Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Algèbre Générale

Solution 1.1. *Soit $(x, y) \in G^2$. On a d'abord*

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x \cdot y)^{p+1}(x \cdot y)^{-p} \\ &= x^{p+1} \cdot y^{p+1} \cdot y^{-p} \cdot x^{-p} \\ &= x^{p+1} \cdot y \cdot x^{-p} \end{aligned} \tag{1.1}$$

On cherche maintenant à montrer que x^{p+1} et y commutent. On a

$$\begin{aligned} y^{p+2} \cdot x^{p+2} &= (y \cdot x)^{p+2} \\ &= (y \cdot x)^{p+1} \cdot y \cdot x \\ &= y^{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot y \cdot x \end{aligned}$$

Donc on a $y \cdot x^{p+1} = x^{p+1} \cdot y$. En reportant dans (1.1), on a $x \cdot y = y \cdot x$ et donc G est abélien.

Remarque 1.1.

- Pour $(\Sigma_3, \cdot)$, on a f_0, f_1 et f_6 des morphismes mais Σ_3 n'est pas commutatif.
- Si f_2 est un morphisme, alors on a $(x \cdot y)^2 = x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2$ d'où $y \cdot x = x \cdot y$.

Solution 1.2. *A est non vide car $\omega(e_G) = 1$ et $e_G \in A$. Soit $x \in A$ tel que $\omega(x) = 2p + 1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\begin{aligned} x^{2k} = e_G &\Leftrightarrow 2p + 1 \mid 2k \\ &\Leftrightarrow 2p + 1 \mid k \end{aligned}$$

d'après le théorème de Gauss.

Ainsi, $\omega(x^2) = 2p + 1$ et $x^2 \in A$, donc

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & A & \to & A \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

est bien définie. Soit $x \in A$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2p+1} = e_G$ donc $x^{2p+2} = x$ d'où $(x^{p+1})^2 = x$. Il suffit donc de vérifier que x^{p+1} pour montrer que l'application est surjective. Comme A est fini, elle sera bijective.

On a $gr\{x^{p+1}\} \subset gr\{x\}$ et $(x^{p+1})^2 = x$ donc $gr\{x\} = gr\{x^{p+1}\}$ donc $\omega(x) = \omega(x^{p+1}) = 2p+1$ et donc $x^{p+1} \in A$.

Solution 1.3. *On note $m = \theta(\sigma)$. On suppose que σ se décompose en produit de cycle de longueur $l_1, \dots, l_m$ avec $l_1 + \dots + l_m = n$. Comme*

$$(a_1, \dots, a_l) = [a_1, a_2] \circ [a_2, a_3] \circ \dots \circ [a_{l-1}, a_l]$$

Donc σ se décompose en $\sum_{i=1}^{m}(l_i - 1) = n - m$ transpositions. Montrons par récurrence sur k, $\mathcal{H}(k)$: "Un produit de k transpositions possède au moins $n-k$ orbites".

Pour $k = 0$, $\sigma = id$ possède n orbites.

Pour $k = 1$, soit τ une transposition, on a $\theta(\tau) = n - 2 + 1 = n - 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{H}_k$, soit $\sigma \in \Sigma_n$ qui se décompose en produit de $k+1$ transpositions.

$$\sigma = \underbrace{\tau_1 \circ \dots \tau_k}_{\sigma'} \circ \tau_{k+1}$$

D'après $\mathcal{H}_k$, on a $\theta(\sigma') \geqslant n - k$. Notons $\tau_{k+1} = [a, b]$.

Si a et b appartiennent à la même orbite. On note $(a_1, \dots, a_r)$ le cycle correspondant avec $a_r = a$ et $a_s = b$ où $s \in \{1, \dots, n-1\}$. On a

$$\begin{cases} (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_i) = a_{i+1} & \text{où } i \notin \{r, s\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_r) = a_{s+1} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_s) = a_1 \end{cases}$$

On n'a pas perdu d'orbites, donc $\theta(\sigma) \geqslant n - k - 1$.

Si a et b n'appartiennent pas à la même orbite, notons $(a_1, \dots, a_r)$ et $(b_1, \dots, b_s)$ ces orbites avec $a = a_r$ et $b = b_s$. On a

$$\begin{cases} \underbrace{(a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s]}_{\sigma''}(a_i) = a_{i+1} & \text{où } i \in \{1, \dots, r-1\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](b_j) = b_{j+1} & \text{où } j \in \{1, \dots, s-1\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](a_r) = b_1 \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](b_s) = a_1 \end{cases}$$

Donc

$$\sigma'' = (a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$$

On a perdu une orbite et donc $\theta(\sigma) \geqslant n-k-1$. D'où le résultat par récurrence sur k.

Solution 1.4. *On note par $\overline{k}$ les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et par $\widetilde{l}$ les éléments de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.*

Soit f un morphisme. On pose $f(\overline{1}) = \widetilde{x}$ où $x \in \{0, \dots, m-1\}$. On a donc $nf(\overline{1}) = f(\overline{0}) = \widetilde{0}$.

On a donc $\widetilde{nx} = \widetilde{0}$ donc $m \mid nx$. On écrit $m = m_1(m \wedge n)$ et $n = n_1(m \wedge n)$. D'après le théorème de Gauss, on a donc $m_1 \mid x$. Donc $x = km_1$ avec $k \in \{0, \dots, (n \wedge m) - 1\}$.

Réciproquement, soit $k \in \{0, \dots, (n \wedge m) - 1\}$. On définit

$$\begin{array}{rccc} f_k : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ & \overline{l} & \mapsto & \widetilde{lkm_1} \end{array}$$

Si $\overline{l} = \overline{l'}$, alors $n \mid l - l'$ et donc $nm_1 \mid (l-l')km_1$ puis $n_1(n \wedge m)m_1 \mid (l-l')km_1$ donc $m \mid (l-l')km_1$ d'où $\widetilde{lkm_1} = \widetilde{l'km_1}$ donc f est bien définie et c'est évidemment un morphisme.

