

*Solutions Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Algèbre Générale	2
2 Séries numériques et familles sommables	3
3 Probabilités sur un univers dénombrable	4
4 Calcul matriciel	5
5 Réduction des endomorphismes	6
6 Espaces vectoriels normés	7
7 Fonction d'une variable réelle	12
8 Suites et séries de fonctions	13
9 Séries entières	14
10 Intégration	15
11 Espaces préhilbertiens	16
12 Espaces euclidiens	17
13 Calcul différentiel	18
14 Équation différentielles linéaires	19

1 Algèbre Générale

2 Séries numériques et familles sommables

3 Probabilités sur un univers dénombrable

4 Calcul matriciel

5 Réduction des endomorphismes

Solution 5.1. Pour le sens indirect, soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$ donc $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$. Par continuité du déterminant, on a $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \det(-\lambda I_n)$. Donc

$\lambda = 0$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ donc M est nilpotente.

Pour le sens direct, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M . On trigonalise u sur une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \dots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$. Posons pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$. On pose $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$ et $M_p = \text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u)$, semblable à M et $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ car $\|M_p\| \leq \frac{1}{p} \|M_1\|$.

Solution 5.2. On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M .

Pour le sens indirect, si M n'est pas diagonalisable, il existe une base $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{C}^n telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = D + N$$

où D est diagonale et N est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases \mathcal{B}_p définies à l'exercice précédent, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} D$$

Si $D \in S_M$, alors M est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc S_M n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si M est diagonalisable, soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$ avec $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M'$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$ car M et M_p sont semblables. Par continuité du déterminant, on a $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$, donc $\chi_{M'} = \chi_M$. De plus, $A \mapsto \Pi_M(A)$ (polynôme minimal) est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Pi_M(M_p) = 0$ donc $\Pi_M(M') = 0$. M' est donc annihilée par Π_M , donc M' est diagonalisable et comme $\chi_M = \chi_{M'}$, M et M' ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc $M' \in S_M$.

Remarque 1. Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix}$$

On a $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p}$.

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. A $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x \cos(t) + y \sin(2t)\end{aligned}$$

est bornée, donc le sup sur \mathbb{R} existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au sup sur \mathbb{R} .

2. Si $|x| + |y| \leq 1$, alors $N(x, y) \leq 1$ donc on a la première inclusion.

Si $N(x, y) \leq 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leq 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leq \left| x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq 2$$

et donc $|y| \leq 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. On fixe $(x, y) \in S_N(0, 1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π -périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limiter à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ .

On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leq x |\cos(t)| + y |\sin(2t)| = |\varphi(-t)|$$

et $-t \in [0, \pi]$. Donc le sup est atteint sur $[0, \pi]$.

On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq \varphi(t) = \underbrace{x \cos(t)}_{\in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]} + y \sin(2t) \leq x \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \underbrace{y \sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t))}_{\in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]} = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$$

Donc le sup est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le sup (existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le sup sur \mathbb{R} qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.

On a donc $x \cos(t_0) + y \sin(2t_0) = 1$ et $-x \sin(t_0) + 2y \cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0 , en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.

Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que x et y s'écrivent de la façon demandée, alors t_0 est l'unique point satisfaisant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$. Mais alors le sup de φ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est atteint en un point t_1 qui vérifie les mêmes choses, donc $t_1 = t_0$ d'où $N(x, y) = 1$.

Solution 6.2.

1. Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur E

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt\end{aligned}$$

Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$ et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. Pour $x \in [0, 1]$, écrire $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, utiliser Cauchy-Schwarz avec f' et 1 puis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$, pour enfin passer au sup sur x .
3. Utiliser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n \end{aligned}$$

Solution 6.3. Si f est ouverte, $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de \mathbb{R}^p . Donc f est surjective.

Si f est surjective, on prend F un supplémentaire de $\ker(f)$ dans \mathbb{R}^n avec $\dim(\ker(f)) = n - p$ et $\dim(F) = p$. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F et (e_{p+1}, \dots, e_n) une base de $\ker(f)$. On vérifie que $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de \mathbb{R}^p . On définit

$$\begin{aligned} N_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i^n x_i e_i &\mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{aligned}$$

norme sur \mathbb{R}^n et

$$\begin{aligned} N_2 : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i^p y_i f(e_i) &\mapsto \max_{1 \leq i \leq p} |y_i| \end{aligned}$$

norme sur \mathbb{R}^p .

Soit Θ un ouvert de \mathbb{R}^n , soit $y_0 \in f(\Theta)$, il existe $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. Comme Θ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta$$

Soit $y = \sum_{i=1}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, si $N_2(y - y_0) < r_0$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$$

avec $N_1(x - x_0) = \max_{1 \leq i \leq p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. Ainsi $x \in \Theta$ et $y \in f(\Theta)$, donc $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ et $f(\Theta)$ est un ouvert.

Solution 6.4.

1. Classique.
- 2.

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + \kappa(f)x \leq N(f)$$

car $x \leq 1$, donc $N_\infty \leq N$. Pour la non-équivalence, prendre

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n \end{aligned}$$

3. On a $|f(0)| \leq N_\infty(f)$ donc $N(f) \leq N'(f)$. Ensuite, $N_\infty \leq N$ donne $N' \leq N + \kappa \leq 2N$. Donc N et N' sont équivalentes.

Remarque 2. Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend $(e_i)_{i \in I}$ une base (de Hamel), $J = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ dénombrable. Si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, on peut vérifier que

$$N_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n |x_{i_{2n}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i|$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$. Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$. Alors

$$\left\| T_{i,j} \left(\frac{\lambda}{p} \right) - I_n \right\|_\infty = \left| \frac{\lambda}{p} \right| < \alpha$$

donc $T_{i,j}(\lambda) \in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left(T_{i,j} \left(\frac{\lambda}{p} \right) \right)^p \in G$$

Soit $\delta = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$.

On a alors

$$\left\| D_n \left(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} \right) - I_n \right\|_\infty < \alpha$$

donc $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}})^p \in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G = GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 3. C'est faux sur \mathbb{R} . Contre-exemple : matrices de déterminant positif.

Solution 6.6. Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $h \in E$ avec $\|h\| \leq \alpha$ et $\|f(h)\| > \varepsilon_0$. On prends $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\| \leq 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leq M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x) + f(h) = f(x)$$

donc f est continue.

On a $f(px) = p(fx)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lambda$.

Comme f est continue, on a

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n x) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n f(x) \\ &= \lambda f(x) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Remarque 4. Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i \in I}$ une \mathbb{Q} -base de \mathbb{R} ($0 \in I$). On définit

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i \in I \setminus \{0\}} \lambda_i e_i$$

f vérifie $f(x + y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \rightarrow \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. On a $\alpha(A) \subset \overline{A}$ donc $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Comme $\alpha(A)$ est un ouvert inclus dans $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.
2. Si $\beta(A) = \overline{\overline{A}}$, on montre aussi que $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. On a donc $A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overline{A}}}$ et c'est tout.

Solution 6.8.

1. Si $d_A = d_B$,

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B}$$

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_1\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de l'inf). Il existe $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de la fermeture). Ainsi,

$$d_A(x) \leq \|x - a_2\| \leq \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x)$. Comme $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leq d_A$, on a $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.

2. Soit $x \in A$, on a $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leq \rho(A, B)$ donc $\sup_{x \in A} d_B(x) \leq \rho(A, B)$, de même pour $\sup_{y \in B} d_A(y)$ donc on a une première inégalité.

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x - a\| \leq d_A(x) + \varepsilon$ et $\|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon$. On a alors

$$d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|a - b\| + \|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A, B)$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leq d_B(x) + \alpha(A, B)$. De même, $d_B(x) \leq d_A(x) + \alpha(A, B)$ donc $\rho(A, B) \leq \alpha(A, B)$.

Solution 6.9.

1. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car $\lim_{z \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \rightarrow x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur \mathbb{C} , on a $y = P(x) \in P(F)$.

2. Soit Θ un ouvert de \mathbb{C} , soit $y \in P(\Theta)$, $\exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x, r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x - x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominatrice de P . Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi

$$|Q(x)| = |y - y'| \geq |a|r^n$$

Par contraposée, si $|y - y'| \leq \frac{|a|r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x' - x| < r$. Ainsi, $x' \in B(x, r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert.

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. On note $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leq h\}$.

1. ω_φ est bien défini car $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2\|\varphi\|_\infty$. Si $0 < h \leq h'$, alors $A_h \subset A_{h'}$ donc $\sup(A_h) \leq \sup(A_{h'})$ donc $\omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h')$.
2. Soit $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, soit $(x, y) \in I^2$ tel que $|x - y| \leq h + h'$ (où on peut supposer que $x \leq y$).
 - Si $y \in [x, x + h]$, alors $|x - y| \leq h$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
 - Si $y \in [x + h, x + h + h']$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x + h)| + |\varphi(x + h) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$ car $|x - (x + h)| \leq h$ et $|x + h - y| \leq h'$.
 Donc $\omega_\varphi(h + h') \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda h \leq ([\lambda] + 1)h$ et par croissance et ce qui précède, on a

$$\omega_\varphi(\lambda h) \leq ([\lambda] + 1)\omega_\varphi(h) \leq (\lambda + 1)\omega_\varphi(h)$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. φ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, si $|x - y| \leq \alpha$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$ et on a pour $h \leq \alpha$, $\omega_\varphi(h) \leq \varepsilon$ d'où $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_\varphi(h) = 0$.

Soit alors $h_0 > 0$ fixé et $h > 0$,

— si $h_0 \leq h$, on a $0 \leq \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leq \omega_\varphi(h - h_0)$.

— si $h \leq h_0$, on a $0 \leq \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h_0 - h)$.

Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leq \omega_\varphi(|h_0 - h|)$. Donc on a bien $\lim_{h \rightarrow h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$.

Donc ω_φ est continue (et même uniformément).

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires