# *Solutions Exercices MP/MP$^*$*

# Table des matières

# 1 Probabilités sur un univers dénombrable

**Solution 1.1.**

1. *On note $P$ :'le lancer initial donne pile', $F$ :'le lancer initial donne face', $B_k$ :'la k-ième boule est blanche', $N_k$ :'la k-ième boule est noire'.*

   *On a*
   $$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(P)\,\mathbb{P}_P(B_k) + \mathbb{P}(F)\,\mathbb{P}_F(B_k) = \frac{1}{2}\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{k+1} \tag{1.1}$$
   *donc*
   $$\boxed{\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

2. *On a*
   $$\boxed{\mathbb{P}_{B_k}(P) = \mathbb{P}_P(B_k)\,\frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(B_k)} = \frac{k}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1} \tag{1.3}$$

3. *On a*
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}\left(B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_k\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_P\left(B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_k\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_F\left(B_1 \bigcap \ldots \bigcap B_k\right) && (1.4)\\
   &= \frac{1}{2}\left(\prod_{j=1}^{k}\frac{j}{j+1} + \prod_{j=1}^{k}\frac{1}{j+1}\right) && (1.5)\\
   &\boxed{= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\right)} && (1.6)
   \end{aligned}$$

4. *On a*
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}\left(B_k \bigcap B_{k+1}\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} + \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{k+2}\right) && (1.7)\\
   &= \frac{1}{2}\left(\frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)}\right) && (1.8)
   \end{aligned}$$
   *Donc on a indépendance si et seulement si*
   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}\left(B_k \bigcap B_{k+1}\right) = \mathbb{P}(B_k)\,\mathbb{P}(B_{k+1}) = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} && (1.9)\\
   &\Leftrightarrow 2k(k+1) + 2 = (k+2)(k+2) && (1.10)\\
   &\Leftrightarrow 2k^2 + 2k = k^2 + 3k && (1.11)\\
   &\Leftrightarrow \boxed{k = 1} && (1.12)
   \end{aligned}$$
   *Ainsi, seuls les deux premiers tirages sont indépendants.*

**Remarque 1.1.** *Seuls les deux premiers tirages sont indépendants car le premier tirage est indépendant du lancer de pièce.*

**Solution 1.2.**

1.
$$\boxed{p_0 = 1, q_0 = 0, p_N = 0, q_N = 1} \tag{1.13}$$

2. *Soit $a \in [\![1, N-1]\!]$. Puisque les lancers de pièce sont indépendants, on peut partitionner selon le résultat du premier lancer. On a donc [probabilités conditionnelles]*
$$\boxed{p_a = p \times p_{a+1} + q \times p_{a-1}} \tag{1.14}$$
*L'équation caractéristique est*
$$pX^2 - x + q = 0 \tag{1.15}$$
*On a $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4(1-p)p = 4p^2 - 4p + 1 = (1-2p)^2$.*

*Ainsi, si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $a \in [\![0, N]\!]$, on a*
$$p_a = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^a \tag{1.16}$$
*Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que*
$$\boxed{p_a = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \times \left(\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right)} \tag{1.17}$$
*Si $p = \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que*
$$p_a = \alpha a + \beta \tag{1.18}$$
*Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que*
$$\boxed{p_a = \frac{1}{N}(N-a)} \tag{1.19}$$

3. *Pour tout $a \in [\![1, N-1]\!]$, on a*
$$q_a = pq_{a+1} + qp_{a-1} \tag{1.20}$$

*donc pour tout* $a \in [\![1, N-1]\!]$*, on a*

$$p_a + q_a = p\left(p_{a+1} + q_{a+1}\right) + q\left(p_{a-1} + q_{a-1}\right) \tag{1.21}$$

*Comme* $p_0 + q_0 = p_N + q_N = 1$*, on a pour tout* $a \in [\![0, N]\!]$*,*

$$\boxed{p_a + q_a = 1} \tag{1.22}$$

*Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement en temps fini.*

**Solution 1.3.**

1. *Les tirs sont indépendants donc*

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{P}\left(A_n\right) = (1-a)^n \times (1-b)^n \times a \\ \mathbb{P}\left(B_n\right) = (1-a)^n \times (1-b)^n \times (1-a) \times b \end{array}} \tag{1.23}$$

2. *On a*

$$G_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \tag{1.24}$$

*réunion disjointe. Donc*

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{P}\left(G_A\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab} \\ \mathbb{P}\left(G_B\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_n\right) = \frac{b(1-a)}{a+b-ab} \end{array}} \tag{1.25}$$