Soit $k, k' \in \{0, \dots, n \wedge m - 1\}$ avec $k \neq k'$. Si $\widetilde{km_1} = \widetilde{k'm_1}$ alors $m \mid (k-k')m_1$ et donc $n \wedge m \mid k - k'$ et $|k - k'| < n \wedge m$ donc $k = k'$ ce qui est absurde. Ainsi, les f_k sont distincts, on a donc $n \wedge m$ morphismes.

Remarque 1.2. Exemple pour l'exercice précédent : morphisme de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. On a $f(\overline{1}) = \widetilde{x}$ d'où $\widetilde{4x} = \widetilde{0}$ donc $3 \mid x$ d'où $x \in \{0, 3\}$. On a donc le morphisme trivial $f_0 \colon \overline{l} \mapsto \widetilde{0}$ et $f_1 \colon \overline{l} \mapsto \widetilde{3l}$.

Solution 1.5. *On considère $H = \{x \in G \bigm| x^2 = e_G\}$. Si $x \notin H$, alors $x^{-1} \neq x$ et donc $P = \prod_{x \in H} x$. H est le noyau du morphisme $x \mapsto x^2$ (morphisme car G est abélien) donc H est un sous-groupe. Soit K un sous-groupe de H et $a \in H \setminus K$. Montrons que $K \cup aK$ est un sous-groupe de H.*

On a $e_G \in K \cup aK$. Soit $x \in K \cup aK \subset H$, on a $x^{-1} = x \in K \cup aK$. Soit $(x_1, x_2) \in (K \cup aK)^2$, si $(x_1, x_2) \in K^2$,, c'est ok. Si $(x_1, x_2) \in (aK)^2$, on note $x_1 = a \cdot k_1$ et $x_2 = a \cdot k_2$ avec $(k_1, k_2) \in K^2$. On a $x_1 \cdot x_2 = a^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2 \in K$. Si $x_1 \in K$ et $x_2 \in aK$, alors $x_1 \cdot x_2 = a \cdot k_1 \cdot k_2 \in aK$. Donc $K \cup aK$ est un sous-groupe de H.

Soit $x \in K \cap aK$, il existe $(k_1, k_2) \in K^2$ tel que $k_1 = a \cdot k_2$ et $a \in K$ ce qui est impossible. Donc $K \cap aK = \emptyset$.

On construit alors par récurrence K_n : on pose $K_0 = \{e_G\}$ et à l'étape n, si $K_n = H$ on arrête, sinon il existe $a_{n+1} \in H \setminus K_n$ et on pose $K_{n+1} = K_n \cup a_{n+1}K$. Alors $|K_{n+1}| = 2|K_n|$. Comme H est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H = K_{n_0}$. On a alors $|H| = 2^{n_0}$.

Ainsi, si $n_0 = 0$, on a $H = \{e_G\}$ et $P = e_G$. Si $n_0 = 1$, on a $H = \{e_G, a_1\}$ et $P = a_1 \neq e_G$. Si $n_0 \geqslant 2$, comme chaque a_k apparaît un nombre pair de fois dans le produit, on a $P = e_G$.

Solution 1.6. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $(\overline{kx_0})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ ne sont pas deux à deux distincts. Donc il existe $l \neq l' \in \{0, \ldots, n\}^2$ tel que $\overline{lx_0} = \overline{l'x_0}$ d'où $0 < |l - l'| \leqslant n$. Donc il existe $j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $jx_0 \in G$. Ainsi, $n!x_0 \in G$ (itéré de jx_0). Ce raisonnement est vrai pour $x = \frac{x_0}{n!}$ donc $x_0 \in G$. Ainsi, $G = \mathbb{R}$.*

Solution 1.7. *Soit f un isomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même. Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, on a $f(\overline{k}) = kf\overline{1})$. Par isomorphisme, $\omega(f(\overline{1})) = \omega(\overline{1}) = n$. Notons alors $\overline{x} = f(\overline{1})$ avec $x \in \{0, dots, n-1\}$.*

Si $x \wedge n = 1$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ux + vn = 1$, donc $u\overline{x} = \overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$. Ainsi, $Zn\mathbb{Z} = gr\{\overline{x}\}$ (car les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des itérés de $\overline{1}$) donc $\omega(\overline{x}) = n$.

Réciproquement, si $\omega(\overline{x}) = n$, $\overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$ donc il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $u\overline{x} = 1 = \overline{ux}$. Donc $n \mid ux - 1$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathbb{Z}$ tel que $ux - 1 = vn$, d'où $ux + vn = 1$. D'après Bézout, on a $x \wedge n = 1$. Finalement, on a $\omega(\overline{x}) = n$ si et seulement si $x \wedge n = 1$.

Ainsi, les isomorphismes sont nécessairement de la forme

$$\begin{array}{rccc} f_x : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{k} & \mapsto & \overline{kx} \end{array}$$

où $x \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $x \wedge n = 1$.

Réciproquement, si $x \in \{0, \ldots, n-1\}$ est tel que $x \wedge n = 1$, f_x est évidemment un morphisme. Si $\overline{k} \in \ker(f_x)$, on a $f_x(\overline{k}) = \overline{0}$ si et seulement si $\overline{kx} = \overline{0}$ si et seulement si $n \mid kx$ et comme $n \wedge x = 1$, d'après le théorème de Gauss, on a $n \mid k$ donc $\overline{k} = \overline{0}$ donc $\ker(f_x) = \{\overline{0}\}$. Donc f_x est injective, donc bijective car $\left|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right| = \left|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right| = n$.

Solution 1.8. *Si $y \in \mathrm{Im}\varphi$, y possède $|\ker \varphi|$ antécédents. En effet, il existe $x_0 \in G$ tel que $y = \varphi(x_0)$. Pour tout $x \in G$, on a $\varphi(x) = y$ si et seulement si $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ si et seulement si $\varphi(x_0^{-1} \cdot x) = e_G$*

si et seulement si $x_0^{-1} \cdot x \in \ker \varphi$ *si et seulement si* $x \in x_0 \ker \varphi$. *Comme*

$$\begin{array}{rccc} g: & \ker \varphi & \to & x_0 \ker \varphi \\ & x & \mapsto & x \cdot x_0 \end{array}$$

est bijective, on a $|\ker \varphi| = |x_0 \varphi|$. *Ainsi, on a* $|G| = |\mathrm{Im}\varphi| \times |\ker \varphi|$.

Dans tous les cas, on a $\ker \varphi \subset \ker \varphi^2$ *et* $\mathrm{Im}\varphi^2 \subset \mathrm{Im}\varphi$. *On a ensuite*

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\varphi^2 = \mathrm{Im}\varphi &\iff |\mathrm{Im}\varphi^2| = |\mathrm{Im}\varphi| \\ &\iff |\ker \varphi^2||\mathrm{Im}\varphi^2| = |\ker \varphi^2||\mathrm{Im}\varphi| = |G| = |\ker \varphi||\mathrm{Im}\varphi| \\ &\iff |\ker \varphi^2| = |\ker \varphi| \\ &\iff \ker \varphi^2 = \ker \varphi \end{aligned}$$

Solution 1.9. *On considère*

$$\begin{array}{rccc} f: & G & \to & G \\ & x & \mapsto & x^m \end{array}$$

l'exercice revient à montrer que f *est bijective. D'après le théorème de Bézout, il existe* $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $am + bn = 1$. *Soit* $y \in G$, *on a*

$$y^1 = y = y^{am+bn} = y^{am} \cdot \underbrace{y^{bn}}_{=e_G} = y^{am} = (y^a)^m$$

Donc f *est surjective et comme* G *est fini,* f *est bijective.*

Solution 1.10.

1. *On a* $e_G \in S_g$, *si* $(x,y) \in S_g^2$ *alors* $x \cdot y \cdot g = x \cdot g \cdot y = g \cdot x \cdot y$ *donc* $x \cdot y \in S_g$ *et si* $x \in S_g$ *alors* $x \cdot g = g \cdot x$ *implique* $g \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot g$ *en multipliant par l'inverse de* x *à gauche et à droite donc* $x^{-1} \in S_g$.
2. *Soit* $(h,h') \in G^2$. *On a* $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$ *si et seulement si* $g \cdot h^{-1} \cdot h' = h^{-1} \cdot h \cdot g$ *si et seulement si* $h^{-1} \cdot h \in S_g$ *si et seulement si* $h' \in hS_g$. *Or* $|hS_g| = |S_g|$ *car*

$$\begin{array}{rccc} I_h: & S_g & \to & hS_g \\ & x & \mapsto & h \cdot x \end{array}$$

est bijective de réciproque $I_{h^{-1}}$. *Soit la relation d'équivalence* $\mathcal{R}_0$ *sur* G *définie par* $h\mathcal{R}_0h'$ *si et seulement si* $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$. *Chaque classe à* $|S_g|$ *éléments et il y y a* $|C(g)|$ *classes dans* G *d'où* $|G| = |S_g||C(g)|$.

3. *On a* $Z(G) = \cap_{g\in G} S_g$ *donc* $Z(G)$ *est un sous-groupe et pour tout* $g \in G$, $Z(G) \subset S_g$.

4. *Pour* $x \in G$, *on note* $\overline{x} = \{h \cdot x \cdot h^{-1} \mid h \in G\} = C(x)$.

   On a $|\overline{x}| = 1$ *si et seulement si pour tout* $h \in G$, $h \cdot x \cdot h^{-1} = x$ *si et seulement si* $x \in Z(G)$.

   Soit $\mathcal{A}$ *une partie de* G *telle que* $(\overline{x})_{x\in\mathcal{A}}$ *forme une partition de* $G \setminus Z(G)$. *On a*

$$|G| = p^\alpha = |Z(G)| + \sum_{x\in\mathcal{A}} |C(x)|$$

   Si $x \in \mathcal{A}$, $x \notin Z(G)$ *donc* $|S_x| < |G|$ *(car* $x \in Z(G)$ *si et seulement si* $S_x = G$*) et donc*

$$|C(x)| = \frac{|G|}{|S_x|}$$

   d'après 2. Donc $|C(x)| = p^\beta$ *avec* $\beta \in \{1, \ldots, \alpha\}$ *car* $|C(x)| \neq 1$. *Donc*

$$p \,\Big|\, \sum_{x\in\mathcal{A}} |C(x)|$$

   d'où

$$p \mid |Z(G)|$$

   donc $|Z(G)| \neq 1$.

5. *On a*

$$p^2 = |Z(G)| + \sum_{x\in\mathcal{A}} |C(x)|$$

   D'après la question 4, on a $|Z(G)| \neq 1$ *et* $|Z(G)| \mid |G|$.

   Si $Z(G) \neq G$, *alors* $|Z(G)| = p$. *Pour* $x \in \mathcal{A}$, $Z(G) \subset S_x \neq G$ *donc* $|S_x| = p$ *(car* $|S_x| \mid |G|$*) et donc* $Z(G) = S_x$. *Or* $x \in S_x$ *et* $x \notin Z(G)$ *ce qui n'est pas possible, donc* $|Z(G)| = p^2$ *et* $Z(G) = G$. *Donc* G *est abélien.*

   S'il existe un élément d'ordre p^2. G *est cyclique et est isomorphe à* $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. *Sinon, pour tout* $x \in G \setminus \{e_G\}$, *on a* $\omega(x) = p$. *Soit* $x_1 \in G \setminus \{e_G\}$ *et* $x_2 \in G \setminus gr\{x_1\}$. *Soit*

$$f: \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2 & \to & G \\ (\overline{k}, \overline{l}) & \mapsto & x_1^k \cdot x_2^l \end{array}$$

   f *est bien définie car si* $\overline{k} = \overline{k'}$ *et* $\overline{l} = \overline{l'}$, *on a* $p \mid k - k'$ *et* $p \mid l - l'$ *donc* $x_1^k \cdot x_2^l = x_1^{k'} \cdot x_2^{l'}$. *Comme* G *est abélien,* f *est un morphisme.*

Montrons que f est injective. Soit $(\overline{k}, \overline{l}) \in \ker(f)$ avec $(k,l) \in \{0,\dots,p-1\}^2$, on a $x_1^k \cdot x_2^l = e_G$ donc $x_2^l = x_1^{-k}$. Si $l \in \{1,\dots,p-1\}$ or p est premier donc $l \wedge p = 1$ donc il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $lu + pv = 1$. Alors on a

$$x_2 = x_2^{lu+pv} = x_2^{lu} \cdot x_2^{pv} = x_2^{lu} = x_1^{-k} \in gr\{x_1\}$$

ce qui n'est pas possible. Donc $\overline{l} = \overline{0}$ et de même $\overline{k} = \overline{0}$ donc f est injective et ainsi $|\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}| = |G|$ donc f est un isomorphisme.

