

*Solutions Exercices MP/MP\**

# Table des matières

<b>1 Algèbre Générale</b>	<b>2</b>
<b>2 Séries numériques et familles sommables</b>	<b>38</b>
<b>3 Probabilités sur un univers dénombrable</b>	<b>98</b>
<b>4 Calcul matriciel</b>	<b>99</b>
<b>5 Réduction des endomorphismes</b>	<b>100</b>
<b>6 Espaces vectoriels normés</b>	<b>103</b>
<b>7 Fonction d'une variable réelle</b>	<b>143</b>
<b>8 Suites et séries de fonctions</b>	<b>154</b>
<b>9 Séries entières</b>	<b>155</b>
<b>10 Intégration</b>	<b>156</b>
<b>11 Espaces préhilbertiens</b>	<b>157</b>
<b>12 Espaces euclidiens</b>	<b>158</b>
<b>13 Calcul différentiel</b>	<b>159</b>
<b>14 Équation différentielles linéaires</b>	<b>160</b>

# 1 Algèbre Générale

**Solution 1.1.** Soit  $(x, y) \in G^2$ . On a d'abord

$$\begin{aligned}x \cdot y &= (x \cdot y)^{p+1} (x \cdot y)^{-p} \\&= x^{p+1} \cdot y^{p+1} \cdot y^{-p} \cdot x^{-p} \\&= x^{p+1} \cdot y \cdot x^{-p}\end{aligned}\tag{1.1}$$

On cherche maintenant à montrer que  $x^{p+1}$  et  $y$  commutent. On a

$$\begin{aligned}y^{p+2} \cdot x^{p+2} &= (y \cdot x)^{p+2} \\&= (y \cdot x)^{p+1} \cdot y \cdot x \\&= y^{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot y \cdot x\end{aligned}$$

Donc on a  $y \cdot x^{p+1} = x^{p+1} \cdot y$ . En reportant dans (1.1), on a  $x \cdot y = y \cdot x$  et donc  $G$  est abélien.

**Remarque 1.1.**

- Pour  $(\Sigma_3, \cdot)$ , on a  $f_0, f_1$  et  $f_6$  des morphismes mais  $\Sigma_3$  n'est pas commutatif.
- Si  $f_2$  est un morphisme, alors on a  $(x \cdot y)^2 = x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2$  d'où  $y \cdot x = x \cdot y$ .

**Solution 1.2.**  $A$  est non vide car  $\omega(e_G) = 1$  et  $e_G \in A$ . Soit  $x \in A$  tel que  $\omega(x) = 2p + 1$ . Soit  $k \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\begin{aligned}x^{2k} = e_G &\Leftrightarrow 2p + 1 \mid 2k \\&\Leftrightarrow 2p + 1 \mid k\end{aligned}$$

d'après le théorème de Gauss.

Ainsi,  $\omega(x^2) = 2p + 1$  et  $x^2 \in A$ , donc

$$\begin{aligned}\varphi : A &\rightarrow A \\x &\mapsto x^2\end{aligned}$$

est bien définie. Soit  $x \in A$ , il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $x^{2p+1} = e_G$  donc  $x^{2p+2} = x$  d'où  $(x^{p+1})^2 = x$ . Il suffit donc de vérifier que  $x^{p+1}$  pour montrer que l'application est surjective. Comme  $A$  est fini, elle sera bijective.

On a  $gr\{x^{p+1}\} \subset gr\{x\}$  et  $(x^{p+1})^2 = x$  donc  $gr\{x\} = gr\{x^{p+1}\}$  donc  $\omega(x) = \omega(x^{p+1}) = 2p+1$  et donc  $x^{p+1} \in A$ .

**Solution 1.3.** On note  $m = \theta(\sigma)$ . On suppose que  $\sigma$  se décompose en produit de cycle de longueur  $l_1, \dots, l_m$  avec  $l_1 + \dots + l_m = n$ . Comme

$$(a_1, \dots, a_l) = [a_1, a_2] \circ [a_2, a_3] \circ \dots \circ [a_{l-1}, a_l]$$

Donc  $\sigma$  se décompose en  $\sum_{i=1}^m (l_i - 1) = n - m$  transpositions. Montrons par récurrence sur  $k$ ,  $\mathcal{H}(k)$ :  
 "Un produit de  $k$  transpositions possède au moins  $n - k$  orbites".

Pour  $k = 0$ ,  $\sigma = id$  possède  $n$  orbites.

Pour  $k = 1$ , soit  $\tau$  une transposition, on a  $\theta(\tau) = n - 2 + 1 = n - 1$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , supposons  $\mathcal{H}_k$ , soit  $\sigma \in \Sigma_n$  qui se décompose en produit de  $k+1$  transpositions.

$$\sigma = \underbrace{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k}_{\sigma'} \circ \tau_{k+1}$$

D'après  $\mathcal{H}_k$ , on a  $\theta(\sigma') \geq n - k$ . Notons  $\tau_{k+1} = [a, b]$ .

Si  $a$  et  $b$  appartiennent à la même orbite. On note  $(a_1, \dots, a_r)$  le cycle correspondant avec  $a_r = a$  et  $a_s = b$  où  $s \in \{1, \dots, r-1\}$ . On a

$$\begin{cases} (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_i) = a_{i+1} & \text{où } i \notin \{r, s\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_r) = a_{s+1} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_s) = a_1 \end{cases}$$

On n'a pas perdu d'orbites, donc  $\theta(\sigma) \geq n - k - 1$ .

Si  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas à la même orbite, notons  $(a_1, \dots, a_r)$  et  $(b_1, \dots, b_s)$  ces orbites avec  $a = a_r$  et  $b = b_s$ . On a

$$\begin{cases} \underbrace{(a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s]}_{\sigma''}(a_i) = a_{i+1} & \text{où } i \in \{1, \dots, r-1\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](b_j) = b_{j+1} & \text{où } j \in \{1, \dots, s-1\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](a_r) = b_1 \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s](b_s) = a_1 \end{cases}$$

Donc

$$\sigma'' = (a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$$

On a perdu une orbite et donc  $\theta(\sigma) \geq n - k - 1$ . D'où le résultat par récurrence sur  $k$ .

**Solution 1.4.** On note par  $\bar{k}$  les éléments de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  et par  $\tilde{l}$  les éléments de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ .

Soit  $f$  un morphisme. On pose  $f(\bar{1}) = \tilde{x}$  où  $x \in \{0, \dots, m-1\}$ . On a donc  $nf(\bar{1}) = f(\bar{0}) = \tilde{0}$ .

On a donc  $\tilde{nx} = \tilde{0}$  donc  $m \mid nx$ . On écrit  $m = m_1(m \wedge n)$  et  $n = n_1(m \wedge n)$ . D'après le théorème de Gauss, on a donc  $m_1 \mid x$ . Donc  $x = km_1$  avec  $k \in \{0, \dots, (n \wedge m) - 1\}$ .

Réciproquement, soit  $k \in \{0, \dots, (n \wedge m) - 1\}$ . On définit

$$\begin{aligned} f_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ \bar{l} &\mapsto \widetilde{lk m_1} \end{aligned}$$

Si  $\bar{l} = \bar{l}'$ , alors  $n \mid l - l'$  et donc  $nm_1 \mid (l - l')km_1$  puis  $n_1(n \wedge m)m_1 \mid (l - l')km_1$  donc  $m \mid (l - l')km_1$  d'où  $\widetilde{lk m_1} = \widetilde{l'k m_1}$  donc  $f$  est bien définie et c'est évidemment un morphisme.

Soit  $k, k' \in \{0, \dots, n \wedge m - 1\}$  avec  $k \neq k'$ . Si  $\widetilde{km_1} = \widetilde{k'm_1}$  alors  $m \mid (k - k')m_1$  et donc  $n \wedge m \mid k - k'$  et  $|k - k'| < n \wedge m$  donc  $k = k'$  ce qui est absurde. Ainsi, les  $f_k$  sont distincts, on a donc  $n \wedge m$  morphismes.

**Remarque 1.2.** Exemple pour l'exercice précédent : morphisme de  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ . On a  $f(\bar{1}) = \tilde{x}$  d'où  $4x = \tilde{0}$  donc  $3 \mid x$  d'où  $x \in \{0, 3\}$ . On a donc le morphisme trivial  $f_0 : \bar{l} \mapsto \tilde{0}$  et  $f_1 : \bar{l} \mapsto \tilde{3l}$ .

**Solution 1.5.** On considère  $H = \{x \in G \mid x^2 = e_G\}$ . Si  $x \notin H$ , alors  $x^{-1} \neq x$  et donc  $P = \prod_{x \in H} x$ .  $H$  est le noyau du morphisme  $x \mapsto x^2$  (morphisme car  $G$  est abélien) donc  $H$  est un sous-groupe. Soit  $K$  un sous-groupe de  $H$  et  $a \in H \setminus K$ . Montrons que  $K \cup aK$  est un sous-groupe de  $H$ .

On a  $e_G \in K \cup aK$ . Soit  $x \in K \cup aK \subset H$ , on a  $x^{-1} = x \in K \cup aK$ . Soit  $(x_1, x_2) \in (K \cup aK)^2$ , si  $(x_1, x_2) \in K^2$ , c'est ok. Si  $(x_1, x_2) \in (aK)^2$ , on note  $x_1 = a \cdot k_1$  et  $x_2 = a \cdot k_2$  avec  $(k_1, k_2) \in K^2$ . On a  $x_1 \cdot x_2 = a^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2 \in K$ . Si  $x_1 \in K$  et  $x_2 \in aK$ , alors  $x_1 \cdot x_2 = a \cdot k_1 \cdot k_2 \in aK$ . Donc  $K \cup aK$  est un sous-groupe de  $H$ .

Soit  $x \in K \cap aK$ , il existe  $(k_1, k_2) \in K^2$  tel que  $k_1 = a \cdot k_2$  et  $a \in K$  ce qui est impossible. Donc  $K \cap aK = \emptyset$ .

On construit alors par récurrence  $K_n$  : on pose  $K_0 = \{e_G\}$  et à l'étape  $n$ , si  $K_n = H$  on arrête, sinon il existe  $a_{n+1} \in H \setminus K_n$  et on pose  $K_{n+1} = K_n \cup a_{n+1}K$ . Alors  $|K_{n+1}| = 2|K_n|$ . Comme  $H$  est fini, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $H = K_{n_0}$ . On a alors  $|H| = 2^{n_0}$ .

Ainsi, si  $n_0 = 0$ , on a  $H = \{e_G\}$  et  $P = e_G$ . Si  $n_0 = 1$ , on a  $H = \{e_G, a_1\}$  et  $P = a_1 \neq e_G$ . Si  $n_0 \geq 2$ , comme chaque  $a_k$  apparaît un nombre pair de fois dans le produit, on a  $P = e_G$ .

**Solution 1.6.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $(\overline{kx_0})_{0 \leq k \leq n}$  ne sont pas deux à deux distincts. Donc il existe  $l \neq l' \in \{0, \dots, n\}^2$  tel que  $\overline{lx_0} = \overline{l'x_0}$  d'où  $0 < |l - l'| \leq n$ . Donc il existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $jx_0 \in G$ . Ainsi,  $n!x_0 \in G$  (itéré de  $jx_0$ ). Ce raisonnement est vrai pour  $x = \frac{x_0}{n!}$  donc  $x_0 \in G$ . Ainsi,  $G = \mathbb{R}$ .

**Solution 1.7.** Soit  $f$  un isomorphisme de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  dans lui-même. Soit  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a  $f(\overline{k}) = kf(\overline{1})$ . Par isomorphisme,  $\omega(f(\overline{1})) = \omega(\overline{1}) = n$ . Notons alors  $\overline{x} = f(\overline{1})$  avec  $x \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Si  $x \wedge n = 1$ , il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $ux + vn = 1$ , donc  $u\overline{x} = \overline{1} \in \text{gr}\{\overline{x}\}$ . Ainsi,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \text{gr}\{\overline{x}\}$  (car les éléments de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  sont des itérés de  $\overline{1}$ ) donc  $\omega(\overline{x}) = n$ .

Réciproquement, si  $\omega(\overline{x}) = n$ ,  $\overline{1} \in \text{gr}\{\overline{x}\}$  donc il existe  $u \in \mathbb{Z}$  tel que  $u\overline{x} = \overline{1} = \overline{ux}$ . Donc  $n \mid ux - 1$ , c'est-à-dire qu'il existe  $v \in \mathbb{Z}$  tel que  $ux - 1 = vn$ , d'où  $ux + vn = 1$ . D'après Bézout, on a  $x \wedge n = 1$ . Finalement, on a  $\omega(\overline{x}) = n$  si et seulement si  $x \wedge n = 1$ .

Ainsi, les isomorphismes sont nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} f_x : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \overline{k} &\mapsto \overline{kx} \end{aligned}$$

où  $x \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $x \wedge n = 1$ .

Réciproquement, si  $x \in \{0, \dots, n-1\}$  est tel que  $x \wedge n = 1$ ,  $f_x$  est évidemment un morphisme. Si  $\overline{k} \in \ker(f_x)$ , on a  $f_x(\overline{k}) = \overline{0}$  si et seulement si  $\overline{kx} = \overline{0}$  si et seulement si  $n \mid kx$  et comme  $n \wedge x = 1$ , d'après le théorème de Gauss, on a  $n \mid k$  donc  $\overline{k} = \overline{0}$  donc  $\ker(f_x) = \{\overline{0}\}$ . Donc  $f_x$  est injective, donc bijective car  $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$ .

**Solution 1.8.** Si  $y \in \text{Im}\varphi$ ,  $y$  possède  $|\ker \varphi|$  antécédents. En effet, il existe  $x_0 \in G$  tel que  $y = \varphi(x_0)$ . Pour tout  $x \in G$ , on a  $\varphi(x) = y$  si et seulement si  $\varphi(x) = \varphi(x_0)$  si et seulement si  $\varphi(x_0^{-1} \cdot x) = e_G$

si et seulement si  $x_0^{-1} \cdot x \in \ker \varphi$  si et seulement si  $x \in x_0 \ker \varphi$ . Comme

$$\begin{aligned} g : \ker \varphi &\rightarrow x_0 \ker \varphi \\ x &\mapsto x \cdot x_0 \end{aligned}$$

est bijective, on a  $|\ker \varphi| = |x_0 \ker \varphi|$ . Ainsi, on a  $|G| = |\operatorname{Im} \varphi| \times |\ker \varphi|$ .

Dans tous les cas, on a  $\ker \varphi \subset \ker \varphi^2$  et  $\operatorname{Im} \varphi^2 \subset \operatorname{Im} \varphi$ . On a ensuite

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi^2 = \operatorname{Im} \varphi &\iff |\operatorname{Im} \varphi^2| = |\operatorname{Im} \varphi| \\ &\iff |\ker \varphi^2| |\operatorname{Im} \varphi^2| = |\ker \varphi^2| |\operatorname{Im} \varphi| = |G| = |\ker \varphi| |\operatorname{Im} \varphi| \\ &\iff |\ker \varphi^2| = |\ker \varphi| \\ &\iff \ker \varphi^2 = \ker \varphi \end{aligned}$$

**Solution 1.9.** On considère

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^m \end{aligned}$$

l'exercice revient à montrer que  $f$  est bijective. D'après le théorème de Bézout, il existe  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $am + bn = 1$ . Soit  $y \in G$ , on a

$$y^1 = y = y^{am+bn} = y^{am} \cdot \underbrace{y^{bn}}_{=e_G} = y^{am} = (y^a)^m$$

Donc  $f$  est surjective et comme  $G$  est fini,  $f$  est bijective.

**Solution 1.10.**

1. On a  $e_G \in S_g$ , si  $(x, y) \in S_g^2$  alors  $x \cdot y \cdot g = x \cdot g \cdot y = g \cdot x \cdot y$  donc  $x \cdot y \in S_g$  et si  $x \in S_g$  alors  $x \cdot g = g \cdot x$  implique  $g \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot g$  en multipliant par l'inverse de  $x$  à gauche et à droite donc  $x^{-1} \in S_g$ .
2. Soit  $(h, h') \in G^2$ . On a  $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$  si et seulement si  $g \cdot h^{-1} \cdot h' = h^{-1} \cdot h \cdot g$  si et seulement si  $h^{-1} \cdot h \in S_g$  si et seulement si  $h' \in hS_g$ . Or  $|hS_g| = |S_g|$  car

$$\begin{aligned} I_h : S_g &\rightarrow hS_g \\ x &\mapsto h \cdot x \end{aligned}$$

est bijective de réciproque  $I_{h^{-1}}$ . Soit la relation d'équivalence  $\mathcal{R}_0$  sur  $G$  définie par  $h\mathcal{R}_0h'$  si et seulement si  $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$ . Chaque classe à  $|S_g|$  éléments et il y a  $|C(g)|$  classes dans  $G$  d'où  $|G| = |S_g| |C(g)|$ .

3. On a  $Z(G) = \cap_{g \in G} S_g$  donc  $Z(G)$  est un sous-groupe et pour tout  $g \in G$ ,  $Z(G) \subset S_g$ .

4. Pour  $x \in G$ , on note  $\bar{x} = \{h \cdot x \cdot h^{-1} \mid h \in G\} = C(x)$ .

On a  $|\bar{x}| = 1$  si et seulement si pour tout  $h \in G$ ,  $h \cdot x \cdot h^{-1} = x$  si et seulement si  $x \in Z(G)$ .

Soit  $\mathcal{A}$  une partie de  $G$  telle que  $(\bar{x})_{x \in \mathcal{A}}$  forme une partition de  $G \setminus Z(G)$ . On a

$$|G| = p^\alpha = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)|$$

Si  $x \in \mathcal{A}$ ,  $x \notin Z(G)$  donc  $|S_x| < |G|$  (car  $x \in Z(G)$  si et seulement si  $S_x = G$ ) et donc

$$|C(x)| = \frac{|G|}{|S_x|}$$

d'après 2. Donc  $|C(x)| = p^\beta$  avec  $\beta \in \{1, \dots, \alpha\}$  car  $|C(x)| \neq 1$ . Donc

$$p \mid \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)|$$

d'où

$$p \mid |Z(G)|$$

donc  $|Z(G)| \neq 1$ .

5. On a

$$p^2 = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)|$$

D'après la question 4, on a  $|Z(G)| \neq 1$  et  $|Z(G)| \mid |G|$ .

Si  $Z(G) \neq G$ , alors  $|Z(G)| = p$ . Pour  $x \in \mathcal{A}$ ,  $Z(G) \subset S_x \neq G$  donc  $|S_x| = p$  (car  $|S_x| \mid |G|$ ) et donc  $Z(G) = S_x$ . Or  $x \in S_x$  et  $x \notin Z(G)$  ce qui n'est pas possible, donc  $|Z(G)| = p^2$  et  $Z(G) = G$ . Donc  $G$  est abélien.

S'il existe un élément d'ordre  $p^2$ .  $G$  est cyclique et est isomorphe à  $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ . Sinon, pour tout  $x \in G \setminus \{e_G\}$ , on a  $\omega(x) = p$ . Soit  $x_1 \in G \setminus \{e_G\}$  et  $x_2 \in G \setminus \text{gr}\{x_1\}$ . Soit

$$\begin{aligned} f : \left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2 &\rightarrow G \\ (\bar{k}, \bar{l}) &\mapsto x_1^k \cdot x_2^l \end{aligned}$$

$f$  est bien définie car si  $\bar{k} = \bar{k}'$  et  $\bar{l} = \bar{l}'$ , on a  $p \mid k - k'$  et  $p \mid l - l'$  donc  $x_1^k \cdot x_2^l = x_1^{k'} \cdot x_2^{l'}$ .

Comme  $G$  est abélien,  $f$  est un morphisme.



Montrons que  $f$  est injective. Soit  $(\bar{k}, \bar{l}) \in \ker(f)$  avec  $(k, l) \in \{0, \dots, p-1\}^2$ , on a  $x_1^k \cdot x_2^l = e_G$  donc  $x_2^l = x_1^{-k}$ . Si  $l \in \{1, \dots, p-1\}$  or  $p$  est premier donc  $l \wedge p = 1$  donc il existe  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $lu + pv = 1$ . Alors on a

$$x_2 = x_2^{lu+pv} = x_2^{lu} \cdot x_2^{pv} = x_2^{lu} = x_1^{-k} \in \text{gr}\{x_1\}$$

ce qui n'est pas possible. Donc  $\bar{l} = \bar{0}$  et de même  $\bar{k} = \bar{0}$  donc  $f$  est injective et ainsi  $|\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}| = |G|$  donc  $f$  est un isomorphisme.

**Remarque 1.3.** Les groupes de cardinal  $p^3$  ne sont pas nécessairement abélien, par exemple le groupe des isométries du carré  $\mathcal{D}_4$  de cardinal 8.

**Solution 1.11.** Soit  $f$  un morphisme de  $(\mathbb{Z}, +)$  dans  $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = f(1)^n$  donc il existe  $r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$  tel que  $f(1) = r_0$  donc  $f: n \mapsto r_0^n$ .

Soit  $f$  un morphisme de  $(\mathbb{Q}, +)$  dans  $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ . Pour tout  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(1) = f(\frac{1}{a})^a$ . Pour tout  $p$  premier, on a  $\nu_p(f(1)) = a\nu_p(f(\frac{1}{a}))$  donc pour tout  $a \in \mathbb{N}^*$ ,  $a \mid \nu_p(f(1))$  donc  $\nu_p(f(1)) = 0$  pour tout  $p$  premier, donc  $f(1) = 1$ . Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(n) = f(1)^n = 1$  et  $f(b \times \frac{a}{b}) = f(a) = 1 = f(\frac{a}{b})^b$  donc  $f(\frac{a}{b}) = 1$ . Donc  $f: r \mapsto 1$ .

**Solution 1.12.** On a  $xy = y^2x$ ,  $x^2y = xy^2x = y^4x^2$ ,  $x^3y = x^2y^2x = xy^4x^2 = y^8x^3$ ,  $x^5y = y^{32}x^5$  donc  $y^{31} = e_G$  et  $\omega(y) = 31$ . Tout élément de  $G$  peut s'écrire  $y^\lambda x^\mu$  avec  $(\lambda, \mu) \in \{0, \dots, 30\} \times \{0, \times 4\}$ . Soit

$$\begin{aligned} f: \{0, \dots, 30\} \times \{0, \times 4\} &\rightarrow G \\ (\lambda, \mu) &\mapsto y^\lambda x^\mu \end{aligned}$$

est surjective par construction. Soit  $((\lambda, \mu), (\lambda', \mu')) \in (\{0, \dots, 30\} \times \{0, \times 4\})^2$  tel que  $y^\lambda x^\mu = y^{\lambda'} x^{\mu'}$  donc  $y^{\lambda-\lambda'} = x^{\mu'-\mu}$  d'où  $y^{5(\lambda-\lambda')} = x^{5(\mu'-\mu)} = e_G$ . Or  $\omega(y) = 31$  donc  $31 \mid 5(\lambda - \lambda')$  et d'après le théorème de Gauss,  $31 \mid \lambda - \lambda'$ . Or  $(\lambda, \lambda') \in \{0, \dots, 30\}^2$  donc  $\lambda = \lambda'$  et de même  $\mu = \mu'$  donc  $f$  est injective donc bijective et  $|G| = 155$ . Soit  $G'$  un autre tel groupe engendré par  $x'$  et  $y'$ , on forme

$$\begin{aligned} g: G &\rightarrow G \\ y^\lambda x^\mu &\mapsto y'^\lambda x'^\mu \end{aligned}$$

et on vérifie que  $g$  est un isomorphisme.

**Solution 1.13.**

1. Soit  $i \in \{1, \dots, r\}$ , il existe nécessairement  $y_i \in G$  tel que  $\nu_{p_i}(\omega(y_i)) = p_i^{\alpha_i}$  (où  $\nu_p$  est la valuation  $p$ -adique), sinon on ne pourrait pas avoir ce terme dans le ppcm. Donc  $p_i^{\alpha_i} \mid \omega(y_i)$ .

2. Il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\omega(y_i) = p_i^{\alpha_i} n$ . Posons  $x_i = y_i^n \in G$ . Alors pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$x_i^k = e_G \iff y_i^{nk} = e_G \iff \omega(y_i) \mid nk \iff p_i^{\alpha_i} \mid k$$

Donc  $\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}$ .

3. On pose  $x = \prod_{i=1}^r x_i$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ , alors

$$x^k = e_G \iff \prod_{i=1}^r x_i^k = e_G$$

Pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on met le tout à la puissance  $M_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r p_j^{\alpha_j}$ . On a alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$x_i^{kM_i} = e_G \iff p_i^{\alpha_i} \mid kM_i \iff p_i^{\alpha_i} \mid k$$

la dernière équivalence venant du théorème de Gauss. Donc pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $p_i^{\alpha_i} \mid k$ , ce qui équivaut donc à  $N \mid k$  et donc  $\omega(x) = N$ .

**Solution 1.14.** Sur un corps commutatif, un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines. Montrons qu'il existe  $x_1 \in \mathbb{K}^*$  tel que  $\omega(x_i) = |\mathbb{K}^*|$ . Par définition de  $N$ , pour tout  $x \in \mathbb{K}^*$ ,  $\omega(x) \mid N$ . D'où  $x^N = 1_{\mathbb{K}}$ . Donc  $x$  est racine de  $X^N - 1$ . Ainsi,  $|\mathbb{K}^*| \leq N$ . Par ailleurs,  $N \mid |\mathbb{K}^*|$  car pour tout  $x \in \mathbb{K}^*$ ,  $x^{|\mathbb{K}^*|} = 1_{\mathbb{K}^*}$ . Donc  $|\mathbb{K}^*| = N$  et donc  $\mathbb{K}^* = \text{gr}\{x_1\}$ .

On a  $|\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*| = 12$  donc pour tout  $\bar{x} \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ ,  $\omega(\bar{x}) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ . On a  $\bar{2}^2 = \bar{4}$ ,  $\bar{2}^3 = \bar{8}$ ,  $\bar{2}^4 = \bar{16} = \bar{3}$ ,  $\bar{2}^6 = \bar{12}$  donc  $\omega(\bar{2}) = 12$  et

$$\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^* = \text{gr}\{\bar{2}\} = \left\{ \bar{2}^k \mid k \in \{0, \dots, 11\} \right\}$$

**Solution 1.15.**

1. Soit  $(x, y) \in G^2$ , on a  $(x \cdot y)^2 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = e_G$  donc  $x \cdot y = y^{-1} \cdot x^{-1}$  et comme  $x^2 = e_G$ ,  $x^{-1} = x$  d'où  $xy = yx$  et  $G$  est abélien.

2. Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille génératrice minimale de  $G$  : pour tout  $x \in G$ , il existe  $(\varepsilon_i) \in \{0, 1\}^n$  tel que  $x = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$  (car  $G$  est abélien). Soit

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n &\rightarrow G \\ (\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_n) &\mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \end{aligned}$$

Si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  on a  $\overline{\varepsilon}_i = \overline{\varepsilon}'_i$ , alors  $x^{\varepsilon_i} = x^{\varepsilon'_i}$  car  $x_i^2 = e_G$  et  $2 \mid \varepsilon_i - \varepsilon'_i$ . Donc  $f$  est bien définie.

$f$  est clairement un morphisme (car  $G$  est abélien). D'après la première question,  $f$  est surjective. Montrons que  $f$  est injective. Soit  $(\overline{\varepsilon}_1, \dots, \overline{\varepsilon}_n)$  tel que  $\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} = e_G$ . Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ , supposons  $\varepsilon_i$  impair, on a alors  $x_i = \varepsilon_i = x_i$ . D'où  $x_i = \prod_{j=1}^n x_j^{-\varepsilon_j} = \prod_{j=1}^n x_j^{\varepsilon_j}$  car  $x^2 = e_G$ . Donc  $x_i \in \text{gr}(x_j, j \in \{1, \dots, n\}, j \neq i)$ , ce qui contredit le caractère minimal de  $(x_1, \dots, x_n)$ . Ainsi,  $f$  est injective donc est un isomorphisme.

**Remarque 1.4.** En notant  $+$  la loi sur  $G$ , on peut définir

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G &\rightarrow G \\ (\varepsilon, x) &\mapsto x^\varepsilon \end{aligned}$$

. Alors  $(G, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel, de dimension finie  $n$  car  $G$  est fini, et le choix d'une base réalise un isomorphisme de  $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$  dans  $(G, +)$ .

**Remarque 1.5.** Par isomorphisme, on a

$$\prod_{x \in G} x = f\left(\sum_{(\overline{\varepsilon}_1, \dots, \overline{\varepsilon}_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} (\overline{\varepsilon}_1, \dots, \overline{\varepsilon}_n)\right)$$

Pour  $n = 1$ , on a  $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$ , pour  $n = 2$ , on a  $(\overline{0}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{0})$ . Pour  $n > 2$ ,  $\overline{1}$  apparaît  $2^{n+1}$  fois sur chaque coordonnée (donc un nombre pair de fois), donc la somme fait  $(\overline{0}, \dots, \overline{0})$ .

**Solution 1.16.**

1. Si  $G$  est abélien, on a  $D(G) = \{e_G\}$ .
2. Soit  $\sigma \in \mathcal{A}_n$ ,  $\sigma$  se décompose en un produit d'un nombre pair de transpositions. Soient  $[a, b]$  et  $[c, d]$  deux transpositions.
  - Si  $\{a, b\} = \{c, d\}$ , alors  $[a, b] \circ [c, d] = id$ .
  - Si  $a \in \{c, d\}$ , supposons par exemple  $a = c$  et  $b \neq d$ . On a alors  $[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ [a, d] = [b, a, d]$ .
  - Si  $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$ , on a

$$[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ \underbrace{[b, c] \circ [b, c]}_{=id} \circ [c, d] = [a, b, c] \circ [b, c, d]$$

Donc les 3-cycles engendrent  $\mathcal{A}_n$ .

3. On a

$$\sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(a_3))$$

On peut trouver  $\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  telle que  $a_i$  soit envoyé sur  $b_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  et les éléments  $\{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$  dans  $\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$ . Donc les 3-cycles sont conjugués dans  $\Sigma_n$ .

Si  $n \geq 5$  et  $\sigma$  impair, soit  $(c_1, c_2) \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ .  $\sigma' = \sigma \circ [c_1, c_2]$  est pair et  $\sigma'(a_i) = b_i$ . Donc les trois cycles sont conjugués dans  $\mathcal{A}_n$  pour  $n \geq 5$ . C'est cependant faux pour  $n = 3$  et  $n = 4$ .

4. Soit  $(\sigma, \sigma') \in \Sigma_n^2$ . En notant  $\mathcal{E}$  la signature d'une permutation (morphisme de  $(\Sigma_n, \circ)$  dans  $(\{-1, 1\}, \times)$ ), on a

$$\mathcal{E}(\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1}) = 1$$

donc  $\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1} \in \mathcal{A}_n$ . Donc  $D(\Sigma_n) \subset \mathcal{A}_n$ .

Soit ensuite  $(a_1, a_2, a_3)$  un 3-cycle. On a  $(a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$  et  $(a_1, a_3, a_2)^{-1} = (a_1, a_2, a_3)$ . Ainsi, on a

$$\sigma \circ (a_1, a_3, a_2) \circ \sigma^{-1} \circ (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$$

On pose  $\sigma = [a_2, a_3]$ , et alors  $(a_1, a_2, a_3)$  est un commutateur. Ainsi,  $(a_1, a_2, a_3) \in D(\Sigma_n)$  et donc  $\mathcal{A}_n \subset D(\Sigma_n)$  (d'après la première question).

Finalement, on a  $D(\Sigma_n) = \mathcal{A}_n$ .

**Remarque 1.6.** Pour  $n \geq 5$ , on a  $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$ .

**Solution 1.17.**

1. Pour  $g \in G$ ,  $\tau_g$  est bijective de réciproque  $\tau_{g^{-1}}$ . On a notamment  $\tau_{g \cdot g'} = \tau_g \circ \tau_{g'}$  donc  $\tau$  est un morphisme. Si  $g \in G$  est tel que  $\tau_g = \text{id}$ , pour tout  $x \in G$ , on a  $gx = x$  donc  $g = e_G$ . Donc  $\tau$  est un morphisme injectif et  $G$  est isomorphe à  $\text{Im} \tau = \tau(G)$ , sous-groupe de  $\Sigma(G)$ , lui-même isomorphe à  $\Sigma_n$ .

2. Soit

$$\begin{aligned} f: \Sigma_n &\rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} = P_\sigma \end{aligned}$$

$P_\sigma$  est la matrice de permutation associée à  $\sigma$ .  $f$  est un morphisme, et est injectif, donc  $G$  est isomorphe à un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

**Solution 1.18.** Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$  tel que  $x^2 + y^2 + z^2 = 8t + 7$ . Dans  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ , on a  $\overline{0}^2 = \overline{0}$ ,  $\overline{1}^2 = \overline{1}$ ,  $\overline{2}^2 = \overline{4}$ ,  $\overline{3}^2 = \overline{1}$ ,  $\overline{4}^2 = \overline{0}$ ,  $\overline{5}^2 = \overline{1}$ ,  $\overline{6}^2 = \overline{4}$  et  $\overline{7}^2 = \overline{1}$ . Donc la somme de 3 de ces classes ne donnent pas  $\overline{7}$ .

Par récurrence, prouvons la propriété. Soit  $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$  tel que  $x^2 + y^2 + z^2 = (8t + 7)4^{n+1}$ . Parmi  $x, y, z$  les trois sont pairs ou deux d'entre eux sont impairs. Si  $x, y$  impairs et  $z$  pair, on écrit  $x = 2x' + 1, y = 2y' + 1, z = 2z'$ , alors  $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2[4]$  mais  $(8t + 7)4^{n+1} \equiv 0[4]$  : contradiction. Nécessairement,  $x, y$  et  $z$  sont pairs. En divisant par 4, on se ramène donc à l'hypothèse de récurrence.

**Solution 1.19.** On raisonne sur  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . On a  $\overline{10^{10^n}} = \overline{3^{10^n}}$ . Dans le groupe  $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ ,  $\overline{3}$  a un ordre qui divise  $|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*| = 6$ . On a  $\overline{3}^2 = \overline{2}$ ,  $\overline{3}^3 = \overline{-1}$  et  $\overline{3}^6 = \overline{1}$ . Donc  $\overline{3}^{6k} = \overline{1}$ ,  $\overline{3}^{6k+1} = \overline{3}$ ,  $\overline{3}^{6k+2} = \overline{2}$ ,  $\overline{3}^{6k+3} = \overline{-1}$ ,  $\overline{3}^{6k+4} = \overline{4}$  et  $\overline{3}^{6k+5} = \overline{5}$ .

On se place maintenant dans  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  :  $\overline{10} = \overline{4}$ ,  $\overline{10}^2 = \overline{4}$  et donc par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\overline{10^n} = \overline{4}$ . Donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $10^n = 6k + 4$ . Ainsi,  $\overline{10^{10^n}} = \overline{4}$ .

**Solution 1.20.**

1. On a  $F_1 = 5$  et  $2 + \prod_{k=0}^0 F_k = 2 + 3 = 5$ . Soit  $n \geq 1$ , supposons que  $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$ .

Alors

$$\begin{aligned} F_{n+1} - 2 &= 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n})^2 - 1 \\ &= (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) \\ &= F_n(F_n - 2) \\ &= F_n \times \prod_{k=0}^{n-1} F_k \\ &= \prod_{k=0}^n F_k \end{aligned}$$

d'où le résultat par récurrence.

2. Soit  $p$  un facteur premier de  $F_n$ . S'il existe  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que  $p \mid F_k$ , alors d'après la première question on a  $p \mid F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k = 2$ . Donc  $p = 2$ . Or  $F_n$  est impair, donc

non divisible par deux, ce qui est absurde. Donc  $p$  ne divise aucun  $F_k$  pour  $k \in \{0, n-1\}$  et il existe donc une infinité de nombres premiers (car les  $F_n$  sont tous différents deux à deux).

**Remarque 1.7.** Si  $n \neq m$  alors  $F_n \wedge F_m = 1$ .

**Solution 1.21.**

1. On teste uniquement les puissances qui divisent 32 : 2, 4, 8, 16, 32. On a  $\bar{5}^2 = \overline{-7}, \bar{5}^4 = \overline{-15}, \bar{5}^8 = \bar{1}$ . Donc  $\omega(\bar{5}) = 8$ .

2. On note

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} &\rightarrow U \\ (\bar{k}, \tilde{l}) &\mapsto \overline{-1}^k \times \bar{5}^l \end{aligned}$$

3. On a  $\omega(\overline{-1}) = 2$  et  $\gamma(\bar{5}) = 8$  donc  $\psi$  est bien définie.  $\psi$  est bien un morphisme de groupes. Soit  $(\bar{k}, \tilde{l}) \in \ker(\psi)$ , on a  $\overline{-1}^k \times \bar{5}^l = \bar{1}$ . Si  $\bar{k} = \bar{1}$ , alors  $\overline{-1}^k = \overline{-1} = \bar{5}^{-l} = \bar{5}^l \in \text{gr}\{\bar{5}\}$ . Donc  $\bar{5}^{2l} = \bar{1}$  et ainsi  $8 \mid 2l$  d'où  $4 \mid l$ . Mais alors  $l \in \{0, 4\}$  ce qui est impossible. Donc  $\bar{k} \neq \bar{1}$ . De ce fait,  $\bar{k} \neq \bar{1}$ . Ainsi,  $\bar{5}^l = \bar{1}$  donc  $\tilde{l} = \tilde{0}$ . Ainsi,  $\ker(\psi) = \{(\bar{0}, \tilde{0})\}$  donc  $\psi$  est injective, puis bijective car  $|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}| = |U|$ .

**Remarque 1.8.**  $U$  n'est pas cyclique car, par isomorphisme, ses éléments ont un ordre qui divise 8.

**Solution 1.22.**

1. Soit

$$\begin{aligned} f : G_n \times G_m &\rightarrow U_{nm} \\ (\xi, \xi') &\mapsto \xi \times \xi' \end{aligned}$$

Soit  $(\xi, \xi') \in G_n \times G_m$ , Soit  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $(\xi \times \xi')^k = 1$ . Alors  $(\xi \times \xi')^{km} = 1$  d'où  $\xi^{km} = 1$  donc  $n \mid km$  et  $n \mid k$  d'après le théorème de Gauss. De même pour  $n$ , on a  $m \mid k$  et donc  $nm \mid k$ . La réciproque est immédiate :  $\xi \times \xi' \in G_{nm}$ . Donc  $f(G_n \times G_m) \subset G_{nm}$  et  $|G_n \times G_m| = \varphi(n) \times \varphi(m) = \varphi(nm) = |G_{nm}|$  où  $\varphi$  est l'indicatrice d'Euler.

Montrons que  $f$  est injective : soit  $(x, y, x', y') \in G_n^2 \times G_m^2$  tel que  $xx' = yy'$ . On a alors  $x^m = y^m$  et  $x'^n = y'^n$  d'où  $(xy^{-1})^m = 1$  d'où  $\omega(xy^{-1}) \mid m$  et  $\omega(xy^{-1}) \mid n$ . Donc  $\omega(xy^{-1}) = 1$  donc  $x = y$  et en reportant, on a  $x' = y'$ . Donc  $f$  est injective puis bijective (égalité des cardinaux).

On a alors

$$\begin{aligned}
\mu(n)\mu(m) &= \sum_{\xi \in G_n} \xi \times \sum_{\xi' \in G_m} \xi' \\
&= \sum_{(\xi, \xi') \in G_n \times G_m} \xi \xi' \\
&= \sum_{\xi \in G_{nm}} \xi \text{ [} f \text{ est bijective]} \\
&= \mu(nm)
\end{aligned}$$

2. On a  $\mu(1) = 1$ . Soit  $p$  premier. On a

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = 0$$

donc

$$\mu(p) \sum_{k=1}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = -1$$

. Soit alors  $\alpha \in \mathbb{N}$  avec  $\alpha \geq 2$ , on a

$$\mu(p^\alpha) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \wedge p=1}}^{p^\alpha} e^{\frac{2ik\pi}{p^\alpha}} = \sum_{k=1}^{p^\alpha} e^{\frac{2ik\pi}{p^\alpha}} - \sum_{k=1}^{p^{\alpha-1}} e^{\frac{2ik\pi}{p^{\alpha-1}}} = 0$$

Si  $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ , s'il existe  $i \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $\alpha_i \geq 2$  alors  $\mu(n) = 0$ . Sinon, on a

$$\mu(n) = \prod_{i=1}^r \mu(p_i) = (-1)^r$$

3. Soit  $(f, g) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^2$ , on a

$$\begin{aligned}
(f \star g)(n) &= \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1) g(d_2) \\
&= \sum_{d_1 d_2 = n} g(d_1) f(d_2) \\
&= (g \star f)(n)
\end{aligned}$$

Donc  $\star$  est commutative.

Soit  $(f, g, h) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^3$ , on a

$$\begin{aligned}
(f \star (g \star h))(n) &= \sum_{d_1 d = n} f(d_1)(g \star h)(d) \\
&= \sum_{d_1 d = n} \left[ f(d_1) \times \sum_{d_2 d_3 = d} g(d_2)h(d_3) \right] \\
&= \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1)g(d_2)h(d_3) \\
&= ((f \star g) \star h)(n)
\end{aligned}$$

donc  $\star$  est associative.

On vérifie maintenant que l'élément neutre est  $e : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  qui à 1 associe 1 et 0 si  $n \geq 2$ . Soit

$$\begin{aligned}
\psi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\
n &\mapsto \sum_{d|n} \mu(d)
\end{aligned}$$

On a  $\psi(1) = 1$ . Soit  $n \geq 2$  avec  $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ . Les diviseurs de  $n$  sont dans  $D = \{\prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i} \mid \beta_i \leq \alpha_i\}$ . Ainsi,  $\psi(n) = \sum_{d \in D} \mu(d)$ . Or  $\mu(d)$  vaut 0 s'il existe  $\beta_i \geq 2$  et  $(-1)^k$  si  $k$   $\beta_i$  valent 1 et les autres 0. Il y a  $\binom{r}{k}$  choix possibles pour que  $k$   $\beta_i$  valent 1. Ainsi,

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^r 1^{r-k} (-1)^k \binom{r}{k} = 0$$

Donc  $\mu \star 1 = e$ , et  $\mu^{-1} = 1 : n \mapsto 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

4. On note

$$\begin{aligned}
id : \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{N}^* \\
n &\mapsto n
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) &= (\mu \star id)(n) \\
&= (id \star \mu)(n) \\
&= (1 \star (\varphi \star \mu))(n) \\
&= \varphi(n)
\end{aligned}$$

la troisième égalité venant du fait que  $id = 1 \star \varphi$  car  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ .



**Solution 1.23.** Pour  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ , on a

$$\binom{p+k}{k} = \frac{(p+k) \times \dots \times (p+1)}{k \times \dots \times 1} = 1 + \alpha kp$$

car  $(p+k) \times \dots \times (p+1) = k! + p \times \text{qqchse}$ . On a  $p \mid \binom{p}{k}$  donc

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} [p^2]$$

Pour  $k=0$ , on a  $\binom{p}{0} \binom{p}{0} = 1$  et pour  $k=p$ , on a  $\binom{p}{p} \binom{2p}{p} = \binom{2p}{p}$ . Et

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} - 2 = 2^p - 2$$

Il reste donc à prouver que  $\binom{2p}{p} \equiv 2[p^2]$ .

Or

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p}{p-k} \equiv 2[p^2]$$

la première égalité venant de l'égalité du terme en  $X^p$  dans  $(1+X)^{2p} = (1+X)^p(1+X)^p$ , et la deuxième venant du fait que seuls les termes en  $k=0$  et  $k=p$  ne contiennent pas de  $p^2$ , et valent chacun 1.

Finalement, on a

$$\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 2^p - 2 + 1 + 2[p^2] \equiv 2^p + 1[p^2]$$

**Solution 1.24.**

1. Soit  $G$  un sous-groupe de  $(\mathbb{U}, \times)$ . On note  $|G| = d$ . On a donc  $G \subset \mathbb{U}_d$  car pour tout  $x \in G$ ,  $x^d = 1$ . Donc  $G = \mathbb{U}_d$  est cyclique.

2. On pose

$$\begin{aligned} \psi : SO_2(\mathbb{R}) &\rightarrow (\mathbb{U}, \times) \\ R_\theta &\mapsto e^{i\theta} \end{aligned}$$

qui est un isomorphisme. Donc les sous-groupes de  $SO_2(\mathbb{R})$  sont les  $G_n$  pour  $n \geq 1$  avec

$$G_n = \{R_{\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

3.  $\varphi$  est bilinéaire et symétrique. Pour tout  $X \in \mathbb{R}^2$ , on  $\varphi(X, X) = \sum_{M \in G} \|MX\|^2 \geq 0$  et si  $\varphi(X, X) = 0$ , on a pour tout  $M \in G$ ,  $X = 0$ . Notamment,  $I_2 \in G$  et donc  $X = 0$ . Donc  $\varphi$  est bien un produit scalaire.

Pour tout  $(M_0, X, Y) \in G \times (\mathbb{R}^2)^2$ , on a  $\varphi(M_0X, M_0Y) = \sum_{M \in G} \langle MM_0X, MM_0Y \rangle$  et  $M \mapsto MM_0$  est bijective de  $G$  dans  $G$  donc  $\varphi(M_0X, M_0Y) = \varphi(X, Y)$ .

Soit  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{B}_1$  une base orthonormée pour  $\varphi$ . On note  $P_0 = \text{mat}_{\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_1}$ .

Pour tout  $M \in G$ ,  $P_0^{-1}MP_0$  est la matrice d'une isométrie pour  $\varphi$  dans une base orthonormée pour  $\varphi$ . Donc  $P_0^{-1}MP_0$  est orthogonale, et  $\det(P_0^{-1}MP_0) = 1$  car pour tout  $M \in G$ ,  $\det(M) = 1$ . Ainsi,  $\{P_0^{-1}MP_0 \mid M \in G\}$  est un sous-groupe fini de  $SO_2(\mathbb{R})$ , donc cyclique. Il est isomorphe à  $G$  donc  $G$  est cyclique.

### Solution 1.25.

1. On a  $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in E$ . On remarque ensuite que pour tout  $s = x + y\sqrt{2} \in E$ , on a  $ss^{-1} = 1$  avec  $s^{-1} = x - y\sqrt{2} \in E$ . Soit  $(s, s') \in E^2$  avec  $s = x + y\sqrt{2}$  et  $s' = x' + y'\sqrt{2}$ . Notons déjà que  $x + y\sqrt{2} > 0$  car  $x = \sqrt{1 + 2y^2} > |y|\sqrt{2}$ . On a donc

$$ss' = \underbrace{xx' + 2yy'}_{\in \mathbb{Z}} + \sqrt{2} \underbrace{(yx' + y'x)}_{\in \mathbb{Z}}$$

On a  $xx' \in \mathbb{N}$  et  $x > \sqrt{2}|y| \geq 0$  et  $x' > \sqrt{2}|y'| \geq 0$  donc  $xx' > 2|yy'|$  et ainsi  $xx' + 2yy' \in \mathbb{N}^*$ . Enfin, on a

$$\begin{aligned} (xx' + 2yy')^2 - 2(yx' + y'x)^2 &= (xx')^2 + 4(yy')^2 - 2(yx')^2 - 2(y'x)^2 \\ &= (x^2 - 2y^2)(x'^2 - 2y'^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc  $ss' \in E$ . Finalement,  $E$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ .

2.  $\ln$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $\ln(E)$ , sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ . On sait que si

$$\underbrace{\inf(\ln(E) \cap \mathbb{R}_+)}_{\alpha} > 0$$

alors  $\ln(E) = \alpha\mathbb{Z}$  (sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  dans le cas  $\alpha > 0$ , pour rappel si  $\alpha = 0$  alors le sous-groupe est dense dans  $\mathbb{R}$ ). On cherche la borne inférieure de  $E \cap ]1 + \infty[$  que l'on note  $\beta$ .  $\beta$  existe car cet ensemble est non vide, par exemple  $3 + 2\sqrt{2}$  y appartient.

Si  $\beta = 1$ , on peut trouver une suite de termes de  $E$  strictement décroissante convergeant vers 1. Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$1 < x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} < x_n + y_n\sqrt{2}$$

On sait que

$$x_n - y_n\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})^{-1} < 1 < x_n + y_n\sqrt{2}$$

donc  $-y_n\sqrt{2} < 1 - x_n < 0$  donc  $y_n > 0$ . Ainsi,

$$y_n = \sqrt{\frac{x_n^2 - 1}{2}}$$

Si  $x_{n+1} \geq x_n$ , alors  $y_{n+1} \geq y_n$  d'où  $x_{n+1} + \sqrt{2}y_{n+1} > x_n + \sqrt{2}y_n$  ce qui est absurde. Donc  $x_{n+1} < x_n$  et on obtient une suite strictement décroissante d'entiers naturels ce qui est impossible. Donc  $\beta > 1$  et  $E = \{(x_0 + y_0\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  est monogène.

On peut identifier  $\beta$  :

$$x_0 = \min\{x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y\sqrt{2} \in E \cap ], +\infty[ \}$$

Donc  $\beta = 3 + 2\sqrt{2}$  Finalement,  $x^2 - 2y^2 = 1$  avec  $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$  si et seulement s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x_n + y_n\sqrt{2} = \beta^n$ .

**Remarque 1.9.** En fait, on a

$$\begin{cases} x_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k} 3^{n-2k} \\ y_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} 3^{n-2k-1} \end{cases}$$

**Solution 1.26.** On a  $7 \mid n^n - 3$  si et seulement si  $\bar{n}^n = \bar{3}$  dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ .  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$  est un groupe de cardinal 6. Donc l'ordre de ses éléments divise 6, et sont donc 1, 2, 3 ou 6. Notamment, on vérifie que  $\omega(\bar{3}) = 6$  et donc le groupe engendré par  $\bar{3}$  est exactement  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$ . Ainsi,

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times) = \{\bar{3}^k \mid k \in \{0, \dots, 5\}\}$$

(c'est un groupe cyclique). Les générateurs sont  $\{\bar{3}^k, k \wedge 6 = 1\} = \{\bar{3}, \bar{3}^5 = \bar{-2} = \bar{5}\}$ . Donc  $\bar{n} = \bar{3}$  ou  $\bar{n} = \bar{5}$ .

Si  $\bar{n} = 3$ ,  $\bar{3}^n = \bar{3}$  si et seulement si  $n \equiv 1[6]$  donc  $n \equiv 3[7]$  et  $n \equiv 1[6]$ . D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à  $n \equiv 31[42]$ . La réciproque est immédiate.

Si  $\bar{n} = 5$ ,  $\bar{5}^n = \bar{3}$  si et seulement si  $n \equiv 5[6]$  et  $n \equiv 5[7]$ . D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à  $n \equiv 5[42]$ .

Donc les solutions sont  $n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n \equiv 31[42]$  ou  $n \equiv 5[42]$ .

**Solution 1.27.** On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} &= \frac{2a}{(p-1)!} \iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{k(p-k)} = \frac{2a}{(p-1)!} \\ &\iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p(p-1)!}{k(p-k)} = 2a \\ &\iff p \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!^3}{k(p-k)}}_{\in \mathbb{N}} = 2a \underbrace{(p-1)!^2}_{p \wedge (p-1)!^2 = 1} \end{aligned}$$

donc  $p \mid a$  d'après le théorème de Gauss.

On écrit alors  $a = p \times b$  avec  $b \in \mathbb{N}$ . On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} = \frac{2b}{(p-1)!}$$

comme  $(p-1)!, k$  et  $p-k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) sont inversibles dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , on a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \overline{-k}^{-2} = \overline{2b} \times \underbrace{\overline{(p-1)!}^{-1}}_{=-1 \text{ d'après le théorème de Wilson}}$$

Donc

$$\overline{2b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^{-2}$$

Comme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* &\rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ \overline{k} &\mapsto \overline{k}^{-1} \end{aligned}$$

est bijective, on a

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \frac{\overline{p(p-1)(2p-1)}}{6}$$

Or  $p \geq 5$  est premier, donc  $p - 1$  est pair et  $p$  est congru à 1 ou 2 modulo 3. Donc  $p - 1 \equiv 0[3]$  ou  $2p - 1 \equiv 0[3]$  donc  $\frac{(p-1)(2p-1)}{6} \in \mathbb{N}$ . Ainsi,

$$\bar{2} \times \bar{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \bar{k}^2 = \bar{p} \times \frac{(p-1)(2p-1)}{6} = 0$$

et donc  $p \mid b$  par le théorème de Gauss. Donc  $p^2 \mid a$ .

**Solution 1.28.** Les racines réelles de  $P$  ont une multiplicité paire, le coefficient dominant est positif (car la limite en  $+\infty$  est positive) et les racines complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées :

$$(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2 = (X - \Re(\alpha))^2 + |\Im(\alpha)|^2$$

avec  $\Im(\alpha) \neq 0$ . D'où le résultat en décomposant  $P$  sur  $\mathbb{C}[X]$ .

**Solution 1.29.**

1.  $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}$  engendré par  $\alpha$  et 1. S'il existait  $a \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  $G = a\mathbb{Z}$ , alors il existait  $(n, m) \in (\mathbb{Z}^*)^2$  tel que  $1 = na$  et  $\alpha = ma$ , d'où  $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  ce qui est absurde. Donc  $G$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Le fait que  $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N}$  est dense dans  $\mathbb{R}$  est alors immédiate.
2. Posons  $\beta = \frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$ . Alors  $\mathbb{Z} + \beta\mathbb{N}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $c < d \in \mathbb{R}^2$ . Comme  $\frac{c}{2\pi} < \frac{d}{2\pi}$ , il existe  $x \in \mathbb{Z} + \beta\mathbb{N} \cap ]\frac{c}{2\pi}, \frac{d}{2\pi}[$  et alors  $2\pi x \in 2\pi\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N} \cap ]c, d[$ . On pose  $c = \arcsin(a)$  et  $d = \arcsin(b)$  avec  $a < b$ . On a bien  $c < d$  car  $\arcsin$  est strictement croissante. Alors il existe  $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  tel que  $2\pi m + \alpha n = 2\pi x \in ]c, d[$  donc  $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi m + \alpha n) = \sin(\alpha n) \in ]a, b[$ .  
Donc  $(\sin(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $] -1, 1[$ . En particulier, cela vaut pour  $\alpha = 1$  car  $\pi \notin \mathbb{Q}$ . Donc  $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ .  $2^n$  commence par 7 en base 10 si et seulement s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  avec

$$\begin{aligned} 7 \times 10^p \leq 2^n < 8 \times 10^p &\iff \ln(7) + p \ln(10) \leq n \ln(2) < \ln(8) + p \ln(10) \\ &\iff \frac{\ln(7)}{\ln(10)} \leq \frac{n \ln(2)}{\ln(10)} - p < \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \end{aligned}$$

On a alors

$$p = \left\lfloor \frac{n \ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \mathbb{N}$$

On étudie donc  $\mathbb{N}^{\frac{\ln(2)}{\ln(10)}} + \mathbb{Z}$ . Supposons que  $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Alors on a  $2^q = 10^p$  mais comme  $p \neq 0$ , on a  $5 \mid 10^p$  mais  $5 \nmid 2^q$ , donc  $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} \notin \mathbb{Q}$ .

On sait que

$$u_n = n \frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n \ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \left] \frac{\ln(7)}{\ln(10)}, \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \right[$$

Par densité, on peut donc construire par récurrence  $(u_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\frac{\ln(7)}{\ln(10)} < u_{n_{p+1}} < u_{n_p} < \frac{\ln(8)}{\ln(10)}$$

Donc on a bien une infinité de puissance de 2 commençant par 7 en base 10.

**Remarque 1.10.**  $(e^{in\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$  est de la même façon dense dans  $\mathbb{U}$ . On peut montrer qu'elle est équirépartie, c'est à dire que pour tout  $a < b \in [0, 2\pi[$ , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \left\{ n \in \{1, \dots, N\} \mid n\alpha - \frac{\lfloor 2\pi n\alpha \rfloor}{2\pi} \in ]a, b[ \right\} \right| \times \frac{1}{N} = \frac{b-a}{2\pi}$$

**Remarque 1.11.** Par équirépartition dans  $[0, 1[$  des

$$\left\{ n \frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n \ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

la probabilité pour qu'une puissance de 2 commence par  $k$  en base 10 est ( $k \in \{1, \dots, 9\}$ )

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln(10)}$$

**Solution 1.30.**

1. Pour  $\alpha = a + ib$ , on définit le module au carré :  $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$ . Soit  $\beta = c + id \neq 0$ . Si  $\alpha = \beta q + r$  avec  $q, r \in \mathbb{Z}[i]^2$  et  $|r|^2 < |\beta|^2$ , alors  $|\alpha - \beta q|^2 < |\beta|^2$  et  $\beta \neq 0$  donc

$$\left| \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\in \mathbb{C}} - \underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}[i]} \right| < 1$$

On pose  $\frac{\alpha}{\beta} = x + iy$ . On pose

$$u_x = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & \text{si } x \in [\lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}[ \\ \lfloor x \rfloor + 1 & \text{si } x \in [\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}, \lfloor x \rfloor + 1[ \end{cases}$$

et de même pour  $u_y$ . On a alors  $q = u_x + iu_y \in \mathbb{Z}[i]$  et

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - q \right|^2 = |x - u_x|^2 + |y - u_y|^2 \leq 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1$$

On pose donc  $r = \alpha - \beta q \in \mathbb{Z}[i]$  et ainsi l'anneau  $\mathbb{Z}[i]$  est euclidien.

2. Soit  $A$  un anneau euclidien et  $I$  un idéal de  $A$  non réduit à  $\{0\}$ . Il existe  $x \in I$  tel que

$$v(x_0) = \min\{v(x) \mid x \in I \setminus \{0\}\}$$

On a  $x_0 A \subset I$ . Soit  $x \in I$ . Il existe  $q, r \in A$  tel que

$$x = x_0 q + r$$

avec  $v(r) < v(x_0)$  ou  $r = 0$ . Or  $r \in I$  donc  $r = 0$ . Ainsi  $x \in x_0 A$  et donc  $I = x_0 A$ . Donc tout anneau euclidien est principal.

**Remarque 1.12.** C'est encore vrai avec  $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ .

**Solution 1.31.**

1. Si  $\bar{x} = \bar{y}^2$  est un carré, d'après le petit théorème de Fermat, on a  $\bar{x}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{y}^{p-1} = \bar{1}$ . Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* &\rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ \bar{y} &\mapsto \bar{y}^2 \end{aligned}$$

$f$  est un morphisme multiplicatif,  $\text{Im}(f)$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$ .

Comme  $\mathbb{F}_p$  est un corps, chaque carré possède exactement deux antécédents. Il y a  $p-1$  antécédents, donc il y a  $\frac{p-1}{2}$  carrés dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$ . Donc  $|\text{Im}(f)| = \frac{p-1}{2}$  et si  $\bar{x}$  est un carré,  $x$  est racine de  $X^{\frac{p-1}{2}} - \bar{1}$ . Le polynôme  $X^{\frac{p-1}{2}} - \bar{1}$  possède au plus  $\frac{p-1}{2}$  racines et tout carré est racine. Donc les racines sont exactement les carrés et  $\bar{x}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$  si et seulement si  $\bar{x}$  est un carré.

2. On a  $p \equiv 1[4]$  si et seulement si  $\frac{p-1}{2}$  est pair si et seulement si  $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$  si et seulement si  $\bar{-1}$  est un carré dans  $\mathbb{F}_p$ . Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers  $p_1, \dots, p_r$  tous congrus à 1 modulo 4. On pose  $n = (p_1 \times \dots \times p_r)^2 + 1$ . Soit  $p$  un facteur premier de  $n$ , on a  $n \equiv 1[n_i]$  donc  $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$ . Dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , on a  $\bar{n} = \bar{0}$  donc  $\bar{-1} = \overline{p_1 \times \dots \times p_r}^2$  donc  $p \equiv 1[4]$  ce qui est une contradiction.

Donc il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

**Solution 1.32.**

1. On pose  $P_1 = \sum_{i=0}^n r'_i X^i$ , et  $\nu_p(r'_i)$  est positif par définition de  $c(P)$ . Donc  $P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ .

Pour tout  $p \in \mathcal{P}$ , il existe  $i_0 \in \{1, \dots, n\}$  tel que

$$\min_{i \in \{1, \dots, n\}} \nu_p(r_i) = \nu_p(r_{i_0})$$

et  $\nu_p(r'_{i_0}) = 0$  donc  $p \nmid r'_{i_0}$  donc

$$\bigwedge_{i=1}^n r'_i = 1$$

Si on a  $P = \alpha_1 P_1 = \alpha_2 P_2$  avec les conditions requises, soit  $p \in \mathcal{P}$ , si  $\nu_p(\alpha_2) > \nu_p(\alpha_1)$ , alors  $p$  divise tous les coefficients de  $P_1$  ce qui n'est pas possible, donc  $\nu_p(\alpha_2) = \nu_p(\alpha_1)$ .

Ceci étant vrai pour tout  $p \in \mathcal{P}$ , on a aussi  $\alpha_1 = \alpha_2$  et donc  $P_1 = P_2$ .

2. On a  $P = c(P)P_1$  et  $Q = c(Q)Q_1$  donc  $PQ = c(P)c(Q)P_1Q_1$  et  $P_1Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$ .

Soit  $p \in \mathcal{P}$  divisant tous les coefficients de  $P_1Q_1$ . On définit, si  $R = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $\bar{R} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{\gamma}_i X^i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ .  $R \mapsto \bar{R}$  est un morphisme d'anneaux. Par hypothèse, on a  $\overline{P_1Q_1} = \bar{0} = \overline{P_1} \overline{Q_1}$  et par intégrité de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ , on a  $\overline{P_1} = \bar{0}$  ou bien  $\overline{Q_1} = \bar{0}$ , ce qui est exclu par les hypothèses. Donc  $c(PQ) = c(P)c(Q)$ .

3. Soit alors  $P$  irréductible dans  $\mathbb{Z}[X]$  (les inversibles de  $\mathbb{Z}[X]$  étant -1 et 1). Posons

$$\begin{aligned} P &= QR \in \mathbb{Q}[X]^2 \\ &= c(Q)c(R) \underbrace{Q_1 R_1}_{\in \mathbb{Z}[X]} \end{aligned}$$

OR  $c(Q)c(R) = c(P)$  c'après le lemme de Gauss et nécessairement,  $c(P) = 1$ . Donc  $P = Q_1 R_1$ , et alors  $Q_1 = \pm 1$  et  $R_1 = \pm 1$ , et  $Q$  ou  $R$  est constant, donc  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}[X]$ .

Pour la réciproque, on a  $2X$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}[X]$  car de degré 1, mais pas sur  $\mathbb{Z}[X]$  car ni 2 ni  $X$  ne sont inversibles.

4. Soit  $\theta = \frac{2\pi p}{q}$  avec  $p \wedge q = 1$  et  $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$ . Sur  $\mathbb{C}[X]$ , on a  $P = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ .

Et  $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$  car  $\theta \not\equiv 0[\pi]$ . On a  $\theta = \frac{2\pi p}{q}$  donc  $e^{i\theta} \in \mathbb{U}_q$ , et  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  sont des racines de  $A$ . Donc, dans  $\mathbb{C}[X]$ , on a  $P \mid A$  et  $A \in \mathbb{Q}[X]$ , donc il existe  $B \in \mathbb{Q}[X]$  tel que

$$\underbrace{A}_{\in \mathbb{Q}[X]} = \underbrace{B}_{\in \mathbb{C}[X]} \times \underbrace{P}_{\in \mathbb{Q}[X]}$$



Or  $B$  s'obtient par la division euclidienne de  $A$  par  $P$ , qui est indépendante du corps de référence, il vient  $B \in \mathbb{Q}[X]$  et donc  $A \mid P$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

On a  $c(A) = 1 = c(B)c(P)$  et  $A = c(B)c(P)B_1P_1 = B_1P_1 \in \mathbb{Z}[X]$  et le coefficient dominant de  $A$  est donc 1. Donc le coefficient dominant de  $B_1$  et de  $P_1$  est aussi 1. En reportant, on a  $P = P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ .

Donc  $2 \cos(\theta) \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2]$  donc  $\cos\{\theta\} \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$  ( $-1$  et  $1$  ne peuvent y être car on a supposé  $\theta \neq 0[\pi]$ ). Les solutions sont donc

$$\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

(en rajoutant  $\theta = 0$  et  $\pi$ ).

**Remarque 1.13.** On a  $\frac{\arccos(\frac{1}{3})}{\pi} \notin \mathbb{Q}$  car  $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$  n'est pas dans l'ensemble solutions.

### Solution 1.33.

1. Soit  $P = a \prod_{i=1}^s (X - a_i)^{\alpha_i}$  avec les  $a_i$  distincts et  $\alpha_i \geq 1$ .  $a_i$  est racine de  $P'$  de multiplicité  $\alpha_i - 1$ . Il manque donc  $s$  racines. Si  $\alpha = 0$ , le résultat est évident, sinon on pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto P(x)e^{\frac{x}{\alpha}} \end{aligned}$$

et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha} (P(x) + \alpha P'(x))$$

Comme  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ ,  $P'$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  (appliquer le théorème de Rolle entre les racines distinctes de  $P$ ), donc  $f'$  s'annule  $s - 1$  fois entre les racines de  $P$  donc  $P + \alpha P'$  aussi.

La dernière racine est réelle car sinon, le conjugué de la racine complexe supposée serait aussi racine.

2. On pose  $R = \mu \prod_{i=0}^r (X - \beta_i)$ . On pose

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

On a alors

$$\sum_{i=0}^r a_i P^{(i)} = \sum_{i=0}^r a_i \Delta^i(P) = R(\Delta)(P) = \mu \prod_{i=0}^r (\Delta - \beta_i \text{id})(P)$$

Par récurrence sur  $r$ , on montre que  $\prod_{i=0}^r (\Delta - \beta_i \text{id})(P)$  est scindé d'après la première question.

**Remarque 1.14.** On a aussi pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $P' + \lambda P$  est aussi scindé sur  $\mathbb{R}$  si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution 1.34.** Soit  $F = \frac{P'}{P}$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$  où  $a_i$  sont les racines de  $P$ . On note  $\alpha$  le coefficient dominant de  $P$ , et on a

$$P' = \alpha \sum_{i=1}^n \left( \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - a_j) \right)$$

On a donc  $F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X - a_i}$  et on a

$$F' = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)^2} = \frac{P''P - P'P'}{P^2}$$

Pour  $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ , on a

$$\begin{aligned} (n-1)(P'^2(x))(x) &\geq nP(x)P''(x) \iff n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \leq -P'^2(x) \\ &\iff \frac{P'^2(x)}{P^2(x)} \leq n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \times \frac{1}{P^2(x)} \\ &\iff F^2(x) \leq n(-F'(x)) \\ &\iff \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)} \right)^2 \leq n \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)^2} \end{aligned}$$

qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $(1 \dots 1)$  et  $(\frac{1}{x-a_1} \dots \frac{1}{x-a_n})$ .

**Remarque 1.15.** Si  $P = \alpha(X - a_1)^{m_1}(X - a_r)^{m_r}$ , alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - a_i}$$

**Solution 1.35.**

1.  $P' \in \mathbb{C}[X]$  et  $\deg(P') = \deg(P) - 1$ . On a  $P \wedge P' = 1$  car  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}[X]$ . Comme le pgcd est obtenu par l'algorithme d'Euclide qui est indépendant du corps de référence, on a  $P \wedge P' = 1$  sur  $\mathbb{C}[X]$  donc  $P$  n'a que des racines simples sur  $\mathbb{C}$ .
2. Notons  $P \in \mathbb{Q}[X]$  le polynôme minimal de  $\alpha$  sur  $\mathbb{Q}$  (défini car  $A(\alpha) = 0$  donc  $\alpha$  est algébrique). Comme  $A(\alpha) = 0$ , on a  $P \mid A$  et  $P$  est irréductible sur  $\mathbb{Q}[X]$ . Si  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , on a  $\deg(P) \geq 2$ , on peut donc décomposer sur  $\mathbb{Q}[X]$  :

$$A = P^r \times P_1^{r_1} \times \dots \times P_s^{r_s}$$

avec les  $P_i$  irréductibles sur  $\mathbb{Q}[X]$  non associés.

$\alpha$  n'est pas racine d'un  $P_i$  car sinon  $P \mid P_i$  ce qui est impossible.  $\alpha$  est racine simple de  $P$  donc  $m(\alpha) = r > \frac{\deg(A)}{2}$ . Par ailleurs,  $\deg(P)^r \geq 2r > \deg(A)$  ce qui est impossible.

Donc  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

**Solution 1.36.** Soit  $x \in A$ . Il existe  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  avec  $n < m$  tel que  $x^n = x^m$ . Alors  $x^{m-n} = e_G \in A$ .

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N}^* &\rightarrow A \\ n &\mapsto x^n \end{aligned}$$

n'est pas injective, car  $\mathbb{N}^*$  est infini et  $A$  est fini. Or  $m - n \in \mathbb{N}^*$  donc

$$x^{m-n} = e_G \Rightarrow x = x \cdot x^{m-n-1} = e_G$$

donc  $x^{-1} = x^{m-n-1} \in A$  et ainsi  $A$  est un sous-groupe.

**Solution 1.37.** Pour  $\alpha = 0$ , on a  $1 + p \equiv 1 + p[p^2]$ . Pour  $\alpha = 1$ , on a

$$(1 + p)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} p^k = 1 + p^2 + \binom{p}{2} p^2 \sum_{k=3}^p \binom{p}{k} p^k$$

Or  $\binom{p}{2} p^2 = \frac{p(p-1)p^2}{2} \equiv 0[p^3]$  car  $p$  est premier plus grand que trois donc impair, et la somme est aussi congru à 0 modulo  $p^3$ .

Soit  $\alpha \geq 1$ , supposons que l'on ait

$$(1 + p)^p \equiv 1 + p^{\alpha+1}[p^{\alpha+2}]$$

Il existe  $l \in \mathbb{N}$  tel que

$$(1+p)^{p^\alpha} = 1 + p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2}$$

Alors

$$(1+p)^{p^{\alpha+1}} = (1 + \underbrace{p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2}}_x)^p$$

Or

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} x^k = 1 + p^{\alpha+2} + lp^{\alpha+3} + \underbrace{\sum_{k=2}^p \binom{p}{k} x^k}_{\text{divisible par } x^2}$$

Comme  $p^{\alpha+1} \mid x$ ,  $p^{2\alpha+2} \mid x^2$  avec  $2\alpha+2 \geq \alpha+3$  ( $\alpha \geq 1$ ). D'où

$$p^{\alpha+3} \mid x^2 \mid \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} x^k$$

et

$$(1+p)^{p^{\alpha+1}} \equiv 1 + p^{\alpha+2}[p^{\alpha+3}]$$

**Remarque 1.16.** Pour  $p=2, \alpha=1$ , on a  $3^2 = 9 \not\equiv 5[8]$ .

**Solution 1.38.** Si  $7 = 2x^2 - 5y^2$ , on a  $\bar{0} = 2\bar{x}^2 - 5\bar{y}^2 = \bar{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$  dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . Comme 2 et 7 sont premiers entre eux donc  $\bar{2}$  est inversible. Donc  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{0}$ . La seule possibilité est  $\bar{x} = \bar{0}$  et  $\bar{y} = \bar{0}$ . Donc  $7 \mid x$  et  $7 \mid y$ . Si  $x = 7k$  alors  $x^2 = 49k^2$  donc  $49 \mid x^2$  et  $49 \mid y^2$  donc  $47 \mid 2x^2 - 5y^2 = 7$  ce qui est faux.