*Ainsi,*

$$\boxed{\mathbb{P}\left(G_A\right) + \mathbb{P}\left(G_B\right) = 1} \tag{1.26}$$

3. *On a* $\mathbb{P}\left(G_A\right) = \mathbb{P}\left(G_B\right)$ *si et seulement si*

$$\frac{a}{1-a} = b \tag{1.27}$$

*Cela implique que* $\frac{a}{1-a} \in ]0, 1[$ *ce qui est possible uniquement (après étude de fonction) si*

$$\boxed{a \in \left]0, \frac{1}{2}\right[ \quad \text{et } b = \frac{a}{1-a}} \tag{1.28}$$

**Solution 1.4.**

1. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n$ :'Le joueur gagne au bout du n-ième lancer' (évènement disjoints) et $G$ :'Le joueur gagne'. On a $G \cup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$. Donc*

$$\boxed{\mathbb{P}\left(G\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}\left(E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{n} = \ln(2)} \tag{1.29}$$

2. *On note $P_n$ :'le joueur obtient pile au n-ième lancer', $P$ :'il obtient pile'. On a*

$$\mathbb{P}_G\left(P_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left(G \bigcap P_n\right)}{\mathbb{P}\left(G\right)} = \frac{\mathbb{P}_{P_n}\left(G\right) \times \mathbb{P}\left(P_n\right)}{\mathbb{P}\left(G\right)} \tag{1.30}$$

*donc*

$$\boxed{\mathbb{P}_G\left(P_n\right) = \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\ln\left(2\right)}} \tag{1.31}$$

*Puis*

$$\boxed{\mathbb{P}_G\left(P\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{P}_G\left(P_n\right) = 1} \tag{1.32}$$

**Remarque 1.2.** *On a utilisé le résultat suivant : pour tout $x \in ]0,1[$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln\left(1-x\right) \tag{1.33}$$

*Soit on connaît le résultat avec les séries entières, soit on le redémontre à la main : pour $N \geqslant 1$, on a*

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{N} x^n t^{n-1} dt \tag{1.34}$$

$$= x\int_0^1 \frac{1-(xt)^N}{1-xt} dt \tag{1.35}$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1-xt} dt}_{=[\ln(1-xt)]_0^1} + R_N \tag{1.36}$$

*avec $|R_N| \leqslant \frac{x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ d'où le résultat.*

**Solution 1.5.**

1. *On a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 + p_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} = 2\alpha + (1-2\alpha) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{1.37}$$

*donc*

$$\boxed{\textit{c'est une probabilité sur } \mathbb{N}.} \tag{1.38}$$

2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $E_k$ :'la famille a $k$ enfants et exactement 2 garçons', $E$ :'la famille a exactement 2 garçons', $A_k$ :'la famille a $k$ enfants'.*

*On a alors*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(E_k) \times \mathbb{P}(A_k) && (1.39)\\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \binom{k}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times p_k && (1.40)\\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k+1}} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} && (1.41)\\
&= (1-2\alpha) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{2k}} && (1.42)\\
&= (1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{2k+4}} && (1.43)\\
&= \frac{1}{16}(1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{4^k} = \frac{1}{16}(1-2\alpha) \times \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} && (1.44)\\
&\boxed{= \frac{4(1-2\alpha)}{27}} && (1.45)
\end{aligned}$$

3. *On note $F$ :'la famille a au moins 2 filles', $F_k$ :'la famille a exactement $k$ filles et au moins 4 enfants', $G$ :'la famille a au moins 2 garçons', $G_k$ :'la famille a exactement $k$ garçons et au moins 4 enfants'.*

*On a*

$$\mathbb{P}_G(G) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} \qquad (1.46)$$

*et $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G} = F_0 \cup F_1 \cup G_0 \cup G_1$. Donc, comme $\mathbb{P}(F_0) = \mathbb{P}(G_0)$ et $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(G_1)$, on a $\mathbb{P}(F \cap G) = 1 - 2(\mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1))$.*

*On a alors*

$$\mathbb{P}(G_0) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{1.47}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{2k-1}} \tag{1.48}$$

$$= 2(1-2\alpha)\frac{1}{4^4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \tag{1.49}$$

$$= 2(1-2\alpha) \times \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{3} \tag{1.50}$$