Remarque 1.3. Les groupes de cardinal p^3 ne sont pas nécessairement abélien, par exemple le groupe des isométries du carré $\mathcal{D}_4$ de cardinal 8.

Solution 1.11. *Soit f un morphisme de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n$ donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $f(1) = r_0$ donc $f\colon n \mapsto r_0^n$.*

Soit f un morphisme de $(\mathbb{Q},+)$ dans $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$. Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $f(1) = f(\frac{1}{a})^a$. Pour tout p premier, on a $\nu_p(f(1)) = a\nu_p(f(\frac{1}{a}))$ donc pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $a \mid \nu_p(f(1))$ donc $\nu_p(f(1)) = 0$ pour tout p premier, donc $f(1) = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n = 1$ et $f(b \times \frac{a}{b}) = f(a) = 1 = f(\frac{a}{b})^b$ donc $f(\frac{a}{b}) = 1$. Donc $f\colon r \mapsto 1$.

Solution 1.12. *On a $xy = y^2x$, $x^2y = xy^2x = y^4x^2$, $x^3y = x^2y^2x = xy^4x^2 = y^8x^3$, $x^5y = y^{32}x^5$ donc $y^{31} = e_G$ et $\omega(y) = 31$. Tout élément de G peut s'écrire $y^\lambda x^\mu$ avec $(\lambda,\mu) \in \{0,\dots,30\} \times \{0,\times 4\}$. Soit*

$$\begin{array}{rccl} f\colon & \{0,\dots,30\} \times \{0,\times 4\} & \to & G \\ & (\lambda,\mu) & \mapsto & y^\lambda x^\mu \end{array}$$

est surjective par construction. Soit $((\lambda,\mu),(\lambda',\mu')) \in (\{0,\dots,30\} \times \{0,\times 4\})^2$ tel que $y^\lambda x^\mu = y^{\lambda'} x^{\mu'}$ donc $y^{\lambda-\lambda'} = x^{p'-p}$ d'où $y^{5(\lambda-\lambda')} = x^{5(\mu'-\mu)} = e_G$. Or $\omega(y) = 31$ donc $31 \mid 5(\lambda-\lambda')$ et d'après le théorème de Gauss, $31 \mid \lambda - \lambda'$. Or $(\lambda,\lambda') \in \{0,\dots,30\}^2$ donc $\lambda = \lambda'$ et de même $\mu = \mu'$ donc f est injective donc bijective et $|G| = 155$. Soit G' un autre tel groupe engendré par x' et y', on forme

$$\begin{array}{rccl} g\colon & G & \to & G \\ & y^p x^\mu & \mapsto & y'^\lambda x'^\mu \end{array}$$

et on vérifie que g est un isomorphisme.

Solution 1.13.

1. *Soit $i \in \{1, \dots, r\}$, il existe nécessairement $y_i \in G$ tel que $\nu_{p_i}(\omega(y_i)) = p_i^{\alpha_i}$ (où ν_p est la valuation p-adique), sinon on ne pourrait pas avoir ce terme dans le* ppcm. *Donc $p_i^{\alpha_i} \mid \omega(y_i)$.*
2. *Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega(y_i) = p_i^{\alpha_i} n$. Posons $x_i = y_i^n \in G$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$,*
$$x_i^k = e_G \Longleftrightarrow y_i^{nk} = e_G \Longleftrightarrow \omega(y_i) \mid nk \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid k$$
Donc $\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}$.
3. *On pose $x = \prod_{i=1}^r x_i$. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors*
$$x^k = e_G \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^r x_i^k = e_G$$
Pour $i \in \{1, \dots, r\}$, on met le tout à la puissance $M_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r p_j^{\alpha_j}$. On a alors, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,
$$x_i^{kM_i} = e_G \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid kM_i \Longleftrightarrow p_i^{\alpha_i} \mid k$$
la dernière équivalence venant du théorème de Gauss. Donc pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $p_i^{\alpha_i} \mid k$, ce qui équivaut donc à $N \mid k$ et donc $\omega(x) = N$.

Solution 1.14. *Sur un corps commutatif, un polynôme de degré n admet au plus n racines. Montrons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{K}^*$ tel que $\omega(x_i) = |\mathbb{K}^*|$. Par définition de N, pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $\omega(x) \mid N$. D'où $x^N = 1_{\mathbb{K}}$. Donc x est racine de $X^N - 1$. Ainsi, $|\mathbb{K}^*| \leqslant N$. Par ailleurs, $N \mid |\mathbb{K}^*|$ car pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $x^{|\mathbb{K}^*|} = 1_{\mathbb{K}^*}$. Donc $|\mathbb{K}^*| = N$ et donc $\mathbb{K}^* = gr\{x_1\}$.*

On a $|\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*| = 12$ donc pour tout $\overline{x} \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, $\omega(\overline{x}) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. On a $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{2}^3 = \overline{8}$, $\overline{2}^4 = \overline{16} = \overline{3}$, $\overline{2}^6 = \overline{12}$ donc $\omega(\overline{2}) = 12$ et
$$\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^* = gr\{\overline{2}\} = \left\{\overline{2}^k \mid k \in \{0, \dots, 11\}\right\}$$

Solution 1.15.