**Solution 1.39.**  $\mathbb{F}_{19}$  est un corps car 19 est premier. On a donc  $\bar{x}^3 = \bar{1}$  si et seulement si  $(x - \bar{1})(x^2 + x - \bar{1}) = \bar{0}$ . On a donc  $x = \bar{1}$  ou  $x^2 + x + \bar{1} = \bar{0}$ . On a

$$x^2 + x + \bar{1} = (x + \bar{2}^{-1})^2 + \bar{3} \times \bar{4}^{-1} = (x + \bar{10})^2 + \bar{3} \times \bar{50}$$

Donc  $(x + \bar{10})^2 = \bar{4}$  d'où  $x = \bar{-8} = \bar{11}$  ou  $x = \bar{-12} = \bar{7}$ .

**Solution 1.40.**

1.  $m$  est inversible si et seulement si  $m \wedge 2^n = 1$  si et seulement si  $m \wedge 2 = 1$  si et seulement si  $m$  est impair. IL y a donc  $2^{n-1}$  inversibles.

2. On a  $5^{2^{3-3}} = 5 \equiv 1 + 2^2[2^3]$ . Par récurrence, soit  $n \geq 3$ . Il existe  $k \in \mathbb{Z}$  avec  $5^{2^{n-3}} = 1 + 2^{n-1} + k2^n$  donc

$$5^{2^{n-1}} = 1 + 2^n + k2^{n+1} + 2^{2n-2}(1 + 2k)^2 \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}]$$

car  $2n - 2 \geq n + 1$  ( $n \geq 3$ ).

3. On a  $5^{2^{n-2}} \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}] \equiv 1[2^n]$  et  $5^{2^{n-3}} \not\equiv 1[2^n]$ . Donc l'ordre de  $\bar{5}$  est  $2^{n-2}$ .

4.  $\text{gr}\{\overline{-1}\} = \{\overline{-1}, \bar{1}\}$ .  $\bar{5}$  n'engendre pas  $\overline{-1}$  car si  $\bar{5}^k = \overline{-1}$ , on a  $\bar{5}^{2k} = \bar{1}$  d'où  $2^{n-2} \mid 2k$  donc  $2^{n-3} \mid k$ . Ainsi,  $k \in \{2^{n-3}, 2^{n-2}, 2^{n-1}\}$ . Mais  $\bar{5}^{2^{n-2}} = \bar{1}$ ,  $\bar{5}^{2^{n-3}} = \overline{1 + 2^{n-1}} \neq \overline{-1}$  donc un tel  $k$  n'existe pas.

Posons

$$\begin{aligned} \varphi : \left( \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}, + \right) &\rightarrow \left( \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}^\times, \times \right) \\ (\tilde{a}, \dot{b}) &\mapsto \overline{-1}^a \bar{5}^b \end{aligned}$$

Elle est bien définie car  $\omega(\overline{-1}) = 2$  et  $\omega(\bar{5}) = 2^{n-2}$ . C'est évidemment un morphisme, on a égalité des cardinaux des ensembles de départ et d'arrivée, et on vérifie qu'elle est injective, et donc c'est un isomorphisme.

**Solution 1.41.** Soit  $(x, x') \in G^2$  tel que  $x \cdot x' = e$ . Alors

$$e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e \cdot x' \cdot x$$

si et seulement si

$$e \cdot x \cdot x' = e = x \cdot e \cdot x' \cdot x \cdot x' = x \cdot e \cdot x'$$

Soit  $(x, x', x'') \in G^3$  tel que  $x \cdot x' = e$  et  $x' \cdot x'' = e$ . On a alors

$$x \cdot x' \cdot x'' = x \cdot e = x = e \cdot x''$$

Donc  $x = e \cdot x''$  et  $e = e \cdot x'' \cdot x'$ . Si on prouve que  $e \cdot x'' = x''$ , alors  $x = x''$  et  $x' \cdot x = e$ .

Montrons donc que pour tout  $x \in G$ ,  $e \cdot x = x$ . Notons que s'il existe  $e' \in G$  tel que pour tout  $x \in G$ ,  $e' \cdot x = x$ , alors  $e' \cdot e = e' = e$ . Il vient donc

$$x' \cdot x = x' \cdot e \cdot x'' = x' \cdot x'' = e$$

Donc pour tout  $x \in G$ , l'élément  $x'$  est inverse à droite et à gauche :  $x \cdot x' = e$ .

Donc

$$x \cdot x' \cdot x = e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e = x$$

Et donc  $e$  est neutre à gauche. Finalement,  $(G, \cdot)$  est un groupe.

**Remarque 1.17.** Si  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est surjective, on peut définir

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

pour un certain  $x \in \mathbb{R}$ . On a  $f \circ g = \text{id}$ . Si  $f$  n'est pas injective : s'il existait  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h \circ f = \text{id}$ , soit  $(x, x') \in \mathbb{R}^2$  telle que  $f(x) = f(x')$ . En composant par  $h$ , on aurait  $x = x'$  donc  $f$  serait injective ce qui n'est pas.

On on peut avoir un inverse à droite mais pas à gauche.

**Solution 1.42.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ fois en base } 10} = 1 + 10 + \dots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

On a

$$\begin{aligned} 21 \mid \frac{10^n - 1}{9} &\iff 3 \mid \frac{10^n - 1}{9} \text{ et } 7 \mid \frac{10^n - 1}{9} \\ &\iff 27 \mid 10^n - 1 \text{ et } 7 \mid 10^n - 1 \end{aligned}$$

car  $7 \wedge 9 = 1$ . Dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ , on a  $\overline{10} = \overline{3}$  donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\overline{10}^{6k} = \overline{1}$  d'après le petit théorème de Fermat. Dans  $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ ,  $\tilde{10}$  est inversible car  $10 \wedge 27 = 1$ .  $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times, +, \times)$  comporte 18 éléments donc pour tout  $k' \in \mathbb{N}$ , on a  $\tilde{10}^{18k'} = \tilde{1}$ .

Lorsque  $81 \mid n$ , on a  $21 \mid 1 \dots 1$ .

Cherchons plus précisément les ordres de  $\overline{10}$  dans  $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$  et de  $\tilde{10}$  dans  $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times, \times)$ . Dans  $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$ , groupe de cardinal 6, on vérifie que l'ordre de 10 est 6. Dans l'autre groupe, on vérifie que l'ordre de  $\tilde{10}$  est 3. Ainsi,  $21 \mid 1 \dots 1$  si et seulement si  $6 \mid n$ .

Il y a donc une infinité de multiples de 21 qui s'écrivent avec uniquement des 1 en base 10.

**Remarque 1.18.** Il suffit de trouver l'ordre de 10 dans les deux ensembles et de prendre le ppcm.

**Solution 1.43.**

1.  $X^d - 1$  a au plus  $d$  racines dans  $\mathbb{K}$ . Pour tout  $k \in \{0, \dots, d-1\}$ ,  $x_0^k$  est racine de  $X^d - 1_{\mathbb{K}}$  car  $\text{gr}\{x_0\}$  a pour cardinal  $d$ . Donc les racines sont exactement les puissances de  $x_0$ .  
Soit  $x \in \mathbb{K}^*$  d'ordre  $d$ . On a  $x \in \text{gr}\{x_0\}$  car  $x^d = 1$  (racine du polynôme de  $X^d - 1_{\mathbb{K}}$ ).  
Or, dans le groupe cyclique engendré par  $x_0$ , il y a  $\varphi(d)$  éléments.
2. On a ou bien  $\varphi(d)$  ou bien aucun élément d'ordre  $d$  dans  $\mathbb{K}$ . Soit  $d$  tel que  $d \mid n$ , on note  $H_d = \{x \in K \mid \omega(x) = d\}$ . On a

$$\mathbb{K}^* = \bigcup_{d \mid n} H_d$$

Alors

$$n = \sum_{d \mid n} |H_d| \leq \sum_{d \mid n} \varphi(d) = n$$

Alors pour tout  $d$  tel que  $d \mid n$ , on a  $|H_d| = \varphi(d)$ . En particulier, on a  $|H_n| = \varphi(n) \geq 1$  donc  $H_n$  est non vide. Donc il existe (au moins) un élément d'ordre  $n$ , on  $(\mathbb{K}^*, \times)$  est cyclique.

**Solution 1.44.**

1. Soit  $x \in M$ . On a  $\bar{1} - \bar{x}^{-1}$  si et seulement si  $\bar{x} = \bar{1}$  et  $\bar{1} - \bar{x}^{-1} = \bar{1}$  si et seulement si  $\bar{x} = \bar{0}$ , ce qui n'est pas possible pour les deux cas. Donc  $f$  est bien définie.  
Soit  $x \in M$ , on a

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(\bar{1} - \bar{x}^{-1}) \\ &= \bar{1} - (\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1} \\ &= (\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1}(\bar{1} - \bar{x}^{-1} - \bar{1}) \\ &= -\bar{x}^{-1}(\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
f^3(x) &= \bar{1} - (\bar{1} - (\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1})^{-1} \\
&= \bar{1} - (-x\bar{x}^{-1}(\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1})^{-1} \\
&= \bar{1} + \bar{x}(\bar{1} - \bar{x}^{-1}) \\
&= \bar{1} + \bar{x} - \bar{1} \\
&= \bar{x}
\end{aligned}$$

Donc  $f^3 = id_M$ .

2. Soit  $x \in M$ , on a

$$\begin{aligned}
f(x) = x &\iff \bar{1} - \bar{x}^{-1} = x \\
&\iff \bar{x}^2 - \bar{x} + \bar{1} = \bar{0} \\
&\iff (\bar{x} - \bar{2}^{-1})^2 + \bar{3} \times \bar{4}^{-1} = \bar{0} \\
&\iff \bar{-3} = (\bar{2}\bar{x} - \bar{1})^2
\end{aligned}$$

$f$  admet un point fixe si et seulement  $\bar{-3}$  est un carré dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  car  $\bar{y} = \bar{2}\bar{x} - \bar{1}$  si et seulement si  $\bar{x} = \bar{2}^{-1}(\bar{y} + \bar{1})$ .

3. Comme  $p$  est premier plus grand que 5, on a  $p \equiv 1$  ou  $2[3]$  donc  $p - 2 \equiv 0$  ou  $2[3]$  car  $f^3 = id_M$ , les longueurs des cycles qui composent  $f$  valent 1 ou 3.

Si  $f$  n'a pas de point fixe, tous les cycles sont de longueur 3, donc  $3 \mid p - 2$  donc  $p \equiv 2[3]$ .

Si  $p \equiv 2[3]$ , alors  $3 \mid p - 2$ , le nombre de points fixes est un multiple de 3 donc aussi du nombre de racine carrés de  $\bar{-3}$ . Et puisque l'on est dans un corps, il y a au plus 2 racines de  $\bar{-3}$ . Donc si  $p \equiv 2[3]$ , il n'y a pas de point fixe.

**Solution 1.45.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Supposons que  $x$  possède un développement décimal périodique. Alors il existe  $(n_0, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a_{n+T} = a_n$ . On a alors

$$\begin{aligned}
|x| &= \underbrace{b_m \dots b_0, a_0 \dots a_{n_0-1}}_{\in \mathbb{Q}} + \frac{1}{10^{n_0-1}} \underbrace{(0, a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} a_{n_0} \dots)}_{=y} \\
10^T y - y &= a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$



et donc

$$y = \frac{a_{n_0} \cdots a_{n_0+T-1}}{10^T - 1} \in \mathbb{Q}$$

Donc  $x \in \mathbb{Q}$ .

Réciproquement, soit  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  avec  $q \in \mathbb{N}^*$ . Il existe  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $p = aq + b$  avec  $b \in \{0, \dots, q-1\}$ . Si  $b = 0$ , on arrête. On a sinon

$$x = a + \frac{1}{10^k} \frac{10^k b}{q}$$

où  $k = \min\{m \geq 1 \mid 10^m b > q\}$ . On réitère l'algorithme avec  $\frac{10^k b}{q}$  car on a  $\left\lfloor \frac{10^k b}{q} \right\rfloor \in \{1, \dots, 9\}$  par définition de  $k$ .

Il y a  $q$  restes possibles dans la division euclidienne par  $q$ . Ainsi, au bout d'au plus de  $q+1$  itérations, on retrouve un reste précédent. Par unicité de la division euclidienne, on obtient un développement décimal périodique.

**Remarque 1.19.** On peut écrire  $q = 2^a 5^b q'$  avec  $q' \wedge 2 = q' \wedge 5 = 1$ . On se ramène alors à  $q \wedge 2 = q \wedge 5 = 1$ . En reportant dans l'écriture décimale de  $x$ , on a

$$\frac{\alpha}{q} = \frac{\beta}{10^T - 1}$$

avec  $\alpha \wedge q = 1$ . On a donc  $q \mid 10^T - 1$  d'après le lemme de Gauss.  $T$  revient donc à l'ordre de  $\overline{10}$  dans  $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}^\times, \times)$  qui contient  $\varphi(q)$  éléments. Par défaut, on a donc  $T = \varphi(q)$ .

**Solution 1.46.**

1. Soit  $m \in \mathbb{Z}$ . Si  $m \in \{0, \dots, n-1\}$ , on a  $H_n(m) = 0 \in \mathbb{Z}$ . Si  $m \geq n$ , on a  $H_n(m) = \binom{m}{n} \in \mathbb{Z}$ . Si  $m < 0$ , on a

$$H_n(m) = \frac{m(m-1) \cdots (m-n+1)}{n!} = (-1)^n \binom{-m+n-1}{-m-1} \in \mathbb{Z}$$

Donc  $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .

2. Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  et  $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$ . On a  $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$  donc  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ . Supposons  $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ .  $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une base étagée en degré de  $\mathbb{C}[X]$ . Donc il existe  $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$  tel que  $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$ . Par récurrence, on a  $P(0) =$

$a_0 \in \mathbb{Z}$ . Soit  $k \in \{0, n-1\}$ , supposons  $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$ . On a alors

$$P(k+1) = \underbrace{\sum_{i=0}^k \underbrace{a_i}_{\in \mathbb{Z}} H_i}_{\in \mathbb{Z}} + a_{k+1} \underbrace{H_{k+1}(k+1)}_{=1}$$

Donc  $a_{k+1} \in \mathbb{Z}$ .

**Remarque 1.20.** Les translation  $X + \alpha$  sont les seules pour lesquelles on a  $(X + \alpha)(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . En effet, si  $P \in \mathbb{C}[X]$  est tel que  $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ , on a  $P \in \mathbb{Q}[X]$  d'après ce qui précède. Si  $\deg(P) \geq 2$ , quitte à remplacer  $P$  par  $-P$ , on peut supposer le coefficient dominant de  $P$  strictement positif. On a alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P'(x) = +\infty$  donc il existe  $A > 0$  tel que  $P$  est strictement croissant sur  $[A, +\infty[$ . De plus,  $P(x+1) - P(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Donc il existe  $A' > 0$  tel que  $P(x+1) > P(x) + 1$ . Pour  $n \geq \max(A, A')$ , on a  $P(n+1) \geq P(n) + 2$  ce qui contredit  $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Donc le degré de  $P$  est inférieur à 1.

**Solution 1.47.** Le coefficient en  $X^k$  s'écrit  $a_{k-1} - \alpha a_k \in \mathbb{Q}$ . Si  $a_k \in \mathbb{Q}$ , on a donc  $a_{k-1} \in \mathbb{Q}$ . Il est donc impossible d'avoir deux coefficients consécutifs rationnels. Or  $x_{n-1} \in \mathbb{Q}$  car c'est le coefficient dominant de  $P$ . Donc  $\alpha$  est nécessairement racine simple.

**Solution 1.48.** Soit  $\Delta = P \wedge P' = \Delta$ . On a  $\deg(\Delta) \in \{1, 2, 3, 4\}$  car  $\Delta \mid P'$ .

Si  $\deg(\Delta) = 4$ , alors  $\Delta = P'$  (car associé). Donc il existe  $\beta \in \mathbb{C}$  d'où  $\underbrace{P}_{\in \mathbb{Q}[X]} = (X - \beta) \underbrace{P'}_{\in \mathbb{Q}[X]}$ .

Par division euclidienne,  $X - \beta \in \mathbb{Q}[X]$  et  $\beta \in \mathbb{Q}$  d'après l'algorithme de la division euclidienne.

Si  $\deg(\Delta) = 1$ , on a  $P = X - \beta$  avec  $\beta \in \mathbb{Q}$  racine de  $P$ .

Si  $\deg(\Delta) = 2$ , si  $\Delta = (X - \beta)^2$ , on a  $\Delta' = 2(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$  donc  $\beta \in \mathbb{Q}$  racine de  $\Delta$  donc de  $P$ . Si  $\Delta = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$  avec  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont racines doubles de  $P$  donc  $P = (X - \beta) \underbrace{(X - \alpha_1)^2(X - \alpha_2)^2}_{=\Delta^2 \in \mathbb{Q}[X]}$  Par division euclidienne,  $X - \beta \in \mathbb{Q}[X]$  et donc  $\beta \in \mathbb{Q}$ .

Si  $\deg(\Delta) = 3$ , si  $\Delta = (X - \beta)^3$ , on a  $\Delta^{(2)} = 6(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$  donc  $\beta \in \mathbb{Q}$ . Si  $\Delta = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$  avec  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  distinctes.  $\alpha_1, \alpha_2$  et  $\alpha_3$  seraient racines doubles de  $P$  ce qui contredit  $\deg(P) = 5$ . Si  $\Delta = (X - \alpha)^2(X - \beta)$ ,  $\alpha$  est racine triple de  $P$  et  $\beta$  racine double de  $P$ .

donc  $P = (X - \alpha)^3(X - \beta)^2 \in \mathbb{Q}[X]$ . Par division euclidienne,  $(X - \alpha)(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$  et

$$X - \alpha = \frac{\Delta}{(X - \alpha)(X - \beta)} \in \mathbb{Q}[X]$$

donc  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

### Solution 1.49.

1.  $1 \in \mathbb{Z}[i], 0 \in \mathbb{Z}[i], i \in \mathbb{Z}[i]$ . Soit  $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$  :

$$\begin{cases} (a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b') \in \mathbb{Z}[i] \\ (a + ib) \times (aa' - bb') + i(ab' + ba') \in \mathbb{Z}[i] \end{cases}$$

Donc  $\mathbb{Z}[i]$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$  contenant  $i$ .

Soit  $A$  un sous anneau de  $\mathbb{C}$  contenant  $i$ .  $A$  est stable par  $x$  donc  $i^4 = 1 \in A$ .  $A$  est stable par  $+$  donc  $\mathbb{Z} \subset A$ , puis  $i\mathbb{Z} \subset A$  donc  $\mathbb{Z}[i] \subset A$ .  $\mathbb{Z}[i]$  est donc le plus petit sous anneau de  $\mathbb{C}$  contenant  $i$ .

2. Si  $|z|^2 = 1$  c'est-à-dire  $a^2 + b^2 = 1$ , alors

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{|z|^2} = a - ib \in \mathbb{Z}[i]$$

Si  $z$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[i]$ , il existe  $z' \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $zz' = 1$  donc  $|z|^2|z'|^2 = 1$  donc  $|z|^2 = 1$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ . Si  $|a| \geq 2$  ou  $|b| \geq 2$ , alors  $a^2 + b^2 \geq 4$  donc si  $|z|^2 = 1$ , alors  $a^2 + b^2 = 1$  et  $(|a| = 1 \text{ et } |b| = 0)$  ou  $(|a| = 0 \text{ et } |b| = 1)$ . Donc

$$U = \{1, -1, i, -i\}$$

3. (a) Si  $x \in \mathbb{R}$ , il existe  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $|x - n| \leq \frac{1}{2}$  (faire un dessin et le montrer grâce aux parties entières). Soit alors  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ , on prend un  $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $|x_0 - a| \leq \frac{1}{2}, |y_0 - b| \leq \frac{1}{2}$ . Et pour  $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ , on a  $|z - z_0|^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \leq \frac{1}{2}$ .

(b) Soit  $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ , on a  $z_1 = qz_2 + r$  si et seulement si  $\frac{z_1}{z_2} - q = \frac{r}{z_2}$ . On a  $|r| < |z_1|$  si et seulement si  $|\frac{z_1}{z_2} - q| < 1$ . On a  $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$  donc d'après 3.(a), il existe  $q \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $|\frac{z_1}{z_2} - q| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ . On pose alors  $r = z_1 - qz_2 \in \mathbb{Z}[i]$  par stabilité. Il vient donc  $|r| < |z_2|$

Il n'y a pas unicité : par exemple  $z_2 = 1$  et  $z_1 = \frac{1+i}{2}$ . On peut prendre  $q \in \{0, 1, i, 1+i\}$ .

(c) Soit  $I \neq \{0\}$  un idéal de  $\mathbb{Z}[i]$ . On note  $n_0 = \min\{|z|^2 \mid z \in I \setminus \{0\}\}$  (partie non vide de  $\mathbb{N}^*$ ). Soit  $z_0 \in I \setminus \{0\}$  tel que  $|z_0|^2 = n_0$ . On a directement  $z_0\mathbb{Z}[i] \subset I$  ( $I$  est un idéal).

Réciproquement, soit  $z \in I$ , d'après 3.(b), il existe  $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$  tel que

$$r = \underbrace{z}_{\in I} - \underbrace{z_0}_{\in I} \underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}[i]} \in I$$

et  $|r|^2 < n_0$ . Nécessairement,  $r = 0$  et  $z = z_0 q \in z_0\mathbb{Z}[i]$ . Donc  $I = z_0\mathbb{Z}[i]$ . Finalement,  $\mathbb{Z}[i]$  est principal.

4. Si  $|z|^2 = 1$ , alors  $z \in U$  donc c'est bon. On travaille ensuite par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que la décomposition existe pour  $z \in \mathbb{Z}[i]$  avec  $|z|^2 \leq n$ . Soit  $z \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $|z|^2 = n + 1$ . On a  $|z|^2 \geq 2$  donc  $z \in U$ . Si  $z$  est irréductible, c'est bon. Sinon, il existe  $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[i]^2$  tel que  $z = z_1 z_2$  et  $z_1$  et  $z_2$  non inversibles. Alors  $|z_1|^2 \geq 2$  et  $|z_2|^2 \geq 2$ . Or  $|z|^2 = n + 1 = |z_1|^2 |z_2|^2$  donc  $|z_1|^2 \leq n$  et  $|z_2|^2 \leq n$ . Par hypothèse de récurrence, on peut décomposer  $z_1$  et  $z_2$ , donc  $z$  est décomposable.

Pour l'unicité, soit  $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$  tel que  $z = u \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\nu_\rho(z)} = v \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\mu_\rho(z)}$ . Le théorème de Gauss est valable dans  $\mathbb{Z}[i]$ , car c'est un anneau principal. S'il existe  $\rho_0 \in \mathcal{P}_0$  tel que  $\nu_{\rho_0}(z) < \mu_{\rho_0}(z)$ , alors

$$\rho_0 \mid \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0 \setminus \{\rho_0\}} \rho^{\nu_\rho(z)}$$

ce qui est proscrit par le théorème de Gauss. On a donc pour tout  $\rho \in \mathcal{P}_0$ ,  $\nu_\rho(z) = \mu_\rho(z)$ .

En reportant, on a  $u = v$ . D'où l'unicité de la décomposition.

### Solution 1.50.

1. On a  $\bar{1} \in R$ . Soit  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in R^2$ , il existe  $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in (\mathbb{F}_p^*)^2$  tel que  $\bar{x}_1 = \bar{y}_1^{-2}$  et  $\bar{x}_2 = \bar{y}_2^{-2}$ . On a alors

$$\overline{x_1 x_2}^{-1} = (\overline{y_1 y_2}^{-1})^2 \in R$$

donc  $R$  est un sous groupe de  $(\mathbb{F}_p^*, \times)$ . Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{F}_p^* &\rightarrow \mathbb{F}_p^* \\ \bar{y} &\mapsto \bar{y}^2 \end{aligned}$$

On a  $\text{Im}(\varphi) = R$ . Comme  $\mathbb{F}_p$  est un corps, chaque éléments de  $R$  a exactement 2 antécédents par  $\varphi$ . Donc  $|R| = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{2} = \frac{p-1}{2}$ .

S'il existe  $\bar{y} \in \mathbb{F}_p^*$  tel que  $\bar{a} = \bar{y}^2$ , on a  $\bar{a}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{y}^{p-1} = \bar{1}$  par le théorème de Fermat.

Réciproquement, si  $\bar{a}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$ ,  $X^{\frac{p-1}{2}} - \bar{1}$  admet au plus  $\frac{p-1}{2}$  racines dans  $\mathbb{F}_p^*$ . Tous les éléments de  $R$  sont racines de ce polynôme, ce sont donc ses seules racines. Donc  $a \in R$ .

2. Si  $p = a^2 + b^2$ , alors  $\bar{0} = \bar{a}^2 + \bar{b}^2$ . Si  $\bar{a} = \bar{b} = \bar{0}$ , on a  $p \mid a$  et  $p \mid b$  donc  $p^2 \mid p$  ce qui est exclu. Par exemple, si  $\bar{a} \neq \bar{0}$ , on a  $\bar{1} = -\bar{b}^2 \bar{a}^{-2}$  donc  $\bar{-1} = (\bar{a}^{-1} \bar{b})^2 \in R$  d'après 1. On a donc  $(\bar{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$  si et seulement si  $2 \mid \frac{p-1}{2}$  (car  $p$  est premier plus grand que 3) d'où  $4 \mid p-1$  donc  $p \equiv 1[4]$ .

3. On a  $|\mathbb{F}_p| = p$ ,  $E(\sqrt{p}) \leq \sqrt{p} < E(\sqrt{p}) + 1$  et  $|\{0, \dots, E(\sqrt{p})\}|^2 = (E(\sqrt{p}) + 1)^2 > p$  ( $p$  est premier, ce n'est pas un carré) donc  $f$  n'est pas injective (cardinalité).

Donc il existe

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in (\{0, \dots, E(\sqrt{p})\}^2)^2$$

avec  $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$  et  $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$ . Donc

$$\bar{a}_1 - \bar{k} \bar{b}_1 = \bar{a}_2 - \bar{k} \bar{b}_2 \Rightarrow \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \bar{k}(\bar{b}_1 - \bar{b}_2)$$

Si  $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$ , alors  $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$  donc  $p \mid b_1 - b_2$  et  $p \mid a_1 - a_2$  donc  $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$  ce qui n'est pas vrai. Donc  $\bar{b}_1 \neq \bar{b}_2$ . Posons  $b_0 = b_1 - b_2$  et  $a_0 = a_1 - a_2$ . On a  $\bar{b}_0 \neq \bar{0}$ . Il vient donc  $(|a_0|, |b_0|) \in \{1, \dots, E(\sqrt{p})\}^2$ ,  $\bar{a}_0 = \bar{k} \bar{b}_0$  donc  $\bar{k} = \bar{a}_0 \bar{b}_0^{-1}$ .

4. Si  $p \equiv 1[4]$ , en remontant les calculs, on a  $(\bar{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$  donc  $\bar{-1} \in R$  et il existe  $\bar{k} \in \mathbb{F}_p^*$  tel que  $\bar{-1} = \bar{k}^2$ . Alors d'après 3., il existe  $(a_0, b_0)$  tels que  $\bar{k} = \bar{a}_0 \bar{b}_0^{-1}$ . Il vient alors  $\bar{-1} = \bar{a}_0^2 (\bar{b}_0^{-1})^2$  donc  $\bar{-b}_0^2 = \bar{a}_0^2$ . On a

$$p \mid a_0^2 + b_0^2 \in \{2, \dots, 2E(\sqrt{p})\}^2 \subset \{2, \dots, 2p-1\}$$

Nécessairement,  $a_0^2 + b_0^2 = p$  et  $p$  est somme de deux carrés.

### Solution 1.51.

1. Soit  $(m, n) \in A^2$ . Il existe  $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$  tel que  $m = a^2 + b^2 = |a + ib|^2$  et  $n = c^2 + d^2 = |c + id|^2$ . Donc

$$m \times n = |ac - bd + i(bc + ad)|^2 = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \in A$$

2. On a

$$n = \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_1} p^{\nu_p(n)}}_{\in A \text{ car } \mathcal{P}_1 \subset A} \times \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{\nu_p(n)}}_{=\prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{2\alpha_p} \in A} \in A$$

3. Soit  $n \in A$ , il existe  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  avec  $n = a^2 + b^2$ . Soit  $p \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ , on a  $p \mid a^2 + b^2$  donc  $\overline{a^2 + b^2} = \bar{0}$  dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Si  $p \nmid a$  ou  $p \nmid b$ , alors  $\overline{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \bar{0}$  donc  $\overline{-1} \in R$  (résidus quadratiques, voir exercice précédent). Donc  $p = 2$  ou  $p \equiv 1[4]$ .

Si  $p \mid a$  et  $p \mid b$ ,  $a = p^k a', b = p^l b'$  avec  $p \nmid a'$  et  $p \nmid b'$ . On suppose  $1 \leq k \leq l$  (quitte à échanger  $a$  et  $b$ ). On a

$$a^2 + b^2 = p^{2k}(a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2) = n$$

donc

$$p \mid a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2$$

et  $\overline{a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2} = \bar{0}$ . Nécessairement,  $l = k$ . De même  $p \in \mathcal{P}_1$ . Par contraposée,  $\nu_p$  est pair.

## 2 Séries numériques et familles sommables

**Solution 2.1.**

1. On a  $b_0 = a_1 = 5, b_1 = a_3 = 13$  et pour  $p \geq 2$ ,  $b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$ .

On a donc l'équation caractéristique  $x^2 - 2x - 3 = 0$ . Les deux solutions sont 3 et -1.

Donc il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ ,  $b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$ .

On a alors  $b_0 = 5 = \lambda + \mu$  et  $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$ . On trouve alors

$$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}}$$

2. On le montre par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$ .

3. Si  $3^p \leq n < 3^{p+1}$ , on a  $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$ . Alors

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leq \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p}$$

Soit  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$$

Soit  $p_n \in \mathbb{N}$  tel que  $3^{p_n} \leq \sigma(n) < 3^{p_n+1}$ . On a

$$p_n = \lfloor \log_3(\sigma(n)) \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

En reportant, on a  $\frac{3}{2} \leq \lambda \leq \frac{9}{2}$ .

Si  $\sigma(n) = 3^n$ , on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2}$$

Si  $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$ , on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2}$$

Soit  $\mu \in [1, 3[$  et  $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n \mu$ . Alors

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2\mu}$$

Donc tout réel compris dans  $\left[ \frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right]$  est valeur d'adhérence.

## Solution 2.2.

1.

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - x \end{aligned}$$

est continue,  $g(a) \geq 0$  et  $g(b) \leq 0$ , donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe  $l \in [a, b]$  avec  $g(l) = 0$ , d'où

$$\boxed{f(l) = l}$$

2. On note  $A = \{\lambda \mid \lambda \text{ est valeur d'adhérence}\}$ . Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que  $A$  est non vide. De plus,  $A$  est borné car  $A \subset [a, b]$ . Soit  $\lambda = \inf(A)$  et  $\mu = \sup(A)$ .

Si  $\lambda = b$ , on a  $\mu = b$  et  $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$ .

Si  $\lambda < b$ , soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $\lambda \notin A$ ,  $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in ]\lambda, \lambda + \varepsilon[ \}$  est infini. Par définition,  $\lambda$  est valeur d'adhérence. Donc  $\lambda \in A$ , et de même  $\mu \in A$ .

Soit  $\nu \in ]\lambda, \mu[$  avec  $\lambda < \mu$ . Si  $\nu \notin A$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que  $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$  est fini. Donc il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $x_n \notin ]\nu - \varepsilon_0, \nu + \varepsilon_0[$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$ , il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ ,  $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0$ . Soit alors  $n \geq \max(N_0, N_1)$ . Si  $x_n \leq \nu - \varepsilon_0$ , alors  $x_{n+1} \leq \nu - \varepsilon_0$ . Si  $x_n \geq \nu + \varepsilon_0$ , alors  $x_{n+1} \geq \nu + \varepsilon_0$ . Ceci contredit que  $\lambda$  et  $\mu$  sont valeur d'adhérence.

Ainsi,  $\nu \in A$  et

$$\boxed{[\lambda, \mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}}$$

3. Si  $(x_n)$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ . Réciproquement, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ , d'après 2., on a  $A = [\lambda, \mu]$ . On suppose  $\lambda < \nu$ . Ainsi,  $\frac{\lambda + \nu}{2} = \alpha$  est valeur d'adhérence. Donc il existe  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha$ . Alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$  par continuité de  $f$  et c'est aussi égale à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$ . Ainsi,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha}$$

Par ailleurs, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_{n_0} \in [\lambda, \mu]$  et  $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$ , alors pour tout  $n \geq n_0$ , on a  $x_n = x_{n_0}$ . Donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et  $\lambda = \mu : (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée et a une



unique valeur d'adhérence.

Donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

**Solution 2.3.** On a  $u_n = e^{i2^n \theta}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  car  $l = l^2$  et  $|l| = 1$ .

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est périodique au-delà d'un certain rang, il existe  $T \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $u_{n+T} = u_n$ . En particulier,  $u_{N_0+T} = u_{N_0}$ . On veut alors  $2^{N_0+T} \theta \equiv 2^{N_0} \theta [2\pi]$ . D'où  $2^{N_0+T} \theta = 2\theta + 2k\pi$  donc  $2^{N_0}(2^T - 1)\theta = 2k\pi$ . Donc  $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ .

Réciproquement, si  $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$ , son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est aussi.

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $U_{n+1} = U_n = U_{n^2}$ . Comme  $|U_n| = 1$ , alors  $2^n \theta \in 2\pi\mathbb{N}$  et  $\frac{\theta}{2\pi}$  est dyadique.

Réciproquement, s'il existe  $p \in \mathbb{N}$ ,  $u_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$  (nombre dyadique). Alors pour tout  $n \geq n_0$ ,  $2^n \theta \in 2\pi\mathbb{N}$  et  $u_n = u_{n_0} = 1$ .

Pour la densité, on prend une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en écrivant successivement, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , tous les paquets de  $k$  entiers sont dans  $\{0, 1\}^k$ . Soit  $x \in [0, 1[$  tel que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $p_N \in \mathbb{N}$ ,

$$2^{p_N} \theta = 2\pi \underbrace{(\dots)}_{\in \mathbb{N}} + 2\pi \left( \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in [0, \frac{1}{2^N}[} \right)$$

On a alors

$$e^{i2^{p_N} \theta} = e^{i2\pi \left( \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \dots \right)}$$

et

$$\left| \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} - x \right| \leq \frac{1}{2^N}$$

D'où  $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_{p_N} = e^{i2\pi x}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $\mathbb{U}$ .

