_{\in\mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{n!}{k!}}_{\xrightarrow[k\to+\infty]{}0}$$

Si on veut x_n divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut prendre

$$\boxed{x_n = (-1)^n n!}$$

Table des figures