1. *Soit $(x, y) \in G^2$, on a $(x \cdot y)^2 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = e_G$ donc $x \cdot y = y^{-1} \cdot x^{-1}$ et comme $x^2 = e_G$, $x^{-1} = x$ d'où $xy = yx$ et G est abélien.*
2. *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice minimale de G : pour tout $x \in G$, il existe$(\varepsilon_i) \in \{0, 1\}^n$ tel que $x = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$ (car G est abélien). Soit*
$$\begin{array}{rccc} f : & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n & \to & G \\ & (\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) & \mapsto & \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \end{array}$$

Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a $\overline{\varepsilon_i} = \overline{\varepsilon_i'}$, alors $x^{\varepsilon_i} = x^{\varepsilon_i'}$ car $x_i^2 = e_G$ et $2 \mid \varepsilon_i - \varepsilon_i'$. Donc f est bien définie.

f est clairement un morphisme (car G est abélien). D'après la première question, f est surjective. Montrons que f est injective. Soit $(\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n})$ tel que $\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} = e_G$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, supposons ε_i impair, on a alors $x_i = \varepsilon_i = x_i$. D'où $x_i = \prod_{j=1}^n x_j^{-\varepsilon_j} = \prod_{j=1}^n x_j^{\varepsilon_j}$ car $x^2 = e_G$. Donc $x_i \in gr(x_j, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i)$, ce qui contredit le caractère minimal de $(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi, f est injective donc est un isomorphisme.

Remarque 1.4. En notant $+$ la loi sur G, on peut définir

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G & \to & G \\ & (\varepsilon, x) & \mapsto & x^{\varepsilon} \end{array}$$

. Alors $(G, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel, de dimension finie n car G est fini, et le choix d'une base réalise un isomorphisme de $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ dans $(G, +)$.

Remarque 1.5. Par isomorphisme, on a

$$\prod_{x \in G} x = f\Big(\sum_{(\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} (\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n})\Big)$$

Pour $n = 1$, on a $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$, pour $n = 2$, on a $(\overline{0}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{0})$. Pour $n > 2$, $\overline{1}$ apparaît 2^{n+1} fois sur chaque coordonnée (donc un nombre pair de fois), donc la somme fait $(\overline{0}, \dots, \overline{0})$.

Solution 1.16.

1. *Si G est abélien, on a $D(G) = \{e_G\}$.*
2. *Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, σ se décompose en un produit d'un nombre pair de transpositions. Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux transpositions.*
   - *Si $\{a, b\} = \{c, d\}$, alors $[a, b] \circ [c, d] = id$.*
   - *Si $a \in \{c, d\}$, supposons par exemple $a = c$ et $b \neq d$. On a alors $[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ [a, d] = [b, a, d]$.*
   - *Si $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, on a*

$$[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ \underbrace{[b, c] \circ [b, c]}_{=id} \circ [c, d] = [a, b, c] \circ [b, c, d]$$

Donc les 3-cycles engendrent $\mathcal{A}_n$.

3. *On a*

$$\sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(a_3))$$

On peut trouver $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ telle que a_i soit envoyé sur b_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et les éléments $\{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, b_2 b_3\}$. Donc les 3-cycles sont conjugués dans Σ_n.

Si $n \geqslant 5$ et σ impair, soit $(c_1, c_2) \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$. $\sigma' = \sigma \circ [c_1, c_2]$ est pair et $\sigma'(a_i) = b_i$. Donc les trois cycles sont conjugués dans $\mathcal{A}_n$ pour $n \geqslant 5$. C'est cependant faux pour $n = 3$ et $n = 4$.

4. *Soit $(\sigma, \sigma') \in \Sigma_n^2$. En notant $\mathcal{E}$ la signature d'une permutation (morphisme de $(\Sigma_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$), on a*

$$\mathcal{E}(\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1}) = 1$$

donc $\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1} \in \mathcal{A}_n$. Donc $D(\Sigma_n) \subset \mathcal{A}_n$.

Soit ensuite (a_1, a_2, a_3) un 3-cycle. On a $(a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$ et $(a_1, a_3, a_2)^{-1} = (a_1, a_2, a_3)$. Ainsi, on a

$$\sigma \circ (a_1, a_3, a_2) \circ \sigma^{-1} \circ (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$$

On pose $\sigma = [a_2, a_3]$, et alors (a_1, a_2, a_3) est un commutateur. Ainsi, $(a_1, a_2, a_3) \in D(\Sigma_n)$ et donc $\mathcal{A}_n \subset D(\Sigma_n)$ (d'après la première question).

Finalement, on a $D(\Sigma_n) = \mathcal{A}_n$.

Remarque 1.6. Pour $n \geqslant 5$, on a $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$.

Solution 1.17.

1. *Pour $g \in G$, τ_g est bijective de réciproque $\tau_{g^{-1}}$. On a notamment $\tau_{g \cdot g'} = \tau_g \circ \tau_{g'}$ donc τ est un morphisme. Si $g \in G$ est tel que $\tau_g = id$, pour tout $x \in G$, on a $gx = x$ donc $g = e_G$. Donc τ est un morphisme injectif et G est isomorphe à $\mathrm{Im}\tau = \tau(G)$, sous-groupe de $\Sigma(G)$, lui-même isomorphe à Σ_n.*

2. *Soit*

$$\begin{array}{rccl} f: & \Sigma_n & \to & GL_n(\mathbb{C}) \\ & \sigma & \mapsto & (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = P_\sigma \end{array}$$

P_σ *est la matrice de permutation associée à* σ. f *est un morphisme, et est injectif, donc* G *est isomorphe à un sous-groupe de* $GL_n(\mathbb{C})$.

Solution 1.18. *Soit* $(x,y,z,t) \in \mathbb{N}^4$ *tel que* $x^2+y^2+z^2 = 8t+7$. *Dans* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, *on a* $\overline{0}^2 = \overline{0}$, $\overline{1}^2 = \overline{1}$, $\overline{2}^2 = \overline{4}$, $\overline{3}^2 = \overline{1}$, $\overline{4}^2 = \overline{0}$, $\overline{5}^2 = \overline{1}$, $\overline{6}^2 = \overline{4}$ *et* $\overline{7}^2 = \overline{1}$. *Donc la somme de 3 de ces classes ne donnent pas* $\overline{7}$.