**Solution 2.4.** Si  $a = 0$  et  $b = 0$ ,  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Si  $a = 0$  et  $b \neq 0$  (ou inversement),  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Si  $a > 0$  ou  $b > 0$ , on a

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{e^{\frac{1}{n} \ln(a)} + e^{\frac{1}{n} \ln(b)}}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{2n} \ln(ab) + \frac{1}{4n^2} (\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{n}{2} \ln(ab) + \frac{1}{4} (\ln(a)^2 + \ln(b)^2 + o(1))\right) \end{aligned}$$

Si  $ab > 1$ , on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

Si  $ab < 1$ , on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

Si  $ab = 1$ , on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{\frac{1}{2} \ln(a)^2}}$$

**Solution 2.5.**

1. Soit  $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 0$  (car  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$ ).

$$J = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid x_k \geq \frac{M}{2} \right\}$$

est fini car  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et est non vide. On définit

$$\varphi(0) = \min \left\{ k \in J \mid x_k = \max\{x_n \mid n \in J\} \right\}$$

Pour tout  $n \in J$ ,  $x_{\varphi(0)} \geq x_n$ . Si  $n \notin J$ ,  $x_n \leq \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$ . Ainsi,

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$$

Puis on recommence avec

$$\left\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\} \right\}$$

2. Pour  $l = 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x_N < \varepsilon$ . On pose

$$I = \{N\}$$

et on a bien

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leq \varepsilon$$

Si  $l = +\infty$ , soit  $A > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum_{k=0}^N x_k > A$  (car  $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$ ).

Donc on peut prendre

$$I = \{0, \dots, N\}$$

Si  $l \in \mathbb{R}_+^*$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $\varepsilon < l$ . Il existe

$N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ , on a  $x_n < \varepsilon$  et  $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$ . Donc il existe un plus petit entier  $N_1$  tel que  $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geq l - \varepsilon$ . Comme  $x_{N_1} < \varepsilon$ , on a  $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leq l + \varepsilon$ .

Donc

$$I = \{N_0, \dots, N_1\}$$

**Solution 2.6.** On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$$

Montrons que  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ . D'abord, il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} > 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \in \overline{\mathbb{R}}_+^*$ .

Si  $l < +\infty$ , on a  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}$  et donc  $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l^2}$  et la série diverge. Donc  $l = +\infty$  et comme

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$ , on a  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On observe ensuite que  $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$  donc  $S_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$ . Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{= (S_n - S_{n-1}) S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{= S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$$

On applique le théorème de Césaro à la suite  $S_n^3 - S_{n-1}^3$  :

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$$

donc  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$ , et comme  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$ , on a bien

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}}$$

Réciproquement, soit  $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$  avec  $u_0 = 1$ . On a

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}}$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}}$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1}$$

**Remarque 2.1.** On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour  $\alpha < 1$ ,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha}$$

**Solution 2.7.** Tout d'abord, on montre que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$$

en posant

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0, 1]$  et on a  $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geq 0$  et  $f'(0) = 0$ . Comme  $f(0) = 0$ , on a pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) \geq 0$ .

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur  $f$ , on a

$$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t \in [0, 1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leq \cosh(1)} \leq x^4$$

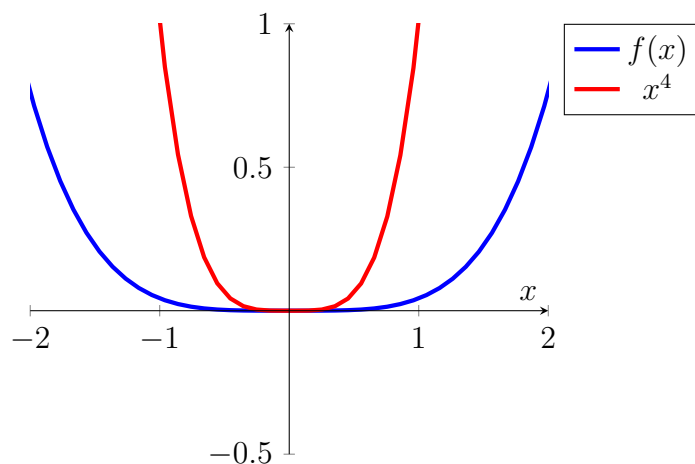


FIGURE 1  $1 - 0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^n \left[ \cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - 1 \right]$$

Ainsi,

$$0 \leq x_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}$$

**Solution 2.8.**  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(x) = e^x - 1$ .

On a

$$0\varphi(a_n) \leq \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(a_n) = 0$$

Par l'absurde, soit  $\varepsilon > 0$ . Supposons qu'il existe une infinité d'entiers  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $|a_k| > \varepsilon$ .

Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geq \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0$$

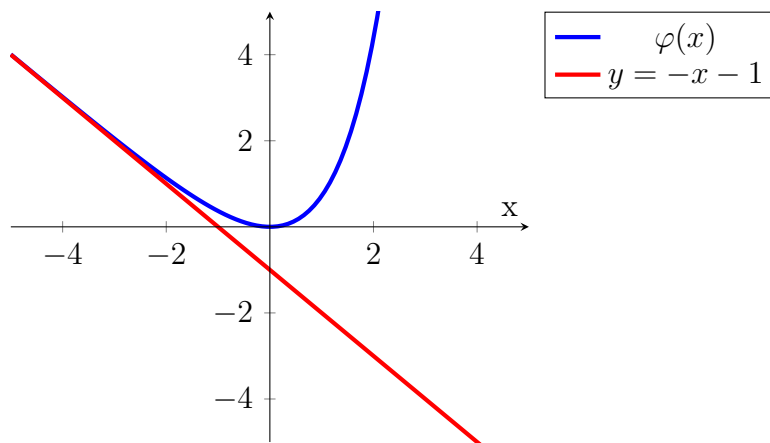


FIGURE 2 –  $e^x - x - 1 \geq -x - 1$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

ce qui contredit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(a_n) = 0$ . Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

et c'est pareil pour  $b_n$  et  $c_n$ .

### Solution 2.9.

1. Soit

$$\begin{aligned} f : ]0, 1[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(1 - x) \end{aligned}$$

On a  $f(x) \in ]0, \frac{1}{4}]$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]0, \frac{1}{4}]$ . Par récurrence, on a donc  $u_{n+1} \leq u_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

Donc  $v_n$  est bien définie.

2. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1 - u_n} = \frac{1}{u_n} (1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1)$$

Donc  $v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ . D'après le théorème de Césaro, on a

$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

donc  $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$  et  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ .

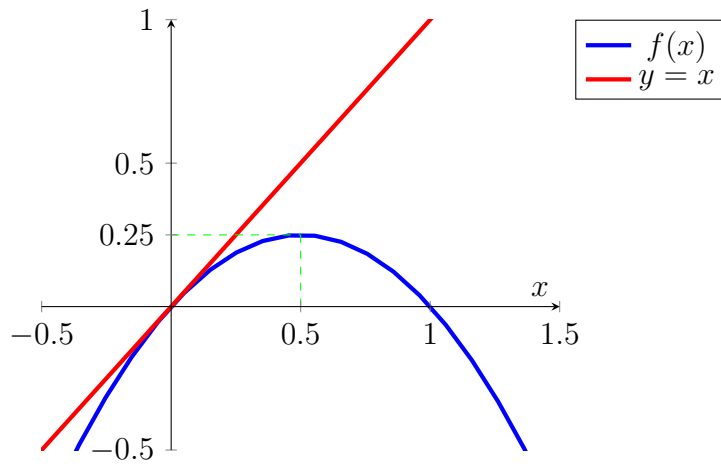


FIGURE 3 –  $x(1-x) \in ]0, \frac{1}{4}]$  pour  $x \in ]0, 1[$ .

On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} (1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{= o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  donc  $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ . En sommant, on a donc

$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o(\ln(n))$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n + \ln(n) + o(\ln(n))} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \alpha_n} \end{aligned}$$

$\alpha_n$  est le terme général d'une série à termes positifs convergentes car  $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$ .

Donc

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et en sommant,

$$v_n = n + \ln(n) + O(1)$$

et comme montré auparavant,

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$$

### Solution 2.10.

1. Soit

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n - x - n \end{aligned}$$

On a  $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 = 0$  si et seulement si

$$x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n$$

$f_n(0) = -n < 0$  et  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ .  $f_n$  est monotone strictement sur  $]\alpha_n, +\infty[$ .

Donc il existe une unique  $x_n \in \mathbb{R}^+$  tel que  $f_n(x_n) = 0$

On a  $f_n(1) = -n < 0$  donc  $x_n > 1$  et  $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$  pour  $n \geq 3$  (on a  $x_2 = 2$ ).

Donc pour  $n \geq 3$ ,  $x_n \in ]1, 2[$ .

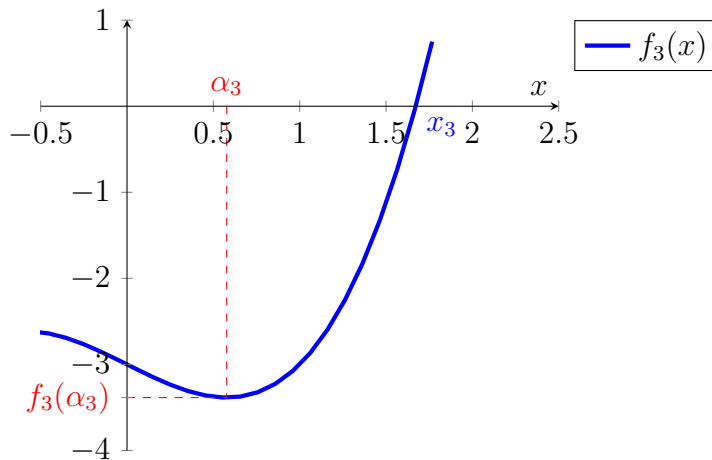


FIGURE 4 —  $x \mapsto x^3 - x - 3$  a exactement un zéro sur  $\mathbb{R}_+$ .



2. On a  $x_n^n = x_n + n \leq 2 + n$  donc

$$1 \leq x_n \leq (2 + n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(2+n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1}$$

3. On peut poser  $x_n = 1 + \varepsilon_n$  avec  $\varepsilon_n > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$ . On a

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n$$

donc

$$n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(1 + \varepsilon_n + n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1 + \varepsilon_n}{n}\right)}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

On a enfin

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n = 1 + n + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \ln(1 + \varepsilon_n) &= \frac{1}{n} \ln\left(n + 1 + \frac{\ln(n)}{n}\right) + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left[ \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \right] \\ &= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

donc

$$1 + \varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)}$$

**Solution 2.11.** *On note*

$$v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n}$$

*Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = a$  alors  $v_n = a \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$ . De manière générale, on a*

$$v_n - a = v_n - a \frac{u_n + \cdots + u_0}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k}(a_k - a)}{u_0 + \cdots + u_n}$$

*Ainsi,*

$$|u_n - a| \leq \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k} |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n}$$

*Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,  $|a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Comme  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge, on note  $M = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k - a|$ . Soit  $n \geq N$ , on a*

$$\begin{aligned} |v_n - a| &\leq \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k} |a_k - a| + \sum_{k=N}^n |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \\ &\leq \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k M}{u_0 + \cdots + u_n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N}^n u_{n-k} \frac{\varepsilon}{2}}{u_0 + \cdots + u_n}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

*car les  $u_i$  sont positifs.*

*On remarque enfin que*

$$\begin{aligned} u_n &= o(u_0 + \cdots + u_n) \\ u_{n-1} &= o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\ &\vdots \\ u_{n-N+1} &= o(u_0 + \cdots + u_n) \end{aligned}$$

*Donc*

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

*et il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N'$ , on a*

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

*et donc pour tout  $n \geq \max(N, N')$ , on a  $|v_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et ainsi*

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a}$$

**Solution 2.12.**

1. Pour  $n \geq 2$ , (iii) donne

$$x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

Ainsi,

$$0 \leq x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_n}{n!} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}$$

où l'inégalité est stricte d'après (ii). Pour  $n \geq 2$ , on a

$$x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2!}$$

donc

$$0 \leq 2x - \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Donc  $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$ . On a ensuite

$$0 \leq n! \left( x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

donc

$$a_n = \left\lfloor n! \left( x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \right\rfloor$$

On a donc bien unicité.

Soit maintenant  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie comme ci-dessus. On a, pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$0 \leq n! \left( x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1$$

Or

$$0 - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{1}{(n-1)!}$$

donc

$$a_n \in \{0, \dots, n-1\}$$

et (i) est vérifié.

On a

$$0 \leq x - \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k!} < \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc (iii) est vérifié, et supposons qu'il existe  $n_0 \geq 2$  tel que pour tout  $m \geq n_0 + 1$ , on a  $a_m = m - 1$ . Alors

$$x = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!}$$

et

$$x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n_0!}$$

donc

$$n_0! \left( x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} \right) = 1$$

et

$$n_0! \left( x - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_{n_0-1}}{(n_0-1)!} \right) - a_{n_0} = 1$$

En prenant la partie entière, on a donc  $0 = 1$  ce qui est absurde.

Donc (ii) est vérifié.

2. S'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $a_n = 0$  alors  $x \in \mathbb{Q}$ .

Si  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , on a

$$x = \frac{a_2}{2} + \dots + \frac{a_n}{n!}$$

si et seulement si

$$a_n = n! \left( x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

si et seulement si

$$n! \left( x - \frac{a_2}{2} - \dots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \in \mathbb{N}$$

ce qui est vrai dès que  $n \geq q$ . Donc pour tout  $n > q$ , on a  $a_n = 0$  par unicité.

3. Soit  $l \in [-1, 1]$ . Soit  $x \in [0, 1[$  avec

$$x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k!}$$

On a alors

$$n!2\pi x = \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \underbrace{\sum_{k \geq n+2} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{= \varepsilon_n}$$

On a

$$0 \leq \varepsilon_n < \frac{2\pi n!}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc

$$\sin(n!2\pi x) = \sin\left(\frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \varepsilon_n\right)$$

et il suffit d'avoir, comme  $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ,

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\arcsin(l)}{2\pi} \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

On pose alors

$$a_n = \left\lfloor \frac{n \arcsin(l)}{2\pi} \right\rfloor$$

pour  $n \geq 2$  et on a  $0 \leq a_n \leq \frac{n}{4} < n-1$  pour tout  $n \geq 2$ . On a donc le résultat.

**Remarque 2.2.** Il n'y a pas unicité. Par exemple, pour  $l = 0$ ,  $x = 0$  ou  $x = \frac{1}{2}$  convient. Plus généralement, pour tout  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , pour tout  $n \geq q$ , on a

$$\sin\left(n!2\pi\left(x + \frac{p}{q}\right)\right) = \sin(n!2\pi x)$$

**Solution 2.13.** Par récurrence, on a  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 \ln(1+x) - x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 \ln(1+x) \end{aligned}$$

$g$  est dérivable est

$$g'(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

donc  $g$  est croissante sur  $[0, 1]$  et décroissante sur  $[1, +\infty[$ . Comme  $g(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel  $l \in ]0, +\infty[$  tel que  $g(l) = 0$  d'où  $f(l) = l$ .

Pour tout  $x \in ]0, l]$ , on a  $x \leq f(x) \leq l$  et pour tout  $x > l$ , on a  $l \leq f(x) \leq x$ .

Soit  $n \geq 1$ . Si  $u_n \geq l$  et  $u_{n-1} \geq l$ , on a  $m_n = l$  et  $M_n \in \{u_n, u_{n-1}\}$ . Il vient donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(f(u_n) + f(u_{n-1})) \geq f(l) = l$$

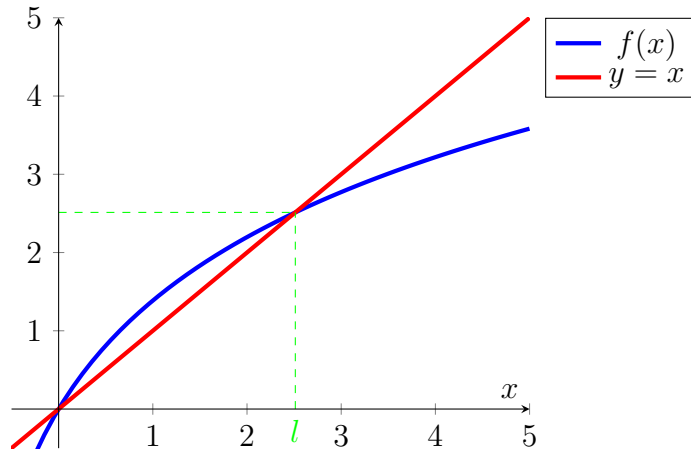


FIGURE 5 –  $x \mapsto 2 \ln(1+x)$  admet un unique point fixe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

et

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \leq M_n$$

Donc  $m_{n+1} = l = m_n$  et  $M_{n+1} \leq M_n$ .

Par récurrence, on a pour tout  $k \geq n$ ,  $u_k \geq l$  et  $(M_k)_{k \geq n}$  converge vers  $\lambda \geq l$  (car décroissante et plus grande que  $l$ ) et  $m_k = l$  pour tout  $k \geq n$ .

De plus pour tout  $k \geq n$ , on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(f(u_k) + f(u_{k-1})) \leq f(M_k)$$

car  $f$  est croissante et donc

$$u_{k+2} \leq f(M_{k+1}) \leq f(M_k)$$

Par passage à la limite, on a  $\lambda \leq f(\lambda)$  donc  $\lambda = f(\lambda)$  et donc  $\lambda = l$ . Or pour tout  $k \geq n$ , on a

$$\underbrace{m_k}_{=l} \leq u_k \leq M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$$

donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l}$$

S'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u_{n_0-1} \geq l$  et  $u_{n_0} \geq l$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ . Or même s'il existe  $n_1 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u_{n_1-1} \leq l$  et  $u_{n_1} \leq l$ , alors on inverse les rôles de  $M_{n_1}$  et  $m_{n_1}$ .

Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(u_n - l)(u_{n+1} - l) \leq 0$$

Supposons par exemple  $u_0 \geq l$  et  $u_1 \leq l$ . Alors

$$0 \leq u_2 - l \leq \frac{u_0 - l}{2}$$

et par récurrence, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq u_{2k} - l \leq \frac{u_0 - l}{2^k}$ . Donc  $u_{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$  et de même  $u_{2k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$  (par valeurs inférieures). Donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l}$$

**Solution 2.14.** Soit  $(\theta, \theta') \in [2, 2\pi[{}^2$  tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{ipx_n} = e^{i\theta}$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{iqx_n} = e^{i\theta'}$$

Soient  $x, x'$  deux valeurs d'adhérence de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  distinctes. On a

$$\begin{cases} e^{ipx} = e^{i\theta} = e^{ipx'} \\ e^{iqx} = e^{i\theta'} = e^{iqx'} \end{cases}$$

Il existe  $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$  tel que

$$\begin{cases} px = px' + 2k\pi \\ qx = qx' + 2k'\pi \end{cases}$$

et donc  $p(x - x') = 2k\pi$  et  $q(x - x') = 2k'\pi$  et alors  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  ce qui contredit l'hypothèse. Donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une unique valeur d'adhérence. Comme elle est bornée,

$$\boxed{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}}$$

Si  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas bornée, on peut prendre

$$\boxed{x_n = n!}$$

On a

$$e^{2i\pi n!} = 1$$

et

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}}_{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0}$$

Si on veut  $x_n$  divergente dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , on peut prendre

$$\boxed{x_n = (-1)^n n!}$$

**Solution 2.15.**

1. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \boxed{\frac{n^k}{k!}}$$

2. On a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right| &\leq \sum_{k=0}^n |z|^k \underbrace{\left| \frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right|}_{\geq 0} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \frac{|z|^k}{n^k} \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

3. On sait que

$$\sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e^{|z|}$$

et

$$\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{|z|}{n})} = e^{n(\frac{|z|}{n} + o(\frac{|z|}{n}))} = e^{|z|} e^{o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{|z|}$$

En reportant dans la question précédente, on a donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z}$$



**Remarque 2.3.** Une autre méthode est d'écrire, pour  $z = a + ib$ ,

$$1 + \frac{z + ib}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n} = \rho_n e^{i\theta_n}$$

. On a alors

$$\left| 1 + \frac{a + ib}{n} \right| = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}} = \rho_n$$

et alors

$$\begin{aligned} \rho_n^n &= \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right) \right|^n \\ &= e^{\frac{n}{2} \ln \left( \left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2} \right)} \\ &= e^{\frac{n}{2} \ln \left( 1 + \frac{2a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \\ &= e^{a+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a = |e^z| \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$1 + \frac{a + ib}{n} = \rho_n \left( \underbrace{\frac{1 + \frac{a}{n}}{\rho_n}}_{= \cos(\theta_n)} + i \underbrace{\frac{b}{n\rho_n}}_{= \sin(\theta_n)} \right)$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n\rho_n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{a}{n}}{\rho_n} = 1$$

On peut imposer  $\theta_n \in ] -\pi, \pi]$  et il existe alors  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\cos(\theta_n) \geq 0$ . Pour  $n \geq N$ , on a alors  $\theta_n \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  donc

$$\theta_n = \arcsin \left( \frac{b}{n\rho_n} \right)$$

et  $n\theta_n = n \arcsin \left( \frac{b}{n\rho_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b$ . Finalement, on a bien

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \rho_n^n e^{i\theta_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a e^{ib} = e^z$$

**Solution 2.16.** Pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n > 0$ . On a

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}}_{<1} u_n$$

donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante donc converge. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n \underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}_{= v_k} < 0$$

Ensuite,

$$v_k = -\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{k}}$$

Comme  $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{\sqrt{k}}$  diverge, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$ .

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$$

On a ensuite

$$u_n = \exp\left(\sum_{k=2}^n \left[\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right]\right)$$

et

$$\ln\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{k}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Donc

$$v_k = -\frac{2}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$$

Le terme dans le  $O$  est le terme générale d'une série absolument convergent donc convergent, on note ce terme  $\alpha_k$ . On a alors

$$\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{2}{\sqrt{k}} + \alpha_k\right) = -2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k}_{=C} + o(1)$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \int_2^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$$

Posons

$$w_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

On étudie la série de terme général  $w_n - w_{n-1}$ . On a

$$\begin{aligned}
 w_n - w_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \\
 &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)
 \end{aligned}$$

Donc la série de terme général  $w_n - w_{n-1}$  converge et ainsi  $(w_n)_{n \geq 2}$  converge : il existe  $C' \in \mathbb{R}$  tel que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + C' + o(1)$$

On a donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n v_k = -4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)$$

Ainsi,

$$u_n = \exp(-4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K e^{-4\sqrt{n}}$$

où  $K = e^{-2C'+C} > 0$ .

Donc

$$u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K^\alpha e^{-4\alpha\sqrt{n}}$$

Si  $\alpha \leq 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha \not\rightarrow 0$  donc

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ diverge.}}$$

Si  $\alpha > 0$ ,  $u_n^\alpha = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ converge.}}$$

**Solution 2.17.** Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . On a

$$u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \geq nu_{2n} \geq 0$$

Si  $(S_n)$  converge alors  $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_{2n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2nu_{2n} = 0$ .

Comme on a  $(2n+1)u_{2n} \geq (2n+1)u_{2n+1} \geq 0$ , on a aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n} = 0$ . Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 0 \text{ et donc } u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Si  $\{p \in \mathbb{N} | pu_p \geq 1\}$  est infini, alors  $u_p \neq o\left(\frac{1}{p}\right)$  donc

$$\boxed{\sum u_p \text{ diverge.}}$$

**Remarque 2.4.** Ce n'est pas vrai si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas décroissante, par exemple si  $u_n = \frac{1}{n}$  si  $n$  est un carré et 0 sinon.

**Solution 2.18.** 1. C'est une série à termes positifs. On a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ainsi

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

2. C'est une série à termes positifs. On a

$$u_n \geq \int_1^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(1) dt = \frac{\sin(1)}{n+1} \times \left( \left( \frac{\pi}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

3. On écrit

$$\frac{n!}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (-1)^k}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k$$

et

$$\left| \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k \right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

d'après le critère spécial des séries alternées.

Donc

$$\begin{aligned} \sin \left( 2\pi \frac{n!}{e} \right) &= \sin \left( \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + O \left( \frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O \left( \frac{1}{n^2} \right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

4. Si  $\alpha \leq 0$ ,  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$  et comme  $\frac{1}{n} = O \left( \frac{1}{\ln(n)} \right)$ ,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

Si  $\alpha > 1$ ,  $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$  donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge.}}$$

Si  $\alpha \in ]0, 1]$ , on écrit

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{1 + \underbrace{(-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}}_{\substack{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left( 1 - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha} + o \left( \frac{\ln(n)}{n^\alpha} \right) \right) \\ &= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o \left( \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} \right)}_{\substack{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} < 0 \\ \text{terme général} \\ \text{d'une série convergente} \\ \text{ssi } \alpha > \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.}$$

**Remarque 2.5.** Soit  $\alpha \in [0, 1]$  et

$$u_n = \int_0^\alpha t^n \sin(t) dt \geq 0$$

Si  $\alpha < 1$ ,  $u_n \leq \alpha^{n+1}$ , terme général d'une série convergente donc  $\sum u_n$  converge.

Si  $\alpha = 1$ , on utilise

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$$

Alors  $u_n \geq \frac{2}{\pi(n+2)}$ , terme générale d'une série divergente donc  $\sum u_n$  diverge.

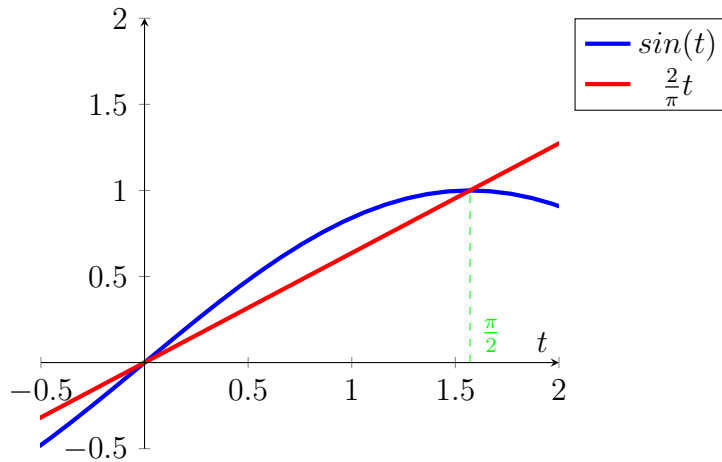


FIGURE 6 –  $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$  pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

**Solution 2.19.**

On a

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

$u_n$  est le reste d'ordre  $n$  d'une série alternée, donc  $u_n$  est du signe de  $\frac{(-1)^n}{n}$ . Donc on a

$$u_{n+1} \times u_n \leq 0$$

Par ailleurs,

$$|u_n| = \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{= \frac{1}{n(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{= \frac{1}{(n+2)(n+3)}} + \cdots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)}$$

Donc  $(|u_n|)_{n \geq 1}$  est décroissante.

D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Pour calculer la somme, on peut chercher si la famille  $(u_{n,p})_{\substack{n \geq 1 \\ p \in \mathbb{N}}}$  est sommable où

$$u_{n,p} = \frac{(-1)^n}{(n+2p)(n+2p+1)}$$

Soit  $p \geq 0$ , on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n+2p} - \frac{1}{n+2p+1} \right) = \frac{1}{2p+1}$$

Donc

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n \geq 1} |u_{n,p}| = +\infty$$

Ainsi, cette famille n'est pas sommable. Essayons plutôt de calculer  $u_n$  d'abord : soit  $n \geq 1$  fixé et

$N \geq n$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k} &= \sum_{k=n}^N (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \\ &= - \sum_{k=n}^N \int_0^1 (-t)^{k-1} dt \\ &= - \int_0^1 \sum_{k=n}^N (-t)^{k-1} dt \\ &= \int_0^1 (-t)^n \frac{1 - (-t)^{N-n+1}}{1+t} dt \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k} = - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{1}{N+2}$$

Donc

$$u_n = - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$$

Soit alors  $M \geq 1$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^M u_n &= \sum_{n=1}^M \left( - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \right) \\ &= - \int_0^1 \frac{1}{1+t} \sum_{n=1}^M (-t)^n dt \\ &= - \int_0^1 \frac{-t}{1+t} \frac{1 - (-t)^{M+1}}{1+t} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \end{aligned}$$

Comme

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{M+1} dt = \frac{1}{M+2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n &= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t+1) - 1}{(1+t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt \\ &= [\ln(1+t)]_0^1 + \left[ \frac{1}{2} - 1 \right] \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2) - \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{(3n)!} = \left( \frac{1}{n^2} \right)$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$



Posons

$$\begin{cases} S_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \\ S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \\ S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!} \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 &= e \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 &= \exp(j) \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 &= \exp(j^2) \end{cases}$$

où  $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$ . En sommant les trois lignes, on a

$$3S_0 = e + \exp(j) + \exp(j^2) = e + e^{-\frac{1}{2}} \left( 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3} \left( e + e^{-\frac{1}{2}} \left( 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) \right)}$$

S'il existe  $p \geq 0$  tel que  $n = p^3$ , alors

$$\left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p$$

et

$$\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor (p^3-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p-1$$

Sinon,  $n^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{N}$ . Soit  $k = \left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$ . Alors  $k^3 < n \leq (k+1)^3$  donc  $k^3 \leq n-1 < (k+1)^3$  d'où  $k \leq (n-1)^{\frac{1}{3}} < k+1$ . Donc  $\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = k$ .

Donc  $\sum u_n$  est une série lacunaire. Comme  $u_{p^3} = O\left(\frac{1}{p^3}\right)$ , d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

Sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^3 - p}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x(4x^2 - 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x - 1} + \frac{1}{2x + 1}$$

Donc la somme partielle jusqu'au rang  $n$  vaut

$$\begin{aligned}
S_n &= - \underbrace{\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}_{= H_n} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p+1} \\
&= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \\
&= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2 \left( \underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k}}_{= H_{2n-1}} - 1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2}H_{n-1}} \right) \\
&= -H_n + 2H_{2n-1} - H_{n-1} - 1 + \frac{1}{2n+1} \\
&= -\ln(n) + 2\ln(2n-1) - \ln(n-1) - 1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{= o(1)} + o(1) \\
&= \ln \left( \frac{(2n-1)^2}{n(n-1)} \right) - 1 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(4) - 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(4) - 1}$$

**Solution 2.20.** Soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $a + \varepsilon < 0$ . Il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $x > A$ ,

$$a - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \leq a + \varepsilon$$

Alors

$$(a - \varepsilon)f(x) \leq f'(x) \leq (a + \varepsilon)f(x)$$

On voit donc que

$$f'(x) - f(x)(a + \varepsilon) \leq 0$$

On pose alors (sorte d'inéquation différentielle)

$$g_1(x) = f(x)e^{-(a+\varepsilon)x}$$

On a

$$g_1'(x) = e^{-(a+\varepsilon)x} (f'(x) - f(x)(a + \varepsilon)) \leq 0$$

pour tout  $x \geq A$ . Donc  $g_1$  est décroissante sur  $[A, +\infty[$ . Alors

$$0 < g_1(x) \leq g_1(A) = f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}$$

Alors

$$0 < f(x) \leq (f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a+\varepsilon)x}$$

De même, pour  $x \geq A$ ,

$$(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a-\varepsilon)x} \leq f(x)$$

car  $g_2(x) = f(x)e^{-(a-\varepsilon)x}$  est croissante sur  $[A, +\infty[$ .

Donc

$$f(n) \leq (f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a+\varepsilon)n}$$

Comme  $a + \varepsilon < 0$ ,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge.}}$$

De plus

$$f(A)e^{-(a-\varepsilon)A} \frac{e^{(a-\varepsilon)N}}{1 - e^{a-\varepsilon}} \leq R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leq f(A)e^{-(a+\varepsilon)A} \frac{e^{(a+\varepsilon)N}}{1 + e^{a+\varepsilon}}$$

Donc

$$\boxed{R_N = O_{n \rightarrow +\infty}(e^{aN}) \text{ et } e^{aN} = O_{n \rightarrow +\infty}(R_N)}$$

**Solution 2.21.** On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{e^k}{k}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

On utilise la règle d'Abel : on écrit  $e^k = B_k - B_{k-1}$  avec

$$\begin{cases} B_k = \sum_{j=0}^k e^j = \frac{e^{k+1}-1}{e-1} \\ B_{-1} = 0 \end{cases}$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k+1} = -1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{k(k+1)}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{k+1}}{(e-1)k^2}} + \underbrace{\frac{B_n}{n}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^n e}{n(e-1)}}$$

$$= \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(S_n)$$

Donc

$$\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{n(e-1)}}$$

**Solution 2.22.**

1.  $u_n > 0$  et

$$u_n = e^{n^\alpha \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{n^\alpha(-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))} = e^{-n^{\alpha-1}} + O(n^{\alpha-2})$$

Si  $\alpha < 1$ ,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$  donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Si  $\alpha = 1$ ,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$  donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Si  $\alpha > 1$ , on a

$$-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n^{\alpha-1}$$

donc il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,

$$-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-1}) \leq \frac{-n^{\alpha-1}}{2}$$

d'où

$$u_n \leq e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

2. On a  $u_n > 0$  et

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{k} \ln(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$$

donc par comparaison des sommes partielles, on a

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$$

Donc  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$  et

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

3. On écrit  $n!e = [n!e] + \alpha_n$ . Alors

$$\sin(n!\pi e) = (-1)^{[n!e]} \sin(\alpha_n \pi)$$

On écrit

$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$$

On pose  $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $w_n = v_n + \frac{1}{n \times n!}$ . On a

$$v_n \leq e \leq w_n$$

donc

$$0 \leq e - v_n \leq \frac{1}{n \times n!}$$

d'où

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \frac{n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Donc

$$n!e\pi = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} \pi}_{\text{pair}} + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Finalement, a

$$\frac{\sin(n!e\pi)}{\ln(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln(n)} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\ln(n)(n+1)}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

**Solution 2.23.**

1. On a

$$u_n = (a+b+c) \ln(n) + b \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = (a+b+c) \ln(n) + \frac{b+2c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc  $\sum u_n$  converge si et seulement si

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ b+2c &= 0 \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \end{cases}$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } a = b \text{ et } b = -2c \text{ avec } c \in \mathbb{R}}$$

Prenons  $c = 1$  pour calculer la somme. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) - \ln(n+1) \\ &= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) \\ &= \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)}$$

2. On a  $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

On écrit

$$u_n = \frac{2^n (3^{2^{n-1}} - 1)}{(3^{2^{-1}} + 1)(3^{2^n} - 1)} = \frac{2^n (3^{2^{n-1}} + 1 - 2)}{3^{2^n} - 1} = \underbrace{\frac{2^n}{3^{2^{n-1}} - 1}}_{= v_n} - \underbrace{\frac{2^{n+1}}{3^{2^n} - 1}}_{= v_{n+1}}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 = 1}$$

3. On remarque que  $k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$  est le reste de la division euclidienne de  $k$  par  $n$ . Donc ce reste est borné par  $k - 1$ . Donc  $u_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O} \left( \frac{1}{n^2} \right)$ . D'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

On note alors

$$J_r = \{n \in \mathbb{N}^* | n \equiv r[k]\}$$

$(J_r)_{r \in \{0, \dots, k-1\}}$  forme une partition de  $\mathbb{N}^*$ . On a

$$\sum_{n \in J_r} \frac{r}{n(n+1)} = 0$$

si  $r = 0$ . Si  $r \in \{1, \dots, k-1\}$ , on a

$$S_r = r \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)}$$

et par sommabilité on a

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n - k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n(n+1)} = \sum_{r=1}^{k-1} S_r = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)}$$

Soit  $p \in \mathbb{N}$  fixé. On a

$$\begin{aligned} v_p &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{(kp+r)(kp+r+1)} \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r+1} \\ &= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=2}^k \frac{r-1}{kp+r} \\ &= \frac{1}{kp+1} + \sum_{r=2}^{k-1} \frac{1}{kp+r} - \frac{k-1}{k(p+1)} \\ &= \sum_{r=1}^k \frac{1}{kp+r} - \frac{1}{p+1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^N v_p = \sum_{n=1}^{k(N+1)} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln \left( \frac{k(N+1)}{N+1} \right) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (1) = \ln(k) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o} (1)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(k)}$$

4. On a

$$\arctan(u) + \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right)$$

donc

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(n)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

**Solution 2.24.** On a

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = u_1 - n u_{n+1} + \sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1}$$

Si  $(n u_n)_{n \geq 1}$ , on a donc évidemment d'après ce qui précède

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

Si  $(u_n)_{n \geq 1}$  décroît,  $v_n \geq 0$  et on a

$$\frac{v_k}{k} = u_k - u_{k+1}$$

et donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k,n}$$

en définissant  $w_{n,k} = \frac{v_k}{k}$  si  $k \geq n$  et 0 sinon. On a  $w_{k,n} \geq 0$  car  $(u_n)_{n \geq 1}$  est décroissante.