*et*

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \tag{1.51}$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} k \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \tag{1.52}$$

$$= (1-2\alpha) \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{2^{2k-1}} \tag{1.53}$$

$$= (1-2\alpha) \times \frac{2}{4} \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{4^{k-1}} \tag{1.54}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k+1}{4^k} \tag{1.55}$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} - 1 - \frac{2}{4} - \frac{3}{4^2}\right) \tag{1.56}$$

*et on calcule enfin*

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(G_0) - \mathbb{P}(G_1)} \tag{1.57}$$

**Solution 1.6.** *Pour tout $k \geqslant 1$, on note $A_k$ :'A gagne à son lancé k' et $B_k$ de manière équivalente pour le joueur B. On note $G_A$ :'A gagne' et de même pour B. On a ainsi*

$$G_A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k \tag{1.58}$$

*(réunion disjointe) et pareil pour $G_B$. On a*

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} \tag{1.59}$$

*d'où*

$$\mathbb{P}(G_A) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1-\left(1-\frac{5}{36}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)} \tag{1.60}$$

*et pareil*

$$\boxed{\mathbb{P}(G_B) = \frac{1}{6} \times \left(1-\frac{5}{36}\right) \times \frac{1}{1-\left(1-\frac{5}{36}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)} > \mathbb{P}(G_A)} \tag{1.61}$$

*et*

$$\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) = 1 \tag{1.62}$$

*donc $G_A \cup G_B$ est presque sur.*

**Solution 1.7.** *Soit $k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right]\!\right]$. La probabilité que l'on tire $2k$ boules blanches est (loi binomiale) :*

$$\binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{1.63}$$

*donc la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit pair est*

$$\mathbb{P}_P = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \tag{1.64}$$

*De même, la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit impair est*

$$\mathbb{P}_I = \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k+1} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k-1} \tag{1.65}$$

*On a alors*

$$\mathbb{P}_P + \mathbb{P}_I = 1 \tag{1.66}$$

*et*

$$\mathbb{P}_P - \mathbb{P}_I = \sum_{k'=0}^{n} \binom{n}{k'} (-1)^{k'} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k'} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k'} = \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n} \tag{1.67}$$

*On a donc*

$$\boxed{\mathbb{P}_P = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^{n}\right)} \tag{1.68}$$

**Remarque 1.3.** *Si on note $\mathbb{P}_3$ la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit multiple de 3 :*

$$\mathbb{P}_3 = \sum_{0 \leqslant 3k \leqslant n} \binom{n}{3k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{3k} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-3k} \tag{1.69}$$

*On note $\mathbb{P}_2$ la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit congru à 2 module 3, et on définit $\mathbb{P}_1$ de même. Alors on a*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbb{P}_1+\mathbb{P}_2+\mathbb{P}_3 &=& 1 \\ \mathrm{j}\mathbb{P}_1+\mathrm{j}^2\mathbb{P}_2+\mathbb{P}_3 &=& \left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n \\ \mathrm{j}^2\mathbb{P}_1+\mathrm{j}\mathbb{P}_1+\mathbb{P}_3 &=& \left(\frac{b+\mathrm{j}^2a}{a+b}\right)^n \end{array}\right. \tag{1.70}$$

*et donc*

$$\mathbb{P}_3=\frac{1}{3}\left(1+\left(\frac{b+\mathrm{j}a}{a+b}\right)^n+\left(\frac{b+\mathrm{j}^2a}{a+b}\right)^n\right) \tag{1.71}$$

**Solution 1.8.** *Soit pour $i\in[\![1,n]\!]$,*

$$A_i=\{\sigma\in\Sigma_n|\sigma(i)=i\} \tag{1.72}$$

$$A=\{\sigma\in\Sigma_n|\sigma \textit{ a un point fixe}\} \tag{1.73}$$

*On a*

$$A=\bigcup_{i=1}^n A_i \tag{1.74}$$

*On a*

$$|A|=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\sum_{\substack{J\subset[\![1,n]\!]\\|J|=k}}\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right| \tag{1.75}$$

*Il y a $\binom{n}{k}$ tels $J$, et on a*

$$\left|\bigcap_{i\in J}A_i\right|=|\{\sigma\in\Sigma_n|\forall i\in J,\sigma(i)=i\}|=(n-k)! \tag{1.76}$$

*Ainsi,*

$$|A|=\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)! \tag{1.77}$$

*donc*

$$\boxed{p_n=\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}=-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{1}{e}} \tag{1.78}$$

## Table des figures