Par récurrence, prouvons la propriété. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{N}^4$ *tel que* $x^2+y^2+z^2 = (8t+7)4^{n+1}$. *Parmi* x,y,z *les trois sont pairs ou deux d'entre eux sont impairs. Si* x,y *impairs et* z *pair, on écrit* $x = 2x'+1, y = 2y'+1, z = 2z'$, *alors* $x^2+y^2+z^2 \equiv 2[4]$ *mais* $(8t+7)4^{n+1} \equiv 0[4]$ *: contradiction. Nécessairement,* x,y *et* z *sont pairs. En divisant par* 4, *on se ramène donc à l'hypothèse de récurrence.*

Solution 1.19. *On raisonne sur* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. *On a* $\overline{10^{10^n}} = \overline{3^{10^n}}$. *Dans le groupe* $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$, $\overline{3}$ *a un ordre qui divise* $|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*| = 6$. *On a* $\overline{3}^2 = \overline{2}$, $\overline{3}^3 = \overline{-1}$ *et* $\overline{3}^6 = \overline{1}$. *Donc* $\overline{3}^{6k} = \overline{1}, \overline{3}^{6k+1} = \overline{3}, \overline{3}^{6k+2} = \overline{2}, \overline{3}^{6k+3} = \overline{-1}, 3^{6k+4} = \overline{4}$ *et* $3^{6k+5} = \overline{5}$..

On se place maintenant dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\overline{10} = \overline{4}, \overline{10}^2 = \overline{4}$ *et donc par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{10}^n = \overline{4}$. *Donc il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $10^n = 6k+4$. *Ainsi,* $\overline{10^{10^n}} = \overline{4}$.

Solution 1.20.

1. *On a* $F_1 = 5$ *et* $2 + \prod_{k=0}^{0} F_k = 2+3 = 5$. *Soit* $n \geqslant 1$, *supposons que* $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$. *Alors*

$$\begin{aligned} F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 &= (2^{2^n})^2 - 1 \\ &= (2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1) \\ &= F_n(F_n - 2) \\ &= F_n \times \prod_{k=0}^{n-1} F_k \\ &= \prod_{k=0}^{n} F_k \end{aligned}$$

   d'où le résultat par récurrence.

2. *Soit* p *un facteur premier de* F_n. *S'il existe* $k \in \{0, \dots, n-1\}$ *tel que* $p \mid F_k$, *alors d'après la première question on a* $p \mid F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k = 2$. *Donc* $p = 2$. *Or* F_n *est impair, donc*

non divisible par deux, ce qui est absurde. Donc p ne divise aucun F_k pour $k \in \{0, n-1\}$ et il existe donc une infinité de nombres premiers (car les F_n sont tous différents deux à deux).

Remarque 1.7. Si $n \neq m$ alors $F_n \wedge F_m = 1$.

2 Séries numériques et familles sommables

3 Probabilités sur un univers dénombrable

4 Calcul matriciel

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. *Tout d'abord,* $\deg(L_n) = n$ *et son coefficient dominant et* $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. -1 *et* 1 *sont racines d'ordre* n *de* P_n *donc pour tout* $k \in \{0,\dots,n-1\}$ $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$. *Ainsi, on a par intégrations par parties successives :*

$$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^{1} f^{(n)}(t) P_n(t)dt$$

Notamment, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P^{(n)} = 0$ *et* $(P|L_n) = 0$. *En particulier, pour tout* $m < n$, $\deg(L_m) \leqslant n-1$ *et* $(L_m|L_n) = 0$ *donc* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de* L_n *grâce aux intégrales de Wallis :*

$$\begin{aligned}\|L_n\|_2^2 &= (L_n|L_n)\\ &= (-1)^n \int_{-1}^{1} L_n^{(n)}(t^2-1)^n dt\\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt\end{aligned}$$

On pose $t = \cos(\theta)$ *d'où* $dt = -\sin(\theta)d\theta$, *d'où*

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt &= \int_0^{\pi} \sin(\theta)^{2n+1} d\theta\\ &= 2I_{2n+1} \text{ [Wallis]}\end{aligned}$$

On a classiquement $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. *D'où*

$$\begin{aligned}I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}\times\frac{2n-2}{2n-1}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\underbrace{I_1}=1\\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

d'où

$$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\times 2 \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

2. *On utilise la formule de Leibniz en écrivant* $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$.

3. *On montre le résultat par récurrence sur* $k \in \{0,\dots,n\}$ *en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que* $L_n = P_n^{(n)}$ *s'annule au moins* n *fois sur* $]-1,1[$. *Or* $\deg(L_n) = n$, *donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.*

4. $(L_0,\dots,L_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$ *(étagée en degré). Donc il existe* $(\alpha_{n,0},\dots,\alpha_{n,k})\in\mathbb{R}^{k+1}$ *tel que* $XL_{n-1}=\sum_{k=0}^n\alpha_{n,k}L_k$*. Si* $k\leqslant n-3$*, on a*

$$(XL_{n-1}L_k)=\alpha_{n,k}\|L_k\|_2^2=(L_{n-1}XL_k)=0$$

car $\deg(XL_k)=k+1\leqslant n-2$*. Donc*

$$XL_{n-1}=\alpha_{n,n-2}L_{n-2}+\alpha_{n,n-1}L_{n-1}+\alpha_{n,n}L_n$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(Xl_{n-1}|L_{n-1})=\int_{-1}^1 tL_{n-1}(t)^2dt$$

Or P_n *est paire, donc* L_n *est de la parité de* n *et donc* L_n^2 *est paire puis* XL_n^2 *est impaire. Donc* $\alpha_{n,n-1}=0$*.*

$$\begin{aligned}(XL_{n-1}|L_{n-2})&=\alpha_{n,n-2}\underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{=\frac{2}{2n-3}}\\&=(-1)^n\int_{-1}^1 P_{n-1}(t)\underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}}\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\int_{-1}^1 P_{n-1}(t)dt&=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\underbrace{\int_{-1}^1(1-t^2)^{n-1}dt}_{2I_{2n-1}}\\&=\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}\times 2\times\frac{2^{2n-2}(n-1)!)^2}{(2n-1)!}\\&=\frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!}\end{aligned}$$

donc $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}}=\frac{n-1}{n}$*. D'où le résultat.*

Solution 7.2. *On forme*

$$\begin{array}{rccl} g: & [a,b] & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \underbrace{\Delta f(x_0,\dots,x_{n-1},x)}_{\varphi(x)}-\underbrace{\prod_{i=0}^{n-1}(x-x_i)A}_{P(x)}\end{array}$$

On a $g(x_n) = 0$. *On suppose les* $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *distincts, et on pose*

$$A = \frac{V(x_0, \dots, x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1}(x_n - x_i)}$$

g *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *et pour tout* $i \in \{0, \dots, n\}$, *on a* $g(x_i) = 0$. *Donc il existe* $\xi \in]a, b[$ *tel que* $g^{(n)}(\xi) = 0$ *(théorème de Rolle appliqué* n *fois.* $\deg(P) = n$ *et son coefficient dominant est* A *donc* $P^{(n)}(\xi) = An! = \varphi^{(n)}(\xi)$.