Ainsi,  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge si et seulement si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sommable si et seulement si  $(w_{n,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  si et seulement si (d'après le théorème de Fubini)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{\sum_{n=1}^k \frac{v_k}{k} = v_k} < +\infty$$



Et dans ce cas (toujours d'après le théorème de Fubini),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= u_n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= v_k} < +\infty$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k}$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)}$$

et

$$v_n = \frac{1}{(n+1) \dots (n+p)} - \frac{n}{(n+1) \dots (n+p+1)} = \frac{p+1}{(n+1) \dots (n+p+1)}$$

Soit

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)} = (p+1) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)} = (p+1) \left( S_p - \frac{1}{p!} \right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)}} = \frac{p+1}{p(p!)}$$

**Solution 2.25.** Montrons d'une manière générale que si  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  est telle que  $u_k = o_{k \rightarrow +\infty}(u_{k+1})$ , alors  $\sum u_k$  diverge et  $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ .

En effet, on a alors  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = +\infty$  et d'après la règle de d'Alembert,  $\sum u_k$  diverge. Soit ensuite  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $k \geq N$ ,

$$0 \leq \frac{u_k}{u_{k+1}} \leq \varepsilon$$

Soit  $n \geq N$ . Pour  $k \geq N+1$ , on a

$$u_k \leq \varepsilon u_{k+1} \leq \dots \leq \varepsilon^{n-k} u_n$$

pour  $k \leq n-1$ .

Alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} u_k \leq (\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-N-1} u_n)$$

On peut supposer que  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  et alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_n \leq 2\varepsilon u_n$$

Donc on a bien le résultat voulu.

Pour revenir à l'exercice, on a alors

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+q)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^q}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente. Donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$$

**Solution 2.26.** On a

$$\left| \frac{z^{nb}}{z^{na+c} + 1} \right| = \frac{|z|^{nb}}{|1 + z^{na+c}|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|^{nb}$$

car  $|z| < 1$ .  $|z|^{nb}$  est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour  $n$  fini, on a

$$\frac{1}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z^{na+c})^k$$

Montrons donc que  $\left( z^{nb} \left( (-z^{na+c})^k \right) \right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^{nb} |z|^{k(na+c)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{nb}}{1 - |z|^{na+c}} < +\infty$$

d'après ce qui précède. On a sommabilité, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{nb} (-z^{na+c})^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{ck} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} z^{n(b+ak)} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1 - z^{b+ak}} \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1+z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1-z^{b+ak}}}$$

**Solution 2.27.** On a

$$b_q = \sum_{n=1}^q u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q}$$

Montrons donc que la famille des  $(u_{n,q})_{(n,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  est sommable. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} |u_{n,q}| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=n}^{+\infty} \frac{n|a_n|}{q(q+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| \left( \sum_{q=n}^{+\infty} \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \end{aligned}$$

Donc le théorème de Fubini s'applique et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Donc

$$\boxed{\sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n}$$

**Solution 2.28.** D'après l'exercice précédent,  $\sum v_n$  converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

On applique l'inégalité de la moyenne géométrique et arithmétique à  $(u_1, 2u_2, \dots, nu_n)$  :

$$\sqrt[n]{u_1 \times 2u_2 \times \dots \times nu_n} = w_n \sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n} (u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n) = (n+1)v_n$$

Donc on a

$$w_n \leq \frac{(n+1)v_n}{\sqrt[n]{n!}}$$

On étudie donc  $\sqrt[n]{n!}$  :

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{n!} &= \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n!)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{n} \left(n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(\pi n) + \ln\left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)\right)\right) \\
&= n \exp\left(-1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \\
&\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e}
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Ainsi,  $w_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$  donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}}$$

Montrons que pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq e$$

Cela équivaut à  $(n+1)^n \leq e^n n!$  si et seulement si

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \leq n! e^n$$

ce qui est vrai car pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  on a  $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$ . Donc  $w_n \leq e v_n$  pour tout  $n \geq 1$  et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n}$$

Pour montrer que  $e$  est la meilleure constante possible, on forme pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n,N} = \frac{1}{n}$  si  $n \leq N$  et 0 sinon. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N} = H_N < +\infty$$

Dans ce cas, on a

$$w_{n,N} = \sqrt[n]{u_{1,N} \dots w_{n,N}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n$$

pour  $n \leq N$  et 0 sinon. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N} = \sum_{n=1}^N w_{n,N} = \sum_{n=1}^N \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n$$

En divisant par  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ , on a donc

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N}}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N}} = \frac{\sum_{n=1}^N v_{n,N} \times \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$$

d'après le théorème de Césaro.

On a trouvé une suite donc la constante  $C$  est égale à  $e$ . D'après ce qui précède,

$e$  est la meilleure constante possible.

**Remarque 2.6.** Pour la fin de l'exercice précédent, on peut utiliser le fait que  $H_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(N)$  et alors

$$\sum_{n=1}^N w_{n,N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{1}{n+1}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e \ln(N)$$

par le théorème de sommation des relations de comparaison.

**Solution 2.29.**

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et

$$I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid p + q = n\}$$

On a alors

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n+1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Donc la condition nécessaire et suffisante est  $\alpha > 2$ .

Dans ce cas, par le théorème des sommation par paquets, on a

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1) + \zeta(\alpha)$$

2. Pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , on a

$$\frac{(p+q)^2}{2} \leq p^2 + q^2 \leq (p+q)^2$$

Pour  $\alpha \leq 0$ , il est clair que l'on a divergence. Pour  $\alpha > 0$ , on a donc

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{(p+q)^{2\alpha}}$$

Donc la condition nécessaire et suffisante est  $\alpha > 1$ .

d'après le 1.

**Solution 2.30.** On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{m+n^2-1} = \frac{1}{n^2} = \Sigma_n$$

par télescopage.  $\sum_{n \geq 1} \Sigma_n$  converge et

$$\sum_{n \geq 1} \Sigma_n = \frac{\pi^2}{6}$$

Donc  $\left( \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$  est sommable et la somme vaut  $\frac{\pi^2}{6}$ .

Posons, pour  $k \geq 1$ ,

$$I_k = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid m + n^2 = k\}$$

On a  $n^2 \in \{1, \dots, k\}$  si et seulement si  $n \in \{1, \dots, \lfloor \sqrt{k} \rfloor\}$  et  $(m, n) \in I_k$  si et seulement si  $m = k - n^2$ .

On a  $|I_k| = \lfloor \sqrt{k} \rfloor$  et par sommation par paquets,

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)}$$

**Remarque 2.7.** Grâce à une transformation d'Abel, on a aussi, pour  $N \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k+1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^N \underbrace{\frac{\lfloor k \rfloor - \lfloor k-1 \rfloor}{k}}_{\neq 0 \text{ ssi } k=p^2} + \underbrace{\frac{\lfloor N \rfloor}{N+1}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} \end{aligned}$$

et on retrouve le résultat.

**Solution 2.31.**

1.

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}}$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} -\ln \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right)$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} -\ln \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right)$$

converge si et seulement si (car  $-\ln \left( 1 - \frac{1}{p_k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k} > 0$  vu que  $p_k \geq k$  pour tout  $k \geq 1$ )

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$$

converge.

Donc

$$\boxed{\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \text{ converge si et seulement si } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} \text{ converge.}}$$

Fixons alors  $N \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^N \left( \sum_{n_k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{n_k}} \right)$$

où la série est à termes positifs et est convergent. Par produit de Cauchy,

$$\left( \frac{1}{p_1^{n_1} \cdots p_N^{n_N}} \right)_{n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^N}$$

est sommable et on a

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} &= \sum_{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{p_1^{n_1} \dots p_N^{n_N}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{p_{N+1}-1} \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

car dans la première somme, tous les inverses (et une seule fois) des nombres dont les facteurs premiers sont dans  $\{p_1, \dots, p_N\}$  apparaissent.

Donc

$$\boxed{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}}$$

2. Posons

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}}$$

On a

$$\ln(\Pi_n) = \sum_{k=1}^n \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)}_{\sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_k^s} = O\left(\frac{1}{k^s}\right)}$$

car  $p_k \geq k$ . Donc

$$\boxed{(\Pi_n) \text{ converge dans } \mathbb{R}_+^* .}$$

Par produit de Cauchy,

$$\left( \frac{1}{(p_1^s)^{j_1} \dots (p_n^s)^{j_n}} \right)_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left( \frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^s \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \\ &= \zeta(s) \end{aligned}$$

car dans la première somme, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, chaque  $k$  n'apparaît qu'une unique fois. Comme on a

$$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^s} \leq \Pi_n$$



Donc  $\Pi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(s)$  et ainsi

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} = \zeta(s)$$

3. Soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . Si  $a > 1$ , on a

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^a}$$

Donc  $\sum \frac{1}{n^z}$  converge absolument. On peut donc prolonger  $\zeta$  à  $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}$ .

De même que précédemment, puisque

$$\left| \left( \frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \right| = \frac{1}{(p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n})^a}$$

la famille

$$\left( \left( \frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \right)_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n}$$

est sommable. On peut aussi développer et

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left( \frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z$$

On a

$$\begin{aligned} |\Pi_n - \zeta(z)| &= \left| \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left( \frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z} \right| \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus J_n} \frac{1}{k^z} \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus J_n} \frac{1}{k^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

où l'on a noté  $J_n = \{k \geq 1 | \text{les facteurs premiers de } k \text{ sont dans } \{p_1, \dots, p_n\}\}$  et où l'on a appliqué l'inégalité triangulaire et le résultat de 2. pour conclure.

Ainsi, on a bien

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}}$$

**Solution 2.32.** Pour  $\alpha > 2$ , puisque  $\varphi(n) \geq n$ , on a

$$\frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour  $\alpha = 2$ , si  $n = p_k$  est premier, on a  $\varphi(p_k) = p_k - 1$  et

$$\frac{\varphi(p_k)}{p_k^2} = \frac{p_k - 1}{p_k^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$$

et  $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$  diverge.

De même pour  $\alpha < 2$ ,  $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$  diverge car  $\frac{\varphi(n)}{n^2} = O\left(\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)$ .

Donc

$$\boxed{\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.}$$

Pour  $\alpha > 1$ , on calcule

$$S = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^\alpha} \times \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_2^\alpha} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} \frac{\varphi(n_1)}{(n_1 n_2)^\alpha}$$

ce qui est légitime car il s'agit de deux séries à termes positifs convergentes. Soit, pour  $n \geq 1$ ,

$D_n = \{(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid n = n_1 n_2\}$ . Par sommation par paquets, on a,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(n_1, n_2) \in D_n} \frac{\varphi(n_1)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left( \sum_{n_1|n} \varphi(n_1) \right)$$

et grâce à la formule d'Euler-Möbius, on a

$$\sum_{n_1|n} \varphi(n_1) = n$$

Ainsi,  $S = \zeta(\alpha - 1)$  et donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha - 1)}{\zeta(\alpha)}}$$

**Solution 2.33.** Soit  $A \in \mathbb{C}$  et  $R > 0$ . S'il y a  $n$  indices  $k \in \mathbb{N}$  tels que  $z_k \in B(A, R)$ , alors pour ces indices  $k$ , on a  $B(z_k, \frac{1}{2}) \subset B(A, R + \frac{1}{2})$ . Donc (faire un dessin !), on a

$$n \frac{\pi}{4} \leq \pi \left( R + \frac{1}{2} \right)^2$$

On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n = \{i \in \mathbb{N} | z_i \in B(0, n)\}$ . De l'inégalité précédente, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n$  est fini. Il existe  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijective qui permet d'ordonner les  $z_n$  par module croissante et à même module par indice croissant.

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $R = |z_{\sigma(n)}|$ , on a pour tout  $k \leq n$ ,  $z_{\sigma(k)} \in B(0, R)$ .

Donc

$$n \frac{\pi}{4} \leq \pi \left( |z_{\sigma(n)}| + \frac{1}{2} \right)^2$$

d'où

$$|z_{\sigma(n)}| \geq \left| z_{\sigma(n)} + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2}$$

Donc

$$\left| \frac{1}{z_{\sigma(n)}} \right|^3 = O_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Donc

$$\sum \frac{1}{z_{\sigma(n)}^3} \text{ est absolument convergente.}$$

**Solution 2.34.** On a  $k = \lfloor n \rfloor$  si et seulement si  $k^2 \leq n < (k+1)^2$ . Il y a  $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$  entiers.

Posons

$$B_p = \sum_{n=1}^p (-1)^{\lfloor n \rfloor}$$

et  $B_{-1} = 0$ . Si  $k^2 \leq p \leq (k+1)^2$ , on a

$$B_p = \underbrace{B_k^2}_{\text{signe de } (-1)^k} + (-1)^k \underbrace{(p-k)^2}_{|\cdot| \leq 2k+1}$$

Par récurrence, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$|B_p| \leq 2 \lfloor p \rfloor + 1$$

Donc avec une transformation d'Abel, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} &= \sum_{n=1}^N \frac{(B_n - B_{n-1})}{n} \\
&= \sum_{n=1}^N \frac{B_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{B_n}{n+1} \\
&= \underbrace{\frac{B_N}{N}}_{=O_{N \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} - B_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{n(n+1)}}_{=O_{N \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}
\end{aligned}$$

D'après le critère de Riemann, la dernière somme converge absolument et donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} \text{ converge.}}$$

### Solution 2.35.

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $u_n \neq 0$ . Il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $u_n u_{n+1} > 0$ .

On a

$$\ln \left( \frac{u_n}{u_{N_0}} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \ln \left( \frac{a+k}{n+k} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \ln \left( 1 + \frac{a}{k} \right) - \ln \left( 1 + \frac{b}{k} \right)$$

Alors

$$\ln \left( \frac{u_n}{u_{N_0}} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \frac{a-b}{k} + \underbrace{O_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k^2} \right)}_{\text{terme général d'une série convergente}} = (a-b) \ln(n) + \underbrace{C}_{\in \mathbb{R}} + o_{n \rightarrow +\infty}(1)$$

Ainsi,

$$u_n = u_{N_0} n^{a-b} \underbrace{k^{1 + \underset{>0}{o_{n \rightarrow +\infty}}(1)}}_{>0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} U_{N_0} n^{a-b} k$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a > 1}$$

2. On a

$$u_{n+1}(b+n+1) = u_n(a+n+1)$$

donc

$$(a+1)u_n = bu_{n+1} + (n+1)u_{n+1} - nu_n$$

En sommant sur  $\mathbb{N}$ , on a

$$(a+1) \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + u_1 = b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \underbrace{u_1 - bu_0}_{= \frac{a(a+1)}{b(b+1)} - a}$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{a(a+1-b(b+1))}{b(b+1)(a+1-b)} = a \left( \frac{1}{b(b+1)} - \frac{b}{(b+1)(a+1-b)} \right)$$

3. Pour  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = 1$ , on a

$$u_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \cdots \left(n - \frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} = \frac{-\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}}{(n+1)!} = -\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)} \binom{2n}{n}$$

### Solution 2.36.

1.  $u_n$  est une série à termes positifs et

$$\frac{1}{n} = O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

donc

$$\sum u_n \text{ diverge.}$$

$\sum v_n$  est une série alternée. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  et en formant

$$\begin{aligned} f : [2, \infty[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

On a  $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$  qui est négatif dès que  $x > e$ . Donc  $(v_n)_{n \geq 3}$  décroît. D'après le critère des séries alternées,

$$\sum v_n \text{ converge.}$$

2.  $f$  décroît sur  $[, +\infty[$  donc pour tout  $k \geq 4$ , on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx$$

d'où

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_4^{N+1} \frac{\ln(x)}{x} dx}_{= \frac{1}{2} [\ln^2(N+1) - \ln^2(4)]} &\leq \sum_{k=4}^N \frac{\ln(k)}{k} \leq \underbrace{\int_3^N \frac{\ln(x)}{x} dx}_{= \frac{1}{2} [\ln^2(N) - \ln^2(3)]} \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{S_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2(N)}$$

Formons  $w_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$ .  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n - w_{n-1}$  converge.

On a

$$w_n - w_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln^2(n-1)}{2}$$

On a

$$\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln(n) - \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \ln^2(n-1) &= \ln^2(n) - \frac{2\ln(n)}{n} + \underbrace{\underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} \end{aligned}$$

Donc

$$w_n - w_{n-1} = \underbrace{\underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{\text{terme général d'une série absolument convergente}}$$

Donc il existe  $L \in \mathbb{R}$  tel que

$$\boxed{S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + L + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)}$$

3. On a

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(2k)}{2k}}_{= I_N} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}}_{= J_N}$$

Donc

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = I_N - (S_{2N} - I_N)$$

On a

$$S_{2N} = \frac{\ln^2(2N)}{2} + L + \underset{N \rightarrow +\infty}{o}(1) = \frac{\ln^2(2)}{2} + \frac{\ln^2(N)}{2} + \ln(2) \ln(N) + L + \underset{N \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

De plus,

$$\begin{aligned} I_N &= \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(2)}{2k}}_{= \frac{\ln(2)}{2} \left( \ln(N) + \gamma + \underset{N \rightarrow +\infty}{o}(1) \right)} + \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2k}}_{= \frac{1}{2} S_N = \frac{\ln^2(N)}{4} + \frac{L}{2} + \underset{N \rightarrow +\infty}{o}(1)} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} \left( \ln(N) + \gamma + \underset{N \rightarrow +\infty}{o}(1) \right) + \frac{1}{2} S_N = \frac{\ln^2(N)}{4} + \frac{L}{2} + \underset{N \rightarrow +\infty}{o}(1) \end{aligned}$$

Finalement, on a bien

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{2N} v_n &= 2I_n - S_{2N} \\ &= \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2} + o_{N \rightarrow +\infty}(1)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2}}$$

**Solution 2.37.** Si  $\alpha_0 = 2$  et  $\alpha_{n+1} = 10^{\alpha_n - 1}$ . Alors  $q_1(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$ ,  $q_k(\alpha_n) = \alpha_{n-k}$ ,  $q_n(\alpha_n) = 2$  et  $q_{n+1}(\alpha_n) = 1$ .

Si  $k < \alpha_n$ ,  $q_n(k) = 1$ . Soit

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} u_k$$

Comme c'est une série à termes positifs,  $\sum_{k \geq 1} u_k$  converge si et seulement si  $\sum_{n \geq 0} S_n$  converge.

Par définition, pour tout  $k \in \{\alpha_n, \dots, \alpha_{n+1} - 1\}$ , on a  $q_{n+1}(k) = 1$  et pour tout  $p \geq n + 1$ ,  $q_p(k) = 1$ . Donc

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k q_1(k) \dots \underbrace{q_n(k)}_{\geq 2}}$$

Posons

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \log_{10}(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(10)}\end{aligned}$$

Il vient  $q_1(t) = \lfloor f(t) \rfloor + 1 > f(t)$ . Par récurrence, on a

$$q_n(t) \geq f^n(t)$$

défini pour  $t \geq \alpha_n$ . On a donc

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k(f(k)) \dots f^n(k)}$$

On forme

$$g_n : [\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \frac{1}{tf(t)\dots f^n(t)}$$

qui est décroissante. Ainsi, pour tout  $k \in \{\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1\}$ , on a

$$\int_k^{k+1} g_n(t) \leq u_k \leq \int_{k-1}^k g_n(t)$$

d'où en faisant le changement de variables  $u = \log_{10}(t)$ , on a

$$\int_{\alpha_{n-1}-1}^{\alpha_n-1} g_{n-1}(u) du(\ln(10)) \leq S_n \leq \int_{\alpha_n-1}^{\alpha_{n+1}-1} g_n(t) dt$$

On obtient donc une minoration par  $C \times (\ln(10))^n$  donc

la série diverge.

### Solution 2.38.

1. Montrons le résultat par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a  $P_0 = 1 > 0$  et  $P_1(x) = 1 + x$  s'annule en  $-1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , supposons le résultat au rang  $n$ . On a  $P'_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$ , par hypothèse  $P_{2n+1}$  s'annule uniquement en  $\alpha_{2n+1} < 0$ . Donc  $P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) = \frac{(\alpha_{2n+1})^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$  donc  $P_{2n+2} > 0$ . Comme  $P'_{2n+3} = P_{2n+2} > 0$  donc  $P_{2n+3}$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ . On a  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{2n+3} = \pm\infty$ . Donc il existe un unique  $\alpha_{2n+3} \in \mathbb{R}$  tel que  $P_{2n+3}(\alpha_{2n+3}) = 0$ . Comme  $P_{2n+3}(0) = 1 \geq 1$ ,  $\alpha_{2n+3} < 0$ .

D'où le résultat par récurrence.

2. Soit  $x < 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^x > 0$ . Donc il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $P_{2n+1}(x) > 0$ . En particulier,  $\alpha_{2n+1} < x$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{2n+1} = -\infty$$

**Solution 2.39.** On pose  $f_n(x) = e^x - x - n$ , on a  $f'_n(x) = e^x - 1$ . Donc  $x_1 = 0$  et ainsi

$$\forall n \geq 2, \exists! x_n \geq 0 : e^{x_n} = x_n + n$$

Pour tout  $x \geq 0$ , on a  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -1 < 0$  donc  $f_{n+1}(x) < f_n(x)$  et ainsi  $f_{n+1}(x_n) < 0$  et  $x_n < x_{n+1}$ .



$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante, de plus  $e^{x_n} = x_n + n \geq n$  donc  $x_n \geq \ln(n)$  et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$$

De plus,  $x_n = \ln(x_n + n)$  et  $f_n(n) = e^n - 2n > 0$  (par récurrence), donc  $x_n < n$  par stricte croissante de  $f_n$  donc

$$x_n = \ln(x_n + n) \leq \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2)$$

Ainsi,  $x_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(\ln(n))$ . En reportant, on a

$$x_n = \ln\left(n + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}(\ln(n))\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = \ln(n) + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)$$

donc

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$$

En reportant, on a

$$x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

**Solution 2.40.**

1. Si  $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S \in \mathbb{R}_+^+$ , on a

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S^\alpha}$$

Comme  $u_n$  est le terme générale d'une série convergente donc

$$\sum v_n \text{ converge.}$$

2. On a  $\alpha = 1$  donc  $v_n = \frac{u_n}{S_n}$ , soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ . On a

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i = \sum_{i=1}^{n+p} \frac{u_i}{S_i}$$

où  $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est croissante donc pour tout  $i \in \{n+1, n+p\}$ ,  $S_i \leq S_{n+p}$  donc

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i = \frac{1}{S_{n+p}} (S_{n+p} - S_n) = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

et ainsi,

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$$

Supposons que  $\sum v_n$  converge. Pour  $n$  fixé, on a  $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{n+p} = +\infty$  (car  $\sum u_n$  diverge).

Donc lorsque  $p \rightarrow +\infty$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i \geq 1$$

ce qui est absurde puisque la limite en  $+\infty$  du reste est 0. Ainsi,

$$\sum v_n \text{ diverge.}$$

3. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$  et

$$v_n = \frac{1}{\alpha - 1} (S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha})$$

avec  $(S_n^{1-\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow +\infty$ . Donc  $\sum w_n$  est une série télescopique convergente. Comme  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est décroissante, on a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq w_n \leq \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha}$$

car  $u_n = S_n - S_{n-1}$ . Comme  $\sum w_n$  converge,

$$\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge.}$$

Si  $\alpha < 1$ , comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{\alpha-1} = 0$ ,

$$\frac{u_n}{S_n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{u_n}{S_n^\alpha} \right)$$

donc

$$\sum v_n \text{ diverge.}$$

4. On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$  par convergence et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$  et de plus  $u_n = R_n - R_{n+1}$ . On pose

$$\alpha_n = \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} (R_{n+1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha})$$

si  $\alpha \neq 1$ .

Si  $0 < \alpha < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^{1-\alpha} = 0$  donc  $\sum \alpha_n$  est une série télescopique convergente et de même que précédemment, on a

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} \leq \alpha_n$$

donc  $w_n \leq \alpha_n$  et

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}}$$

Si  $\alpha = 1$ , on a

$$\alpha_n = \ln(R_n) - \ln(R_{n+1})$$

où  $\ln(R_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ . Donc  $\sum \alpha_n$  est une série télescopique divergente. De plus

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n} = 1 - \frac{R_{n+1}}{R_n}$$

donc

$$\ln\left(\frac{R_{n+1}}{R_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n}{R_n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-u_n}{R_n}$$

On a donc

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha_n$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}}$$

Si  $\alpha > 1$ , on a

$$\frac{u_n}{R_n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{u_n}{R_n^\alpha} \right)$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}}$$

### Solution 2.41.

1. Pour tout  $x \in [0, 1[$  il existe un unique  $q_x \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que  $x \in [\frac{q_x}{n}, \frac{q_x+1}{n}]$  avec  $q_x = \lfloor nx \rfloor$  et

$$\begin{aligned} h : \{0, \dots, n\} &\rightarrow \{0, \dots, n-1\} \\ k &\mapsto q_{x_k} = \lfloor nx_k \rfloor \end{aligned}$$

$n$  n'est pas injective donc il existe  $k > k'$  tel que  $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$  avec  $(k, k') \in \{0, \dots, n\}^2$  d'où

$$|kx - \lfloor kx \rfloor - (k'x - \lfloor k'x \rfloor)| < \frac{1}{n}$$

d'où

$$|(k - k')x - p| < \frac{1}{n}$$

avec  $p \in \mathbb{Z}$  et pour  $q = (k - k') \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn}$$

2. D'après ce qui précède, pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$  tels que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{q_n^2}$$

car  $n \geq q_n$ . Donc

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

On a donc  $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ . Si  $q_n$  ne tend pas vers  $+\infty$ , il existe  $A > 0$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe  $n > N$  avec  $q_n < A$ . Donc  $\{n \in \mathbb{N} | q_n < A\}$  est infini : on peut extraire  $(q_{\sigma(n)})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $q_{\sigma(n)} < A$ . D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire  $(q_{\varphi(n)})$  qui converge vers  $q \in \mathbb{R}$ . Notons que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang donc  $q \in \mathbb{N}^*$ . Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $p_{\varphi(n)} = \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} q_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha q$ .  $(p_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite convergente d'entiers relatifs stationnaire, donc  $\alpha q \in \mathbb{Z}$  et  $\alpha \in \mathbb{Q}$  ce qui est absurde.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$$

3. On sait qu'il existe  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  croissante telle que  $\sin(\sigma(n)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma(n) \sin(\sigma(n))} = 0$$

donc si la suite converge, alors elle converge vers 0.

Appliquons ce qui précède à  $\alpha = \frac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ . Il existe  $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$  et

$$\left| \frac{1}{\pi} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}$$

Alors

$$|q_n - \pi p_n| < \frac{\pi}{q_n} \leq \frac{\pi}{2}$$

pour  $n$  suffisamment grand. Quitte à extraire, on peut supposer que  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. On a

$$|\sin(x)| = |\sin(q_n - \pi q_n)|$$

donc

$$|\sin(q_n)| \leq \left| \sin\left(\frac{\pi}{q_n}\right) \right| \leq \frac{\pi}{q_n}$$

car  $\sin$  est croissant sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et  $|\sin(x)| \leq |x|$ .

Donc

$$\underbrace{\frac{1}{|q_n \sin(q_n)|}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \geq \frac{1}{\pi}$$

ce qui est absurde.

Donc

$$\left( \frac{1}{n \sin(n)} \right)_{n \geq 1} \text{ ne converge pas.}$$

## Solution 2.42.

1. On a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| = \left| \sum_{p=1}^n (a_{n,p} - a_p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p \right| \leq \sum_{p=1}^n |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=n+1}^{+\infty} |a_p|$$

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Si  $n \geq N$ , on a

$$\sum_{p=1}^n |a_{n,p} - a_p| = \sum_{p=1}^N |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=N+1}^n |a_{n,p} - a_p|$$

Pour  $p$  fixé, on a  $|a_p| \leq b_p$  donc

$$\sum_{p=N+1}^n |a_{n,p} - a_p| \leq 2 \sum_{p=N+1}^n b_p$$

Ainsi,

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| \leq \sum_{p=1}^N |a_{n,p} - a_p| + 3 \sum_{p=N+1}^{+\infty} b_p$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\sum_{p \geq 1} b_p$  converge, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que

$$3 \sum_{p=N_1+1}^{+\infty} b_p \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc pour tout  $n \geq N_1$ , on a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p|$$

$N_1$  étant fixé, il existe  $N_2 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_2$ , on a

$$\sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| < \frac{\varepsilon}{2}$$

car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| = 0$$

Donc pour tout  $n \geq \max(N_1, N_2)$ , on a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| < \varepsilon$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p}$$

2. On fixe  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n = e^{-p}$$

Pour  $x \geq -1$ , on a  $\ln(1+x) \leq x$  donc  $\ln\left(1 - \frac{p}{n}\right) \leq -\frac{p}{n}$  et  $a_{n,p} = e^{n \ln(1 - \frac{p}{n})} \leq e^{-p} = b_p$

Donc d'après ce qui précède,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left(\frac{1}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \right) = \frac{1}{e-1}}$$

**Remarque 2.8.** C'est faux si on n'a pas l'hypothèse (ii). Par exemple,

$$a_{n,p} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

pour  $p$  fixé mais

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$$

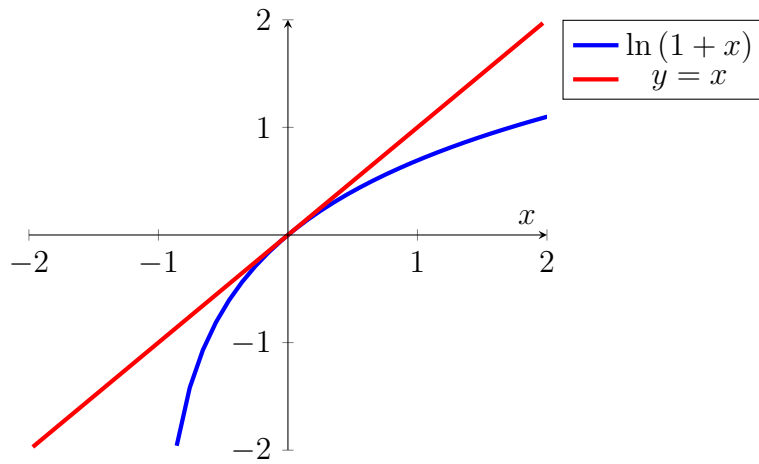


FIGURE 7 –  $\ln(1+x) \leq x$  pour  $x > -1$ .

**Solution 2.43.**

1. Pour tout  $k \geq 1$ ,  $(u_{kn})_{n \geq 1}$  est une sous-famille de  $(u_n)_{n \geq 1}$  sommable, donc  $(u_{kn})_{n \geq 1}$  est sommable.

Donc  $S_k$  existe.

2. On a

$$\begin{cases} S_1 - S_2 & = u_1 + u_3 + \dots + u_{2n+1} + \dots = 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 + S_6 & = u_1 + u_5 + u_7 + u_{11} + \dots = 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 - S_5 + S_6 + S_{10} + S_{15} - S_{10} & = u_1 + u_7 + u_{11} + \dots = 0 \end{cases}$$

A la première ligne on enlève les multiples de 2, à la deuxième ligne on enlève les multiples de 2 et 3, à la troisième ligne on enlève les multiples de 2, 3 et 5. Et ainsi de suite.

Soient donc  $p_1, \dots, p_N$  les  $N$  premiers nombres premiers. On a

$$0 = \sum_{k=1}^{p_1 \dots p_N} \mu(k) S_k = \sum_{k \in \{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\}} \mu(k) S_k$$

où si  $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ ,  $\mu(k) = 0$  s'il existe  $\alpha_i \geq 2$  et  $\mu(p_{i_1} \dots p_{i_s}) = (-1)^s$  sinon (fonction de Möbius).

Soit  $n = p_1^{\beta_1} \dots p_N^{\beta_N}$ . On cherche le coefficient en  $u_n$  dans la somme. Si  $n = 1$ , c'est 1.

Si  $n \geq 1$ , on a

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0$$

donc

$$\sum_{k \in \{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\}} \mu(k) S_k = u_1 + \alpha_N$$

avec

$$\alpha_N = \sum_{k \in B_N} u_k$$

où  $B_N \subset \mathbb{N}^*$  est tel que  $\min(B_N) = p_{N+1}$ . On a

$$|\alpha_N| \leq \sum_{k \geq p_{N+1}} |u_k| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

car c'est le reste de  $\sum_{n \geq 1} |u_n|$  convergente.

Donc  $u_1 + \alpha_N = 0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_1$  donc  $u_1 = 0$ .

Avec  $u_1 = 0$ ,

$$\begin{cases} S_n &= u_n + u_{2n} + u_{3n} + \dots &= 0 \\ S_{2n} &= u_{2n} + u_{4n} + u_{6n} + \dots &= 0 \end{cases}$$

et en recommençant avec  $u_n$  pour tout  $n \geq 1$ , on obtient bien

$$\boxed{u_n = 0}$$

#### Solution 2.44.

1. On prend  $u_n = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors  $\sum u_n = 0$  converge donc  $\sum f(u_n) = \sum f(0)$  converge. Donc

$$\boxed{f(0) = 0}$$

Supposons que  $f$  n'est pas continue en 0. Alors il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $x \in [-\alpha, \alpha] : |f(x)| \geq \varepsilon_0$ . Pour  $\alpha \equiv \alpha_n = \frac{1}{n^2}$ , il existe  $x_n \in [-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}] : |f(x_n)| \geq \varepsilon_0$ .  $\sum x_n$  converge absolument mais  $\sum f(x_n)$  diverge grossièrement ce qui est absurde.

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.}$$

2. Supposons que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $x \in ]-\alpha, \alpha[ : f(-x) \neq -f(x)$ . On définit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  telle que  $f(-x_n) + f(x_n) \neq 0$ . Il existe  $N_n \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$N_n |f(-x_n) + f(x_n)| \geq 1$$



(il suffit de prendre  $N_n = \left\lfloor \frac{1}{|f(x_n) + f(-x_n)|} \right\rfloor + 1$ )

On définit

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots, \dots, x_n, -x_n, \dots, \dots)$$

où  $(x_n, -x_n)$  apparaît  $N_n$  fois. On a  $\sum_{k=0}^{2N} u_k = 0$  et  $\sum_{k=0}^{2N+1} u_k = x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $\sum u_n$  converge.

Si  $\sum f(u_n)$  convergeait, alors il existerait  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$  alors

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(x_k) \right| < \frac{1}{2}$$

De plus, pour  $n \geq n_0$ , on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \dots + f(x_n) + f(-x_n) + f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2}$$

où  $(f(x_n), f(-x_n))$  apparaît  $N_n$  fois. Comme

$$|f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2}$$

on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \dots + f(x_n) + f(-x_n)| = N_n |f(x_n) + f(-x_n)| < 1$$

ce qui est absurde.

Donc  $f$  est impaire au voisinage de 0.

3. Supposons que pour tout  $\beta > 0$ , il existe  $(x, y) \in ]-\beta, \beta[^2$  avec  $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$ . Alors il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tendent vers 0 telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $M_n \in \mathbb{N}$ ,

$$M_n |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \geq 1$$

On définit alors

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_n + y_n, -x_n, -y_n, \dots)$$

où  $(x_n + y_n, -x_n, -y_n)$  apparaît  $M_n$  fois. On a

$$\sum_{k=0}^N u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } N \equiv 0[3] \\ x_n + y_n & \text{si } N \equiv 1[3] \\ y_n & \text{si } N \equiv 2[3] \end{cases} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

donc  $\sum u_n$  converge.