On développe maintenant $\varphi(x)$ *par rapport à la dernière colonne :*

$$\varphi(x) = f(x) \times V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + Q(X)$$

avec $\deg(Q) \leqslant n-1$ *et* $V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_i - x_j)$ *(déterminant de Vandermonde). On a donc*

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \prod_{0\leqslant j<i\leqslant n-1}(x_j - x_i)$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{A}{\prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(x_j - x_i)} = \Delta f(x_0, \dots, x_n)$$

Solution 7.3. *On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.*

$$f(0) = f\Big(\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}f'\Big(\frac{1}{2}\Big) + \int_{\frac{1}{2}}^{0} -tf''(t)dt$$

et de même

$$f(1) = f\Big(\frac{1}{2}\Big) - \frac{1}{2}f'\Big(\frac{1}{2}\Big) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)f''(t)dt$$

D'où

$$\begin{aligned} A(f) &= f(0) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) + f(1) - f\Big(\frac{1}{2}\Big) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} tf''(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)f''(t)dt \\ &\leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)dt \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Et c'est atteint pour $f(t) = \frac{t^2}{4}$.

Solution 7.4. *Pour tout* $(x,h)\in\mathbb{R}^2$, $f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)$ *donc*

$$f'(x)=\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1)) \tag{7.1}$$

donc f' *est* $\mathcal{C}^1$ *et donc* f *est* $\mathcal{C}^2$*. On fixe alors* x *et on dérive deux fois* (7.1) *en fonction de* h*. On a alors*

$$f''(x+h)=f''(x-h)$$

pour tout $(x,h)\in\mathbb{R}^2$ *donc* f'' *est constante et* f *est polynômiale de degré 2.*

Réciproquement, si $f(x)=ax^2+bx+c$*, on a bien la relation de l'énoncé.*

Solution 7.5.

1. *Soit* $a>0$,

$$\begin{array}{rccc}\tau_a: & \mathbb{R} & \to &]a,+\infty[\\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{array}$$

est croissante. Donc il existe $l=\lim\limits_{x\to+\infty}\tau_a(x)\in\overline{\mathbb{R}}$*. On écrit alors*

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{x}+\frac{f(a)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{} l$$

2. *S'il existe* $a<b\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ *tel que* $f(a)<f(b)$*, alors* $\tau_a(b)>0$*. Comme* τ_a *est croissante,* $l\geqslant\tau_a(b)>0$*. Par contraposée, si* $l\geqslant 0$*,* f *est décroissante.*

3. *Posons pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x)=f(x)-lx$*. Pour* $x<y$*, on a*

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-l\leqslant 0$$

Donc φ *est décroissante et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\in\overline{\mathbb{R}}$ *existe.*

Solution 7.6.

1. *On forme*

$$\begin{array}{rccc}g: & [0,1] & \to & \mathbb{R}\\ & x & \mapsto & \frac{1}{\frac{1}{p}+x}\end{array}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{np}\sum_{k=0}^{np}\frac{1}{\frac{1}{p}+\frac{k}{np}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{dx}{\frac{1}{p}+x}=\ln(p+1)=l_p$$

2. *On note* $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

   Soit $\varepsilon_0 > 0$. *Il existe* $\alpha_0 > 0$ *tel que si* $0 < x < \alpha_0$, *alors* $|\varepsilon(x_0)| \leqslant \varepsilon_0$, *et il existe* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{n} \leqslant \alpha_0$. *Alors pour tout* $n \geqslant N_0$, *pour tout* $k \in \{0, \dots, np\}$,

$$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left|\varepsilon\Big(\frac{1}{k+n}\Big)\right| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}$$

   et

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{k+n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leqslant \frac{\varepsilon_0}{p}\frac{np+1}{n+1} \leqslant \varepsilon_0$$

   On a donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(p+1)f'(0)$$

3. *On peut penser à* $f\colon x \mapsto \sqrt{x}$ *continue et* $f(0) = 0$. *De plus,*

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geqslant \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

   donc v_n *diverge.*

4. *On écrit* $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + x^2\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon\to+\infty]{} 0$. *Ainsi,*

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{bp} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{(k+n)^2}$$

   Soit $\varepsilon > 0$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tout* $n \geqslant N$, *pour tout* $k \in \{0, \dots, np\}$, $|\varepsilon(\frac{1}{n+k})| \leqslant \varepsilon$ *et donc*

$$\left|\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2}$$

   donc

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right)$$

   puis

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(np)^2} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2}$$
$$= \frac{1}{np} \times \underbrace{\frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{(\frac{1}{p}+x)^2}}$$

donc

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{f''(0)p}{n(p+1)}$$

Solution 7.7. *Supposons que f' ne tend pa vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \geqslant A, |f'(x_A)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\alpha_0 \geqslant 0$, $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $|x-y| \leqslant \alpha_0$ alors $|f'(x) - f'(y)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $t \in [x_A - \alpha, x_A + \alpha]$, on a*

$$|f'(t)| \geqslant |f'(x_A)| - |f'(x_A) - f'(t)| \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}$$

et pour $A = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geqslant n, \forall t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f'(t)| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{n}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f' > 0$ sur les $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Alors

$$f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = \int_{x_n - \alpha_0}^{x_n + \alpha_0} f'(t)dt \geqslant \varepsilon_0 \alpha_0 > 0$$

mais comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = 0$$

d'où la contradiction.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, on applique ce qui précède à $\Im(f)$ et $\Re(f)$.