Si  $\sum f(u_n)$  convergeait, alors il existerait  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(u_k) \right| < \frac{1}{2}$$

De plus, d'après 2., il existe  $n_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_1$ , on a  $f(-x_n) + f(-y_n) = -f(x_n) - f(y_n)$  donc pour tout  $n \geq \max(n_0, n_1)$ , on a

$$|f(x_n + y_n) + f(-x_n) + f(-y_n)| \times M_n = |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \times M_n < 1$$

ce qui est absurde.

Donc  $f$  est linéaire au voisinage de 0.

4. Soit  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $|x| \leq \frac{\beta}{|k|}$ . Par récurrence, on a  $f(kx) = kf(x)$ .

Si  $|x| < \beta$  et si  $\frac{x}{\beta} \in \mathbb{Q}$ , on a

$$\frac{x}{\frac{\beta}{2}} = \frac{p}{q}$$

donc en posant  $\lambda = \frac{2}{\beta} f\left(\frac{\beta}{2}\right)$ , on a

$$f(x) = f\left(\frac{p\beta}{2q}\right) = \frac{p}{q} f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{p}{q} \frac{\beta}{2} \lambda = \lambda x$$

Si  $\frac{x}{\beta} \notin \mathbb{Q}$ , il existe une suite de rationnels  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{x}{\beta}$ . On a alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + r_n\frac{\beta}{2}\right) \\ &= f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + f\left(\frac{r_n\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

et  $x - \frac{r_n\beta}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc  $f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  d'après 1. et  $r_n f\left(\frac{\beta}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda x$

Donc  $f$  est une homothétie au voisinage de 0.

### 3 Probabilités sur un univers dénombrable

## 4 Calcul matriciel

## 5 Réduction des endomorphismes

**Solution 5.1.** Si on a (i), soit  $x$  un vecteur propre associé à  $\rho(u) = \rho e^{i\theta}$ . On a  $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$  et comme  $x \neq 0$ , on a  $\rho(u) \leq \|\rho(u)\| < 1$  d'où (ii).

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford  $u = n + d$  avec  $n$  nilpotent,  $d$  diagonalisable et  $dn = nd$ . Soit  $m = \dim(E)$ . Pour tout  $p \geq m$ , on a

$$u^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0}$$

En effet, on a  $k \geq m-1$  fixé, il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que

$$\binom{p}{k} \text{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$$

car  $|\lambda_i| < 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et

$$\binom{p}{k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{\rho(u)^p} \right)$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit  $x$  un vecteur propre associé à  $\lambda \in \mathbb{C}$ , on a  $u^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  donc en particulier,  $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $\rho(u)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  et  $\rho(u) \geq 0$  donc  $\rho(u) < 1$ . Posons encore  $u = d + n$  la décomposition de Dunford de  $u$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$  dans laquelle les coefficients de  $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$  sont en module  $\leq \varepsilon$ . Définissons sur  $E$

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i e_i \right\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$$

Soit  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$  triangulaire supérieure avec  $m_{ii} = \lambda_i$  et pour tout  $j \neq i$ ,  $|m_{i,j}| < \varepsilon$ .

Soit donc  $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathbb{C}^m$ , on a

$$\|Mx\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^m m_{i,j} x_j \right|}_{(|\lambda_i| + (m-1)\varepsilon)\|x\|_{\infty}}$$

donc

$$\|u\| \leq \underbrace{\rho(u)}_{< 1} + (m-1)\varepsilon$$

et on choisit

$$\varepsilon < \underbrace{\frac{1 - \rho(u)}{m - 1}}_{>0}$$

d'où  $\|u\| < 1$  et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence.

**Remarque 5.1.**  $u \mapsto \rho(u)$  n'est pas une norme car pour  $u$  nilpotente non nulle,  $\rho(u) = 0$ .

**Solution 5.2.** Supposons (i), soit  $Y$  un vecteur propre de  $A$  avec  $AY = \lambda Y$  pour  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $BA^k Y = \lambda^k BY$  et il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda^{k_0} BY \neq 0$  et  $BY \neq 0$  donc on a (ii).

Si (ii), supposons qu'il existe  $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tel que  $\varphi = 0$ . On note

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$$

avec les  $\lambda_i$  distincts. Alors  $Y = \sum_{i=1}^r Y_i$  où  $Y_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)$ . Il existe  $i_0 \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $Y_{i_0} \neq 0$  car  $Y \neq 0$ . On a alors, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$B \exp(tA)Y = \sum_{i=1}^r B \exp(t\lambda_i)Y_i = 0$$

Pour tout  $k \in \{0, \dots, r-1\}$ , on a  $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^r B \lambda_i^k \exp(t\lambda_i)Y_i = 0$ . Pour  $t = 0$  on a  $\sum_{i=1}^r \lambda_i^k BY_i = 0$  ce qui, pour  $t = 0$ , donne le système

$$\begin{cases} BY_1 + \dots + BY_r & = 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \dots + \lambda_r BY_r & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} BY_1 + \dots + \lambda_r^{r-1} BY_r & = 0 \end{cases}$$

Pour tout  $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$ , on a donc  $\sum_{i=1}^r P(\lambda_i) BY_i = 0$ . Pour  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  et  $P = \prod_{j \neq i} \frac{(X - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$ , on obtient pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $BY_i = 0$ . En particulier,  $BY_{i_0} = 0$  et  $Y_{i_0}$  est un vecteur propre de  $A$  car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).

Soit  $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , supposons que pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $BA^k Y = 0$ . Soit  $k \geq n$ , il existe  $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$  tel que

$$X^k = Q_k \chi_A + R_k$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc  $A^k = R_k(A)$  d'où  $BA^kY = BR_k(A)Y = 0$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} B \exp(tA)Y &= B \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} Y \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (BA^kY)}{k!} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence.

## 6 Espaces vectoriels normés

### Solution 6.1.

1. A  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  fixé, la fonction

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x \cos(t) + y \sin(2t)\end{aligned}$$

est bornée, donc le sup sur  $\mathbb{R}$  existe. Pour la séparation, prendre  $t = 0$  et  $t = \frac{\pi}{4}$ . Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à  $t$  fixé puis passer au sup sur  $\mathbb{R}$ .

2. Si  $|x| + |y| \leq 1$ , alors  $N(x, y) \leq 1$  donc on a la première inclusion.

Si  $N(x, y) \leq 1$ , utiliser  $t = 0$  pour avoir  $|x| \leq 1$  et  $t = \frac{\pi}{4}$  puis  $t = -\frac{\pi}{4}$  pour pouvoir justifier

$$|2y| \leq \left| x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq 2$$

et donc  $|y| \leq 1$ . D'où la deuxième inclusion.

3. On fixe  $(x, y) \in S_N(0, 1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$ .  $\varphi$  est  $2\pi$ -périodique,  $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$  et  $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$ . On peut donc se limiter à un intervalle de longueur  $2\pi$  pour l'étude de  $\varphi$ .

On note que si  $t \in [-\pi, 0]$ ,  $\cos(t)$  et  $\sin(2t)$  sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leq x |\cos(t)| + y |\sin(2t)| = |\varphi(-t)|$$

et  $-t \in [0, \pi]$ . Donc le sup est atteint sur  $[0, \pi]$ .

On note maintenant, comme  $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , que si  $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ,

$$0 \leq \varphi(t) = \underbrace{x \cos(t)}_{\in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]} + y \sin(2t) \leq \underbrace{x \cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]} + y \sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t)$$

Donc le sup est atteint sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ . Soit maintenant  $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$  tel que  $\varphi(t_0)$  réalise le sup (existe car  $\varphi$  est continue sur un compact). Comme c'est aussi le sup sur  $\mathbb{R}$  qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre :  $\varphi'(t_0) = 0$ .

On a donc  $x \cos(t_0) + y \sin(2t_0) = 1$  et  $-x \sin(t_0) + 2y \cos(2t_0) = 0$ . On en déduit les valeurs de  $x$  et  $y$  en fonction de  $t_0$ , en faisant attention que  $\cos(t_0) \neq 0$  sinon  $\sin(t_0) = 0$  aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où  $t_0 = 0$ .



Réciproquement, s'il existe  $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$  tel que  $x$  et  $y$  s'écrivent de la façon demandée, alors  $t_0$  est l'unique point satisfaisant  $\varphi(t_0) = 1$  et  $\varphi'(t_0) = 0$ . Mais alors le sup de  $\varphi$  sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  est atteint en un point  $t_1$  qui vérifie les mêmes choses, donc  $t_1 = t_0$  d'où  $N(x, y) = 1$ .

## Solution 6.2.

1. Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur  $E$

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt\end{aligned}$$

Alors  $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$  et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. Pour  $x \in [0, 1]$ , écrire  $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$ ,  $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$ , utiliser Cauchy-Schwarz avec  $f'$  et 1 puis que  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$ , pour enfin passer au sup sur  $x$ .

3. Utiliser, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction

$$\begin{aligned}f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n\end{aligned}$$

**Solution 6.3.** Si  $f$  est ouverte,  $f(\mathbb{R}^n)$  est un sous-espace vectoriel ouvert de  $\mathbb{R}^p$ . Donc  $f$  est surjective.

Si  $f$  est surjective, on prend  $F$  un supplémentaire de  $\ker(f)$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $\dim(\ker(f)) = n - p$  et  $\dim(F) = p$ . Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  et  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base de  $\ker(f)$ . On vérifie que  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est une base de  $\mathbb{R}^p$ . On définit

$$\begin{aligned}N_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i x_i e_i &\mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\end{aligned}$$

norme sur  $\mathbb{R}^n$  et

$$\begin{aligned}N_2 : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i y_i f(e_i) &\mapsto \max_{1 \leq i \leq p} |y_i|\end{aligned}$$

norme sur  $\mathbb{R}^p$ .

Soit  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $y_0 \in f(\Theta)$ , il existe  $x_0 \in \Theta$  :  $y_0 = f(x_0)$ . Si  $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ , alors  $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$ . Comme  $\Theta$  est un ouvert, il existe  $r_0 > 0$  tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta$$

Soit  $y = \sum_{i=1}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$ , si  $N_2(y - y_0) < r_0$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$  et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$$

avec  $N_1(x - x_0) = \max_{1 \leq i \leq p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$ . Ainsi  $x \in \Theta$  et  $y \in f(\Theta)$ , donc  $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$  et  $f(\Theta)$  est un ouvert.

#### Solution 6.4.

1. Classique.

2.

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + \kappa(f)x \leq N(f)$$

car  $x \leq 1$ , donc  $N_\infty \leq N$ . Pour la non-équivalence, prendre

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n \end{aligned}$$

3. On a  $|f(0)| \leq N_\infty(f)$  donc  $N(f) \leq N'(f)$ . Ensuite,  $N_\infty \leq N$  donne  $N' \leq N + \kappa \leq 2N$ .

Donc  $N$  et  $N'$  sont équivalentes.

**Remarque 6.1.** Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement.

On prend  $(e_i)_{i \in I}$  une base (de Hamel),  $J = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$  dénombrable. Si  $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ , on peut vérifier que

$$N_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n |x_{i_{2n}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

ne se dominent pas.

**Solution 6.5.** Il existe  $\alpha > 0$  tel que  $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$ . Soient  $i \neq j$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$ . Alors

$$\left\| T_{i,j} \left( \frac{\lambda}{p} \right) - I_n \right\|_\infty = \left| \frac{\lambda}{p} \right| < \alpha$$

donc  $T_{i,j}(\lambda) \in G$  ( $T_{i,j}$  est la matrice de transvection :  $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ ).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left( T_{i,j} \left( \frac{\lambda}{p} \right) \right)^p \in G$$

Soit  $\delta = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} = 1$  donc il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$ .

On a alors

$$\left\| D_n \left( \rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} \right) - I_n \right\|_\infty < \alpha$$

donc  $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}})^p \in G$  (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent  $GL_n(\mathbb{C})$ , on a bien  $G = GL_n(\mathbb{C})$ .

**Remarque 6.2.** C'est faux sur  $\mathbb{R}$ . Contre-exemple : matrices de déterminant positif.

**Solution 6.6.** Si  $f$  n'est pas continue en 0, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\alpha > 0$ , il existe  $h \in E$  avec  $\|h\| \leq \alpha$  et  $\|f(h)\| > \varepsilon_0$ . On prends  $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$ , d'où  $\|nh_n\| \leq 1$  mais  $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leq M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .

Donc  $f$  est continue en 0. Comme  $f$  est linéaire, pour tout  $x \in E$ ,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x) + f(h) = f(x)$$

donc  $f$  est continue.

On a  $f(px) = p(fx)$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}$  puis  $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$  pour tout  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  donc pour tout  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(rx) = rf(x)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{E}$ , il existe une suite de rationnels telle que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lambda$ . Comme  $f$  est continue, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n f(x) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Donc  $f$  est linéaire.

**Remarque 6.3.** Soit  $e_0 = 1$  et  $e_1 = \sqrt{2}$  et  $(e_i)_{i \in I}$  une  $\mathbb{Q}$ -base de  $\mathbb{R}$  ( $0 \in I$ ). On définit

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i \in I \setminus \{0\}} \lambda_i e_i$$

$f$  vérifie  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ , mais si  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de rationnels tendant vers  $\sqrt{2}$ ,  $f(r_n) = r_n \rightarrow \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$ .

**Solution 6.7.**

1. On a  $\alpha(A) \subset \overline{A}$  donc  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$  donc  $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$ . Comme  $\alpha(A)$  est un ouvert inclus dans  $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$  donc  $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$ .
2. Si  $\beta(A) = \overline{\overline{A}}$ , on montre aussi que  $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$ . On a donc  $A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$  et  $\overset{\circ}{\overline{\overline{A}}}$  et c'est tout.

**Solution 6.8.**

1. Si  $d_A = d_B$ ,

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B}$$

Réciproquement, soit  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a_1 \in \overline{A}$ ,  $\|x - a_1\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$  (par définition de l'inf). Il existe  $a_2 \in A$ ,  $\|a_1 - a_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  (par définition de la fermeture). Ainsi,

$$d_A(x) \leq \|x - a_2\| \leq \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x)$ . Comme  $A \subset \overline{A}$ ,  $d_{\overline{A}} \leq d_A$ , on a  $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$ .

2. Soit  $x \in A$ , on a  $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leq \rho(A, B)$  donc  $\sup_{x \in A} d_B(x) \leq \rho(A, B)$ , de même pour  $\sup_{y \in B} d_A(y)$  donc on a une première inégalité.

Réciproquement, soit  $x \in E$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a \in A$  et  $b \in B$  tel que  $\|x - a\| \leq d_A(x) + \varepsilon$  et  $\|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon$ . On a alors

$$d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|a - b\| + \|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A, B)$$

Ceci vaut pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc  $d_A(x) \leq d_B(x) + \alpha(A, B)$ . De même,  $d_B(x) \leq d_A(x) + \alpha(A, B)$  donc  $\rho(A, B) \leq \alpha(A, B)$ .

### Solution 6.9.

1. Soit  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $y \in \mathbb{C}$  donc il existe  $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$  telle que l'on ait pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(x_n) = y_n$ .  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée car  $\lim_{z \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$  (car  $P$  est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass)  $x_{\sigma(n)} \rightarrow x$  et  $x \in F$  car  $F$  est fermé. Par continuité de  $z \mapsto P(z)$  sur  $\mathbb{C}$ , on a  $y = P(x) \in P(F)$ .
2. Soit  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbb{C}$ , soit  $y \in P(\Theta)$ ,  $\exists x \in \Theta$  tel que  $P(x) = y$  et il existe  $r > 0$ ,  $B(x, r) \subset \Theta$ . Soit  $y' \in \mathbb{C}$ , supposons que pour tout  $x' \in \mathbb{C}$  tel que  $P(x') = y'$ , on a  $|x - x'| > r$ . Soit  $Q(X) = P(X) - y' = a \prod_{i=1}^n (X - x_i)$  non constant où  $a$  est le coefficient dominatrice de  $P$ . Par hypothèse, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ :  $|x_i - x| > r$  (car  $P(x_i) = y'$ ), ainsi

$$|Q(x)| = |y - y'| \geq |a|r^n$$

Par contraposée, si  $|y - y'| \leq \frac{|a|r^n}{2}$ , alors il existe  $x' \in \mathbb{C}$  tel que  $P(x') = y'$  et  $|x' - x| < r$ . Ainsi,  $x' \in B(x, r) \subset \Theta$  et  $y' \in P(\Theta)$ . Donc  $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$  et  $P(\Theta)$  est un ouvert.

### Solution 6.10.

1. Si  $P \notin \mathcal{S}$ , il existe  $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  tel que  $P(z_0) = 0$  et  $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$ . Par contraposée, si pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$ , alors  $P \in \mathcal{S}$ .

Réciproquement, si  $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$  avec  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  réels, soit  $z = a + ib \in \mathbb{C}$ . On a

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^n |a - \lambda_i + ib| \geq |b|^n$$

2. Soit  $(P_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$  telle que  $P_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} P \in F$ . Soit  $z \in \mathbb{C}$ , on a pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $|P_p(z)| \geq |\Im(z)|^n$  donc quand  $p \rightarrow +\infty$ ,  $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$  donc  $P \in \mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}$  est fermé.

3. Soit  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de matrice trigonalisable sur  $\mathbb{R}$  qui converge vers  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
 On bite  $\chi_p$  le polynôme caractéristique de  $M_p$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\chi_p \in \mathcal{S}$  et  $\chi_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \chi_M$ .  
 Comme  $\mathcal{S}$  est fermé,  $\chi_M \in \mathcal{S}$  et  $M$  est trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution 6.11.**

1.  $\varphi$  est linéaire et  $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n - 1 = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$ .  
 Si  $\varphi$  est bijective, elle est surjective et il existe  $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$  tel que  $UA + BV = 1$  et d'après le théorème de Bézout, on a  $A \wedge B = 1$ .  
 Réciproquement, si  $\varphi$  n'est pas surjective, il existe  $(U, V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \setminus \{(0, 0)\}$  tel que  $\varphi(U, V) = 0$  d'où  $AU = -BV$ . Soit  $\delta = A \wedge B$ , on écrit  $A = \delta A_1$  et  $B = \delta B_1$  avec  $A_1 \wedge B_1 = 1$  et on a  $A_1 U = -B_1 V$ . D'après le théorème de Gauss, on a  $A_1 \mid V$  et  $B_1 \mid U$ . Si  $U = 0$ , on a  $V = 0$  et de même si  $V = 0$ , on a  $U = 0$ . On peut donc supposer  $U \neq 0$  et  $V \neq 0$ , et on a alors  $\deg(A_1) \leq \deg(V) \leq n - 1 < n = \deg(A)$  mais  $A = \delta A_1$  donc  $\deg(\delta) \geq 1$  et  $A \wedge B \neq 1$ .  
 2.  $\Phi$  est continue car  $R_{A,B}$  est un polynôme en les coefficients de  $A$  et  $B$ .  
 3. Comme on est dans  $\mathbb{C}$ ,  $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$ .  
 $\Phi_{P,P'}$  est continue d'après la question précédente,  $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$  donc  $\Delta$  est ouvert.  
 Sur  $\mathbb{R}$ , on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si  $P \wedge P' = 1$  (contre-exemple :  $P = X^2 + 1$ ). Dans  $\mathbb{R}_3[X]$ ,  $X$  est scindé à racines simples et  $X(1 + \varepsilon X)^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} X$  et  $-\frac{1}{\varepsilon}$  est racine double, donc  $\Delta$  n'est pas ouvert.

**Remarque 6.4.** On peut cependant considérer

$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\}$$

Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$  sont les racines (distinctes) de  $R$  sur  $\mathbb{R}$ , on choisit  $\alpha_0 \in ]-\infty, \lambda_1, \alpha_n \in ]\lambda_n, +\infty[$  et  $\alpha_i \in ]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$  si  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ , on a  $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$  (car les racines de  $P$  provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ Q &\mapsto (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0 \leq k \leq n-1} \end{aligned}$$

$\Psi$  est continue sur  $\mathbb{R}_n[X]$  et  $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$  qui est ouvert, donc il existe  $r > 0$  tel que si  $\|P - Q\| < r$ , alors  $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$ . Donc  $Q$  change  $n$  fois de signe, et admet au moins  $n$  racines. Mais  $\deg(Q) = n$ , donc  $Q$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\Delta_n$  est ouvert dans  $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$ .

**Remarque 6.5.**

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ diagonalisable à racines simples}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M \text{ sciné à racines simples}\}$$

est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  car  $M \mapsto \chi_M$  est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , et c'est aussi vrai sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution 6.12.**

1. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^n \end{aligned}$$

$f$  est continue et  $F = f^{-1}(\{0\})$  donc  $F = \overline{F}$ .

Soit  $M_0 \in F$ ,  $X^n$  annule  $M_0$  donc  $M_0$  est trigonalisable : on écrit  $M_0$  dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors  $M_\varepsilon$  la même matrice dans la même base en rajoutant simplement  $\varepsilon$  en première position de la diagonale. Alors  $M_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M_0$  et  $M_\varepsilon \notin F$  donc  $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ . Notons que cela signifie que  $F$  est dense.

2. La norme dérive du produit scalaire  $(A|B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$ . Soit  $M \in F$ , on a  $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$ . On a  $(M|I_n) = \text{Tr}(M) = 0$  car  $M$  est nilpotente. Donc  $\|M - I_n\|^2$  est minimale pour  $\|M\|^2$  minimale, donc pour  $M = 0 \in F$ . Donc  $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$  (et la distance est atteinte pour  $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ ).

**Solution 6.13.**

1.  $A \mapsto \det(A)$  est continue et  $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$  est donc ouvert. Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , pour  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $A_p = A - \frac{1}{p+1}I_n$ . Comme  $\text{Sp}(A)$  est fini, il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $p \geq N$ ,  $\frac{1}{p+1} \notin \text{Sp}(A)$ . Donc pour tout  $p \geq N$ ,  $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$ , et  $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$  donc  $GL_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
2. On fixe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $A \in GL_n(\mathbb{K})$ . On écrit  $BA = A^{-1}(AB)A$  donc  $AB$  et  $BA$  sont semblables donc  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ . Comme, à  $B$  fixé,  $A \mapsto \chi_{AB}$  et  $A \mapsto \chi_{BA}$  sont continues sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a le résultat par densité.

**Solution 6.14.**

1. On a  $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u) \circ v_p = \frac{1}{p}(id_E - u^p)$ , donc  $\|v_p \circ (id_E - u)\| \leq \frac{1}{p}(\|id_E\| + \|u^p\|) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

Soit  $x \in \ker(u - id_E) \cap \text{Im}(u - id_E)$ , on a  $u(x) = x$  et il existe  $y \in E$ ,  $x = (u - id_E)(y)$ .

On a  $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$  et  $v_p(x) = v_p \circ (u - id_E)(y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  d'où  $x = 0$ . Le théorème du rang permet de conclure.

2. Soit  $x \in E$ , on écrit  $x = x_1 + x_2$  avec  $\Pi(x) = x_1$  et  $x_2 = (u - id_E)(y_2)$ . Alors  $v_p(x) = x_1 + v_p \circ (u - id_E)(y_2) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x_1 = \Pi(x)$ .

**Solution 6.15.**

1. Pour tout  $x \in A$ ,  $f_n(x) \in A$  car  $A$  est convexe. Soit  $(x, y) \in A^2$ , on a

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f(x) - f(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x - y\|$$

Donc  $f_n$  est  $(1 - \frac{1}{n})$ -lipschitzienne. On forme

$$\begin{aligned} g_n : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|f_n(x) - x\| \end{aligned}$$

qui est continue. Soit  $x_n \in A$  telle que  $g_n(x_n) = \min_{x \in A} g_n(x)$  (existe car  $A$  est compact et  $g_n$  continue). On a  $x_n \in A$ , d'où  $f_n(x_n) \in A$  et

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|f_n(x_n) - x_n\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)g_n(x_n)$$

Si  $g_n(x_n) \neq 0$ , alors on aurait  $g_n(f_n(x_n)) < g_n(x_n)$  ce qui n'est pas possible. Donc  $g_n(x_n) = 0$  et  $f_n(x_n) = x_n$ .

Soit  $y_n$  un autre point fixe, on a

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x_n - y_n\|$$

donc  $x_n = y_n$ .

2. On a  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$  et on extrait (car  $A$  est compact) et on a

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in A$$



On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)}f(x_0)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\right)f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)}$$

par continuité de  $f$ . Donc  $f(x) = x$ .

3. Soit  $(x, y) \in A^2$ , points fixes de  $f$ , et  $t \in [0, 1]$ , on pose  $z = tx + (1 - t)y$ . On a

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|f(x) - f(y)\| \\ &\leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= (1 - t)\|x - y\| + t\|x - y\| \\ &= \|x - y\| \end{aligned}$$

On a donc égalité partout :  $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$  et  $\|f(x) - f(z)\| = \|x - z\|$ ,  $\|f(z) - f(y)\| = \|z - y\|$  car  $f$  est 1-lipschitzienne.

Comme la norme est euclidienne, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  tel que  $f(x) - f(z) = \lambda(f(z) - f(y))$  d'où  $f(x) + \lambda f(y) = (\lambda + 1)f(z)$  d'où  $f(z) = \frac{x + \lambda y}{\lambda + 1} = t'x + (1 - t')y$  avec  $t' = \frac{1}{\lambda + 1} \in [0, 1]$ .

En reportant, on a

$$\|f(x) - f(z)\| = \|x - t'x - (1 - t')y\| = (1 - t')\|x - y\| = \|x - z\| = (1 - t)\|x - y\|$$

Si  $x \neq y$ , alors  $t = t'$  et  $f(z) = tx + (1 - t)y = z$ .

4. Soit dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $\overline{B_{\|\cdot\|}(0, 1)} = [-1, 1]^2 = A$ . Soit

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto (x, |x|) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_\infty &= \|(x_1, |x_1|)(x_2, |x_2|)\|_\infty \\ &= \max\{|x_1 - x_2|, ||x_1| - |x_2||\} \\ &= |x_1 - x_2| \\ &\leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty \end{aligned}$$

Donc  $f$  est 1-lipschitzienne, on a  $f(x, y) = (y, x)$  si et seulement si  $y = |x|$ . Donc ici,  $F$  n'est pas convexe.

**Solution 6.16.**

1. On a pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  et par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ . Pour  $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ , on a  $f(qrx) = qf(rx) = f(px) = pf(x)$  donc  $f(rx) = rf(x)$ . Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  et continuité de  $f$ , on a pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ . Donc  $f$  est linéaire.

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans  $\mathbb{C}$ .

2. On étudie la série, pour  $x$  fixé de terme général

$$\|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| = \frac{1}{2^n} \|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$$

qui est donc convergente. Donc  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

3. On a  $v_0(x) = f(x)$ , donc  $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) = g(x) - f(x)$ .  $f$  étant continue,  $v_n$  l'est aussi, et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme pour tout  $x \in E$ ,  $\|(v_{n+1} - v_n)(x)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$ , donc  $g$  est continue.

4. On a, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\|v_n(x + y) - v_n(x) - v_n(y)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n(x + y)) - \frac{1}{2^n} (f(2^n x) + f(2^n y)) \right\| \leq \frac{M}{2^n}$$

Donc quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $g(x + y) = g(x) + g(y)$ .

On a pour tout  $x \in E$ ,

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M$$

Soit maintenant  $h$  linéaire continue telle que  $h - f$  soit bornée, soit  $M' = \sup_{x \in E} \|h(x) - f(x)\|$ . On a donc

$$\|v_n(x) - h(x)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^n} h(2^n x) \right\| \leq \frac{M'}{2^n}$$

car  $h$  est linéaire. Donc quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) = h(x)$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = g(x)$ .

**Solution 6.17.** En particulier, pour  $t = f(0)$ ,  $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{x \in E \mid f(x) = f(0)\}$  est borné (car compact). Donc il existe  $A$  tel que  $f^{-1}(\{f(0)\}) \subset \overline{B(0, A)}$ . Par contraposée, pour tout  $x \in E$ , si  $\|x\| > A$ , alors  $f(x) \neq f(0)$ .

On montre alors que  $E \setminus \overline{B(0, A)}$  est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

$f$  étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout  $x \in E \setminus \overline{B(0, A)}$ ,  $f(x) > f(0)$  soit  $f(x) < f(0)$ . Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on se place dans le cas  $f(x) > f(0)$ . Comme on est en dimension finie sur  $\overline{B(0, A)}$  compact,  $f$  atteint son minimum et ce minimum est plus petit que  $f(0)$ , c'est donc un minimum global.

**Remarque 6.6.** C'est faux pour  $n = 1$ . Contre-exemple :  $f = id_{\mathbb{R}}$ .

**Solution 6.18.** Si c'était le cas, on prend un cercle  $\mathcal{C}$  compact (et connexe par arcs).  $f(\mathcal{C})$  est compact connexe par arc dans  $\mathbb{R}$ . On note  $f(\mathcal{C}) = [a, b]$  (avec  $a < b$  car  $f$  injective). Si  $x \in \mathcal{C}$  est tel que  $f(x) = \frac{a+b}{2}$ , on  $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a, b] \setminus \left\{ \frac{a+b}{2} \right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$  donc une telle fonction n'existe pas.

**Solution 6.19.**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|e_n\|_{l^1} = 1$  et  $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\|$  donc  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. On note  $M = \sup |K_n| \leq \|\varphi\|$ .

Soit maintenant  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$ . On a, pour  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\| u - \sum_{n=0}^N u_n e_n \right\|_1 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

(reste d'une série convergente). Par continuité de  $\varphi$ , on a donc

$$|\varphi(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| |K_n| \leq M \|u\|_1$$

Ainsi,  $\|\varphi\| \leq M$  et donc  $\|\varphi\| = M$ .

2.  $F$  est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective.

Soit  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ . On définit

$$\begin{aligned} \varphi : \quad l^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{aligned}$$

Elle est bien définie car  $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$  et  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. Elle est linéaire, et continue car  $|\varphi(u)| \leq \|(K_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$ .

Enfin, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi(e_n) = K_n$ . Donc  $F(\varphi) = (K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $F$  est surjective. Donc  $F$  est une isométrie bijective et le dual topologique de  $l^1$  est équivalent à  $l^\infty$ .

**Solution 6.20.**

1. Soit  $\varphi$  une forme linéaire non nulle telle que  $K = \ker(\varphi)$ . Si  $F$  est dense,  $\varphi$  est discontinue. Soit  $(a, b) \in (E \setminus H)^2$  et  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $b - a$  (existe car  $H$  est dense). La suite  $(a + x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $b$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\varphi(a + x_n) = \varphi(a) \neq 0$ , et pour  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi(t(a + x_n) + (1 - t)(a + x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$ . Donc  $[a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H$ . Soit  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E \setminus H$  telle que

$$\begin{cases} \gamma(t) = \alpha_n t + \beta_n \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) = b \\ \gamma(t) = a + tx_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

On cherche à définir  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  : on veut  $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = a + x_n$  et  $\gamma(1 - \frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$  (pour la continuité en se raccordant au  $x_n$ ). En résolvant le système, on trouve  $\alpha_n = n(n+1)(x_n - x_{n+1})$  et  $\beta_n = a + x_n - (n-1)(n+1)(x_n - x_{n+1})$ .

Soit alors  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :  $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$  et pour tout  $n \geq N$ , pour tout  $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}]$ ,  $\gamma(t) \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$  par convexité de la boule. Donc  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = b$  et  $\gamma$  est continue. Donc  $E \setminus H$  est connexe par arcs.

2. Soit  $\varphi$  une forme linéaire telle que  $\ker(f) = H$  est fermé. Alors  $\varphi$  est continue (à redémontrer). Soit  $x \in E \setminus H$ , on a  $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$  et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si  $E \setminus H$  était connexe par arcs,  $\varphi$  s'annulerait sur  $E \setminus H$  ce qui n'est pas vrai. Donc  $E \setminus H$  n'est pas connexe par arcs.

3. Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , si  $H$  est dense alors  $E \setminus H$  est connexe par arc d'après la première question. Si  $H$  est fermé, soit  $\varphi$  une forme linéaire continue telle que  $\ker(f) = H$ . Soit  $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$ .

— Si  $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_+$ , alors pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in E \setminus H}) \neq 0$  et on peut relier directement  $x_1$  et  $x_2$ .

— Sinon, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  avec  $\varphi(x_1) = \rho e^{i\theta}$  et  $\varphi(x_2) = \rho' e^{i(\theta+\pi)}$ . Alors  $x_3 = ix_1$  est tel que  $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$  et  $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$  (on contourne l'origine par une rotation de l'angle  $\frac{\pi}{2}$ ). Par conséquent, on peut utiliser  $x_3$  pour relier  $x_1$  et  $x_2$  donc  $E \setminus H$  est connexe par arcs.

**Solution 6.21.** Soit

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ((x, \sin(\frac{1}{x})))\end{aligned}$$

$\varphi$  est continue et  $\Gamma \cup \varphi(\mathbb{R}_+^*)$  est connexe par arcs.

On a  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$  avec  $\Gamma' = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$ . En effet, pour tout  $y \in [-1, 1]$ , on pose  $x_k = \frac{1}{\arcsin(y) + 2k\pi}$ . On a  $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$  donc  $(0, y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \bar{\Gamma}$ .

Réciproquement, si  $(x, y) \in \bar{\Gamma}$ , il existe  $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  avec  $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$  et  $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$ . Si  $x > 0$ , par continuité,  $y = \sin(\frac{1}{x})$  et  $(x, y) \in \Gamma$ . Si  $x = 0$ ,  $y \in [-1, 1]$  donc  $(x, y) \in \Gamma'$ .

Si  $\bar{\Gamma}$  est connexe par arcs, il existe

$$\begin{aligned}\gamma: [0, 1] &\rightarrow \bar{\Gamma} \\ t &\mapsto (x(t), y(t))\end{aligned}$$

continue telle que  $\gamma(0) = (0, 0)$  et  $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$ . La première projection  $t \mapsto x(t)$  est continue avec  $x(0) = 0$  et  $x(1) = \frac{1}{\pi}$ . On définit maintenant  $t_1 = \sup\{t \in [0, 1] \mid x(t) = 0\}$ . Par continuité,  $x(t_1) = 0$  et donc  $t_1 < 1$ . Donc pour tout  $t > t_1$ ,  $x(t) > 0$  et  $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$  pour  $t > t_1$  et  $\gamma(t_1) = (0, y_1)$  avec  $y_1 \in [-1, 1]$ .

Or,  $-1$  et  $1$  n'appartiennent pas simultanément à  $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ . On peut supposer que  $1 \notin ]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ . Comme  $\gamma$  est continue, il existe  $t_2 > t_1$  tel que pour tout  $t \in ]t_1, t_2]$ ,  $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in ]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ . Or  $x(t_2) > 0$  et  $x(t_1) = 0$  donc il existe  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $t_0 \in ]t_1, t_2]$  tel que  $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$  (théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors  $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin ]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$  ce qui contredit ce qui précède.

Donc  $\bar{\Gamma}$  n'est pas connexe par arcs.

**Solution 6.22.**

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in K$  car  $u_n$  est le barycentre de  $(a, T(a), \dots, T^n(a))$  et  $K$  est convexe. Comme  $K$  est compact, on peut extraire  $u_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} u \in K$ . Alors

$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n) + 1} (id_E - T^{\sigma(n)+1})(a)$$

d'où

$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leq \frac{1}{\sigma(n) + 1} \times 2M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

avec  $M = \sup_{x \in K} \|x\|$  (existe car  $K$  est compact donc borné). Par continuité de  $T$ , on a  $T(u) = u$ .

2. Posons  $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$  fermé car  $K' = K \cap \left( \underbrace{(id_E - T)^{-1}\{0\}}_{\text{continu}} \right)$ . Donc  $K'$  est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout  $(u_1, u_2) \in K'^2$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ , par linéarité de  $T$ , on a

$$T(tu_1 + (1 - t)u_2) = tu_1 + (1 - t)u_2$$

donc  $K'$  convexe. De plus, comme  $U \circ T = T \circ U$ , pour tout  $u \in K'$ , on a  $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$  donc  $U(u) \in K'$ . On applique alors la question 1 à  $K'$  est il existe  $y \in K' : U(y) = y$  et  $T(y) = y$ .

### Solution 6.23.

1. C'est le théorème du rang car  $\text{rg}(u) \leq n \leq p - 2$ , et  $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0\}$  est de dimension  $p - 1$  donc  $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$  (formule de Grassmann).
2. On a

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i)x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = x$$

et

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1$$

Soit  $I_+ = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i > 0\}$  et  $I_- = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i < 0\}$ . On a  $I_+ \neq \emptyset$  et  $I_- \neq \emptyset$  car  $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$  et  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$ . Soit  $t \geq 0$ . Pour tout  $i \in I_+$ ,  $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$ . Pour  $i \in I_-$ ,  $\lambda_i + t \underbrace{\alpha_i}_{<0} \geq 0$  si et seulement si  $t \leq -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ . Prenons alors

$$t = \min_{i \in I_-} \left( -\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right)$$

On a aussi pour tout  $i \in I_-$ ,  $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$  et il existe  $i_0 \in I_-$  tel que  $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$ .

3. Par récurrence descendante, on se ramène à  $n+1$  points car si  $x$  est barycentre de  $p$  points avec  $p \geq n + 2$ , alors il est barycentre de  $p - 1$  points.

4. Soit  $A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$  fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit

$$\begin{aligned} f : \quad A \times K^{n+1} &\rightarrow \text{conv}(K) \\ ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (x_1, \dots, x_{n+1})) &\mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{aligned}$$

$f$  est surjective et continue, donc  $\text{conv}(K)$  est l'image continue d'un compact donc  $\text{conv}(K)$  est compact.

**Solution 6.24.** Pour tout  $u \in A_p$ ,  $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  distincts et  $u$  est diagonalisable. Réciproquement, si  $u$  est diagonalisable et  $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  alors dans une base la matrice de  $u$  est diagonale avec des  $\alpha_i$  (éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc  $u \in A_p$ .

Si  $u \in A_p$ , on écrit donc le polynôme caractéristique de  $u$

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec  $0 \leq m_i \leq \dim(E) = n$  et  $\sum_{i=1}^r m_i = n$ .  $u \mapsto \chi_u$  est continue. Pour  $(m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r$  tel que  $\sum_{i=1}^r m_i = n$ , notons

$$A_{m_1, \dots, m_r} = \left\{ u \in A_p \mid \chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\}$$

et

$$\left[ u \mapsto \chi_u(A_p) \right] = \left\{ \bigcup_{(m_1, \dots, m_r) \in D_{n,r}} \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\}$$

où

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \mid \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires,

si  $(m_1, \dots, m_r) \neq (m'_1, \dots, m'_r)$ , alors  $A_{m_1, \dots, m_r}$  et  $A_{m'_1, \dots, m'_r}$  ne sont pas dans la même composante connexe par arcs car

$$\left[ u \mapsto \chi_u \left( A_{m_1, \dots, m_r} \cup A_{m'_1, \dots, m'_r} \right) \right] = \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \cup \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m'_i} \right\}}_{\text{pas connexe par arcs}}$$

Si  $\gamma: [0, 1] \rightarrow A_p$  est continue,  $t \mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t) + a_1(t)X + \cdots + a_{n-1}(t)X^{n-1} + X^n$  est continue sur  $[0, 1]$  et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.  $a_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.

Soit  $u_0 \in A_{m_1, \dots, m_r}$ , soit  $u \in A_{m_1, \dots, m_r}$ , alors il existe une base  $\mathcal{B}_0$  base de  $E$  telle que  $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$  soit diagonale avec des  $\alpha_1$  sur les  $m_1$  premières lignes de la diagonale,  $\alpha_2$  sur les  $m_2$  lignes suivantes, etc. Soit  $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ .  $M$  est semblable à  $M_0$  donc il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $M = PM_0P^{-1}$ .

Or  $GL_n(\mathbb{C})$  est connexe par arcs, donc il existe  $\varphi: [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  continue telle que  $\varphi(0) = P$  et  $\varphi(1) = I_n$ . On pose alors

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\rightarrow A_{m_1, \dots, m_r} \\ t &\mapsto \varphi(t)M_0\varphi^{-1}(t) \end{aligned}$$

Alors  $A_{m_1, \dots, m_r}$  est connexe par arcs.

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \mid \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}$$

qui vaut  $\binom{m+r-1}{r-1}$  possibilités (place  $n$  points sur une droite et les séparer avec  $r-1$  barres : le nombre de points dans chaque segment donne un  $m_i$ , il y a  $m+r-1$  possibilités pour placer les  $r-1$  barres).

### Solution 6.25.

1. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|AX|_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}x_j}_{>0} \geq 0$ . Si  $|AX|_i = 0$  alors pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j = 0$  donc  $x_j = 0$ , impossible car  $X \neq 0$ .
2. Si  $|AX| = A|X|$ . On a pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{i,j}|x_j|$$

donc les  $(a_{i,j}x_j)_{1 \leq j \leq n}$  ont tous même argument. On prend  $\theta = \arg(x_j)$ .

3.  $K$  est fermé et borné en dimension finie : c'est un compact. On a  $I_x \neq \emptyset$  car  $AX \geq 0$  donc  $0 \in I_x$ . Soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$  convergeant vers  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $AX - t_k X \geq 0$



donc pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $(AX - t_k X)_i \geq 0$  et par passage à la limite,  $AX - tX \geq 0$   
donc  $I_x$  est fermé.

Si  $t \in I_x$ ,

$$|tX|_1 = t = \sum_{i=1}^n t \underbrace{x_i}_{\geq 0} \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j}_{=(AX)_i} \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$$

car  $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ . On note  $M = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$ .

4. Pour tout  $x \in K$ ,  $\theta(X) \leq M$  donc  $\theta$  est bien borné sur  $K$ . Par définition de  $r_0$ , il existe  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$  tel que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta(X_k) = r_0$ . On note  $\theta(X_k) = t_k$ . Comme  $K$  est compact, il existe  $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que  $X_{\sigma(k)}$  converge vers  $X^+ \in K$ . A priori,  $\theta(X^+) \leq r_0$ . On a  $AX_{\sigma(k)} - t_{\sigma(k)} X_{\sigma(k)} \geq 0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  donc par passage à la limite,  $AX^+ - r_0 X^+ \geq 0$  et donc  $r_0 \leq \theta(X^+)$  donc  $r_0 = \theta(X^+)$ .

5. Soit  $Y = A^+ - r_0 X^+ \geq 0$ . Si  $Y \neq 0$ , alors  $AY > 0$  d'après la question 1 donc

$$AY = A \underbrace{(AX^+)}_{>0} - r_0 \underbrace{(AX^+)}_{>0} > 0$$

On a  $AY > \varepsilon AX^+$  si et seulement si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $|AY|_i > \varepsilon |AX^+|_i$  (car  $AY > 0$ ). On pose alors

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{|AY|_i}{|AX^+|_i}$$

On a alors  $AY - \varepsilon AX^+ > 0$  d'où

$$A \underbrace{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}_{\in K} - (r_0 + \varepsilon) \frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} > 0$$

donc  $r_0 + \varepsilon \in I_{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}$  c'est-à-dire

$$r_0 + \varepsilon \leq \theta\left(\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}\right) \leq r_0$$

ce qui est impossible. Nécessairement  $Y = 0$ .

6. Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a

$$|AV|_i = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |v_j| = (A|V|)_i$$

donc  $|\lambda| = |AV| \leq A|V|$ . De plus,  $|V| \in K$  donc  $|\lambda| \leq \theta(|V|) \leq r_0$ . Notons que cela implique que le rayon spectral de  $A$  est  $\rho(A)$  est plus petit que  $r_0$  et que l'on a même égalité.

7. Si  $|\lambda| = r_0$ , on a  $|\lambda| = \theta(|V|) = r_0$  et d'après la question 5 on a  $A|V| = r_0|V| = |AV|$ .

D'après la question 2, il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $V = e^{i\theta}|V|$ . Or

$$AV = \lambda V = e^{i\theta}A|V| = e^{i\theta}r_0|V|$$

et comme  $|K| \in K$ ,  $|V| \neq 0$  et on a donc  $\lambda = r_0$ .

8. Soit  $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  tel que  $\|V\|_1 = 1$  et  $AV = r_0V$ . D'après la question précédente, on a  $V = e^{i\theta}|V|$  et  $A|V| = r_0|V|$ . Soit alors  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$$

Notons maintenant que si  $Y \geq 0$  avec  $Y \neq 0$  vérifie  $AY = r_0Y$ , alors  $Y > 0$ . En effet, d'après la première question,  $AY > 0$ . On a  $r_0 \neq 0$  car sinon  $\text{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$  et  $A^n = 0$  ce qui est impossible car ses coefficients sont strictement positifs. D'où  $Y > 0$ .

Ainsi, par définition de  $X^+$ , on a  $X^+ > 0$  et  $|V| > 0$ . On a alors

$$(X^+)_i + t|v_i| \geq 0$$

si et seulement si

$$t \geq -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

On prend

$$t = \min_{1 \leq i \leq n} -\frac{|X^+|_i}{|v_i|}$$

Finalement, on a  $X^+ + t|V| \geq 0$  et une de ses coordonnées vaut 0 (car on a pris le minimum sur les  $i$ ). Nécessairement,  $X^+ + t|V| = 0$  (car  $A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$ ) et donc  $|V| \in \mathbb{R}X^+$ . Donc  $V = e^{i\theta}|V| \in \mathbb{C}X^+$  et ainsi

$$\dim(\ker(A - r_0I_n)) = 1$$

**Solution 6.26.** Soit

$$\begin{aligned} \varphi : U \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

On a

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| = ||x - y| - |x' - y'|| \leq |(x - y) - (x' - y')| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| \leq 2\|(x, y) - (x', y')\|_\infty$$

donc  $\varphi$  est continue.

$U \times V$  est compact, donc il existe  $(x_1, y_1) \in (U \times V)$  telle que  $\varphi(x_1, y_1) = \min_{(x, y) \in U \times V} \varphi(x, y)$ .

Comme  $U$  et  $V$  sont disjoints,  $x_1 \neq y_1$  et  $\varphi(x_1, y_1)d(U, V) > 0$ .

Soit  $\alpha = \frac{d(U, V)}{3}$ . On pose  $U' = \{x \in E \mid d(x, U) < \alpha\}$  et  $V' = \{x \in E \mid d(x, V) < \alpha\}$ .  $x \mapsto \|x\|$  est continue car 1-lipschitzienne donc  $U'$  et  $V'$  sont des ouverts et on a bien  $U \subset U'$  et  $V \subset V'$ . Soit ensuite  $x \in U' \cap V'$ , on a  $d(x, U) < \alpha$  et  $d(x, V) < \alpha$  donc il existe  $(u, v) \in U \times V$ ,  $d(x, u) < \alpha$  et  $d(x, v) < \alpha$ . Alors  $d(u, v) \leq 2\alpha$  ce qui est absurde. Donc  $U' \cap V' = \emptyset$ .

### Solution 6.27.

1.  $f$  est 1-lipschitzienne donc est continue. On forme

$$\begin{aligned} g : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x - f(x)\| \end{aligned}$$

$g$  est continue,  $K$  est compact donc il existe  $a \in K$  tel que  $g(a) = \min_{x \in K} g(x)$ . Si  $a \neq f(a)$ , alors  $\|f(a) - f^2(a)\| = g(f(a)) < \|a - f(a)\| = g(a)$  ce qui est impossible par définition de  $a$ . Donc  $f(a) = a$ . S'il existe  $a' \neq a$  tel que  $f(a') = a'$ , alors  $\|f(a) - f(a')\| = \|a - a'\| < \|a - a'\|$  ce qui est impossible. Donc  $a$  est unique.

2. S'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} = a$  alors pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n = a$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ . Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq a$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\|u_{n+1} - a\| = \|f(u_n) - f(a)\| < \|u_n - a\|$$

donc la suite  $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante dans  $\mathbb{R}_+$  donc elle converge vers  $l \geq 0$ . Par compacité de  $K$ , il existe une extraction  $\sigma$  telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha \in K$ . Par continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\sigma(n)} - a\| = \|\alpha - a\| = l$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\underbrace{u_{\sigma(n)+1}}_{f(u_{\sigma(n)})} - f(a)\| = \|f(\alpha) - f(a)\| = l = \|\alpha - a\|$$

par continuité de  $f$ . Ainsi, on a  $\alpha = a$  et  $l = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ .

3.  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $x < y \in \mathbb{R}^2$ , il existe  $z \in ]x, y[$  tel que (égalité des accroissements finis)

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(z)| = \left| \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \right| < 1$$

donc  $f$  vérifie bien l'hypothèse de contraction. Cependant, pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on a  $\sqrt{a^2 + 1} > a$  donc pas de point fixe. La démonstration tombe en défaut car  $\mathbb{R}$  n'est pas compact.

**Solution 6.28.** La condition est équivalente à pour tout  $(M_1, M_2, M_3) \in K_1 \times K_2 \times K_3$ ,  $M_1, M_2$  et  $M_3$  ne sont pas alignés.

On forme alors

$$\begin{aligned} f : K_1 \times K_2 \times K_3 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (M_1, M_2, M_3) &\mapsto R(M_1, M_2, M_3) \end{aligned}$$

où  $R(M_1, M_2, M_3)$  est le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par  $M_1, M_2$  et  $M_3$ .

On note  $M_i = (x_i, y_i)$  et  $\Delta_i$  la médiatrice de  $[M_j M_k]$ . Établissons une équation de  $\Delta_i$ . On a  $M = (x, y) \in \Delta_i$  si et seulement si  $\|M \vec{M}_j\|_2^2 = \|M \vec{M}_k\|_2^2$  si et seulement si  $(M \vec{M}_j + M \vec{M}_k \mid M \vec{M}_j - M \vec{M}_k) = 0$  (produit scalaire), si et seulement si  $(M \vec{C}_i \mid M_j \vec{M}_k) = 0$  où  $C_i$  est le milieu de  $[M_j M_k]$ , si et seulement si (calculer le produit scalaire)

$$\left( \frac{x_j + x_k}{2} - x \right) (x_k - x_j) + \left( \frac{y_j + y_k}{2} - y \right) (y_k - y_j) = 0$$

Soit alors  $M_0 = (x_0, y_0)$  le centre du cercle circonscrit.  $M_0 \in \Delta_i \cap \Delta_j$  avec  $i \neq j$ . Par exemple,  $M_0 \in \Delta_3 \cap \Delta_1$  si et seulement si

$$\begin{cases} \left( \frac{x_2 + x_1}{2} - x_0 \right) (x_2 - x_1) + \left( \frac{y_2 + y_1}{2} - y_0 \right) (y_2 - y_1) = 0 \\ \left( \frac{x_3 + x_2}{2} - x_0 \right) (x_3 - x_2) + \left( \frac{y_3 + y_2}{2} - y_0 \right) (y_3 - y_2) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si  $(L_2 \leftarrow L_1(x_3 - x_2) + L_2(x_1 - x_2))$

$$\begin{cases} x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} \\ x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) = \frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2} \end{cases}$$

si et seulement si  $(L_1 \leftarrow L_2(y_2 - y_1) + L_1(y_2 - y_3))$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \\ y_0 = \frac{\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \end{cases}$$

et  $R(M_1, M_2, M_3) = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}$ . En reportant,  $f$  est continue sur  $K_1 \times K_2 \times K_3$  compact donc  $f$  atteint son minimum.

### Solution 6.29.

1. Pour tout  $f \in E$ ,  $T(f)$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $(T(f))' = f$ ,  $T(f)(0) = 0$ .  $T$  est clairement linéaire, soit ensuite  $x \in [0, 1]$ , on a

$$|T(f)(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

Donc  $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$  donc  $T$  est continue et  $\|T\| \leq 1$ . Pour  $f = 1$ , on a  $\|f\|_\infty = 1$  et pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $T(f)(x) = x$  donc  $\|T(1)\|_\infty = 1$ . Ainsi,  $\|T\| = 1$ .

2.  $\text{id}_E - T$  est continue. Soit  $(f, g) \in E^2$ , on a  $g = f - T(f)$  si et seulement si  $g = y' - y$  et  $y(0) = 0$ . On a  $g(x)e^{-x} = \underbrace{e^{-x}(y'(x) - y(x))}_{(e^{-x}y(x))'}$  donc en intégrant de 0 à  $x$  on a

$$y(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$$

Donc  $T(f)$  vérifie le problème de Cauchy si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $T(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$  si et seulement si pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$$

Donc  $\text{id}_E - T$  est bijective. Enfin, on a pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$|f(x)| \leq |g(x)| + \left| \int_0^x g(t) e^{x-t} dt \right| \leq \|g\|_\infty (1 + x e^x) \leq \|g\|_\infty (1 + e)$$

Ainsi,

$$\|f\|_\infty = \|(\text{id}_E - T)^{-1}(g)\|_\infty \leq \|g\|_\infty (1 + e)$$

donc  $(\text{id}_E - T)^{-1}$  est continue. Ainsi,  $\text{id}_E - T$  est un homéomorphisme.

**Solution 6.30.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii)  $f^{-1}(K)$  est fermé car  $f$  est continue.  $K$  est borné, donc il existe  $M > 0$ , tel que pour tout  $y \in K$ ,  $\|y\| \leq M$ . Donc pour tout  $x \in f^{-1}(K)$ ,  $\|f(x)\| \leq M$ . Par contraposée de (i) pour  $A = M + 1$ , il existe  $B > 0$  tel que  $\|f(x)\| < A \Rightarrow \|x\| < B$ . Donc pour  $x \in f^{-1}(K)$ ,  $\|x\| < B$  donc  $f^{-1}(K)$  est borné. C'est donc un compact.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $A \geq 0$ . Soit  $K = \overline{B(0, A)}$  compact car fermé et borné en dimension finie. D'après (ii),  $f^{-1}(K)$  est compact donc borné : il existe  $B > 0$  tel que pour tout  $x \in f^{-1}(K)$ ,  $\|x\| \leq B$ . Par contraposée, si  $\|x\| > B$  alors  $x \notin f^{-1}(K)$  et  $f(x) \notin K$  donc  $\|f(x)\| > A$ . Ainsi,  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$ .

**Remarque 6.7.** Exemple pour l'exercice précédent : les fonctions polynômiales non constantes. Contre-exemple : l'exponentielle, cf  $\exp([0, 1]) = \mathbb{R}_+$  non compact.

**Solution 6.31.**

1. Soit  $(x, y) \in K^2$  compact. Soit  $\sigma$  une extraction telle que

$$(f^{\sigma(n)}(x), f^{\sigma(n)}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (l, l') \in K^2$$

On a

$$f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

de même pour  $y$ . Soit  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x)\| \leq \varepsilon \\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(y) - f^{\sigma(n)}(y)\| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Pour  $N = \max(N_1, N_2)$  et  $p = \sigma(N + 1) - \sigma(N) \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$d(x, f^p(x)) \leq d(f^{\sigma(n+1)}(x), f^{\sigma(n)}(x)) \leq \varepsilon$$

et de même pour  $y$  avec le même  $p$ .

2. On a

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(f(x), f(y)) \\ &\leq d(f^p(x), f^p(y)) \\ &\leq d(f^p(x), x) + d(x, y) + d(y, f^p(y)) \\ &\leq 2\varepsilon + d(x, y) \end{aligned}$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a égalité tout du long. On a donc notamment,  $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$  et donc  $f$  est une isométrie.

3.  $f$  est 1-lipschitzienne donc continue. Donc  $f(K)$  est compact donc fermé. Il suffit donc de montrer que  $f(K)$  est dense dans  $K$ . Soit  $x \in K$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\|x - \underbrace{f^p(x)}_{\in f(K)}\| \leq \varepsilon$  d'après la première question. Donc  $f(K)$  est dense dans  $K$  et  $f(K) = \overline{f(K)} = K$ .

**Remarque 6.8.** Exemple pour l'exercice précédent : une rotation sur la sphère unité.

**Solution 6.32.** Soit

$$f: K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M \mapsto f(M) = \text{rayon du cercle circonscrit au triangle MAB}$$

On a  $F = f(K)$ . Soit  $(C, i, j)$  un repère orthonormé où  $C$  est le milieu de  $[AB]$  et  $A(-\alpha, 0)$  et  $B(\alpha, 0)$  avec  $\alpha > 0$ . La médiatrice  $\Delta$  de  $[A, B]$  a pour équation  $x = 0$ . Si  $M(x, y)$ , soit  $\varphi(M)$  le centre du cercle circonscrit. On a  $\varphi(M) \in \Delta$  donc  $\varphi(M)(0, y_1)$  et  $\varphi(M)$  appartient à la médiatrice de  $[MA]$ . On a  $y_1 \neq 0$  car  $M \notin (AB)$ .

Notons  $M'$  le milieu de  $[MA]$ . On a  $M'(\frac{x-\alpha}{2}, \frac{y}{2})$  d'où  $M'\vec{\varphi}(M) \cdot \vec{MA} = 0$  d'où (en développant le produit scalaire),

$$y_1 = \left( (\alpha + x) \left( \frac{\alpha - x}{2} \right) - \frac{y^2}{2} \right) \left( -\frac{1}{y} \right)$$

$\varphi$  est donc continue donc  $f$  également et  $f(K) = F$  est compact.

**Solution 6.33.**

1. Soit  $\lambda \in \text{Sp}(\tau)$  et  $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$  avec  $\tau(P) = \lambda P$ . Si  $P$  n'est pas constant, notons  $\alpha \in \mathbb{C}$  alors  $P(\alpha) = 0$ . Alors  $P(\alpha + 1) = 0$ . En itérant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(\alpha + n) = 0$ , impossible car  $P$  n'est pas constant donc pas nul. Finalement,  $P$  est constant et  $\lambda = 1$  :  $\text{Sp}(\tau) = \{1\}$ .
2.  $f: x \mapsto P(x)e^{-x}$  est continue et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  donc le sup est bien défini. Il est ensuite facile de vérifier que  $\|P\|$  est une norme.
3. On a

$$\|\tau(P)\| = \sup_{x \geq 0} |P(x+1)e^{-x}| = \sup_{x' \geq 1} |P(x')e^{-x'}e| \leq \sup_{x' \geq 0} |P(x')e^{-x'}e| \leq e\|P\|$$

4. Utiliser  $P = X$ .

**Solution 6.34.**

1. Pour  $x$  fixé,  $\min(x, \varphi(t)) = \frac{x + \varphi(t) - |x - \varphi(t)|}{2}$  est continue. Donc  $T(f)$  est définie.

Si  $x \leq \varphi(0)$ ,

$$T(f)(x) = \int_0^1 x f(t) dt = x \int_0^1 f(t) dt$$

et si  $x \geq \varphi(1)$ ,

$$T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt$$

et si  $\varphi(0) \leq x \leq \varphi(1)$ , il existe un unique  $t_1 = \varphi^{-1}(x)$  (car  $\varphi$  induit un homéomorphisme de  $[0, 1]$  dans  $\varphi([0, 1])$ ).

Si  $t \leq t_1$ , on a  $\varphi(t) \leq x$ , donc  $\min(x, \varphi(t)) = \varphi(t)$ . Si  $t \geq t_1$ , on a  $\min(x, \varphi(t)) = x$ . On a donc

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^{t_1} \varphi(t) f(t) dt + \int_{t_1}^1 x f(t) dt \\ &= \underbrace{\int_0^{\varphi^{-1}(x)} \varphi(t) f(t) dt}_{=F_1(\varphi^{-1}(x))} + x \underbrace{\int_{\varphi^{-1}(x)}^1 f(t) dt}_{=F_2(\varphi^{-1}(x))} \end{aligned}$$

et  $f$  et  $\varphi$  étant continues,  $F_1$  et  $F_2$  sont continues.

Donc  $T(f)$  continue et  $T$  linéaire, c'est un endomorphisme de  $E$ .

2. On a

$$|T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 \min(x, \varphi(t)) dt}_{=A(x)}$$

donc

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|A\|_\infty$$

donc  $T$  est continue et  $\|T\| \leq \|A\|_\infty$ . De plus pour  $f = 1$ , on a  $\|T\| = \|A\|_\infty$ .

3. On a

$$A(x) = \int_0^1 \min(x, \varphi(t)) dt = \begin{cases} x & \text{si } x \leq \varphi(0) \\ \int_0^1 \varphi(t) dt & \text{si } x \geq \varphi(1) \end{cases}$$

Dans tous les cas,

$$\|A\|_\infty \leq \int_0^1 \varphi(t) dt$$



donc

$$\|A\|_\infty = \int_0^1 \varphi(t) dt$$

**Solution 6.35.**

1.  $\varphi$  est une forme linéaire. et on a

$$|\varphi(P)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{a_k}{2^k} \right| \leq 2\|P\|_\infty$$

donc  $\varphi$  est continue et  $\|\varphi\| \leq 2$ . Pour  $p \neq 0$ ,  $|\varphi(P)| < 2\|P\|_\infty$  : pour avoir égalité, il faudrait pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = \text{constante} \neq 0$  ce qui n'est pas possible. Pour  $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$ , on a  $\|P_n\|_\infty = 1$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi(P_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$  donc  $\|\varphi\| = 2$ . De plus,  $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$  est fermé.

2. Soit  $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$ . On a  $\varphi(P) = 0$  d'où  $a_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$  (et il existe  $N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, a_n = 0$ ). On a donc

$$P(X) - 1 = (a_0 - 1) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k X^k$$

et si  $\|P - 1\|_\infty \leq \frac{1}{2}$ , on a

$$\begin{cases} |a_0 - 1| \leq \frac{1}{2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$|a_0| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}$$

Et  $\frac{1}{2} \leq 1 - |a_0| \leq |1 - a_0| \leq \frac{1}{2}$ . Donc  $|a_0| = \frac{1}{2}$  et  $|1 - a_0| = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} a_0 = \frac{1}{2} e^{i\theta} &\Rightarrow \left| 1 - \frac{1}{2} e^{i\theta} \right|^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \left( 1 - \frac{1}{2} \cos(\theta) \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \sin(\theta) \right)^2 = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow 1 - \cos(\theta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow \cos(\theta) = 1 \end{aligned}$$

et donc  $a_0 = \frac{1}{2}$ .

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$$

Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $|a_k| = \frac{1}{2}$ , impossible car  $P \in \mathbb{C}[X]$ , ainsi  $\|P - 1\|_\infty > \frac{1}{2}$ .

3. On définit, pour  $n \geq 1$ ,  $P_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (-\frac{1}{2} + \varepsilon_n) X^k$  avec  $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$  tel que  $P_n \in \ker(\varphi)$ .

On a

$$\begin{aligned} P_n \in \ker(\varphi) &\Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) \frac{1}{2^k} = 0 \\ &\Rightarrow \varepsilon_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

et donc  $\varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  (et  $\varepsilon_n < 0$ ). On a donc  $\|P_n - 1\|_\infty = \frac{1}{2} - \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$ .

Donc  $d(1, \ker(\varphi)) = \frac{1}{2}$  et cette distance n'est pas atteinte.

**Solution 6.36.** Prouvons d'abord l'existence. Soit  $M \in \mathbb{R}^n$ , on définit  $r(M) = \sup\{\|M - A\| \mid A \in K\}$  et  $\varphi: A \mapsto \|M - A\|$  est continue sur  $K$  compact donc le sup est en fait un max. On a notamment  $r(M) = \{R > 0 \mid K \subset B(M, R)\}$ . Soit

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto r(M) \end{aligned}$$

Soit  $(M, M') \in (\mathbb{R}^n)^2$ . Pour tout  $A \in K$ , on a

$$\|M - A\| \leq \|M - M'\| + \|M' - A\| \leq \|M - M'\| + r(M')$$

En particulier, on a

$$r(M) \leq \|M - M'\| + r(M')$$

et en échangeant  $M$  et  $M'$ , on a  $|r(M) - r(M')| \leq \|M - M'\|$ . Donc  $r$  est 1-lipschitzienne donc continue. Soit  $A_0 \in K$ ,  $R(M) \geq \|M - A_0\| \geq \|M\| - \|A_0\| \xrightarrow[\|M\| \rightarrow +\infty]{} +\infty$ . Donc il existe  $M_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $r(M_0) = \min_{M \in \mathbb{R}^n} r(M) = r_0$ , d'où l'existence d'une boule fermée de rayon minimal.

Pour l'unicité, soit  $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$  tel que  $r(M_1) = r(M_2) = r_0$ . On suppose que  $\|M_1 - M_2\| = \varepsilon > 0$ . Soit  $M_3$  le milieu de  $[M_1 M_2]$ . On a  $K \subset B_{M_1, r_0} \cap B_{M_2, r_0}$ . On prend  $r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = r_0^2$  d'où

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < r_0$$

Soit  $M \in B(M_1, r_0) \cap B(M_2, r_0)$ , on a

$$\begin{aligned}
\|M - M_3\|^2 &= \frac{1}{4} \left( \|M - M_1 + M - M_2\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \left( 2\|M - M_1\|^2 + 2\|M - M_2\|^2 - \underbrace{\|M_1 - M_2\|^2}_{=\varepsilon^2} \right) \\
&\leq \frac{1}{4} (2r_0^2 + 2r_0^2 - \varepsilon^2) \\
&\leq r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} = r^2
\end{aligned}$$

Donc  $B_1 \cap B_2 \subset \overline{B(M_3, r)}$  d'où  $K \subset \overline{B(M_3, r)}$ , ce qui est absurde car  $r < r_0$ . Donc  $M_1 = M_2$ .

**Solution 6.37.**  $\varphi$  est évidemment définie et linéaire. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)| &= \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right| \\
&\leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right| \\
&\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f| \\
&\leq \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est continue et  $\|\varphi\| \leq 1$ . Notons que si l'on a  $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$ , alors on a égalité partout au-dessus et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $|f(t)| = \|f\|_\infty$  et comme  $\left| \int f \right| = \int |f|$  implique que  $f$  est de signe constant sur l'intervalle d'intégration, si l'on a  $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$ , alors  $f$  est de signe constant sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et sur  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Or  $|\int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f| = |\int_0^{\frac{1}{2}} f| + |\int_{\frac{1}{2}}^1 f|$ ,  $f$  est de signe opposé sur les deux segments. Or  $f$  est continue en  $\frac{1}{2}$ , donc  $f$  est nulle. Donc pour  $f$  non nulle, on a  $|\varphi(f)| < \|f\|_\infty$  donc la norme triple n'est pas atteinte. Enfin, pour montrer que  $\|\varphi\| = 1$ , on utilise pour  $n \geq 1$ ,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ (\frac{1}{2} - t)n & \text{si } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

On a bien  $\|f_n\|_\infty = 1$ .

**Solution 6.38.**

1. Non car on applique l'application trace.
2. On a le résultat par récurrence.
3. On a

$$(n+1)\|v^n\| = \|u \circ v^n \circ v - v^n \circ v \circ r\| \leq 2\|u\|\|v\|\|v^n\|$$

Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v^n = 0$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$n+1 \leq 2\|u\|\|v\|$$

ce qui est impossible. Donc il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $v^n = 0$ . Alors  $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1} = 0$  donc  $v^{n-1} = 0$  et de proche en proche  $v = 0$  : contradiction.

4. Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$$(D \circ T - T \circ D)(P) = (XP)' - XP' = P$$

donc  $D \circ T - T \circ D = id$ . D'après ce qui précède,  $T$  et  $D$  ne peuvent pas être continus simultanément.

### Solution 6.39.

1.  $\sum_{k \geq 0} (A - I_n)^k$  converge absolument car  $\|A - I_n\|^k \leq \alpha^k$  et  $\alpha < 1$ .

Si  $AX = 0$ ,  $\|(A - I_n)X\| = \|X\| \leq \alpha\|X\|$  donc  $\|X\| = 0$  et  $X = 0$  donc  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ , idem pour  $B$ . On a alors

$$A \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k = ((A - I_n) + I_n) \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k = I_n$$

par télescopage. Donc

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k$$

et

$$\|A^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$$

et de même pour  $B$ . On écrit alors

$$ABA^{-1}B^{-1} - I_n = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - I_n)(B - I_n) - (B - I_n)(A - I_n))A^{-1}B^{-1}$$

d'où

$$\|ABA^{-1}B^{-1} - I_n\| \leq \frac{2\|A - I_n\|\|B - I_n\|}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

2. On prend  $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ .

3. Pour tout  $M \in G$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(M, r) \cap G = \{M\}$ . Montrons que  $G$  est discret si et seulement si  $I_n$  est isolé. En effet, si  $I_n$  est isolé, il existe  $r_0 > 0$  tel que  $B(I_n, r_0) \cap G = \{I_n\}$ . Soit  $M \in G$ , alors pour tout  $M' \in G$ ,  $M - M' = M(I_n - M^{-1}M')$  d'où  $I_n - M^{-1}M' = M^{-1}(M - M')$ . Si

$$\|M - M'\| < \frac{r_0}{\|M^{-1}\|}$$

on a  $\|I_n - M^{-1}M'\| < r_0$  et donc  $M' = M$  et  $M$  est isolé. Ainsi  $G$  est discret. La réciproque est évidente.

$C$  est dans le commutant si et seulement si  $C$  commute avec  $A$  et  $B$  si et seulement si

$$\begin{cases} ACA^{-1}C^{-1} = I_n \\ BCB^{-1}C^{-1} = I_n \end{cases}$$

Notons maintenant que

$$\overline{B_{\|\cdot\|}(I_n, \frac{1}{4})} \cap G = \mathcal{A}$$

est fini. En effet, si cet ensemble était infini, il existerait  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite injective dans  $\mathcal{A}$ . La suite étant bornée, on peut extraire  $(M_{\sigma(p)})_{p \in \mathbb{N}}$  qui converge et alors pour tout  $p \in I_n$

$$\underbrace{M_{\sigma(p)} M_{\sigma(p+1)}^{-1}}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} I_n} \in G \setminus \{I_n\}$$

ce qui est impossible car  $I_n$  est isolé.

Comme  $A \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$ , il existe  $C \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$  telle que  $\|C - I_n\|$  soit minimale et  $\|C - I_n\| \leq \frac{1}{4}$ . D'après la question 2 on a

$$\|ACA^{-1}C^{-1} - I_n\| < \|C - I_n\|$$

et même chose pour  $B$ . Donc nécessairement,  $ACA^{-1}C^{-1} = I_n$  et de même pour  $B$ . Ainsi,  $C$  commute avec toutes les matrices de  $G$ .

**Solution 6.40.**

1.  $\mathbb{C}_{n-1}[A]$  est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc c'est un fermé. Par division euclidienne par  $\chi_A$ , d'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$ . Comme

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$$

$$\exp(A) \in \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A].$$

2. Si  $A$  est diagonalisable, il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que

$$A = P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$$

et donc

$$\exp(A) = P^{-1} \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P$$

et  $\exp(A)$  est diagonalisable.

Si  $\exp(A)$  est diagonalisable, on utilise la décomposition de Dunford :  $A = D + N$  avec  $DN = ND$ ,  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente. On a donc

$$\exp(A) = \exp(D) \underbrace{\exp(N)}_{=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}} = \exp(D) + \exp(D) \left( \sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} \right) = \exp(D) + N'$$

avec  $N'$  nilpotente et  $\exp(D)$  est diagonalisable d'après le sens direct.  $N'$  commute avec  $\exp(D)$ . Par unicité de la décomposition de Dunford,  $\exp(A)$  étant diagonalisable, on a  $N' = 0$ . Comme  $\exp(D)$  est inversible,

$$N \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}}_{=I_n + N''} = 0$$

avec  $N''$  nilpotente.  $I_n + N''$  est donc inversible et ainsi  $N = 0$  et  $A$  est diagonalisable.

3. D'après ce qui précède,  $\exp(A) = I_n$  est diagonalisable et

$$\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{e^\lambda \mid \lambda \in \text{Sp}_\lambda(\mathbb{C})\} = \{I_n\}$$

Donc  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ .

Réciproquement, si  $A$  est diagonalisable avec  $\text{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$ , en diagonalisant, on a bien  $\exp(A) = I_n$ .

4. Sur  $\mathbb{R}$ , si  $A$  est diagonalisable,  $\exp(A)$  l'est aussi. Cependant, la réciproque n'est pas vrai, par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{pmatrix} \text{ semblable à } \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

On a  $\chi_M = X^2 + 4\pi^2$ ,  $\exp(A) = I_2$  et  $A$  n'est pas diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

**Solution 6.41.**

1. On a  $\ln(1+x) = P(x) + x^2O(1)$  et  $\exp(y) = Q(y) + y^nO(1)$  d'où

$$\exp(\ln(1+x)) = 1+x = Q(\ln(1+x)) + \underbrace{\ln(1+x)^nO(1)}_{O(x^n)}$$

alors  $1+x = Q(P(x) + O(x^n)) + O(x^n) = Q(P(x)) + O(x^n)$ . Soit  $B(X) = Q(P(X)) + O(x^n) \in \mathbb{R}[X]$ , on a  $\frac{B(x)}{x^n} = O(1)$  donc  $X^n \mid B$  et

$$Q(P(X)) = 1 + X + B(X) = 1 + X + X^n A(X)$$

2. On a  $N^n = 0$  donc  $P(N)$  est aussi nilpotente et on a

$$\exp(P(N)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(N)^k}{k!} = Q(P(N)) = I_n + N + 0$$

3. Soit  $M \in GL_n(\mathbb{C})$  et sa décomposition de Dunford :  $M = D + N$  avec  $D$  diagonalisable,  $N$  nilpotente et  $DN = ND$ . On a  $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(M) \subset \mathbb{C}^*$  et on écrit

$$M = D \underbrace{(I_n + D^{-1}N)}_{\substack{\text{nilpotente} \\ = \exp(P(D^{-1}N))}}$$

si  $D = P_1 \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P_1^{-1}$ , pour tout  $k \in \{1, \dots, n\}$  il existe  $\mu_k \in \mathbb{C}$  tel que  $\lambda_k = \exp(\mu_k)$  (car  $\exp$  est surjectif sur  $\mathbb{C}^*$ ). Alors

$$D = \exp(P_1 \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}) \in \mathbb{C}[D]$$

puis

$$\begin{aligned} M &= \exp\left(P_1 \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}\right) \exp\left(P(D^{-1}N)\right) \\ &= \exp\left(P_1 \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1} + P(D^{-1}N)\right) \end{aligned}$$

car les matrices commutent.

Donc  $\exp$  est surjective.

**Solution 6.42.** On a  $A \subset \overline{A}$ ,  $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{2n} \in \overline{A}$  et  $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \in \overline{A}$ .

Si  $n \geq 2$  et  $p \geq 2$ ,  $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \leq 1$ . Donc si  $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \geq 1$ , alors  $n = 1$  ou  $p = 1$ .

Si  $x > e$ , à partir d'un certain rang, on a  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \frac{e+x}{2}$  et si  $x \notin A$ ,  $x \notin \overline{A}$ . Si  $1 \leq x < e$ , à partir d'un certain rang, on a  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > x$  donc si  $x \notin A$ ,  $x \notin \overline{A}$ .

Soit  $x < 1$ , si  $n \geq 2$  et  $p \geq 3$  ou  $n \geq 3$  et  $p \geq 2$ , on a  $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{5}{6}$  et

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} &= \exp\left((n+p) \ln\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\right) \\ &\leq \exp\left((n+p) \ln\left(\frac{5}{6}\right)\right) \\ &\leq \max\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}, \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^p}_{\xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0}\right) \end{aligned}$$

Il existe  $N_0$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{x}{2}$ . Si  $n$  ou  $p$  est plus grand que  $N_0$ , on a donc

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \leq \frac{x}{2}$$

Donc il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de  $A$  plus grand que  $\frac{x}{2}$ . Ainsi,

$$\overline{A} = A \cup \{e, 0\}$$

**Solution 6.43.** On note

$$\mathbb{V} = \bigcup_{m \geq 1} \mathbb{U}_m = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{m}} \mid m \geq 1, k \in \{0, \dots, m-1\} \right\}$$

Soit  $M \in H$ .  $X^m - 1$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$  donc  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  avec ses valeurs propres dans  $\mathbb{V}$ . Réciproquement, si  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{V}$ . Alors pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ ,  $\exists m_\lambda \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda \in \mathbb{U}_{m_\lambda}$  et soit  $m = \text{ppcm}_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)}(m_\lambda)$ . Alors  $M^m = I_n$ .

Soit  $A \in \overline{H}$ , il existe  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$  telle que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = A$ . Comme le polynôme caractéristique est une fonction continue des coefficients, pour tout  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ , on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \chi_{M_p}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = 0$$



Or

$$|\chi_{M_p}(\lambda)| = |\lambda - \lambda_{1,p}| \dots |\lambda - \lambda_{n,p}| \geq d(\lambda, \mathbb{U})^n$$

avec  $\lambda_{i,p} \in \mathbb{V}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Donc  $d(\lambda, \mathbb{U}) = 0$  et comme  $\mathbb{U}$  est fermé,  $\lambda \in \mathbb{U}$ .

Réciproquement, soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  tel que  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$ . Soit

$$\{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_r}\}$$

les valeurs propres distinctes de  $A$  de multiplicités  $m_1, \dots, m_r$ . Il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que

$$A = Q \text{diag}(\underbrace{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_1}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{i\theta_r}, \dots, e^{i\theta_r}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1}$$

On a

$$\theta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{k} \lfloor k \frac{\theta}{2\pi} \rfloor$$

donc on peut former, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A = Q \text{diag}(\underbrace{e^{i\theta_{1,p}}, \dots, e^{i\theta_{1,p}}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{i\theta_{r,p}}, \dots, e^{i\theta_{r,p}}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1}$$

avec  $\theta_{i,p} = \frac{2\pi}{p} \lfloor p \frac{\theta_j}{2\pi} \rfloor + \frac{2j\pi}{p}$ . Pour  $p$  suffisamment grand, les  $(\theta_{j,p})$  sont deux à deux distincts donc  $A_p$  est diagonalisable et  $A_p \in H$ , et donc  $A \in \overline{H}$ .

#### Solution 6.44.

1. On a l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. On a cependant  $N_a(X^k) = |a_k|$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $X^k \neq 0$ . Donc  $N_a$  est une norme implique que  $a$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{N}$ . Réciproquement, si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \neq 0$ , si  $P \neq 0$ , il existe  $k \in \mathbb{N}$  avec  $p_k$  et donc  $N_a(P) > 0$ . Donc  $N_a$  est une norme si et seulement si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k \neq 0$ .
2. Si  $N_a$  et  $N_b$  sont équivalentes, alors il existe  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\beta N_b(X^k) \leq N_a(X^k) \leq \alpha N_b(X^k)$$

d'où

$$\beta |b_k| \leq N_a(X^k) \leq \alpha |b_k|$$

Donc  $a = O(b)$  et  $b = O(a)$ .

Réciproquement, si  $a = O(b)$  et  $b = O(a)$ , alors on a l'inégalité précédente sur les  $a_k$  et  $b_k$ , d'où

$$\beta \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k a_k| \leq \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k|$$

et donc pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\beta N_b(P) \leq N_a(P) \leq \alpha N_b(P)$$

et  $N_a$  et  $N_b$  sont équivalentes.

3.  $\Delta$  est continue pour  $N_a$  si et seulement s'il existe  $c \geq 0$  tel que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $N_a(\Delta P) \leq c N_a(P)$ . Si  $\Delta$  est continue alors il existe  $c \geq 0$  tel que  $N_a(kX^k) \leq c N_a(X^k)$  alors pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$|ka_{k-1}| \leq c|a_k| \quad (6.1)$$

Réciproquement, si on a (6.1), pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$   $N_a(\Delta P) \leq c N_a(P)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k = k!$ , (6.1) est vérifiée pour  $c = 1$ . Si  $b_k = 1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , (6.1) n'est pas vérifiée donc  $\Delta$  n'est pas continue pour  $N_b$ .

#### Solution 6.45.

1. On a  $d(x, A) = 0$  si et seulement si  $\inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$  si et seulement si  $\varepsilon > 0, \exists a \in A: \|x - a\| < \varepsilon$  si et seulement si  $x \in \overline{A}$ .

On a  $A \subset \overline{A}$  donc  $d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a' \in \overline{A}$  tel que  $\|x - a'\| < d(x, \overline{A}) + \varepsilon$  et il existe  $a \in A$  tel que  $\|a - a'\| < \varepsilon$ . Ainsi,

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq d(x, \overline{A}) + 2\varepsilon$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$  et donc on a égalité.

2.  $A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B}$  donc  $d(A, B) \geq d(\overline{A}, \overline{B})$ . De plus, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $(a', b') \in \overline{A} \times \overline{B}$  tel que  $\|a' - b'\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + \varepsilon$  et il existe  $(a, b) \in A \times B$  tel que  $\|a - a'\| < \varepsilon$  et  $\|b - b'\| < \varepsilon$ . En utilisant l'inégalité triangulaire, on a donc

$$d(A, B) \leq \|a - b\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + 3\varepsilon$$

Ceci valant pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a bien l'égalité.

**Solution 6.46.**  $\varphi_{x_0}$  est une forme linéaire. Elle est continue si et seulement  $C > 0$  tel que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,

$$|P(x_0)| \leq C \|P\|_\infty$$

Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , on a

$$|P(x_0)| \leq \|P\|_\infty \sum_{k=0}^n |x_0|^k$$

Si  $|x_0| < 1$ , on a

$$|P(x_0)| \leq \|P\|_\infty \frac{1}{1 - |x_0|}$$

donc  $\varphi_{x_0}$  est continue et si  $x_0 = |x_0|e^{i\theta_0}$ , soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P_n = \sum_{k=0}^n e^{-ik\theta_0} X^k$ , on a  $\|P_n\|_\infty = 1$  et

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - |x_0|}$$

donc  $\|\varphi_{x_0}\| = \frac{1}{1 - |x_0|}$ .

Si  $|x_0| \geq 1$ ,

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc  $\varphi_{x_0}$  n'est pas continue.

**Solution 6.47.** Pour le sens indirect, soit  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$  donc  $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$ . Par continuité du déterminant, on a  $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \det(-\lambda I_n)$ . Donc  $\lambda = 0$  et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$  donc  $M$  est nilpotente.

Pour le sens direct, soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  canoniquement associée à  $M$ . On trigonalise  $u$  sur une base  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  avec  $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \dots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$ . Posons pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$ . On pose  $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$  et  $M_p = \text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u)$ , semblable à  $M$  et  $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  car  $\|M_p\| \leq \frac{1}{p} \|M_1\|$ .

**Solution 6.48.** On pose  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  canoniquement associée à  $M$ .

Pour le sens indirect, si  $M$  n'est pas diagonalisable, il existe une base  $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  de  $\mathbb{C}^n$  telle que

$$\text{mat}_B(u) = D + N$$

où  $D$  est diagonale et  $N$  est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases  $\mathcal{B}_p$  définies à l'exercice précédent, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} D$$

Si  $D \in S_M$ , alors  $M$  est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc  $S_M$  n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si  $M$  est diagonalisable, soit  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$  avec  $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M'$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . On a  $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$  car  $M$  et  $M_p$  sont semblables. Par continuité du déterminant, on a  $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$ , donc  $\chi_{M'} = \chi_M$ . De plus,  $A \mapsto \Pi_M(A)$  (polynôme minimal) est continue sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a  $\Pi_M(M_p) = 0$  donc  $\Pi_M(M') = 0$ .  $M'$  est donc annulée par  $\Pi_M$ , donc  $M'$  est diagonalisable et comme  $\chi_M = \chi_{M'}$ ,  $M$  et  $M'$  ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc  $M' \in S_M$ .

**Remarque 6.9.** Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$

On a  $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$  et  $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$  donc  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p}$ .

**Solution 6.49.** On note  $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leq h\}$ .

1.  $\omega_\varphi$  est bien défini car  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2\|\varphi\|_\infty$ . Si  $0 < h \leq h'$ , alors  $A_h \subset A_{h'}$  donc  $\sup(A_h) \leq \sup(A_{h'})$  donc  $\omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h')$ .
2. Soit  $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , soit  $(x, y) \in I^2$  tel que  $|x - y| \leq h + h'$  (où on peut supposer que  $x \leq y$ ).
  - Si  $y \in [x, x + h]$ , alors  $|x - y| \leq h$  donc  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
  - Si  $y \in [x + h, x + h + h']$ ,  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x + h)| + |\varphi(x + h) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$  car  $|x - (x + h)| \leq h$  et  $|x + h - y| \leq h'$ .
 Donc  $\omega_\varphi(h + h') \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$ .
3. Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , on a  $\lambda h \leq ([\lambda] + 1)h$  et par croissance et ce qui précède, on a

$$\omega_\varphi(\lambda h) \leq ([\lambda] + 1)\omega_\varphi(h) \leq (\lambda + 1)\omega_\varphi(h)$$

4. Soit  $\varepsilon > 0$ .  $\varphi$  étant uniformément continue, il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in I^2$ , si  $|x - y| < \alpha$  on a  $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$  et on a pour  $h \leq \alpha$ ,  $\omega_\varphi(h) \leq \varepsilon$  d'où  $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_\varphi(h) = 0$ .

Soit alors  $h_0 > 0$  fixé et  $h > 0$ ,

— si  $h_0 \leq h$ , on a  $0 \leq \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leq \omega_\varphi(h - h_0)$ .

— si  $h \leq h_0$ , on a  $0 \leq \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h_0 - h)$ .

Dans tous les cas, on a  $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leq \omega_\varphi(|h_0 - h|)$ . Donc on a bien  $\lim_{h \rightarrow h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$ . Donc  $\omega_\varphi$  est continue (et même uniformément).

**Solution 6.50.**  $G$  est borné car si  $M \in G$ ,  $\|M\| \leq \|I_n\| + \mu = 1 + \mu$ . Montrons donc que si  $G_0$  est un sous-groupe borné de  $GL_n(\mathbb{C})$ , alors les valeurs propres de ses éléments sont de module 1, et ceux-ci sont diagonalisables.

En effet, soit  $M \in G$  et  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ , soit  $X$  un vecteur propre associé. On a  $\|MX\| = |\lambda| \|X\| \leq \|M\| \|X\|$  donc  $|\lambda| \leq \|M\| \leq \sup_{M \in G} \|M\|$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $M^k \in G$  et  $\lambda^k \in \text{Sp}(M^k)$ , donc si  $|\lambda| > 1$ , on a  $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda|^k = +\infty$ , et si  $|\lambda|^\lambda < 1$ , on a  $\lim_{k \rightarrow -\infty} |\lambda|^k = +\infty$ . Comme  $G$  est borné,  $|\lambda| = 1$ .

On utilise ensuite la décomposition de Dunford pour  $M$  :  $M = D + N$  avec  $DN = ND$ ,  $D$  diagonalisable et  $N$  nilpotente. Grâce au binôme de Newton, pour  $k \geq r$   $p^* r$  est l'indice de nilpotence de  $N$ , on a

$$M^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} N^p D^{k-p} = \underbrace{D^k}_{\text{borné}} + kND + \sum_{p=2}^{r-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\substack{\sim \frac{k^p}{p!} \\ k \rightarrow +\infty}} N^p \underbrace{D^{k-p}}_{\text{borné car } \text{Sp}(D) \subset \mathbb{U}}$$

Donc

$$M^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{k^{r-1}}{(r-1)!} \underbrace{N^{r-1}}_{\neq 0} D^{k-r+1}}_{\text{non borné si } N \neq 0}$$

Donc  $N = 0$  et  $M = D$  est diagonalisable.

Revenons donc à l'exercice. Soit  $M \in G$  et  $\lambda = e^{i\theta} \in \text{Sp}(M)$  avec  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ . Si  $X$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ , on a

$$(\lambda - 1)\|X\| = \|(M - I_n)X\| \leq \mu \|X\|$$

donc  $|\lambda - 1| = 2 \underbrace{\left| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|}_{\geq 0} \leq \mu$ . Donc  $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$  où  $\theta_0 = \arcsin(\frac{\mu}{2}) \in [0, \pi[$ .

Si  $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ ,  $e^{ik\pi} \in \text{Sp}(M^k)$ ,  $|e^{ik\theta} - 1| \leq \mu$ . Alors  $\{k\theta + 2l\pi \mid (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$  non monogène et donc dense, et alors  $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$  est dense dans  $\mathbb{U}$ , donc il existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $|e^{ik_0\theta} + 1| = |2 - (1 - e^{ik_0\theta_0})| < 2 - \mu$ , ce qui est impossible car  $|2 - (1 - e^{ik_0\theta_0})| \geq 2 - |1 - e^{ik_0\theta_0}| \geq 2 - \mu$ .

Ainsi,  $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$  et il existe  $m \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\lambda = e^{i\theta} \in \mathbb{U}_m$ . Ce n'est pas forcément le même  $m$  pour tout les  $M$  dans  $G$ . Notons alors pour

$$\lambda \in \bigcup_{M \in G} \text{Sp}(M) = \mathcal{A}$$

$\omega(\lambda)$  l'ordre (multiplicatif) de  $\lambda$  dans  $\mathbb{U}$ .

Si  $\omega(\lambda) = m$ , on a  $\text{gr}(\lambda) = \mathbb{U}_m$  donc il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $\lambda^k = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathcal{A}$  (car  $\lambda^k \in \text{Sp}(M^k)$ ). Supposons que  $\{\omega(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{A}\}$  non borné. Alors il existe  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$  tel que  $m_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$  et  $e^{\frac{2i\pi}{m_k}} \in \mathcal{A}$ . Alors

$$\underbrace{e^{2i \lfloor \frac{m_k}{2} \rfloor \frac{\pi}{m_k}}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e^{i\pi} = -1} \in \mathcal{A}$$

ce qui est impossible car  $|\lambda + 1| \geq 2 - \mu > 0$ . On peut donc noter

$$m = \bigvee_{\lambda \in \mathcal{A}} \omega(\lambda)$$

et pour tout  $M \in G$ , pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(M)$ ,  $\lambda^m = 1$ . Or  $M$  est diagonalisable, donc  $M^m = I_n$ .

**Solution 6.51.** Si  $M \in \mathcal{G}_q$ ,  $P(X) = X^q - 1$  annule  $M$  donc  $M$  est diagonalisable à valeurs propres dans  $\mathbb{U}_q$ . Réciproquement, si  $M$  est diagonalisable et  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_q$  alors il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  avec

$$M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}$$

et donc

$$M^q = P \text{diag}(\lambda_1^q, \dots, \lambda_n^q) P^{-1} = I_n$$

Si  $M \in \mathcal{G}_q$  n'est pas une homothétie, il existe  $\lambda \neq \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)^2$  et  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1}$$

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} & & \\ & \mu & & \\ & & \ddots & \\ & & & \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} M$$

Or

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est semblable } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

car  $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)$  donc est diagonalisable. Donc  $M_k \sim M$  et  $M_k \in \mathcal{G}_q$  et  $M$  n'est pas isolé.

Montrons le petit lemme suivante : soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{C}^n$  et  $\|\|\cdot\|\|$  la norme subordonnée, soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et  $\varepsilon > 0$ . Si  $\|\|M - \lambda I_n\|\| \leq \varepsilon$  alors  $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \overline{B(\lambda, \varepsilon)}$ . En effet, soit  $X$  un vecteur propre de  $M$  associé à  $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ . On a

$$\|(M - \lambda I_n)X\| = |\mu - \lambda| \|X\| \leq \|\|M - \lambda I_n\|\| \|X\| \leq \varepsilon \|X\|$$

donc  $|\mu - \lambda| \leq \varepsilon$ .

Pour  $\varepsilon = \sin(\frac{\pi}{q}) > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{U}_q$  ; si  $M \in B_{\|\cdot\|}(\lambda I_n, \varepsilon) \cap \mathcal{G}_q$  alors pour tout  $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$ , on a  $|\lambda - \mu| \leq \sin(\frac{\pi}{q})$  donc  $\lambda = \mu$ . Donc si  $M = \lambda I_n$  alors  $M$  est isolé (avec  $\lambda \in \mathbb{U}_q$ ). Donc les matrices scalaires sont isolées.

## 7 Fonction d'une variable réelle

**Solution 7.1.** Tout d'abord,  $\deg(L_n) = n$  et son coefficient dominant est  $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$ .

1. Soit  $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ .  $-1$  et  $1$  sont racines d'ordre  $n$  de  $P_n$  donc pour tout  $k \in \{0, \dots, n-1\}$   $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(1) = 0$ . Ainsi, on a par intégrations par parties successives :

$$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^1 f^{(n)}(t) P_n(t) dt$$

Notamment, si  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ ,  $P^{(n)} = 0$  et  $(P|L_n) = 0$ . En particulier, pour tout  $m < n$ ,  $\deg(L_m) \leq n-1$  et  $(L_m|L_n) = 0$  donc  $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de  $L_n$  grâce aux intégrales de Wallis :

$$\begin{aligned} \|L_n\|_2^2 &= (L_n|L_n) \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 L_n^{(n)}(t^2 - 1)^n dt \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt \end{aligned}$$

On pose  $t = \cos(\theta)$  d'où  $dt = -\sin(\theta)d\theta$ , d'où

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt &= \int_0^\pi \sin(\theta)^{2n+1} d\theta \\ &= 2I_{2n+1} \text{ [Wallis]} \end{aligned}$$

On a classiquement  $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ . D'où

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \times \underbrace{I_1}_{=1} = 1 \\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

d'où

$$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2 \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

2. On utilise la formule de Leibniz en écrivant  $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$ .
3. On montre le résultat par récurrence sur  $k \in \{0, \dots, n\}$  en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que  $L_n = P_n^{(n)}$  s'annule au moins  $n$  fois sur  $] -1, 1[$ . Or  $\deg(L_n) = n$ , donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.



4.  $(L_0, \dots, L_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  (étagée en degré). Donc il existe  $(\alpha_{n,0}, \dots, \alpha_{n,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$  tel que  $XL_{n-1} = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} L_k$ . Si  $k \leq n-3$ , on a

$$(XL_{n-1}L_k) = \alpha_{n,k} \|L_k\|_2^2 = (L_{n-1}XL_k) = 0$$

car  $\deg(XL_k) = k+1 \leq n-2$ . Donc

$$XL_{n-1} = \alpha_{n,n-2}L_{n-2} + \alpha_{n,n-1}L_{n-1} + \alpha_{n,n}L_n$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(XL_{n-1}|L_{n-1}) = \int_{-1}^1 tL_{n-1}(t)^2 dt$$

Or  $P_n$  est paire, donc  $L_n$  est de la parité de  $n$  et donc  $L_n^2$  est paire puis  $XL_n^2$  est impaire.

Donc  $\alpha_{n,n-1} = 0$ .

$$\begin{aligned} (XL_{n-1}|L_{n-2}) &= \alpha_{n,n-2} \underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{= \frac{2}{2n-3}} \\ &= (-1)^n \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) \underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1} \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) dt &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-1} dt}_{2I_{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \times 2 \times \frac{2^{2n-2}(n-1)!}{(2n-1)!} \\ &= \frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

donc  $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}} = \frac{n-1}{n}$ . D'où le résultat.

**Solution 7.2.** On forme

$$\begin{aligned} g: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \underbrace{\Delta f(x_0, \dots, x_{n-1}, x)}_{\varphi(x)} - \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) A}_{P(x)} \end{aligned}$$

On a  $g(x_n) = 0$ . On suppose les  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  distincts, et on pose

$$A = \frac{V(x_0, \dots, x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)}$$

$g$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  et pour tout  $i \in \{0, \dots, n\}$ , on a  $g(x_i) = 0$ . Donc il existe  $\xi \in ]a, b[$  tel que  $g^{(n)}(\xi) = 0$  (théorème de Rolle appliqué  $n$  fois.  $\deg(P) = n$  et son coefficient dominant est  $A$  donc  $P^{(n)}(\xi) = An! = \varphi^{(n)}(\xi)$ ).

On développe maintenant  $\varphi(x)$  par rapport à la dernière colonne :

$$\varphi(x) = f(x) \times V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + Q(X)$$

avec  $\deg(Q) \leq n-1$  et  $V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j)$  (déterminant de Vandermonde). On a donc

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (x_j - x_i)$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{A}{\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)} = \Delta f(x_0, \dots, x_n)$$

**Solution 7.3.** On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^0 -tf''(t)dt$$

et de même

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f''(t)dt$$

D'où

$$\begin{aligned} A(f) &= f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} tf''(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f''(t)dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Et c'est atteint pour  $f(t) = \frac{t^2}{4}$ .

**Solution 7.4.** Pour tout  $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x)$  donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) \quad (7.1)$$

donc  $f'$  est  $\mathcal{C}^1$  et donc  $f$  est  $\mathcal{C}^2$ . On fixe alors  $x$  et on dérive deux fois (7.1) en fonction de  $h$ . On a alors

$$f''(x+h) = f''(x-h)$$

pour tout  $(x, h) \in \mathbb{R}^2$  donc  $f''$  est constante et  $f$  est polynômiale de degré 2.

Réciproquement, si  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , on a bien la relation de l'énoncé.

**Solution 7.5.**

1. Soit  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{R} &\rightarrow ]a, +\infty[ \\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

est croissante. Donc il existe  $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tau_a(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ . On écrit alors

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \frac{x - a}{x} + \frac{f(a)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$$

2. S'il existe  $a < b \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tel que  $f(a) < f(b)$ , alors  $\tau_a(b) > 0$ . Comme  $\tau_a$  est croissante,  $l \geq \tau_a(b) > 0$ . Par contraposée, si  $l \geq 0$ ,  $f$  est décroissante.

3. Posons pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\varphi(x) = f(x) - lx$ . Pour  $x < y$ , on a

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - l \leq 0$$

Donc  $\varphi$  est décroissante et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \in \overline{\mathbb{R}}$  existe.

**Solution 7.6.**

1. On forme

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\frac{1}{p} + x} \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{k}{np}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\frac{1}{p} + x} = \ln(p+1) = l_p$$

2. On note  $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ .

Soit  $\varepsilon_0 > 0$ . Il existe  $\alpha_0 > 0$  tel que si  $0 < x < \alpha_0$ , alors  $|\varepsilon(x)| \leq \varepsilon_0$ , et il existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_0$ ,  $\frac{1}{n} \leq \alpha_0$ . Alors pour tout  $n \geq N_0$ , pour tout  $k \in \{0, \dots, np\}$ ,

$$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left| \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon_0}{p}$$

et

$$\left| \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right)}{k+n} \right| \leq \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leq \frac{\varepsilon_0}{p} \frac{np+1}{n+1} \leq \varepsilon_0$$

On a donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)}{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p+1) f'(0)$$

3. On peut penser à  $f: x \mapsto \sqrt{x}$  continue et  $f(0) = 0$ . De plus,

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

donc  $v_n$  diverge.

4. On écrit  $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + x^2 \varepsilon(x)$  avec  $\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} 0$ . Ainsi,

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right)}{(k+n)^2}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , pour tout  $k \in \{0, \dots, np\}$ ,  $|\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)| \leq \varepsilon$  et donc

$$\left| \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)}{(n+k)^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon\left(\frac{1}{n+k}\right)}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right)$$

puis

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2}$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(n+k)^2} &= \frac{1}{(np)^2} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \frac{k}{np}\right)^2} \\ &= \frac{1}{np} \times \frac{1}{np} \underbrace{\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\left(\frac{1}{p} + \frac{k}{np}\right)^2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\left(\frac{1}{p} + x\right)^2}}\end{aligned}$$

donc

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(0)p}{n(p+1)}$$

**Solution 7.7.** Supposons que  $f'$  ne tend pas vers 0 en  $+\infty$  : il existe  $\varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \geq A, |f'(x_A)| \geq \varepsilon_0 > 0$ . Par continuité uniforme, il existe  $\alpha_0 \geq 0, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ , si  $|x - y| \leq \alpha_0$  alors  $|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$ . Alors pour tout  $t \in [x_A - \alpha, x_A + \alpha]$ , on a

$$|f'(t)| \geq |f'(x_A)| - |f'(x_A) - f'(t)| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

et pour  $A = n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geq n, \forall t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f'(t)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $f'$  est de signe constant sur  $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$ . Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer qu'il existe une infinité de  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $f' > 0$  sur les  $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$ . Alors

$$f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = \int_{x_n - \alpha_0}^{x_n + \alpha_0} f'(t) dt \geq \varepsilon_0 \alpha_0 > 0$$

mais comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = 0$$

d'où la contradiction.

Si  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ , on applique ce qui précède à  $\Im(f)$  et  $\Re(f)$ .

Si  $f'$  n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

car  $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$  et

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2} \sin(x^2)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\frac{2x \cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en } +\infty}$$

**Solution 7.8.** Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $h \neq 0$ , on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x + \frac{h}{2}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x)$$

par continuité de  $g$ . Donc  $f$  est dérivable et  $f' = g$ . Par ailleurs, pour  $y = \frac{1}{2}$ , on a

$$f'(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2})$$

par récurrence  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ .

En outre, en fixant  $x$  et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à  $y$ , on a

$$f''(x+y) - f''(x-y) = 0$$

Donc  $f''$  est constante donc  $f$  est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec  $f' = g$ ).

**Solution 7.9.** On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} (f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t) dt$$

On note  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \int_a^b F''(t)(b-t) dt$$

Pour  $a = k$  et  $b = k + \frac{1}{2}$ , on a

$$F(k + \frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2} F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k + \frac{1}{2} - t) f'(t) dt = F(k) + \frac{1}{2} F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} u f'(k + \frac{1}{2} - u) du$$

et pour  $a = k+1, b = k + \frac{1}{2}$ ,

$$F(k + \frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2} F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k + \frac{1}{2} - t) f'(t) dt = F(k+1) - \frac{1}{2} F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} u f'(k + \frac{1}{2} + u) du$$

On a donc

$$\frac{1}{2} (f(k) - f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u (f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u)) du$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u)}_{\geq 0 \text{ car } u \geq 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du$$

et  $f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u) \leq f'(k + 1) - f'(k)$  d'où

$$S_n \leq \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} u du}_{=\frac{1}{8}} (f'(n) - f'(1))$$

**Solution 7.10.**

1. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{cases} \|A\| \leq \frac{h^2}{2} M_2 \\ \|B\| \leq \frac{h^2}{2} M_2 \end{cases}$$

On a  $B - A - f(x - h) + f(x + h) = 2hf'(x)$  d'où

$$\|f'(x)\| \leq \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h}$$

Donc  $f'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . On a ensuite un majorant qui dépend de  $h$  que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.

2. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|A_k\| \leq \frac{k^n}{n!} M_n$$

On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1 - f(x+1) \\ \vdots \\ A_k - f(x+k) \\ \vdots \\ A_n - f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

On a

$$\det(M) = \frac{(-1)^n}{1! \times 2! \times \dots \times (n-1)!} V(1, \dots, n)$$

où  $V$  est le déterminant de Vandermonde. Donc  $\det(M) \neq 0$ . On peut former les  $f^{(j)}(x)$  en fonction des  $(A_i - f(x+i))_{1 \leq i \leq n}$  : il existe  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - f(x+i))$ . Donc

$$\|f^{(j)}(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \left( \frac{n}{n!} M_n + M_0 \right)$$

Donc  $f^{(j)}$  est bornée pour tout  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ .

### Solution 7.11.

1.

$$l_{\sigma, \gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

2. On a

$$\begin{aligned} \left| l_{\sigma, \gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| - \underbrace{\| (a_{i+1} - a_i) \gamma'(a_i) \|}_{>0} \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) - (a_{i+1} - a_i) \gamma'(a_i)\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt \end{aligned}$$

3.  $\|\gamma'\|$  est continue donc

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i)$$

Donc  $\alpha_0$  existe.

$\gamma'$  est continue sur  $[a, b]$  donc uniformément continue sur  $[a, b]$ , et il existe  $\alpha_1 > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in [a, b]^2$ , on a

$$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow \|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Alors si  $\delta(\sigma) \leq \alpha_1$ , pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , pour tout  $t \in [a_i, a_{i+1}]$ , on a

$$|t - a_i| \leq (a_{i+1} - a_i) \leq \alpha_1$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i) - \gamma'(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$



et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, si  $\text{@}d(\sigma) \leq \min(\alpha_0, \alpha_1)$ , on a

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

4. On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix}$$

donc  $\|\gamma'(t)\| = R$  et  $l(\gamma) = 2\pi R$ .

### Solution 7.12.

1. Pour tout  $t \in I$ , on a

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{i\theta_2(t)}$$

donc

$$e^{i(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1$$

Ainsi, pour tout  $t \in I$ , il existe  $k(t) \in \mathbb{Z}$  telle que  $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$ . On a

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi}$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à  $k_0$  d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Si  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ,

$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Comme  $\sqrt{\cdot}$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , par composition,  $f$  est  $\mathcal{C}^k$ . On a alors

$$f(t) = e^{i\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = i\theta'(t)e^{i\theta(t)} = i\theta'(t)f(t)$$

Donc

$$\theta(t) = -\mathrm{i} \frac{f'(t)}{f(t)}$$

De plus, on a

$$\theta(t) = \theta(t_0) - \mathrm{i} \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

pour  $t_0 \in I$ .

3. On fixe  $t_0 \in I$ . Soit  $\theta_0$  un argument de  $\gamma(t_0)$ , on pose

$$\theta(t) = \theta_0 - \mathrm{i} \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

Comme  $\frac{f'}{f}$  est  $\mathcal{C}^{k-1}$ ,  $\theta$  est bien  $\mathcal{C}^k$ . On forme  $g(t) = e^{\mathrm{i}\theta(t)}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^k$ . On a

$$g'(t) = \mathrm{i}\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t)$$

donc  $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$ , donc  $\frac{g}{f}$  est constante sur  $I$  et  $g(t_0) = e^{\mathrm{i}\theta_0} = f(t_0)$  donc  $g = f$  sur  $I$ .

Ainsi, pour tout  $t \in I$ , on a  $|f(t)| = |e^{\mathrm{i}\theta(t)}| = 1$  et si  $\theta(t) = a(t) + \mathrm{i}b(t)$ , on a donc

$$e^{\mathrm{i}\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{\mathrm{i}a(t)}$$

donc  $b(t) = 0$  et  $\theta(t) \in \mathbb{R}$ .

## 8 Suites et séries de fonctions

## 9 Séries entières

## 10 Intégration

## 11 Espaces préhilbertiens

## 12 Espaces euclidiens

## 13 Calcul différentiel



## 14 Équation différentielles linéaires

## Table des figures

1	$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$ . . . . .	44
2	$e^x - x - 1 \geq -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ . . . . .	45
3	$x(1-x) \in ]0, \frac{1}{4}]$ pour $x \in ]0, 1[$ . . . . .	46
4	$x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur $\mathbb{R}_+$ . . . . .	47
5	$x \mapsto 2 \ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$ . . . . .	53
6	$\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . . . . .	61
7	$\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$ . . . . .	94