Si f' n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

car $|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}$ et

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}\sin(x^2)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{2x\cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en } +\infty}$$

Solution 7.8. *Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x+\frac{h}{2}) \xrightarrow[h\to 0]{} g(x)$$

par continuité de g. Donc f est dérivable et $f' = g$. Par ailleurs, pour $y = \frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = f(x+\frac{1}{2}) - f(x-\frac{1}{2})$$

par récurrence f est $\mathcal{C}^\infty$.

En outre, en fixant x et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à y, on a

$$f''(x+y) - f''(x-y) = 0$$

Donc f'' est constante donc f est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec $f' = g$).

Solution 7.9. *On a*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(f(k)+f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt$$

On note $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ de classe $\mathcal{C}^2$.

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \int_a^b F''(t)(b-t)dt$$

Pour $a = k$ et $b = k + \frac{1}{2}$, on a

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k) + \frac{1}{2}F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}-u)du$$

et pour $a = k+1, b = k+\frac{1}{2}$,

$$F(k+\frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k+\frac{1}{2}-t)f'(t)dt = F(k+1) - \frac{1}{2}F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} uf'(k+\frac{1}{2}+u)du$$

On a donc

$$\frac{1}{2}(f(k)-f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t)dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u(f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u))du$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u)}_{\geqslant 0 \text{ car } u\geqslant 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du$$

et $f'(k+\frac{1}{2}+u) - f'(k+\frac{1}{2}-u) \leqslant f'(k+1) - f'(k)$ *d'où*

$$S_n \leqslant \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} udu}_{=\frac{1}{8}}(f'(n) - f'(1))$$

Solution 7.10.

1. *D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a*

$$\begin{cases} \|A\| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2 \\ \|B\| \leqslant \frac{h^2}{2} M_2 \end{cases}$$

   On a $B - A - f(x-h) + f(x+h) = 2hf'(x)$ *d'où*

$$\|f'(x)\| \leqslant \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}$$

   Donc f' *est bornée sur* $\mathbb{R}$*. On a ensuite un majorant qui dépend de* h *que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.*

2. *L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau*

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|A_k\| \leqslant \frac{k^n}{n!} M_n$$

   On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1 - f(x+1) \\ \vdots \\ A_k - f(x+k) \\ \vdots \\ A_n - f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

   On a

$$\det(M) = \frac{(-1)^n}{1! \times 2! \times \cdots \times (n-1)!} V(1, \dots, n)$$

où V est le déterminant de Vandermonde. Donc $\det(M) \neq 0$. On peut former les $f^{(j)}(x)$ en fonction des $(A_i - f(x+i))_{1 \leqslant i \leqslant n}$: il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - f(x+i))$. Donc

$$\|f^{(j)}(x)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \Big(\frac{n}{n!} M_n + M_0 \Big)$$

Donc $f^{(j)}$ est bornée pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$.

Solution 7.11.

1. $$l_{\sigma,\gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \Big\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \gamma'(t) dt \Big\| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

2. *On a*

$$\begin{aligned} \Big| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \Big| &= \Big| \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| - \| \underbrace{(a_{i+1} - a_i)}_{>0} \gamma'(a_i) \| \Big| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) - (a_{i+1} - a_i)\gamma'(a_i)\| \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt \end{aligned}$$

3. *$\|\gamma'\|$ est continue donc*

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\delta(\sigma) \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i)$$

Donc α_0 existe.

γ' est continue sur $[a,b]$ donc uniformément continue sur $[a,b]$, et il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in [a,b]^2$, on a

$$|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow \|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Alors si $\delta(\sigma) \leqslant \alpha_1$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, pour tout $t \in [a_i, a_{i+1}]$, on a

$$|t - a_i| \leqslant (a_{i+1} - a_i) \leqslant \alpha_1$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i) - \gamma'(t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\|(a_{i+1} - a_i) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, si $@d(\sigma) \leqslant \min(\alpha_0, \alpha_1)$, *on a*

$$\left| l_{\sigma,\gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leqslant \varepsilon$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

4. *On a*

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \end{pmatrix}$$

donc $\|\gamma'(t)\| = R$ *et* $l(\gamma) = 2\pi R$.

Solution 7.12.

1. *Pour tout* $t \in I$, *on a*

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{\mathrm{i}\theta_2(t)}$$

donc

$$e^{\mathrm{i}(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, *il existe* $k(t) \in \mathbb{Z}$ *telle que* $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$. *On a*

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi}$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à k_0 *d'après le théorème des valeurs intermédiaires.*

2. *Si* $\gamma(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$,

$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *par composition,* f *est* $\mathcal{C}^k$. *On a alors*

$$f(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = \mathrm{i}\theta'(t) e^{\mathrm{i}\theta(t)} = \mathrm{i}\theta'(t) f(t)$$

Donc

$$\theta(t) = -\mathrm{i}\frac{f'(t)}{f(t)}$$

De plus, on a

$$\theta(t) = \theta(t_0) - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

pour $t_0 \in I$.

3. *On fixe* $t_0 \in I$. *Soit* θ_0 *un argument de* $\gamma(t_0)$, *on pose*

$$\theta(t) = \theta_0 - \mathrm{i}\int_{t_0}^{t} \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

Comme $\frac{f'}{f}$ *est* $\mathcal{C}^{k-1}$, θ *est bien* $\mathcal{C}^k$. *On forme* $g(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)}$ *qui est de classe* $\mathcal{C}^k$. *On a*

$$g'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t)$$

donc $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$, *donc* $\frac{g}{f}$ *est constante sur* I *et* $g(t_0) = e^{\mathrm{i}\theta_0} = f(t_0)$ *donc* $g = f$ *sur* I. *Ainsi, pour tout* $t \in I$, *on a* $|f(t)| = |e^{\mathrm{i}\theta(t)}| = 1$ *et si* $\theta(t) = a(t) + \mathrm{i}(t)$, *on a donc*

$$e^{\mathrm{i}\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{\mathrm{i}a(t)}$$

donc $b(t) = 0$ *et* $\theta(t) \in \mathbb{R}$.

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires