

*Solutions Exercices MP/MP**

Table des matières

1 Algèbre Générale	2
2 Séries numériques et familles sommables	45
3 Probabilités sur un univers dénombrable	108
4 Calcul matriciel	144
5 Réduction des endomorphismes	172
6 Espaces vectoriels normés	220
7 Fonction d'une variable réelle	262
8 Suites et séries de fonctions	273
9 Séries entières	274
10 Intégration	275
11 Espaces préhilbertiens	276
12 Espaces euclidiens	277
13 Calcul différentiel	278
14 Équation différentielles linéaires	279

1 Algèbre Générale

Solution 1.1. Soit $(x, y) \in G^2$. On a d'abord

$$x \cdot y = (x \cdot y)^{p+1} (x \cdot y)^{-p} \quad (1.1)$$

$$= x^{p+1} \cdot y^{p+1} \cdot y^{-p} \cdot x^{-p} \quad (1.2)$$

$$= x^{p+1} \cdot y \cdot x^{-p} \quad (1.3)$$

On cherche maintenant à montrer que x^{p+1} et y commutent. On a

$$y^{p+2} \cdot x^{p+2} = (y \cdot x)^{p+2} \quad (1.4)$$

$$= (y \cdot x)^{p+1} \cdot y \cdot x \quad (1.5)$$

$$= y^{p+1} \cdot x^{p+1} \cdot y \cdot x \quad (1.6)$$

Donc on a $y \cdot x^{p+1} = x^{p+1} \cdot y$. En reportant dans (1.3), on a $x \cdot y = y \cdot x$ et donc

G est abélien.

(1.7)

■

Remarque 1.1.

- Pour (Σ_3, \cdot) , on a f_0, f_1 et f_6 des morphismes mais Σ_3 n'est pas commutatif.
- Si f_2 est un morphisme, alors on a $(x \cdot y)^2 = x \cdot y \cdot x \cdot y = x^2 \cdot y^2$ d'où $y \cdot x = x \cdot y$.

Solution 1.2. A est non vide car $\omega(e_G) = 1$ et $e_G \in A$. Soit $x \in A$ tel que $\omega(x) = 2p+1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$x^{2k} = e_G \Leftrightarrow 2p+1 \mid 2k \quad (1.8)$$

$$\Leftrightarrow 2p+1 \mid k \quad (1.9)$$

d'après le théorème de Gauss.

Ainsi, $\omega(x^2) = 2p+1$ et $x^2 \in A$, donc

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & A & \rightarrow A \\ & x & \mapsto x^2 \end{array}$$

est bien définie. Soit $x \in A$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $x^{2p+1} = e_G$ donc $x^{2p+2} = x$ d'où $(x^{p+1})^2 = x$. Il suffit donc de vérifier que $x^{p+1} \in A$ pour montrer que l'application est surjective. Comme A est fini, elle sera bijective.

On a $gr\{x^{p+1}\} \subset gr\{x\}$ et $(x^{p+1})^2 = x$ donc $gr\{x\} = gr\{x^{p+1}\}$ donc $\omega(x) = \omega(x^{p+1}) = 2p + 1$ et donc $x^{p+1} \in A$.

$$\boxed{\text{Donc } A \text{ est bijective.}} \quad (1.10)$$

■

Solution 1.3. On note $m = \theta(\sigma)$. On suppose que σ se décompose en produit de cycle de longueur l_1, \dots, l_m avec $l_1 + \dots + l_m = n$. Comme

$$(a_1, \dots, a_l) = [a_1, a_2] \circ [a_2, a_3] \circ \dots \circ [a_{l-1}, a_l] \quad (1.11)$$

Donc σ se décompose en $\sum_{i=1}^m (l_i - 1) = n - m$ transpositions. Montrons par récurrence sur k , $\mathcal{H}(k)$:

"Un produit de k transpositions possède au moins $n - k$ orbites".

Pour $k = 0$, $\sigma = id$ possède n orbites.

Pour $k = 1$, soit τ une transposition, on a $\theta(\tau) = n - 2 + 1 = n - 1$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons \mathcal{H}_k , soit $\sigma \in \Sigma_n$ qui se décompose en produit de $k + 1$ transpositions.

$$\sigma = \underbrace{\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k}_{\sigma'} \circ \tau_{k+1} \quad (1.12)$$

D'après \mathcal{H}_k , on a $\theta(\sigma') \geq n - k$. Notons $\tau_{k+1} = [a, b]$.

Si a et b appartiennent à la même orbite. On note (a_1, \dots, a_r) le cycle correspondant avec $a_r = a$ et $a_s = b$ où $s \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. On a

$$\begin{cases} (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_i) = a_{i+1} & \text{où } i \notin \{r, s\} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_r) = a_{s+1} \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ [a, b](a_s) = a_1 \end{cases} \quad (1.13)$$

On n'a pas perdu d'orbites, donc $\theta(\sigma) \geq n - k - 1$.

Si a et b n'appartiennent pas à la même orbite, notons (a_1, \dots, a_r) et (b_1, \dots, b_s) ces orbites avec $a = a_r$ et $b = b_s$. On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{(a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s]}_{\sigma''} (a_i) = a_{i+1} \quad \text{où } i \in \llbracket 1, \dots, r-1 \rrbracket \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s] (b_j) = b_{j+1} \quad \text{où } j \in \llbracket 1, \dots, s-1 \rrbracket \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s] (a_r) = b_1 \\ (a_1, \dots, a_{r-1}, a_r) \circ (b_1, \dots, b_s) \circ [a_r, b_s] (b_s) = a_1 \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Donc

$$\sigma'' = (a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) \quad (1.15)$$

On a perdu une orbite et donc $\theta(\sigma) \geq n - k - 1$.

D'où le résultat par récurrence sur k .

(1.16)

■

Solution 1.4. On note par \bar{k} les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et par \tilde{l} les éléments de $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Soit f un morphisme. On pose $f(\bar{1}) = \tilde{x}$ où $x \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$. On a donc $nf(\bar{1}) = f(\bar{0}) = \tilde{0}$.

On a donc $\tilde{n}\tilde{x} = \tilde{0}$ donc $m \mid nx$. On écrit $m = m_1(m \wedge n)$ et $n = n_1(m \wedge n)$. D'après le théorème de Gauss, on a donc $m_1 \mid x$. Donc $x = km_1$ avec $k \in \llbracket 0, (n \wedge m) - 1 \rrbracket$.

Réciproquement, soit $k \in \llbracket 0, (n \wedge m) - 1 \rrbracket$. On définit

$$\begin{array}{ccc} f_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ \bar{l} & \mapsto & \widetilde{lkm_1} \end{array}$$

Si $\bar{l} = \bar{l'}$, alors $n \mid l - l'$ et donc $nm_1 \mid (l - l')km_1$ puis $n_1(n \wedge m)m_1 \mid (l - l')km_1$ donc $m \mid (l - l')km_1$ d'où $\widetilde{lkm_1} = \widetilde{l'km_1}$ donc f est bien définie et c'est évidemment un morphisme.

Soit $k, k' \in \llbracket 0, n \wedge m - 1 \rrbracket$ avec $k \neq k'$. Si $\widetilde{lkm_1} = \widetilde{l'km_1}$ alors $m \mid (k - k')m_1$ et donc $n \wedge m \mid k - k'$ et $|k - k'| < n \wedge m$ donc $k = k'$ ce qui est absurde. Ainsi, les f_k sont distincts.

$$\boxed{\text{On a donc } n \wedge m \text{ morphismes.}} \quad (1.17)$$

■

Remarque 1.2. Exemple pour l'exercice précédent : morphisme de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. On a $f(\bar{1}) = \tilde{x}$ d'où $\tilde{4x} = \tilde{0}$ donc $3 \mid x$ d'où $x \in \{0, 3\}$. On a donc le morphisme trivial $f_0: \bar{l} \mapsto \tilde{0}$ et $f_1: \bar{l} \mapsto \tilde{3l}$.

Solution 1.5. On considère $H = \{x \in G \mid x^2 = e_G\}$. Si $x \notin H$, alors $x^{-1} \neq x$ et donc

$$P = \prod_{x \in H} x \quad (1.18)$$

H est le noyau du morphisme $x \mapsto x^2$ (morphisme car G est abélien) donc H est un sous-groupe. Soit K un sous-groupe de H et $a \in H \setminus K$. Montrons que $K \cup aK$ est un sous-groupe de H .

On a $e_G \in K \cup aK$. Soit $x \in K \cup aK \subset H$, on a $x^{-1} = x \in K \cup aK$. Soit $(x_1, x_2) \in (K \cup aK)^2$, si $(x_1, x_2) \in K^2$, c'est ok. Si $(x_1, x_2) \in (aK)^2$, on note $x_1 = a \cdot k_1$ et $x_2 = a \cdot k_2$ avec $(k_1, k_2) \in K^2$. On a $x_1 \cdot x_2 = a^2 \cdot k_1 \cdot k_2 = k_1 \cdot k_2 \in K$. Si $x_1 \in K$ et $x_2 \in aK$, alors $x_1 \cdot x_2 = a \cdot k_1 \cdot k_2 \in aK$. Donc $K \cup aK$ est un sous-groupe de H .

Soit $x \in K \cap aK$, il existe $(k_1, k_2) \in K^2$ tel que $k_1 = a \cdot k_2$ et $a \in K$ ce qui est impossible. Donc $K \cap aK = \emptyset$.

On construit alors par récurrence K_n : on pose $K_0 = \{e_G\}$ et à l'étape n , si $K_n = H$ on arrête, sinon il existe $a_{n+1} \in H \setminus K_n$ et on pose $K_{n+1} = K_n \cup a_{n+1}K$. Alors $|K_{n+1}| = 2|K_n|$. Comme H est fini, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $H = K_{n_0}$. On a alors $|H| = 2^{n_0}$.

Ainsi, si $n_0 = 0$, on a $H = \{e_G\}$ et

$$\boxed{P = e_G} \quad (1.19)$$

Si $n_0 = 1$, on a $H = \{e_G, a_1\}$ et

$$\boxed{P = a_1 \neq e_G} \quad (1.20)$$

Si $n_0 \geq 2$, comme chaque a_k apparaît un nombre pair de fois dans le produit, on a

$$\boxed{P = e_G} \quad (1.21)$$

■

Solution 1.6. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $(\overline{kx_0})_{0 \leq k \leq n}$ ne sont pas deux à deux distincts. Donc il existe $l \neq l' \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ tel que $\overline{lx_0} = \overline{l'x_0}$ d'où $0 < |l - l'| \leq n$. Donc il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $jx_0 \in G$. Ainsi, $n!x_0 \in G$ (itéré de jx_0). Ce raisonnement est vrai pour $x = \frac{x_0}{n!}$ donc $x_0 \in G$. Ainsi,

$$\boxed{G = \mathbb{R}} \quad (1.22)$$

■

Solution 1.7. Soit f un isomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans lui-même. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $f(\overline{k}) = \overline{kf(1)}$. Par isomorphisme, $\omega(f(1)) = \omega(1) = n$. Notons alors $\overline{x} = f(1)$ avec $x \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Si $x \wedge n = 1$, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $ux + vn = 1$, donc $u\overline{x} = \overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$. Ainsi, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = gr\{\overline{x}\}$ (car les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont des itérés de $\overline{1}$) donc $\omega(\overline{x}) = n$.

Réciproquement, si $\omega(\overline{x}) = n$, $\overline{1} \in gr\{\overline{x}\}$ donc il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $u\overline{x} = \overline{1} = \overline{ux}$. Donc $n \mid ux - 1$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in \mathbb{Z}$ tel que $ux - 1 = vn$, d'où $ux + vn = 1$. D'après Bézout, on a $x \wedge n = 1$. Finalement, on a $\omega(\overline{x}) = n$ si et seulement si $x \wedge n = 1$.

Ainsi, les isomorphismes sont nécessairement de la forme

$$\boxed{\begin{array}{ccc} f_x : & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & \overline{k} & \mapsto \overline{kx} \end{array}} \quad (1.23)$$

où $x \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $x \wedge n = 1$.

Réciproquement, si $x \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ est tel que $x \wedge n = 1$, f_x est évidemment un morphisme. Si $\overline{k} \in \ker(f_x)$, on a $f_x(\overline{k}) = \overline{0}$ si et seulement si $\overline{kx} = \overline{0}$ si et seulement si $n \mid kx$ et comme $n \wedge x = 1$, d'après le théorème de Gauss, on a $n \mid k$ donc $\overline{k} = \overline{0}$ donc $\ker(f_x) = \{\overline{0}\}$. Donc f_x est injective, donc bijective car $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = n$. ■

Solution 1.8. Si $y \in \text{Im}\varphi$, y possède $|\ker \varphi|$ antécédents. En effet, il existe $x_0 \in G$ tel que $y = \varphi(x_0)$. Pour tout $x \in G$, on a $\varphi(x) = y$ si et seulement si $\varphi(x) = \varphi(x_0)$ si et seulement si $\varphi(x_0^{-1} \cdot x) = e_G$ si et seulement si $x_0^{-1} \cdot x \in \ker \varphi$ si et seulement si $x \in x_0 \ker \varphi$. Comme

$$\begin{aligned} g : \ker \varphi &\rightarrow x_0 \ker \varphi \\ x &\mapsto x \cdot x_0 \end{aligned}$$

est bijective, on a $|\ker \varphi| = |x_0 \ker \varphi|$. Ainsi, on a $|G| = |\text{Im}\varphi| \times |\ker \varphi|$.

Dans tous les cas, on a $\ker \varphi \subset \ker \varphi^2$ et $\text{Im}\varphi^2 \subset \text{Im}\varphi$. On a ensuite

$$|\text{Im}\varphi^2| = |\text{Im}\varphi| \iff |\text{Im}\varphi^2| = |\text{Im}\varphi| \quad (1.24)$$

$$\iff |\ker \varphi^2| |\text{Im}\varphi^2| = |\ker \varphi^2| |\text{Im}\varphi| = |G| = |\ker \varphi| |\text{Im}\varphi| \quad (1.25)$$

$$\iff |\ker \varphi^2| = |\ker \varphi| \quad (1.26)$$

$$\iff \boxed{\ker \varphi^2 = \ker \varphi} \quad (1.27)$$

■

Solution 1.9. On considère

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^m \end{aligned}$$

l'exercice revient à montrer que f est bijective. D'après le théorème de Bézout, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $am + bn = 1$. Soit $y \in G$, on a

$$y^1 = y = y^{am+bn} = y^{am} \cdot \underbrace{y^{bn}}_{=e_G} = y^{am} = (y^a)^m \quad (1.28)$$

Donc f est surjective et comme G est fini,

$$\boxed{f \text{ est bijective.}} \quad (1.29)$$

■

Solution 1.10.

1. On a $e_G \in S_g$, si $(x, y) \in S_g^2$ alors $x \cdot y \cdot g = x \cdot g \cdot y = g \cdot x \cdot y$ donc $x \cdot y \in S_g$ et si $x \in S_g$ alors $x \cdot g = g \cdot x$ implique $g \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot g$ en multipliant par l'inverse de x à gauche et à droite donc

$$\boxed{x^{-1} \in S_g} \quad (1.30)$$

2. Soit $(h, h') \in G^2$. On a $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$ si et seulement si $g \cdot h^{-1} \cdot h' = h^{-1} \cdot h \cdot g$ si et seulement si $h^{-1} \cdot h \in S_g$ si et seulement si $h' \in hS_g$. Or $|hS_g| = |S_g|$ car

$$\begin{aligned} I_h : S_g &\rightarrow hS_g \\ x &\mapsto h \cdot x \end{aligned}$$

est bijective de réciproque $I_{h^{-1}}$. Soit la relation d'équivalence \mathcal{R}_0 sur G définie par $h\mathcal{R}_0h'$ si et seulement si $h \cdot g \cdot h^{-1} = h' \cdot g \cdot h'^{-1}$. Chaque classe à $|S_g|$ éléments et il y a $|C(g)|$ classes dans G d'où

$$\boxed{|G| = |S_g| |C(g)|} \quad (1.31)$$

3. On a $Z(G) = \cap_{g \in G} S_g$ donc $Z(G)$ est un sous-groupe et pour tout $g \in G$,

$$\boxed{Z(G) \subset S_g} \quad (1.32)$$

4. Pour $x \in G$, on note $\bar{x} = \{h \cdot x \cdot h^{-1} \mid h \in G\} = C(x)$.

On a $|\bar{x}| = 1$ si et seulement si pour tout $h \in G$, $h \cdot x \cdot h^{-1} = x$ si et seulement si $x \in Z(G)$.

Soit \mathcal{A} une partie de G telle que $(\bar{x})_{x \in \mathcal{A}}$ forme une partition de $G \setminus Z(G)$. On a

$$|G| = p^\alpha = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)| \quad (1.33)$$

Si $x \in \mathcal{A}$, $x \notin Z(G)$ donc $|S_x| < |G|$ (car $x \in Z(G)$ si et seulement si $S_x = G$) et donc

$$|C(x)| = \frac{|G|}{|S_x|} \quad (1.34)$$

d'après 2. Donc $|C(x)| = p^\beta$ avec $\beta \in \llbracket 1, \alpha \rrbracket$ car $|C(x)| \neq 1$. Donc

$$p \mid \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)| \quad (1.35)$$

d'où

$$p \mid |Z(G)| \quad (1.36)$$

donc

$$\boxed{|Z(G)| \neq 1} \quad (1.37)$$

5. On a

$$p^2 = |Z(G)| + \sum_{x \in \mathcal{A}} |C(x)| \quad (1.38)$$

D'après la question 4, on a $|Z(G)| \neq 1$ et $|Z(G)| \mid |G|$.

Si $Z(G) \neq G$, alors $|Z(G)| = p$. Pour $x \in \mathcal{A}$, $Z(G) \subset S_x \neq G$ donc $|S_x| = p$ (car $|S_x| \mid |G|$) et donc $Z(G) = S_x$. Or $x \in S_x$ et $x \notin Z(G)$ ce qui n'est pas possible, donc $|Z(G)| = p^2$ et $Z(G) = G$.

$$\boxed{\text{Donc } G \text{ est abélien.}} \quad (1.39)$$

S'il existe un élément d'ordre p^2 . G est cyclique et est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. Sinon, pour tout $x \in G \setminus \{e_G\}$, on a $\omega(x) = p$. Soit $x_1 \in G \setminus \{e_G\}$ et $x_2 \in G \setminus \text{gr}\{x_1\}$. Soit

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 &\rightarrow G \\ (\bar{k}, \bar{l}) &\mapsto x_1^k \cdot x_2^l \end{aligned}$$

f est bien définie car si $\bar{k} = \bar{k}'$ et $\bar{l} = \bar{l}'$, on a $p \mid k - k'$ et $p \mid l - l'$ donc $x_1^k \cdot x_2^l = x_1^{k'} \cdot x_2^{l'}$. Comme G est abélien, f est un morphisme.

Montrons que f est injective. Soit $(\bar{k}, \bar{l}) \in \ker(f)$ avec $(k, l) \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket^2$, on a $x_1^k \cdot x_2^l = e_G$ donc $x_2^l = x_1^{-k}$. Si $l \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ or p est premier donc $l \wedge p = 1$ donc il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $lu + pv = 1$. Alors on a

$$x_2 = x_2^{lu+pv} = x_2^{lu} \cdot x_2^{pv} = x_2^{lu} = x_1^{-k} \in \text{gr}\{x_1\} \quad (1.40)$$

ce qui n'est pas possible. Donc $\bar{l} = \bar{0}$ et de même $\bar{k} = \bar{0}$ donc f est injective et ainsi $|\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}| = |G|$ donc

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}} \quad (1.41)$$

■

Remarque 1.3. Les groupes de cardinal p^3 ne sont pas nécessairement abélien, par exemple le groupe des isométries du carré \mathcal{D}_4 de cardinal 8.

Solution 1.11. Soit f un morphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ dans (\mathbb{Q}_+^*, \times) . Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n$ donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $f(1) = r_0$ donc

$$\boxed{f : n \mapsto r_0^n} \quad (1.42)$$

Soit f un morphisme de $(\mathbb{Q}, +)$ dans (\mathbb{Q}_+^*, \times) . Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $f(1) = f(\frac{1}{a})^a$. Pour tout p premier, on a $\nu_p(f(1)) = a\nu_p(f(\frac{1}{a}))$ donc pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $a \mid \nu_p(f(1))$ donc $\nu_p(f(1)) = 0$ pour tout p premier, donc $f(1) = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = f(1)^n = 1$ et $f(b \times \frac{a}{b}) = f(a) = 1 = f(\frac{a}{b})^b$ donc $f(\frac{a}{b}) = 1$. Donc

$$\boxed{f: r \mapsto 1} \quad (1.43)$$

■

Solution 1.12. On a $xy = y^2x$, $x^2y = xy^2x = y^4x^2$, $x^3y = x^2y^2x = xy^4x^2 = y^8x^3$, $x^5y = y^{32}x^5$ donc $y^{31} = e_G$ et $\omega(y) = 31$.

Tout élément de G peut s'écrire $y^\lambda x^\mu$ avec $(\lambda, \mu) \in \llbracket 0, 30 \rrbracket \times \{0, 4\}$. Soit

$$\begin{aligned} f: \llbracket 0, 30 \rrbracket \times \llbracket 0, 4 \rrbracket &\rightarrow G \\ (\lambda, \mu) &\mapsto y^\lambda x^\mu \end{aligned}$$

est surjective par construction. Soit $((\lambda, \mu), (\lambda', \mu')) \in (\llbracket 0, 30 \rrbracket \times \llbracket 0, 4 \rrbracket)^2$ tel que $y^\lambda x^\mu = y^{\lambda'} x^{\mu'}$ donc $y^{\lambda-\lambda'} = x^{\mu'-\mu}$ d'où $y^{5(\lambda-\lambda')} = x^{5(\mu'-\mu)} = e_G$. Or $\omega(y) = 31$ donc $31 \mid 5(\lambda - \lambda')$ et d'après le théorème de Gauss, $31 \mid \lambda - \lambda'$. Or $(\lambda, \lambda') \in \llbracket 0, 30 \rrbracket^2$ donc $\lambda = \lambda'$ et de même $\mu = \mu'$ donc f est injective donc bijective et

$$\boxed{|G| = 155} \quad (1.44)$$

Soit G' un autre tel groupe engendré par x' et y' , on forme

$$\begin{aligned} g: G &\rightarrow G \\ y^p x^\mu &\mapsto y'^p x'^\mu \end{aligned}$$

et on vérifie que g est un isomorphisme. ■

Solution 1.13.

1. Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe nécessairement $y_i \in G$ tel que $\nu_{p_i}(\omega(y_i)) = p_i^{\alpha_i}$ (où ν_p est la valuation p -adique), sinon on ne pourrait pas avoir ce terme dans le ppcm. Donc

$$\boxed{p_i^{\alpha_i} \mid \omega(y_i)} \quad (1.45)$$

2. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\omega(y_i) = p_i^{\alpha_i} n$. Posons $x_i = y_i^n \in G$. Alors pour $k \in \mathbb{N}$,

$$x_i^k = e_G \iff y_i^{nk} = e_G \iff \omega(y_i) \mid nk \iff p_i^{\alpha_i} \mid k \quad (1.46)$$

Donc

$$\boxed{\omega(x_i) = p_i^{\alpha_i}} \quad (1.47)$$

3. On pose $x = \prod_{i=1}^r x_i$. Soit $k \in \mathbb{N}$, alors

$$x^k = e_G \iff \prod_{i=1}^r x_i^k = e_G \quad (1.48)$$

Pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on met le tout à la puissance $M_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r p_j^{\alpha_j}$. On a alors, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$,

$$x_i^{kM_i} = e_G \iff p_i^{\alpha_i} \mid kM_i \iff p_i^{\alpha_i} \mid k \quad (1.49)$$

la dernière équivalence venant du théorème de Gauss. Donc pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p_i^{\alpha_i} \mid k$, ce qui équivaut donc à $N \mid k$ et donc

$$\boxed{\omega(x) = N} \quad (1.50)$$

■

Solution 1.14. Sur un corps commutatif, un polynôme de degré n admet au plus n racines. Montrons qu'il existe $x_1 \in \mathbb{K}^*$ tel que $\omega(x_i) = |\mathbb{K}^*|$. Par définition de N , pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $\omega(x) \mid N$. D'où $x^N = 1_{\mathbb{K}}$. Donc x est racine de $X^N - 1$. Ainsi, $|\mathbb{K}^*| \leq N$. Par ailleurs, $N \mid |\mathbb{K}^*|$ car pour tout $x \in \mathbb{K}^*$, $x^{|\mathbb{K}^*|} = 1_{\mathbb{K}^*}$. Donc $|\mathbb{K}^*| = N$ et ainsi

$$\boxed{\mathbb{K}^* = \text{gr} \{x_1\}} \quad (1.51)$$

On a $|\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^*| = 12$ donc pour tout $\bar{x} \in (\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$, $\omega(\bar{x}) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. On a $\bar{2}^2 = \bar{4}$, $\bar{2}^3 = \bar{8}$, $\bar{2}^4 = \bar{16} = \bar{3}$, $\bar{2}^6 = \bar{12}$ donc $\omega(\bar{2}) = 12$ et

$$\boxed{\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}^* = \text{gr} \{\bar{2}\} = \{\bar{2}^k \mid k \in \llbracket 0, 11 \rrbracket\}} \quad (1.52)$$

■

Solution 1.15.

1. Soit $(x, y) \in G^2$, on a $(x \cdot y)^2 = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y) = e_G$ donc $x \cdot y = y^{-1} \cdot x^{-1}$ et comme $x^2 = e_G$, $x^{-1} = x$ d'où $xy = yx$ et

$$\boxed{G \text{ est abélien.}} \quad (1.53)$$

2. Soit (x_1, \dots, x_n) une famille génératrice minimale de G : pour tout $x \in G$, il existe $(\varepsilon_i) \in \{0, 1\}^n$ tel que $x = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i}$ (car G est abélien). Soit

$$\begin{aligned} f : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n &\rightarrow G \\ (\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) &\mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \end{aligned}$$

Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $\overline{\varepsilon_i} = \overline{\varepsilon'_i}$, alors $x^{\varepsilon_i} = x^{\varepsilon'_i}$ car $x_i^2 = e_G$ et $2 \mid \varepsilon_i - \varepsilon'_i$. Donc f est bien définie.

f est clairement un morphisme (car G est abélien). D'après la première question, f est surjective. Montrons que f est injective. Soit $(\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n})$ tel que $\prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} = e_G$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, supposons ε_i impair, on a alors $x_i = \varepsilon_i = x_i$. D'où $x_i = \prod_{j=1}^n x_j^{-\varepsilon_j} = \prod_{j=1}^n x_j^{\varepsilon_j}$ car $x^2 = e_G$. Donc $x_i \in \text{gr}(x_j, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \neq i)$, ce qui contredit le caractère minimal de (x_1, \dots, x_n) .

$$\boxed{\text{Ainsi, } f \text{ est injective donc est un isomorphisme.}} \quad (1.54)$$

■

Remarque 1.4. En notant $+$ la loi sur G , on peut définir

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times G &\rightarrow G \\ (\varepsilon, x) &\mapsto x^\varepsilon \end{aligned}$$

. Alors $(G, +, \cdot)$ est un $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel, de dimension finie n car G est fini, et le choix d'une base réalise un isomorphisme de $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ dans $(G, +)$.

Remarque 1.5. Par isomorphisme, on a

$$\prod_{x \in G} x = f \left(\sum_{(\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n} (\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_n}) \right) \quad (1.55)$$

Pour $n = 1$, on a $\overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$, pour $n = 2$, on a $(\overline{0}, \overline{0}) + (\overline{0}, \overline{1}) + (\overline{1}, \overline{0}) + (\overline{1}, \overline{1}) = (\overline{0}, \overline{0})$. Pour $n > 2$, $\overline{1}$ apparaît 2^{n+1} fois sur chaque coordonnée (donc un nombre pair de fois), donc la somme fait $(\overline{0}, \dots, \overline{0})$.

Solution 1.16.

1. Si G est abélien, on a

$$\boxed{D(G) = \{e_G\}} \quad (1.56)$$

2. Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$, σ se décompose en un produit d'un nombre pair de transpositions. Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux transpositions.

- Si $\{a, b\} = \{c, d\}$, alors $[a, b] \circ [c, d] = id$.
- Si $a \in \{c, d\}$, supposons par exemple $a = c$ et $b \neq d$. On a alors $[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ [a, d] = [b, a, d]$.
- Si $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$, on a

$$[a, b] \circ [c, d] = [a, b] \circ \underbrace{[b, c] \circ [b, c]}_{=id} \circ [c, d] = [a, b, c] \circ [b, c, d] \quad (1.57)$$

$$\boxed{\text{Donc les 3-cycles engendrent } \mathcal{A}_n.} \quad (1.58)$$

3. On a

$$\sigma \circ (a_1, a_2, a_3) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1), \sigma(a_2), \sigma(a_3)) \quad (1.59)$$

On peut trouver $\sigma: \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telle que a_i soit envoyé sur b_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ et les éléments $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{b_1, b_2, b_3\}$.

$$\boxed{\text{Donc les 3-cycles sont conjugués dans } \Sigma_n.} \quad (1.60)$$

Si $n \geq 5$ et σ impair, soit $(c_1, c_2) \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_1, a_2, a_3\}$. $\sigma' = \sigma \circ [c_1, c_2]$ est pair et $\sigma'(a_i) = b_i$.

$$\boxed{\text{Donc les trois cycles sont conjugués dans } \mathcal{A}_n \text{ pour } n \geq 5.} \quad (1.61)$$

C'est cependant faux pour $n = 3$ et $n = 4$.

4. Soit $(\sigma, \sigma') \in \Sigma_n^2$. En notant \mathcal{E} la signature d'une permutation (morphisme de (Σ_n, \circ) dans $(\{-1, 1\}, \times)$), on a

$$\mathcal{E}(\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1}) = 1 \quad (1.62)$$

donc $\sigma \circ \sigma^{-1} \circ \sigma' \circ \sigma'^{-1} \in \mathcal{A}_n$. Donc $D(\Sigma_n) \subset \mathcal{A}_n$.

Soit ensuite (a_1, a_2, a_3) un 3-cycle. On a $(a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3)$ puis

$(a_1, a_3, a_2)^{-1} = (a_1, a_2, a_3)$. Ainsi, on a

$$\sigma \circ (a_1, a_3, a_2) \circ \sigma^{-1} \circ (a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_3, a_2)^2 = (a_1, a_2, a_3) \quad (1.63)$$

On pose $\sigma = [a_2, a_3]$, et alors (a_1, a_2, a_3) est un commutateur. Ainsi, $(a_1, a_2, a_3) \in D(\Sigma_n)$ et donc $\mathcal{A}_n \subset D(\Sigma_n)$ (d'après la première question).

Finalement, on a

$$\boxed{D(\Sigma_n) = \mathcal{A}_n} \quad (1.64)$$

■

Remarque 1.6. Pour $n \geq 5$, on a $D(\mathcal{A}_n) = \mathcal{A}_n$.

Solution 1.17.

1. Pour $g \in G$, τ_g est bijective de réciproque $\tau_{g^{-1}}$. On a notamment $\tau_{g \cdot g'} = \tau_g \circ \tau_{g'}$ donc τ est un morphisme. Si $g \in G$ est tel que $\tau_g = id$, pour tout $x \in G$, on a $gx = x$ donc $g = e_G$. Donc τ est un morphisme injectif et

$$\boxed{G \text{ est isomorphe à } \text{Im} \tau = \tau(G), \text{ sous-groupe de } \Sigma(G), \text{ lui-même isomorphe à } \Sigma_n} \quad (1.65)$$

2. Soit

$$\begin{aligned} f : \Sigma_n &\rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ \sigma &\mapsto (\delta_{i, \sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq n} = P_\sigma \end{aligned}$$

P_σ est la matrice de permutation associée à σ . f est un morphisme, et est injectif, donc

$$\boxed{G \text{ est isomorphe à un sous-groupe de } GL_n(\mathbb{C}).} \quad (1.66)$$

■

Solution 1.18. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = 8t + 7$. Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, on a $\bar{0}^2 = \bar{0}$, $\bar{1}^2 = \bar{1}$, $\bar{2}^2 = \bar{4}$, $\bar{3}^2 = \bar{1}$, $\bar{4}^2 = \bar{0}$, $\bar{5}^2 = \bar{1}$, $\bar{6}^2 = \bar{4}$ et $\bar{7}^2 = \bar{1}$. Donc la somme de 3 de ces classes ne donnent pas $\bar{7}$.

Par récurrence, prouvons la propriété. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{N}^4$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 = (8t + 7)4^{n+1}$. Parmi x, y, z les trois sont pairs ou deux d'entre eux sont impairs. Si x, y impairs et z pair, on écrit $x = 2x' + 1, y = 2y' + 1, z = 2z'$, alors $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2[4]$ mais $(8t + 7)4^{n+1} \equiv 0[4]$: contradiction. Nécessairement, x, y et z sont pairs. En divisant par 4, on se ramène donc à l'hypothèse de récurrence.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}} \quad (1.67)$$

■

Solution 1.19. On raisonne sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. On a $\overline{10^{10^n}} = \overline{3^{10^n}}$. Dans le groupe $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$, $\overline{3}$ a un ordre qui divise $|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*| = 6$. On a $\overline{3^2} = \overline{2}$, $\overline{3^3} = \overline{-1}$ et $\overline{3^6} = \overline{1}$. Donc $\overline{3^{6k}} = \overline{1}$, $\overline{3^{6k+1}} = \overline{3}$, $\overline{3^{6k+2}} = \overline{2}$, $\overline{3^{6k+3}} = \overline{-1}$, $\overline{3^{6k+4}} = \overline{4}$ et $\overline{3^{6k+5}} = \overline{5}$.

On se place maintenant dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\overline{10} = \overline{4}$, $\overline{10^2} = \overline{4}$ et donc par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{10^n} = \overline{4}$. Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $10^n = 6k + 4$. Ainsi,

$$\boxed{\overline{10^{10^n}} = \overline{4}} \quad (1.68)$$

■

Solution 1.20.

1. On a $F_1 = 5$ et $2 + \prod_{k=0}^0 F_k = 2 + 3 = 5$. Soit $n \geq 1$, supposons que $F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k$. Alors

$$F_{n+1} - 2 = 2^{2^{n+1}} - 1 = (2^{2^n})^2 - 1 \quad (1.69)$$

$$= (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) \quad (1.70)$$

$$= F_n(F_n - 2) \quad (1.71)$$

$$= F_n \times \prod_{k=0}^{n-1} F_k \quad (1.72)$$

$$= \prod_{k=0}^n F_k \quad (1.73)$$

$$\boxed{\text{d'où le résultat par récurrence.}} \quad (1.74)$$

2. Soit p un facteur premier de F_n . S'il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $p \mid F_k$, alors d'après la première question on a $p \mid F_n - \prod_{k=0}^{n-1} F_k = 2$. Donc $p = 2$. Or F_n est impair, donc non divisible par deux, ce qui est absurde. Donc p ne divise aucun F_k pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Les F_n étant distincts deux à deux,

$$\boxed{\text{il existe donc une infinité de nombres premiers.}} \quad (1.75)$$

■

Remarque 1.7. Si $n \neq m$ alors $F_n \wedge F_m = 1$.

Solution 1.21.

1. On teste uniquement les puissances qui divisent 32 : 2,4,8,16,32. On a $\bar{5}^2 = \overline{-7}$, $\bar{5}^4 = \overline{-15}$, $\bar{5}^8 = \bar{1}$. Donc

$$\boxed{\omega(\bar{5}) = 8} \quad (1.76)$$

2. On note

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} &\rightarrow U \\ (\dot{k}, \tilde{l}) &\mapsto \overline{-1}^k \times \bar{5}^l \end{aligned}$$

On a $\omega(\overline{-1}) = 2$ et $\gamma(\bar{5}) = 8$ donc ψ est bien définie. ψ est bien un morphisme de groupes. Soit $(\dot{k}, \tilde{l}) \in \ker(\psi)$, on a $\overline{-1}^k \times \bar{5}^l = \bar{1}$. Si $\dot{k} = \dot{1}$, alors $\overline{-1}^k = \overline{-1} = \bar{5}^{-l} = \bar{5}^l \in \text{gr}\{\bar{5}\}$. Donc $\bar{5}^{2l} = \bar{1}$ et ainsi $8 \mid 2l$ d'où $4 \mid l$. Mais alors $l \in \{0, 4\}$ ce qui est impossible. Donc $\dot{k} \neq \dot{1}$. De ce fait, $\dot{k} \neq \dot{1}$. Ainsi, $\bar{5}^l = \bar{1}$ donc $\tilde{l} = \tilde{0}$. Ainsi, $\ker(\psi) = \{(\dot{0}, \tilde{0})\}$ donc ψ est injective, puis bijective car $|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}| = |U|$. Donc

$$\boxed{U = \text{gr}\{\overline{-1}, \bar{5}\}} \quad (1.77)$$

■

Remarque 1.8. U n'est pas cyclique car, par isomorphisme, ses éléments ont un ordre qui divise 8.

Solution 1.22.

1. Soit

$$\begin{aligned} f : G_n \times G_m &\rightarrow U_{nm} \\ (\xi, \xi') &\mapsto \xi \times \xi' \end{aligned}$$

Soit $(\xi, \xi') \in G_n \times G_m$, Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(\xi \times \xi')^k = 1$. Alors $(\xi \times \xi')^{km} = 1$ d'où $\xi^{km} = 1$ donc $n \mid km$ et $n \mid k$ d'après le théorème de Gauss. De même pour n , on a $m \mid k$ et donc $nm \mid k$. La réciproque est immédiate : $\xi \times \xi' \in G_{nm}$. Donc $f(G_n \times G_m) \subset G_{nm}$ et $|G_n \times G_m| = \varphi(n) \times \varphi(m) = \varphi(nm) = |G_{nm}|$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

Montrons que f est injective : soit $(x, y, x', y') \in G_n^2 \times G_m^2$ tel que $xx' = yy'$. On a alors $x^m = y^m$ et $x'^n = y'^n$ d'où $(xy^{-1})^m = 1$ d'où $\omega(xy^{-1}) \mid m$ et $\omega(xy^{-1}) \mid n$. Donc $\omega(xy^{-1}) = 1$ donc $x = y$ et en reportant, on a $x' = y'$. Donc f est injective puis bijective (égalité des cardinaux).

On a alors

$$\mu(n)\mu(m) = \sum_{\xi \in G_n} \xi \times \sum_{\xi' \in G_m} \xi' \quad (1.78)$$

$$= \sum_{(\xi, \xi') \in G_n \times G_m} \xi \xi' \quad (1.79)$$

$$= \sum_{\xi \in G_{nm}} \xi \quad (1.80)$$

$$= \boxed{\mu(nm)} \quad (1.81)$$

2. On a $\mu(1) = 1$. Soit p premier. On a

$$\sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = 0 \quad (1.82)$$

donc

$$\mu(p) \sum_{k=1}^{p-1} e^{\frac{2ik\pi}{p}} = -1 \quad (1.83)$$

Soit alors $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha \geq 2$, on a

$$\boxed{\mu(p^\alpha) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \wedge p=1}}^{p^\alpha} e^{\frac{2ik\pi}{p^\alpha}} = \sum_{k=1}^{p^\alpha} e^{\frac{2ik\pi}{p^\alpha}} - \sum_{k=1}^{p^{\alpha-1}} e^{\frac{2ik\pi}{p^{\alpha-1}}} = 0} \quad (1.84)$$

Si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, s'il existe $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $\alpha_i \geq 2$ alors $\mu(n) = 0$. Sinon, on a

$$\boxed{\mu(n) = \prod_{i=1}^r \mu(p_i) = (-1)^r} \quad (1.85)$$

3. Soit $(f, g) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^2$, on a

$$(f \star g)(n) = \sum_{d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2) \quad (1.86)$$

$$= \sum_{d_1 d_2 = n} g(d_1)f(d_2) \quad (1.87)$$

$$= (g \star f)(n) \quad (1.88)$$

$$\boxed{\text{Donc } \star \text{ est commutative.}} \quad (1.89)$$

Soit $(f, g, h) \in (\mathbb{C}^{\mathbb{N}^*})^3$, on a

$$(f \star (g \star h))(n) = \sum_{d_1 d = n} f(d_1)(g \star h)(d) \quad (1.90)$$

$$= \sum_{d_1 d = n} \left[f(d_1) \times \sum_{d_2 d_3 = d} g(d_2)h(d_3) \right] \quad (1.91)$$

$$= \sum_{d_1 d_2 d_3 = n} f(d_1)g(d_2)h(d_3) \quad (1.92)$$

$$= ((f \star g) \star h)(n) \quad (1.93)$$

$$\boxed{\text{donc } \star \text{ est associative.}} \quad (1.94)$$

On vérifie maintenant que l'élément neutre est $e : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ qui à 1 associe 1 et 0 si $n \geq 2$.

Soit

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{Z} \\ n &\mapsto \sum_{d|n} \mu(d) \end{aligned}$$

On a $\psi(1) = 1$. Soit $n \geq 2$ avec $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$. Les diviseurs de n sont dans $D = \{\prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i} \mid \beta_i \leq \alpha_i\}$. Ainsi, $\psi(n) = \sum_{d \in D} \mu(d)$. Or $\mu(d)$ vaut 0 s'il existe $\beta_i \geq 2$ et $(-1)^k$ si k β_i valent 1 et les autres 0. Il y a $\binom{r}{k}$ choix possibles pour que k β_i valent 1. Ainsi,

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^r 1^{r-k} (-1)^k \binom{r}{k} = 0 \quad (1.95)$$

Donc $\mu \star 1 = e$, et $\mu^{-1} = 1 : n \mapsto 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On note

$$\begin{aligned} id : \mathbb{N}^* &\rightarrow \mathbb{N}^* \\ n &\mapsto n \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{d|n} d \mu\left(\frac{n}{d}\right) = (\mu \star id)(n) \quad (1.96)$$

$$= (id \star \mu)(n) \quad (1.97)$$

$$= (1 \star (\varphi \star \mu))(n) \quad (1.98)$$

$$= \boxed{\varphi(n)} \quad (1.99)$$

la troisième égalité venant du fait que $id = 1 \star \varphi$ car $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$.

■

Solution 1.23. Pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, on a

$$\binom{p+k}{k} = \frac{(p+k) \times \cdots \times (p+1)}{k \times \cdots \times 1} = 1 + \alpha kp \quad (1.100)$$

car $(p+k) \times \cdots \times (p+1) = k! + p \times \text{qqchse}$. On a $p \mid \binom{p}{k}$ donc

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} [p^2] \quad (1.101)$$

Pour $k=0$, on a $\binom{p}{0} \binom{p}{0} = 1$ et pour $k=p$, on a $\binom{p}{p} \binom{2p}{p} = \binom{2p}{p}$. Et

$$\sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} - 2 = 2^p - 2 \quad (1.102)$$

Il reste donc à prouver que $\binom{2p}{p} \equiv 2[p^2]$.

Or

$$\binom{2p}{p} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p}{p-k} \equiv 2[p^2] \quad (1.103)$$

la première égalité venant de l'égalité du terme en X^p dans $(1+X)^{2p} = (1+X)^p(1+X)^p$, et la deuxième venant du fait que seuls les termes en $k=0$ et $k=p$ ne contiennent pas de p^2 , et valent chacun 1.

Finalement, on a

$$\boxed{\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 2^p - 2 + 1 + 2[p^2] \equiv 2^p + 1[p^2]} \quad (1.104)$$

■

Solution 1.24.

1. Soit G un sous-groupe de (\mathbb{U}, \times) . On note $|G| = d$. On a donc $G \subset \mathbb{U}_d$ car pour tout $x \in G$, $x^d = 1$.

$$\boxed{\text{Donc } G = \mathbb{U}_d \text{ est cyclique.}} \quad (1.105)$$

2. On pose

$$\begin{aligned}\psi : SO_2(\mathbb{R}) &\rightarrow (\mathbb{U}, \times) \\ R_\theta &\mapsto e^{i\theta}\end{aligned}$$

qui est un isomorphisme. Donc les sous-groupes de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les G_n pour $n \geq 1$ avec

$$G_n = \left\{ R_{\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \quad (1.106)$$

3. φ est bilinéaire et symétrique. Pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, on $\varphi(X, X) = \sum_{M \in G} \|MX\|^2 \geq 0$ et si $\varphi(X, X) = 0$, on a pour tout $M \in G$, $X = 0$. Notamment, $I_2 \in G$ et donc $X = 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ est bien un produit scalaire.}} \quad (1.107)$$

Pour tout $(M_0, X, Y) \in G \times (\mathbb{R}^2)^2$, on a $\varphi(M_0X, M_0Y) = \sum_{M \in G} \langle MM_0X, MM_0Y \rangle$ et $M \mapsto MM_0$ est bijective de G dans G donc $\varphi(M_0X, M_0Y) = \varphi(X, Y)$.

Soit \mathcal{B}_0 la base canonique de \mathbb{R}^2 et \mathcal{B}_1 une base orthonormée pour φ . On note $P_0 = \text{mat}_{\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_1}$.

Pour tout $M \in G$, $P_0^{-1}MP_0$ est la matrice d'une isométrie pour φ dans une base orthonormée pour φ . Donc $P_0^{-1}MP_0$ est orthogonale, et $\det(P_0^{-1}MP_0) = 1$ car pour tout $M \in G$, $\det(M) = 1$. Ainsi, $\{P_0^{-1}MP_0 \mid M \in G\}$ est un sous-groupe fini de $SO_2(\mathbb{R})$, donc cyclique.

Il est isomorphe à G donc

$$\boxed{G \text{ est cyclique.}} \quad (1.108)$$

■

Solution 1.25.

1. On a $1 = 1 + 0\sqrt{2} \in E$. On remarque ensuite que pour tout $s = x + y\sqrt{2} \in E$, on a $ss^{-1} = 1$ avec $s^{-1} = x - y\sqrt{2} \in E$. Soit $(s, s') \in E^2$ avec $s = x + y\sqrt{2}$ et $s' = x' + y'\sqrt{2}$. Notons déjà que $x + y\sqrt{2} > 0$ car $x = \sqrt{1 + 2y^2} > |y|\sqrt{2}$. On a donc

$$ss' = \underbrace{xx' + 2yy'}_{\in \mathbb{Z}} + \sqrt{2} \underbrace{(yx' + y'x)}_{\in \mathbb{Z}} \quad (1.109)$$

On a $xx' \in \mathbb{N}$ et $x > \sqrt{2}|y| \geq 0$ et $x' > \sqrt{2}|y'| \geq 0$ donc $xx' > 2|yy'|$ et ainsi $xx' + 2yy' \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, on a

$$(xx' + 2yy')^2 - 2(yx' + y'x)^2 = (xx')^2 + 4(yy')^2 - 2(yx')^2 2(y'x)^2 \quad (1.110)$$

$$= (x^2 - 2y^2)(x'^2 - 2y'^2) \quad (1.111)$$

$$= 1 \quad (1.112)$$

Donc $ss' \in E$. Finalement,

$$\boxed{E \text{ est un sous-groupe de } (\mathbb{R}_+^*, \times)}. \quad (1.113)$$

2. \ln est un isomorphisme de E sur $\ln(E)$, sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On sait que si

$$\underbrace{\inf(\ln(E) \cap \mathbb{R}_+)}_{\alpha} > 0 \quad (1.114)$$

alors $\ln(E) = \alpha\mathbb{Z}$ (sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ dans le cas $\alpha > 0$, pour rappel si $\alpha = 0$ alors le sous-groupe est dense dans \mathbb{R}). On cherche la borne inférieure de $E \cap]1 + \infty[$ que l'on note β . β existe car cet ensemble est non vide, par exemple $3 + 2\sqrt{2}$ y appartient.

Si $\beta = 1$, on peut trouver une suite de termes de E strictement décroissante convergeant vers

1. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 < x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} < x_n + y_n\sqrt{2} \quad (1.115)$$

On sait que

$$x_n - y_n\sqrt{2} = (x_n + y_n\sqrt{2})^{-1} < 1 < x_n + y_n\sqrt{2} \quad (1.116)$$

donc $-y_n\sqrt{2} < 1 - x_n < 0$ donc $y_n > 0$. Ainsi,

$$y_n = \sqrt{\frac{x_n^2 - 1}{2}} \quad (1.117)$$

Si $x_{n+1} \geq x_n$, alors $y_{n+1} \geq y_n$ d'où $x_{n+1} + \sqrt{2}y_{n+1} > x_n + \sqrt{2}y_n$ ce qui est absurde. Donc $x_{n+1} < x_n$ et on obtient une suite strictement décroissante d'entiers naturels ce qui est impossible. Donc $\beta > 1$ et

$$\boxed{E = \{(x_0 + y_0\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ est monogène.}} \quad (1.118)$$

On peut identifier β :

$$x_0 = \min \left\{ x \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \exists y \in \mathbb{Z}, x + y\sqrt{2} \in E \cap], +\infty[\right\} \quad (1.119)$$

Donc $\beta = 3 + 2\sqrt{2}$ Finalement, $x^2 - 2y^2 = 1$ avec $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n + y_n\sqrt{2} = \beta^n$.

■

Remarque 1.9. *En fait, on a*

$$\begin{cases} x_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k} 3^{n-2k} \\ y_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^{2k+1} 3^{n-2k-1} \end{cases} \quad (1.120)$$

Solution 1.26. On a $7 \mid n^n - 3$ si et seulement si $\bar{n}^n = \bar{3}$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$ est un groupe de cardinal 6. Donc l'ordre de ses éléments divise 6, et sont donc 1, 2, 3 ou 6. Notamment, on vérifie que $\omega(\bar{3}) = 6$ et donc le groupe engendré par $\bar{3}$ est exactement $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times)$. Ainsi,

$$(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}^*, \times) = \left\{ \bar{3}^k \mid k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket \right\} \quad (1.121)$$

(c'est un groupe cyclique). Les générateurs sont $\left\{ \bar{3}^k, k \wedge 6 = 1 \right\} = \left\{ \bar{3}, \bar{3}^5 = \overline{-2} = \bar{5} \right\}$. Donc $\bar{n} = \bar{3}$ ou $\bar{n} = \bar{5}$.

Si $\bar{n} = \bar{3}$, $\bar{3}^n = \bar{3}$ si et seulement si $n \equiv 1[6]$ donc $n \equiv 3[7]$ et $n \equiv 1[6]$. D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à $n \equiv 31[42]$. La réciproque est immédiate.

Si $\bar{n} = \bar{5}$, $\bar{5}^n = \bar{3}$ si et seulement si $n \equiv 5[6]$ et $n \equiv 5[7]$. D'après le théorème des restes chinois, on vérifie que ceci équivaut à $n \equiv 5[42]$.

Donc les solutions sont $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \equiv 31[42]$ ou $n \equiv 5[42]$.

(1.122)

■

Solution 1.27. On a

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} = \frac{2a}{(p-1)!} \iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{k(p-k)} = \frac{2a}{(p-1)!} \quad (1.123)$$

$$\iff \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p(p-1)!}{k(p-k)} = 2a \quad (1.124)$$

$$\iff p \underbrace{\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!^3}{k(p-k)}}_{\in \mathbb{N}} = 2a \underbrace{(p-1)!^2}_{p \wedge (p-1)!^2 = 1} \quad (1.125)$$

donc $p \mid a$ d'après le théorème de Gauss.

On écrit alors $a = p \times b$ avec $b \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} = \frac{2b}{(p-1)!} \quad (1.126)$$

comme $(p-1)!, k$ et $p-k$ ($1 \leq k \leq p$) sont inversibles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a alors

$$\sum_{k=1}^{p-1} \overline{-k}^{-2} = \overline{2b} \times \underbrace{\overline{(p-1)!}^{-1}}_{=-1} \quad (1.127)$$

d'après le théorème de Wilson.

Donc

$$\overline{2b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^{-2} \quad (1.128)$$

Comme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* &\rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ \overline{k} &\mapsto \overline{k}^{-1} \end{aligned}$$

est bijective, on a

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \frac{\overline{p(p-1)(2p-1)}}{6} \quad (1.129)$$

Or $p \geq 5$ est premier, donc $p-1$ est pair et p est congru à 1 ou 2 modulo 3. Donc $p-1 \equiv 0[3]$ ou $2p-1 \equiv 0[3]$ donc $\frac{(p-1)(2p-1)}{6} \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\overline{2} \times \overline{b} = \sum_{k=1}^{p-1} \overline{k}^2 = \overline{p} \times \frac{\overline{(p-1)(2p-1)}}{6} = 0 \quad (1.130)$$

et donc $p \mid b$ par le théorème de Gauss. Donc

$$\boxed{p^2 \mid a} \quad (1.131)$$

■

Solution 1.28. Les racines réelles de P ont une multiplicité paire, le coefficient dominant est positif (car la limite en $+\infty$ est positive) et les racines complexes non réelles sont 2 à 2 conjuguées :

$$(X - \alpha)(X - \bar{\alpha}) = X^2 - 2\Re(\alpha)X + |\alpha|^2 = (X - \Re(\alpha))^2 + |\Im(\alpha)|^2 \quad (1.132)$$

avec $\Im(\alpha) \neq 0$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat en décomposant } P \text{ sur } \mathbb{C}[X].} \quad (1.133)$$

■

Solution 1.29.

1. $G = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de \mathbb{R} engendré par α et 1. S'il existait $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $G = a\mathbb{Z}$, alors il existait $(n, m) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tel que $1 = na$ et $\alpha = ma$, d'où $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Donc G est dense dans \mathbb{R} .

$$\boxed{\text{Le fait que } \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N} \text{ est dense dans } \mathbb{R} \text{ est alors immédiate.}} \quad (1.134)$$

2. Posons $\beta = \frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Alors $\mathbb{Z} + \beta\mathbb{N}$ est dense dans \mathbb{R} . Soit $c < d \in \mathbb{R}^2$. Comme $\frac{c}{2\pi} < \frac{d}{2\pi}$, il existe $x \in \mathbb{Z} + \beta\mathbb{N} \cap]\frac{c}{2\pi}, \frac{d}{2\pi}[$ et alors $2\pi x \in 2\pi\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{N} \cap]c, d[$. On pose $c = \arcsin(a)$ et $d = \arcsin(b)$ avec $a < b$. On a bien $c < d$ car \arcsin est strictement croissante. Alors il existe $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $2\pi m + \alpha n = 2\pi x \in]c, d[$ donc $\sin(2\pi x) = \sin(2\pi m + \alpha n) = \sin(\alpha n) \in]a, b[$.

$$\boxed{\text{Donc } (\sin(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est dense dans }]-1, 1[.} \quad (1.135)$$

En particulier, cela vaut pour $\alpha = 1$ car $\pi \notin \mathbb{Q}$. Donc $(\sin(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $[-1, 1]$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. 2^n commence par 7 en base 10 si et seulement s'il existe $p \in \mathbb{N}$ avec

$$7 \times 10^p \leq 2^n < 8 \times 10^p \iff \ln(7) + p \ln(10) \leq n \ln(2) < \ln(8) + p \ln(10) \quad (1.136)$$

$$\iff \frac{\ln(7)}{\ln(10)} \leq \frac{n \ln(2)}{\ln(10)} - p < \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \quad (1.137)$$

On a alors

$$p = \left\lfloor \frac{n \ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \mathbb{N} \quad (1.138)$$

On étudie donc $\mathbb{N} \frac{\ln(2)}{\ln(10)} + \mathbb{Z}$. Supposons que $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Alors on a $2^q = 10^p$ mais comme $p \neq 0$, on a $5 \mid 10^p$ mais $5 \nmid 2^q$, donc $\frac{\ln(2)}{\ln(10)} \notin \mathbb{Q}$.

On sait que

$$u_n = n \frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n \ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \in \left] \frac{\ln(7)}{\ln(10)}, \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \right[\quad (1.139)$$

Par densité, on peut donc construire par récurrence $(u_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\frac{\ln(7)}{\ln(10)} < u_{n_{p+1}} < u_{n_p} < \frac{\ln(8)}{\ln(10)} \quad (1.140)$$

Donc on a bien une infinité de puissance de 2 commençant par 7 en base 10.

(1.141)

■

Remarque 1.10. $(e^{in\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ est de la même façon dense dans \mathbb{U} . On peut montrer qu'elle est équirépartie, c'est à dire que pour tout $a < b \in [0, 2\pi[$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| \left\{ n \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid n\alpha - \frac{\lfloor 2\pi n\alpha \rfloor}{2\pi} \in]a, b[\right\} \right| \times \frac{1}{N} = \frac{b-a}{2\pi} \quad (1.142)$$

Remarque 1.11. Par équirépartition dans $[0, 1[$ des

$$\left\{ n \frac{\ln(2)}{\ln(10)} - \left\lfloor \frac{n \ln(2)}{\ln(10)} \right\rfloor \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (1.143)$$

la probabilité pour qu'une puissance de 2 commence par k en base 10 est ($k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$)

$$\frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(10)} = \frac{\ln(1 + \frac{1}{k})}{\ln(10)} \quad (1.144)$$

Solution 1.30.

1. Pour $\alpha = a + ib$, on définit le module au carré : $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$. Soit $\beta = c + id \neq 0$. Si $\alpha = \beta q + r$ avec $q, r \in \mathbb{Z}[i]^2$ et $|r|^2 < |\beta|^2$, alors $|\alpha - \beta q|^2 < |\beta|^2$ et $\beta \neq 0$ donc

$$\left| \underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{\in \mathbb{C}} - \underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}[i]} \right| < 1 \quad (1.145)$$

On pose $\frac{\alpha}{\beta} = x + iy$. On pose

$$u_x = \begin{cases} [x] & \text{si } x \in [[x], [x] + \frac{1}{2}[\\ [x] + 1 & \text{si } x \in [[x] + \frac{1}{2}, [x] + 1[\end{cases} \quad (1.146)$$

et de même pour u_y . On a alors $q = u_x + iu_y \in \mathbb{Z}[i]$ et

$$\left| \frac{\alpha}{\beta} - q \right|^2 = |x - u_x|^2 + |y - u_y|^2 \leq 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} < 1 \quad (1.147)$$

On pose donc $r = \alpha - \beta q \in \mathbb{Z}[i]$ et ainsi

$$\boxed{\text{l'anneau } \mathbb{Z}[i] \text{ est euclidien.}} \quad (1.148)$$

2. Soit A un anneau euclidien et I un idéal de A non réduit à $\{0\}$. Il existe $x \in I$ tel que

$$v(x_0) = \min\{v(x) \mid x \in I \setminus \{0\}\} \quad (1.149)$$

On a $x_0 A \subset I$. Soit $x \in I$. Il existe $q, r \in A$ tel que

$$x = x_0 q + r \quad (1.150)$$

avec $v(r) < v(x_0)$ ou $r = 0$. Or $r \in I$ donc $r = 0$. Ainsi $x \in x_0 A$ et donc $I = x_0 A$.

$$\boxed{\text{Donc tout anneau euclidien est principal.}} \quad (1.151)$$

■

Remarque 1.12. C'est encore vrai avec $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

Solution 1.31.

1. Si $\bar{x} = \bar{y}^2$ est un carré, d'après le petit théorème de Fermat, on a $\bar{x}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{y}^{p-1} = \bar{1}$. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* &\rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^* \\ \bar{y} &\mapsto \bar{y}^2 \end{aligned}$$

f est un morphisme multiplicatif, $\text{Im}(f)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*, \times)$.

Comme \mathbb{F}_p est un corps, chaque carré possède exactement deux antécédents. Il y a $p-1$ antécédents, donc il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^*$. Donc $|\text{Im}(f)| = \frac{p-1}{2}$ et si \bar{x} est un carré, x est racine de $X^{\frac{p-1}{2}} - \bar{1}$. Le polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - \bar{1}$ possède au plus $\frac{p-1}{2}$ racines et tout carré est racine. Donc les racines sont exactement les carrés et

$$\boxed{\bar{x}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1} \text{ si et seulement si } \bar{x} \text{ est un carré.}} \quad (1.152)$$

2. On a $p \equiv 1[4]$ si et seulement si $\frac{p-1}{2}$ est pair si et seulement si $(-1)^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$ si et seulement si $-\bar{1}$ est un carré dans \mathbb{F}_p . Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers p_1, \dots, p_r tous congrus à 1 modulo 4. On pose $n = (p_1 \times \dots \times p_r)^2 + 1$. Soit p un facteur premier de n , on a $n \equiv 1[n_i]$ donc $p \notin \{p_1, \dots, p_r\}$. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on a $\bar{n} = \bar{0}$ donc $-\bar{1} = \overline{p_1 \times \dots \times p_r}^2$ donc $p \equiv 1[4]$ ce qui est une contradiction.

$$\boxed{\text{Donc il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.}} \quad (1.153)$$

■

Solution 1.32.

1. On pose $P_1 = \sum_{i=0}^n r'_i X^i$, et $\nu_p(r'_i)$ est positif par définition de $c(P)$. Donc

$$\boxed{P_1 \in \mathbb{Z}[X]} \quad (1.154)$$

Pour tout $p \in \mathcal{P}$, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$\min_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} \nu_p(r_i) = \nu_p(r_{i_0}) \quad (1.155)$$

et $\nu_p(r'_{i_0}) = 0$ donc $p \nmid r'_{i_0}$ donc

$$\bigwedge_{i=1}^n r'_i = 1 \quad (1.156)$$

Si on a $P = \alpha_1 P_1 = \alpha_2 P_2$ avec les conditions requises, soit $p \in \mathcal{P}$, si $\nu_p(\alpha_2) > \nu_p(\alpha_1)$, alors p divise tous les coefficients de P_1 ce qui n'est pas possible, donc $\nu_p(\alpha_2) = \nu_p(\alpha_1)$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a aussi $\alpha_1 = \alpha_2$ et donc $P_1 = P_2$.

$$\boxed{\text{Donc l'écriture est unique.}} \quad (1.157)$$

2. On a $P = c(P)P_1$ et $Q = c(Q)Q_1$ donc $PQ = c(P)c(Q)P_1Q_1$ et $P_1Q_1 \in \mathbb{Z}[X]$.

Soit $p \in \mathcal{P}$ divisant tous les coefficients de P_1Q_1 . On définit, si $R = \sum_{i \in \mathbb{N}} \gamma_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$, $\bar{R} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \bar{\gamma}_i X^i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. $R \mapsto \bar{R}$ est un morphisme d'anneaux. Par hypothèse, on a $\overline{P_1Q_1} = \bar{0} = \overline{P_1Q_1}$ et par intégrité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, on a $\bar{P_1} = \bar{0}$ ou bien $\bar{Q_1} = \bar{0}$, ce qui est exclu par les hypothèses. Donc

$$\boxed{c(PQ) = c(P)c(Q)} \quad (1.158)$$

3. Soit alors P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (les inversibles de $\mathbb{Z}[X]$ étant -1 et 1). Posons

$$P = QR \in \mathbb{Q}[X]^2 \quad (1.159)$$

$$= c(Q)c(R) \underbrace{Q_1 R_1}_{\in \mathbb{Z}[X]} \quad (1.160)$$

Or $c(Q)c(R) = c(P)$ d'après le lemme de Gauss et nécessairement, $c(P) = 1$. Donc $P = Q_1 R_1$, et alors $Q_1 = \pm 1$ et $R_1 = \pm 1$, et Q ou R est constant,

$$\boxed{\text{donc } P \text{ est irréductible sur } \mathbb{Q}[X].} \quad (1.161)$$

Pour la réciproque, on a $2X$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ car de degré 1, mais pas sur $\mathbb{Z}[X]$ car ni 2 ni X ne sont inversibles.

4. Soit $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $\cos(\theta) \in \mathbb{Q}$. Sur $\mathbb{C}[X]$, on a $P = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

Et $e^{i\theta} \neq e^{-i\theta}$ car $\theta \not\equiv 0[\pi]$. On a $\theta = \frac{2\pi p}{q}$ donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}_q$, et $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ sont des racines de A . Donc, dans $\mathbb{C}[X]$, on a $P \mid A$ et $A \in \mathbb{Q}[X]$, donc il existe $B \in \mathbb{Q}[X]$ tel que

$$\underbrace{A}_{\in \mathbb{Q}[X]} = \underbrace{B}_{\in \mathbb{C}[X]} \times \underbrace{P}_{\in \mathbb{Q}[X]} \quad (1.162)$$

Or B s'obtient par la division euclidienne de A par P , qui est indépendante du corps de référence, il vient $B \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $A \mid P$ dans $\mathbb{Q}[X]$.

On a $c(A) = 1 = c(B)c(P)$ et $A = c(B)c(P)B_1P_1 = B_1P_1 \in \mathbb{Z}[X]$ et le coefficient dominant de A est donc 1. Donc le coefficient dominant de B_1 et de P_1 est aussi 1. En reportant, on a $P = P_1 \in \mathbb{Z}[X]$.

Donc $2 \cos(\theta) \in \mathbb{Z} \cap [-2, 2]$ donc $\cos \{\theta\} \in \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\}$ (-1 et 1 ne peuvent y être car on a supposé $\theta \not\equiv 0[\pi]$). Les solutions sont donc

$$\theta \in \left\{ 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right\} \quad (1.163)$$

(en rajoutant $\theta = 0$ et π).

■

Remarque 1.13. On a $\frac{\arccos(\frac{1}{3})}{\pi} \notin Q$ car $\cos(\theta) = \frac{1}{3}$ n'est pas dans l'ensemble solutions.

Solution 1.33.

1. Soit $P = a \prod_{i=1}^s (X - a_i)^{\alpha_i}$ avec les a_i distincts et $\alpha_i \geq 1$. a_i est racine de P' de multiplicité $\alpha_i - 1$. Il manque donc s racines. Si $\alpha = 0$, le résultat est évident, sinon on pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto P(x)e^{\frac{x}{\alpha}} \end{aligned}$$

et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{\alpha} (P(x) + \alpha P'(x)) \quad (1.164)$$

Comme P est scindé sur \mathbb{R} , P' est scindé sur \mathbb{R} (appliquer le théorème de Rolle entre les racines distinctes de P), donc f' s'annule $s - 1$ fois entre les racines de P donc

$$\boxed{P + \alpha P' \text{ aussi.}} \quad (1.165)$$

La dernière racine est réelle car sinon, le conjugué de la racine complexe supposée serait aussi racine.

2. On pose $R = \mu \prod_{i=0}^r (X - \beta_i)$. On pose

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbb{R}[X] &\rightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\mapsto P' \end{aligned}$$

On a alors

$$\sum_{i=0}^r a_i P^{(i)} = \sum_{i=0}^r a_i \Delta^i(P) = R(\Delta)(P) = \mu \prod_{i=0}^r (\Delta - \beta_i \text{id})(P) \quad (1.166)$$

Par récurrence sur r , on montre que

$$\boxed{\prod_{i=0}^r (\Delta - \beta_i \text{id})(P) \text{ est scindé}} \quad (1.167)$$

d'après la première question. ■

Remarque 1.14. On a aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P' + \lambda P$ est aussi scindé sur \mathbb{R} si P est scindé sur \mathbb{R} .

Solution 1.34. Soit $F = \frac{P'}{P}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ où a_i sont les racines de P . On note α le coefficient dominant de P , et on a

$$P' = \alpha \sum_{i=1}^n \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (X - a_j) \right) \quad (1.168)$$

On a donc $F = \sum_{i=1}^n \frac{1}{X - a_i}$ et on a

$$F' = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)^2} = \frac{P''P - P'P'}{P^2} \quad (1.169)$$

Pour $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$, on a

$$(n-1)(P'^2(x))(x) \geq nP(x)P''(x) \iff n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \leq -P'^2(x) \quad (1.170)$$

$$\iff \frac{P'^2(x)}{P^2(x)} \leq n(P''(x)P(x) - P'^2(x)) \times \frac{1}{P^2(x)} \quad (1.171)$$

$$\iff F^2(x) \leq n(-F'(x)) \quad (1.172)$$

$$\iff \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)} \right)^2 \leq \boxed{n \times \sum_{i=1}^n \frac{1}{(X - a_i)^2}} \quad (1.173)$$

qui est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{R}^2 avec $(1 \dots 1)$ et $(\frac{1}{x-a_1} \dots \frac{1}{x-a_n})$. ■

Remarque 1.15. Si $P = \alpha(X - a_1)^{m_1}(X - a_r)^{m_r}$, alors

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{X - a_i} \quad (1.174)$$

Solution 1.35.

1. $P' \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg(P') = \deg(P) - 1$. On a $P \wedge P' = 1$ car P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Comme le pgcd est obtenu par l'algorithme d'Euclide qui est indépendant du corps de référence, on a $P \wedge P' = 1$ sur $\mathbb{C}[X]$ donc

$$\boxed{P \text{ n'a que des racines simples sur } \mathbb{C}.} \quad (1.175)$$

2. Notons $P \in \mathbb{Q}[X]$ le polynôme minimal de α sur \mathbb{Q} (défini car $A(\alpha) = 0$ donc α est algébrique). Comme $A(\alpha) = 0$, on a $P \mid A$ et P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a $\deg(P) \geq 2$, on peut donc décomposer sur $\mathbb{Q}[X]$:

$$A = P^r \times P_1^{r_1} \times \dots \times P_s^{r_s} \quad (1.176)$$

avec les P_i irréductibles sur $\mathbb{Q}[X]$ non associés.

α n'est pas racine d'un P_i car sinon $P \mid P_i$ ce qui est impossible. α est racine simple de P donc $m(\alpha) = r > \frac{\deg(A)}{2}$. Par ailleurs, $\deg(P)^r \geq 2r > \deg(A)$ ce qui est impossible.

Donc

$$\alpha \in \mathbb{Q} \quad (1.177)$$

■

Solution 1.36. Soit $x \in A$. Il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n < m$ tel que $x^n = x^m$. Alors $x^{m-n} = e_G \in A$.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N}^* &\rightarrow A \\ n &\mapsto x^n \end{aligned}$$

n'est pas injective, car \mathbb{N}^* est infini et A est fini. Or $m - n \in \mathbb{N}^*$ donc

$$x^{m-n} = e_G \Rightarrow x = x \cdot x^{m-n-1} = e_G \quad (1.178)$$

donc $x^{-1} = x^{m-n-1} \in A$ et ainsi

$$\boxed{A \text{ est un sous-groupe.}} \quad (1.179)$$

■

Solution 1.37. Pour $\alpha = 0$, on a $1 + p \equiv 1 + p[p^2]$. Pour $\alpha = 1$, on a

$$(1 + p)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} p^k = 1 + p^2 + \binom{p}{2} p^2 \sum_{k=3}^p \binom{p}{k} p^k \quad (1.180)$$

Or $\binom{p}{2} p^2 = \frac{p(p-1)p^2}{2} \equiv 0[p^3]$ car p est premier plus grand que trois donc impair, et la somme est aussi congrue à 0 modulo p^3 .

Soit $\alpha \geq 1$, supposons que l'on ait

$$(1 + p)^p \equiv 1 + p^{\alpha+1}[p^{\alpha+2}] \quad (1.181)$$

Il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que

$$(1 + p)^{p^\alpha} = 1 + p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2} \quad (1.182)$$

Alors

$$(1 + p)^{p^{\alpha+1}} = (1 + \underbrace{p^{\alpha+1} + lp^{\alpha+2}}_x)^p \quad (1.183)$$

Or

$$(1 + x)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} x^k = 1 + p^{\alpha+2} + lp^{\alpha+3} + \underbrace{\sum_{k=2}^p \binom{p}{k} x^k}_{\text{divisible par } x^2} \quad (1.184)$$

Comme $p^{\alpha+1} \mid x$, $p^{2\alpha+2} \mid x^2$ avec $2\alpha + 2 \geq \alpha + 3$ ($\alpha \geq 1$). D'où

$$p^{\alpha+3} \mid x^2 \mid \sum_{k=2}^p \binom{p}{k} x^k \quad (1.185)$$

et donc

$$\boxed{(1 + p)^{p^{\alpha+1}} \equiv 1 + p^{\alpha+2}[p^{\alpha+3}]} \quad (1.186)$$

■

Remarque 1.16. Pour $p = 2, \alpha = 1$, on a $3^2 = 9 \not\equiv 5[8]$.

Solution 1.38. Si $7 = 2x^2 - 5y^2$, on a $\bar{0} = 2\bar{x}^2 - 5\bar{y}^2 = \bar{2}(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Comme 2 et 7 sont premiers entre eux donc $\bar{2}$ est inversible. Donc $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = \bar{0}$. La seule possibilité est $\bar{x} = \bar{0}$ et $\bar{y} = \bar{0}$. Donc $7 \mid x$ et $7 \mid y$. Si $x = 7k$ alors $x^2 = 49k^2$ donc $49 \mid x^2$ et $49 \mid y^2$ donc $47 \mid 2x^2 - 5y^2 = 7$ ce qui est faux.

Ainsi, pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\boxed{7 \neq 2x^2 - 5y^2} \quad (1.187)$$

■

Solution 1.39. \mathbb{F}_{19} est un corps car 19 est premier. On a donc $\bar{x}^3 = \bar{1}$ si et seulement si $(x - \bar{1})(x^2 + x - \bar{1}) = \bar{0}$. On a donc $x = \bar{1}$ ou $x^2 + x + \bar{1} = \bar{0}$. On a

$$x^2 + x + \bar{1} = (x + \bar{2}^{-1})^2 + \bar{3} \times \bar{4}^{-1} = (x + \bar{10})^2 + \bar{3} \times \bar{50} \quad (1.188)$$

Donc $(x + \bar{10})^2 = \bar{4}$ d'où

$$\boxed{x = \bar{-8} = \bar{11} \text{ ou } x = \bar{-12} = \bar{7}.} \quad (1.189)$$

■

Solution 1.40.

1. m est inversible si et seulement si $m \wedge 2^n = 1$ si et seulement si $m \wedge 2 = 1$ si et seulement si m est impair.

$$\boxed{\text{Il y a donc } 2^{n-1} \text{ inversibles.}} \quad (1.190)$$

2. On a $5^{2^{3-3}} = 5 \equiv 1 + 2^2[2^3]$. Par récurrence, soit $n \geq 3$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $5^{2^{n-3}} = 1 + 2^{n-1} + k2^n$ donc

$$\boxed{5^{2^{n-1}} = 1 + 2^n + k2^{n+1} + 2^{2n-2}(1 + 2k)^2 \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}]} \quad (1.191)$$

car $2n - 2 \geq n + 1$ ($n \geq 3$).

3. On a $5^{2^{n-2}} \equiv 1 + 2^n[2^{n+1}] \equiv 1[2^n]$ et $5^{2^{n-3}} \not\equiv 1[2^n]$.

$$\boxed{\text{Donc l'ordre de } \bar{5} \text{ est } 2^{n-2}.} \quad (1.192)$$

4. $gr \{ \bar{-1} \} = \{ \bar{-1}, \bar{1} \}$. $\bar{5}$ n'engendre pas $\bar{-1}$ car si $\bar{5}^k = \bar{-1}$, on a $\bar{5}^{2k} = \bar{1}$ d'où $2^{n-2} \mid 2k$ donc $2^{n-3} \mid k$. Ainsi, $k \in \{2^{n-3}, 2^{n-2}, 2^{n-1}\}$. Mais $\bar{5}^{2^{n-2}} = \bar{1}$, $\bar{5}^{2^{n-3}} = \bar{1} + \bar{2}^{n-1} \neq \bar{-1}$ donc un tel k n'existe pas.

Posons

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}, +) &\rightarrow (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}^\times, \times) \\ (\tilde{a}, \dot{b}) &\mapsto \bar{-1}^a \bar{5}^b \end{aligned}$$

Elle est bien définie car $\omega(\overline{-1}) = 2$ et $\omega(\overline{5}) = 2^{n-2}$. C'est évidemment un morphisme, on a égalité des cardinaux des ensembles de départ et d'arrivée, et on vérifie qu'elle est injective, et donc

$$\boxed{\text{c'est un isomorphisme.}} \quad (1.193)$$

■

Solution 1.41. Soit $(x, x') \in G^2$ tel que $x \cdot x' = e$. Alors

$$e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e \cdot x' \cdot x \quad (1.194)$$

si et seulement si

$$e \cdot x \cdot x' = e = x \cdot e \cdot x' \cdot x \cdot x' = x \cdot e \cdot x' \quad (1.195)$$

Soit $(x, x', x'') \in G^3$ tel que $x \cdot x' = e$ et $x' \cdot x'' = e$. On a alors

$$x \cdot x' \cdot x'' = x \cdot e = x = e \cdot x'' \quad (1.196)$$

Donc $x = e \cdot x''$ et $e = e \cdot x'' \cdot x'$. Si on prouve que $e \cdot x'' = x''$, alors $x = x''$ et $x' \cdot x = e$.

Montrons donc que pour tout $x \in G$, $e \cdot x = x$. Notons que s'il existe $e' \in G$ tel que pour tout $x \in G$, $e' \cdot x = x$, alors $e' \cdot e = e' = e$. Il vient donc

$$x' \cdot x = x' \cdot e \cdot x'' = x' \cdot x'' = e \quad (1.197)$$

Donc pour tout $x \in G$, l'élément x' est inverse à droite et à gauche : $x \cdot x' = e$.

Donc

$$x \cdot x' \cdot x = e \cdot x = x \cdot x' \cdot x = x \cdot e = x \quad (1.198)$$

Et donc e est neutre à gauche. Finalement,

$$\boxed{(G, \cdot) \text{ est un groupe.}} \quad (1.199)$$

■

Remarque 1.17. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective, on peut définir

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

pour un certain $x \in \mathbb{R}$. On a $f \circ g = \text{id}$. Si f n'est pas injective : s'il existait $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $h \circ f = \text{id}$, soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$ telle que $f(x) = f(x')$. En composant par h , on aurait $x = x'$ donc f serait injective ce qui n'est pas.

On peut donc avoir un inverse à droite mais pas à gauche.

Solution 1.42. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\underbrace{1 \dots 1}_{n \text{ fois en base } 10} = 1 + 10 + \dots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9} \quad (1.200)$$

On a

$$21 \mid \frac{10^n - 1}{9} \iff 3 \mid \frac{10^n - 1}{9} \text{ et } 7 \mid \frac{10^n - 1}{9} \quad (1.201)$$

$$\iff 27 \mid 10^n - 1 \text{ et } 7 \mid 10^n - 1 \quad (1.202)$$

car $7 \wedge 9 = 1$. Dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on a $\overline{10} = \overline{3}$ donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\overline{10}^{6k} = \overline{1}$ d'après le petit théorème de Fermat. Dans $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$, $\tilde{10}$ est inversible car $10 \wedge 27 = 1$. $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times, +, \times)$ comporte 18 éléments donc pour tout $k' \in \mathbb{N}$, on a $\tilde{10}^{18k'} = \tilde{1}$.

Lorsque $81 \mid n$, on a $21 \mid 1 \dots 1$.

Cherchons plus précisément les ordres de $\overline{10}$ dans $((\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*, \times)$ et de $\tilde{10}$ dans $((\mathbb{Z}/27\mathbb{Z})^\times, \times)$. Dans $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^*$, groupe de cardinal 6, on vérifie que l'ordre de 10 est 6. Dans l'autre groupe, on vérifie que l'ordre de $\tilde{10}$ est 3. Ainsi, $21 \mid 1 \dots 1$ si et seulement si $6 \mid n$.

Il y a donc une infinité de multiples de 21 qui s'écrivent avec uniquement des 1 en base 10.

(1.203)

■

Remarque 1.18. Il suffit de trouver l'ordre de 10 dans les deux ensembles et de prendre le ppcm.

Solution 1.43.

1. $X^d - 1$ a au plus d racines dans \mathbb{K} . Pour tout $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, x_0^k est racine de $X^d - 1_{\mathbb{K}}$ car $gr \{x_0\}$ a pour cardinal d . Donc les racines sont exactement les puissances de x_0 .

Soit $x \in \mathbb{K}^*$ d'ordre d . On a $x \in gr \{x_0\}$ car $x^d = 1$ (racine du polynôme de $X^d = 1_{\mathbb{K}}$). Or, dans le groupe cyclique engendré par x_0 ,

$$\boxed{\text{il y a } \varphi(d) \text{ éléments.}} \quad (1.204)$$

2. On a ou bien $\varphi(d)$ ou bien aucun élément d'ordre d dans \mathbb{K} . Soit d tel que $d \mid n$, on note $H_d = \{x \in K \mid \omega(x) = d\}$. On a

$$\mathbb{K}^* = \bigcup_{d \mid n} H_d \quad (1.205)$$

Alors

$$n = \sum_{d \mid n} |H_d| \leq \sum_{d \mid n} \varphi(d) = n \quad (1.206)$$

Alors pour tout d tel que $d \mid n$, on a $|H_d| = \varphi(d)$. En particulier, on a $|H_n| = \varphi(n) \geq 1$ donc H_n est non vide. Donc il existe (au moins) un élément d'ordre n , donc

$$\boxed{(\mathbb{K}^*, \times) \text{ est cyclique.}} \quad (1.207)$$

■

Solution 1.44.

1. Soit $x \in M$. On a $\bar{1} - \bar{x}^{-1}$ si et seulement si $\bar{x} = \bar{1}$ et $\bar{1} - \bar{x}^{-1} = \bar{1}$ si et seulement si $\bar{x} = \bar{0}$, ce qui n'est pas possible pour les deux cas.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est bien définie.}} \quad (1.208)$$

Soit $x \in M$, on a

$$f^2(x) = f(\bar{1} - \bar{x}^{-1}) \quad (1.209)$$

$$= \bar{1} - (\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1} \quad (1.210)$$

$$= (\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1}(\bar{1} - \bar{x}^{-1} - \bar{1}) \quad (1.211)$$

$$= -\bar{x}^{-1}(\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1} \quad (1.212)$$

Donc

$$f^3(x) = \bar{1} - (\bar{1} - (\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1})^{-1} \quad (1.213)$$

$$= \bar{1} - (-x\bar{x}^{-1}(\bar{1} - \bar{x}^{-1})^{-1})^{-1} \quad (1.214)$$

$$= \bar{1} + \bar{x}(\bar{1} - \bar{x}^{-1}) \quad (1.215)$$

$$= \bar{1} + \bar{x} - \bar{1} \quad (1.216)$$

$$= \bar{x} \quad (1.217)$$

Donc

$$f^3 = id_M \quad (1.218)$$

2. Soit $x \in M$, on a

$$f(x) = x \iff \bar{1} - \bar{x}^{-1} = x \quad (1.219)$$

$$\iff \bar{x}^2 - \bar{x} + \bar{1} = \bar{0} \quad (1.220)$$

$$\iff (\bar{x} - \bar{2}^{-1})^2 + \bar{3} \times \bar{4}^{-1} = \bar{0} \quad (1.221)$$

$$\iff \bar{-3} = (\bar{2}\bar{x} - \bar{1})^2 \quad (1.222)$$

f admet un point fixe si et seulement $\bar{-3}$ est un carré dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ car $\bar{y} = \bar{2}\bar{x} - \bar{1}$ si et seulement si $\bar{x} = \bar{2}^{-1}(\bar{y} + \bar{1})$.

Donc

$$\boxed{\bar{-3} \text{ est un carré dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ si et seulement si } f \text{ admet un point fixe.}} \quad (1.223)$$

3. Comme p est premier plus grand que 5, on a $p \equiv 1$ ou $2[3]$ donc $p - 2 \equiv 0$ ou $2[3]$ car $f^3 = id_M$, les longueurs des cycles qui composent f valent 1 ou 3.

Si f n'a pas de point fixe, tous les cycles sont de longueur 3, donc $3 \mid p - 2$ donc $p \equiv 2[3]$. Si $p \equiv 2[3]$, alors $3 \mid p - 2$, le nombre de points fixes est un multiple de 3 donc aussi du nombre de racine carrés de $\bar{-3}$. Et puisque l'on est dans un corps, il y a au plus 2 racines de $\bar{-3}$. Donc si $p \equiv 2[3]$, il n'y a pas de point fixe.

Donc

$$\boxed{\bar{-3} \text{ est un carré dans } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ si et seulement si } p \equiv 1[3].} \quad (1.224)$$

■

Solution 1.45. Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que x possède un développement décimal périodique. Alors il existe $(n_0, T) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq n_0$, $a_{n+T} = a_n$. On a alors

$$|x| = \underbrace{b_m \dots b_0, a_0 \dots a_{n_0-1}}_{\in \mathbb{Q}} + \frac{1}{10^{n_0-1}} \underbrace{(0, a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} a_{n_0} \dots)}_{=y} \quad (1.225)$$

$$10^T y - y = a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1} \in \mathbb{N} \quad (1.226)$$

et donc

$$y = \frac{a_{n_0} \dots a_{n_0+T-1}}{10^T - 1} \in \mathbb{Q} \quad (1.227)$$

Donc $x \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, soit $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p = aq + b$ avec $b \in \llbracket 0, q-1 \rrbracket$. Si $b = 0$, on arrête. On a sinon

$$x = a + \frac{1}{10^k} \frac{10^k b}{q} \quad (1.228)$$

où $k = \min\{m \geq 1 \mid 10^m b > q\}$. On réitère l'algorithme avec $\frac{10^k b}{q}$ car on a $\left\lfloor \frac{10^k b}{q} \right\rfloor \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ par définition de k .

Il y a q restes possibles dans la division euclidienne par q . Ainsi, au bout d'au plus de $q+1$ itérations, on retrouve un reste précédent. Par unicité de la division euclidienne, on obtient un développement décimal périodique.

Donc

$$\boxed{x \in \mathbb{Q} \text{ si et seulement si } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists T \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, a_{n+T} = a_n.} \quad (1.229)$$

■

Remarque 1.19. On peut écrire $q = 2^a 5^b q'$ avec $q' \wedge 2 = q' \wedge 5 = 1$. On se ramène alors à $q \wedge 2 = q \wedge 5 = 1$. En reportant dans l'écriture décimale de x , on a

$$\frac{\alpha}{q} = \frac{\beta}{10^T - 1} \quad (1.230)$$

avec $\alpha \wedge q = 1$. On a donc $q \mid 10^T - 1$ d'après le lemme de Gauss. T revient donc à l'ordre de $\overline{10}$ dans $((\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times, \times)$ qui contient $\varphi(q)$ éléments. Par défaut, on a donc $T = \varphi(q)$.

Solution 1.46.

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Si $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $H_n(m) = 0 \in \mathbb{Z}$. Si $m \geq n$, on a $H_n(m) = \binom{m}{n} \in \mathbb{Z}$. Si $m < 0$, on a

$$H_n(m) = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} = (-1)^n \binom{-m+n-1}{-m-1} \in \mathbb{Z} \quad (1.231)$$

Donc

$$\boxed{H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}} \quad (1.232)$$

2. Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$. On a $H_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ donc $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Supposons $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base étagée en degré de $\mathbb{C}[X]$. Donc il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$. Par récurrence, on a $P(0) = a_0 \in \mathbb{Z}$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, supposons $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^{k+1}$. On a alors

$$P(k+1) = \underbrace{\sum_{i=0}^k \underbrace{a_i}_{\in \mathbb{Z}} H_i}_{\in \mathbb{Z}} + a_{k+1} \underbrace{H_{k+1}(k+1)}_{=1} \quad (1.233)$$

Donc $a_{k+1} \in \mathbb{Z}$.

Donc

$$\boxed{P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z} \text{ si et seulement si } \exists n \in \mathbb{N}, \exists (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}, P = \sum_{k=0}^n a_k H_k.} \quad (1.234)$$

■

Remarque 1.20. Les translation $X + \alpha$ sont les seules pour lesquelles on a $(X + \alpha)(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. En effet, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, on a $P \in \mathbb{Q}[X]$ d'après ce qui précède. Si $\deg(P) \geq 2$, quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer le coefficient dominant de P strictement positif. On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} P'(x) = +\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que P est strictement croissant sur $[A, +\infty[$. De plus, $P(x+1) - P(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$. Donc il existe $A' > 0$ tel que $P(x+1) > P(x) + 1$. Pour $n \geq \max(A, A')$, on a $P(n+1) \geq P(n) + 2$ ce qui contredit $P(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Donc le degré de P est inférieur à 1.

Solution 1.47. Le coefficient en X^k s'écrit $a_{k-1} - \alpha a_k \in \mathbb{Q}$. Si $a_k \in \mathbb{Q}$, on a donc $a_{k-1} \in \mathbb{Q}$. Il est donc impossible d'avoir deux coefficients consécutifs rationnels. Or $x_{n-1} \in \mathbb{Q}$ car c'est le coefficient

dominant de P . Donc

$$\boxed{\alpha \text{ est nécessairement racine simple.}} \quad (1.235)$$

■

Solution 1.48. Soit $\Delta = P \wedge P' = \Delta$. On a $\deg(\Delta) \in \{1, 2, 3, 4\}$ car $\Delta \mid P'$.

Si $\deg(\Delta) = 4$, alors $\Delta = P'$ (car associé). Donc il existe $\beta \in \mathbb{C}$ d'où $\underbrace{P}_{\in \mathbb{Q}[X]} = (X - \beta) \underbrace{P'}_{\in \mathbb{Q}[X]}$. Par division euclidienne, $X - \beta \in \mathbb{Q}[X]$ et $\beta \in \mathbb{Q}$ d'après l'algorithme de la division euclidienne.

Si $\deg(\Delta) = 1$, on a $P = X - \beta$ avec $\beta \in \mathbb{Q}$ racine de P .

Si $\deg(\Delta) = 2$, si $\Delta = (X - \beta)^2$, on a $\Delta' = 2(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\beta \in \mathbb{Q}$ racine de Δ donc de P . Si $\Delta = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$ avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$. α_1 et α_2 sont racines doubles de P donc $P = (X - \beta) \underbrace{(X - \alpha_1)^2(X - \alpha_2)^2}_{=\Delta^2 \in \mathbb{Q}[X]}$ Par division euclidienne, $X - \beta \in \mathbb{Q}[X]$ et donc $\beta \in \mathbb{Q}$.

Si $\deg(\Delta) = 3$, si $\Delta = (X - \beta)^3$, on a $\Delta^{(2)} = 6(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$ donc $\beta \in \mathbb{Q}$. Si $\Delta = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3)$ avec α_1, α_2 et α_3 distinctes. α_1, α_2 et α_3 seraient racines doubles de P ce qui contredit $\deg(P) = 5$. Si $\Delta = (X - \alpha)^2(X - \beta)$, α est racine triple de P et β racine double de P donc $P = (X - \alpha)^3(X - \beta)^2 \in \mathbb{Q}[X]$. Par division euclidienne, $(X - \alpha)(X - \beta) \in \mathbb{Q}[X]$ et

$$X - \alpha = \frac{\Delta}{(X - \alpha)(X - \beta)} \in \mathbb{Q}[X] \quad (1.236)$$

donc $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Donc

$$\boxed{P \text{ admet au moins une racine rationnelle.}} \quad (1.237)$$

■

Solution 1.49.

1. $1 \in \mathbb{Z}[i], 0 \in \mathbb{Z}[i], i \in \mathbb{Z}[i]$. Soit $(a, b, a', b') \in \mathbb{Z}^4$:

$$\begin{cases} (a + ib) - (a' + ib') = (a - a') + i(b - b') \in \mathbb{Z}[i] \\ (a + ib) \times (aa' - bb') + i(ab' + ba') \in \mathbb{Z}[i] \end{cases} \quad (1.238)$$

Donc $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de \mathbb{C} contenant i .

Soit A un sous anneau de \mathbb{C} contenant i . A est stable par x donc $i^4 = 1 \in A$. A est stable par $+$ donc $\mathbb{Z} \subset A$, puis $i\mathbb{Z} \subset A$ donc $\mathbb{Z}[i] \subset A$.

$$\boxed{\mathbb{Z}[i] \text{ est donc le plus petit sous anneau de } \mathbb{C} \text{ contenant } i.} \quad (1.239)$$

2. Si $|z|^2 = 1$ c'est-à-dire $a^2 + b^2 = 1$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{|z|^2} = a - ib \in \mathbb{Z}[i] \quad (1.240)$$

Si z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$, il existe $z' \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$ donc $|z|^2|z'|^2 = 1$ donc $|z|^2 = 1$.

Donc

$$\boxed{z \text{ est inverse dans } \mathbb{Z}[i] \text{ si et seulement si } |z|^2 = 1.} \quad (1.241)$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. Si $|a| \geq 2$ ou $|b| \geq 2$, alors $a^2 + b^2 \geq 4$ donc si $|z|^2 = 1$, alors $a^2 + b^2 = 1$ et $(|a| = 1 \text{ et } |b| = 0)$ ou $(|a| = 0 \text{ et } |b| = 1)$. Donc

$$\boxed{U = \{1, -1, i, -i\}} \quad (1.242)$$

3. (a) Si $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - n| \leq \frac{1}{2}$ (faire un dessin et le montrer grâce aux parties entières). Soit alors $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, on prend un $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $|x_0 - a| \leq \frac{1}{2}, |y_0 - b| \leq \frac{1}{2}$. Et pour $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, on a

$$\boxed{|z - z_0|^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 \leq \frac{1}{2}} \quad (1.243)$$

(b) Soit $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$, on a $z_1 = qz_2 + r$ si et seulement si $\frac{z_1}{z_2} - q = \frac{r}{z_2}$. On a $|r| < |z_1|$ si et seulement si $\left| \frac{z_1}{z_2} - q \right| < 1$. On a $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$ donc d'après 3.(a), il existe $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\left| \frac{z_1}{z_2} - q \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$. On pose alors $r = z_1 - qz_2 \in \mathbb{Z}[i]$ par stabilité. Il vient donc $|r| < |z_2|$. Ainsi,

$$\boxed{\exists (q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2, z_1 = qz_2 + r \text{ et } |r| < |z_1|.} \quad (1.244)$$

Si $z_2 = 1$ et $z_1 = \frac{1+i}{2}$, on peut prendre $q \in \{0, 1, i, 1+i\}$. Donc

$$\boxed{\text{il n'y a pas unicité.}} \quad (1.245)$$

- (c) Soit $I \neq \{0\}$ un idéal de $\mathbb{Z}[i]$. On note $n_0 = \min \{|z|^2 \mid z \in I \setminus \{0\}\}$ (partie non vide de \mathbb{N}^*). Soit $z_0 \in I \setminus \{0\}$ tel que $|z_0|^2 = n_0$. On a directement $z_0\mathbb{Z}[i] \subset I$ (I est un idéal). Réciproquement, soit $z \in I$, d'après 3.(b), il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que

$$r = \underbrace{z}_{\in I} - \underbrace{z_0}_{\in I} \underbrace{q}_{\in \mathbb{Z}[i]} \in I \quad (1.246)$$

et $|r|^2 < n_0$. Nécessairement, $r = 0$ et $z = z_0 q \in z_0\mathbb{Z}[i]$. Donc $I = z_0\mathbb{Z}[i]$. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{Z}[i] \text{ est principal.}} \quad (1.247)$$

4. Si $|z|^2 = 1$, alors $z \in U$ donc c'est bon. On travaille ensuite par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la décomposition existe pour $z \in \mathbb{Z}[i]$ avec $|z|^2 \leq n$. Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z|^2 = n + 1$. On a $|z|^2 \geq 2$ donc $z \in U$. Si z est irréductible, c'est bon. Sinon, il existe $(z_1, z_2) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $z = z_1 z_2$ et z_1 et z_2 non inversibles. Alors $|z_1|^2 \geq 2$ et $|z_2|^2 \geq 2$. Or $|z|^2 = n + 1 = |z_1|^2 |z_2|^2$ donc $|z_1|^2 \leq n$ et $|z_2|^2 \leq n$. Par hypothèse de récurrence, on peut décomposer z_1 et z_2 , donc z est décomposable

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}} \quad (1.248)$$

Pour l'unicité, soit $z \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ tel que $z = u \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\nu_\rho(z)} = v \prod_{\rho \in \mathcal{P}_0} \rho^{\mu_\rho(z)}$. Le théorème de Gauss est valable dans $\mathbb{Z}[i]$, car c'est un anneau principal. S'il existe $\rho_0 \in \mathcal{P}_0$ tel que $\nu_{\rho_0}(z) < \mu_{\rho_0}(z)$, alors

$$\rho_0 \mid \prod_{p \in \mathcal{P}_0 \setminus \{\rho_0\}} \rho^{\nu_\rho(z)} \quad (1.249)$$

ce qui est proscrit par le théorème de Gauss. On a donc pour tout $\rho \in \mathcal{P}_0$, $\nu_\rho(z) = \mu_\rho(z)$. En reportant, on a $u = v$.

$$\boxed{\text{D'où l'unicité de la décomposition.}} \quad (1.250)$$

■

Solution 1.50.

1. On a $\bar{1} \in R$. Soit $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in R^2$, il existe $(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \in (\mathbb{F}_p^*)^2$ tel que $\bar{x}_1 = \bar{y}_1^2$ et $\bar{x}_2 = \bar{y}_2^2$. On a alors

$$\overline{x_1 x_2}^{-1} = (\overline{y_1 y_2}^{-1})^2 \in R \quad (1.251)$$

donc

$$\boxed{R \text{ est un sous groupe de } (\mathbb{F}_p^*, \times)}. \quad (1.252)$$

Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{F}_p^* &\rightarrow \mathbb{F}_p^* \\ \bar{y} &\mapsto \bar{y}^2 \end{aligned}$$

On a $\text{Im}(\varphi) = R$. Comme \mathbb{F}_p est un corps, chaque éléments de R a exactement 2 antécédents par φ . Donc $|R| = \frac{|\mathbb{F}_p^*|}{2} = \frac{p-1}{2}$.

S'il existe $\bar{y} \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $\bar{a} = \bar{y}^2$, on a $\bar{a}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{y}^{p-1} = \bar{1}$ par le théorème de Fermat.

Réciproquement, si $\bar{a}^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$, $X^{\frac{p-1}{2}} - \bar{1}$ admet au plus $\frac{p-1}{2}$ racines dans \mathbb{F}_p^* . Tous les éléments de R sont racines de ce polynôme, ce sont donc ses seules racines. Donc $a \in R$.

$$\boxed{\text{Donc } a \in R \text{ si et seulement si } a^{\frac{p-1}{2}} = 1.} \quad (1.253)$$

2. Si $p = a^2 + b^2$, alors $\bar{0} = \bar{a}^2 + \bar{b}^2$. Si $\bar{a} = \bar{b} = \bar{0}$, on a $p \mid a$ et $p \mid b$ donc $p^2 \mid p$ ce qui est exclu. Par exemple, si $\bar{a} \neq \bar{0}$, on a $\bar{1} = -\bar{b}^2 \bar{a}^{-2}$ donc $\overline{-1} = (\bar{a}^{-1} \bar{b})^2 \in R$ d'après 1. On a donc $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$ si et seulement si $2 \mid \frac{p-1}{2}$ (car p est premier plus grand que 3) d'où $4 \mid p-1$ donc

$$\boxed{p \equiv 1[4]} \quad (1.254)$$

3. On a $|\mathbb{F}_p| = p$, $E(\sqrt{p}) \leq \sqrt{p} < E(\sqrt{p}) + 1$ et $|\{0, \dots, E(\sqrt{p})\}|^2 = (E(\sqrt{p}) + 1)^2 > p$ (p est premier, ce n'est pas un carré) donc (cardinalité)

$$\boxed{f \text{ n'est pas injective.}} \quad (1.255)$$

Donc il existe

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in (\{0, \dots, E(\sqrt{p})\}^2)^2 \quad (1.256)$$

avec $(a_1, b_1) \neq (a_2, b_2)$ et $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Donc

$$\bar{a}_1 - \bar{k} \bar{b}_1 = \bar{a}_2 - \bar{k} \bar{b}_2 \Rightarrow \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = \bar{k}(\bar{b}_1 - \bar{b}_2) \quad (1.257)$$

Si $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$, alors $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ donc $p \mid b_1 - b_2$ et $p \mid a_1 - a_2$ donc $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ ce qui n'est pas vrai. Donc $\bar{b}_1 \neq \bar{b}_2$. Posons $b_0 = b_1 - b_2$ et $a_0 = a_1 - a_2$. On a $\bar{b}_0 \neq \bar{0}$. Il vient donc $(|a_0|, |b_0|) \in \llbracket 1, E(\sqrt{p}) \rrbracket^2$, $\bar{a}_0 = \bar{k} \bar{b}_0$ donc

$$\boxed{\bar{k} = \bar{a}_0 \bar{b}_0^{-1}} \quad (1.258)$$

4. Si $p \equiv 1[4]$, en remontant les calculs, on a $(\overline{-1})^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$ donc $\overline{-1} \in R$ et il existe $\overline{k} \in \mathbb{F}_p^*$ tel que $\overline{-1} = \overline{k}^2$. Alors d'après 3., il existe (a_0, b_0) tels que $\overline{k} = \overline{a_0 b_0}^{-1}$. Il vient alors $\overline{-1} = \overline{a_0}^2 (\overline{b_0}^{-1})^2$ donc $\overline{-b_0}^2 = \overline{a_0}^2$. On a

$$p \mid a_0^2 + b_0^2 \in \llbracket 2, 2E(\sqrt{p}) \rrbracket^2 \subset \llbracket 2, 2p-1 \rrbracket \quad (1.259)$$

Nécessairement, $a_0^2 + b_0^2 = p$ et

$$\boxed{p \text{ est somme de deux carrés.}} \quad (1.260)$$

■

Solution 1.51.

1. Soit $(m, n) \in A^2$. Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$ tel que $m = a^2 + b^2 = |a + ib|^2$ et $n = c^2 + d^2 = |c + id|^2$. Donc

$$\boxed{m \times n = |ac - bd + i(bc + ad)|^2 = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \in A} \quad (1.261)$$

2. On a

$$\boxed{n = \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_1} p^{\nu_p(n)}}_{\in A \text{ car } \mathcal{P}_1 \subset A} \times \underbrace{\prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{\nu_p(n)}}_{= \prod_{p \in \mathcal{P}_2} p^{2\alpha_p} \in A} \in A} \quad (1.262)$$

3. Soit $n \in A$, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ avec $n = a^2 + b^2$. Soit $p \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, on a $p \mid a^2 + b^2$ donc $\overline{a^2 + b^2} = \overline{0}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Si $p \nmid a$ ou $p \nmid b$, alors $\overline{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \overline{0}$ donc $\overline{-1} \in R$ (résidus quadratiques, voir exercice précédent). Donc $p = 2$ ou $p \equiv 1[4]$.

Si $p \mid a$ et $p \mid b$, $a = p^k a'$, $b = p^l b'$ avec $p \nmid a'$ et $p \nmid b'$. On suppose $1 \leq k \leq l$ (quitte à échanger a et b). On a

$$a^2 + b^2 = p^{2k}(a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2) = n \quad (1.263)$$

donc

$$p \mid a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2 \quad (1.264)$$

et $\overline{a'^2 + p^{2(l-k)}b'^2} = \overline{0}$. Nécessairement, $l = k$. De même $p \in \mathcal{P}_1$. Par contraposée, ν_p est pair.

$$\boxed{\text{D'où la réciproque.}} \quad (1.265)$$

■

2 Séries numériques et familles sommables

Solution 2.1.

1. On a $b_0 = a_1 = 5$, $b_1 = a_3 = 13$ et pour $p \geq 2$, $b_p = 2b_{p-1} + 3b_{p-2}$.

On a donc l'équation caractéristique $x^2 - 2x - 3 = 0$. Les deux solutions sont 3 et -1. Donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $b_p = \lambda 3^p + \mu(-1)^p$.

On a alors $b_0 = 5 = \lambda + \mu$ et $b_1 = 13 = 3\lambda - \mu$. On trouve alors

$$\boxed{\lambda = \frac{9}{2} \text{ et } \mu = \frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

2. On le montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

3. Si $3^p \leq n < 3^{p+1}$, on a $a_n = b_p = \frac{9}{2}3^p + \frac{1}{2}(-1)^p$. Alors

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^{p+1}} < \frac{a_n}{n} \leq \frac{9}{2} + \frac{1}{2}(-1)^p \frac{1}{3^p} \quad (2.2)$$

Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \quad (2.3)$$

Soit $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{p_n} \leq \sigma(n) < 3^{p_n+1}$. On a

$$p_n = \lfloor \log_3(\sigma(n)) \rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (2.4)$$

En reportant, on a $\frac{3}{2} \leq \lambda \leq \frac{9}{2}$.

Si $\sigma(n) = 3^n$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^n} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2} \quad (2.5)$$

Si $\sigma(n) = 3^{n+1} - 1$, on a

$$\frac{a_{3^n}}{3^n} = \frac{b_n}{3^{n+1} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{2} \quad (2.6)$$

Soit $\mu \in [1, 3[$ et $\sigma(n) = \lfloor 3^n \mu \rfloor \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3^n \mu$. Alors

$$\frac{a_{\sigma(n)}}{\sigma(n)} = \frac{b_n}{\lfloor 3^n \mu \rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{b_n}{3^n \mu} = \frac{9}{2\mu} + \frac{1}{2\mu} \frac{(-1)^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{9}{2\mu} \quad (2.7)$$

$$\boxed{\text{Donc tout réel compris dans } \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right] \text{ est valeur d'adhérence.}} \quad (2.8)$$

Solution 2.2.

1.

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - x \end{aligned}$$

est continue, $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$, donc le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $l \in [a, b]$ avec $g(l) = 0$, d'où

$$\boxed{f(l) = l} \quad (2.9)$$

2. On note $A = \{\lambda \mid \lambda \text{ est valeur d'adhérence}\}$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass indique que A est non vide. De plus, A est borné car $A \subset [a, b]$. Soit $\lambda = \inf(A)$ et $\mu = \sup(A)$.

Si $\lambda = b$, on a $\mu = b$ et $A = \{b\} = \{\lambda\} = \{\mu\}$.

Si $\lambda < b$, soit $\varepsilon > 0$. Si $\lambda \notin A$, $\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in]\lambda, \lambda + \varepsilon[\}$ est infini. Par définition, λ est valeur d'adhérence. Donc $\lambda \in A$, et de même $\mu \in A$.

Soit $\nu \in]\lambda, \mu[$ avec $\lambda < \mu$. Si $\nu \notin A$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\{k \in \mathbb{N} \mid |x_k - \nu| < \varepsilon_0\}$ est fini. Donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $x_n \notin]\nu - \varepsilon_0, \nu + \varepsilon_0[$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon_0$. Soit alors $n \geq \max(N_0, N_1)$. Si $x_n \leq \nu - \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \leq \nu - \varepsilon_0$. Si $x_n \geq \nu + \varepsilon_0$, alors $x_{n+1} \geq \nu + \varepsilon_0$. Ceci contredit que λ et μ sont valeur d'adhérence.

Ainsi, $\nu \in A$ et

$$\boxed{[\lambda, \mu] \text{ est le segment des valeurs d'adhérence.}} \quad (2.10)$$

3. Si (x_n) converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Réciproquement, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$, d'après 2., on a $A = [\lambda, \mu]$. On suppose $\lambda < \nu$. Ainsi, $\frac{\lambda + \nu}{2} = \alpha$ est valeur d'adhérence. Donc il existe $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)+1} = f(\alpha)$ par continuité de f et c'est aussi égale à $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\sigma(n)} = \alpha$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} - x_n = 0$. Ainsi,

$$\boxed{f(\alpha) = \alpha} \quad (2.11)$$

Par ailleurs, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in [\lambda, \mu]$ et $f(x_{n_0}) = x_{n_0} \in A$, alors pour tout $n \geq n_0$, on a $x_n = x_{n_0}$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lambda = \mu : (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et a une unique valeur

d'adhérence.

$$\boxed{\text{Donc } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}} \quad (2.12)$$

■

Solution 2.3. On a $u_n = e^{i2^n \theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ car $l = l^2$ et $|l| = 1$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique au-delà d'un certain rang, il existe $T \in \mathbb{N}^*$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_{n+T} = u_n$. En particulier, $u_{N_0+T} = u_{N_0}$. On veut alors $2^{N_0+T}\theta \equiv 2^{N_0}\theta[2\pi]$. D'où $2^{N_0+T}\theta = 2\theta + 2k\pi$ donc $2^{N_0}(2^T - 1)\theta = 2k\pi$. Donc $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réciproquement, si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$, son développement binaire est périodique à partir d'un certain rang, et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $U_{n+1} = U_n = U_{N^2}$. Comme $|U_N| = 1$, alors $2^n \theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $\frac{\theta}{2\pi}$ est dyadique.

Réciproquement, s'il existe $p \in \mathbb{N}$, $u_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{2^{n_0}}$ (nombre dyadique). Alors pour tout $n \geq n_0$, $2^n \theta \in 2\pi\mathbb{N}$ et $u_n = u_{n_0} = 1$.

Pour la densité, on prend une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en écrivant successivement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, tous les paquets de k entiers sont dans $\{0, 1\}^k$. Soit $x \in [0, 1[$ tel que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n} \quad (2.13)$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, il existe $p_N \in \mathbb{N}$,

$$2^{p_N} \theta = 2\pi \underbrace{(\dots)}_{\in \mathbb{N}} + 2\pi \left(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \underbrace{\dots}_{\in [0, \frac{1}{2^N}[} \right) \quad (2.14)$$

On a alors

$$e^{i2^{p_N} \theta} = e^{i2\pi \left(\frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} + \dots \right)} \quad (2.15)$$

et

$$\left| \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_N}{2^N} - x \right| \leq \frac{1}{2^N} \quad (2.16)$$

D'où $\lim_{N \rightarrow +\infty} u_{p_N} = e^{i2\pi x}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans \mathbb{U} . ■

Solution 2.4. Si $a = 0$ et $b = 0$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou inversement), $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Si $a > 0$ ou $b > 0$, on a

$$u_n = \exp\left(n^2 \ln\left(\frac{e^{\frac{1}{n} \ln(a)} + e^{\frac{1}{n} \ln(b)}}{2}\right)\right) \quad (2.17)$$

$$= \exp\left(n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{2n} \ln(ab) + \frac{1}{4n^2} (\ln(a)^2 + \ln(b)^2)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \quad (2.18)$$

$$= \exp\left(\frac{n}{2} \ln(ab) + \frac{1}{4} (\ln(a)^2 + \ln(b)^2 + o(1))\right) \quad (2.19)$$

Si $ab > 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty} \quad (2.20)$$

Si $ab < 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0} \quad (2.21)$$

Si $ab = 1$, on a

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{\frac{1}{2} \ln(a)^2}} \quad (2.22)$$

■

Solution 2.5.

1. Soit $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n > 0$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$).

$$J = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid x_k \geq \frac{M}{2} \right\} \quad (2.23)$$

est fini car $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et est non vide. On définit

$$\varphi(0) = \min \left\{ k \in J \mid x_k = \max\{x_n \mid n \in J\} \right\} \quad (2.24)$$

Pour tout $n \in J$, $x_{\varphi(0)} \geq x_n$. Si $n \notin J$, $x_n \leq \frac{M}{2} < x_{\varphi(0)}$. Ainsi,

$$\boxed{x_{\varphi(0)} = \max\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}} \quad (2.25)$$

Puis on recommence avec

$$\left\{x_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{\varphi(0)\}\right\} \quad (2.26)$$

2. Pour $l = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < \varepsilon$. On pose

$$\boxed{I = \{N\}} \quad (2.27)$$

et on a bien

$$\left| \sum_{k \in I} x_k - l \right| \leq \varepsilon \quad (2.28)$$

Si $l = +\infty$, soit $A > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^N x_k > A$ (car $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = +\infty$). Donc on peut prendre

$$\boxed{I = \{0, \dots, N\}} \quad (2.29)$$

Si $l \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\varepsilon < l$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, on a $x_n < \varepsilon$ et $\sum_{n=N_0}^{+\infty} x_n = +\infty$. Donc il existe un plus petit entier N_1 tel que $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \geq l - \varepsilon$. Comme $x_{N_1} < \varepsilon$, on a $\sum_{n=N_0}^{N_1} x_n \leq l + \varepsilon$. Donc

$$\boxed{I = \{N_0, \dots, N_1\}} \quad (2.30)$$

■

Solution 2.6. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2 \quad (2.31)$$

Montrons que $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. D'abord, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l \in \overline{R}_+^*$.

Si $l < +\infty$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l}$ et donc $u_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{l^2}$ et la série diverge. Donc $l = +\infty$ et comme

$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On observe ensuite que $S_n - S_{n-1} = u_n^2 = o(1)$ donc $S_{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$. Ainsi,

$$\underbrace{u_n^2 S_n^2}_{= (S_n - S_{n-1}) S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (2.32)$$

et on a

$$\frac{S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2}{S_n^2} = 1 + \frac{S_{n-1}}{S_n} + \frac{S_{n-1}^2}{S_n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \quad (2.33)$$

donc

$$\underbrace{(S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2)}_{= S_n^3 - S_{n-1}^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \quad (2.34)$$

On applique le théorème de Césaro à la suite $S_n^3 - S_{n-1}^3$:

$$\frac{S_n^3 - S_0^3}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3 \quad (2.35)$$

donc $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}$, et comme $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{S_n}$, on a bien

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}} \quad (2.36)$$

Réciproquement, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$ avec $u_0 = 1$. On a

$$u_n^2 = \frac{1}{(3n)^{\frac{2}{3}}} \quad (2.37)$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \times 3n^{\frac{1}{3}} = (3n)^{\frac{1}{3}} \quad (2.38)$$

et donc

$$\boxed{u_n \times \sum_{k=0}^n u_k^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{3n}} = 1} \quad (2.39)$$

■

Remarque 2.1. On rappelle que l'on a la comparaison série-intégrale, pour $\alpha < 1$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_1^N \frac{dt}{t^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} N^{1-\alpha} \quad (2.40)$$

Solution 2.7. Tout d'abord, on montre que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4 \quad (2.41)$$

en posant

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$ et on a $f''(x) = \cosh(x) - 1 \geq 0$ et $f'(0) = 0$. Comme $f(0) = 0$, on a pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$.

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 sur f , on a

$$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{24} \times \underbrace{\sup_{t \in [0, 1]} |\cosh^{(4)}(t)|}_{\leq \cosh(1)} \leq x^4 \quad (2.42)$$

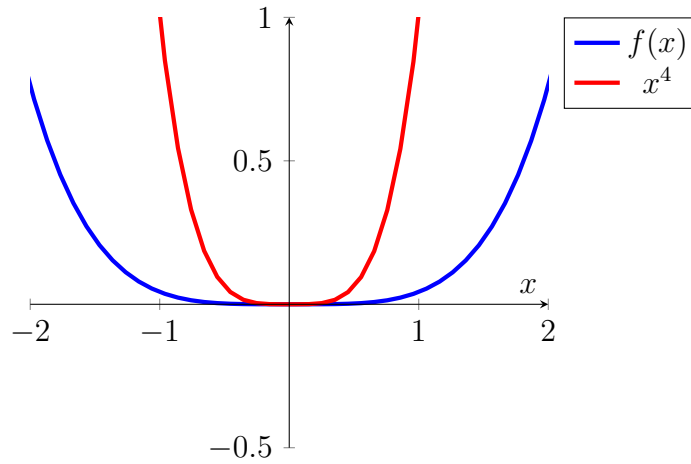


FIGURE 1 $0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$-x_n = \sum_{k=1}^n \left[\cosh\left(\frac{1}{\sqrt{k+n}}\right) - 1 \right] \quad (2.43)$$

Ainsi,

$$0 \leq x_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.44)$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = H_{2n} - H_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - \ln(n) - \gamma = \ln(2) + o(1) \quad (2.45)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\frac{\ln(2)}{2}} \quad (2.46)$$

■

Solution 2.8. φ est dérivable sur \mathbb{R} et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = e^x - 1$.

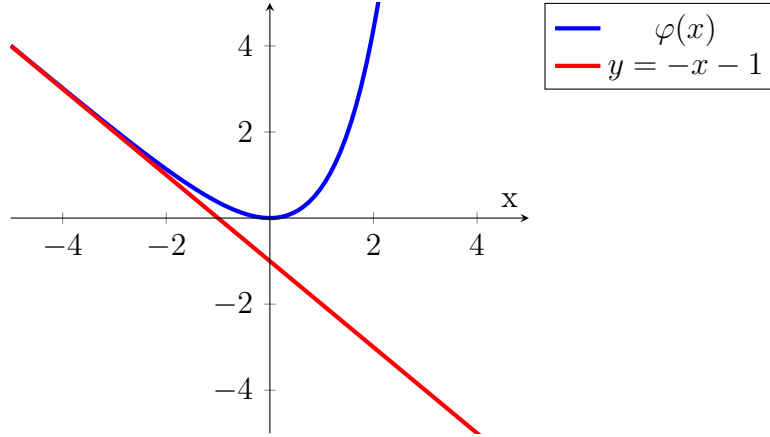


FIGURE 2 $2 - e^x - x - 1 \geq -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a

$$0\varphi(a_n) \leq \varphi(a_n) + \varphi(b_n) + \varphi(c_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.47)$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(a_n) = 0 \quad (2.48)$$

Par l'absurde, soit $\varepsilon > 0$. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tel que $|a_k| > \varepsilon$. Cela implique alors

$$\varphi(a_k) \geq \min(\varphi(\varepsilon), \varphi(-\varepsilon)) > 0 \quad (2.49)$$

ce qui contredit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(a_n) = 0$. Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0} \quad (2.50)$$

et c'est pareil pour b_n et c_n . ■

Solution 2.9.

1. Soit

$$\begin{aligned} f :]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x(1 - x) \end{aligned}$$

On a $f(x) \in]0, \frac{1}{4}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, \frac{1}{4}]$. Par récurrence, on a donc $u_{n+1} \leq u_n$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Donc v_n est bien définie.

(2.51)

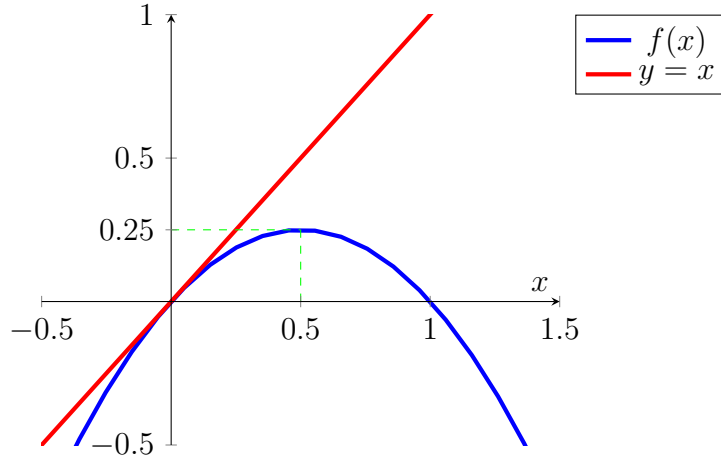


FIGURE 3 – $x(1-x) \in]0, \frac{1}{4}]$ pour $x \in]0, 1[$.

2. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} \times \frac{1}{1-u_n} = \frac{1}{u_n} (1 + u_n + o(u_n)) = \frac{1}{u_n} + 1 + o(1) \quad (2.52)$$

Donc $v_{n+1} - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. D'après le théorème de Césaro, on a

$$\frac{v_n - v_0}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (2.53)$$

donc $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} (1 + u_n + u_n^2 + O(u_n^3)) = \frac{1}{u_n} + 1 + u_n + \underbrace{O(u_n^2)}_{= o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \quad (2.54)$$

donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = 1 + u_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.55)$$

et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$. En sommant, on a donc

$$v_n - v_0 = n + \ln(n) + o(\ln(n)) \quad (2.56)$$

On a alors

$$u_n = \frac{1}{n + \ln(n) + o(\ln(n))} \quad (2.57)$$

$$= \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \quad (2.58)$$

$$= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right) \quad (2.59)$$

$$= \frac{1}{n} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \alpha_n} \quad (2.60)$$

α_n est le terme général d'une série à termes positifs convergentes car $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Donc

$$v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{n} + \alpha_n + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.61)$$

et en sommant,

$$\boxed{v_n = n + \ln(n) + O(1)} \quad (2.62)$$

et comme montré auparavant,

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)} \quad (2.63)$$

■

Solution 2.10.

1. Soit

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n - x - n \end{aligned}$$

On a $f'_n(x) = nx^{n-1} - 1 = 0$ si et seulement si

$$x = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \alpha_n \quad (2.64)$$

$f_n(0) = 0$ et $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. f_n est monotone strictement sur $]\alpha_n, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc il existe un unique } x_n \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } f_n(x_n) = 0} \quad (2.65)$$

On a $f_n(1) = -n < 0$ donc $x_n > 1$ et $f_n(2) = 2^n - 2 - n > 0$ pour $n \geq 3$ (on a $x_2 = 2$). Donc pour $n \geq 3$, $x_n \in]1, 2[$.

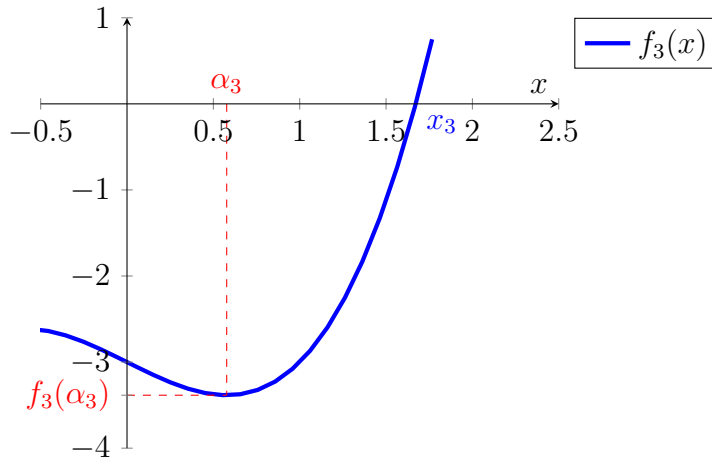


FIGURE 4 $x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur \mathbb{R}_+ .

2. On a $x_n^n = x_n + n \leq 2 + n$ donc

$$1 \leq x_n \leq (2 + n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(2+n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1 \quad (2.66)$$

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1} \quad (2.67)$$

3. On peut poser $x_n = 1 + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$. On a

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n \quad (2.68)$$

donc

$$n \ln(1 + \varepsilon_n) = \ln(1 + \varepsilon_n + n) = \ln(n) + \underbrace{\ln\left(1 + \frac{1 + \varepsilon_n}{n}\right)}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}} \quad (2.69)$$

et donc

$$\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n} \quad (2.70)$$

On a donc

$$x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad (2.71)$$

On a enfin

$$(1 + \varepsilon_n)^n = 1 + \varepsilon_n + n = 1 + n + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad (2.72)$$

d'où

$$\ln(1 + \varepsilon_n) = \frac{1}{n} \ln(n+1) + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad (2.73)$$

$$= \frac{1}{n} \left[\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= o\left(\frac{1}{n}\right)}\right) \right] \quad (2.74)$$

$$= \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.75)$$

donc

$$1 + \varepsilon_n = e^{\frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right) \quad (2.76)$$

puis

$$\varepsilon_n = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right) \quad (2.77)$$

et ainsi

$$\boxed{x_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)} \quad (2.78)$$

■

Solution 2.11. On note

$$v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n a_0 + u_{n-1} a_1 + \cdots + u_0 a_n}{u_0 + \cdots + u_n} \quad (2.79)$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a$ alors $v_n = a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$. De manière générale, on a

$$v_n - a = v_n - a \frac{u_n + \cdots + u_0}{u_0 + \cdots + u_n} = \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k} (a_k - a)}{u_0 + \cdots + u_n} \quad (2.80)$$

Ainsi,

$$|u_n - a| \leq \frac{\sum_{k=0}^n u_{n-k} |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \quad (2.81)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|a_k - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, on note $M = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k - a|$. Soit $n \geq N$, on a

$$|v_n - a| \leq \frac{\sum_{k=0}^{N-1} u_{n-k} |a_k - a| + \sum_{k=N}^n u_{n-k} |a_k - a|}{u_0 + \cdots + u_n} \quad (2.82)$$

$$\leq \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k M}{u_0 + \cdots + u_n} + \underbrace{\frac{\sum_{k=N}^n u_{n-k} \frac{\varepsilon}{2}}{u_0 + \cdots + u_n}}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \quad (2.83)$$

car les u_i sont positifs.

On remarque enfin que

$$\begin{aligned} u_n &= o(u_0 + \cdots + u_n) \\ u_{n-1} &= o(u_0 + \cdots + u_{n-1}) = o(u_0 + \cdots + u_n) \\ &\vdots \\ u_{n-N+1} &= o(u_0 + \cdots + u_n) \end{aligned} \tag{2.84}$$

Donc

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \tag{2.85}$$

et il existe $N' \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a

$$M \frac{\sum_{k=n-N+1}^n u_k}{u_0 + \cdots + u_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.86}$$

et donc pour tout $n \geq \max(N, N')$, on a $|v_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et ainsi

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a} \tag{2.87}$$

■

Solution 2.12.

1. Pour $n \geq 2$, (iii) donne

$$x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \tag{2.88}$$

Ainsi,

$$0 \leq x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_n}{n!} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \tag{2.89}$$

où l'inégalité est stricte d'après (ii). Pour $n \geq 2$, on a

$$x - \frac{a_2}{2} < \frac{1}{2!} \tag{2.90}$$

donc

$$0 \leq 2x - \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{N}} < 1 \tag{2.91}$$

Donc $a_2 = \lfloor 2x \rfloor$. On a ensuite

$$0 \leq n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1 \quad (2.92)$$

donc

$$a_n = \left\lfloor n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \right\rfloor \quad (2.93)$$

On a donc bien unicité.

Soit maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie comme ci-dessus. On a, pour tout $n \geq 2$, on a

$$0 \leq n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) - \underbrace{a_n}_{\in \mathbb{N}} < 1 \quad (2.94)$$

Or

$$0 - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{1}{(n-1)!} \quad (2.95)$$

donc

$$a_n \in \{0, \dots, n-1\} \quad (2.96)$$

et (i) est vérifié.

On a

$$0 \leq x - \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{k!} < \frac{1}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.97)$$

donc (iii) est vérifié, et supposons qu'il existe $n_0 \geq 2$ tel que pour tout $m \geq n_0 + 1$, on a $a_m = m - 1$. Alors

$$x = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} \quad (2.98)$$

et

$$x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \frac{k-1}{k!} = \frac{1}{n_0!} \quad (2.99)$$

donc

$$n_0! \left(x - \sum_{k=0}^{n_0} \frac{a_k}{k!} \right) = 1 \quad (2.100)$$

et

$$n_0! \left(x - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{a_{n_0-1}}{(n_0-1)!} \right) - a_{n_0} = 1 \quad (2.101)$$

En prenant la partie entière, on a donc $0 = 1$ ce qui est absurde.

Donc (ii) est vérifié.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $a_n = 0$ alors $x \in \mathbb{Q}$.

Si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a

$$x = \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n!} \quad (2.102)$$

si et seulement si

$$a_n = n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \quad (2.103)$$

si et seulement si

$$n! \left(x - \frac{a_2}{2} - \cdots - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} \right) \in \mathbb{N} \quad (2.104)$$

ce qui est vrai dès que $n \geq q$. Donc pour tout $n > q$, on a $a_n = 0$ par unicité.

3. Soit $l \in [-1, 1]$. Soit $x \in [0, 1[$ avec

$$x = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{k!} \quad (2.105)$$

On a alors

$$n!2\pi x = \underbrace{\sum_{k=2}^n \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{\in 2\pi\mathbb{Z}} + \frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \underbrace{\sum_{k \geq n+2} \frac{2\pi a_k n!}{k!}}_{= \varepsilon_n} \quad (2.106)$$

On a

$$0 \leq \varepsilon_n < \frac{2\pi n!}{(n+1)!} = \frac{2\pi}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.107)$$

Donc

$$\sin(n!2\pi x) = \sin\left(\frac{2\pi a_{n+1}}{n+1} + \varepsilon_n\right) \quad (2.108)$$

et il suffit d'avoir, comme $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$\frac{a_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\arcsin(l)}{2\pi} \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \quad (2.109)$$

On pose alors

$$a_n = \left\lfloor \frac{n \arcsin(l)}{2\pi} \right\rfloor \quad (2.110)$$

pour $n \geq 2$ et on a $0 \leq a_n \leq \frac{n}{4} < n-1$ pour tout $n \geq 2$. On a donc le résultat. ■

Remarque 2.2. Il n'y a pas unicité. Par exemple, pour $l = 0$, $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$ convient. Plus généralement, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, pour tout $n \geq q$, on a

$$\sin\left(n!2\pi\left(x + \frac{p}{q}\right)\right) = \sin(n!2\pi x) \quad (2.111)$$

Solution 2.13. Par récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2\ln(1+x) - x \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2\ln(1+x) \end{aligned}$$

g est dérivable est

$$g'(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (2.112)$$

donc g est croissante sur $[0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Comme $g(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $l \in]0, +\infty[$ tel que $g(l) = 0$ d'où $f(l) = l$.

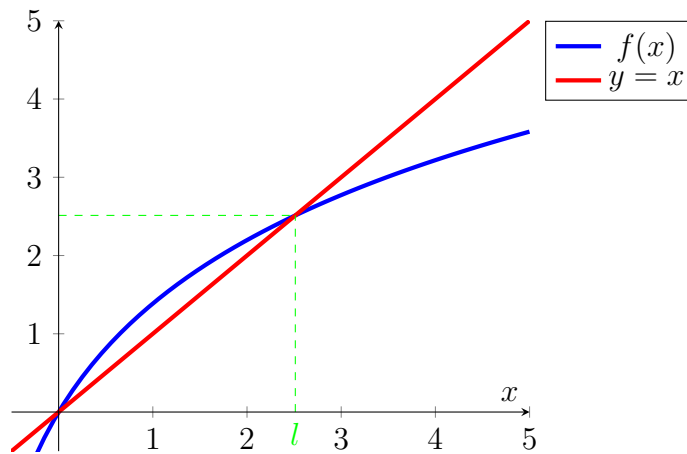


FIGURE 5 $-x \mapsto 2\ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $x \in]0, l]$, on a $x \leq f(x) \leq l$ et pour tout $x > l$, on a $l \leq f(x) \leq x$.

Soit $n \geq 1$. Si $u_n \geq l$ et $u_{n-1} \geq l$, on a $m_n = l$ et $M_n \in \{u_n, u_{n-1}\}$. Il vient donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(f(u_n) + f(u_{n-1})) \geq f(l) = l \quad (2.113)$$

et

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(u_n + u_{n-1}) \leq M_n \quad (2.114)$$

Donc $m_{n+1} = l = m_n$ et $M_{n+1} \leq M_n$.

Par récurrence, on a pour tout $k \geq n$, $u_k \geq l$ et $(M_k)_{k \geq n}$ converge vers $\lambda \geq l$ (car décroissante et plus grande que l) et $m_k = l$ pour tout $k \geq n$.

De plus pour tout $k \geq n$, on a

$$u_{k+1} = \frac{1}{2}(f(u_k) + f(u_{k-1})) \leq f(M_k) \quad (2.115)$$

car f est croissante et donc

$$u_{k+2} \leq f(M_{k+1}) \leq f(M_k) \quad (2.116)$$

Par passage à la limite, on a $\lambda \leq f(\lambda)$ donc $\lambda = f(\lambda)$ et donc $\lambda = l$. Or pour tout $k \geq n$, on a

$$\underbrace{m_k}_{=l} \leq u_k \leq M_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l \quad (2.117)$$

donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l} \quad (2.118)$$

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0-1} \geq l$ et $u_{n_0} \geq l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Or même s'il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_1-1} \leq l$ et $u_{n_1} \leq l$, alors on inverse les rôles de M_{n_1} et m_{n_1} .

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n - l)(u_{n+1} - l) \leq 0 \quad (2.119)$$

Supposons par exemple $u_0 \geq l$ et $u_1 \leq l$. Alors

$$0 \leq u_2 - l \leq \frac{u_0 - l}{2} \quad (2.120)$$

et par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_{2k} - l \leq \frac{u_0 - l}{2^k}$. Donc $u_{2k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$ et de même $u_{2k+1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$ (par valeurs inférieures). Donc

$$\boxed{u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l} \quad (2.121)$$

■

Solution 2.14. Soit $(\theta, \theta') \in [2, 2\pi]^2$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{ipx_n} = e^{i\theta} \quad (2.122)$$

et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} e^{iqx_n} = e^{i\theta'} \quad (2.123)$$

Soient x, x' deux valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ distinctes. On a

$$\begin{cases} e^{ipx} = e^{i\theta} = e^{ipx'} \\ e^{iqx} = e^{i\theta'} = e^{iqx'} \end{cases} \quad (2.124)$$

Il existe $(k, k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$\begin{cases} px = px' + 2k\pi \\ qx = qx' + 2k'\pi \end{cases} \quad (2.125)$$

et donc $p(x - x') = 2k\pi$ et $q(x - x') = 2k'\pi$ et alors $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence. Comme elle est bornée,

$$\boxed{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge.}} \quad (2.126)$$

Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on peut prendre

$$\boxed{x_n = n!} \quad (2.127)$$

On a

$$e^{2i\pi n!} = 1 \quad (2.128)$$

et

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \quad (2.129)$$

Si on veut x_n divergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut prendre

$$\boxed{x_n = (-1)^n n!} \quad (2.130)$$

■

Solution 2.15.

1. On a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leq \boxed{\frac{n^k}{k!}} \quad (2.131)$$

2. On a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k \quad (2.132)$$

donc

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} \right| \leq \sum_{k=0}^n |z|^k \underbrace{\left| \frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right|}_{\geq 0} \quad (2.133)$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \frac{|z|^k}{n^k} \quad (2.134)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} - \left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n \quad (2.135)$$

3. On sait que

$$\sum_{k=0}^n \frac{|z|^k}{k!} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} e^{|z|} \quad (2.136)$$

et

$$\left(1 + \frac{|z|}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{|z|}{n})} = e^{n(\frac{|z|}{n} + o(\frac{|z|}{n}))} = e^{|z|} e^{o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{|z|} \quad (2.137)$$

En reportant dans la question précédente, on a donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z} \quad (2.138)$$

■

Remarque 2.3. Une autre méthode est d'écrire, pour $z = a + ib$,

$$1 + \frac{z + ib}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i \frac{b}{n} = \rho_n e^{i\theta_n} \quad (2.139)$$

. On a alors

$$\left|1 + \frac{a + ib}{n}\right| = \sqrt{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}} = \rho_n \quad (2.140)$$

et alors

$$\rho_n^n = \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right) \right|^n \quad (2.141)$$

$$= e^{\frac{n}{2} \ln \left(\left(1 + \frac{a}{n} \right)^2 + \frac{b^2}{n^2} \right)} \quad (2.142)$$

$$= e^{\frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{2a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} \quad (2.143)$$

$$= e^{a+o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a = |e^z| \quad (2.144)$$

On écrit ensuite

$$1 + \frac{a + ib}{n} = \rho_n \left(\underbrace{\frac{1 + \frac{a}{n}}{\rho_n}}_{= \cos(\theta_n)} + i \underbrace{\frac{b}{n\rho_n}}_{= \sin(\theta_n)} \right) \quad (2.145)$$

On a alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b}{n\rho_n} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{a}{n}}{\rho_n} = 1 \quad (2.146)$$

On peut imposer $\theta_n \in] -\pi, \pi]$ et il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\cos(\theta_n) \geq 0$. Pour $n \geq N$, on a alors $\theta_n \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc

$$\theta_n = \arcsin \left(\frac{b}{n\rho_n} \right) \quad (2.147)$$

et $n\theta_n = n \arcsin \left(\frac{b}{n\rho_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b$. Finalement, on a bien

$$\left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = \rho_n^n e^{i\theta_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^a e^{ib} = e^z \quad (2.148)$$

Solution 2.16. Pour tout $n \geq 2$, $u_n > 0$. On a

$$u_{n+1} = \underbrace{\frac{\sqrt{n+1}-1}{\sqrt{n+1}+1}}_{<1} u_n \quad (2.149)$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante donc converge. On a

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n \underbrace{\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right)}_{= v_k} < 0 \quad (2.150)$$

Ensuite,

$$v_k = -\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + o \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\sqrt{k}} \quad (2.151)$$

Comme $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverge, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = -\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0} \quad (2.152)$$

On a ensuite

$$u_n = \exp \left(\sum_{k=2}^n \left[\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right] \right) \quad (2.153)$$

et

$$\ln \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + O \left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.154)$$

Donc

$$v_k = -\frac{2}{\sqrt{k}} + O \left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.155)$$

Le terme dans le O est le terme générale d'une série absolument convergent donc convergent, on note ce terme α_k . On a alors

$$\sum_{k=2}^n v_k = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{2}{\sqrt{k}} + \alpha_k \right) = -2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \alpha_k}_{=C} + o(1) \quad (2.156)$$

Par comparaison série-intégrale, on a

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \int_2^n \frac{dt}{\sqrt{t}} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \quad (2.157)$$

Posons

$$w_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \quad (2.158)$$

On étudie la série de terme général $w_n - w_{n-1}$. On a

$$w_n - w_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \quad (2.159)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right) \quad (2.160)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \right) \quad (2.161)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n} + O \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.162)$$

$$= O \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.163)$$

Donc la série de terme général $w_n - w_{n-1}$ converge et ainsi $(w_n)_{n \geq 2}$ converge : il existe $C' \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + C' + o(1) \quad (2.164)$$

On a donc

$$\ln(u_n) = \sum_{k=2}^n v_k = -4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1) \quad (2.165)$$

Ainsi,

$$u_n = \exp(-4\sqrt{n} - 2C' + C + o(1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K e^{-4\sqrt{n}} \quad (2.166)$$

où $K = e^{-2C'+C} > 0$.

Donc

$$u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K^\alpha e^{-4\alpha\sqrt{n}} \quad (2.167)$$

Si $\alpha \leq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^\alpha \not\rightarrow 0$ donc

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ diverge.}} \quad (2.168)$$

Si $\alpha > 0$, $u_n^\alpha = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n^\alpha \text{ converge.}} \quad (2.169)$$

■

Solution 2.17. Soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. On a

$$u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \geq n u_{2n} \geq 0 \quad (2.170)$$

Si (S_n) converge alors $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_{2n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n u_{2n} = 0$.

Comme on a $(2n+1)u_{2n} \geq (2n+1)u_{2n+1} \geq 0$, on a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)u_{2n} = 0$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n = 0 \text{ et donc } u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (2.171)$$

Si $\{p \in \mathbb{N} | pu_p \geq 1\}$ est infini, alors $u_p \neq o\left(\frac{1}{p}\right)$ donc

$$\boxed{\sum u_p \text{ diverge.}} \quad (2.172)$$

■

Remarque 2.4. Ce n'est pas vrai si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas décroissante, par exemple si $u_n = \frac{1}{n}$ si n est un carré et 0 sinon.

Solution 2.18. 1. C'est une série à termes positifs. On a

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad (2.173)$$

Ainsi

$$n^{-1-\frac{1}{n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad (2.174)$$

et donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \quad (2.175)$$

2. C'est une série à termes positifs. On a

$$u_n \geq \int_1^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(1) dt = \frac{\sin(1)}{n+1} \times \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{n+1} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (2.176)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \quad (2.177)$$

3. On écrit

$$\frac{n!}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} (-1)^k}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k \quad (2.178)$$

et

$$\left| \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{n!}{k!} (-1)^k \right| < \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (2.179)$$

d'après le critère spécial des séries alternées.

Donc

$$\sin \left(2\pi \frac{n!}{e} \right) = \sin \left(\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1} + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \quad (2.180)$$

$$= \underbrace{\frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n+1}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O \left(\frac{1}{n^2} \right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}} \quad (2.181)$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (2.182)$$

4. Si $\alpha \leq 0$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$ et comme $\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$,

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \quad (2.183)$$

Si $\alpha > 1$, $|u_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge.}} \quad (2.184)$$

Si $\alpha \in]0, 1]$, on écrit

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \times \frac{1}{\underbrace{1 + (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow 0}}} \quad (2.185)$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left(1 - (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^\alpha} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^\alpha}\right) \right) \quad (2.186)$$

$$= \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} - \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}\right)}_{\substack{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} < 0 \\ \text{terme général} \\ \text{d'une série convergente} \\ \text{ssi } \alpha > \frac{1}{2}}} \quad (2.187)$$

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \alpha > \frac{1}{2}.} \quad (2.188)$$

■

Remarque 2.5. Soit $\alpha \in [0, 1]$ et

$$u_n = \int_0^\alpha t^n \sin(t) dt \geq 0 \quad (2.189)$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \leq \alpha^{n+1}$, terme général d'une série convergente donc $\sum u_n$ converge.

Si $\alpha = 1$, on utilise

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t \quad (2.190)$$

Alors $u_n \geq \frac{2}{\pi(n+2)}$, terme générale d'une série divergente donc $\sum u_n$ diverge.

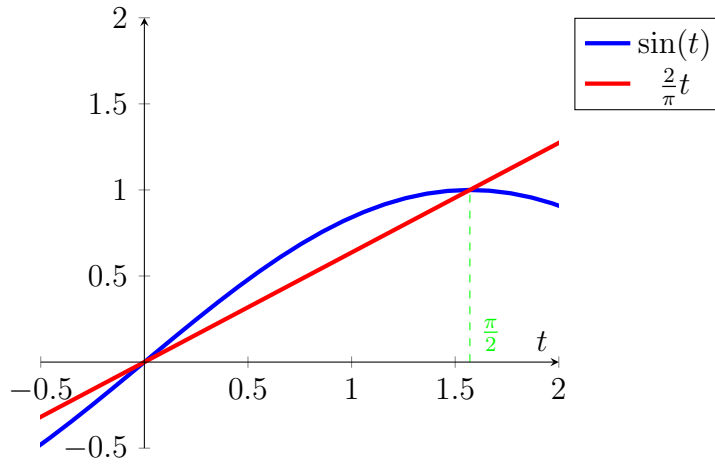


FIGURE 6 – $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solution 2.19.

On a

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad (2.191)$$

u_n est le reste d'ordre n d'une série alternée, donc u_n est du signe de $\frac{(-1)^n}{n}$. Donc on a

$$u_{n+1} \times u_n \leq 0 \quad (2.192)$$

Par ailleurs,

$$|u_n| = \underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{=\frac{1}{n(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}}_{=\frac{1}{(n+2)(n+3)}} + \cdots = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} \quad (2.193)$$

Donc $(|u_n|)_{n \geq 1}$ est décroissante.

D'après le critère des séries alternées,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (2.194)$$

Pour calculer la somme, on peut chercher si la famille $(u_{n,p})_{\substack{n \geq 1 \\ p \in \mathbb{N}}}$ est sommable où

$$u_{n,p} = \frac{(-1)^n}{(n+2p)(n+2p+1)} \quad (2.195)$$

Soit $p \geq 0$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2p)(n+2p+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p} - \frac{1}{n+2p+1} \right) = \frac{1}{2p+1} \quad (2.196)$$

Donc

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{n \geq 1} |u_{n,p}| = +\infty \quad (2.197)$$

Ainsi, cette famille n'est pas sommable. Essayons plutôt de calculer u_n d'abord : soit $n \geq 1$ fixé et $N \geq n$. On a

$$\sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=n}^N (-1)^k \int_0^1 t^{k-1} dt \quad (2.198)$$

$$= - \sum_{k=n}^N \int_0^1 (-t)^{k-1} dt \quad (2.199)$$

$$= - \int_0^1 \sum_{k=n}^N (-t)^{k-1} dt \quad (2.200)$$

$$= \int_0^1 (-t)^n \frac{1 - (-t)^{N-n+1}}{1+t} dt \quad (2.201)$$

Ainsi,

$$\sum_{k=n}^N \frac{(-1)^k}{k} = - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \quad (2.202)$$

et

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{N+1}}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 t^{N+1} dt = \frac{1}{N+2} \quad (2.203)$$

Donc

$$u_n = - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt \quad (2.204)$$

Soit alors $M \geq 1$. On a

$$\sum_{n=1}^M u_n = \sum_{n=1}^M \left(- \int_0^1 \frac{(-t)^n}{t+1} dt \right) \quad (2.205)$$

$$= - \int_0^1 \frac{1}{1+t} \sum_{n=1}^M (-t)^n dt \quad (2.206)$$

$$= - \int_0^1 \frac{-t}{1+t} \frac{1 - (-t)^{M+1}}{1+t} dt \quad (2.207)$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt + \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \quad (2.208)$$

Comme

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^{M+1}}{(1+t)^2} dt \right| \leq \int_0^1 t^{M+1} dt = \frac{1}{M+2} \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.209)$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{t}{(1+t)^2} dt \quad (2.210)$$

$$= \int_0^1 \frac{(t+1) - 1}{(1+t)^2} dt \quad (2.211)$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt \quad (2.212)$$

$$= [\ln(1+t)]_0^1 + \left[\frac{1}{2} - 1 \right] \quad (2.213)$$

$$= \ln(2) - \frac{1}{2} \quad (2.214)$$

Finalement,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(2) - \frac{1}{2}} \quad (2.215)$$

$$\frac{1}{(3n)!} = \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad (2.216)$$

donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (2.217)$$

Posons

$$\begin{cases} S_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!} \\ S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)!} \\ S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)!} \end{cases} \quad (2.218)$$

On a

$$\begin{cases} S_0 + S_1 + S_2 &= e \\ S_0 + jS_1 + j^2S_2 &= \exp(j) \\ S_0 + j^2S_1 + jS_2 &= \exp(j^2) \end{cases} \quad (2.219)$$

où $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$. En sommant les trois lignes, on a

$$3S_0 = e + \exp(j) + \exp(j^2) = e + e^{-\frac{1}{2}} \left(2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \quad (2.220)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{3} \left(e + e^{-\frac{1}{2}} \left(2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \right)} \quad (2.221)$$

S'il existe $p \geq 0$ tel que $n = p^3$, alors

$$\left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p \quad (2.222)$$

et

$$\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = \left\lfloor (p^3-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = p-1 \quad (2.223)$$

Sinon, $n^{\frac{1}{3}} \notin \mathbb{N}$. Soit $k = \left\lfloor n^{\frac{1}{3}} \right\rfloor$. Alors $k^3 < n \leq (k+1)^3$ donc $k^3 \leq n-1 < (k+1)^3$ d'où $k \leq (n-1)^{\frac{1}{3}} < k+1$. Donc $\left\lfloor (n-1)^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = k$.

Donc $\sum u_n$ est une série lacunaire. Comme $u_{p^3} = O\left(\frac{1}{p^3}\right)$, d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (2.224)$$

Sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{4p^3 - p} \quad (2.225)$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{4x^3 - x} = \frac{1}{x(4x^2 - 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2x-1} + \frac{1}{2x+1} \quad (2.226)$$

Donc la somme partielle jusqu'au rang n vaut

$$S_n = - \underbrace{\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}_{= H_n} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p-1} + \sum_{p=1}^n \frac{1}{2p+1} \quad (2.227)$$

$$= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2 \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{2p+1} \quad (2.228)$$

$$= -H_n + 1 + \frac{1}{2n+1} + 2 \left(\underbrace{\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k}}_{= H_{2n-1}} - 1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k}}_{= \frac{1}{2}H_{n-1}} \right) \quad (2.229)$$

$$= -H_n + 2H_{2n-1} - H_{n-1} - 1 + \frac{1}{2n+1} \quad (2.230)$$

$$= -\ln(n) + 2\ln(2n-1) - \ln(n-1) - 1 + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{= o(1)} + o(1) \quad (2.231)$$

$$= \ln \left(\frac{(2n-1)^2}{n(n-1)} \right) - 1 + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(4) - 1 \quad (2.232)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(4) - 1} \quad (2.233)$$

■

Solution 2.20. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < 0$. Il existe $A > 0$ tel que pour tout $x > A$,

$$a - \varepsilon \leq \frac{f'(x)}{f(x)} \leq a + \varepsilon \quad (2.234)$$

Alors

$$(a - \varepsilon)f(x) \leq f'(x) \leq (a + \varepsilon)f(x) \quad (2.235)$$

On voit donc que

$$f'(x) - f(x)(a + \varepsilon) \leq 0 \quad (2.236)$$

On pose alors (sorte d'inéquation différentielle)

$$g_1(x) = f(x)e^{-(a+\varepsilon)x} \quad (2.237)$$

On a

$$g'_1(x) = e^{-(a+\varepsilon)x} (f'(x) - f(x)(a + \varepsilon)) \leq 0 \quad (2.238)$$

pour tout $x \geq A$. Donc g_1 est décroissante sur $[A, +\infty[$. Alors

$$0 < g_1(x) \leq g_1(A) = f(A)e^{-(a+\varepsilon)A} \quad (2.239)$$

Alors

$$0 < f(x) \leq (f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a+\varepsilon)x} \quad (2.240)$$

De même, pour $x \geq A$,

$$(f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a-\varepsilon)x} \leq f(x) \quad (2.241)$$

car $g_2(x) = f(x)e^{-(a-\varepsilon)x}$ est croissante sur $[A, +\infty[$.

Donc

$$f(n) \leq (f(A)e^{-(a+\varepsilon)A}) e^{(a+\varepsilon)n} \quad (2.242)$$

Comme $a + \varepsilon < 0$,

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge.}} \quad (2.243)$$

De plus

$$f(A)e^{-(a-\varepsilon)A} \frac{e^{(a-\varepsilon)N}}{1 - e^{a-\varepsilon}} \leq R_N = \sum_{n=N}^{+\infty} f(n) \leq f(A)e^{-(a+\varepsilon)A} \frac{e^{(a+\varepsilon)N}}{1 + e^{a+\varepsilon}} \quad (2.244)$$

Donc

$$\boxed{R_N = O_{n \rightarrow +\infty}(e^{aN}) \text{ et } e^{aN} = O_{n \rightarrow +\infty}(R_N)} \quad (2.245)$$

■

Solution 2.21. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \underbrace{\frac{e^k}{k}}_{\xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (2.246)$$

On utilise la règle d'Abel : on écrit $e^k = B_k - B_{k-1}$ avec

$$\begin{cases} B_k = \sum_{j=0}^k e^j = \frac{e^{k+1}-1}{e-1} \\ B_{-1} = 0 \end{cases} \quad (2.247)$$

Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{k+1} = -1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{B_k}{k(k+1)}}_{\substack{\sim \frac{e^{k+1}}{(e-1)k^2} \\ k \rightarrow +\infty}} + \underbrace{\frac{B_n}{n}}_{\substack{\sim \frac{e^n e}{n(e-1)} \\ n \rightarrow +\infty}} \quad (2.248)$$

$$= \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(S_n)$$

Donc

$$\boxed{S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{n+1}}{n(e-1)}} \quad (2.249)$$

■

Solution 2.22.

1. $u_n > 0$ et

$$u_n = e^{n^\alpha \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{n^\alpha(-\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))} = e^{-n^{\alpha-1}} + O(n^{\alpha-2}) \quad (2.250)$$

Si $\alpha < 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \quad (2.251)$$

Si $\alpha = 1$, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}} \quad (2.252)$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n^{\alpha-1} \quad (2.253)$$

donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$,

$$-n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-2}) \leq \frac{-n^{\alpha-1}}{2} \quad (2.254)$$

d'où

$$u_n \leq e^{-\frac{n^{\alpha-1}}{2}} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.255)$$

donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (2.256)$$

2. On a $u_n > 0$ et

$$\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} e^{-\frac{1}{k} \ln(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1 \quad (2.257)$$

donc par comparaison des sommes partielles, on a

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \quad (2.258)$$

Donc $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}} \quad (2.259)$$

3. On écrit $n!e = [n!e] + \alpha_n$. Alors

$$\sin(n!\pi e) = (-1)^{[n!e]} \sin(\alpha_n \pi) \quad (2.260)$$

On écrit

$$n!e = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} + n + 1 + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \quad (2.261)$$

On pose $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $w_n = v_n + \frac{1}{n \times n!}$. On a

$$v_n \leq e \leq w_n \quad (2.262)$$

donc

$$0 \leq e - v_n \leq \frac{1}{n \times n!} \quad (2.263)$$

d'où

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!} \leq \frac{n!}{(n+1)(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2} \quad (2.264)$$

Donc

$$n!e\pi = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!} \pi}_{\text{pair}} + (n+1)\pi + \frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.265)$$

Finalement, a

$$\frac{\sin(n!e\pi)}{\ln(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}{\ln(n)} = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\ln(n)(n+1)}}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série alternée} \\ \text{convergente}}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2 \ln(n)}\right)}_{\substack{\text{terme général} \\ \text{d'une série absolument} \\ \text{convergente}}} \quad (2.266)$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (2.267)$$

Solution 2.23.

1. On a

$$u_n = (a + b + c) \ln(n) + b \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + c \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) = (a + b + c) \ln(n) + \frac{b + 2c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.268)$$

Donc $\sum u_n$ converge si et seulement si

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \end{cases} \quad (2.269)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a &= c \\ b &= -2c \end{cases} \quad (2.270)$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } a = b \text{ et } b = -2c \text{ avec } c \in \mathbb{R}} \quad (2.271)$$

Prenons $c = 1$ pour calculer la somme. On a

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2 \ln(n+1) + \ln(n+2) \quad (2.272)$$

$$= \sum_{n=1}^N \ln(n) - \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) - \ln(n+1) \quad (2.273)$$

$$= -\ln(N+1) - \ln(2) + \ln(N+2) \quad (2.274)$$

$$= \ln\left(\frac{N+2}{N+1}\right) - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) \quad (2.275)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)} \quad (2.276)$$

2. On a $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc d'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (2.277)$$

On écrit

$$u_n = \frac{2^n (3^{2^{n-1}} - 1)}{(3^{2^{-1}} + 1)(3^{2^n} - 1)} = \frac{2^n (3^{2^{n-1}} + 1 - 2)}{3^{2^n} - 1} = \underbrace{\frac{2^n}{3^{2^{n-1}} - 1}}_{= v_n} - \underbrace{\frac{2^{n+1}}{3^{2^n} - 1}}_{= v_{n+1}} \quad (2.278)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = v_1 = 1} \quad (2.279)$$

3. On remarque que $k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ est le reste de la division euclidienne de k par n . Donc ce reste est borné par $k - 1$. Donc $u_n = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$. D'après le critère de Riemann,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}} \quad (2.280)$$

On note alors

$$J_r = \{n \in \mathbb{N}^* | n \equiv r[k]\} \quad (2.281)$$

$(J_r)_{r \in \{0, \dots, k-1\}}$ forme une partition de \mathbb{N}^* . On a

$$\sum_{n \in J_r} \frac{r}{n(n+1)} = 0 \quad (2.282)$$

si $r = 0$. Si $r \in \{1, \dots, k-1\}$, on a

$$S_r = r \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)} \quad (2.283)$$

et par sommabilité on a

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n - k \lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n(n+1)} = \sum_{r=1}^{k-1} S_r = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{(kp+r)(kp+r+1)} \quad (2.284)$$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On a

$$v_p = \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{(kp+r)(kp+r+1)} \quad (2.285)$$

$$= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r+1} \quad (2.286)$$

$$= \sum_{r=1}^{k-1} \frac{r}{kp+r} - \sum_{r=2}^k \frac{r-1}{kp+r} \quad (2.287)$$

$$= \frac{1}{kp+1} + \sum_{r=2}^{k-1} \frac{1}{kp+r} - \frac{k-1}{k(p+1)} \quad (2.288)$$

$$= \sum_{r=1}^k \frac{1}{kp+r} - \frac{1}{p+1} \quad (2.289)$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^N v_p = \sum_{n=1}^{k(N+1)} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln\left(\frac{k(N+1)}{N+1}\right) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) = \ln(k) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (2.290)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \ln(k)} \quad (2.291)$$

4. On a

$$\arctan(u) + \arctan(v) = \arctan\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) \quad (2.292)$$

donc

$$\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(n) \quad (2.293)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) = \frac{\pi}{2}} \quad (2.294)$$

■

Solution 2.24. On a

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1) u_k = u_1 - n u_{n+1} + \sum_{k=2}^n u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1} \quad (2.295)$$

Si $(nu_n)_{n \geq 1}$, on a donc évidemment d'après ce qui précède

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k} \quad (2.296)$$

Si $(u_n)_{n \geq 1}$ décroît, $v_n \geq 0$ et on a

$$\frac{v_k}{k} = u_k - u_{k+1} \quad (2.297)$$

et donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k} = u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} w_{k,n} \quad (2.298)$$

en définissant $w_{n,k} = \frac{v_k}{k}$ si $k \geq n$ et 0 sinon. On a $w_{k,n} \geq 0$ car $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.

Ainsi, $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sommable si et seulement si $(w_{n,k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ si et seulement si (d'après le théorème de Fubini)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{\sum_{n=1}^k \frac{v_k}{k} = v_k} < +\infty \quad (2.299)$$

Et dans ce cas (toujours d'après le théorème de Fubini),

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= u_n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,k}}_{= v_k} < +\infty \quad (2.300)$$

donc

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k} \quad (2.301)$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n(n+1) \dots (n+p)} \quad (2.302)$$

et

$$v_n = \frac{1}{(n+1) \dots (n+p)} - \frac{n}{(n+1) \dots (n+p+1)} = \frac{p+1}{(n+1) \dots (n+p+1)} \quad (2.303)$$

Soit

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)} = (p+1) \left(S_p - \frac{1}{p!} \right) \quad (2.304)$$

Ainsi,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}} = \frac{p+1}{p(p!)} \quad (2.305)$$

■

Solution 2.25. Montrons d'une manière générale que si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ est telle que

$$u_k = o_{k \rightarrow +\infty}(u_{k+1}) \quad (2.306)$$

, alors $\sum u_k$ diverge et $\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.

En effet, on a alors $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = +\infty$ et d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_k$ diverge. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$,

$$0 \leq \frac{u_k}{u_{k+1}} \leq \varepsilon \quad (2.307)$$

Soit $n \geq N$. Pour $k \geq N+1$, on a

$$u_k \leq \varepsilon u_{k+1} \leq \dots \leq \varepsilon^{n-k} u_n \quad (2.308)$$

pour $k \leq n-1$.

Alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^N u_k + \sum_{k=N+1}^{n-1} u_k \leq (\varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-N-1}) u_n \quad (2.309)$$

On peut supposer que $\varepsilon < \frac{1}{2}$ et alors

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_k \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} u_n \leq 2\varepsilon u_n \quad (2.310)$$

Donc on a bien le résultat voulu.

Pour revenir à l'exercice, on a alors

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n!}{(n+q)!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^q} \quad (2.311)$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente. Donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}} \quad (2.312)$$

■

Solution 2.26. On a

$$\left| \frac{z^{nb}}{z^{na+c} + 1} \right| = \frac{|z|^{nb}}{|1 + z^{na+c}|} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |z|^{nb} \quad (2.313)$$

car $|z| < 1$. $|z|^{nb}$ est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour n fini, on a

$$\frac{1}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-z^{na+c})^k \quad (2.314)$$

Montrons donc que $\left(z^{nb} \left((-z^{na+c})^k \right) \right)_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} |z|^{nb} |z|^{k(na+c)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{nb}}{1 - |z|^{na+c}} < +\infty \quad (2.315)$$

d'après ce qui précède. On a sommabilité, donc d'après le théorème de Fubini,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} z^{nb} (-z^{na+c})^k \quad (2.316)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k z^{ck} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^{n(b+ak)} \right) \quad (2.317)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1 - z^{b+ak}} \quad (2.318)$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{nb}}{1 + z^{na+c}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{ck}}{1 - z^{b+ak}}} \quad (2.319)$$

■

Solution 2.27. On a

$$b_q = \sum_{n=1}^q u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} \quad (2.320)$$

Montrons donc que la famille des $(u_{n,q})_{(n,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} |u_{n,q}| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=n}^{+\infty} \frac{n|a_n|}{q(q+1)} \quad (2.321)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| \left(\sum_{q=n}^{+\infty} \frac{1}{q} - \frac{1}{q+1} \right) \quad (2.322)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \quad (2.323)$$

Donc le théorème de Fubini s'applique et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{n,q} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad (2.324)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{q=1}^{+\infty} b_q = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n} \quad (2.325)$$

■

Solution 2.28. D'après l'exercice précédent, $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad (2.326)$$

On applique l'inégalité de la moyenne géométrique et arithmétique à $(u_1, 2u_2, \dots, nu_n)$:

$$\sqrt[n]{u_1 \times 2u_2 \times \dots \times nu_n} = w_n \sqrt[n]{n!} \leq \frac{1}{n}(u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n) = (n+1)v_n \quad (2.327)$$

Donc on a

$$w_n \leq \frac{(n+1)v_n}{\sqrt[n]{n!}} \quad (2.328)$$

On étudie donc $\sqrt[n]{n!}$:

$$\sqrt[n]{n!} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln(n!)\right) \quad (2.329)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)\right)\right) \quad (2.330)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n} \left(n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n) + \ln\left(1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right)\right)\right) \quad (2.331)$$

$$= n \exp\left(-1 + o_{n \rightarrow +\infty}(1)\right) \quad (2.332)$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{e} \quad (2.333)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} = e \quad (2.334)$$

Ainsi, $w_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}} \quad (2.335)$$

Montrons que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \leq e \quad (2.336)$$

Cela équivaut à $(n+1)^n \leq e^n n!$ si et seulement si

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} n^k \leq n! e^n \quad (2.337)$$

ce qui est vrai car pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ on a $\frac{1}{(n-k)!} \leq 1$. Donc $w_n \leq e v_n$ pour tout $n \geq 1$ et donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} w_n \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} v_n = e \sum_{n=1}^{+\infty} u_n} \quad (2.338)$$

Pour montrer que e est la meilleure constante possible, on forme pour $N \in \mathbb{N}^*$, $u_{n,N} = \frac{1}{n}$ si $n \leq N$ et 0 sinon. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N} = H_N < +\infty \quad (2.339)$$

Dans ce cas, on a

$$w_{n,N} = \sqrt[n]{u_{1,N} \dots u_{n,N}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n \quad (2.340)$$

pour $n \leq N$ et 0 sinon. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N} = \sum_{n=1}^N w_{n,N} = \sum_{n=1}^N \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} v_n \quad (2.341)$$

En divisant par $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$, on a donc

$$\frac{\sum_{n=1}^{+\infty} w_{n,N}}{\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,N}} = \frac{\sum_{n=1}^N v_{n,N} \times \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sum_{n=1}^{+\infty} v_{n,N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e \quad (2.342)$$

d'après le théorème de Césaro.

On a trouvé une suite donc la constante C est égale à e . D'après ce qui précède,

$$\boxed{e \text{ est la meilleure constante possible.}} \quad (2.343)$$

■

Remarque 2.6. Pour la fin de l'exercice précédent, on peut utiliser le fait que $H_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(N)$ et alors

$$\sum_{n=1}^N w_{n,N} \sum_{n=1}^N \underbrace{\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \times \frac{1}{n+1}}_{\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{n}} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} e \ln(N) \quad (2.344)$$

par le théorème de sommation des relations de comparaison.

Solution 2.29.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid p + q = n\} \quad (2.345)$$

On a alors

$$\Sigma_n = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{(p,q) \in I_n} \frac{1}{n^\alpha} = \frac{n+1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad (2.346)$$

$$\boxed{\text{Donc la condition nécessaire et suffisante est } \alpha > 2.} \quad (2.347)$$

Dans ce cas, par le théorème des sommation par paquets, on a

$$\boxed{\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(p+q)^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n^\alpha} = \zeta(\alpha-1) + \zeta(\alpha)} \quad (2.348)$$

2. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a

$$\frac{(p+q)^2}{2} \leq p^2 + q^2 \leq (p+q)^2 \quad (2.349)$$

Pour $\alpha \leq 0$, il est clair que l'on a divergence. Pour $\alpha > 0$, on a donc

$$\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \leq \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \leq \frac{2^\alpha}{(p+q)^{2\alpha}} \quad (2.350)$$

Donc la condition nécessaire et suffisante est $\alpha > 1$.

(2.351)

d'après le 1.

■

Solution 2.30. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m+n^2} - \frac{1}{m+n^2-1} = \frac{1}{n^2} = \Sigma_n \quad (2.352)$$

par télescopage. $\sum_{n \geq 1} \Sigma_n$ converge et

$$\sum_{n \geq 1} \Sigma_n = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.353)$$

Donc $\left(\frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} \right)_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ est sommable et la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$.

(2.354)

Posons, pour $k \geq 1$,

$$I_k = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \mid m + n^2 = k\} \quad (2.355)$$

On a $n^2 \in \{1, \dots, k\}$ si et seulement si $n \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor\right\}$ et $(m, n) \in I_k$ si et seulement si $m = k - n^2$.

On a $|I_k| = \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$ et par sommation par paquets,

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{(m,n) \in I_k} \frac{1}{(m+n^2)(m+n^2+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{[k]}{k(k+1)}$$

(2.356)

■

Remarque 2.7. Grâce à une transformation d'Abel, on a aussi, pour $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k} - \sum_{k=1}^N \frac{\lfloor k \rfloor}{k+1} \quad (2.357)$$

$$= 1 + \sum_{k=2}^N \underbrace{\frac{\lfloor k \rfloor - \lfloor k-1 \rfloor}{k}}_{\neq 0 \text{ ssi } k=p^2} + \underbrace{\frac{\lfloor N \rfloor}{N+1}}_{\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0} \quad (2.358)$$

et on retrouve le résultat.

Solution 2.31.

1.

$$\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \quad (2.359)$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} -\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \right) \quad (2.360)$$

converge si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} -\ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \quad (2.361)$$

converge si et seulement si (car $-\ln \left(1 - \frac{1}{p_k} \right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k} > 0$ vu que $p_k \geq k$ pour tout $k \geq 1$)

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} \quad (2.362)$$

converge.

Donc

$$\boxed{\prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \text{ converge si et seulement si } \sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} \text{ converge.}} \quad (2.363)$$

Fixons alors $N \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \prod_{k=1}^N \left(\sum_{n_k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_k^{n_k}} \right) \quad (2.364)$$

où la série est à termes positifs et est convergent. Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{p_1^{n_1} \cdots p_N^{n_N}} \right)_{n_1, \dots, n_N \in \mathbb{N}^N} \quad (2.365)$$

est sommable et on a

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \sum_{(n_1, \dots, n_N) \in \mathbb{N}^N} \frac{1}{p_1^{n_1} \dots p_N^{n_N}} \quad (2.366)$$

$$\geq \sum_{k=1}^{p_{N+1}-1} \frac{1}{k} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty \quad (2.367)$$

car dans la première somme, tous les inverses (et une seule fois) des nombres dont les facteurs premiers sont dans $\{p_1, \dots, p_N\}$ apparaissent.

Donc

$$\boxed{\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k} \text{ diverge.}} \quad (2.368)$$

2. Posons

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} \quad (2.369)$$

On a

$$\ln(\Pi_n) = \sum_{k=1}^n \underbrace{-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)}_{\sim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{p_k^s} = O\left(\frac{1}{k^s}\right)} \quad (2.370)$$

car $p_k \geq k$. Donc

$$\boxed{(\Pi_n) \text{ converge dans } \mathbb{R}_+^*} \quad (2.371)$$

Par produit de Cauchy,

$$\left(\frac{1}{(p_1^s)^{j_1} \dots (p_n^s)^{j_n}} \right)_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \quad (2.372)$$

Ainsi, on a

$$\Pi_n = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^s \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} \quad (2.373)$$

$$= \zeta(s) \quad (2.374)$$

car dans la première somme, par unicité de la décomposition en facteurs premiers, chaque k n'apparaît qu'une unique fois. Comme on a

$$\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^s} \leq \Pi_n \quad (2.375)$$

Donc $\Pi_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(s)$ et ainsi

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^s}} = \zeta(s) \quad (2.376)$$

3. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Si $a > 1$, on a

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^a} \quad (2.377)$$

Donc $\sum \frac{1}{n^z}$ converge absolument. On peut donc prolonger ζ à $\{z \in \mathbb{C} | \Re(z) > 1\}$.

De même que précédemment, puisque

$$\left| \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \right| = \frac{1}{(p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n})^a} \quad (2.378)$$

la famille

$$\left(\left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \right)_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \quad (2.379)$$

est sommable. On peut aussi développer et

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z \quad (2.380)$$

On a

$$|\Pi_n - \zeta(z)| = \left| \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}} \right)^z - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^z} \right| \quad (2.381)$$

$$= \left| \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus J_n} \frac{1}{k^z} \right| \quad (2.382)$$

$$\leq \sum_{k \in \mathbb{N} \setminus J_n} \frac{1}{k^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.383)$$

où l'on a noté $J_n = \{k \geq 1 \mid \text{les facteurs premiers de } k \text{ sont dans } \{p_1, \dots, p_n\}\}$ et où l'on a appliqué l'inégalité triangulaire et le résultat de 2. pour conclure.

Ainsi, on a bien

$$\zeta(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^z}} \quad (2.384)$$

■

Solution 2.32. Pour $\alpha > 2$, puisque $\varphi(n) \geq n$, on a

$$\frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}} \quad (2.385)$$

qui est le terme général d'une série absolument convergente.

Pour $\alpha = 2$, si $n = p_k$ est premier, on a $\varphi(p_k) = p_k - 1$ et

$$\frac{\varphi(p_k)}{p_k^2} = \frac{p_k - 1}{p_k^2} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k} \quad (2.386)$$

et $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{p_k}$ diverge.

De même pour $\alpha < 2$, $\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha}$ diverge car $\frac{\varphi(n)}{n^2} = O\left(\frac{\varphi(n)}{n^\alpha}\right)$.

Donc

$$\boxed{\sum \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 2.} \quad (2.387)$$

Pour $\alpha > 1$, on calcule

$$S = \sum_{n_1=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n_1)}{n_1^\alpha} \times \sum_{n_2=1}^{+\infty} \frac{1}{n_2^\alpha} = \sum_{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2} \frac{\varphi(n_1)}{(n_1 n_2)^\alpha} \quad (2.388)$$

ce qui est légitime car il s'agit de deux séries à termes positifs convergentes. Soit, pour $n \geq 1$, $D_n = \{(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid n = n_1 n_2\}$. Par sommation par paquets, on a,

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(n_1, n_2) \in D_n} \frac{\varphi(n_1)}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \left(\sum_{n_1|n} \varphi(n_1) \right) \quad (2.389)$$

et grâce à la formule d'Euler-Möbius, on a

$$\sum_{n_1|n} \varphi(n_1) = n \quad (2.390)$$

Ainsi, $S = \zeta(\alpha - 1)$ et donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^\alpha} = \frac{\zeta(\alpha - 1)}{\zeta(\alpha)}} \quad (2.391)$$

■

Solution 2.33. Soit $A \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. S'il y a n indices $k \in \mathbb{N}$ tels que $z_k \in B(A, R)$, alors pour ces indices k , on a $B(z_k, \frac{1}{2}) \subset B(A, R + \frac{1}{2})$. Donc (faire un dessin!), on a

$$n \frac{\pi}{4} \leq \pi \left(R + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2.392)$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \{i \in \mathbb{N} | z_i \in B(0, n)\}$. De l'inégalité précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est fini. Il existe $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijective qui permet d'ordonner les z_n par module croissante et à même module par indice croissant.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $R = |z_{\sigma(n)}|$, on a pour tout $k \leq n$, $z_{\sigma(k)} \in B(0, R)$.

Donc

$$n \frac{\pi}{4} \leq \pi \left(|z_{\sigma(n)}| + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2.393)$$

d'où

$$|z_{\sigma(n)}| \geq \left| z_{\sigma(n)} + \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \quad (2.394)$$

Donc

$$\left| \frac{1}{z_{\sigma(n)}} \right|^3 = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2.395)$$

Donc

$$\sum \frac{1}{z_{\sigma(n)}^3} \text{ est absolument convergente.}$$

(2.396)

■

Solution 2.34. On a $k = \lfloor n \rfloor$ si et seulement si $k^2 \leq n < (k+1)^2$. Il y a $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ entiers.

Posons

$$B_p = \sum_{n=1}^p (-1)^{\lfloor n \rfloor} \quad (2.397)$$

et $B_{-1} = 0$. Si $k^2 \leq p \leq (k+1)^2$, on a

$$B_p = \underbrace{B_k^2}_{\text{signe de } (-1)^k} + (-1)^k \underbrace{(p-k)^2}_{|\cdot| \leq 2k+1} \quad (2.398)$$

Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|B_p| \leq 2 \lfloor p \rfloor + 1 \quad (2.399)$$

Donc avec une transformation d'Abel, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{(B_n - B_{n-1})}{n} \quad (2.400)$$

$$= \sum_{n=1}^N \frac{B_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{B_n}{n+1} \quad (2.401)$$

$$= \underbrace{\frac{B_N}{N}}_{=O_{N \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} - B_0 + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{n(n+1)}}_{=O_{N \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} \quad (2.402)$$

D'après le critère de Riemann, la dernière somme converge absolument et donc

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor n \rfloor}}{n} \text{ converge.}} \quad (2.403)$$

■

Solution 2.35.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \neq 0$. Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $u_n u_{n+1} > 0$. On a

$$\ln \left(\frac{u_n}{u_{N_0}} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \ln \left(\frac{a+k}{n+k} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \ln \left(1 + \frac{a}{k} \right) - \ln \left(1 + \frac{b}{k} \right) \quad (2.404)$$

Alors

$$\ln \left(\frac{u_n}{u_{N_0}} \right) = \sum_{k=N_0+1}^n \frac{a-b}{k} + \underbrace{O_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2} \right)}_{\text{terme général d'une série convergente}} = (a-b) \ln(n) + \underbrace{C}_{\in \mathbb{R}} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (2.405)$$

Ainsi,

$$u_n = u_{N_0} n^{a-b} \underbrace{k^{1+o_{n \rightarrow +\infty}(1)}}_{>0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} U_{N_0} n^{a-b} k \quad (2.406)$$

Donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } b-a > 1} \quad (2.407)$$

2. On a

$$u_{n+1}(b+n+1) = u_n(a+n+1) \quad (2.408)$$

donc

$$(a+1)u_n = bu_{n+1} + (n+1)u_{n+1} - nu_n \quad (2.409)$$

En sommant sur \mathbb{N} , on a

$$(a+1) \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + u_1 = b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \underbrace{u_1 - bu_0}_{= \frac{a(a+1)}{b(b+1)} - a} \quad (2.410)$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{a(a+1-b(b+1))}{b(b+1)(a+1-b)} = a \left(\frac{1}{b(b+1)} - \frac{b}{(b+1)(a+1-b)} \right) \quad (2.411)$$

3. Pour $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 1$, on a

$$u_n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \cdots \left(n - \frac{1}{2}\right)}{(n+1)!} = \frac{-\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}}{(n+1)!} = -\frac{1}{2^{2n+1}(n+1)} \binom{2n}{n} \quad (2.412)$$

■

Solution 2.36.

1. u_n est une série à termes positifs et

$$\frac{1}{n} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n} \right) \quad (2.413)$$

donc

$$\sum u_n \text{ diverge.} \quad (2.414)$$

$\sum v_n$ est une série alternée. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et en formant

$$\begin{aligned} f : [2, \infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

On a $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$ qui est négatif dès que $x > e$. Donc $(v_n)_{n \geq 3}$ décroît. D'après le critère des séries alternées,

$$\sum v_n \text{ converge.} \quad (2.415)$$

2. f décroît sur $], +\infty[$ donc pour tout $k \geq 4$, on a

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{\ln(x)}{x} dx \quad (2.416)$$

d'où

$$\underbrace{\int_4^{N+1} \frac{\ln(x)}{x} dx}_{= \frac{1}{2} [\ln^2(N+1) - \ln^2(4)]} \leq \sum_{k=4}^N \frac{\ln(k)}{k} \leq \underbrace{\int_3^N \frac{\ln(x)}{x} dx}_{= \frac{1}{2} [\ln^2(N) - \ln^2(3)]} \quad (2.417)$$

Donc

$$\boxed{S_N \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \ln^2(N)} \quad (2.418)$$

Formons $w_n = S_n - \frac{\ln^2(n)}{2}$. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} w_n - w_{n-1}$ converge.

On a

$$w_n - w_{n-1} = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln^2(n)}{2} + \frac{\ln^2(n-1)}{2} \quad (2.419)$$

On a

$$\ln(n-1) = \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln(n) - \frac{1}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (2.420)$$

et

$$\ln^2(n-1) = \ln^2(n) - \frac{2\ln(n)}{n} + \underbrace{\underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}_{= \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)} \quad (2.421)$$

Donc

$$w_n - w_{n-1} = \underbrace{\underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)}_{\text{terme général d'une série absolument convergente}} \quad (2.422)$$

Donc il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{S_n = \frac{\ln^2(n)}{2} + L + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(1)} \quad (2.423)$$

3. On a

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(2k)}{2k}}_{= I_N} - \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{\ln(2k+1)}{2k+1}}_{= J_N} \quad (2.424)$$

Donc

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = I_N - (S_{2N} - I_N) \quad (2.425)$$

On a

$$S_{2N} = \frac{\ln^2(2N)}{2} + L + o_{N \rightarrow +\infty}(1) = \frac{\ln^2(2)}{2} + \frac{\ln^2(N)}{2} + \ln(2) \ln(N) + L + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \quad (2.426)$$

De plus,

$$\begin{aligned} I_N &= \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(2)}{2k}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N \frac{\ln(k)}{2k}} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} \left(\ln(N) + \gamma + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \right) = \frac{1}{2} S_N = \frac{\ln^2(N)}{4} + \frac{L}{2} + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \end{aligned} \quad (2.427)$$

Finalement, on a bien

$$\sum_{n=2}^{2N} v_n = 2I_N - S_{2N} \quad (2.428)$$

$$= \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2} + o_{N \rightarrow +\infty}(1) \quad (2.429)$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \ln(2)\gamma - \frac{\ln^2(2)}{2}} \quad (2.430)$$

■

Solution 2.37. Si $\alpha_0 = 2$ et $\alpha_{n+1} = 10^{\alpha_n - 1}$. Alors $q_1(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$, $q_k(\alpha_n) = \alpha_{n-k}$, $q_n(\alpha_n) = 2$ et $q_{n+1}(\alpha_n) = 1$.

Si $k < \alpha_n$, $q_n(k) = 1$. Soit

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} u_k \quad (2.431)$$

Comme c'est une série à termes positifs, $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge si et seulement si $\sum_{n \geq 0} S_n$ converge.

Par définition, pour tout $k \in \{\alpha_n, \dots, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a $q_{n+1}(k) = 1$ et pour tout $p \geq n + 1$, $q_p(k) = 1$. Donc

$$S_n = \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k q_1(k) \dots \underbrace{q_n(k)}_{\geq 2}} \quad (2.432)$$

Posons

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \log_{10}(t) = \frac{\ln(t)}{\ln(10)} \end{aligned}$$

Il vient $q_1(t) = \lfloor f(t) \rfloor + 1 > f(t)$. Par récurrence, on a

$$q_n(t) \geq f^n(t) \quad (2.433)$$

défini pour $t \geq \alpha_n$. On a donc

$$S_n \sum_{k=\alpha_n}^{\alpha_{n+1}-1} \frac{1}{k(f(k)) \dots f^n(k)} \quad (2.434)$$

On forme

$$\begin{aligned} g_n : [\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t f(t) \dots f^n(t)} \end{aligned}$$

qui est décroissante. Ainsi, pour tout $k \in \{\alpha_n, \alpha_{n+1} - 1\}$, on a

$$\int_k^{k+1} g_n(t) \leq u_k \leq \int_{k-1}^k g_n(t) \quad (2.435)$$

d'où en faisant le changement de variables $u = \log_{10}(t)$, on a

$$\int_{\alpha_{n-1}-1}^{\alpha_n-1} g_{n-1}(u) du(\ln(10)) \leq S_n \leq \int_{\alpha_n-1}^{\alpha_{n+1}-1} g_n(t) dt \quad (2.436)$$

On obtient donc une minoration par $C \times (\ln(10))^n$ donc

$$\boxed{\text{la série diverge.}} \quad (2.437)$$

■

Solution 2.38.

1. Montrons le résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On a $P_0 = 1 > 0$ et $P_1(x) = 1 + x$ s'annule en -1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat au rang n . On a $P'_{2n+2}(x) = P_{2n+1}(x)$, par hypothèse P_{2n+1} s'annule uniquement en $\alpha_{2n+1} < 0$. Donc $P_{2n+2}(\alpha_{2n+1}) = \frac{(\alpha_{2n+1})^{2n+2}}{(2n+2)!} > 0$ donc $P_{2n+2} > 0$. Comme $P'_{2n+3} = P_{2n+2} > 0$ donc P_{2n+3} est strictement croissante sur \mathbb{R} . On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} P_{2n+3} = \pm\infty$. Donc il existe un unique $\alpha_{2n+3} \in \mathbb{R}$ tel que $P_{2n+3}(\alpha_{2n+3}) = 0$. Comme $P_{2n+3}(0) = 1 \geq 1$, $\alpha_{2n+3} < 0$.

$$\boxed{\text{D'où le résultat par récurrence.}} \quad (2.438)$$

2. Soit $x < 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = e^x > 0$. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $P_{2n+1}(x) > 0$. En particulier, $\alpha_{2n+1} < x$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_{2n+1} = -\infty \quad (2.439)$$

■

Solution 2.39. On pose $f_n(x) = e^x - x - n$, on a $f'_n(x) = e^x - 1$. Donc $x_1 = 0$ et ainsi

$$\forall n \geq 2, \exists ! x_n \geq 0 : e^{x_n} = x_n + n \quad (2.440)$$

Pour tout $x \geq 0$, on a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = -1 < 0$ donc $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ et ainsi $f_{n+1}(x_n) < 0$ et $x_n < x_{n+1}$.

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, de plus $e^{x_n} = x_n + n \geq n$ donc $x_n \geq \ln(n)$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty \quad (2.441)$$

De plus, $x_n = \ln(x_n + n)$ et $f_n(n) = e^n - 2n > 0$ (par récurrence), donc $x_n < n$ par stricte croissante de f_n donc

$$x_n = \ln(x_n + n) \leq \ln(2n) = \ln(n) + \ln(2) \quad (2.442)$$

Ainsi, $x_n = O_{n \rightarrow +\infty}(\ln(n))$. En reportant, on a

$$x_n = \ln(n + O_{n \rightarrow +\infty}(\ln(n))) = \ln(n) + \ln(1 + O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)) = \ln(n) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (2.443)$$

donc

$$n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \quad (2.444)$$

En reportant, on a

$$x_n = \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad (2.445)$$

■

Solution 2.40.

1. Si $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S \in \mathbb{R}_+^+$, on a

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{S^\alpha} \quad (2.446)$$

Comme u_n est le terme générale d'une série convergente donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ converge.}} \quad (2.447)$$

2. On a $\alpha = 1$ donc $v_n = \frac{u_n}{S_n}$, soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On a

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i = \sum_{i=1}^{n+p} \frac{u_i}{S_i} \quad (2.448)$$

où $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $i \in \{n+1, n+p\}$, $S_i \leq S_{n+p}$ donc

$$\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geq \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i = \frac{1}{S_{n+p}} (S_{n+p} - S_n) = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} \quad (2.449)$$

et ainsi,

$$\boxed{\sum_{i=n+1}^{n+p} v_i \geq 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}} \quad (2.450)$$

Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour n fixé, on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_{n+p} = +\infty$ (car $\sum u_n$ diverge). Donc lorsque $p \rightarrow +\infty$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} v_i \geq 1 \quad (2.451)$$

ce qui est absurde puisque la limite en $+\infty$ du reste est 0. Ainsi,

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}} \quad (2.452)$$

3. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ et

$$v_n = \frac{1}{\alpha - 1} (S_{n-1}^{1-\alpha} - S_n^{1-\alpha}) \quad (2.453)$$

avec $(S_n^{1-\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Donc $\sum w_n$ est une série télescopique convergente. Comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, on a

$$\frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq w_n \leq \frac{u_n}{S_{n-1}^\alpha} \quad (2.454)$$

car $u_n = S_n - S_{n-1}$. Comme $\sum w_n$ converge,

$$\boxed{\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha} \text{ converge.}} \quad (2.455)$$

Si $\alpha < 1$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^{\alpha-1} = 0$,

$$\frac{u_n}{S_n} = o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{S_n^\alpha} \right) \quad (2.456)$$

donc

$$\boxed{\sum v_n \text{ diverge.}} \quad (2.457)$$

4. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$ par convergence et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et de plus $u_n = R_n - R_{n+1}$. On pose

$$\alpha_n = \int_{R_{n+1}}^{R_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} (R_{n+1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}) \quad (2.458)$$

si $\alpha \neq 1$.

Si $0 < \alpha < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n^{1-\alpha} = 0$ donc $\sum \alpha_n$ est une série télescopique convergente et de même que précédemment, on a

$$\frac{u_n}{R_n^\alpha} \leq \alpha_n \quad (2.459)$$

donc $w_n \leq \alpha_n$ et

$$\boxed{\sum w_n \text{ converge.}} \quad (2.460)$$

Si $\alpha = 1$, on a

$$\alpha_n = \ln(R_n) - \ln(R_{n+1}) \quad (2.461)$$

où $\ln(R_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. Donc $\sum \alpha_n$ est une série télescopique divergente. De plus

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{R_n - R_{n+1}}{R_n} = 1 - \frac{R_{n+1}}{R_n} \quad (2.462)$$

donc

$$\ln \left(\frac{R_{n+1}}{R_n} \right) = \ln \left(1 - \frac{u_n}{R_n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-u_n}{R_n} \quad (2.463)$$

On a donc

$$\frac{u_n}{R_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha_n \quad (2.464)$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}} \quad (2.465)$$

Si $\alpha > 1$, on a

$$\frac{u_n}{R_n} = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{u_n}{R_n^\alpha} \right) \quad (2.466)$$

donc

$$\boxed{\sum w_n \text{ diverge.}} \quad (2.467)$$

■

Solution 2.41.

1. Pour tout $x \in [0, 1[$ il existe un unique $q_x \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $x \in [\frac{q_x}{n}, \frac{q_x+1}{n}]$ avec $q_x = \lfloor nx \rfloor$
et

$$\begin{aligned} h : \{0, \dots, n\} &\rightarrow \{0, \dots, n-1\} \\ k &\mapsto q_{x_k} = \lfloor nx_k \rfloor \end{aligned}$$

n'est pas injective donc il existe $k > k'$ tel que $|x_k - x_{k'}| < \frac{1}{n}$ avec $(k, k') \in \{0, \dots, n\}^2$ d'où

$$|kx - \lfloor kx \rfloor - (k'x - \lfloor k'x \rfloor)| < \frac{1}{n} \quad (2.468)$$

d'où

$$|(k - k')x - p| < \frac{1}{n} \quad (2.469)$$

avec $p \in \mathbb{Z}$ et pour $q = (k - k') \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\boxed{\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn}} \quad (2.470)$$

2. D'après ce qui précède, pour tout $n \geq 1$, il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$ tels que

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{q_n^2} \quad (2.471)$$

car $n \geq q_n$. Donc

$$\boxed{\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}} \quad (2.472)$$

On a donc $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si q_n ne tend pas vers $+\infty$, il existe $A > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n > N$ avec $q_n < A$. Donc $\{n \in \mathbb{N} | q_n < A\}$ est infini : on peut

extraire $(q_{\sigma(n)})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $q_{\sigma(n)} < A$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire $(q_{\varphi(n)})$ qui converge vers $q \in \mathbb{R}$. Notons que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang donc $q \in \mathbb{N}^*$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $p_{\varphi(n)} = \frac{p_{\varphi(n)}}{q_{\varphi(n)}} q_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha q$. $(p_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers relatifs stationnaire, donc $\alpha q \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde.

Donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty} \quad (2.473)$$

3. On sait qu'il existe $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante telle que $\sin(\sigma(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sigma(n) \sin(\sigma(n))} = 0 \quad (2.474)$$

donc si la suite converge, alors elle converge vers 0.

Appliquons ce qui précède à $\alpha = \frac{1}{\pi} \notin \mathbb{Q}$. Il existe $(p_n, q_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = 0$ et

$$\left| \frac{1}{\pi} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \quad (2.475)$$

Alors

$$|q_n - \pi p_n| < \frac{\pi}{q_n} \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.476)$$

pour n suffisamment grand. Quitte à extraire, on peut supposer que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

On a

$$|\sin(x)| = |\sin(q_n - \pi q_n)| \quad (2.477)$$

donc

$$|\sin(q_n)| \leq \left| \sin\left(\frac{\pi}{q_n}\right) \right| \leq \frac{\pi}{q_n} \quad (2.478)$$

car \sin est croissant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $|\sin(x)| \leq |x|$.

Donc

$$\underbrace{\frac{1}{|q_n \sin(q_n)|}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \geq \frac{1}{\pi} \quad (2.479)$$

ce qui est absurde.

Donc

$$\boxed{\left(\frac{1}{n \sin(n)} \right)_{n \geq 1} \text{ ne converge pas.}} \quad (2.480)$$



Solution 2.42.

1. On a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| = \left| \sum_{p=1}^n (a_{n,p} - a_p) - \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p \right| \leq \sum_{p=1}^n |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=n+1}^{+\infty} |a_p| \quad (2.481)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $n \geq N$, on a

$$\sum_{p=1}^n |a_{n,p} - a_p| = \sum_{p=1}^N |a_{n,p} - a_p| + \sum_{p=N+1}^n |a_{n,p} - a_p| \quad (2.482)$$

Pour p fixé, on a $|a_p| \leq b_p$ donc

$$\sum_{p=N+1}^n |a_{n,p} - a_p| \leq 2 \sum_{p=N+1}^n b_p \quad (2.483)$$

Ainsi,

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| \leq \sum_{p=1}^N |a_{n,p} - a_p| + 3 \sum_{p=N+1}^{+\infty} b_p \quad (2.484)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\sum_{p \geq 1} b_p$ converge, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$3 \sum_{p=N_1+1}^{+\infty} b_p \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.485)$$

donc pour tout $n \geq N_1$, on a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| \quad (2.486)$$

N_1 étant fixé, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, on a

$$\sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.487)$$

car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{N_1} |a_{n,p} - a_p| = 0 \quad (2.488)$$

Donc pour tout $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$\left| \sum_{p=1}^n a_{n,p} - \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \right| < \varepsilon \quad (2.489)$$

Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \quad (2.490)$$

2. On fixe $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{p}{n}\right)^n = e^{-p} \quad (2.491)$$

Pour $x \geq -1$, on a $\ln(1+x) \leq x$ donc $\ln\left(1 - \frac{p}{n}\right) \leq -\frac{p}{n}$ et $a_{n,p} = e^{n \ln(1 - \frac{p}{n})} \leq e^{-p} = b_p$ Donc d'après ce qui précède,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^n + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \right) = \frac{1}{e-1} \quad (2.492)$$

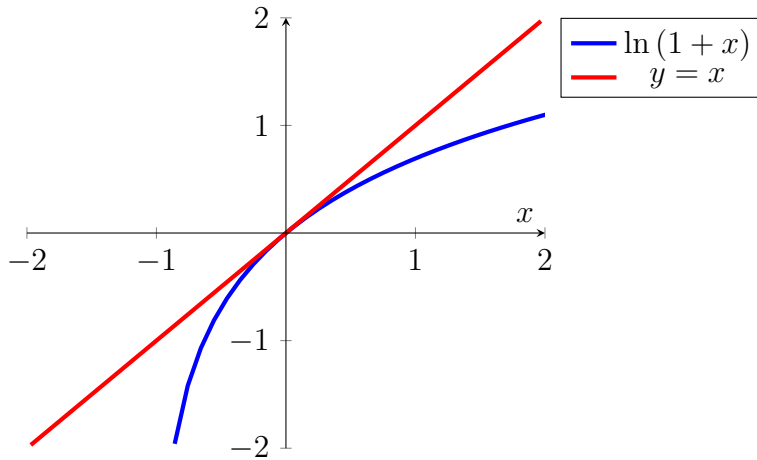


FIGURE 7 – $\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$.

■

Remarque 2.8. C'est faux si on n'a pas l'hypothèse (ii). Par exemple,

$$a_{n,p} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.493)$$

pour p fixé mais

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (2.494)$$

Solution 2.43.

1. Pour tout $k \geq 1$, $(u_{kn})_{n \geq 1}$ est une sous-famille de $(u_n)_{n \geq 1}$ sommable, donc $(u_{kn})_{n \geq 1}$ est sommable.

$$\boxed{\text{Donc } S_k \text{ existe.}} \quad (2.495)$$

2. On a

$$\begin{cases} S_1 - S_2 & = u_1 + u_3 + \dots + u_{2n+1} + \dots & = 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 + S_6 & = u_1 + u_5 + u_7 + u_{11} + \dots & = 0 \\ S_1 - S_2 - S_3 - S_5 + S_6 + S_{10} + S_{15} - S_{10} & = u_1 + u_7 + u_{11} + \dots & = 0 \end{cases} \quad (2.496)$$

A la première ligne on enlève les multiples de 2, à la deuxième ligne on enlève les multiples de 2 et 3, à la troisième ligne on enlève les multiples de 2, 3 et 5. Et ainsi de suite.

Soient donc p_1, \dots, p_N les N premiers nombres premiers. On a

$$0 = \sum_{k=1}^{p_1 \dots p_N} \mu(k) S_k = \sum_{k \in \{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\}} \mu(k) S_k \quad (2.497)$$

où si $k = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $\mu(k) = 0$ s'il existe $\alpha_i \geq 2$ et $\mu(p_{i_1} \dots p_{i_s}) = (-1)^s$ sinon (fonction de Möbius).

Soit $n = p_1^{\beta_1} \dots p_N^{\beta_N}$. On cherche le coefficient en u_n dans la somme. Si $n = 1$, c'est 1. Si $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k|n} \mu(k) = 0 \quad (2.498)$$

donc

$$\sum_{k \in \{p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N} \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \{0,1\}^N\}} \mu(k) S_k = u_1 + \alpha_N \quad (2.499)$$

avec

$$\alpha_N = \sum_{k \in B_N} u_k \quad (2.500)$$

où $B_N \subset \mathbb{N}^*$ est tel que $\min(B_N) = p_{N+1}$. On a

$$|\alpha_N| \leq \sum_{k \geq p_{N+1}} |u_k| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.501)$$

car c'est le reste de $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ convergente.

Donc $u_1 + \alpha_N = 0 \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_1$ donc $u_1 = 0$.

Avec $u_1 = 0$,

$$\begin{cases} S_n &= u_n + u_{2n} + u_{3n} + \dots &= 0 \\ S_{2n} &= u_{2n} + u_{4n} + u_{6n} + \dots &= 0 \end{cases} \quad (2.502)$$

et en recommençant avec u_n pour tout $n \geq 1$, on obtient bien

$$\boxed{u_n = 0} \quad (2.503)$$

■

Solution 2.44.

1. On prend $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum u_n = 0$ converge donc $\sum f(u_n) = \sum f(0)$ converge. Donc

$$\boxed{f(0) = 0} \quad (2.504)$$

Supposons que f n'est pas continue en 0. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in [-\alpha, \alpha] : |f(x)| \geq \varepsilon_0$. Pour $\alpha \equiv \alpha_n = \frac{1}{n^2}$, il existe $x_n \in [-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}] : |f(x_n)| \geq \varepsilon_0$. $\sum x_n$ converge absolument mais $\sum f(x_n)$ diverge grossièrement ce qui est absurde.

$$\boxed{f \text{ est continue en } 0.} \quad (2.505)$$

2. Supposons que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in]-\alpha, \alpha[: f(-x) \neq -f(x)$. On définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ telle que $f(-x_n) + f(x_n) \neq 0$. Il existe $N_n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$N_n |f(-x_n) + f(x_n)| \geq 1 \quad (2.506)$$

(il suffit de prendre $N_n = \left\lfloor \frac{1}{|f(x_n) + f(-x_n)|} \right\rfloor + 1$)

On définit

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots, \dots, x_n, -x_n, \dots, \dots) \quad (2.507)$$

où $(x_n, -x_n)$ apparaît N_n fois. On a $\sum_{k=0}^{2N} u_k = 0$ et $\sum_{k=0}^{2N+1} u_k = x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\sum u_n$ converge.

Si $\sum f(u_n)$ convergerait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ alors

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(x_k) \right| < \frac{1}{2} \quad (2.508)$$

De plus, pour $n \geq n_0$, on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \dots + f(x_n) + f(-x_n) + f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2} \quad (2.509)$$

où $(f(x_n), f(-x_n))$ apparaît N_n fois. Comme

$$|f(x_{n+1}) + f(-x_{n+1}) + \dots| < \frac{1}{2} \quad (2.510)$$

on a

$$|f(x_n) + f(-x_n) + \dots + f(x_n) + f(-x_n)| = N_n |f(x_n) + f(-x_n)| < 1 \quad (2.511)$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est impaire au voisinage de } 0.} \quad (2.512)$$

3. Supposons que pour tout $\beta > 0$, il existe $(x, y) \in]-\beta, \beta[^2$ avec $f(x + y) \neq f(x) + f(y)$. Alors il existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers 0 telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $M_n \in \mathbb{N}$,

$$M_n |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \geq 1 \quad (2.513)$$

On définit alors

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_0 + y_0, -x_0, -y_0, \dots, x_n + y_n, -x_n, -y_n, \dots) \quad (2.514)$$

où $(x_n + y_n, -x_n, -y_n)$ apparaît M_n fois. On a

$$\sum_{k=0}^N u_k = \begin{cases} 0 & \text{si } N \equiv 0[3] \\ x_n + y_n & \text{si } N \equiv 1[3] \\ y_n & \text{si } N \equiv 2[3] \end{cases} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (2.515)$$

donc $\sum u_n$ converge.

Si $\sum f(u_n)$ convergerait, alors il existerait $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(u_k) \right| < \frac{1}{2} \quad (2.516)$$

De plus, d'après 2., il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1$, on a $f(-x_n) + f(-y_n) = -f(x_n) - f(y_n)$ donc pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a

$$|f(x_n + y_n) + f(-x_n) + f(-y_n)| \times M_n = |f(x_n + y_n) - f(x_n) - f(y_n)| \times M_n < 1 \quad (2.517)$$

ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est linéaire au voisinage de } 0.} \quad (2.518)$$

4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$, $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leq \frac{\beta}{|k|}$. Par récurrence, on a $f(kx) = kf(x)$.

Si $|x| < \beta$ et si $\frac{x}{\beta} \in \mathbb{Q}$, on a

$$\frac{x}{\frac{\beta}{2}} = \frac{p}{q} \quad (2.519)$$

donc en posant $\lambda = \frac{2}{\beta} f\left(\frac{\beta}{2}\right)$, on a

$$f(x) = f\left(\frac{p\beta}{2q}\right) = \frac{p}{q} f\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{p}{q} \frac{\beta}{2} \lambda = \lambda x \quad (2.520)$$

Si $\frac{x}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{x}{\beta}$. On a alors

$$f(x) = f\left(\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + r_n\frac{\beta}{2}\right) \quad (2.521)$$

$$= f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) + f\left(\frac{r_n\beta}{2}\right) \quad (2.522)$$

et $x - \frac{r_n\beta}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc $f\left(x - \frac{r_n\beta}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après 1. et $r_n f\left(\frac{\beta}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda x$

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est une homothétie au voisinage de } 0.} \quad (2.523)$$

■

3 Probabilités sur un univers dénombrable

Solution 3.1.

1. On note P : 'le lancer initial donne pile', F : 'le lancer initial donne face', B_k : 'la k -ième boule est blanche', N_k : 'la k -ième boule est noire'.

On a

$$\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(P) \mathbb{P}_P(B_k) + \mathbb{P}(F) \mathbb{P}_F(B_k) = \frac{1}{2} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} \quad (3.1)$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(B_k) = \frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

2. On a

$$\boxed{\mathbb{P}_{B_k}(P) = \mathbb{P}_P(B_k) \frac{\mathbb{P}(P)}{\mathbb{P}(B_k)} = \frac{k}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1} \quad (3.3)$$

3. On a

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}_P(B_1 \cap \dots \cap B_k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}_F(B_1 \cap \dots \cap B_k) \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\prod_{j=1}^k \frac{j}{j+1} + \prod_{j=1}^k \frac{1}{j+1} \right) \quad (3.5)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \right)} \quad (3.6)$$

4. On a

$$\mathbb{P}(B_k \cap B_{k+1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{k+1} \times \frac{k+1}{k+2} + \frac{1}{k+1} \times \frac{1}{k+2} \right) \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)} \right) \quad (3.8)$$

Donc on a indépendance si et seulement si

$$\mathbb{P}(B_k \cap B_{k+1}) = \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}(B_{k+1}) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{k(k+1)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

$$\Leftrightarrow 2k(k+1)+2 = (k+2)(k+2) \quad (3.10)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2+2k = k^2+3k \quad (3.11)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k=1} \quad (3.12)$$

Ainsi, seuls les deux premiers tirages sont indépendants.

Remarque 3.1. *Seuls les deux premiers tirages sont indépendants car le premier tirage est indépendant du lancer de pièce.*

Solution 3.2.

1.

$$\boxed{p_0 = 1, q_0 = 0, p_N = 0, q_N = 1} \quad (3.13)$$

2. Soit $a \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$. Puisque les lancers de pièce sont indépendants, on peut partitionner selon le résultat du premier lancer. On a donc [probabilités conditionnelles]

$$\boxed{p_a = p \times p_{a+1} + q \times p_{a-1}} \quad (3.14)$$

L'équation caractéristique est

$$pX^2 - x + q = 0 \quad (3.15)$$

On a $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4(1-p)p = 4p^2 - 4p + 1 = (1 - 2p)^2$.

Ainsi, si $p \neq \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que pour tout $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on a

$$p_a = \alpha + \beta \left(\frac{q}{p}\right)^a \quad (3.16)$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \times \left(\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^N \right)} \quad (3.17)$$

Si $p = \frac{1}{2}$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$p_a = \alpha a + \beta \quad (3.18)$$

Grâce aux valeurs en $a = 0, a = N$, on en déduit que

$$\boxed{p_a = \frac{1}{N} (N - a)} \quad (3.19)$$

3. Pour tout $a \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, on a

$$q_a = pq_{a+1} + qp_{a-1} \quad (3.20)$$

donc pour tout $a \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, on a

$$p_a + q_a = p(p_{a+1} + q_{a+1}) + q(p_{a-1} + q_{a-1}) \quad (3.21)$$

Comme $p_0 + q_0 = p_N + q_N = 1$, on a pour tout $a \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\boxed{p_a + q_a = 1} \quad (3.22)$$

Ainsi, le jeu s'arrête presque sûrement en temps fini.

■

Solution 3.3.

1. Les tirs sont indépendants donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= (1-a)^n \times (1-b)^n \times a \\ \mathbb{P}(B_n) &= (1-a)^n \times (1-b)^n \times (1-a) \times b \end{aligned} \quad (3.23)$$

2. On a

$$G_A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad (3.24)$$

réunion disjointe. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{a}{1-(1-a)(1-b)} = \frac{a}{a+b-ab} \\ \mathbb{P}(G_B) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \frac{b(1-a)}{a+b-ab} \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) = 1} \quad (3.26)$$

3. On a $\mathbb{P}(G_A) = \mathbb{P}(G_B)$ si et seulement si

$$\frac{a}{1-a} = b \quad (3.27)$$

Cela implique que $\frac{a}{1-a} \in]0, 1[$ ce qui est possible uniquement (après étude de fonction) si

$$\boxed{a \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[\text{ et } b = \frac{a}{1-a}} \quad (3.28)$$

■

Solution 3.4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose E_n : 'Le joueur gagne au bout du n-ième lancer' (évènement disjoints) et G : 'Le joueur gagne'. On a $G \cup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n$. Donc

$$\mathbb{P}(G) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{n} = \ln(2) \quad (3.29)$$

2. On note P_n : 'le joueur obtient pile au n-ième lancer', P : 'il obtient pile'. On a

$$\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\mathbb{P}(G \cap P_n)}{\mathbb{P}(G)} = \frac{\mathbb{P}_{P_n}(G) \times \mathbb{P}(P_n)}{\mathbb{P}(G)} \quad (3.30)$$

donc

$$\mathbb{P}_G(P_n) = \frac{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\ln(2)} \quad (3.31)$$

Puis

$$\mathbb{P}_G(P) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}_G(P_n) = 1 \quad (3.32)$$

■

Remarque 3.2. On a utilisé le résultat suivant : pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad (3.33)$$

Soit on connaît le résultat avec les séries entières, soit on le redémontre à la main : pour $N \geq 1$, on a

$$\sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n} = \int_0^1 \sum_{n=1}^N x^n t^{n-1} dt \quad (3.34)$$

$$= x \int_0^1 \frac{1 - (xt)^N}{1 - xt} dt \quad (3.35)$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1 - xt} dt}_{= [\ln(1 - xt)]_0^1} + R_N \quad (3.36)$$

avec $|R_N| \leq \frac{x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$ d'où le résultat.

Solution 3.5.

1. On a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = p_0 + p_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} = 2\alpha + (1-2\alpha) \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \quad (3.37)$$

donc

$$\boxed{\text{c'est une probabilité sur } \mathbb{N}.} \quad (3.38)$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note E_k : 'la famille a k enfants et exactement 2 garçons', E : 'la famille a exactement 2 garçons', A_k : 'la famille a k enfants'.

On a alors

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}_{A_k}(E_k) \times \mathbb{P}(A_k) \quad (3.39)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \binom{k}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \times p_k \quad (3.40)$$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{k+1}} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \quad (3.41)$$

$$= (1-2\alpha) \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)}{2^{2k}} \quad (3.42)$$

$$= (1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{2^{2k+4}} \quad (3.43)$$

$$= \frac{1}{16} (1-2\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)(k+2)}{4^k} = \frac{1}{16} (1-2\alpha) \times \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} \quad (3.44)$$

$$\boxed{= \frac{4(1-2\alpha)}{27}} \quad (3.45)$$

3. On note F : 'la famille a au moins 2 filles', F_k : 'la famille a exactement k filles et au moins 4 enfants', G : 'la famille a au moins 2 garçons', G_k : 'la famille a exactement k garçons et au moins 4 enfants'.

On a

$$\mathbb{P}_G(G) = \frac{\mathbb{P}(F \cap G)}{\mathbb{P}(G)} \quad (3.46)$$

et $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G} = F_0 \cup F_1 \cup G_0 \cup G_1$. Donc, comme $\mathbb{P}(F_0) = \mathbb{P}(G_0)$ et $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(G_1)$, on a $\mathbb{P}(F \cap G) = 1 - 2(\mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1))$.

On a alors

$$\mathbb{P}(G_0) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \quad (3.47)$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{1-2\alpha}{2^{2k-1}} \quad (3.48)$$

$$= 2(1-2\alpha) \frac{1}{4^4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \quad (3.49)$$

$$= 2(1-2\alpha) \times \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{3} \quad (3.50)$$

et

$$\mathbb{P}(G_1) = \sum_{k=4}^{+\infty} \binom{k}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^k p_k \quad (3.51)$$

$$= \sum_{k=4}^{+\infty} k \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}} \quad (3.52)$$

$$= (1-2\alpha) \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{2^{2k-1}} \quad (3.53)$$

$$= (1-2\alpha) \times \frac{2}{4} \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k}{4^{k-1}} \quad (3.54)$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k+1}{4^k} \quad (3.55)$$

$$= \frac{1-2\alpha}{2} \times \left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} - 1 - \frac{2}{4} - \frac{3}{4^2} \right) \quad (3.56)$$

et on calcule enfin

$$\boxed{\mathbb{P}(G) = 1 - \mathbb{P}(G_0) - \mathbb{P}(G_1)} \quad (3.57)$$

■

Solution 3.6. Pour tout $k \geq 1$, on note A_k : 'A gagne à son lancé k ' et B_k de manière équivalente pour le joueur B . On note G_A : 'A gagne' et de même pour B . On a ainsi

$$G_A = \bigcup_{k \geq 1} A_k \quad (3.58)$$

(réunion disjointe) et pareil pour G_B . On a

$$\mathbb{P}(A_k) = \left(1 - \frac{5}{36}\right)^{k-1} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \times \frac{5}{36} \quad (3.59)$$

d'où

$$\mathbb{P}(G_A) = \frac{5}{36} \times \frac{1}{1 - (1 - \frac{5}{36})(1 - \frac{1}{6})} \quad (3.60)$$

et pareil

$$\mathbb{P}(G_B) = \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{5}{36}\right) \times \frac{1}{1 - (1 - \frac{5}{36})(1 - \frac{1}{6})} > \mathbb{P}(G_A) \quad (3.61)$$

et

$$\mathbb{P}(G_A) + \mathbb{P}(G_B) = 1 \quad (3.62)$$

donc $G_A \cup G_B$ est presque sur. ■

Solution 3.7. Soit $k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket$. La probabilité que l'on tire $2k$ boules blanches est (loi binomiale) :

$$\binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \quad (3.63)$$

donc la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit pair est

$$\mathbb{P}_P = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k} \quad (3.64)$$

De même, la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit impair est

$$\mathbb{P}_I = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} \times \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2k+1} \times \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-2k-1} \quad (3.65)$$

On a alors

$$\mathbb{P}_P + \mathbb{P}_I = 1 \quad (3.66)$$

et

$$\mathbb{P}_P - \mathbb{P}_I = \sum_{k'=0}^n \binom{n}{k'} (-1)^{k'} \left(\frac{a}{a+b}\right)^{k'} \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k'} = \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n \quad (3.67)$$

On a donc

$$\mathbb{P}_P = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{b-a}{a+b}\right)^n\right) \quad (3.68)$$

■

Remarque 3.3. Si on note \mathbb{P}_3 la probabilité que le nombre de boules blanches tirées soit multiple de 3 :

$$\mathbb{P}_3 = \sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{n}{3k} \left(\frac{a}{a+b} \right)^{3k} \left(\frac{b}{a+b} \right)^{n-3k} \quad (3.69)$$

On note \mathbb{P}_2 la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit congru à 2 module 3, et on définit \mathbb{P}_1 de même. Alors on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 &= 1 \\ j\mathbb{P}_1 + j^2\mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 &= \left(\frac{b+ja}{a+b} \right)^n \\ j^2\mathbb{P}_1 + j\mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_3 &= \left(\frac{b+j^2a}{a+b} \right)^n \end{cases} \quad (3.70)$$

et donc

$$\mathbb{P}_3 = \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{b+ja}{a+b} \right)^n + \left(\frac{b+j^2a}{a+b} \right)^n \right) \quad (3.71)$$

Solution 3.8. Soit pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$A_i = \{\sigma \in \Sigma_n \mid \sigma(i) = i\} \quad (3.72)$$

$$A = \{\sigma \in \Sigma_n \mid \sigma \text{ a un point fixe}\} \quad (3.73)$$

On a

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \quad (3.74)$$

On a

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{J \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |J|=k}} \left| \bigcap_{i \in J} A_i \right| \quad (3.75)$$

Il y a $\binom{n}{k}$ tels J , et on a

$$\left| \bigcap_{i \in J} A_i \right| = |\{\sigma \in \Sigma_n \mid \forall i \in J, \sigma(i) = i\}| = (n-k)! \quad (3.76)$$

Ainsi,

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! \quad (3.77)$$

donc

$$p_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = -\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 1 - \frac{1}{e} \quad (3.78)$$

■

Solution 3.9.

1.

$$\boxed{p_N(0) = 0, p_N(1) = 1} \quad (3.79)$$

2. Pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, on a

$$p_N(n) = p \times p_N(n+1) + (1-p) \times p_N(n-1) \quad (3.80)$$

et l'équation caractéristique est $X^2 - \frac{1}{p}X + \frac{1-p}{p}$ et le discriminant vaut $\Delta = \left(\frac{1}{p} - 2\right)^2 \geq 0$.

Donc les solutions sont $r_1 = 1$ et $r_2 = \frac{q}{p}$. Ainsi, pour tout $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$,

$$p_N(n) = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^n \quad (3.81)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Avec les conditions initiales, on trouve

$$\begin{cases} \mu &= \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}} \\ \lambda &= \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \end{cases} \quad (3.82)$$

donc

$$\boxed{p_N(n) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \text{ i.e. } p < \frac{1}{2} \\ 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n & \text{si } q < p \text{ i.e. } p > \frac{1}{2} \end{cases}} \quad (3.83)$$

On vérifie d'ailleurs que l'arrêt en temps fini est presque sûr : $p_N(n) + q_N(n) = 1$ (utiliser la relation de récurrence et les conditions initiales).

■

Solution 3.10.

1. On note A_n : 'la première boule blanche apparaît au n -ième tirage' et B_n : 'on tire une boule noire au n -ième tirage'. On a

$$A_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} B_i \bigcap \overline{B_n} \quad (3.84)$$

ce qui implique donc

$$\mathbb{P}(A_n) = p_n \quad (3.85)$$

$$= \mathbb{P}(B_1) \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \dots \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}}(\overline{B_n}) \quad (3.86)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} \quad (3.87)$$

$$= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}} \quad (3.88)$$

et par sommation télescopique, on a

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1} \quad (3.89)$$

Donc on tire une boule blanche presque sûrement.

2. On utilise le même principe : pour $n \geq 1$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = p_n = \frac{1}{2} \times \frac{c+1}{c+2} \times \frac{2c+1}{2c+2}} \times \dots \times \frac{(n-2)c+1}{(n-2)c+2} \times \frac{1}{(n-1)c+2} \quad (3.90)$$

Comme les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont incompatibles, on a

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq 1 \quad (3.91)$$

donc

$$\boxed{\text{la série converge.}} \quad (3.92)$$

On peut montrer à nouveau que le tirage d'une boule blanche reste presque sûr. En effet, on a

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{nc+2-c-1}{nc+2} = 1 - \frac{c+1}{nc+2} = a - \frac{c+1}{nc} + O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (3.93)$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, il existe $K > 0$ tel que

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^{\frac{c+1}{c}}} \quad (3.94)$$

avec $\frac{c+1}{c} > 1$. Notamment, $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = 0$. Comme

$$(nc+2)p_{n+1} = ((n-1)c+1)p_n \quad (3.95)$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ncp_{n+1} - (n-1)cp_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2p_{n+1} \quad (3.96)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - 2 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} p_n - u_1 \right) \quad (3.97)$$

La première somme est télescopique et vaut 0, et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc on trouve bien

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1 \quad (3.98)$$

■

Remarque 3.4. On peut contourner la règle de Raabe-Duhamel. On écrit

$$\ln(p_{n+1}) = -\ln(2) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{kc+1}{kc+2}\right) - \ln(nc+2) \quad (3.99)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{1}{kc+2}\right) - \ln(n) + \ln(c) - \ln(2) + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (3.100)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{kc} + O_{k \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right) \right) - \ln(n) - A + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (3.101)$$

$$= -\frac{1}{c} \left(\ln(n) + \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) - \ln(n) - A + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (3.102)$$

$$= -\ln(n) \left(1 + \frac{1}{c} \right) + A' + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \quad (3.103)$$

Ainsi,

$$p_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K}{n^{1+\frac{1}{c}}} \quad (3.104)$$

donc la série converge.

Solution 3.11. On a

$$u_{n+1} = q \times 1 + p \times u_n^2 \quad (3.105)$$

car soit la bactérie meure au premier jour, soit les deux descendants n'ont plus de lignée au n -ième jour (on a u_n^2 car les lignées des deux descendants sont indépendantes).

Soit

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto q + px^2 \end{aligned}$$

Si $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \in [0, 1]$ car $f(1) = q + p = 1$. Soit $g(x) = f(x) - x$. On a

$$g(x) = p(x - 1) \left(x - \frac{p}{q} \right) \quad (3.106)$$

— Si $1 \leq \frac{p}{q}$: on a pour tout $x \in [0, 1[$, $g(x) > 0$ et $g(1) = 0$. Donc si

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1} \quad (3.107)$$

car c'est une suite croissante, majorée, convergente vers le point fixe 1.

— Si $1 > \frac{q}{p}$: si $x \in \left[0, \frac{q}{p}\right[$, on a $g(x) > 0$, si $x \in \left]\frac{q}{p}, 1\right[$, $g(x) < 0$ et $g\left(\frac{q}{p}\right) = 0$.

Par récurrence, comme $u_0 = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{q}{p}\right[$ donc (suite croissante majorée qui converge vers le point fixe $\frac{q}{p}$) donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{q}{p}} \quad (3.108)$$

On a bien

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \min\left(1, \frac{q}{p}\right)} \quad (3.109)$$

Ainsi, la lignée s'éteint presque sûrement si et seulement si $\frac{q}{p} \geq 1$ i.e. $p \leq \frac{1}{2}$. Sinon, la probabilité d'extinction est $\frac{q}{p}$.

Si $p = \frac{1}{2}$, on pose $\varepsilon_n = 1 - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$. On a

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} (1 + u_n^2) \quad (3.110)$$

d'où

$$\varepsilon_{n+1} = 1 - u_{n+1} = \varepsilon_n \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (3.111)$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\varepsilon_{n+1}^\alpha = \varepsilon_n^\alpha \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}\right)^\alpha = \varepsilon_n^\alpha - \frac{\alpha \varepsilon_n^{\alpha+1}}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(\varepsilon_n^{\alpha+1}) \quad (3.112)$$

On choisit $\alpha = -1$, on a

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \quad (3.113)$$

D'après le lemme de Césaro, on a $\frac{1}{\varepsilon_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ d'où

$$\boxed{\varepsilon_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n}} \quad (3.114)$$

■

Solution 3.12. On note E_n : 'la puce est en 0 à l'instant $2n$ ' et B_n : 'la puce repasse pour la première fois en 0 à l'instant $2n$ '.

Soit E : 'la puce repasse par l'origine'. On a

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n \quad (3.115)$$

où les B_n sont disjoints donc $\mathbb{P}(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(B_n)$.

On a

$$\mathbb{P}(E_n) = \binom{2n}{n} p^n q^n \quad (3.116)$$

On écrit alors

$$E_n = \bigcup_{1 \leq k \leq n} (E_n \cap B_k) \quad (3.117)$$

où la réunion est disjointe (on partitionne selon le premier passage en 0). D'où

$$u_n = \mathbb{P}(E_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(E_n) \quad (3.118)$$

On pose $b_k = \mathbb{P}(B_k)$ et on a $\mathbb{P}_{B_k}(E_n) = \mathbb{P}(E_{n-k}) = u_{n-k}$: c'est comme si on repartait de 0 à l'étape k . On a donc $u_0 = \mathbb{P}(E_0) = 1$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n b_k u_{n-k} = \sum_{k=0}^n b_k u_{n-k} \quad (3.119)$$

en posant $b_0 = 0$.

Or, on a

$$u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} (pq)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} (pq)^n \quad (3.120)$$

d'où

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}} \quad (3.121)$$

et on a $4pq < 1$ si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$ donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si $p \neq \frac{1}{2}$.

Dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$, on pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = S - u_0 \quad (3.122)$$

$$= S - 1 \quad (3.123)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^n b_k u_{n-k} \quad (3.124)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n b_k u_{n-k} \quad (3.125)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} u_l \right) = S \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \quad (3.126)$$

donc

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \mathbb{P}(E) = \frac{S-1}{S} < 1} \quad (3.127)$$

Comme dans ce cas, on a $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(E_n) < \infty$, le lemme de Borel-Cantelli indique que le nombre de retours à l'origine est presque sûrement fini. ■

Remarque 3.5. Avec les séries entières, on peut vérifier que

$$S = \frac{1}{\sqrt{1-4pq}} \quad (3.128)$$

d'où

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \sqrt{1-4pq} \quad (3.129)$$

Dans le cas $p = \frac{1}{2}$, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ diverge. Comme on a pour $p \neq \frac{1}{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(p) = 1 - \sqrt{4p(1-p)} \quad (3.130)$$

et $b_n(p) \leq b_n\left(\frac{1}{2}\right)$, on peut passer à la limite donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad (3.131)$$

et la retour en 0 est presque sûr si $p = \frac{1}{2}$.

Remarque 3.6. *Pour montrer que*

$$l(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{1-4x} \quad (3.132)$$

lorsque $0 \leq x < \frac{1}{4}$. On effectue un produit de Cauchy

$$l(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 4^n x^n = \frac{1}{1-4x} \quad (3.133)$$

en dénombrant les parties d'un ensemble à $2n$ éléments séparées en n éléments dans A et n éléments dans B .

Solution 3.13. On note P_n : 'on obtient pile au n -ième lancer' et F_n : 'on obtient face au n -ième lancer'.

1. On a

$$\boxed{a_1 = 0, a_2 = p^2, a_3 = qp^2} \quad (3.134)$$

2. Pour $n \geq 4$, on a

$$A_n = \bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{A_k} \bigcap F_{n-2} \bigcap P_{n-1} \bigcap P_n \quad (3.135)$$

Comme les événements concernant des lancers différents sont supposés indépendants, on a

$$a_n = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{A_k} \right) qp^2 \quad (3.136)$$

On écrit

$$\mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{n-3} \overline{A_k} \right) = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{k=1}^{n-3} A_k \right) = 1 - \sum_{k=1}^{n-3} a_k \quad (3.137)$$

car les A_k sont incompatibles. Ainsi,

$$a_n = p^2 q \left(1 - \sum_{k=1}^{n-3} a_k \right) \quad (3.138)$$

et $\sum_{k \geq 1} a_k$ converge puisque

$$\sum_{k=1}^N a_k \leq \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \geq 1} A_k \right) \leq 1 \quad (3.139)$$

Pour calculer a_n , on remarque que

$$B_n = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k} \quad (3.140)$$

est exactement l'évènement 'on n'a pas deux piles consécutifs dans les lancers $\{1, \dots, n\}$ '.

Si P_n , on a nécessairement F_{n-1} et B_{n-2} , si F_n on a nécessairement B_{n-1} . Ainsi,

$$\mathbb{P}(B_n) = qp\mathbb{P}(B_{n-2}) + q\mathbb{P}(B_{n-1}) \quad (3.141)$$

On a l'équation caractéristique $X^2 - qX - pq$, le discriminant est $\Delta = q^2 + 4pq > 0$. On en déduit les racines $\lambda_1 = \frac{q+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{q-\sqrt{\Delta}}{2}$, et on utilise les conditions aux limites $\mathbb{P}(B_0) = \mathbb{P}(B_1) = 1$ et $\mathbb{P}(B_n) = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$.

■

Remarque 3.7. La probabilité d'obtenir une séquence fixée de longueur N est égale à 1. En effet, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n : 'la séquence apparaît entre les lancers $nN + 1$ et $(n+1)N$ '. Les A_n sont clairement indépendants et on a $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) = \alpha > 0$ et $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge. Notamment,

$$\mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^k \overline{A_n}\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^k (1 - \alpha) = 0 \quad (3.142)$$

On a donc presque sûrement la séquence. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a presque sûrement une infinité de fois la séquence.

Solution 3.14. On note N_n : 'on tire une boule noire au n -ième tirage', et B_n : 'on tire une boule blanche au n -ième tirage'.

On a

$$\mathbb{P}_N(n) = \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_n}(B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n)} \quad (3.143)$$

Or

$$\mathbb{P}(B_1 \cap \dots \cap B_n) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{N+1} \left(\frac{k}{n}\right)^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \quad (3.144)$$

car pour k fixé, $\frac{1}{N+1}$ est la probabilité d'avoir l'urne k et $\left(\frac{k}{n}\right)^n$ est la probabilité d'avoir une blanche sachant qu'on a pris l'urne k , et la limite vient d'une somme de Riemann.

Donc

$$\boxed{\mathbb{P}_N(n) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}} \quad (3.145)$$

■

Remarque 3.8. Pour $n = 0$, on a

$$\mathbb{P}_N(0) = \frac{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^N k}{N+1} = \frac{1}{2} \quad (3.146)$$

Solution 3.15. Si cette probabilité est définie, on note p la probabilité recherchée. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(n_1, n_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a $n_1 \wedge n_2 = d$ si et seulement si $n_1 = dn'_1$ et $n_2 = dn'_2$ avec $n'_1 \wedge n'_2 = 1$. Ainsi, la probabilité pour que $n_1 \wedge n_2 = d$ est $\frac{p}{d^2}$ et

$$\sum_{d \geq 1} \frac{p}{d^2} = 1 \quad (3.147)$$

d'où

$$\boxed{p = \frac{6}{\pi^2}} \quad (3.148)$$

■

Remarque 3.9. Pour justifier un peu plus précisément, on note que dans l'ensemble $\llbracket 1, dN \rrbracket$, la proportion de multiples de d est de $\frac{1}{d}$, donc sur $\llbracket 1, dN \rrbracket^2$, la proportion de couples de multiples de d est $\frac{1}{d^2}$.

Solution 3.16. On note $q_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ (qui détermine la loi de X_n car c'est une variable de Bernouilli). On a $q_1 = p_2$ et pour $n \geq 2$,

$$q_n = p_1 q_{n-1} + p_2 (1 - q_{n-1}) = (p_1 - p_2) q_{n-1} + p_2 \quad (3.149)$$

La relation est vraie pour $n = 1$ en posant $q_0 = 0$.

— Si $p_1 = 1$ et $p_2 = 0$, on a $q_n = q_{n-1} + p_2$ d'où

$$\boxed{q_n = 0} \quad (3.150)$$

— Si $(p_1, p_2) \neq (1, 0)$, on a $p_1 - p_2 \neq 1$ donc

$$q_n = (p_1 - p_2)^n \times \frac{-p_2}{1 - (p_1 - p_2)} + \frac{p_2}{1 - (p_1 - p_2)} \quad (3.151)$$

$$= \boxed{\frac{p_2}{1 - (p_1 - p_2)} (1 - (p_1 - p_2)^n) = \mathbb{E}(X_n)} \quad (3.152)$$

— Si $p_1 - p_2 = -1$, i.e. $p_1 = 0$ et $p_2 = 1$,

$$\boxed{q_n \text{ n'a pas de limite.}} \quad (3.153)$$

— Si $p_1 - p_2 \neq -1$,

$$\boxed{q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{p_2}{1 - (p_2 - p_1)}} \quad (3.154)$$

■

Solution 3.17.

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, on veut

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}((D_1 \leq k) \cap (D_2 \leq k)) = \mathbb{P}(D_1 \leq k) \mathbb{P}(D_2 \leq k) = \frac{k^2}{36} \quad (3.155)$$

Or on a (avec $P(X \leq 0) = 0$)

$$P(X = k) = P(X \leq k) - P(X \leq k - 1) = \frac{2k - 1}{36} \quad (3.156)$$

De même, on a $P(Y \geq k) = \frac{(7-k)^2}{36}$ donc

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{13 - 2k}{36} \quad (3.157)$$

A chaque fois, on vérifie que $\sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(Y = k) = 1$.

Pour les calculs de variance et d'espérance, on calcule $\sum_{k=1}^6 k \mathbb{P}(X = k)$ et $\sum_{k=1}^6 k^2 \mathbb{P}(X = k) - (\sum_{k=1}^6 k \mathbb{P}(X = k))^2$, de même pour Y .

2. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$, si $i < j$ on a $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ mais $P(X = i)P(Y = j) \neq 0$, on n'a donc pas indépendance.

3. Si $P(D_i = k) = p_{k,i}$, on a

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \left(\sum_{l=1}^k p_{l,1} \right) \left(\sum_{l=1}^k p_{l,2} \right) = \sum_{1 \leq l, r \leq k} p_{l,1} \times p_{r,2} \quad (3.158)$$

et on calcule ensuite $P(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)$ et cela vaut ce que cela vaut.

■

Solution 3.18.

1. On a

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^i \frac{a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!} (b^i e^{-b}) \quad (3.159)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b^i e^{-b}}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a^j (1-a)^{i-j} \quad (3.160)$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b^i e^{-b}}{i!} \quad (3.161)$$

$$= e^b e^{-b} \quad (3.162)$$

$$= 1 \quad (3.163)$$

donc la définition est cohérente.

2. On a

$$\boxed{p_{i,\cdot} = \sum_{j=0}^i p_{i,j} = \frac{b^i e^{-b}}{i!}} \quad (3.164)$$

et

$$p_{\cdot,j} = \sum_{i=j}^{+\infty} \frac{e^{-b} a^j}{j!} \left(\frac{b^i (1-a)^{i-j}}{(i-j)!} \right) \quad (3.165)$$

$$= \frac{e^{-b} a^j b^j}{j!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{b^i (1-a)^i}{i!} \quad (3.166)$$

$$= \boxed{\frac{e^{-ab} (ab)^j}{j!}} \quad (3.167)$$

On a $p_{i,j} \neq p_{i,\cdot} \neq p_{\cdot,j}$ donc les variables ne sont pas indépendantes.

3. Z est à valeurs dans \mathbb{N} (car $p_{i,j} = 0$ si $i < j$). On a

$$\mathbb{P}(X - Y = k) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j + k, Y = j) \quad (3.168)$$

$$= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b^{j+k} e^{-b} a^j (1-a)^k}{j! k!} \quad (3.169)$$

$$= \frac{e^{-b} b^k (1-a)^k}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(ba)^j}{j!} \quad (3.170)$$

$$= \boxed{\frac{e^{b(a-1)} (b(1-a))^k}{k!}} \quad (3.171)$$

De plus,

$$\mathbb{P}(Z = k, Y = j) = \mathbb{P}((X, Y) = (k + j, j)) = p_{k+j, j} = \frac{b^{j+k} e^{-b} a^j (1-a)^k}{j! k!} \quad (3.172)$$

et

$$\mathbb{P}(Z = k) \mathbb{P}(Y = j) = \frac{e^{b(a-1)} b^k (1-a)^k}{k!} \frac{e^{-ab} (ab)^j}{j!} \quad (3.173)$$

$$= \frac{e^{-b} b^{k+j} a^j (1-a)^k}{k! j!} \quad (3.174)$$

donc Z et Y sont indépendantes. ■

Remarque 3.10. On a $X \sim \mathcal{P}(b)$ et $Y \sim \mathcal{P}(ab)$ donc X et Y ont des espérances.

Solution 3.19.

1. On a $S_n - S_{n-1} = T_n$ pour tout $n \geq 2$, donc

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i \quad (3.175)$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, comme $T_n \sim \mathcal{G}(1-x)$, on a

$$\mathbb{P}(T_n = k) = x^{k-1} (1-x) \quad (3.176)$$

et

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} (1-x) = \frac{1}{1-x} \quad (3.177)$$

et

$$\mathbb{V}(T_n) = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (3.178)$$

3. On a

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(T_i) = \frac{n}{1-x} \quad (3.179)$$

Comme les $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont indépendants, on a

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(T_i) = \frac{nx}{(1-x)^2} \quad (3.180)$$

Pour $k < n$, on a $\mathbb{P}(S_n = k) = 0$ et sinon, on a

$$\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} (1-x)^n x^{k-n} \quad (3.181)$$

(choisir les $n-1$ succès parmi $k-1$ épreuves).

4. On a $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = 1$ donc

$$\boxed{\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}} \quad (3.182)$$

■

Solution 3.20. On a $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}$. On pose

$$u_{k,n} = \begin{cases} \mathbb{P}(X = k) & \text{si } k > n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.183)$$

Alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > n)$ converge si et seulement si $(u_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable ($u_{k,n} \geq 0$) si et seulement si $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$ converge (théorème de Fubini). Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) \quad (3.184)$$

■

Solution 3.21. On cherche $\sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \right) = \sup_{k \in \mathbb{N}} u_k$ avec $u_k > 0$. On a

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\lambda}{k+1} \geq 1 \quad (3.185)$$

si et seulement si $k \leq \lambda - 1$. On a donc $u_k \leq u_{k+1}$ si et seulement si $k \leq \lfloor \lambda \rfloor - 1$ et le maximum est donc atteint pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

Si $\lambda = n \in \mathbb{N}^*$, le maximum vaut

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \quad (3.186)$$

■

Solution 3.22.

1. On a

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \dots \times \frac{10 - (k - 1)}{10 - (k - 2)} \times \frac{1}{10 - (k - 1)} = \frac{1}{10} \quad (3.187)$$

donc $X \sim \mathcal{U}([1, 10])$ et $Y \sim \mathcal{G}(\frac{1}{10})$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{11}{2}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{10^2 - 1}{12} = \frac{33}{4}$, $\mathbb{E}(Y) = 10$, $\mathbb{V}(Y) = \frac{9}{10} \times 100 = 90$.

2. Soit S l'événement 'le gardien est sobre' et Z compte le nombre d'essais au bout desquels il a réussi. Alors

$$\mathbb{P}_{Z \geq 9}(5) = \frac{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}_S(Z \geq 9)}{\mathbb{P}(Z \geq 9)} = \frac{\mathbb{P}(S)\mathbb{P}(X \geq 9)}{\frac{1}{3}\mathbb{P}(Y \geq 9) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X \geq 9)} \quad (3.188)$$

On a $\mathbb{P}(X \geq 9) = \frac{1}{5}$ et

$$\mathbb{P}(Y \geq 9) = \sum_{n=9}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^8 \quad (3.189)$$

d'où

$$\boxed{\mathbb{P}_{Z \geq 9}(5) = \frac{2}{5 \times \left(\frac{9}{10}\right)^8 + 2} < \frac{1}{2}} \quad (3.190)$$

■

Solution 3.23.

1. On a

$$\boxed{N = \frac{n(n+1)}{2}} \quad (3.191)$$

2. Soit $(i, j) \in [1, n]^2$, si $i < j$ on a $p_{i,j} = 0$ (où $p_{i,j}$ est la loi conjointe). Si $j \leq i$, on a

$$p_{i,j} = \frac{1}{N} = \frac{2}{n(n+1)} \quad (3.192)$$

On a ensuite

$$\boxed{p_{i,\cdot} = \sum_{j=1}^i \frac{2}{n(n+1)}} = \frac{2i}{n(n+1)} \quad (3.193)$$

et

$$\boxed{p_{j,\cdot}} = \sum_{i=j}^n \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2(n-j+1)}{n(n+1)} \quad (3.194)$$

3. On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B) &= \sum_{i=1}^n p_{i,\cdot} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n+1}{3} \\ \mathbb{E}(R) &= \sum_{j=1}^n j p_{\cdot,j} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n j(n+1-j) = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned} \quad (3.195)$$

On laisse le reste en calcul facile en utilisant $\mathbb{V}(G) = \mathbb{V}(R) + \mathbb{V}(B) - 2\text{cov}(B, R)$ et

$$\mathbb{E}(BR) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} i j p_{i,j} \quad (3.196)$$

■

Solution 3.24.

1. On écrit

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \mathbb{P}_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k) \mathbb{P}(X_n = k-1) = \frac{k}{k+1} \mathbb{P}(X_n = k) \quad (3.197)$$

2. On a $\mathbb{P}(X_n = k) = 0$ si $k > n$, sinon on écrit

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{k}{k+1} \mathbb{P}(X_{n-1} = k-1) \quad (3.198)$$

$$= \frac{k}{k+1} \times \frac{k-1}{k} \times \frac{k-2}{k-1} \times \cdots \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times u_{n-k} \quad (3.199)$$

$$= \frac{1}{k+1} u_{n-k} \quad (3.200)$$

3. On a $\sum_{j=0}^n \mathbb{P}(X_n = j) = 1$ donc

$$\sum_{j=0}^n \frac{u_n}{n-j+1} = 1 \quad (3.201)$$

et on a $u_0 = 1, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{5}{12}, u_3 = \frac{3}{8}$ (en utilisant la formule précédente).

4. On écrit

$$(k+1)\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = k\mathbb{P}(X_n = k-1) \quad (3.202)$$

donc pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$k\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = (k-1)\mathbb{P}(X_n = k-1) + \mathbb{P}(X_n = k-1) - \mathbb{P}(X_{n+1} = k) \quad (3.203)$$

En sommant sur $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on trouve donc

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + 1 - (1 - u_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n) + u_{n+1} \quad (3.204)$$

Par récurrence, on a directement

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = u_n + \cdots + u_1 + \underbrace{\mathbb{E}(X_0)}_{= 0}} \quad (3.205)$$

5. On écrit

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}((X_0 = 0) \cap (X_1 = 1) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = n-1) \cap (X_n = 0)) \quad (3.206)$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}_{X_0=0}(X_1 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{(X_0=0) \cap \cdots \cap (X_{n-1}=n-1)}(X_n=0) \quad (3.207)$$

$$= \mathbb{P}(X_0 = 0) \times \mathbb{P}_{X_0=0}(X_1 = 1) \times \cdots \times \mathbb{P}_{(X_{n-1}=n-1)}(X_n=0) \quad (3.208)$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} \quad (3.209)$$

$$= \boxed{\frac{1}{n(n+1)}} \quad (3.210)$$

Comme $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1 \quad (3.211)$$

donc

$$\boxed{\mathbb{P}(T = 0) = 0} \quad (3.212)$$

Donc le retour en temps fini à l'origine est presque sûr.

6. Non au vu de la formule donnée par $\mathbb{P}(T = n)$.

■

Solution 3.25.

1. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\boxed{\mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}} \quad (3.213)$$

(loi binomiale, car les m caisses sont équiprobables).

2. On a $\mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k) = 0$ si $k > n$ donc si $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_{X_1=k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{N=n}(X_1 = k) \mathbb{P}(N = n) \quad (3.214)$$

$$= \sum_{n=k} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \quad (3.215)$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} \left(\frac{1}{m}\right)^k \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^{n-k} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} \quad (3.216)$$

On reconnaît la série exponentielle, après un changement d'indice, appliquée en $\lambda \left(1 - \frac{1}{m}\right)$.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = e^{-\frac{\lambda}{m}} \frac{\left(\frac{\lambda}{m}\right)^k}{k!} \quad (3.217)$$

et donc $X_1 \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$.

■

Solution 3.26.

1. Si $(i, j) \in \{0, 1, 2\} \times \{-1, 0, 1\}$, on a

$$\mathbb{P}((U, V) = (i, j)) = \mathbb{P}\left(X = \frac{i+j}{2}, Y = \frac{-j}{2}\right) \quad (3.218)$$

Cette probabilité vaut 0 si i et j n'ont pas la même parité. Sinon, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((U, V) = (0, 0)) &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = q^2 \\ \mathbb{P}((U, V) = (1, -1)) &= \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = qp \\ \mathbb{P}((U, V) = (1, 1)) &= qp \\ \mathbb{P}((U, V) = (2, 0)) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = p^2 \end{aligned} \quad (3.219)$$

2. On a

$$\text{cov}(U, V) = \mathbb{E}((U - \mathbb{E}(U))(V - \mathbb{E}(V))) \quad (3.220)$$

$$= \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) \quad (3.221)$$

$$= \mathbb{E}(X^2 - Y^2) - [(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))] \quad (3.222)$$

$$= \mathbb{E}(X^2 - Y^2) - [\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2] \quad (3.223)$$

$$= \mathbb{V}(X) - \mathbb{V}(Y) \quad (3.224)$$

$$= 0 \quad (3.225)$$

3. Les variables U et V ne sont pas indépendantes, il suffit de voir que

$$\mathbb{P}((U, V) = (1, 0)) = 0 \neq \mathbb{P}(U = 1)\mathbb{P}(V = 0) = 2pq \times (q^2 + p^2) \quad (3.226)$$

■

Solution 3.27.

1. $P \sim \mathcal{G}(p)$ et $F \sim \mathcal{G}(q)$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(P) &= \frac{1}{p} \\ \mathbb{V}(P) &= \frac{q}{p^2} \\ \mathbb{E}(F) &= \frac{1}{q} \\ \mathbb{V}(F) &= \frac{p}{q^2} \end{aligned} \quad (3.227)$$

2. On a $\mathbb{P}((P = 1) \cap (F = 1)) = 0 \neq \mathbb{P}(P = 1)\mathbb{P}(F = 1)$ donc P et F ne sont pas indépendantes.

3. Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $p_{i,j} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$. On partitionne selon si $P = 1$ ou $F = 1$ et donc

$$p_{i,j} = p^{i+1}q^j + q^{i+1}p^j \quad (3.228)$$

On note

$$\begin{aligned} p_{i,\cdot} &= \sum_{j=1}^{+\infty} p_{i,j} = p^{i+1}\frac{q}{1-q} + q^{i+1}\frac{p}{1-p} = p^i q + q^i p \\ p_{\cdot,j} &= \sum_{i=1}^{+\infty} p_{i,j} = \frac{p^2}{1-p}q^j + \frac{q^2}{1-q}p^j = q^{j-1}p^2 + p^{j-1}q^2 \end{aligned} \quad (3.229)$$

De plus, on a $p_{1,1} = p^2q + q^2p = pq$ et $p_{1,\cdot} \times p_{\cdot,1} = (pq + qp)(p^2 + q^2) = 2pq(p^2 + q^2)$ dp,c si X et Y sont indépendantes, on a $1 = 2(p^2 + q^2)$ d'où $p = \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $p = \frac{1}{2}$, on a $p_{i,\cdot} = \frac{1}{2^i}$, $p_{\cdot,j} = \frac{1}{2^j}$ et $p_{i,j} = \frac{1}{2^{i+j}} = p_{i,\cdot}p_{\cdot,j}$. Ainsi, X et Y sont indépendantes si et seulement si $p = \frac{1}{2}$.

4. On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} ip_{i,\cdot} = q \sum_{i=1}^{+\infty} ip^i + p \sum_{i=1}^{+\infty} iq^i \quad (3.230)$$

On utilise alors le fait que $\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ si $|z| < 1$ et donc

$$\mathbb{E}(X) = \frac{p^2 + q^2}{pq} \geq 2 \quad (3.231)$$

car $(p - q)^2 \geq 0$.

5. On a

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{i,i} = \sum_{i=1}^{+\infty} p^i q^i (p + q) = pq \times \frac{1}{1 - pq} \quad (3.232)$$

6. Si $p = \frac{1}{2}$, X et Y sont indépendantes, donc par convolution,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i) \mathbb{P}(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} p_{i,p,k-i} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^k} = \frac{k-1}{2^k} \quad (3.233)$$

■

Solution 3.28.

1. On a

$$e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^{2k+1}}{(2k+1)!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{2^k k!} + x \sinh(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2}{2}} + x \sinh(\lambda) \quad (3.234)$$

car $|x^2| \leq 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(2k)! \geq 2^k k!$ (par récurrence).

2. $e^{\lambda X}$ admet une espérance car $|e^{\lambda X}| \leq e^{\lambda}$. Comme X est centrée, on a d'après l'inégalité précédente, en prenant l'espérance,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X}) \leq \mathbb{E}\left(e^{\frac{\lambda^2}{2}}\right) + \sinh(\lambda) \mathbb{E}(X) = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \quad (3.235)$$

En appliquant l'inégalité à $-X$, on a l'autre inégalité.

3. Grâce à l'inégalité de Markov, on en déduit que

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{\lambda X} \geq e^{\lambda a}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda a}} = e^{-\lambda a} \mathbb{E}(e^{\lambda X}) \quad (3.236)$$

4. On pose $X = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_i$. X est centrée dans $[-1, 1]$ ainsi que $-X$. On a donc, pour tout $\lambda \geq 0$,

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) = \mathbb{P}(X \geq a) + \mathbb{P}(-X \geq a) \leq 2e^{-\lambda a} e^{\frac{\lambda^2}{2}} \quad (3.237)$$

On optimise ensuite cette inégalité en $\lambda \geq 0$ (le minimum est en $\lambda = a$) et on a bien

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq a\right) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2}} \quad (3.238)$$

■

Solution 3.29.

1. Comme $\mathbb{E}(Y) < +\infty$, on a d'après le théorème de Fubini et le fait que $(X = l)_{l \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{l=0}^{+\infty} l \mathbb{P}(Y = l) \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{(X=k)}(Y = l) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X=k)}(Y) \mathbb{P}(X = k) \quad (3.239)$$

2. Pour $\lambda = X_{n+1}$ et $X = X_n$, et en utilisant le fait que les poules sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_{(X_n=k)} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \lambda \mathbb{P}(X_n = k) = \lambda \mathbb{E}(X_n) \quad (3.240)$$

Par récurrence, on a

$$\mathbb{E}(X_n) = \lambda^n \mathbb{E}(X_0) = \lambda^n N \quad (3.241)$$

On note que si $\lambda > 1$, $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la descendance est assurée. Si $\lambda < 1$, on a $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. ■

Solution 3.30. Soit $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(K = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=n)}(K = k) \mathbb{P}(N = n) \quad (3.242)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad (3.243)$$

$$= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \quad (3.244)$$

Donc $K \sim \mathcal{P}(\lambda p)$ et

$$\mathbb{E}(K) = \lambda p \quad (3.245)$$

■

Solution 3.31.

1. On a $\chi_{A_k} \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{k}\right)$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(S_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \quad (3.246)$$

Comme les $(A_n)_{n \geq 1}$ sont indépendants, on a aussi

$$\mathbb{V}(S_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(\chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n) \quad (3.247)$$

2. Soit $X_n = \frac{S_n}{\ln(n)}$. On a $\mathbb{E}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et $\mathbb{V}(X_n) = \frac{1}{\ln^2(n)} \mathbb{V}(S_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq 4 \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (3.248)$$

Or, si $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|\mathbb{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $|X_n - 1| < \varepsilon$. Par contraposée, si $|X_n - 1| \geq \varepsilon$, alors ou bien $|X_n - \mathbb{E}(X_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$ ou $|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| \geq \varepsilon) \leq 4 \frac{\mathbb{V}(X_n)}{\varepsilon^2} + \mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad (3.249)$$

A partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$, on a $|\mathbb{E}(X_n) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc pour tout $n \geq N_0$, on a $\mathbb{P}(|\mathbb{E}(X_n) - 1| \geq \frac{\varepsilon}{2}) = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad (3.250)$$

■

Solution 3.32.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\mathbb{P}(U \geq k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \geq k)\right) = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(X_i \geq k) = \prod_{i=1}^n \sum_{j=k}^{+\infty} q^{j-1} p = (q^{k-1})^n \quad (3.251)$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(U = k) = \mathbb{P}(U \geq k) - \mathbb{P}(U \geq k+1) = q^{(k-1)n}(q^n - 1) \quad (3.252)$$

U possède une espérance car $0 \leq U \leq X \sim \mathcal{G}(p)$ et on a

$$\mathbb{E}(U) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \mathbb{P}(U = k) \quad (3.253)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left((q^n)^{k-1} - (q^n)^k \right) \quad (3.254)$$

$$= \frac{1}{(1 - q^n)^2} - \frac{q^n}{(1 - q^n)^2} \quad (3.255)$$

$$= \boxed{\frac{1}{1 - q^n}} \quad (3.256)$$

où l'on a utilisé le fait que $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x| < 1$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathbb{P}(V \leq k) = (1 - q^k)^n$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(V = k) = (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nq^{k-1}(1 - q) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0} \quad (3.257)$$

Comme $k\mathbb{P}(V = k) = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$, V admet une espérance est

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(V = k) \quad (3.258)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k [(1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n] \quad (3.259)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} [(-1)^i q^{ki} - (-1)^i q^{(k-1)i}] \quad (3.260)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} k \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} q^{(k-1)i} (1 - q^i) \quad (3.261)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} (1 - q^i) \sum_{k=1}^{+\infty} k (q^i)^{k-1} \quad (3.262)$$

$$= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1 - q^i} \quad (3.263)$$

■

Solution 3.33.

1. $1 - p^N$ correspond à la probabilité que le joueur perde au moins une partie sur N consécutives donc c'est aussi la probabilité pour qu'il perde une partie entre la $nN + 1$ -ième et la $(n + 1)N$ -ième (inclus), car les parties sont indépendantes. On note $A_{nN+1, (n+1)N}$: 'le joueur perd une partie entre la $nN + 1$ -ième et la $(n + 1)N$ -ième (au sens large)'. $\{t_k > nN\}$ et $A_{nN+1, (n+1)N}$ sont des événements indépendants car les différentes parties sont indépendantes. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(t_k > nN) (1 - p^N) = \mathbb{P}((t_k > nN) \cap A_{nN+1, (n+1)N}) \geq \mathbb{P}(t_k > n(N + 1))} \quad (3.264)$$

car s'il avait gagné toutes les parties entre $nN + 1$ et $(n + 1)N$ on aurait $t_k \leq n(N + 1)$.

On sait que si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N}^* , X possède une espérance finie si et seulement si $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$ converge et on a (théorème de Fubini) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(X > k)$.

On a donc

$$\mathbb{P}(t_k > Nn) \leq (1 - p^n)\mathbb{P}(t_k > 0) = 1 - p^n \quad (3.265)$$

par récurrence sur n d'après 1. Pour $l \in \mathbb{N}$, soit $n = \lfloor \frac{l}{N} \rfloor$, on a $nN \leq l < (n+1)N$ donc

$$\mathbb{P}(t_k > l) \leq \mathbb{P}(t_k > nN) \leq (1 - p^N)^{\lfloor \frac{l}{N} \rfloor} \leq (1 - p^N)^{\frac{l}{N}} \quad (3.266)$$

et le membre de droite est le terme général d'une série converge car $(1 - p^N)^{\frac{1}{N}} < 1$. Donc t_k admet une espérance.

2. On note b_i : 'le joueur gagne au i -ième coup'. Alors

$$T_k = \sum_{l=0}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_k = l) \quad (3.267)$$

$$= \sum_{l=0}^{+\infty} l (\mathbb{P}_{b_i}(t_k = l)\mathbb{P}(b_i) + \mathbb{P}_{\bar{b}_i}(t_k = l)\mathbb{P}(\bar{b}_i)) \quad (3.268)$$

$$= p \sum_{l=1}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_{k+1} = l-1) + q \sum_{l=1}^{+\infty} l\mathbb{P}(t_{k-1} = l-1) \quad (3.269)$$

$$= p \left(\sum_{l=1}^{+\infty} (l-1)\mathbb{P}(t_{k+1} = l-1) + \sum_{l=1}^{+\infty} 1 \times \mathbb{P}(t_{k+1} = l-1) \right) \\ + q \left(\sum_{l=1}^{+\infty} (l-1)\mathbb{P}(t_{k-1} = l-1) + \sum_{l=1}^{+\infty} 1 \times \mathbb{P}(t_{k-1} = l-1) \right) \quad (3.270)$$

$$= p(T_{k+1} + 1) + q(T_{k-1} + 1) \quad (3.271)$$

3. On a $qT_{k+1} - T_k + pT_{k-1} = -1$. Comme $q\alpha(k+1) - \alpha k + p\alpha(k-1) = 1$ si et seulement si $\alpha = \frac{1}{1-2p}$, on pose $U_k = T_k - \frac{k}{1-2p}$ si $p = \frac{1}{2}$. Alors

$$qU_{k+1} - U_k + pU_{k-1} = -1 - q\frac{k+1}{1-2p} + \frac{k}{1-2p} - p\frac{k-1}{1-2p} = 0 \quad (3.272)$$

car $p + q = 1$.

L'équation caractéristique est $qr^2 - r + p = 0$, les racines sont 1 et $\frac{p}{q}$ (qui est différent de 1 car $p \neq \frac{1}{2}$). Donc

$$q \left(1 - \frac{p}{q} \right) (1 - 1) = 0 \quad (3.273)$$

On a $T_0 = T_N = 0$ donc

$$T_k = \frac{1}{q-p} \left(k - N \left(\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right) \right) \quad (3.274)$$

si $p \neq \frac{1}{2}$. Si $p = \frac{1}{2}$, on a

$$T_{k+1} - 2T_k + T_{k-1} = -2 \quad (3.275)$$

Ainsi, si $V_k = T_{k-1} - T_k$, on a

$$V_{k+1} = -2 + V_k \quad (3.276)$$

On en déduit grâce aux conditions aux limites $T_0 = T_N = 0$ que

$$\boxed{T_k = k(N - k)} \quad (3.277)$$

■

Solution 3.34.

1. On a

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\zeta(s)n^s} = 1} \quad (3.278)$$

2. On a

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k \in A_n} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(s)r^s n^s} = \frac{1}{n^s}} \quad (3.279)$$

3. Soient p_1, \dots, p_k des nombres premiers distincts. On a $A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_r} = A_{p_1 \times \dots \times p_k}$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_k}) = \frac{1}{(p_1 \dots p_k)^s} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{p_i^s} = \prod_{i=1}^k \mathbb{P}(A_{p_i})} \quad (3.280)$$

donc les $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ sont indépendants.

On remarque que l'on a $\{1\} = \cap_{p \in \mathcal{P}} \overline{A_p}$. On pose p_k le k -ième nombre premier et $B_k = \cap_{i=1}^k \overline{A_{p_i}}$ qui est une suite décroissante d'événements. Comme les $(A_{p_i})_i$ sont indépendants, c'est aussi le cas des $(\overline{A_{p_i}})_i$, et on a donc

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \prod_{i=1}^k (1 - \mathbb{P}(A_{p_i})) = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \quad (3.281)$$

Or $\mathbb{P}(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(s)}$ donc

$$\boxed{\zeta(s) = \left(\prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_i^s}\right) \right)^{-1}} \quad (3.282)$$

■

Solution 3.35. On a $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(E_2) = \frac{1}{2}(1-b)$ et pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{2}b^{n-1}(1-b)} \quad (3.283)$$

Les événements E_n sont incompatibles donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n) = 1} \quad (3.284)$$

Il est donc presque sûr qu'on finisse par utiliser A .

On a

$$\boxed{\mathbb{P}(U_n) = \frac{1}{2}a^n + \frac{1}{2}b^n} \quad (3.285)$$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une suite décroissante d'événements, donc

$$\boxed{\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(U_n) = 0} \quad (3.286)$$

■

Solution 3.36.

1. On a

$$\boxed{\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^n p(1-p)^{k-1} = 1 - (1-p)^n} \quad (3.287)$$

2. $B_n = \bigcap_{i=1}^N A_{i,n}$ et les $A_{i,n}$ sont indépendants donc

$$\boxed{\mathbb{P}(B_n) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(A_{i,n}) = (1 - (1-p)^n)^N} \quad (3.288)$$

3. On note $C_n = B_n \setminus B_{n-1}$ et $B_{n-1} \subset B_n$ donc

$$\boxed{\mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}(B_n) - \mathbb{P}(B_{n-1}) = (1 - (1-p)^n)^N - (1 - (1-p)^{n-1})^N} \quad (3.289)$$

■

Solution 3.37.

1. On a

$$\mathbb{K}_{<n}[X] = \{a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} \mid (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n\} \quad (3.290)$$

donc $|\mathbb{K}_{<n}[X]| = p^n$. De même, on a

$$\mathbb{K}_{=n}[X] = \{a_0 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n \mid (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n, a_n \neq \bar{0}\} \quad (3.291)$$

donc $|\mathbb{K}_{=n}[X]| = p^n(p-1)$ d'où $|\Omega| = p^{2n}(p-1)$.

On a $\mathbb{P}(\deg(Q) = -\infty) = \frac{1}{p^n}$ et si $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\boxed{\mathbb{P}(\deg(Q) = k) = \frac{p^k(p-1)}{p^n}} \quad (3.292)$$

2. On a $(Q, P) \in A$ si et seulement si $Q \mid P$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{K}_{\leq n}[X]$ tel que $P = AQ$ et $\deg(A) + \deg(Q) = n$. Ainsi, $\left(Q, \frac{P}{Q}\right) \in B$ et f est bien définie. On a directement

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad B &\rightarrow A \\ (Q, A) &\mapsto (Q, AQ) \end{aligned}$$

donc f est bijective et $|A| = |B|$.

On a

$$B = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{(Q, A) \in \mathbb{K}_{=k}[X] \times \mathbb{K}_{=n-k}[X]\} \quad (3.293)$$

donc

$$|B| = \sum_{k=0}^{n-1} p^k(p-1) \times p^{n-k}(p-1) = np^n(p-1)^2 = |A| \quad (3.294)$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(Q \mid P) = \frac{np^n(p-1)^2}{p^{2n}(p-1)} = \frac{n(p-1)}{p^n}} \quad (3.295)$$

3. On a $R_1 = R$ si et seulement si il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(Q)$ si et seulement si $Q \mid P - R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$. Comme $\deg(Q) < \deg(P)$, $\deg(R) < \deg(P)$ implique $\deg(P - R) = \deg(P)$.

Or

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}_{=n}[X] &\rightarrow \mathbb{K}_{=n}[X] \\ P &\mapsto P - R \end{aligned}$$

est bijective donc les lois de $P - R$ et de P sont les mêmes. En notant $r = \deg(R)$, on a donc

$$\mathbb{P}(R_1 = R) = \mathbb{P}((Q \mid P - R) \cap (\deg(Q) > \deg(R))) \quad (3.296)$$

$$= \sum_{q=r+1}^{n-1} \frac{p^{n-q}(p-1)}{(p-1)^2} \times \frac{p^d(p-1)}{p^{2n}} \quad (3.297)$$

$$= \boxed{\frac{1}{p^n} \times (n - r - 1)} \quad (3.298)$$

et

$$\mathbb{P}_{\deg(Q)=q}(R_1 = R) = \frac{\mathbb{P}((R_1 = R) \cap (\deg(Q) = q))}{\mathbb{P}(\deg(Q) = s)} \quad (3.299)$$

$$= \frac{\frac{1}{p^n}}{\frac{p^q(p-1)}{p^n}} \quad (3.300)$$

$$= \boxed{\frac{1}{p^q(p-1)}} \quad (3.301)$$

■

Solution 3.38.

1. (X_1, X_2) prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket^2 \setminus \{(i, i) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$, alors

$$\boxed{\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{1}{n(n-1)}} \quad (3.302)$$

La loi conjointe est uniforme.

2. X_2 prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\mathbb{P}(X_2 = j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} \quad (3.303)$$

donc $X_2 \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

$X_{1|X_2=j}$ prend ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}$ et

$$\mathbb{P}(X_{1|X_2=j} = i) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j)}{\mathbb{P}(X_2 = j)} = \frac{1}{n-1} \quad (3.304)$$

donc $X_{1|X_2=j} \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\})$.

3. D'après ce qui précède, les lois de X_1 et X_2 sont différentes et X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

4. On écrit

$$(X_1, \dots, X_k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^k \mid \forall i \neq j, x_i \neq x_j\} \quad (3.305)$$

ensemble que l'on note $A_{n,k}$. On a $|A_{n,k}| = n(n-1) \dots (n-k+1)$. Pour $(x_1, \dots, x_k) \in A_{n,k}$, on a donc

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \frac{1}{n(n-1)} \dots (n-k+1) \quad (3.306)$$

et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ et les X_i ne sont pas indépendants.

5. On a

$$\mathbb{E}(X_1, X_2) = \sum_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \\ i \neq j}} (i, j) \times \frac{1}{n(n-1)} \quad (3.307)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \neq i} i \right), \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i \neq j} j \right) \right) \quad (3.308)$$

$$= \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{n(n-1)(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)(n+1)}{2} \right) \quad (3.309)$$

$$= \left[\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2} \right] \quad (3.310)$$

■

4 Calcul matriciel

Solution 4.1. Soit $(k, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a

$$[M\overline{M}]_{k,m} = \sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1)} \overline{\omega}^{(j-1)(m-1)} \quad (4.1)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} [\omega^{k-1} \overline{\omega}^{m-1}]^j \quad (4.2)$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} [\omega^{k-m}]^j \quad (4.3)$$

Or $\omega^{k-m} = 1$ si et seulement si $n \mid k - m$ si et seulement si $k = m$ car $|k - m| \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Si $k = m$, on a $[M\overline{M}]_{k,m} = n$ et si $k \neq m$, on a

$$[M\overline{M}]_{k,m} = \frac{1 - (\omega^{k-m})^n}{1 - \omega^{k-m}} = 0 \quad (4.4)$$

Donc $M\overline{M} = nI_n$. Ainsi, $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et

$$\boxed{M^{-1} = \frac{1}{n} \overline{M}} \quad (4.5)$$

On a $\det(M\overline{M}) = \det(M) \det(\overline{M}) = n^n = \det(M) \overline{\det(M)} = |\det(M)|^2$ donc $|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$.

On calcul M^2 . On a

$$[M^2]_{k,m} = \sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1) + (j-1)(m-1)} = \sum_{j=0}^{n-1} [\omega^{k+m-2}]^j \quad (4.6)$$

On a $k + m - 2 \in \llbracket 0, 2n - 2 \rrbracket$ donc $n \mid k + m - 2$ si et seulement si $k + m = n + 2$ ou $k + m = 2$ si et seulement si $m = n + 2 - k$ ou $k = m = 1$. Donc

$$M^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & & & & n \\ \vdots & & & n & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & n & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

En développant par rapport à la première ligne (ou colonne), on a

$$\det(M^2) = n^n (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \quad (4.8)$$

donc

$$\det(M) = \begin{cases} \pm n^{\frac{n}{2}} & \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est pair i.e. } \begin{cases} n \equiv 0[4] \\ \text{ou} \\ n \equiv 3[4] \end{cases} \\ \pm i n^{\frac{n}{2}} & \text{si } \frac{n(n+1)}{2} \text{ est impair i.e. } \begin{cases} n \equiv 1[4] \\ \text{ou} \\ n \equiv 2[4] \end{cases} \end{cases} \quad (4.9)$$

■

Solution 4.2.

1. Si $A \geq 0$, soit $X \geq 0$, on a

$$[AX]_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \geq 0 \quad (4.10)$$

donc $AX \geq 0$.

Réciproquement, soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on prend

$$X_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

où le 1 est en j -ième position. $X_j \geq 0$ et

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \geq 0 \quad (4.12)$$

donc $A \geq 0$.

2. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ avec $A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \geq 0$, $A^{-1} = (A^{-1})_{1 \leq i,j \leq n} \geq 0$. Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$. On a

$$\sum_{k=1}^n A_{i,k} A_{k,j}^{-1} = 0 \quad (4.13)$$

donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a $A_{i,j} = 0$ ou $A_{k,j}^{-1} = 0$.

i étant fixé, comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $A_{i,k_0} > 0$. Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$, on a $A_{k_0,j}^{-1} = 0$ et $A_{k_0,i}^{-1} > 0$ (car A^{-1} est inversible). Supposons qu'il existe $k_1 \neq k_0$ tel que $A_{i,k_1} > 0$. Alors pour tout $j \neq i$, on a $A_{k,j}^{-1} = 0$ et $A_{k_1,i}^{-1} > 0$, mais alors les lignes k_0 et k_1 sont liées, ce qui est impossible. Donc il existe un unique $k_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,k_i} > 0$. Comme A est inversible, pour $i \neq i'$, on a $k_i \neq k_{i'}$, sinon on aurait deux lignes proportionnelles. Donc

$$\begin{aligned} \Delta : \llbracket 1, n \rrbracket &\rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ i &\mapsto k_i \end{aligned}$$

Ainsi il existe une unique permutation $\sigma \in \Sigma_n$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $A_{i,\sigma(i)} > 0$ et pour tout $j \neq \sigma(i)$, $A_{ij} = 0$. Donc

$$\boxed{A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) P_\sigma} \quad (4.14)$$

avec $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{i,j}$ et $a_i > 0$.

Réciproquement, si A est de cette forme, on a $A \geq 0$ et

$$A^{-1} = P_\sigma^{-1} \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) = P_{\sigma^{-1}} \text{diag}\left(\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}\right) \quad (4.15)$$

donc $A^{-1} \geq 0$.

■

Remarque 4.1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Si $AX \geq 0$, en définissant $x_0 = x_{n+1} = 0$, on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$-x_{k-1} + 2x_k - x_{k+1} \geq 0 \quad (4.17)$$

Si $x_{i_0} = \min(x_0, \dots, x_{n+1})$, on a

$$2x_{i_0} \geq x_{i_0-1} + x_{i_0+1} \geq 2x_{i_0} \quad (4.18)$$

donc $x_{i_0-1} = x_{i_0+1} = x_{i_0}$. De proche en proche, on a $x_{i_0} = x_0 = 0$. Donc $X \geq 0$.

Si $AX = 0$, on a $AX \geq 0$ et $A(-X) = 0$ donc $X \geq 0$ et $-X \geq 0$ donc $X = 0$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = AX \geq 0$, on a $A^{-1}Y = X \geq 0$ donc $A^{-1} \geq 0$.

Solution 4.3. Soit

$$\begin{aligned} u: \mathbb{R}_{n-1}[X] &\rightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P &\mapsto P(X+1) \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(X+1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} \quad (4.19)$$

On note $P_i = X^{i-1}$ et $\mathcal{B} = (P_1, \dots, P_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On note $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$. $u^{-1}: P \mapsto P(X-1)$ donc A est inversible et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(X-1)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i (-1)^{j-i-1} = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} (-1)^{j-i} \quad (4.20)$$

donc

$$A^{-1} = \left(\left(\binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) \quad (4.21)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u^k: P \mapsto P(X+k)$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$(X+k)^{j-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i k^{j-i-1} = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} X^{i-1} k^{j-i} \quad (4.22)$$

donc

$$A^k = \left(\left(\binom{j-1}{i-1} k^{j-i} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \right) \quad (4.23)$$

■

Solution 4.4.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H(n)$: 'si $\dim(E) = n$ et si $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\text{Tr}(u) = 0$, alors il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

,

Pour $n = 1$, on a $u = 0$ si $\text{Tr}(u) = 0$. Pour $n \geq 1$, on suppose $H(n)$, soit E de dimension $n+1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Tr}(u) = 0$. S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda \text{id}_E$, on a $\text{Tr}(u) = (n+1)\lambda = 0$ donc $\lambda = 0$ donc $u = 0$.

Sinon, il existe $e_1 \neq 0$ tel que $(e_1, u(e_1))$ est libre (résultat classique, redémontré en remarque ci-dessous). On pose $e_2 = u(e_1)$ et on complète (e_1, e_2) en une base de E : $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1}) = \mathcal{B}_1$. Alors $\text{mat}_{\mathcal{B}_1}(u)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & & & & \\ 0 & & A & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

avec $\text{Tr}(u) = \text{Tr}(A') = 0$. Posons $F = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$. On note Π la projection sur F parallèlement à $\text{Vect}(e_1)$. Alors si

$$\begin{aligned} u' : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto \Pi(u(x)) \end{aligned}$$

et $A' = \text{mat}_{(e_2, \dots, e_{n+1})}(u')$ donc $\text{Tr}(u') = 0$. D'après $H(n)$, il existe (f_2, \dots, f_{n+1}) une base de F telle que

$$\text{mat}_{(f_2, \dots, f_{n+1})}(u') = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Soit donc $\mathcal{B}_2 = (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ base de E . On a $u(e_1) \in F$ donc

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ \star & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ \star & \dots & \star & 0 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

2. Soit $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D = (i\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a

$$[DM]_{i,j} = \sum_{k=1}^n i\delta_{i,k}a_{k,j} = ia_{i,j} \quad (4.28)$$

et

$$[MD]_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}k\delta_{k,j} = ja_{i,j} \quad (4.29)$$

On a $M \in \ker(\varphi)$ si et seulement si pour tout $i \neq j$, $a_{i,j} = 0$ si et seulement si $M \in D_n(\mathbb{K})$ (ensemble des matrices diagonales). Donc $\dim(\ker(\varphi)) = n$ et $\dim(\text{Im}(\varphi)) = n^n - n$. Or pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $[MD - DM]_{i,i} = 0$. Notons Δ_n l'ensemble des matrices de diagonale nulle. On a $\text{Im}\varphi \subset \Delta_n$ et $\dim(\Delta_n) = n^2 - n$ (une base de Δ_n est $(E_{i,j})_{i \neq j}$, matrices élémentaires) donc $\text{Im}(\varphi) = \Delta_n$.

Soit alors $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\text{Tr}(A) = 0$. D'après 1. il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP \in \Delta_n = \text{Im}(\varphi)$ donc il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = MD - DM$ donc

$$A = P(MD - DM)P^{-1} \quad (4.30)$$

$$= PMDP^{-1} - PDM P^{-1} \quad (4.31)$$

$$= \boxed{XY - YX} \quad (4.32)$$

avec $X = PMP^{-1}$ et $Y = PDP^{-1}$.

■

Remarque 4.2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(x, u(x))$ est liée i.e. pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $u(x) = \lambda_x x$. Alors u est une homothétie.

En effet, soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$, si (x, y) est liée, il existe $\mu \in \mathbb{K}^*$ tel que $y = \mu x$. On a alors

$$u(y) = \lambda_y y = \mu u(x) = \mu \lambda_x x = \lambda_x y \quad (4.33)$$

On a $y \neq 0$ donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Si (x, y) est libre, on a

$$u(x + y) = \lambda_{x+y}(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y \quad (4.34)$$

Par liberté de (x, y) , on a $\lambda_{x+y} = \lambda_x = \lambda_y$.

Ainsi, λ_x ne dépend pas de x : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$, i.e. $u = \lambda \text{id}_E$.

Solution 4.5.

1. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^\top$, on a

$$XY^\top = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & \dots & x_n y_n \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

est de rang 1. On a

$$(XY^\top)^2 = X(Y^\top X)Y^\top = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) XY^\top \quad (4.36)$$

Si $\lambda = 0$, c'est évident.

Si $\lambda \neq 0$ et $B = I_n + \lambda XY^\top$, on a

$$XY^\top = \frac{B - I_n}{\lambda} \quad (4.37)$$

et

$$(XY^\top)^2 = \frac{(B - I_n)^2}{\lambda^2} \quad (4.38)$$

soit

$$(XY^\top)^2 = \frac{B^2 - 2B + I_n}{\lambda^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left(\frac{B - I_n}{\lambda} \right) \quad (4.39)$$

d'où

$$\lambda (Y^\top X) (B - I_n) = B^2 - 2B + I_n \quad (4.40)$$

d'où

$$B^2 + (-2 - \lambda (Y^\top X)) B + I_n (1 + \lambda (Y^\top X)) = 0 \quad (4.41)$$

Si $1 + \lambda Y^\top X \neq 0$, alors B est inversible et

$$\boxed{B^{-1} = -\frac{1}{1 + \lambda Y^\top X} (B - (2 + \lambda Y^\top X) I_n)} \quad (4.42)$$

Si $1 + \lambda Y^\top X = 0$, on a

$$B(B - I_n) = 0 \quad (4.43)$$

Si B est inversible, on aura $B = I_n$ et $\lambda XY^\top = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Or $\lambda \neq 0$ donc $X = Y = 0$ et $1 = 0$: absurde. Donc $B \notin GL_n(\mathbb{K})$.

2. On a

$$M = A + \lambda XY^Y = A(I_n + \lambda A^{-1}XY^\top) \quad (4.44)$$

donc $M \in GL_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $(I_n + \lambda A^{-1}XY^\top)$ est inversible si et seulement si $1 + \lambda Y^\top A^{-1}X$ est inversible d'après 1. Alors

$$\boxed{M^{-1} = \left(I_n - \frac{\lambda A^{-1}XY^\top}{1 + \lambda Y^\top A^{-1}X} \right) A^{-1}} \quad (4.45)$$

■

Solution 4.6. On a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$ donc il faut montrer que (S_0, \dots, S_n) est libre. Soit donc $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\alpha_0 S_0 + \dots + \alpha_n S_n = 0 \quad (4.46)$$

Si $\alpha \neq 0$, on pose $k_0 = \max(k \in \llbracket 0, n \rrbracket | \alpha_k \neq 0)$. On a

$$\alpha_0(1 - X)^n + \dots + \alpha_{k_0} X^{k_0}(1 - X)^{n-k_0} = 0 \quad (4.47)$$

soit

$$\alpha_0(1 - X)^{k_0} + \dots + \alpha_{k_0} X^{k_0} = 0 \quad (4.48)$$

En évaluant en 1, on a $\alpha_{k_0} = 0$ ce qui est absurde. Donc (S_0, \dots, S_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X] = n + 1$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$S_j = X^j(1 - X)^{n-j} \quad (4.49)$$

$$= X^j \left(\sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^k \right) \quad (4.50)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k X^{k+j} \quad (4.51)$$

$$= \sum_{k=j}^n \binom{n-j}{k-j} (-1)^{k-j} X^k \quad (4.52)$$

donc

$$A = P_{(1, \dots, X^n) \rightarrow (S_0, \dots, S_n)} = \left(\binom{n-j}{k-j} (-1)^{k-j} \right)_{0 \leq k, j \leq n} \quad (4.53)$$

On considère $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $u(X^j) = S_j$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a $u(X^j) = \left(\frac{X}{1-X}\right)^j (1-X)^n$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $u(P) = P\left(\frac{X}{1-X}\right) (1-X)^n$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on a $u(P) = Q$ si et seulement si $P\left(\frac{X}{1-X}\right) (1-X)^n = Q(X)$ si et seulement si $P(Y) \left(\frac{1}{1+Y}\right)^n = Q\left(\frac{Y}{1+Y}\right)$ soit $u(P) = Q$ si et seulement si $P(Y) = Q\left(\frac{Y}{1+Y}\right) (1+Y)^n$. Ainsi $u^{-1}(X^j) = X^j(1+X)^{n-j}$, donc

$$A^{-1} = \text{mat}_{(1, \dots, X^n)}(u^{-1}) = \left(\binom{n-j}{k-j} \right)_{0 \leq k, j \leq n} \quad (4.54)$$

■

Solution 4.7. Si on a $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$, on a $I_n \notin H$. On écrit donc

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = H \oplus \mathbb{K}I_n \quad (4.55)$$

Soit $i \neq j$, on prend $E_{i,j} = M + \lambda I_n$ (décomposition précédente) avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\lambda \neq 0$, on a

$$M = E_{i,j} - \lambda I_n \in GL_n(\mathbb{K}) \quad (4.56)$$

donc $M \in GL_n(\mathbb{K}) \cap H$: absurde. Donc $\lambda = 0$ et $E_{i,j} \in H$, d'où $\text{Vect}(E_{i,j})_{i \neq j} \subset H$. Or

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in (GL_n(\mathbb{K}) \cap \text{Vect}(E_{i,j})_{i \neq j}) \subset (GL_n(\mathbb{K}) \cap H) \quad (4.57)$$

donc $H \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$: absurde. ■

Remarque 4.3. Il existe une forme linéaire non nulle $\varphi: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $H = \ker(\varphi)$.

En effet, pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\varphi(M) = \text{Tr}(AM) \quad (4.58)$$

Pour le montrer : si A existe, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\varphi(E_{i,j}) = \text{Tr}(AE_{i,j}) = a_{j,i}$. Réciproquement, soit $A = (\varphi(E_{j,i}))_{1 \leq i, j \leq n}$. On a pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$ car ces deux formes linéaires coïncident sur les $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Il existe donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$,

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(AM) = 0\} \quad (4.59)$$

Si $r = \text{rg}(A)$, il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})^2$ telles que $A = Q^{-1}J_{n,n,r}P$ ($J_{n,n,r}$: matrice de taille $n \times n$ avec les r premiers coefficients diagonaux valant 1). Alors pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(J_{n,n,r} \underbrace{MPQ^{-1}}_{= M'}) \quad (4.60)$$

et il suffit de prendre

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.61)$$

Remarque 4.4. Si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $\dim(F) \geq n^2 - n + 1$ alors

$$G \cap GL_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset \quad (4.62)$$

Solution 4.8.

1. On prend $\lambda = 0$ et $N(0 \times 0) = 0 \times N(0) = 0$ donc

$$\boxed{N(0) = 0} \quad (4.63)$$

2. On a pour $j \neq i$, $E_{i,j} \times E_{j,j} = E_{i,j}$ et $E_{j,j}E_{i,j} = 0$ donc $N(E_{i,j}) = N(E_{i,j}E_{j,j}) = N(E_{j,j}E_{i,j})$ d'où

$$\boxed{N(E_{i,j}) = 0} \quad (4.64)$$

3. Déjà traité à l'exercice 4.

4. Si $\text{Tr}(A) = 0$, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$P^{-1}AP = \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} E_{i,j} \quad (4.65)$$

donc

$$\boxed{N(A) = N(P^{-1}AP) \leq \sum_{i \neq j} \alpha_{i,j} N(E_{i,j}) = 0} \quad (4.66)$$

5. Soit $A' = A - \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n$. On a $N(A') = 0$ d'après ce qui précède. Montrons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$,

$$|N(A) - N(B)| \leq N(A - B) \quad (4.67)$$

On écrit $A = A - B + B$ et $N(A) \leq N(A - B) + N(B)$ d'où $N(A) - N(B) \leq N(A - B)$ et on a le résultat par symétrie de A et B .

On a donc

$$\left| N(A) - N\left(\frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n\right) \right| \leq N\left(A - \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n\right) = 0 \quad (4.68)$$

d'où

$$\boxed{N(A) = N\left(\frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n\right) = |\text{Tr}(A)| \times \underbrace{N\left(\frac{I_n}{n}\right)}_{= a \geq 0}} \quad (4.69)$$

■

Solution 4.9. On écrit

$$f + g = f \circ (id + f^{-1} \circ g) \quad (4.70)$$

avec $f^{-1} \circ g$ de rang 1. Il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1} \circ g) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \star \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

avec $\alpha = \text{Tr}(f^{-1} \circ g)$ et donc $\text{mat}_{\mathcal{B}}(id + g^{-1} \circ g)$ est inversible si et seulement si $1 + \alpha \neq 0$ si et seulement si $\text{Tr}(f^{-1} \circ g) \neq 1$. ■

Solution 4.10. Par symétrie du problème, il suffit de déterminer les

$$a_{n,j} = |\{\text{chemins de longueur } n \text{ de } 1 \text{ vers } j \in \{2, 3, 4\}\}| \quad (4.72)$$

On pose

$$X_n = \begin{pmatrix} a(n, 1) \\ a(n, 2) \\ a(n, 3) \\ a(n, 4) \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

On a alors

$$X_{n+1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= A} X_n \quad (4.74)$$

car (en raisonnant modulo 4) il y a autant de chemins de longueur $n+1$ reliant 1 à j que de chemins de longueur n reliant 1 à $j-1$ + chemins de longueur n reliant 1 à $j+1$. d'où $X_n = A^n X_0$ avec

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

On a $B^2 = I_2$ et on montre par récurrence

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{2p} = 2^{2p-1} \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix} \quad p \geq 1 \\ A^{2p+1} = 2^{2p} \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix} \quad p \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.78)$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} a(2p, 1) = 2^{2p-1} = a(2p, 3) \\ a(2p, 2) = 0 = a(2p, 4) \\ a(2p+1, 1) = 0 = a(2p+1, 3) \\ a(2p+1, 4) = 2^{2p} = a(2p+1, 4) \end{array}} \quad (4.79)$$

Ici, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

En deux itérations, il y a chaque fois deux possibilités pour relier deux sommets différents de

même partié, et 3 pour revenir au même sommet. On a donc

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_8 + 2 \begin{pmatrix} B & B & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \\ B & B & B & B \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

On applique le binôme de Newton pour calculer les puissances paires de A , puis on déduit les puissances impaires en multipliant par A . ■

Solution 4.11. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Supposons $AX = 0$. Alors pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j = 0 \Rightarrow -a_{i,i} x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} x_j \quad (4.82)$$

donc

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} x_j \right| = |a_{i,i} x_i| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j} x_j| \quad (4.83)$$

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$x_{i_0} = \max \{ |x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket \} \quad (4.84)$$

On a alors

$$|a_{j,i_0}| |x_{i_0}| \leq |x_{i_0}| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^n |a_{i_0,j}| \quad (4.85)$$

D'après l'hypothèse, on a $|x_{i_0}| = 0$ donc $X = 0$ et A est inversible.

Il faut l'inégalité stricte, un contre-exemple est donnée par une ligne nulle. ■

Remarque 4.5. Si pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_{j,j}| > \sum_{i \neq j} |a_{i,j}|$ alors $A^\top \in GL_n(\mathbb{C})$ et donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Solution 4.12. On écrit, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$i \wedge j = \sum_{k|i \wedge j} \varphi(k) \quad (4.86)$$

$$= \sum_{\substack{k|i \\ k|j}} \varphi(k) \quad (4.87)$$

$$= \sum_{k=1}^n b_{k,i} b_{k,j} \varphi(k) \quad (4.88)$$

avec $b_{k,i} = 1$ si $k \mid i$ et 0 sinon. On a alors, si $A = (i \wedge j)_{1 \leq i, j \leq n}$, $A = B^T C$ avec $B = (b_{k,i})_{1 \leq i, k \leq n}$ (triangulaire supérieure) et $C = (\varphi(k) b_{k,j})_{1 \leq k, j \leq n}$ (triangulaire supérieure). Donc

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^n \varphi(i)} \quad (4.89)$$

■

Solution 4.13. Pour l'unicité, si $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ telles que proposées. Comme A est inversible, on a $\det(A) = \det(L_i) \det(U_i) \neq 0$ pour $i \in \{1, 2\}$ et donc L_i et U_i sont inversibles. Ainsi,

$$L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{C}) \cap \mathcal{T}_n^+(\mathbb{C}) \quad (4.90)$$

avec des 1 sur la diagonale, c'est donc I_n , d'où l'unicité.

Pour l'existence, on travaille par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: pour $n = 1$ on a $A = (1) \times (a_{1,1})$. Soit $A_{n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ vérifiant l'hypothèse, alors A_n vérifie l'hypothèse $A_n = L_n U_n$ avec

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & Y \\ X^T & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \quad (4.91)$$

On veut

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} & 0 \\ L' & \vdots \\ & 0 \\ X_1^T & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & & & \\ & U' & & Y_1 \\ & 0 & \dots & 0 & u_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \quad (4.92)$$

On a $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$, par produits par blocs, on a $A_n = L' U' = L_n U_n$ et par unicité, $L' = L_n$ et $U' = U_n$. On a $X^T = X_1^T U'$ et donc $X_1^T = X^T U_n^{-1}$ et $Y = L_n Y_1$ donc $Y_1 = L_n^{-1} Y$.

Enfin, $a_{n+1,n+1} = X_1^\top Y_1 + u_{n+1,n+1}$ et donc

$$u_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1} - X_1^\top Y_1 = a_{n+1,n+1} - X^\top U_n^{-1} L_n^{-1} Y \quad (4.93)$$

Réciproquement, en définissant ainsi U et L , on a bien $A = Lu$ en remontant les calculs. \blacksquare

Solution 4.14. On a $\sum_{k \in A_i} a_k - \sum_{k \in B_i} a_k = 0$ (combinaison linéaire des a_k avec des coefficients ± 1), donc

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 \\ \pm 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \pm 1 \\ \pm 1 & \dots & \dots & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{2n+1} \end{pmatrix}}_{= X} = 0 \quad (4.94)$$

Sur chaque ligne, il y a n fois 1 et n fois -1 (car les A_i et B_i sont disjoints). On veut montrer que $X = \alpha \mathbf{1}$. On a $X \in \ker(A)$ et $\mathbf{1} \in \ker(A)$ (car il y a n 1 et n -1 par ligne). On veut donc montrer que $\dim(\ker(A)) = 1$, soit $\text{rg}(A) = 2n$.

On doit donc montrer qu'il existe une sous-matrice de taille $2n$ inversible car $\dim(\ker(A)) \geq 1$. Comme on est bloqué par les ± 1 , on se place dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Soit donc

$$\overline{B_n} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \dots & \dots & \overline{11} \\ \overline{1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \overline{11} \\ \overline{11} & \dots & \dots & \overline{11} & \overline{0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \quad (4.95)$$

Si $\det(\overline{B_n}) \neq 0$, on a $\det(B_n) \neq 2k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ où B_n est obtenue en enlevant à A sa dernière ligne et sa dernière colonne, et donc $\det(A) \neq 0$.

On cherche un polynôme annulateur de $\overline{B_n}$. On a

$$(\overline{B_n} + \overline{I_{2n}})^2 = \overline{B_n}^2 + 2\overline{B_n} + \overline{I_{2n}} = \begin{pmatrix} \overline{1} & \dots & \overline{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{1} & \dots & \overline{1} \end{pmatrix}^2 = 2n \begin{pmatrix} \overline{1} & \dots & \overline{1} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{1} & \dots & \overline{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{0} \end{pmatrix} \quad (4.96)$$

Ainsi,

$$\overline{B_n} (\overline{B_n} + 2\overline{I_{2n}}) = -\overline{I_{2n}} = \overline{I_{2n}} \quad (4.97)$$

donc $\overline{B_n} \in GL_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ et donc $B_n \in GL_{2n}(\mathbb{R})$, ce qui démontre bien que $\text{rg}(A) = 2n$ et $\ker(A) = \text{Vect}(\mathbf{1})$, d'où

$$\boxed{a_1 = \dots = a_{2n+1}} \quad (4.98)$$

■

Solution 4.15. On note $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ pour $i < j$. On rappelle que la multiplication à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$ remplace la i -ième ligne de la matrice L_i par $L_i + \lambda L_j$: on ajoute à une ligne λ fois une ligne d'indice supérieur. La multiplication à droite par $T_{i,j}(\lambda)$ remplace la j -ième colonne de la matrice C_j par $C_j + \lambda C_i$: on ajoute à une colonne λ fois une colonne d'indice inférieur. Ces matrices sont des matrices de transvection.

On note aussi $D_i(\lambda)$ la matrice de dilatation qui contient des 1 sur la diagonale sauf en i position où il y a un λ . On rappelle que la multiplication à gauche par $D_i(\lambda)$ revient à multiplier L_i par λ et la multiplication à droite revient à multiplier C_i par λ .

Sur la première colonne de M , il y a au moins un coefficient non nul car $M \in GL_n(\mathbb{C})$. Soit

$i_1 = \max\{i \in \llbracket, n \rrbracket, m_{i,1} \neq 0\}$. On effectue alors

$$D_{i_1} \left(\frac{1}{m_{i_1,1}} \right) M = \begin{pmatrix} \star & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \star & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

Par produite de transvections (qui sont des matrices triangulaires supérieures, i.e. dans \mathcal{T}_n^+) à gauche, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

Par produite de transvections $\in \mathcal{T}_n^+$ à droite, on obtient

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \end{pmatrix} \quad (4.101)$$

Soit $M' \in GL_n(\mathbb{C})$ la matrice extraite de M en ôtant la première colonne et la i_1 -ième ligne. On

procède par récurrence avec M' . Donc il existe $\sigma \in \Sigma_n, (T, T') \in (\mathcal{T}_n^+)^2$ telle que

$$\boxed{M = TP_\sigma T'} \quad (4.102)$$

Montrons que toute matrice de \mathcal{T}_n^+ inversible est produit de matrices de transvections dans \mathcal{T}_n^+ et de dilatations.

Soit $T \in \mathcal{T}_n^+ \cap GL_n(\mathbb{C})$ avec

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

On a $t_{1,1} \neq 0$ car sinon la colonne 1 est nulle. On a donc

$$TD_1\left(\frac{1}{t_{1,1}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \star & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \star \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

Puis, par produit de transvections à droite, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \star \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

On procède ensuite par récurrence sur n , et on a

$$T \times B_1 \times \dots \times B_l = I_n \quad (4.106)$$

donc

$$T = B_l^{-1} \times \cdots \times B_1^{-1} \quad (4.107)$$

où $B_i \mathcal{T}_n^+$ transvection ou dilatation.

Soit donc (T, T', P_σ) vérifiant les hypothèses telles que $M = TP_\sigma T'$, alors on a

$$T^{-1}MT'^{-1} = P_\sigma = \underbrace{B_l^{-1} \times \cdots \times B_1^{-1}}_{\text{transvections ou dilatations}} \times M \times \underbrace{B_l'^{-1} \times \cdots \times B_1'^{-1}}_{\text{transvections ou dilatations}} \quad (4.108)$$

Nécessairement, on a $\sigma(1) = i$ défini plus haut. Donc de proche en proche, σ est univoquement déterminée.

Cependant, on peut écrire

$$I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times I_2 \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \times I_2 \times \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

donc il n'y a pas unicité de T et T' . ■

Solution 4.16.

1. Soit $A \in J \cap GL_n(\mathbb{K})$, on a pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$M = \underbrace{M \times A \times A^{-1}}_{\substack{\in J \\ \in J}} \in J \quad (4.110)$$

2. Soit $A_0 \in J \setminus \{0\}$ de rang $r \neq 0$. Il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $Q^{-1}A_0P = J_r \in J$, on a alors

$$\boxed{J_r \times J_1 = J_1 \in J} \quad (4.111)$$

3. Deux matrices de rang 1 sont équivalentes donc toutes les matrices de rang 1 son dans J . Or si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'écrit

$$\boxed{A = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \underbrace{a_{i,j} E_{i,j}}_{\text{de rang 1 ou 0}} \in J} \quad (4.112)$$

■

Solution 4.17. On a

$$(\lambda A + I_n)(\lambda B + I_n) = \lambda^2 AB + \lambda A + \lambda B + I_n = I_n \quad (4.113)$$

donc $\lambda B + I_n$ est inversible. De plus, $A(\lambda B + I_n) = -B$ donc

$$A = -(\lambda B + I_n)^{-1} B \quad (4.114)$$

Or $(\lambda B + I_n)^{-1}$ et B commutent. En effet, comme $\lambda \neq 0$, on a

$$B(\lambda B + I_n)^{-1} = \left(\left[B + \frac{1}{\lambda I_n} \right] - \frac{1}{\lambda} I_n \right) (\lambda B + I_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n - \frac{1}{\lambda} (\lambda B + I_n)^{-1} \quad (4.115)$$

et on montre de même que

$$(\lambda B + I_n)^{-1} B = \frac{1}{\lambda} I_n - \frac{1}{\lambda} (\lambda B + I_n)^{-1} \quad (4.116)$$

Ainsi,

$$\boxed{BA = -B(\lambda B + I_n)^{-1} B = -(\lambda B + I_n)^{-1} BB = AB} \quad (4.117)$$

■

Solution 4.18. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix}^\top$

On a $AX = Y$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n & = & y_1 & [1] \\ a_2 x_1 + x_2 & & = & y_2 & [2] \\ \vdots & & & & \\ a_n x_1 + x_n & & = & y_n & [n] \end{cases} \quad (4.118)$$

si et seulement si $(L_1 \leftarrow L_1 + \sum_{i=2}^n a_i L_i)$

$$\begin{cases} (1 + \sum_{i=2}^n a_i^2) x_1 & = & y_1 + \sum_{i=2}^n a_i y_i & [1] \\ a_2 x_1 + x_2 & & = & y_2 & [2] \\ \vdots & & & & \\ a_n x_1 + x_n & & = & y_n & [n] \end{cases} \quad (4.119)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n}{1 + \sum_{i=2}^n a_i^2} \\ x_j &= y_j - a_j x_1 \end{cases} \quad \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket \quad (4.120)$$

En posant

$$\lambda = \frac{1}{1 + \sum_{i=2}^n a_i^2} \quad (4.121)$$

cela équivaut à (en posant $a_1 = 1$)

$$\begin{cases} x_1 &= \lambda(y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n) \\ x_j &= \lambda \left[\sum_{i \neq j} a_i y_i - \left(1 + \sum_{i \neq j} a_i^2 \right) y_j \right] \end{cases} \quad \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket \quad (4.122)$$

Donc $A \in GL_n(\mathbb{R})$. ■

Remarque 4.6. On pourrait se poser la question si $A \in GL_n(\mathbb{C})$? Si $1 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0$, on sait que $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Cependant, on vérifie que si $X = \begin{pmatrix} 1 & -a_2 & \cdots & -a_n \end{pmatrix}^\top \neq 0$, on a $AX = 0$ et donc $A \notin GL_n(\mathbb{C})$.

Solution 4.19.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \ker(A) \cap H$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ et $AX = 0$. Notons que l'on a

$$A + A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = N \quad (4.123)$$

On a

$$NX = -X \quad (4.124)$$

et $N^\top = N$.

On a alors

$$X^\top AX + X^\top A^\top X = X^\top NX = -X^\top X = -\sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (4.125)$$

Comme $AX = 0$, on a aussi $X^\top AX = 0$ et $X^\top A^\top X = (AX)^\top X = 0$ donc on a $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0$ d'où $x_i = 0$ et $X = 0$. Donc

$$\boxed{\ker(u) \cap H} = \{0\} \quad (4.126)$$

Donc $\dim(\ker(u)) \in \{0, 1\}$ et le théorème du rang assure alors que $\text{rg}(A) \in \{n-1, n\}$.

2. Comme $A + A^\top = N$, on a $A = \frac{1}{2}N + S$ avec $S \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Or, pour $S = 0$, on a

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & 1 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} - I_n \quad (4.127)$$

et $(N + I_n)^2 = n(M + I_n)$ donc $N \in GL_n(\mathbb{R})$. De même, pour

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.128)$$

on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.129)$$

et $\text{rg}(A) = n-1$.

Donc on peut avoir les deux possibilités.

■

Solution 4.20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ de rang 1 telle que $\text{Tr}(u) = \lambda$. On a $\dim(\ker(u)) = n-1$

En prenant une base de $\ker(u)$ (e_1, \dots, e_{n-1}) que l'on complète en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une

base de \mathbb{C}^n , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.130)$$

Si $\lambda \neq 0$, posons $f_n = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_{n-1} e_{n-1} + e_n$, on a

$$u(f_n) = \lambda f_n \quad (4.131)$$

si et seulement si

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + \lambda e_n = \lambda f_n \quad (4.132)$$

On pose $\beta_1 = \frac{\alpha}{\lambda}, \dots, \beta_{n-1} = \frac{\alpha_{n-1}}{\lambda}$ et si $\mathcal{B}' = (e_1, \dots, e_{n-1}, f_n)$, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (4.133)$$

Si $\lambda = 0$, il existe $i_0 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$ (sinon $\text{rg}(u) = 0$). On pose $f_n = e_n$ et $\{f_1 = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_{n-1} e_{n-1} \in \ker(u) \setminus \{0\}\}$ et on complète (f_1, \dots, f_{n-1}) en une base de $\ker(u)$. On pose $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ base de \mathbb{C}^n et on a alors

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.134)$$

Ainsi, dans les deux cas, deux matrices sont de rang 1 et de même trace si et seulement si elles sont semblables. ■

Solution 4.21.

1. Soit $M \in F$, telle que $\text{rg}(M) = r$. M est équivalente à J_r , donc il existe $(P_0, Q_0) \in GL_n(\mathbb{R})^2$ telle que $P_0^{-1} J_r Q_0 = M \in F$.

2. Soit

$$\begin{aligned}\varphi: F &\rightarrow F_0 \\ M &\mapsto P_0 M Q_0^{-1}\end{aligned}$$

est linéaire surjective par définition de F_0 de réciproque $\varphi^{-1}: M_0 \rightarrow P_0^{-1} M_0 Q_0$ donc F et F_0 sont isomorphes.

Pour tout $M \in F$, $\text{rg}(M) = \text{rg}(\varphi(M))$: φ étant bijective, on a $r = \max \{\text{rg}(M_0) | M_0 \in F_0\}$

3. Il suffit de choisir les coefficients de B et C donc

$$\boxed{\dim(G_0) = n(n-r)} \quad (4.135)$$

4. On écrit

$$\begin{pmatrix} \lambda I_r & B^\top \\ B & C \end{pmatrix} = \lambda J_r + M_0 \in F_0 \quad (4.136)$$

Si on avait

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & & & \vdots \\ & \lambda I_r & & b_{j,r} \\ \hline b_{i,1} & \dots & b_{i,r} & c_{i,j} \end{array} \right) \neq 0 \quad (4.137)$$

(déterminant d'une sous-matrice de taille $r+1$ de la matrice précédente), on aurait

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \lambda I_r & B^\top \\ B & C \end{pmatrix} \geq r+1 > r \quad (4.138)$$

ce qui est exclu d'après 2.

5. En effectuant $L_{r+1} \leftarrow L_{r+1} - \frac{b_{i,1}}{\lambda} L_1 - \dots - \frac{b_{i,r}}{\lambda} L_r$, en notant $f(\lambda) = c_{i,j} - \sum_{k=1}^r \frac{b_{i,k}}{\lambda} b_{j,k}$, on obtient

$$\det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_{j,1} \\ & & & \vdots \\ & \lambda I_r & & b_{j,r} \\ \hline 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{array} \right) = 0 \quad (4.139)$$

D'où $f(\lambda) = 0$ et comme $\lambda \neq 0$, on a

$$\lambda f(\lambda) = 0 = \lambda c_{i,j} - \sum_{k=1}^r b_{i,k} b_{j,k} \quad (4.140)$$

qui est nulle sur \mathbb{R}^* donc $c_{i,j} = 0$ et $\sum_{k=1}^r b_{i,k} b_{j,k} = 0$. Ceci implique $C = 0$ et pour $i = j$, on a $\sum_{k=1}^r b_{j,k}^2 = 0$ donc $B = 0$.

6. On a donc $G_0 \cap F_0 = \{0\}$ ($\dim(G_0) = n(n-r)$). G_0 et F_0 sont en somme directe, donc

$$\dim(G_0 \oplus F_0) = \dim(G_0) + \dim(F_0) \leq n^2 \quad (4.141)$$

donc

$$\boxed{\dim(F) = \dim(F_0) \leq n^2 - n(n-r) = nr} \quad (4.142)$$

7. Si $F \cap GL_n(\mathbb{R}) = \emptyset$, on a $r \leq n-1$ et $\dim(F) \leq n(n-1)$. Par contraposée, si $\dim(F) \geq n^2 - n + 1$, on a $F \cap GL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

8. Soit

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B^\top \\ B & C \end{pmatrix} \middle| B \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{C}), C \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \right\} \quad (4.143)$$

sous- \mathbb{R} -espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Par les mêmes arguments que précédemment, on a $G_1 \cap F_0 = \{0\}$ et $\dim_{\mathbb{R}}(G_1) = 2n(n-r)$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) = 2n^2$ donc

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}} F_0 = 2 \dim_{\mathbb{C}} F_0 \leq 2nr} \quad (4.144)$$

Le résultat est donc encore valable.

■

Solution 4.22. On a $f(I_n) = f(I_n)^2$ donc $f(I_n) \in \{0, 1\}$. Si $f(I_n) = 0$, alors $f = 0$ ce qui est exclu.

Si M est inversible, on a

$$f(M \times M^{-1}) = f(M) \times f(M^{-1}) = 1 \quad (4.145)$$

donc $f(M) \neq 0$.

Si M n'est pas inversible, posons $r = \text{rg}(M) \leq n - 1$. M est équivalente la matrice nilpotente

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.146)$$

Donc il existe $(P, Q) \in (GL_n(\mathbb{C}))^2$ telles que $M = P^{-1}M'Q$. On a

$$f(M'^n) = (f(M'))^n = f(0) \quad (4.147)$$

Comme $f(0) = f(0)^2$, on a aussi $f(0) \in \{0, 1\}$. Si $f(0) = 1$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $f(A \times 0) = f(A) \times f(0) = 1$ ce qui est impossible car f n'est pas constante. Donc $f(0) = 0$. Ainsi, $f(M') = 0$ et donc $f(M) = 0$. ■

Remarque 4.7. f induit donc un morphisme de $(GL_n(\mathbb{C}), \times) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$.

Remarque 4.8. On peut montrer que pour $n \geq 2$, pour tout $i \neq j \in \{1, n\}^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, il existe $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$,

$$T_{i,j}(\lambda) = ABA^{-1}B^{-1} \quad (4.148)$$

en écrivant

$$\begin{aligned} T_{i,k}(\alpha)T_{k,j}(\beta)T_{i,k}(-\alpha)T_{k,j}(-\beta) &= (I_n + \alpha E_{i,k} + \beta E_{k,j} + \alpha\beta E_{i,j}) \\ &\quad \times (I_n - \alpha E_{i,k} - \beta E_{k,j} + \alpha\beta E_{i,j}) \end{aligned} \quad (4.149)$$

$$= I_n + \alpha\beta E_{i,j} \quad (4.150)$$

Il vient

$$f(T_{i,j}(\lambda)) = f(A)f(B)f(A)^{-1}f(B)^{-1} = 1 \quad (4.151)$$

Si $M \in GL_n(\mathbb{C})$ s'écrit comme produit de transvections $T_{i,j}(\lambda)$ et de dilatations $D_n(\det(M))$.

Il vient $f(M) = f(D_n(\det(M)))$. Or

$$\begin{aligned}\varphi : (\mathbb{C}^*, \times) &\rightarrow (\mathbb{C}^*, \times) \\ \alpha &\mapsto f(D_n(\alpha))\end{aligned}$$

est un morphisme de groupe (car $D_n(\alpha\beta) = D_n(\alpha)D_n(\beta)$).

Finalement, $f(M) = \varphi(\det(M))$.

Si de plus f est continue, φ aussi et on peut montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}^$, $\varphi(z) = z^k$.*

5 Réduction des endomorphismes

Solution 5.1.

1. On a

$$\begin{aligned} f^k : E &\rightarrow E \\ M &\mapsto A^k M \end{aligned}$$

donc pour tout polynôme P , on a $P(f) = P(A)M$ par combinaison linéaire. Si $P(A) = 0$, alors $P(f) = 0$. Donc si A est diagonalisable, f l'est aussi. Si $P(f) = 0$ alors avec $M = I_n$, on a $P(A) = 0$ et A est diagonalisable si f l'est.

Même résultat avec g et B .

2. Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que $\sum_{(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} \lambda_{i,j} X_i Y_j^\top = 0$. Alors on a

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_i \right) Y_j^\top = 0 \quad (5.1)$$

Soit $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$, la k -ième ligne de notre matrice est

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_{i,k} \right) Y_j^\top = 0 \quad (5.2)$$

Puisque $(Y_j^\top)_{1 \leq j \leq n}$ est libre, on a pour tout $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} X_{i,k} = 0 \quad (5.3)$$

Puisque $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre, pour tout $(i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2$, $\lambda_{i,j} = 0$, d'où le résultat.

3. Puisque B est diagonalisable, B^\top l'est aussi. On prend $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de vecteurs propres de A avec pour tout $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $AX_i = \lambda_i X_i$. Prenons $(Y_j)_{1 \leq j \leq n}$ une base de vecteurs propres de B^\top avec pour tout $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$, $B^\top Y_j = \mu_j Y_j$ et $Y_j B^\top = \mu_j Y_j^\top$. Ainsi,

$$h(X_i Y_j^\top) = AX_i Y_j^\top B = \mu_j AX_i Y_j^\top = \mu_j \lambda_i X_i Y_j^\top \quad (5.4)$$

et les $(X_i Y_j^\top)_{1 \leq i,j \leq n}$ forment une base de E d'après ce qui précède. Donc h est diagonalisable.

Réciproquement, on a le contre-exemple $A = 0$ et B non diagonalisable : h est l'endomorphisme nul.



Remarque 5.1. Généralement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit

$$\begin{aligned} h_{A,B} : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ M &\mapsto AMB \end{aligned}$$

La matrice de $h_{A,B}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'appelle le produit tensoriel de A et B noté

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

On a toujours

$$\text{Tr}(A \otimes B) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} \text{Tr}(B) = \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) \quad (5.6)$$

Si A et B sont diagonalisables, $h_{A,B}$ l'est.

Solution 5.2. On pose $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$ avec $P_1 \wedge Q_1 = 1$. Il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ telles que $UP_1 + VQ_1 = 1$. On a $MD = PQ$ donc $M = DP_1Q_1 = PQ_1 = P_1Q$.

1. Soit $x \in \ker(D(f))$. On a

$$P(f)(x) = DP_1(f)(x) = P_1(f) \circ D(f)(x) = 0 \quad (5.7)$$

De même pour $Q(f)(x) = 0$, donc

$$\ker(D(f)) \subset \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f)) \quad (5.8)$$

Soit $x \in \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f))$. On a

$$DUP_1 + DVQ_1 = 0 \quad (5.9)$$

d'où

$$UP + VQ = 0 \quad (5.10)$$

et

$$D(f)(x) = UP(f)(x) + VQ(f)(x) = 0 \quad (5.11)$$

Donc

$$\boxed{\ker(D(f)) = \ker(P(f)) \cap \ker(Q(f))} \quad (5.12)$$

2. On a $P \mid M$ donc $\ker(P(f)) \subset \ker(M(f))$. De même, $\ker(Q(f)) \subset \ker(M(f))$ donc

$$\ker(P(f)) + \ker(Q(f)) \subset \ker(M(f)) \quad (5.13)$$

Si $x \in \ker(M(f))$, on a

$$x = \underbrace{UP_1(f)(x)}_{\in \ker(Q(f))} + \underbrace{VQ_1(f)(x)}_{\in \ker(P(f))} \quad (5.14)$$

car $M = P_1Q = Q_1P$. Donc

$$\boxed{\ker(M(f)) = \ker(P(f)) + \ker(Q(f))} \quad (5.15)$$

3. Si $i \in \text{Im}(P(f))$, il existe $x \in E$ tel que $y = P(f)(x) = D(f) \circ P_1(f)(x) \in \text{Im}(D(f))$. De même pour $\text{Im}(Q(f)) \subset \text{Im}(D(f))$. Donc

$$\text{Im}(P(f)) + \text{Im}(Q(f)) \subset \text{Im}(D(f)) \quad (5.16)$$

Soit $y \in \text{Im}(D(f))$, alors il existe $x \in E$ tel que

$$y = D(f)(x) = \underbrace{UP(f)(x)}_{\in \text{Im}(P(f))} + \underbrace{VQ(f)(x)}_{\in \text{Im}(Q(f))} \quad (5.17)$$

Donc

$$\boxed{\text{Im}(D(f)) = \text{Im}(P(f)) + \text{Im}(Q(f))} \quad (5.18)$$

4. On a $P \mid M$ d'où $\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}P(f)$ et $\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}Q(f)$. Ainsi,

$$\text{Im}(M(f)) \subset \text{Im}(Q(f)) \cap \text{Im}P(f) \quad (5.19)$$

Si $y \in \text{Im}(P(f)) \cap \text{Im}(Q(f))$ alors il existe $(x, x') \in E^2$ tels que

$$y = P(f)(x) = P(f)(x') \quad (5.20)$$

Or $M = P_1Q = PQ_1$ donc

$$y = UP_1(f)(y) + VQ_1(f)(y) = UP_1Q(f)(x') + VQ_1P(f)(x) \in \text{Im}(M(f)) \quad (5.21)$$

donc

$$\boxed{\text{Im}(M(f)) = \text{Im}(P(f)) \cap \text{Im}(Q(f))} \quad (5.22)$$

■

Solution 5.3. On a

$$A \left(\frac{-1}{5} A + \frac{4}{5} I_n \right) = I_n \quad (5.23)$$

donc A est inversible.

$$X^2 - 4X + 5 = (X - 2 + i)(X - 2 - i) \quad (5.24)$$

est scindé à racines simples sur \mathbb{C} . Donc A est diagonalisable sur \mathbb{C} , semblable sur \mathbb{C} à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

où $\lambda_1 = 2 + i$ et $\lambda_2 = 2 - i$. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\text{Tr}(A) = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Donc

$$\Im(n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2) = 0 = n_1 - n_2 \quad (5.26)$$

Ainsi $n_1 = n_2$ donc n est pair.

A est semblable sur \mathbb{C} à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Soit

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

On a $\chi_{A_0} = X^2 - 4X + 5$. A_0 est diagonalisable sur \mathbb{C} et est semblable à

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_1} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

Donc A est semblable sur \mathbb{C} à

$$\begin{pmatrix} A_0 & & \\ & \ddots & \\ & & A_0 \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

donc A est semblable sur \mathbb{R} à cette même matrice.

Soit $l \in \mathbb{N}$, on a

$$X^l = Q_p(X^2 - 4X + 5) + \alpha_l X + \beta_l \quad (5.31)$$

par division euclidienne. Donc

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \quad (5.32)$$

On a notamment

$$\begin{cases} (2 + i)^l = \alpha_l(2 + i) + \beta_l \\ (2 - i)^l = \alpha_l(2 - i) + \beta_l \end{cases} \quad (5.33)$$

On a donc

$$\boxed{\begin{cases} \alpha_l = \frac{(2+i)^l - (2-i)^l}{2i} \\ \beta_l = (2+i)^l - \frac{(2+i)}{2i} [(2+i)^l - (2-i)^l] \end{cases}} \quad (5.34)$$

■

Remarque 5.2. On a $2 + i = \sqrt{5}e^{i\theta}$ avec $\theta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \in]0, \pi[$. Donc $\alpha_l = (\sqrt{5})^l \sin(l\theta)$.

Remarque 5.3. On a

$$I_n - 4A^{-1} + 5A^{-2} = 0 \quad (5.35)$$

De même, $(X - \frac{1}{2-i})(X - \frac{1}{2+i})$ annule A^{-1} et on a pour tout $l \in -\mathbb{N}^*$,

$$A^l = \alpha_l A + \beta_l I_n \quad (5.36)$$

Remarque 5.4. $(A - 2I_n)^2 = -I_n$ donc $\det(-I_n) = (-1)^n > 0$ donc n est pair.

Solution 5.4.

1. On a

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

et $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^\top \neq 0$ donc

$$\boxed{1 \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)} \quad (5.38)$$

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\top \neq 0$ associé à λ . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \quad (5.39)$$

Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i| > 0$ car $X \neq 0$. On a alors

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \right) |x_{i_0}| \quad (5.40)$$

donc

$$\boxed{|\lambda| \leq 1} \quad (5.41)$$

3. Soit $J_i = \{j \in \llbracket 1, n \rrbracket | a_{i,j} > 0\}$. On a

$$|\lambda| |x_{i_0}| = \left| \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} |x_j| \leq \left(\sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} \right) |x_{i_0}| = |x_{i_0}| \quad (5.42)$$

On a égalité partout donc pour tout $j \in J_{i_0}$, $|x_j| = |x_{i_0}|$ et $x_j = |x_{i_0}| e^{i\theta}$. En reportant, on a

$$\lambda |x_{i_0}| = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0,j} |x_{i_0}| \quad (5.43)$$

donc

$$\boxed{\lambda = 1} \quad (5.44)$$

4. Si $|\lambda| = 1$ et $\lambda \neq 1$, on a $i_0 \notin J_{i_0}$ car sinon $\lambda = 1$. Donc il existe $i_1 \in J_{i_0} \setminus \{i_0\}$ tel que $x_{i_1} = |x_{i_0}| e^{i\theta} = \lambda x_{i_0}$. Ainsi, il existe $i_2 \neq i_1$ tel que $x_{i_2} = \lambda x_{i_1}$. De proche en proche, il existe $i_q \neq i_{q-1}$ tel que $x_{i_q} = \lambda x_{i_{q-1}}$ (avec $q \geq 1$) et $x_{i_q} = \lambda^q x_{i_0}$. Or

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{N} &\rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket \\ k &\mapsto i_k \end{aligned}$$

n'est pas injective. Donc il existe $k > l$ tel que $i_k = i_l$ et $x_{i_k} = \lambda^{k-l} x_{i_k}$ et $k - l > 1$ donc

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{U}_{k-l}} \quad (5.45)$$

5. L'identité convient, les matrices de permutation aussi. En effet, si $\sigma \in \Sigma_n$, on a $P_\sigma^{n!} = I_n$ donc les valeurs propres sont racines de $X^{n!} - 1$ donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(P_\sigma) \subset \mathbb{U}_{n!}$.

Réciproquement, soit A stochastique telle que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset (\mathbb{U})$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, supposons $|J_{i_0}| \geq 2$. D'après la décomposition de Dunford, il existe D diagonale et N nilpotente qui commutent telles que $A = D + N$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Si N est nilpotente d'indice $r \geq 2$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \geq r$, on a

$$A^k = \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} N^j D^{k-j} = \sum_{j=1}^r \binom{k}{j} N^j D^{k-j} \quad (5.46)$$

Pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on a

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1) \dots (k-j+1)}{j!} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^j}{j!} \quad (5.47)$$

Comme $N^{r-1} \neq 0$, on a

$$A^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \quad (5.48)$$

et les coefficients de D^{k-r+1} sont bornés car $\text{Sp}(D) \subset \mathbb{U}$.

Or, notons que si A et B sont stochastiques, AB l'est aussi ($\mathbf{1}$ est toujours valeur propre). Par récurrence, A^k l'est. Donc $A^k \in \mathcal{M}_n([0, 1])$, et l'équivalent est impossible si $r \geq 2$. Donc $r = 1$ donc $N = 0$ et $A = D$ est diagonalisable.

Les valeurs propres de A sont des racines de l'unité, soit m le ppcm des ordres de ces racines (dans (\mathbb{U}, \times)). On a alors

$$A = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \quad (5.49)$$

d'où

$$A^m = P \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) P^{-1} \quad (5.50)$$

Notons $M = \max_{j \in J_{i_0}} |a_{i_0, j}| < 1$ (car $|J_{i_0}| \geq 2$ donc pour tout $j \in J_{i_0}$, $a_{i_0, j} \neq 1$). On note $a_{i_0, i_0}^{(m)}$ le coefficient (i_0, i_0) de A^m . On a alors

$$a_{i_0, i_0}^{(m)} = 1 = \sum_{j \in J_{i_0}} a_{i_0, j} a_{j, i_0}^{(m-1)} \leq M \sum_{j \in J_{i_0}} a_{j, i_0}^{(m-1)} \leq M \sum_{j=1}^n a_{j, i_0}^{(m-1)} = M \quad (5.51)$$

car A^{m-1} est stochastique. Donc $M = 1$ ce qui n'est pas possible (par définition de M).

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $|J_i| = 1$ donc il existe un unique $j_i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $a_{i, j_i} = 1$ et pour tout $j \neq j_i$, $a_{i, j} = 0$.

$i \mapsto j_i$ est injective, sinon $\text{rg}(A) \leq n-1$ et $0 \in \text{Sp}(A)$.

■

Remarque 5.5. On peut avoir $|\lambda| < 1$ pour la question 2, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

On a $A^2 = A$ et $\text{rg}(A) = 1$, $\text{Sp}(A) = \{0, 1\}$.

Remarque 5.6. Par exemple, pour 4, on a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.53)$$

On a $\chi_A = X^2 - 1$ et $\text{Sp}(A) = \{-1, 1\}$.

Remarque 5.7. Si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} > 0$ (i.e. pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $J_i = \llbracket 1, n \rrbracket$). D'après 3, on a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \mathbb{U} = \{1\}$. De plus, si $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ vérifie $AX = X$, d'après ce qui précède, on a $x_1 = \cdots = x_n$ et le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1.

Solution 5.5.

1. Soit $(\lambda, \mu) \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \times \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$. On a $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B^T)$. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ . On pose $M = XY^T$. Alors

$$\Phi_{A,B}(M) = AXY^T - XY^TB = (\lambda - \mu)XY^T = (\lambda - \mu)M \quad (5.54)$$

donc

$$\boxed{\lambda - \mu \in \text{Sp}(\Phi_{A,B})} \quad (5.55)$$

Réciproquement, soit $\alpha \in \text{Sp}(\Phi_{A,B})$. Il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que l'on ait $AM - MB = \alpha M$ d'où $AM = M(\alpha I_n + B)$. Par récurrence, $A^k M = M(\alpha I_n + B)^k$ et par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ on a $P(A)M = MP(\alpha I_n + B)$. En particulier, on prend $P = \chi_A$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$0 = M\chi_A(\alpha I_n + B) \quad (5.56)$$

On a $M \neq 0$ donc $\chi_A(\alpha I_n + B)$ n'est pas inversible. On écrit

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \quad (5.57)$$

d'où

$$\chi_A(\alpha I_n + B) = \prod_{k=1}^n (B + (\alpha - \lambda_k) I_n) \quad (5.58)$$

donc il existe $k_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $B + (\alpha - \lambda_{k_0}) I_n$ est non inversible. Donc $\lambda_{k_0} - \alpha \in \text{Sp}(B)$ et donc α est une différence d'un élément de $\text{Sp}(A)$ et de $\text{Sp}(B)$.

2. On forme

$$\begin{aligned} f_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} g_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ M &\mapsto MB \end{aligned}$$

Toujours par récurrence et combinaison linéaires, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$P(f_A)M = P(A)M \quad (5.59)$$

Si $P(A) = 0$, on a $P(f_A) = 0$. Si $P(f_A) = 0$, pour $M = I_n$, on a $P(A) = 0$. De même pour B . Donc $\Pi_A = \Pi_{f_A}$ (polynômes minimaux) et A est diagonalisable si et seulement si $f_A(M)$ est diagonalisable. f_A et g_B commutent car

$$(f_A \circ g_B)(M) = AMB = (g_B \circ f_A)(M) \quad (5.60)$$

Donc f_A et g_B sont codiagonalisables et donc $\Phi_{A,B}$ l'est. ■

Remarque 5.8. Si (X_1, \dots, X_n) (respectivement (Y_1, \dots, Y_n)) est une base de vecteurs propres de A (respectivement de B^\top), alors $(X_i Y_j^\top)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de vecteurs propres pour $\Phi_{A,B}$.

Remarque 5.9. C'est faux sur \mathbb{R} , par exemple

$$A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.61)$$

On a $\text{Sp}_{\mathbb{R}} = \emptyset$ et $\Phi_{A,A}(I_2) = 0$ donc $0 \in \text{Sp}_{\Phi_{A,A}}$.

Remarque 5.10. Si $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable, soit $(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $BX = \lambda X$. On a

$$AM_{i,j} = M_{i,j}(B + \lambda_{i,j}I_n) \quad (5.62)$$

avec $\Phi_{A,B}(M_{i,j}) = \lambda_{i,j}M_{i,j}$. Donc

$$AM_{i,j}X = (\lambda + \lambda_{i,j})M_{i,j}X \quad (5.63)$$

Pour tout $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $X_0 = MX$. $M \in \text{Vect}(M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ donc

$$\text{Vect}(M_{i,j}X)_{1 \leq i,j \leq n} = M_{n,1}(\mathbb{C}) \quad (5.64)$$

On peut donc en extraire une base : c'est une base de vecteurs propres de A .

Solution 5.6.

1. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $A^k M = \theta^k M A^k$, or F est un sous-espace vectoriel donc par combinaisons linéaires, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$.
2. Soit $X \in \ker(A - \lambda I_n)$. On a $AMX = \theta MAX = \lambda \theta MX$. On a donc $MX \in \ker(A - \lambda \theta I_n)$. Si pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a $\theta \lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et $X \in \ker(A - \lambda I_n)$, alors $\ker(A - \lambda \theta I_n) = \{0\}$. Donc $MX = 0$. Or les vecteurs propres forment une famille génératrice donc $M = 0$ et $F = \{0\}$.

S'il existe $\lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\theta \lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Soit X_1 un vecteur propre de A associé à λ_0 . On complète (X_1) en $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ base de \mathbb{C}^n formé de vecteurs propres de A . On définit $MX_1 = Y_1 \in \ker(A - \lambda_0 \theta I_n) \setminus \{0\}$ et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $MX_i = 0$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a

$$AMX_i = 0 = \theta MAX_i = \theta \lambda_i MX_i \quad (5.65)$$

et

$$AMX_1 = AY_1 = \lambda_0 \theta Y_1 = \theta MAX_1 = \theta \lambda_0 X_1 \quad (5.66)$$

Donc $M \neq 0$ et $M \in F$. Finalement, on a $F = \{0\}$ si et seulement si pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\theta \lambda \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

3. On écrit $\chi_A = \prod_{j=1}^r (X - \lambda_j)^{m_j}$ avec λ_j distincts et $m_j \geq 1$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (5.67)$$

Supposons $\theta \neq 0$. Si $M \in F$ et si $x \in \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$. On a

$$\left(\left(\frac{X}{\theta} - \lambda_j \right)^{m_j} \right) (A)(Mx) = M(A - \lambda_j I_n)^{m_j}(x) = 0 \quad (5.68)$$

Donc

$$Mx \in \ker \left(\frac{1}{\theta} A - \lambda_j I_n \right)^{m_j} = \ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (5.69)$$

car $\theta \neq 0$.

De plus, $\ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} \neq \{0\}$ si et seulement si $\ker(A - \theta \lambda_j I_n) \neq \{0\}$ car

$$\det[(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j}] = \det[(A - \theta \lambda_j I_n)]^{m_j} \quad (5.70)$$

Si pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, $\lambda \theta \notin \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, soit $x \in \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$. On a

$$Mx \in \ker(A - \theta \lambda_j I_n)^{m_j} = \{0\} \quad (5.71)$$

donc $M = 0$ car $\mathbb{C}^n = \bigotimes_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j}$.

S'il existe $\lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ tel que $\lambda_0 \theta \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, soit $x_1 \in \ker(A - \lambda_0 I_n) \neq \{0\}$. On pose

$$Mx_1 = y_1 \in \ker(A - \lambda_0 \theta I_n) \setminus \{0\} \quad (5.72)$$

On complète (x_1) en $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ base de \mathbb{C}^n formée de vecteurs appartenant à

$$\bigcup_{j=1}^r \ker(A - \lambda_j I_n)^{m_j} \quad (5.73)$$

On a pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $Mx_i = 0$. On a $M \neq 0$ et

$$AMx_1 = Ay_1 = \theta \lambda_0 y_1 = \theta \lambda_0 Mx_1 \quad (5.74)$$

Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on a $AMx_i = 0$ si $x_i \in \ker(A - \lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$ et si $\lambda_{j_i} \neq \lambda_0$. On a $Ax_i \in \ker(A - \lambda_{j_i} I_n)^{m_{j_i}}$ donc

$$Ax_i \in \text{Vect}(x_2, \dots, x_n) \quad (5.75)$$

et $MAx_i = 0$ donc $AMx_i = \theta MAx_i$.

Si $F \neq \{0\}$, il existe $M \neq 0$ tel que $AM = \theta MA$. Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(\theta A)$. En particulier, pour $P = \chi_A$, on a

$$M\chi_A(\theta A) = 0 \tag{5.76}$$

$M \neq 0$ et donc $\chi_A(\theta A)$ n'est pas inversible. Si $\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\theta A - \lambda_k I_n)$ est non inversible, d'où

$$\boxed{\lambda_k \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \cap \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\theta A)} \tag{5.77}$$

■

Solution 5.7. On a

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (5.78)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (5.79)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (5.80)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (5.81)$$

$$= (\lambda - 3) \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 1 \\ 1 - \lambda & \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (5.82)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \quad (5.83)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} \quad (5.84)$$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) \quad (5.85)$$

où l'on a fait successivement les opérations suivantes : $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, $C_i \leftarrow C_i - C_1$ pour $i \in \{2, 3, 4\}$, développement selon la première ligne, $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$, $L_i \leftarrow L_i + L_1$ pour $i \in \{2, 3\}$, développement selon la première colonne.

χ_A est scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc A est diagonalisable. On trouve ensuite un vecteur propre dans chaque sous-espace propre (qui sont de dimension un). ■

Solution 5.8.

1. On a $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $AX = \lambda X$ si et seulement si

$$\begin{cases} \sum_{i \neq 1} a_i x_i = \lambda x_1 \\ \vdots \\ \sum_{i \neq j} a_i x_i = \lambda x_j \\ \vdots \\ \sum_{i \neq n} a_i x_i = \lambda x_n \end{cases} \quad (5.86)$$

Soit $S = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Ce système équivaut à

$$S = (\lambda + a_1)x_1 = \cdots = (\lambda + a_n)x_n \quad (5.87)$$

Si $S = 0$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\lambda = -a_i$ ou $x_i = 0$ (et $X \neq 0$). Les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$, il existe un unique $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda = -a_{i_0}$ et pour tout $i \neq i_0$, on a $x_i = 0$. En reportant, on a $S = 0 = \lambda x_{i_0}$ donc $\lambda = 0$ ce qui est impossible car $0 = \lambda = -a_{i_0} > 0$.

Donc $S \neq 0$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda + a_i \neq 0$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i = \frac{S}{\lambda + a_i}$. On a alors

$$S = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \sum_{i=1}^n \frac{a_i S}{\lambda + a_i} \quad (5.88)$$

donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\lambda + a_i} = 1} \quad (5.89)$$

Réciproquement, on prend $x_i = \frac{1}{\lambda + a_i}$ et on a bien $AX = \lambda X$.

2. On définit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{-a_n, \dots, -a_1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{x + a_i} \end{aligned}$$

3. Posons $-a_{n+1} = -\infty$ et $-a_0 = +\infty$. Sur $] -a_{k+1}, -a_k[$, on a

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \frac{-a_i}{(x + a_i)^2} \quad (5.90)$$

Les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ étant positifs, on a $\lim_{x \rightarrow -a_{k+1}^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -a_k^-} f(x) = -\infty$ (si $k \neq n$) (et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe un unique $\lambda_k \in]-a_{k+1}, -a_k[$ tel que $f(\lambda_k) = 1$. Donc A admet exactement n valeurs propres réelles distinctes. Donc A est diagonalisable sur \mathbb{R} . ■

Remarque 5.11. Soit

$$F(X) = -\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{X + a_k} + 1 = \frac{P(X)}{(X + a_1) \dots (X + a_n)} \quad (5.91)$$

avec $P = (X + a_1) \dots (X + a_n) - \sum_{k=1}^n a_k P_k$ où $P_k = \prod_{i \neq k} (X + a_i)$ de degré $n-1$. On a $\deg(P) = n$ et son coefficient dominant est 1. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda + a_k} = 1$ si et seulement si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ donc $P = \chi_A$.

Solution 5.9. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \frac{\lambda}{j} & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \times \text{diag}(1, 2, \dots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \lambda & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.92)$$

où le coefficient est à la i -ième ligne et la j -ième colonne. La matrice à gauche est diagonalisable car son polynôme caractéristique est scindé à racines simples. Donc les matrices de transvections sont dans G . De plus, les matrices de dilatations sont aussi dans G . Donc $G = GL_n(\mathbb{R})$. ■

Solution 5.10. Supposons u diagonalisable, il existe une base \mathcal{B} telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = A = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \quad (5.93)$$

avec $\lambda_i \neq 0$. Donc $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u^p) = A^p \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1^p, \dots, \lambda_r^p)$ donc u^p est diagonalisable. On a toujours $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et la forme diagonale implique $\ker(u) = \ker(u^2)$.

Supposons u^p diagonalisable, on écrit $\Pi_{u^p} = (X - \lambda_0) \dots (X - \lambda_r) = R$ (avec $\lambda_k \neq 0$ pour tout $k \geq 1$) qui est scindé à racines simples. On a

$$P(u^p) = 0 = (u^p - \lambda_0 \text{id}_E) \circ \dots \circ (u^p - \lambda_r \text{id}_E) = Q(u) \quad (5.94)$$

avec $Q(X) = P(X^p)$.

Si $\lambda_0 \neq 0$, chaque λ_k admet p racines p -ièmes distinctes et si μ_k est l'une de ses racines, on a

$$X^p - \lambda_k = \prod_{j=1}^p \left(X - \mu_k e^{i \frac{2j\pi}{p}} \right) \quad (5.95)$$

De plus, les racines p -ièmes des $(\lambda_k)_{k \in \llbracket 1, r \rrbracket}$ sont deux à deux distinctes. Donc Q est scindé à racines simples, et donc u est diagonalisable.

Si $\lambda_0 = 0$, on a $Q = X^p A(X)$ avec A scindé à racines simples non nulles et $X^p \wedge A = 1$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\ker(Q(u)) = \mathbb{C}^n = \ker(u^p) \otimes \ker(A(u)) = \ker(u^p) \otimes_{i \in I} \ker(u - \mu_i \text{id}) \quad (5.96)$$

car A est scindé à racines simples. Montrons que $\ker(u) = \ker(u^p)$. L'inclusion directe est évidente. Réciproquement, montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\ker(u^k) \subset \ker(u^{k+1})$ et si $\ker(u^k) = \ker(u^{k+1})$, alors $\ker(u^{k+1}) = \ker(u^{k+2})$. L'inclusion est évidente, et si on a l'égalité, si $x \in \ker(u^{k+2})$, on a $u(x) \in \ker(u^{k+1}) = \ker(u^k)$ donc $x \in \ker(u^{k+1})$. Comme $\ker(u) = \ker(u^2)$, d'après ce qui précède, par récurrence, on a $\ker(u) = \ker(u^p)$, donc u est diagonalisable. ■

Solution 5.11. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n , u canoniquement associée à

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.97)$$

. On a

$$\begin{cases} u(e_1) = e_n \\ u(e_2) = e_1 \\ \vdots \\ u(e_n) = e_{n-1} \end{cases} \quad (5.98)$$

d'où

$$\begin{cases} u^k(e_1) = e_{n+1-k} \\ \vdots u^k(e_{k-1}) = e_{n-1} \\ \vdots \\ u^k(e_n) = e_{n-k} \end{cases} \quad (5.99)$$

et donc

$$J_n^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & & & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

où les 1 commencent à la $k + 1$ -ième colonne sur la première ligne et à la $n - k + 1$ -ième ligne sur la première colonne. Notamment, le 1 sur la dernière colonne est à la $n - k$ -ième ligne.

On a $A(a_0, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J_n^k$. En développant par rapport à la première ligne, on a

$$\chi_{J_n}(X) = X \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & X & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & X \end{vmatrix} \quad (5.101)$$

Le premier déterminant vaut X^{n-1} et le deuxième vaut $-(-1)^n \times (-1)^{n-2} = -1$ donc $\chi_{J_n}(X) = X^n - 1$. Ainsi, χ_{J_n} est scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc J_n est diagonalisable avec des sous-espaces propres de dimension 1. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, on a $\text{Sp}(J_n) = \{\omega^k, 0 \leq k \leq n-1\}$. On a $J_n X = \omega^k X$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_2 &= \omega^k x_1 \\ \vdots & \\ x_n &= \omega^k x_{n-1} \\ x_1 &= \omega^k x_n \end{cases} \quad (5.102)$$

si et seulement si

$$X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ (\omega^k)^{n-1} \end{pmatrix} = x_1 X_k \quad (5.103)$$

avec X_k vecteur propre de J_n associé à ω^k . Posons

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \omega & & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \dots & (\omega^{n-1})^{n-1} \end{pmatrix} \quad (5.104)$$

et $P^{-1}J_nP = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$. On a donc $P^{-1}A(a_0, \dots, a_n)P = \text{diag}(Q(1), Q(\omega), \dots, Q(\omega^{n-1}))$ où $Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Donc A est diagonalisable de valeurs propres $Q(1), \dots, Q(\omega^{n-1})$ et donc

$$\boxed{\det(A) = \prod_{k=0}^{n-1} Q(\omega^k)} \quad (5.105)$$

■

Remarque 5.12. On a

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc) = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \quad (5.106)$$

Si $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ vérifient $a + b + c = 1$, on a

$$|a + jb + j^2c| = |a + j^2b + jc| \leq a + b + c = 1 \quad (5.107)$$

si et seulement si a, jb, j^2c ont même argument si et seulement si $\{a, b, c\} = \{1, 0, 0\}$.

Solution 5.12. On sait que $f^n = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ker(f^k) \subset \ker(f^{k+1})$ et si $\ker(f^k) = \ker(f^{k+1})$, alors $\ker(f^k) = \ker(f^m)$ pour tout $m \geq k$.

Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et

$$\begin{aligned} u : \ker(f^{k+1}) &\rightarrow \ker(f^k) \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

est bien définie car si $x \in \ker(f^{k+1})$, $f(x) \in \ker(f^k)$. Comme $\ker(f) \subset \ker(f^{k+1})$, $\ker(u) = \ker(f)$ et $\dim(\ker(u)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a $\dim(\ker(f^{k+1})) = \text{rg}(u) + 1 \leq \dim(\ker(f^k)) + 1$. Par récurrence, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dim(\ker(f^k)) \leq k$ (car on ne peut croître au plus de 1 à chaque itération).

Si $f^{n-1} = 0$, on a $\dim(\ker(f^{n-1})) = n \leq n-1$ ce qui est absurde. Donc

$$\boxed{f^{n-1} \neq 0} \quad (5.108)$$

Soit $x \notin \ker(f^{n-1})$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Si $\alpha_0 x + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$, en appliquant f^{n-1} , on a $\alpha_0 f^{n-1}(x) = 0$ donc $\alpha_0 = 0$. Puis on applique f^{n-2} , etc. De proche en proche, $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Ainsi, $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre en dimension n , c'est donc une base et on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

qui est une matrice nilpotente d'indice n . Matriciellement, on a $\ker(f^k) = \text{Vect}(e_{n-k+1}, \dots, e_n)$. ■

Solution 5.13. Supposons qu'il existe $x \in V$, $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de V . Notons $u^n(x) = a_0x + \dots + a_{n-1}u^{n-1}(x)$. Soit $y \in V$ tel que $u(y) = \lambda y$. Pour $y = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^i(x)$. On a donc

$$u(y) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i u^{i+1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda y_i u^i(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_{i-1} u^i(x) + y_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} a_i u^i(x) \quad (5.110)$$

Donc $u(y) = \sum_{i=1}^{n-1} u^i(x)(y_{i-1} + y_{n-1}a_i) + y_{n-1}a_0x$ donc

$$\begin{cases} \lambda y_0 &= y_{n-1}a_0 \\ \lambda y_1 &= y_0 + a_1 y_{n-1} \\ \vdots & \\ \lambda y_{n-2} &= y_{n-3} + a_{n-2} y_{n-1} \\ \lambda y_{n-1} &= y_{n-2} + a_{n-1} y_{n-1} \end{cases} \quad (5.111)$$

donc par récurrence

$$\begin{cases} \lambda y_{n-2} &= (\lambda - a_{n-1}) y_{n-1} \\ \lambda y_{n-3} &= (\lambda(\lambda - a_{n-1}) - a_{n-2}) y_{n-1} \\ \vdots & \\ \lambda y_0 &= (\lambda^{n-1} - a_{n-1} \lambda^{n-2} - \dots - a_1) y_{n-1} \end{cases} \quad (5.112)$$

Donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Supposons que les sous-espaces propres de u sont de dimension 1. On écrit $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$V = \bigotimes_{i=1}^r \underbrace{\ker(u - \lambda_i \text{id}_V)^{n_i}}_{F_i} \quad (5.113)$$

et les sous-espaces caractéristiques F_i sont stables par u . Soit $v_i = u|_{F_i} - \lambda_i \text{id}_{F_i}$. On a $\chi_u = \prod_{i=1}^r \chi_{u|_{F_i}}$ (matrice diagonale par blocs dans une base adaptée). $(X - \lambda_i)^n$ annule $u|_{F_i}$ et $\text{Sp}_{F_i}(u|_{F_i}) = \{\lambda_i\}$. Alors $\chi_{u|_{F_i}} = (X - \lambda_i)^{\dim(F_i)}$. En reportant, on a $\dim(F_i) = n_i$. De plus, $V_i^{n_i} = 0$ donc v_i est nilpotent. On a donc $\dim(\ker(v_i)) = \dim(\ker(u - \lambda_i \text{id}_E)) = 1$. Donc il existe $x_i \in F_i$ tel que $(x_i, v_i(x_i), \dots, v_i^{n_i-1}(x_i))$ soit une base de F_i .

On forme $x = \sum_{i=1}^r x_i$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$ tel que $\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x) = 0 = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i) \right)$. Les F_i sont en somme directe donc

$$\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(x_i) = 0 \quad (5.114)$$

Soit $P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j X^j$. $I_{x_i} = \{A \in \mathbb{C}[X] \mid A(u)(x_i) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{C}[X]$ donc est principal et il existe $\Pi_i \in I_{x_i}$ minimal et

$$\Pi_i \mid P \quad (5.115)$$

On a $(X - \lambda_i)^{n_i}(u)(x_i) = 0$ et $(x_i, u(x_i), \dots, u^{n_i-1}(x_i))$ est libre, donc si $P \in I_{x_i}$, $\deg(P) \geq n_i$ donc $\deg(\Pi_i) = n_i$ et $\Pi_i = (X - \lambda_i)^{n_i}$. Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\Pi_i \mid P$ et donc

$$\prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{n_i} \mid P \quad (5.116)$$

Mais P est de degré $\leq n - 1$, nécessairement $P = 0$ et $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est libre. ■

Remarque 5.13. *Autre méthode pour le sens direct : on a*

$$\text{mat}_{(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} = A \quad (5.117)$$

Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on a

$$A - \lambda I_n = \text{mat}_{(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))}(u) = \begin{pmatrix} -\lambda & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\lambda & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

qui est non inversible, mais donc les $(n - 1)$ première colonnes sont libres, donc est de rang $n - 1$.

Solution 5.14.

1. On utilise le fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k)$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(f^{k+1}) = \text{Im}(f^k)$ alors pour tout $l \geq k$, $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^l)$.

En effet, si $x = f^{k+1}(x') \in \text{Im}(f^{k+1})$, on a $x = f^k(f(x')) \in \text{Im}(f^k)$. Si on a égalité des espaces, soit $x = f^{k+1}(x') = f(f^k(x')) \in \text{Im}(f^{k+1})$. Alors $f^k(x') \in \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k+1})$ donc il existe

x'' tel que $f^k(x') = f^{k+1}(x'')$, mais alors $x = f^{k+2}(x'') \in \text{Im}(f^{k+2})$. On a donc le résultat en itérant.

Ainsi, pour tout $n \geq d$, on a $\text{rg}(f^n) = \text{rg}(f^d)$ donc $(\text{rg}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire au moins à partir de d et $r(f) = \text{rg}(f^d)$.

2. Comme f et g commutent, on a

$$(f + g)^{2d} = \sum_{k=0}^{2d} \binom{2d}{k} f^k g^{2d-k} \quad (5.119)$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, 2d \rrbracket$, on a $k \geq d$ ou $2d - k \geq d$ donc

$$\begin{cases} \text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(f^d) \\ \text{ou} \\ \text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(g^d) \end{cases} \quad (5.120)$$

et donc $\text{Im}(f^k g^{2d-k}) \subset \text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)$. Finalement, $\text{Im}(f + g)^{2d} \subset \text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)$. On a donc

$$r(f + g) = \dim(\text{Im}(f + g)^{2d}) \quad (5.121)$$

$$\leq \dim(\text{Im}(f^d) + \text{Im}(g^d)) \quad (5.122)$$

$$\leq \dim(\text{Im}(f^d)) + \dim(\text{Im}(g^d)) \quad (5.123)$$

$$\leq r(f) + r(g) \quad (5.124)$$

Pour un contre-exemple, on utilise $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A^\top$. On a $A^2 = B^2$ donc $r(A^2) = r(B^2) = 0$ et $A + B$ inversible donc $r(A + B) = 2 > r(A) + r(B)$.

3. On a $\chi_f = X^{m_0}Q$ avec $\deg(Q) = d - m_0$ et $Q(0) = 0$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$V = \ker(f^{m_0}) \otimes \ker(Q(f)) \quad (5.125)$$

Dans une base adaptée \mathcal{B} , on a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A^{m_0} = 0$ et B inversible. Alors

pour tout $k \geq m_0$, $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$ et $\text{rg}(f^k) = \text{rg}(B^k) = d - m_0 = r(f)$.

■

Solution 5.15. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de la norme $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$. Notons que si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, alors $|\lambda| \leq \|A\|$. En effet, si X est un vecteur propre associé à λ , on a

$$\|AX\|_\infty = |\lambda| \|X\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty \quad (5.126)$$

et $X \neq 0$ donc $\|X\|_\infty \neq 0$.

Soit $A = e^{\frac{2ik\pi}{q}} I_n$, soit $B \in \mathcal{G}_q$ telle que $\|B - A\| \leq \sin\left(\frac{\pi}{q}\right)$. Soit $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B)$, on a $\mu \in \mathbb{U}_q$ car $B^q = I_n$. Donc $\mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(B - A)$ et

$$\left| \mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right| \leq \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \quad (5.127)$$

Si $\mu = e^{\frac{2il\pi}{q}}$, on a

$$\left| \mu - e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{(l-k)\pi}{q}\right) \right| > \sin\left(\frac{\pi}{q}\right) \quad (5.128)$$

si $l \neq k$. Nécessairement, on a $\mu = e^{\frac{2ik\pi}{q}}$, donc $B = A$ car B est diagonalisable et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{q}} \right\}$. Donc A est un point isolé de \mathcal{G}_q .

Soit maintenant $A \in \mathcal{G}_q$, on suppose que A n'est pas une matrice scalaire, donc $|\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)| \geq 2$. Soit $\lambda \in (\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A))$. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda, \dots, \lambda, \mu_1, \dots, \mu_r)$ avec $\mu_1, \dots, \mu_r \neq \lambda$. Soit $\varepsilon > 0$, posons

$$A_\varepsilon = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \varepsilon & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \mu_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \mu_r \end{pmatrix} P^{-1} \quad (5.129)$$

On a $A_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} A$ et $A_\varepsilon \neq A$. Montrons que $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$. On a $\chi_{A_\varepsilon} = \chi_A$, $\text{rg}(A_\varepsilon - \lambda I_n) = \text{rg}(A - \lambda I_n)$ (observer les colonnes) et pour $\mu_l \in \text{Sp}(A)$, $\mu_l \neq \lambda$, on a $\text{rg}(A_\varepsilon - \mu_l I_n) = \text{rg}(A - \mu_l I_n)$ (observer les

lignes). La dimension des sous-espaces propres de A et A_ε sont les mêmes donc A_ε est diagonalisable. De plus, $\text{Sp}(A_\varepsilon) \subset \text{Sp}(A) \subset \mathbb{U}_q$ donc $A_\varepsilon \in \mathcal{G}_q$. Ainsi, A n'est pas isolé dans \mathcal{G}_q . ■

Solution 5.16. On a

$$\chi_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 1) - ((\lambda - 1) - 1) = \lambda(\lambda - 2)^2 \quad (5.130)$$

Soit $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^\top$. On a $MX = 0$ si et seulement si $y = x$ et $z = -x$ donc $E_0 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(\varepsilon_1)$.

On a $(M - 2I_3)X = 0$ si et seulement si $y = z = -x$ donc $E_2 = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Vect}(\varepsilon_2)$.

M n'est pas diagonalisable sur \mathbb{R} mais trigonalisable. D'après le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u) \otimes \ker(u - 2id)^2 \quad (5.131)$$

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \star \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.132)$$

avec $\varepsilon_3 \in \ker(u - 2id)^2$ et $\varepsilon_3 \notin \text{Vect}(\varepsilon_2)$. On a

$$(M - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.133)$$

donc $(M - 2I_3)^2 X = 0$ si et seulement si $2x - y + z = 0$. On pose $\varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $M\varepsilon_3 = -\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$

donc si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.134)$$

on a

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (5.135)$$

Les sous-espaces stables de dimension 0 : $\{0\}$. Les sous-espaces stables de dimension 1 : ils sont engendrés par les vecteurs propres, ce sont donc $\text{Vect}(\varepsilon_1)$ et $\text{Vect}(\varepsilon_2)$. Si maintenant F est un sous-espace stable de dimension 2, montrons que l'on a

$$F = (F \cap \ker(u)) \otimes (F \cap \ker(u - 2id)^2) = F_0 \otimes F_2 \quad (5.136)$$

En effet, on a $F_0 \otimes F_2 \subset F$. Si maintenant $x \in F$, a priori on a $x = x_0 + x_2$ avec $x_0 \in \ker(u)$ et $x_2 \in \ker(u - 2id)^2$. On a $u(x) = u(x_2) \in F$ par stabilité, $u^2(x) = u^2(x_2) \in F$, et $(u - 2id)^2(x_2) = 0$ donc $x_2 = \frac{1}{4}(-u^2(x) + 4u(x_2)) \in F$ et $x_0 = x - x_2 \in F$.

On a $F_0 = \{0\}$ ou $\ker(u)$. Si $F_0 = \{0\}$, on a $F = F_2$. Si $F_0 = \ker(u)$, on a $\dim(F_2) = 1$ donc $F_2 = \text{Vect}(\varepsilon_2)$.

Donc les sous-espaces stables de dimension 2 sont $\ker(u - 2id)^2$ et $\text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Enfin, les sous-espaces stables de dimension 3 : \mathbb{R}^3 . ■

Remarque 5.14. Plus généralement, si $\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i}$. On écrit

$$E = \bigotimes_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i id_E)^{m_i} = \bigotimes_{i=1}^r F_i \quad (5.137)$$

Si F est stable, on note Π_i le projecteur sur F_i parallèlement à $\bigotimes_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r F_j \in \mathbb{K}[u]$. On a pour tout $x \in F$, $\Pi_i(x) \in F$ par stabilité, il s'ensuit que

$$\boxed{F = \bigotimes_{i=1}^r (F \cap F_i)} \quad (5.138)$$

Solution 5.17.

1. Si $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$, on a

$$A - I_{n+1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & 0_n & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline a_1 & \dots & a_n & 0 \end{array} \right) \quad (5.139)$$

donc $\text{rg}(A - I_{n+1}) = 2$ et $\chi_{A - I_{n+1}} = X^{n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$ (sur \mathbb{C}). On a $\text{Tr}(A - I_{n+1}) = 0 = \mu + \lambda$ et $\text{Tr}(A - I_{n+1})^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lambda^2 + \mu^2$ donc $\{\lambda, \mu\} \in \left\{ \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\}$ et $A - I_{n+1}$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (5.140)$$

2. On note $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$. Soit X tel que $A'X = \pm \lambda$ où $A' = A - I_{n+1}$. Alors en écrivant le système, on vérifie que l'on peut prendre

$$f_{\pm} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \lambda \end{pmatrix} \quad (5.141)$$

et si X est tel que $A'X = 0$, si i_0 est tel que $a_{i_0} \neq 0$, on récupère une bas de $\ker(A')$ avec

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.142)$$

où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}$. Le 1 est à la i -ième ligne, $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$ est à la ligne i_0 .

■

Solution 5.18. On pose $\|A\| = \sup_{\|X\|_\infty=1} \|AX\|_\infty$. On montre d'abord que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ $|\lambda| \leq \|A\|$. En effet, si X non nul est tel que $AX = \lambda X$, on a $\|AX\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$ donc $|\lambda| \|X\|_\infty \leq \|A\| \|X\|_\infty$, d'où le résultat.

Soit alors $m = \sup \{\|M\| \mid M \in G\}$. Soit $M \in G$ et $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a $|\lambda| \leq m$. Comme $M^k \in G$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a aussi $|\lambda|^k \leq m$ donc $|\lambda| = 1$ (faire tendre k vers $-\infty$ et $+\infty$).

Grâce à la décomposition de Dunford, on a $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et D et N qui commutent. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ telle que $N^{r-1} \neq 0$ et $N^r = 0$. On a $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}$ donc $G \in GL_n(\mathbb{C})$ et $MD^{-1} = I_n + ND^{-1}$ avec ND^{-1} est nilpotente d'indice r . On a pour tout

$k \geq r$, on a

$$(MD^{-1})^k = M^k(D^{-1})^k \quad (5.143)$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (ND^{-1})^i \quad (5.144)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{k}{i} (ND^{-1})^i \quad (5.145)$$

$$\underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^{r-1}}{(r-1)!} N^{r-1} D^{k-r+1} \quad (5.146)$$

Notons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ si $\|X\|_\infty = 1$, on a

$$\|(AB)X\|_\infty \leq \|A\| \|BX\|_\infty \leq \|A\| \|B\| \quad (5.147)$$

donc $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

La suite $(MD^{-1})^k$ est bornée, donc $r = 1$ et $N = 0$, donc M est diagonalisable.

Prenons ensuite $\alpha = \sqrt{3}$. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on a $\lambda - 1 \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M - I_n)$. Si $\lambda = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi, \pi[$, on a $|e^{i\theta} - 1| < \sqrt{3}$ si et seulement si $2 \sin(\frac{\theta}{2}) < \sqrt{3}$ si et seulement si $\theta \in]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on a $(e^{i\theta})^k \in \text{Sp}(M^k)$. Donc on a aussi $|\sin(\frac{k\theta}{2})| < \frac{\sqrt{3}}{2}$. Quitte à changer θ en $-\theta$, on peut supposer $\theta \in [0, \frac{2\pi}{3}[$. Si $\theta \geq 0$, posons l'unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $k\theta \geq \frac{2\pi}{3}$ et $(k-1)\theta \in [0, \frac{2\pi}{3}[$. On a alors

$$k\theta = (k-1)\theta + \theta < \frac{4\pi}{3} \quad (5.148)$$

ce qui est absurde si et seulement si $|\sin(\frac{k\theta}{2})| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ainsi, $\theta = 0$ et $\text{Sp}(M) = \{1\}$, et puisque M est diagonalisable, $M = I_n$ et $G = \{I_n\}$. ■

Remarque 5.15. Soit $\alpha > \sqrt{3}$ et $G = \{I_n, jI_n, j^2I_n\}$. Pour tout $M \in G$, $\|M - I_n\| < \alpha$ et $G \neq \{I_n\}$.

Solution 5.19.

1. On vérifie que $\chi_A(\lambda) = \lambda^3$. On a $AX = 0$ si et seulement si $x_1 = x_3$ et $x_2 = -2x_1$. On prend

$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. u est nilpotente et $\dim(\ker(u)) = 1$. On a $u^3 = 0$ et on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (5.149)$$

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $u^2(e_1) \neq 0$ donc $(u^2(e_1), u(e_1), e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 . On a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.150)$$

$\dim(\ker(u^k)) = k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, notamment car $\text{rg}(u^2) = 1$ pour justifier que $\dim(\ker(u^2)) = 2$.

Soit F stable par u de dimension $i \in \{0, 1, 2, 3\}$. $u|_F$ est nilpotente et $u|_F^i = 0$. Donc $F \subset \ker(u^i)$ qui est de dimension i . Donc $F = \ker(u^i)$.

2. Si $B^2 = A$, $B^6 = 0$ donc $B^3 = 0$. Alors $B^4 = 0 = A^2$ ce qui n'est pas vrai. Donc il n'y a pas de B tel que $B^2 = A$.

■

Solution 5.20. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A . On a $X^3 + X^2 + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$. D'après le lemme des noyaux, on a

$$\mathbb{R}^3 = \ker(u + id) \otimes \underbrace{\ker(u^2 + id)}_F \quad (5.151)$$

On a $F \neq \{0\}$ car $u \neq -id$. On note $v = u|_F$. On a $v^2 = -id_F$ et $\det(v^2) = (\det(v))^2 = (-1)^{\dim(F)} > 0$ donc $\dim(F)$ est pair. Nécessairement, on a $\dim(F) = 2$ et $\dim(\ker(u + id)) = 1$. Soit ε_3 vecteur propre associé à -1 . Soit $x \in F \setminus \{0\}$. Si $(x, u(x))$ est lié, x est vecteur propre de v et $v^2 + id_F = 0$

ce qui est impossible car il n'y a pas de valeur propre réelle. Donc on pose $\mathcal{B} = (x, u(x), \varepsilon_3)$ base de \mathbb{R}^3 . On a $u^2(x) = -x$, donc

$$\boxed{\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \quad (5.152)$$

■

Remarque 5.16. Sur \mathbb{C} , on peut prendre

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.153)$$

ou iI_3 .

Solution 5.21.

1. $I_x = \{A \in \mathbb{K}[X] \mid A(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non vide car $\mu_f \in I_x$. Donc il existe un unique P_x unitaire tel que $I_x = P_x \mathbb{K}[X]$.
2. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$, on a $A(f) = 0$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $P_x \mid A$ si et seulement si $\bigvee_{x \in E} P_x \mid A$ donc $\mu_f = \bigvee_{x \in E} P_x$.
3. On a

$$P_x P_y(f)(x+y) = P_x P_y(f)(x) + P_x P_y(f)(y) \quad (5.154)$$

$$= P_f(f)(P_x(f)(x)) + P_x(f)(P_y(f)(y)) \quad (5.155)$$

$$= 0 \quad (5.156)$$

Donc $P_{x+y} \mid P_x P_y$.

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. Supposons $A(f)(x+y) = 0$. On a $P_x(f)(A(f)(x+y)) = 0$, $P_x(f)(A(f)(x)) = A(f)(P_x(f)(x)) = 0 = -AP_x(f)(y)$. Donc $P_y \mid AP_x$. D'après le théorème de Gauss, $P_y \mid A$. De même, $P_x \mid A$. On prend $A = P_{x+y}$. Comme $P_x \wedge P_y = 1$ et $P_x P_y \mid P_{x+y}$, on a

$$\boxed{P_x P_y = P_{x+y}} \quad (5.157)$$

4. On décompose $\mu_f = \prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}$ avec pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, A_i irréductible sur $\mathbb{K}[X]$ et $\alpha_i \geq 1$. Comme $\mu_f = \vee_{x \in E} P_x$, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe $y_i \in E$ tel que $P_{y_i} = A_i^{\alpha_i} Q_i$. On pose $x_i = Q_i(f)(y_i)$. Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, on a $A(f)(x_i) = 0$ si et seulement si $AQ_i(f)(y_i) = 0$ si et seulement si $A_i^{\alpha_i} Q_i \mid AQ_i$ si et seulement si $A_i^{\alpha_i} \mid A$. Ainsi, $P_{x_i} = A_i^{\alpha_i}$. En utilisant le point précédent par récurrence, on a $\mu_f = P_{\sum_{i=1}^r x_i}$ et on pose donc $x = \sum_{i=1}^r x_i$.
5. Supposons que ce v existe. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\deg(\mu_f) \leq n$. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Si $\alpha_0 id + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1} = 0$. En appliquant en v , comme la famille est libre, on a de proche en proche $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Donc pour tout $A \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, si $A(f) = 0$, alors $A = 0$. Donc $\deg(\mu_f) \geq n$, donc $\deg(\mu_f) = n$.
- Réciproquement, soit $v \in E$ tel que $P_v = \mu_f$ qui existe d'après le point précédent. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\alpha_0 v + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(v) = 0$. On forme $A = \alpha_0 + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$. On a $A(f)(v) = 0$, donc $P_v \mid A$ mais P_v est de degré n donc $A = 0$. Donc la famille est libre et de cardinal n : c'est une base.

■

Solution 5.22.

1. φ est linéaire, soit $(s, t) \in S^2$. On a $\varphi(s) = t$ si et seulement si $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = t_n$ pour tout $n \geq 1$ si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & t_1 \\ s_1 + s_2 & = & 2t_2 \\ \vdots & & \\ s_1 + \dots + s_{n-1} & = & (n-1)t_{n-1} \\ s_1 + \dots + s_n & = & nt_n \\ \vdots & & \end{array} \right. \quad (5.158)$$

si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_1 & = & t_1 \\ s_2 & = & 2t_2 - t_1 \\ \vdots & & \\ s_n = nt_n - (n-1)t_{n-1} & & \\ \vdots & & \end{array} \right. \quad (5.159)$$

donc φ est bijective.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $\varphi(s) = \lambda s$ si et seulement si $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k = \lambda s_n$ pour tout $n \geq 1$ si et seulement si $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $s = \lambda \varphi^{-1}(s)$ si et seulement si $s \in S \setminus \{0\}$ tel que $s_1 = \lambda s_1$ et pour tout $n \geq 2$, $s_n = \lambda(ns_n - (n-1)s_{n-1})$ i.e. $(\lambda n - 1)s_n = \lambda(n-1)s_{n-1}$.

Si c'est le cas, si $s_1 \neq 0$, on a $\lambda = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $s_n = s_{n-1}$ donc s est constante.

Sinon, soit $n_0 = \min \{n \in \mathbb{N}^* \mid s_{n_0} \neq 0\}$. On a $(\lambda n_0 - 1)s_{n_0} = 0$ donc $\lambda = \frac{1}{n_0}$ et pour tout $n > n_0$, on a $s_n = \frac{\frac{1}{n_0}(n-1)}{\frac{n}{n_0}-1} s_{n-1} = \frac{n-1}{n-n_0} s_{n-1}$. Ainsi,

$$s_n = \frac{(n-1)!}{(n_0-1)!(n-n_0)!} s_{n_0} = \binom{n-1}{n_0-1} s_{n_0} \quad (5.160)$$

Réciproquement, en posant $s_{n_0} = 1$ et en définissant pour tout $n > n_0$, $s_n = \binom{n-1}{n_0-1}$ et pour tout $n \leq n_0 - 1$, $s_n = 0$, alors on a $\varphi(s) = \frac{1}{n_0}s$. Ainsi,

$$\boxed{\text{Sp}(\varphi) = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}} \quad (5.161)$$

et les sous-espaces propres sont de dimension 1.

■

Remarque 5.17. Si on se limite à \mathbb{R}^p , en définissant $\varphi_p(s_1, \dots, s_p) = (s_1, \frac{s_1+s_2}{2}, \dots, \frac{s_1+\dots+s_p}{p})$. Alors en écrivant la matrice de φ_p dans la base canonique, on a $\chi_{\varphi_p} = (X-1)(X-\frac{1}{2}) \dots (X-\frac{1}{p})$.

Solution 5.23.

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$. Supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|\lambda - a_{i,i}| > L_i$. $\lambda I_n - A$ est une matrice à diagonale strictement dominante donc inversible : absurde. Donc il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda \in D_i$. Comme $\lambda \in \text{Sp}(A^\top)$, il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda \in S_i$. D'où le résultat.

2. Soit X non nul (dans \mathbb{C}^n) tel que $AX = \lambda X$. Soit $i_1 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_1}| = \|X\|_\infty > 0$. On a, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(\lambda - a_{i,i})x_i = \sum_{j \neq i} a_{i,j}x_j$.
- Soit $i_2 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_{i_2}| = \max_{i \neq i_1} |x_i|$.
- Si $x_{i_2} = 0$, on a $\lambda = a_{i_1,i_1}$ et $|\lambda - a_{i_1,a_1}| = 0$ et $|\lambda - a_{i_1,a_1}| |\lambda - a_{i_2,i_2}| = 0 \leq L_{i_1} L_{i_2}$.
- Sinon, on a $|\lambda - a_{i_1,i_1}| |x_{i_1}| \leq |x_{i_2}| L_{i_1}$ et de même $|\lambda - a_{i_2,i_2}| |x_{i_2}| \leq |x_{i_1}| L_{i_2}$ d'où le résultat. ■

Remarque 5.18. On peut avoir égalité, par exemple avec la matrice nulle.

Solution 5.24. A est symétrique réelle, donc diagonalisable. Si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i = 0$ alors $A = 0$.

Sinon, $\text{rg}(A) = 2$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n+1})$ canoniquement associée à A . On a $\dim(\ker(u)) = n - 1$ et $\chi_A = X^{n-1}(X - \lambda)(X - \mu)$ sur \mathbb{C} . On a $\text{Tr}(A) = \lambda + \mu = 0$ donc $\mu = -\lambda$ et $\text{Tr}(A^2) = \lambda^2 + \mu^2 = 2 \sum_{i=1}^n a_i^2$ donc

$$\{\lambda, \mu\} = \left\{ \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right\} \quad (5.162)$$

Les deux valeurs propres sont de multiplicité 1 dans χ_A : les sous-espaces propres sont de dimension 1.

A est diagonalisable sur \mathbb{R} , semblable à $\text{diag}(0, \dots, 0, \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}, -\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2})$.

On a $AX = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 x_{n+1} & = 0 \\ \vdots & \\ a_n x_{n+1} & = 0 \\ a_1 x_1 + \dots + a_n x_n & = 0 \end{cases} \quad (5.163)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_{n+1} & = 0 \\ x_{i_0} & = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n a_i x_i \end{cases} \quad (5.164)$$

avec i_0 indice tel que $a_{i_0} \neq 0$. Une base de $\ker(u)$ est donc

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ -\frac{a_i}{a_{i_0}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.165)$$

où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}$. Le 1 est à la i -ième ligne, $-\frac{a_i}{a_{i_0}}$ est à la ligne i_0 .

On a $AX = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} X = \alpha X$ si et seulement si

$$\begin{cases} a_1 x_{n+1} &= \alpha x_1 \\ \vdots & \\ a_n x_{n+1} &= \alpha x_n \\ \sum_{i=1}^n a_i x_i &= \alpha x_{n+1} \end{cases} \quad (5.166)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{a_1}{\alpha} x_{n+1} \\ \vdots & \\ x_n &= \frac{a_n}{\alpha} x_{n+1} \end{cases} \quad (5.167)$$

Une base de $\ker(u - \alpha id)$ est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{\alpha} \\ \vdots \\ \frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.168)$$

De même pour $-\alpha$, on vérifie qu'une base de $\ker(u + \alpha id)$ est

$$\begin{pmatrix} -\frac{a_1}{\alpha} \\ \vdots \\ -\frac{a_n}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.169)$$

■

Solution 5.25. Pour le sens direct, f et g ont les mêmes espaces propres distincts. Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $E_i = \ker(f - \lambda_i id) = \ker(g - \mu_i id)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ valeurs propres distinctes deux à deux de f et μ_1, \dots, μ_r pour g .

On pose

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{i=1}^r \mu_i \prod_{j \neq i}^r \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} \\ P &= \sum_{i=1}^r \lambda_i \prod_{j \neq i}^r \frac{X - \mu_j}{\mu_i - \mu_j} \end{aligned} \quad (5.170)$$

Soit $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et $x \in E_i$. On a $Q(f)(x) = Q(\lambda_i)x = \mu_i x = g(x)$. $Q(f)$ et g coïncident sur les vecteurs d'une base, donc ils sont égaux, donc $Q(f) = g$. De même, $f = P(g)$.

Réciproquement, s'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_{n-1}[X]^2$ tel que $f = P(g)$ et $g = Q(f)$. On prend $\lambda \in \text{Sp}(f)$, soit $x \in \ker(f - \lambda id)$. On a $g(x) = Q(f)(x) = Q(\lambda)x$ donc $x \in \ker(g - Q(\lambda)id)$. On a

$$\ker(f - \lambda id) \subset \ker(g - Q(\lambda)id) \subset \ker(f - P(Q(\lambda))id) \quad (5.171)$$

Or $P(Q(\lambda)) = \lambda$ car pour $x \in \ker(f - \lambda id) \setminus \{0\}$, on a $\lambda x = P(Q(\lambda))x$. Donc $\ker(f - \lambda id) = \ker(g - Q(\lambda)id)$ donc f et g ont les mêmes sous-espaces propres. ■

Remarque 5.19. C'est faux si f et g ne sont pas diagonalisables, par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.172)$$

A et B ont les mêmes sous-espaces propres (un seul : $\text{Vect}(e_1, e_4)$). On a $A^2 = 0$ donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$,

$$P(A) = \alpha I_4 + \beta A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \neq B \quad (5.173)$$

Solution 5.26. Soit $m = |G|$. On a pour tout $M \in G$, on a $M^m = I_2$ donc M est diagonalisable sur \mathbb{C} et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_m$. Notons que G étant abélien, toutes les matrices sont co-diagonalisables.

Si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{1\}$, alors $M = I_2$. Si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1\}$, alors $M = -I_2$. Dans ces deux cas, on a $\det(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = \pm 2$. On note ce cas 1.

Si $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{-1, 1\}$, M est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $M^2 = I_2$. Dans ce cas, on a $\det(M) = -1$ et $\text{Tr}(M) = 0$. On note ce cas 2.

Notons que l'on a $\chi_M = X^2 - \text{Tr}(M)X + \det(M)$ et $\Delta = (\text{Tr}(M))^2 - 4\det(M)$. Comme χ_M est un polynôme réel, si $\delta < 0$, on écrit $\chi_M(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$. Comme $\text{Tr}(M) = 2\cos(\theta) \in \mathbb{Z}$, on a $\theta \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\}$.

Si $\theta = \frac{2\pi}{3}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad (5.174)$$

et $M^3 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = -1$. On note ce cas 3.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} \quad (5.175)$$

et $M^4 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = 0$. On note ce cas 4.

Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, M est semblable à

$$\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{3}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad (5.176)$$

et $M^6 = I_2$. On a $\det(M) = 1$ et $\text{Tr}(M) = 1$. On note ce cas 5.

Par ailleurs, il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que pour tout $M \in G$, $P^{-1}MP = I_2$.

S'il existe $M \in G$ du type 2, alors les types 3 et 5 sont exclus car on obtiendrait par produit $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -e^{i\theta} \end{pmatrix}$ avec $\text{Tr}(M) = 0$ car χ_m est un polynôme réel, et $\theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$, ce qui n'est pas.

Ainsi,

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\} \quad (5.177)$$

Ainsi,

$$G = \begin{cases} \{I_2\} \\ \{-I_2, I_2\} \\ \{I_2, B\} & B \text{ matrice de type 2} \\ \{I_2, A, A^2, A^3\} \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & A \text{ matrice de type 4} \\ \{I_2, A, B, A^2, A^3, -B\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & A, B \text{ matrices de type 4, 2} \\ \{I_2, B, -B, -I_2\} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 & B \text{ matrice de type 2} \end{cases} \quad (5.178)$$

S'il n'y a pas de matrice de type 2, on a

$$P^{-1}GP \subset \left\{ I_2, -I_2, \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j & 0 \\ 0 & -j^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -j^2 & 0 \\ 0 & -j \end{pmatrix} \right\} \quad (5.179)$$

On ne peut pas avoir une matrice de type 3 ou 5 car $\pm ij$ et $\pm ij^2$ ne sont pas des valeurs propres possibles. Donc

$$G = \begin{cases} \{I_2, C, C^2\} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & C \text{ matrice de type 3} \\ \{I_2, D, D^2, D^3, D^4, D^5\} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & D \text{ matrice de type 5} \end{cases} \quad (5.180)$$

Notons que dans le deuxième cas, D^2 est de type 3.

On a donc bien $|G| \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$. ■

Solution 5.27. Si u est diagonalisable, la famille des vecteurs propres est génératrice. En prenant un sous-espace de E de base \mathcal{B} , on complète avec des vecteurs propres, ce qui forme un sous-espace stable par u .

Réciproquement, soit

$$F = \bigotimes_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \text{id}) \quad (5.181)$$

stable par u . F admet un supplémentaire stable qu'on nommera G . Si $G \neq \{0\}$, $u|_G$ admet nécessairement un vecteur propre, or les vecteurs propres sont dans $F \setminus \{0\}$; absurde. Donc $G = \{0\}$ et $E = F$ donc u est diagonalisable. ■

Solution 5.28. Plus généralement, soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{k,l}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On définit

$$M = B \otimes A = \begin{pmatrix} b_{1,1}A & \dots & b_{1,p}A \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p,1}A & \dots & b_{p,p}A \end{pmatrix} \quad (5.182)$$

Si B est diagonalisable, il existe $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}BQ = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$. On note $Q = (q_{i,j})$ et $Q^{-1} = (q'_{i,j})$. Par produits par blocs, on a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} q'_{1,1}I_n & \dots & q'_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q'_{p,1}I_n & \dots & q'_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{=Q^{-1} \otimes I_n = (Q \otimes I_n)^{-1}} M \underbrace{\begin{pmatrix} q_{1,1}I_n & \dots & q_{1,p}I_n \\ \vdots & & \vdots \\ q_{p,1}I_n & \dots & q_{p,p}I_n \end{pmatrix}}_{Q \otimes I_n} = \text{diag}(\mu_1 A, \dots, \mu_p A) = M_1 \quad (5.183)$$

Si de plus A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors

$$\text{diag}(P^{-1}, \dots, P^{-1}) M_1 \text{diag}(P, \dots, P) = \text{diag}(\mu_1, \lambda_1, \dots, \mu_1, \lambda_n, \dots, \mu_p \lambda_1, \dots, \mu_p \lambda_n) \quad (5.184)$$

Donc $B \otimes A$ est diagonalisable et $\text{Sp}(B \otimes A) = \{\lambda_i \mu_j | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p\}$. ■

Remarque 5.20. On a $\text{Tr}(B \otimes A) = \text{Tr}(B) \times \text{Tr}(A)$ et $\det(B \otimes A) = \det(B)^n \det(A)^p$.

Remarque 5.21. Si B est diagonalisable et non nulle, si $B \otimes A$ est diagonalisable, il existe $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $\mu_i \neq 0$ et $\mu_i A$ est diagonalisable (restriction à un sous-espace stable d'un endomorphisme diagonalisable) donc A est diagonalisable.

Solution 5.29.

1. On note (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{C}^n et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associé à A .

Si $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $F_k = \text{Vect}(e_k, \dots, e_{n-k+1})$. On a $u(e_k) = x_k e_{n-k+1}$ et $u(e_{n-k+1}) = x_{n-k+1} e_k$ donc F_k est stable par u . Ainsi, $\text{mat}_{(e_k, e_{n-k+1})}(u|_{F_k}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{n-k+1} \\ x_k & 0 \end{pmatrix}$.

Étudions, pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$. On a $\chi_M = X^2 - ab$.

Si $ab \neq 0$, on note λ une racine carrée de ab sur \mathbb{C} . On a $\chi_M(X - \lambda)(X + \lambda)$ qui est scindé à racines simples donc M est diagonalisable et semblable à $\text{diag}(\lambda, -\lambda)$.

Si $ab = 0$: si $a = b = 0$ alors $M = 0$. Si a ou $b \neq 0$, alors M n'est pas diagonalisable puisque si elle l'était, comme sa seule valeur propre est 0, elle serait semblable donc égale à 0 ce qui n'est pas. Donc A est diagonalisable si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, x_k et x_{n-k+1} non nuls ou $x_k = 0 = x_{n-k+1}$.

Si $n = 2m + 1$, on fait le même raisonnement avec $u(e_m) = x_m e_m$.

2. $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $(u_{|F_k}^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

Soit $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Si $x_k x_{n+1-k} \neq 0$, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda^2 = x_k x_{n+1-k}$. Dans une base de vecteurs propres \mathcal{B} , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u_{|F_k}^p) = \begin{pmatrix} \lambda^p & 0 \\ 0 & (-\lambda)^p \end{pmatrix} \quad (5.185)$$

Cela converge si et seulement si $|\lambda| < 1$ si et seulement si $|x_k x_{n+1-k}| < 1$.

Si $x_k = x_{n+1-k} = 0$, alors pour tout $p \geq 2$, $u_{|F_k}^p = 0$ donc on a convergence.

■

Solution 5.30.

1. On a

$$\text{mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(\varphi) = \text{diag}(-n, 1 - n, \dots, 0) \quad (5.186)$$

donc les valeurs propres sont $(k - n)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$. On a $n + 1$ valeurs propres distinctes donc φ est diagonalisable et les sous-espaces propres sont de dimension 1. Les vecteurs propres sont les (X^k) pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

2. Si $\varphi(P) = kP$, alors $\deg(P) = k$. Si $P = \sum_{i=0}^k a_i X^i$ donc

$$XP' - nP'' - kP = 0 = \sum_{i=0}^{k-2} (ia_i - n(i+1)(i+2) - ka_i) X^i - a_{k-1} X^{k-1} \quad (5.187)$$

Ainsi, par récurrence, pour tout $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor\}$, $a_{k-(2p+1)} = 0$ et pour tout $p \in \{0, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$,

$$a_{k-2p} = \frac{n^p(k-2p+1) \dots (k-1)k}{(-2p) \dots (-4)(-2)} a_k = \frac{n^p(-1)^p}{2^p p!} \times \frac{k!}{(k-2p)!} a_k \quad (5.188)$$

donc les vecteurs propres correspondent aux polynômes ayant ces coefficients. ■

Solution 5.31.

1. On a

$$A = aI_3 + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_C + b \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_B \quad (5.189)$$

avec $B = C^2$ et C est la matrice compagnon du polynôme $X^3 - 1$, donc $\chi_C = X^3 - 1$. Ainsi, C est diagonalisable sur \mathbb{C} et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(C) = \{1, j, j^2\}$. On a

$$\begin{aligned} C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} &= j \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix} \\ C \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} &= j^2 \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.190)$$

donc si

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \quad (5.191)$$

alors on a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a + bj^2 + cj & 0 \\ 0 & 0 & a + bj + cj^2 \end{pmatrix} \quad (5.192)$$

et

$$\boxed{\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{1, a + cj + bj^2, a + bj + cj^2\}} \quad (5.193)$$

2. On a

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (a + bj^2 + cj)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a + bj + cj^2)^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad (5.194)$$

Tout d'abord, on a $|a + cj + bj^2| \leq |a| + |b| + |c| = 1$ et on a égalité si et seulement si a, cj et bj^2 ont le même argument si et seulement si $\{a, b, c\} \in \{\{1, 0, 0\}, \{0, 1, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$.

Si $a = 1$ et $b = c = 0$, la suite $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Si $(b = 1 \text{ et } a = c = 0)$ ou $(c = 1 \text{ et } a = b = 0)$, $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Sinon,

$$\boxed{A^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}} \quad (5.195)$$

■

Solution 5.32.

1. On vérifie en calculant les premiers termes puis par récurrence que

$$\boxed{A^k = \begin{pmatrix} B^k & \sum_{i=1}^k B^{i-1}CD^{k-i} \\ 0 & D^k \end{pmatrix}} \quad (5.196)$$

2. On a

$$\mu_A(A) = 0 = \begin{pmatrix} \mu_A(B) & \star \\ 0 & \mu_A(D) \end{pmatrix} \quad (5.197)$$

donc $\mu_A(B) = \mu_A(D) = 0$. Ainsi, $\mu_B \mid \mu_A$ et $\mu_D \mid \mu_A$ donc $\mu_B \vee \mu_D \mid \mu_A$.

Si B et D sont de tailles 1, $\chi_A(X) = (X - b)(X - d)$ d'où $\mu_B = X - b$ et $\mu_D = X - d$.

Si $b \neq d$, $X - b$ et $X - d$ divise μ_A donc $\mu_A \mid \chi_A$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

Si $b = d$, si $c = 0$ on a $\mu_A = X - b$ donc $\mu_A \mid \mu_B \mu_D = (X - b)^2$. Si $c \neq 0$, $\mu_A = X - b$ ou $\mu_A = (X - b)^2$ et $A - bI_n \neq 0$ donc $\mu_A = (X - b)^2$.

3. Si $C = 0$, on a $\mu_A = \mu_B \vee \mu_D$.

4. Si $B = D$ et $C = I_{n_1}$, on a $A^0 = I_{n_1+n_2}$ et pour $k \geq 1$,

$$A^k = \begin{pmatrix} B^k & kB^{k-1} \\ 0 & B^k \end{pmatrix} \quad (5.198)$$

Ainsi

$$P(A) = \begin{pmatrix} P(B) & P'(B) \\ 0 & P(B) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.199)$$

si et seulement si $P(B) = P'(B) = 0$ donc $\mu_B \mid P$ et $\mu_B \mid P'$ donc $\mu_B \mid P \vee P'$.

On a

$$\mu_B^2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 2\mu_B \mu'_B(B) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (5.200)$$

donc $\mu_A \mid \mu_B^2$.

On décompose $\mu_B = (X - \lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - \lambda_r)^{m_r}$. On a $P(A) = 0$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, λ_i est racine de P d'ordre plus grand que $m_i + 1$.

5. On prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.201)$$

On a

$$B = D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.202)$$

$\mu_B = \mu_D = X^2$, et $\mu_A \mid X^3$. Or $u^2(e_4) \neq 0$ donc $\mu_A = X^3 \neq X^2 = \mu_B \vee \mu_D \neq X^4 = \mu_B \mu_D$.

■

Solution 5.33. On décompose sur \mathbb{C} : $P(X) - \lambda = \alpha \prod_{i=1}^m (X - \mu_i)$ avec $\alpha \neq 0$. On a

$$\underbrace{g - \lambda id}_{\substack{\text{non inversible} \\ \text{(respectivement non injectif)}}} = \alpha \prod_{i=1}^m (f - \mu_i id) \quad (5.203)$$

donc il existe $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $f - \mu_i id$ est non inversible (respectivement non injectif), d'où le résultat. ■

Solution 5.34.

1. Soit (f_1, \dots, f_r) une base de V et $x \in E \setminus \{0\}$. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{K}^r$ tels que $\alpha_1 f_1(x) + \dots + \alpha_r f_r(x) = 0$. Or V est un sous-espace, donc $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r \in V$ et $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r \notin GL(E)$ car $x \neq 0$. D'où $\alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_r f_r = 0$ et donc $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ car (f_1, \dots, f_r) est une base de V .

Ainsi $(f_1(x), \dots, f_r(x))$ est libre donc $r = \dim(V) \leq \dim(E)$.

2. Si $\dim(V) = 1$, alors $V = \mathbb{C}f$ avec $f \in GL(E)$. Si $\dim(V) \geq 2$, soient $(f, g) \in V^2$ tels que (f, g) soit libre alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $f + \alpha g \neq 0$ et $f + \alpha g \in V \setminus \{0\}$. Or $f + \alpha g = g(g^{-1} \circ f + \alpha id)$. Pour $\alpha \in \text{Sp}(-g^{-1} \circ f)$ (existe car on est dans \mathbb{C}), on obtient une contradiction. Donc de même, $V = \mathbb{C}f$ avec $f \in GL(E)$.

3. Comme $\dim(E) = 2$, on a $\dim(V) \leq 2$. Si $\dim(V) = 1$, comme précédemment, on a $V = \mathbb{R}f$ avec $f \in GL(E)$. Si $\dim(V) = 2$, soit (f, g) une base de V . D'après ce qui précède, on a $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(g^{-1} \circ f) = \emptyset$. Soit \mathcal{B} une base de E et $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ et $B = \text{mat}_{\mathcal{B}}(g)$. On écrit $\chi_{A^{-1}B} = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})$ avec $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$. $A^{-1}B$ est diagonalisable sur \mathbb{C} et semblable à $\text{diag}(\lambda, \bar{\lambda})$ et $\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}$ est semblable sur \mathbb{C} à $\text{diag}(i, -i)$ semblable sur \mathbb{R} à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc

$\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta}$ est semblable sur \mathbb{R} à $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que

$$A^{-1}B = P \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} P^{-1} \quad (5.204)$$

Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda A + \mu B = A(\lambda I_2 + \mu A^{-1}B) = \underbrace{AP}_{\in GL_2(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} \lambda + \alpha\mu & -\beta \\ \beta & \lambda + \alpha\mu \end{pmatrix} \underbrace{P^{-1}}_{\in GL_2(\mathbb{R})} \quad (5.205)$$

avec $\beta > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

4. Avec les notations précédentes, si $(A, B) \in V^2$ est libre, on a

$$i \in \text{Sp} \left(\frac{A^{-1}B - \alpha I_2}{\beta} \right) = \text{Sp} ((BA)^{-1}(B - \alpha A)) \quad (5.206)$$

et on pose $A' = \beta A \in V$ et $B' = B - \alpha A \in V$.

■

Solution 5.35.

1. En notant $c_{i,j}$ les cofacteurs d'indice (j, i) , on a

$$[\text{com}(\lambda I_n - A)^T]_{i,j} = (-1)^{i+j} c_{j,i} (\lambda - I_n) \quad (5.207)$$

En développant, on obtient des polynômes en λ de degré plus petit que $n - 1$. En regroupant selon les puissances de λ , on a

$$\boxed{\text{com}(\lambda I_n - A)^T = M_0 + M_1 \lambda + \cdots + \lambda^{n-1} M_{n-1}} \quad (5.208)$$

2. On a $(\lambda I_n - A) \text{com}(\lambda I_n - A)^T = \det(\lambda I_n - A) I_n = \chi_A(\lambda) I_n$

En identifiant les coefficients, on a

$$\left\{ \begin{array}{lcl} M_{n-1} & = & I_n \\ M_{n-2} & = & A + a_{n-1} I_n \\ M_{n-3} & = & A^2 + a_{n-1} A + a_{n-2} I_n \\ \vdots & & \\ M_{n-k} & = & A^{k-1} + a_{n-1} A^{k-2} + \cdots + a_{n-k+1} I_n \\ \vdots & & \\ M_0 & = & A^{n-1} + a_{n-1} A^{n-2} + \cdots + a_1 I_n \end{array} \right. \quad (5.209)$$

et $-AM_0 = a_0 I_n$. En reportant, on a bien $\chi_A(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$: on a une preuve du théorème de Cayley-Hamilton.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On forme $\lambda I_n - A = (c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda))$ avec

$$c_j(\lambda) = \begin{pmatrix} -a_{1,j} \\ \vdots \\ -a_{j-1,j} \\ \lambda - a_{j,j} \\ -a_{j+1,j} \\ \vdots \\ -a_{n,j} \end{pmatrix} \quad (5.210)$$

On a $\chi_A(\lambda) = \det(c_1(\lambda), \dots, c_n(\lambda))$. \det étant une forme n -linéaire, on a

$$\chi'_A(\lambda) = \sum_{k=1}^n \det(c_1(\lambda), \dots, c_{k-1}(\lambda), c'_k(\lambda), c_{k+1}(\lambda), \dots, c_n(\lambda)) \quad (5.211)$$

En développant le terme k par rapport à la k -ième colonne, on trouve qu'il vaut $c_{k,k}(\lambda I_n - A)$.

Ainsi,

$$\boxed{\chi'_A(\lambda) = \text{Tr}(\text{com}(\lambda I_n - A)^\top)} \quad (5.212)$$

4. On a donc $a_1 + 2a_2\lambda + \dots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2} + n\lambda^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \text{Tr}(M_k)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (par linéarité de Tr). Donc pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $\text{Tr}(M_k)$, $\text{Tr}(M_k) = (k+1)a_{k+1}$ (et $\text{Tr}(M_{n-1}) = \text{Tr}(I_n) = n$). On a $\text{Tr}(M_{n-2}) = (n-1)a_{n-1} = \text{Tr}(A) + na_{n-1}$ donc $a_{n-1} = \text{Tr}(A)$. Puis $\text{Tr}(M_{n-3}) = (n-2)a_{n-2} = \text{Tr}(A^2) + a_{n-1} \text{Tr}(A) + a_{n-2}n$ donc $a_{n-2} = -\frac{\text{Tr}(A^2)}{2} + \frac{\text{Tr}(A)^2}{2}$. De proche en proche, on a $a_{n-k} = f_k(\text{Tr}(A), \dots, \text{Tr}(A^k))$ avec f_k indépendante de A .

5. D'après ce qui précède, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k = b_k$ car f est indépendante de A . Donc

$$\chi_A = \chi_B.$$

■

Remarque 5.22. Si $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(A^2) = \dots = \text{Tr}(A^n) = 0$, alors $\chi_A = \chi_0 = X^n$ et A est nilpotente. On peut le vérifier à la main sur \mathbb{C} : si $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ sont les valeurs propres non nulles distinctes de A et m_i la multiplicité de λ_i dans χ_A , alors on a le système

$$\begin{cases} \text{Tr}(A) &= m_1\lambda_1 + \dots + m_r\lambda_r &= 0 \\ \text{Tr}(A^2) &= m_1\lambda_1^2 + \dots + m_r\lambda_r^2 &= 0 \\ \vdots & \\ \text{Tr}(A^r) &= m_1\lambda_1^r + \dots + m_r\lambda_r^r &= 0 \end{cases} \quad (5.213)$$

donc

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{pmatrix} = 0 \quad (5.214)$$

et la matrice est inversible car les λ_i sont distincts non nuls. Donc $m_1 = \dots = m_r = 0$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$.

Solution 5.36. On définit, pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\bar{A} = (\overline{a_{i,j}}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Comme p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps. On a $\chi_A \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ donc il existe \mathbb{L} un sur-corps de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où χ_A est scindé sur \mathbb{L} . On écrit $\chi_A = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{L}$. On peut trigonaliser \bar{A} sur \mathbb{L} et on a $\text{Tr}(\bar{A}^p) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^p$. Or la caractéristique de \mathbb{L} vaut p donc on a $(x + y)^p = x^p + y^p$ (binôme de Newton et utiliser le fait que $p \mid \binom{p}{k}$ pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$). Ainsi,

$$\text{Tr}(\bar{A}^p) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^p = \text{Tr}(\bar{A})^p \quad (5.215)$$

et on peut appliquer le petit théorème de Fermat : on a bien $\text{Tr}(\bar{A}^p) = \text{Tr}(\bar{A})$ et en remontant dans \mathbb{Z} ,

$$\boxed{\text{Tr}(A^p) \equiv \text{Tr}(A)[p]} \quad (5.216)$$

■

Solution 5.37. Si on a (i), soit x un vecteur propre associé à $\rho(u) = \rho e^{i\theta}$. On a $\|u(x)\| = \|\rho(u)x\| = \rho(u)\|x\|$ et comme $x \neq 0$, on a $\rho(u) \leq \|\rho(u)\| < 1$ d'où (ii).

Si (ii), on utilise la décomposition de Dunford $u = n + d$ avec n nilpotent, d diagonalisable et $dn = nd$. Soit $m = \dim(E)$. Pour tout $p \geq m$, on a

$$u^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} n^k d^{p-k} = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} n^k \underbrace{d^{p-k}}_{\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0} \quad (5.217)$$

En effet, on a $k \geq m-1$ fixé, il existe une base \mathcal{B} de E telle que

$$\binom{p}{k} \text{mat}_{\mathcal{B}}(d^p) = \binom{p}{k} \text{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_m^p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0 \quad (5.218)$$

car $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et

$$\binom{p}{k} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!} = \underset{p \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{\rho(u)^p} \right) \quad (5.219)$$

donc on a (iii).

Si (iii), soit x un vecteur propre associé à $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $u^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ donc en particulier, $u^p(x) = \lambda^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, donc $\rho(u)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et $\rho(u) \geq 0$ donc $\rho(u) < 1$. Posons encore $u = d+n$ la décomposition de Dunford de u . Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ base de E dans laquelle les coefficients de $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(n)$ sont en module $\leq \varepsilon$. Définissons sur E

$$\left\| \sum_{i=1}^m x_i e_i \right\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \quad (5.220)$$

Soit $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ triangulaire supérieure avec $m_{ii} = \lambda_i$ et pour tout $j \neq i$, $|m_{i,j}| < \varepsilon$.

Soit donc $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \in \mathbb{C}^m$, on a

$$\|Mx\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \underbrace{\left| \sum_{j=1}^m m_{i,j} x_j \right|}_{(|\lambda_i| + (m-1)\varepsilon) \|x\|_{\infty}} \quad (5.221)$$

donc

$$\|u\| \leq \underbrace{\rho(u)}_{<1} + (m-1)\varepsilon \quad (5.222)$$

et on choisit

$$\varepsilon < \frac{1 - \rho(u)}{\underbrace{m-1}_{>0}} \quad (5.223)$$

d'où $\|u\| < 1$ et donc on a (i) et finalement on a bien l'équivalence. ■

Remarque 5.23. $u \mapsto \rho(u)$ n'est pas une norme car pour u nilpotente non nulle, $\rho(u) = 0$.

Solution 5.38. Supposons (i), soit Y un vecteur propre de A avec $AY = \lambda Y$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $BA^k Y = \lambda^k BY$ et il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda^{k_0} BY \neq 0$ et $BY \neq 0$ donc on a (ii).

Si (ii), supposons qu'il existe $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $\varphi = 0$. On note

$$\chi_A = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{m_i} \quad (5.224)$$

avec les λ_i distincts. Alors $Y = \sum_{i=1}^r Y_i$ où $Y_i \in \ker(A - \lambda_i I_n)$. Il existe $i_0 \in \{1, \dots, r\}$ tel que $Y_{i_0} \neq 0$ car $Y \neq 0$. On a alors, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$B \exp(tA)Y = \sum_{i=1}^r B \exp(t\lambda_i)Y_i = 0 \quad (5.225)$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, r-1\}$, on a $\varphi^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^r B \lambda_i^k \exp(t\lambda_i)Y_i = 0$. Pour $t = 0$ on a $\sum_{i=1}^r \lambda_i^k B Y_i = 0$ ce qui, pour $t = 0$, donne le système

$$\begin{cases} BY_1 + \dots + BY_r & = 0 \\ \lambda_1 BY_1 + \dots + \lambda_r BY_r & = 0 \\ & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} BY_1 + \dots + \lambda_r^{r-1} BY_r & = 0 \end{cases} \quad (5.226)$$

Pour tout $P \in \mathbb{C}_{r-1}[X]$, on a donc $\sum_{i=1}^r P(\lambda_i) B Y_i = 0$. Pour $i \in \{0, \dots, r-1\}$ et $P = \prod_{i \neq j} \frac{(X - \lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$, on obtient pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, $B Y_i = 0$. En particulier, $B Y_{i_0} = 0$ et Y_{i_0} est un vecteur propre de A car non nul. C'est une contradiction. On a donc (iii).

Soit $Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, supposons que pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $BA^k Y = 0$. Soit $k \geq n$, il existe $(Q_k, R_k) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que

$$X^k = Q_k \chi_A + R_k \quad (5.227)$$

et le théorème de Cayley-Hamilton donne donc $A^k = R_k(A)$ d'où $BA^k Y = BR_k(A)Y = 0$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$B \exp(tA)Y = B \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} Y \quad (5.228)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k (BA^k Y)}{k!} \quad (5.229)$$

$$= 0 \quad (5.230)$$

Par contraposée, on a bien ce qu'il faut, d'où l'équivalence. ■

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. A $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x \cos(t) + y \sin(2t)\end{aligned}$$

est bornée, donc le sup sur \mathbb{R} existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au sup sur \mathbb{R} .

2. Si $|x| + |y| \leq 1$, alors $N(x, y) \leq 1$ donc on a la première inclusion.

Si $N(x, y) \leq 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leq 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leq \left| x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x \frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leq 2 \quad (6.1)$$

et donc $|y| \leq 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. On fixe $(x, y) \in S_N(0, 1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π -périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limiter à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ .

On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leq x |\cos(t)| + y |\sin(2t)| = |\varphi(-t)| \quad (6.2)$$

et $-t \in [0, \pi]$. Donc le sup est atteint sur $[0, \pi]$.

On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq \varphi(t) = \underbrace{x \cos(t)}_{\in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]} + y \sin(2t) \leq \underbrace{x \cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]} + y \sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t) \quad (6.3)$$

Donc le sup est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le sup (existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le sup sur \mathbb{R} qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.

On a donc $x \cos(t_0) + y \sin(2t_0) = 1$ et $-x \sin(t_0) + 2y \cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0 , en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.

Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que x et y s'écrivent de la façon demandée, alors t_0 est l'unique point satisfaisant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$. Mais alors le sup de φ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est atteint en un point t_1 qui vérifie les mêmes choses, donc $t_1 = t_0$ d'où $N(x, y) = 1$.

■

Solution 6.2.

1. Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur E

$$\begin{aligned}\varphi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt\end{aligned}$$

Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f, f)}$ et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. Pour $x \in [0, 1]$, écrire $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, utiliser Cauchy-Schwarz avec f' et 1 puis que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}\sqrt{a+b}$, pour enfin passer au sup sur x .
3. Utiliser, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction

$$\begin{aligned}f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n\end{aligned}$$

■

Solution 6.3. Si f est ouverte, $f(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel ouvert de \mathbb{R}^p . Donc f est surjective.

Si f est surjective, on prend F un supplémentaire de $\ker(f)$ dans \mathbb{R}^n avec $\dim(\ker(f)) = n - p$ et $\dim(F) = p$. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F et (e_{p+1}, \dots, e_n) une base de $\ker(f)$. On vérifie que $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une base de \mathbb{R}^p . On définit

$$\begin{aligned}N_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i^n x_i e_i &\mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\end{aligned}$$

norme sur \mathbb{R}^n et

$$\begin{aligned}N_2 : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ \sum_i^p y_i f(e_i) &\mapsto \max_{1 \leq i \leq p} |y_i|\end{aligned}$$

norme sur \mathbb{R}^p .

Soit Θ un ouvert de \mathbb{R}^n , soit $y_0 \in f(\Theta)$, il existe $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. Si $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, alors $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. Comme Θ est un ouvert, il existe $r_0 > 0$ tel que

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta \quad (6.4)$$

Soit $y = \sum_{i=1}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, si $N_2(y - y_0) < r_0$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ et

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \quad (6.5)$$

avec $N_1(x - x_0) = \max_{1 \leq i \leq p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. Ainsi $x \in \Theta$ et $y \in f(\Theta)$, donc $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ et $f(\Theta)$ est un ouvert. ■

Solution 6.4.

1. Classique.

2.

$$|f(x)| \leq |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leq |f(0)| + \kappa(f)x \leq N(f) \quad (6.6)$$

car $x \leq 1$, donc $N_\infty \leq N$. Pour la non-équivalence, prendre

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^n \end{aligned}$$

3. On a $|f(0)| \leq N_\infty(f)$ donc $N(f) \leq N'(f)$. Ensuite, $N_\infty \leq N$ donne $N' \leq N + \kappa \leq 2N$. Donc N et N' sont équivalentes. ■

Remarque 6.1. Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement.

On prend $(e_i)_{i \in I}$ une base (de Hamel), $J = (i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset I$ dénombrable. Si $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, on peut vérifier que

$$N_1(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_{i_n}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i| \quad (6.7)$$

et

$$N_2(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n |x_{i_{2n}}| + \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n+1} |x_{i_{2n+1}}| + \sum_{i \in I \setminus J} |x_i| \quad (6.8)$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n, \alpha) \subset G$. Soient $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p} < \alpha$. Alors

$$\left\| T_{i,j} \left(\frac{\lambda}{p} \right) - I_n \right\|_\infty = \left| \frac{\lambda}{p} \right| < \alpha \quad (6.9)$$

donc $T_{i,j}(\lambda) \in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda) = \left(T_{i,j} \left(\frac{\lambda}{p} \right) \right)^p \in G \quad (6.10)$$

Soit $\delta = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} = 1$ donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} - 1| < \alpha$.

On a alors

$$\left\| D_n \left(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}} \right) - I_n \right\|_\infty < \alpha \quad (6.11)$$

donc $D_n(\delta) = D_n(\rho^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\theta}{p}})^p \in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G = GL_n(\mathbb{C})$. ■

Remarque 6.2. *C'est faux sur \mathbb{R} . Contre-exemple : matrices de déterminant positif.*

Solution 6.6. Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $h \in E$ avec $\|h\| \leq \alpha$ et $\|f(h)\| > \varepsilon_0$. On prends $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\| \leq 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leq M} > n\varepsilon_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x \in E$,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x+h) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} f(x) + f(h) = f(x) \quad (6.12)$$

donc f est continue.

On a $f(px) = p(fx)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x) = f(px) = pf(x)$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ donc pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$. Soit $\lambda \in \mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \lambda$.

Comme f est continue, on a

$$f(\lambda x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n x) \quad (6.13)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n f(x) \quad (6.14)$$

$$= \lambda f(x) \quad (6.15)$$

Donc f est linéaire. ■

Remarque 6.3. Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i \in I}$ une \mathbb{Q} -base de \mathbb{R} ($0 \in I$). On définit

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2} \sum_{i \in I \setminus \{0\}} \lambda_i e_i \quad (6.16)$$

f vérifie $f(x + y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \rightarrow \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. On a $\alpha(A) \subset \overline{A}$ donc $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Comme $\alpha(A)$ est un ouvert inclus dans $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.
2. Si $\beta(A) = \overline{\overline{A}}$, on montre aussi que $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. On a donc $A, \overline{A}, \overset{\circ}{A}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ et $\overline{\overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}}$ et c'est tout. ■

Solution 6.8.

1. Si $d_A = d_B$,

$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B} \quad (6.17)$$

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_1\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de l'inf). Il existe $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de la fermeture). Ainsi,

$$d_A(x) \leq \|x - a_2\| \leq \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leq d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon \quad (6.18)$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leq d_{\overline{A}}(x)$. Comme $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leq d_A$, on a $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.

2. Soit $x \in A$, on a $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leq \rho(A, B)$ donc $\sup_{x \in A} d_B(x) \leq \rho(A, B)$, de même pour $\sup_{y \in B} d_A(y)$ donc on a une première inégalité.

Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x - a\| \leq d_A(x) + \varepsilon$ et $\|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon$. On a alors

$$d_A(x) \leq \|x - a\| \leq \|a - b\| + \|x - b\| \leq d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A, B) \quad (6.19)$$

Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leq d_B(x) + \alpha(A, B)$. De même, $d_B(x) \leq d_A(x) + \alpha(A, B)$ donc $\rho(A, B) \leq \alpha(A, B)$. ■

Solution 6.9.

1. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car $\lim_{z \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \rightarrow x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur \mathbb{C} , on a $y = P(x) \in P(F)$.

2. Soit Θ un ouvert de \mathbb{C} , soit $y \in P(\Theta)$, $\exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x, r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x - x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a \prod_{i=1}^n (X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominant de P . Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi

$$|Q(x)| = |y - y'| \geq |a|r^n \quad (6.20)$$

Par contraposée, si $|y - y'| \leq \frac{|a|r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x' - x| < r$. Ainsi, $x' \in B(x, r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert. ■

Solution 6.10.

1. Si $P \notin \mathcal{S}$, il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tel que $P(z_0) = 0$ et $|\Im(z_0)|^n > 0 = P(z_0)$. Par contraposée, si pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$, alors $P \in \mathcal{S}$.

Réciproquement, si $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i) \in \mathcal{S}$ avec $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ réels, soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On a

$$|P(z)| = \prod_{i=1}^n |a - \lambda_i + ib| \geq |b|^n \quad (6.21)$$

2. Soit $(P_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ telle que $P_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} P \in F$. Soit $z \in \mathbb{C}$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|P_p(z)| \geq |\Im(z)|^n$ donc quand $p \rightarrow +\infty$, $|P(z)| \geq |\Im(z)|^n$ donc $P \in \mathcal{S}$ et \mathcal{S} est fermé.
3. Soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de matrice trigonalisable sur \mathbb{R} qui converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note χ_p le polynôme caractéristique de M_p . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\chi_p \in \mathcal{S}$ et $\chi_p \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} \chi_M$. Comme \mathcal{S} est fermé, $\chi_M \in \mathcal{S}$ et M est trigonalisable sur \mathbb{R} .

■

Solution 6.11.

1. φ est linéaire et $\dim(\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) = m + n - 1 = \dim(\mathbb{K}_{n+m-1}[X])$.

Si φ est bijective, elle est surjective et il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $UA + BV = 1$ et d'après le théorème de Bézout, on a $A \wedge B = 1$.

Réciproquement, si φ n'est pas surjective, il existe $(U, V) \in (\mathbb{K}_{m-1}[X] \times \mathbb{K}_{n-1}[X]) \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\varphi(U, V) = 0$ d'où $AU = -BV$. Soit $\delta = A \wedge B$, on écrit $A = \delta A_1$ et $B = \delta B_1$ avec $A_1 \wedge B_1 = 1$ et on a $A_1 U = -B_1 V$. D'après le théorème de Gauss, on a $A_1 \mid V$ et $B_1 \mid U$. Si $U = 0$, on a $V = 0$ et de même si $V = 0$, on a $U = 0$. On peut donc supposer $U \neq 0$ et $V \neq 0$, et on a alors $\deg(A_1) \leq \deg(V) \leq n - 1 < n = \deg(A)$ mais $A = \delta A_1$ donc $\deg(\delta) \geq 1$ et $A \wedge B \neq 1$.

2. Φ est continue car $R_{A,B}$ est un polynôme en les coefficients de A et B .
3. Comme on est dans \mathbb{C} , $\Delta = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \wedge P' = 1\} = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid R_{P,P'} \neq 0\}$. $\Phi_{P,P'}$ est continue d'après la question précédente, $\delta = \Phi_{P,P'}^{-1}(\mathbb{C}^*)$ donc Δ est ouvert.

Sur \mathbb{R} , on n'a pas la caractérisation de scindé à racines simples si et seulement si $P \wedge P' = 1$ (contre-exemple : $P = X^2 + 1$). Dans $\mathbb{R}_3[X]$, X est scindé à racines simples et $X(1 + \varepsilon X)^2 \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} X$ et $-\frac{1}{\varepsilon}$ est racine double, donc Δ n'est pas ouvert.

■

Remarque 6.4. On peut cependant considérer

$$\Delta_n = \{P \in \mathbb{C}_p[X] \mid P \text{ scindé à racines simples sur } \mathbb{R} \text{ et } \deg(P) = n\} \quad (6.22)$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ sont les racines (distinctes) de R sur \mathbb{R} , on choisit $\alpha_0 \in]-\infty, \lambda_1[$, $\alpha_n \in]\lambda_n, +\infty[$ et $\alpha_i \in]\lambda_i, \lambda_{i+1}[$ si $i = 1, \dots, n - 1$.

Pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a $P(\alpha_k)P(\alpha_{k+1}) < 0$ (car les racines de P provoquent des changements de signe). Soit

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ Q &\mapsto (Q(\alpha_k)Q(\alpha_{k+1}))_{0 \leq k \leq n-1}\end{aligned}$$

Ψ est continue sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\Psi(P) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$ qui est ouvert, donc il existe $r > 0$ tel que si $\|P-Q\| < r$, alors $\Psi(Q) \in (\mathbb{R}_-^*)^n$. Donc Q change n fois de signe, et admet au moins n racines. Mais $\deg(Q) = n$, donc Q est scindé à racines simples sur \mathbb{R} , donc Δ_n est ouvert dans $\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = n\}$.

Remarque 6.5.

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid M \text{ diagonalisable à racines simples}\} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \chi_M \text{ scindé à racines simples}\} \quad (6.23)$$

est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car $M \mapsto \chi_M$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et c'est aussi vrai sur \mathbb{R} .

Solution 6.12.

1. Soit

$$\begin{aligned}f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A &\mapsto A^n\end{aligned}$$

f est continue et $F = f^{-1}(\{0\})$ donc $F = \overline{F}$.

Soit $M_0 \in F$, X^n annule M_0 donc M_0 est trigonalisable : on écrit M_0 dans une base où les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit alors M_ε la même matrice dans la même base en rajoutant simplement ε en première position de la diagonale. Alors $M_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M_0$ et $M_\varepsilon \notin F$ donc $\overset{\circ}{F} = \emptyset$. Notons que cela signifie que F est dense.

2. La norme dérive du produit scalaire $(A|B) \mapsto \text{Tr}(A^\top B)$. Soit $M \in F$, on a $\|M - I_n\|^2 = \|M\|^2 + \|I_n\|^2 - 2(M|I_n)$. On a $(M|I_n) = \text{Tr}(M) = 0$ car M est nilpotente. Donc $\|M - I_n\|^2$ est minimale pour $\|M\|^2$ minimale, donc pour $M = 0 \in F$. Donc $d(I_n, F) = \|I_n\| = \sqrt{n}$ (et la distance est atteinte pour $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$).

■

Solution 6.13.

1. $A \mapsto \det(A)$ est continue et $GL_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{K}^*)$ est donc ouvert. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = A - \frac{1}{p+1}I_n$. Comme $\text{Sp}(A)$ est fini, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $p \geq N$, $\frac{1}{p+1} \notin \text{Sp}(A)$. Donc pour tout $p \geq N$, $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$, et $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$ donc $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. On fixe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$. On écrit $BA = A^{-1}(AB)A$ donc AB et BA sont semblables donc $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Comme, à B fixé, $A \mapsto \chi_{AB}$ et $A \mapsto \chi_{BA}$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a le résultat par densité. ■

Solution 6.14.

1. On a $v_p \circ (id_E - u) = (id_E - u) \circ v_p = \frac{1}{p}(id_E - u^p)$, donc $\|v_p \circ (id_E - u)\| \leq \frac{1}{p}(\|id_E\| + \|u^p\|) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.
Soit $x \in \ker(u - id_E) \cap \text{Im}(u - id_E)$, on a $u(x) = x$ et il existe $y \in E$, $x = (u - id_E)(y)$. On a $v_p(x) = \frac{1}{p}(px) = x$ et $v_p(x) = v_p \circ (u - id_E)(y) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ d'où $x = 0$. Le théorème du rang permet de conclure.
2. Soit $x \in E$, on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $\Pi(x) = x_1$ et $x_2 = (u - id_E)(y_2)$. Alors $v_p(x) = x_1 + v_p \circ (u - id_E)(y_2) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x_1 = \Pi(x)$. ■

Solution 6.15.

1. Pour tout $x \in A$, $f_n(x) \in A$ car A est convexe. Soit $(x, y) \in A^2$, on a

$$\|f_n(x) - f_n(y)\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f(x) - f(y)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x - y\| \quad (6.24)$$

Donc f_n est $(1 - \frac{1}{n})$ -lipschitzienne. On forme

$$\begin{aligned} g_n : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|f_n(x) - x\| \end{aligned}$$

qui est continue. Soit $x_n \in A$ telle que $g_n(x_n) = \min_{x \in A} g_n(x)$ (existe car A est compact et g_n continue). On a $x_n \in A$, d'où $f_n(x_n) \in A$ et

$$g_n(f_n(x_n)) = \|f_n(f_n(x_n)) - f_n(x_n)\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|f_n(x_n) - x_n\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) g_n(x_n) \quad (6.25)$$

Si $g_n(x_n) \neq 0$, alors on aurait $g_n(f(x_n)) < g_n(x_n)$ ce qui n'est pas possible. Donc $g_n(x_n) = 0$ et $f_n(x_n) = x_n$.

Soit y_n un autre point fixe, on a

$$\|f_n(x_n) - f_n(y_n)\| = \|x_n - y_n\| \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \|x_n - y_n\| \quad (6.26)$$

donc $x_n = y_n$.

2. On a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et on extrait (car A est compact) et on a

$$x_{\sigma(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} x \in A \quad (6.27)$$

On a

$$f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} = \underbrace{\frac{1}{\sigma(n)} f(x_0)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sigma(n)}\right) f(x_{\sigma(n)})}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)} \quad (6.28)$$

par continuité de f . Donc $f(x) = x$.

3. Soit $(x, y) \in A^2$, points fixes de f , et $t \in [0, 1]$, on pose $z = tx + (1 - t)y$. On a

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \quad (6.29)$$

$$\leq \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\| \quad (6.30)$$

$$\leq \|x - z\| + \|z - y\| \quad (6.31)$$

$$= (1 - t)\|x - y\| + t\|x - y\| \quad (6.32)$$

$$= \|x - y\| \quad (6.33)$$

On a donc égalité partout : $\|f(x) - f(y)\| = \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(y)\|$ et $\|f(x) - f(z)\| = \|x - z\|$, $\|f(z) - f(y)\| = \|z - y\|$ car f est 1-lipschitzienne.

Comme la norme est euclidienne, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) - f(z) = \lambda(f(z) - f(y))$ d'où $f(x) + \lambda f(y) = (\lambda + 1)f(z)$ d'où $f(z) = \frac{x + \lambda y}{\lambda + 1} = t'x + (1 - t')y$ avec $t' = \frac{1}{\lambda + 1} \in [0, 1]$. En reportant, on a

$$\|f(x) - f(z)\| = \|x - t'x - (1 - t')y\| = (1 - t')\|x - y\| = \|x - z\| = (1 - t)\|x - y\| \quad (6.34)$$

Si $x \neq y$, alors $t = t'$ et $f(z) = tx + (1 - t)y = z$.

4. Soit dans \mathbb{R}^2 , $\overline{B_{\|\cdot\|}(0,1)} = [-1,1]^2 = A$. Soit

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto (x, |x|) \end{aligned}$$

On a

$$\|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\|_\infty = \|(x_1, |x_1|) - (x_2, |x_2|)\|_\infty \quad (6.35)$$

$$= \max\{|x_1 - x_2|, ||x_1| - |x_2||\} \quad (6.36)$$

$$= |x_1 - x_2| \quad (6.37)$$

$$\leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_\infty \quad (6.38)$$

Donc f est 1-lipschitzienne, on a $f(x, y) = (y, x)$ si et seulement si $y = |x|$. Donc ici, F n'est pas convexe. ■

Solution 6.16.

1. On a pour tout $(x, y) \in E^2$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$. Pour $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on a $f(qrx) = qf(rx) = f(px) = pf(x)$ donc $f(rx) = rf(x)$. Par densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} et continuité de f , on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Donc f est linéaire.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cela ne marche pas. Contre-exemple : la conjugaison dans \mathbb{C} .

2. On étudie la série, pour x fixé de terme général

$$\|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| = \frac{1}{2^n} \|f(2^{n+1}x) - 2f(2^n x)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}} \quad (6.39)$$

qui est donc convergente. Donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3. On a $v_0(x) = f(x)$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) = g(x) - f(x)$. f étant continue, v_n l'est aussi, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme pour tout $x \in E$, $\|(v_{n+1} - v_n)(x)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$, donc g est continue.

4. On a, pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\|v_n(x + y) - v_n(x) - v_n(y)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n(x + y)) - \frac{1}{2^n} (f(2^n x) + f(2^n y)) \right\| \leq \frac{M}{2^n} \quad (6.40)$$

Donc quand $n \rightarrow +\infty$, $g(x+y) = g(x) + g(y)$.

On a pour tout $x \in E$,

$$\|g(x) - f(x)\| = \left\| \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}(x) - v_n(x) \right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|v_{n+1}(x) - v_n(x)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{2^n} = M \quad (6.41)$$

Soit maintenant h linéaire continue telle que $h - f$ soit bornée, soit $M' = \sup_{x \in E} \|h(x) - f(x)\|$.

On a donc

$$\|v_n(x) - h(x)\| = \left\| \frac{1}{2^n} f(2^n x) - \frac{1}{2^n} h(2^n x) \right\| \leq \frac{M'}{2^n} \quad (6.42)$$

car h est linéaire. Donc quand $n \rightarrow +\infty$, $g(x) = h(x)$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = g(x)$. ■

Solution 6.17. En particulier, pour $t = f(0)$, $f^{-1}(\{f(0)\}) = \{x \in E \mid f(x) = f(0)\}$ est borné (car compact). Donc il existe A tel que $f^{-1}(\{f(0)\}) \subset \overline{B(0, A)}$. Par contraposée, pour tout $x \in E$, si $\|x\| > A$, alors $f(x) \neq f(0)$.

On montre alors que $E \setminus \overline{B(0, A)}$ est connexe par arcs (faire le tour de la boule par l'extérieur).

f étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a soit pour tout $x \in E \setminus \overline{B(0, A)}$, $f(x) > f(0)$ soit $f(x) < f(0)$. Quitte à remplacer f par $-f$, on se place dans le cas $f(x) > f(0)$. Comme on est en dimension finie sur $\overline{B(0, A)}$ compact, f atteint son minimum et ce minimum est plus petit que $f(0)$, c'est donc un minimum global. ■

Remarque 6.6. C'est faux pour $n = 1$. Contre-exemple : $f = id_{\mathbb{R}}$.

Solution 6.18. Si c'était le cas, on prend un cercle \mathcal{C} compact (et connexe par arcs). $f(\mathcal{C})$ est compact connexe par arc dans \mathbb{R} . On note $f(\mathcal{C}) = [a, b]$ (avec $a < b$ car f injective). Si $x \in \mathcal{C}$ est tel que $f(x) = \frac{a+b}{2}$, on $\underbrace{f(\mathcal{C} \setminus \{x\})}_{\text{connexe par arc}} = \underbrace{[a, b] \setminus \left\{ \frac{a+b}{2} \right\}}_{\text{pas connexe par arc}}$ donc une telle fonction n'existe pas. ■

Solution 6.19.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_{l^1} = 1$ et $|K_n| = |\varphi(e_n)| \leq \|\varphi\|$ donc $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On note $M = \sup |K_n| \leq \|\varphi\|$.

Soit maintenant $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^1$. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$\left\| u - \sum_{n=0}^N u_n e_n \right\|_1 \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |u_n| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad (6.43)$$

(reste d'une série convergente). Par continuité de φ , on a donc

$$|\varphi(u)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n| |K_n| \leq M \|u\|_1 \quad (6.44)$$

Ainsi, $\|\varphi\| \leq M$ et donc $\|\varphi\| = M$.

2. F est linéaire et une isométrie d'après la question précédente, donc injective.

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty$. On définit

$$\begin{aligned} \varphi : l^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n K_n \end{aligned}$$

Elle est bien définie car $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Elle est linéaire, et continue car $|\varphi(u)| \leq \|(K_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty \|u\|_1$.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(e_n) = K_n$. Donc $F(\varphi) = (K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et F est surjective. Donc F est une isométrie bijective et le dual topologique de l^1 est équivalent à l^∞ . ■

Solution 6.20.

1. Soit φ une forme linéaire non nulle telle que $K = \ker(\varphi)$. Si F est dense, φ est discontinue.

Soit $(a, b) \in (E \setminus H)^2$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H^\mathbb{N}$ qui converge vers $b - a$ (existe car H est dense). La suite $(a + x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b . Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(a + x_n) = \varphi(a) \neq 0$, et pour $t \in [0, 1]$, $\varphi(t(a + x_n) + (1 - t)(a + x_{n+1})) = \varphi(a) \neq 0$. Donc $[a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H$.

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow E \setminus H$ telle que

$$\begin{cases} \gamma(t) = \alpha_n t + \beta_n \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset E \setminus H & \text{si } t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \\ \gamma(1) = b \\ \gamma(t) = a + tx_0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases} \quad (6.45)$$

On cherche à définir α_n et β_n : on veut $\gamma(1 - \frac{1}{n}) = a + x_n$ et $\gamma(1 - \frac{1}{n+1}) = a + x_{n+1}$ (pour la continuité en se raccordant au x_n). En résolvant le système, on trouve $\alpha_n = n(n+1)(x_n - x_{n+1})$ et $\beta_n = a + x_n - (n-1)(n+1)(x_n - x_{n+1})$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$: $\|x_n + a - b\| < \varepsilon$ et pour tout $n \geq N$, pour tout $t \in [1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}]$, $\gamma(t) \in [a + x_n, a + x_{n+1}] \subset B(b, \varepsilon)$ par convexité de la boule. Donc $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = b$ et γ est continue. Donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

2. Soit φ une forme linéaire telle que $\ker(f) = H$ est fermé. Alors φ est continue (à redémontrer). Soit $x \in E \setminus H$, on a $\varphi(x)\varphi(-x) < 0$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si $E \setminus H$ était connexe par arcs, φ s'annulerait sur $E \setminus H$ ce qui n'est pas vrai. Donc $E \setminus H$ n'est pas connexe par arcs.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si H est dense alors $E \setminus H$ est connexe par arc d'après la première question. Si H est fermé, soit φ une forme linéaire continue telle que $\ker(f) = H$. Soit $(x_1, x_2) \in (E \setminus H)^2$.
 - Si $\frac{\varphi(x_1)}{\varphi(x_2)} \notin \mathbb{R}_*$, alors pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(\underbrace{tx_1 + (1-t)x_2}_{\in E \setminus H}) \neq 0$ et on peut relier directement x_1 et x_2 .
 - Sinon, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, $(\rho, \rho') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $\varphi(x_1) = \rho e^{i\theta}$ et $\varphi(x_2) = \rho' e^{i(\theta+\pi)}$. Alors $x_3 = ix_1$ est tel que $[x_1, x_3] \subset E \setminus H$ et $[x_2, x_3] \subset E \setminus H$ (on contourne l'origine par une rotation de l'angle $\frac{\pi}{2}$). Par conséquent, on peut utiliser x_3 pour relier x_1 et x_2 donc $E \setminus H$ est connexe par arcs.

■

Solution 6.21. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ((x, \sin(\frac{1}{x}))) \end{aligned}$$

φ est continue et $\Gamma) \varphi(\mathbb{R}_+^*)$ est connexe par arcs.

On a $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma'$ avec $\Gamma' = \{(0, y) \mid y \in [-1, 1]\}$. En effet, pour tout $y \in [-1, 1]$, on pose $x_k = \frac{1}{\arcsin(y) + 2k\pi}$. On a $\sin(\frac{1}{x_k}) = y \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y$ donc $(0, y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} (x_k, \sin(\frac{1}{x_k})) \in \bar{\Gamma}$.

Réciproquement, si $(x, y) \in \bar{\Gamma}$, il existe $(x_k) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ avec $x = \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k$ et $y = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sin(\frac{1}{x_k})$. Si $x > 0$, par continuité, $y = \sin(\frac{1}{x})$ et $(x, y) \in \Gamma$. Si $x = 0$, $y \in [-1, 1]$ donc $(x, y) \in \Gamma'$.

Si $\bar{\Gamma}$ est connexe par arcs, il existe

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \bar{\Gamma} \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

continue telle que $\gamma(0) = (0, 0)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{\pi}, 0)$. La première projection $t \mapsto x(t)$ est continue avec $x(0) = 0$ et $x(1) = \frac{1}{\pi}$. On définit maintenant $t_1 = \sup\{t \in [0, 1] \mid x(t) = 0\}$. Par continuité, $x(t_1) = 0$ et donc $t_1 < 1$. Donc pour tout $t > t_1$, $x(t) > 0$ et $\gamma(t) = (x(t), \sin(\frac{1}{x(t)}))$ pour $t > t_1$ et $\gamma(t_1) = (0, y_1)$ avec $y_1 \in [-1, 1]$.

Or, -1 et 1 n'appartiennent pas simultanément à $]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. On peut supposer que $1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Comme γ est continue, il existe $t_2 > t_1$ tel que pour tout $t \in]t_1, t_2]$, $\sin(\frac{1}{x(t)}) \in]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$. Or $x(t_2) > 0$ et $x(t_1) = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $t_0 \in]t_1, t_2]$ tel que $x(t_0) = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ (théorème des valeurs intermédiaires). Mais alors $\sin(\frac{1}{x(t_0)}) = 1 \notin]y_1 - \frac{1}{2}, y_1 + \frac{1}{2}[$ ce qui contredit ce qui précède.

Donc $\bar{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs. ■

Solution 6.22.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in K$ car u_n est le barycentre de $(a, T(a), \dots, T^n(a))$ et K est convexe.

Comme K est compact, on peut extraire $u_{\sigma(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u \in K$. Alors

$$(id_E - T)(u_{\sigma(n)}) = \frac{1}{\sigma(n) + 1} (id_E - T^{\sigma(n)+1})(a) \quad (6.46)$$

d'où

$$\|(id_E - T)(u_{\sigma(n)})\| \leq \frac{1}{\sigma(n) + 1} \times 2M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (6.47)$$

avec $M = \sup_{x \in K} \|x\|$ (existe car K est compact donc borné). Par continuité de T , on a $T(u) = u$.

2. Posons $F' = \{u \in K \mid T(u) = u\}$ fermé car $K' = K \cap \left(\underbrace{(id_E - T)^{-1}\{0\}}_{\text{continu}} \right)$. Donc K' est compact et non vide d'après la première question. De plus, pour tout $(u_1, u_2) \in K'^2$, pour tout $t \in [0, 1]$, par linéarité de T , on a

$$T(tu_1 + (1-t)u_2) = tu_1 + (1-t)u_2 \quad (6.48)$$

donc K' convexe. De plus, comme $U \circ T = T \circ U$, pour tout $u \in K'$, on a $T(U(u)) = U(T(u)) = U(u)$ donc $U(u) \in K'$. On applique alors la question 1 à K' est il existe $y \in K'$: $U(y) = y$ et $T(y) = y$. ■

Solution 6.23.

1. C'est le théorème du rang car $\text{rg}(u) \leq n \leq p-2$, et $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \mid \sum_{i=1}^p \alpha_i = 0\}$ est de dimension $p-1$ donc $H \cap \ker(u) \neq \{0\}$ (formule de Grassmann).

2. On a

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i)x_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i x_i = x \quad (6.49)$$

et

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\alpha_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i + t \sum_{i=1}^p \alpha_i = 1 \quad (6.50)$$

Soit $I_+ = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i > 0\}$ et $I_- = \{i \in \{1, \dots, p\} \mid \alpha_i < 0\}$. On a $I_+ \neq \emptyset$ et $I_- \neq \emptyset$ car $\sum_{i=1}^p \alpha_i = 0$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq (0, \dots, 0)$. Soit $t \geq 0$. Pour tout $i \in I_+$, $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$. Pour $i \in I_-$, $\lambda_i + t \underbrace{\alpha_i}_{<0} \geq 0$ si et seulement si $t \leq -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}$. Prenons alors

$$t = \min_{i \in I_-} \left(-\frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right) \quad (6.51)$$

On a aussi pour tout $i \in I_-$, $\lambda_i + t\alpha_i \geq 0$ et il existe $i_0 \in I_-$ tel que $\lambda_{i_0} + t\alpha_{i_0} = 0$.

3. Par récurrence descendante, on se ramène à $n+1$ points car si x est barycentre de p points avec $p \geq n+2$, alors il est barycentre de $p-1$ points.

4. Soit $A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$ fermé et borné en dimension finie donc compact. Soit

$$\begin{aligned} f : \quad A \times K^{n+1} &\rightarrow \text{conv}(K) \\ ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (x_1, \dots, x_{n+1})) &\mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \end{aligned}$$

f est surjective et continue, donc $\text{conv}(K)$ est l'image continue d'un compact donc $\text{conv}(K)$ est compact.

■

Solution 6.24. Pour tout $u \in A_p$, $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ distincts et u est diagonalisable. Réciproquement, si u est diagonalisable et $\text{Sp}(u) \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ alors dans une base la matrice de u est diagonale avec des α_i (éventuellement plusieurs selon leur multiplicités), donc $u \in A_p$.

Si $u \in A_p$, on écrit donc le polynôme caractéristique de u

$$\chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \quad (6.52)$$

avec $0 \leq m_i \leq \dim(E) = n$ et $\sum_{i=1}^r m_i = n$. $u \mapsto \chi_u$ est continue. Pour $(m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r$ tel que $\sum_{i=1}^r m_i = n$, notons

$$A_{m_1, \dots, m_r} = \left\{ u \in A_p \mid \chi_u = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \quad (6.53)$$

et

$$\left[u \mapsto \chi_u(A_p) \right] = \left\{ \bigcup_{(m_1, \dots, m_r) \in D_{n,r}} \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \right\} \quad (6.54)$$

où

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \mid \sum_{i=1}^r m_i = n \right\} \quad (6.55)$$

Donc d'après la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires, si $(m_1, \dots, m_r) \neq (m'_1, \dots, m'_r)$, alors A_{m_1, \dots, m_r} et $A_{m'_1, \dots, m'_r}$ ne sont pas dans la même composante connexe par arcs car

$$\left[u \mapsto \chi_u \left(A_{m_1, \dots, m_r} \cup A_{m'_1, \dots, m'_r} \right) \right] = \underbrace{\left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \right\} \cup \left\{ \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{m'_i} \right\}}_{\text{pas connexe par arcs}} \quad (6.56)$$

Si $\gamma: [0, 1] \rightarrow A_p$ est continue, $t \mapsto \chi_{\gamma(t)} = a_0(t) + a_1(t)X + \dots + a_{n-1}(t)X^{n-1} + X^n$ est continue sur $[0, 1]$ et prend un nombre fini de valeurs donc est constante. $a_i: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et prend un nombre fini de valeurs donc est constante.

Soit $u_0 \in A_{m_1, \dots, m_r}$, soit $u \in A_{m_1, \dots, m_r}$, alors il existe une base \mathcal{B}_0 base de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u_0) = M_0$ soit diagonale avec des α_1 sur les m_1 premières lignes de la diagonale, α_2 sur les m_2 lignes suivantes, etc. Soit $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$. M est semblable à M_0 donc il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $M = PM_0P^{-1}$.

Or $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs, donc il existe $\varphi: [0, 1] \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ continue telle que $\varphi(0) = P$ et $\varphi(1) = I_n$. On pose alors

$$\begin{aligned} \Phi: [0, 1] &\rightarrow A_{m_1, \dots, m_r} \\ t &\mapsto \varphi(t)M_0\varphi^{-1}(t) \end{aligned}$$

Alors A_{m_1, \dots, m_r} est connexe par arcs.

Le nombre de composantes est donc égal au cardinal de

$$D_{n,r} = \left\{ (m_1, \dots, m_r) \in \{0, \dots, n\}^r \mid \sum_{i=1}^r m_i = n \right\} \quad (6.57)$$

qui vaut $\binom{m+r-1}{r-1}$ possibilités (place n points sur une droite et les séparer avec $r - 1$ barres : le nombre de points dans chaque segment donne un m_i , il y a $m + r - 1$ possibilités pour placer les $r - 1$ barres). ■

Solution 6.25.

1. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|AX|_i = \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}x_j}_{>0} \geq 0$. Si $|AX|_i = 0$ alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\underbrace{a_{i,j}}_{>0} x_j = 0$ donc $x_j = 0$, impossible car $X \neq 0$.
2. Si $|AX| = A|X|$. On a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| = \sum_{j=1}^n a_{i,j}|x_j| \quad (6.58)$$

donc les $(a_{i,j}x_j)_{1 \leq j \leq n}$ ont tous même argument. On prend $\theta = \arg(x_j)$.

3. K est fermé et borné en dimension finie : c'est un compact. On a $I_x \neq \emptyset$ car $AX \geq 0$ donc $0 \in I_x$. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I_x^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $AX - t_k X \geq 0$ donc pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $(AX - t_k X)_i \geq 0$ et par passage à la limite, $AX - tX \geq 0$ donc I_x est fermé.

Si $t \in I_x$,

$$|tX|_1 = t = \sum_{i=1}^n t \underbrace{x_i}_{\geq 0} \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j}_{=(AX)_i} \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \quad (6.59)$$

car $\sum_{j=1}^n x_j = 1$. On note $M = n \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}|$.

4. Pour tout $x \in K$, $\theta(X) \leq M$ donc θ est bien borné sur K . Par définition de r_0 , il existe $(X_k)_{k \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \theta(X_k) = r_0$. On note $\theta(X_k) = t_k$. Comme K est compact, il existe $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $X_{\sigma(k)}$ converge vers $X^+ \in K$. A priori, $\theta(X^+) \leq r_0$. On a $AX_{\sigma(k)} - t_{\sigma(k)}X_{\sigma(k)} \geq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc par passage à la limite, $AX^+ - r_0X^+ \geq 0$ et donc $r_0 \leq \theta(X^+)$ donc $r_0 = \theta(X^+)$.

5. Soit $Y = A^+ - r_0X^+ \geq 0$. Si $Y \neq 0$, alors $AY > 0$ d'après la question 1 donc

$$AY = A \underbrace{(AX^+)_{>0}}_{>0} - r_0 \underbrace{(AX^+)_{>0}}_{>0} > 0 \quad (6.60)$$

On a $AY > \varepsilon AX^+$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|AY|_i > \varepsilon |AX^+|_i$ (car $AY > 0$).

On pose alors

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{|AY|_i}{|AX^+|_i} \quad (6.61)$$

On a alors $AY - \varepsilon AX^+ > 0$ d'où

$$A \underbrace{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}_{\in K} - (r_0 + \varepsilon) \frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} > 0 \quad (6.62)$$

donc $r_0 + \varepsilon \in I_{\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1}}$ c'est-à-dire

$$r_0 + \varepsilon \leq \theta \left(\frac{AX^+}{\|AX^+\|_1} \right) \leq r_0 \quad (6.63)$$

ce qui est impossible. Nécessairement $Y = 0$.

6. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$|AV|_i = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} |v_j| = (A|V|)_i \quad (6.64)$$

donc $|\lambda| = |AV| \leq A|V|$. De plus, $|V| \in K$ donc $|\lambda| \leq \theta(|V|) \leq r_0$. Notons que cela implique que le rayon spectral de A est $\rho(A)$ est plus petit que r_0 et que l'on a même égalité.

7. Si $|\lambda| = r_0$, on a $|\lambda| = \theta(|V|) = r_0$ et d'après la question 5 on a $A|V| = r_0|V| = |AV|$.

D'après la question 2, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $V = e^{i\theta}|V|$. Or

$$AV = \lambda V = e^{i\theta} A|V| = e^{i\theta} r_0 |V| \quad (6.65)$$

et comme $|K| \in K$, $|V| \neq 0$ et on a donc $\lambda = r_0$.

8. Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $\|V\|_1 = 1$ et $AV = r_0 V$. D'après la question précédente, on a $V = e^{i\theta}|V|$ et $A|V| = r_0|V|$. Soit alors $t \in \mathbb{R}$, on a

$$A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|) \quad (6.66)$$

Notons maintenant que si $Y \geq 0$ avec $Y \neq 0$ vérifie $AY = r_0 Y$, alors $Y > 0$. En effet, d'après la première question, $AY > 0$. On a $r_0 \neq 0$ car sinon $\text{Sp}_{\mathbb{C}} = \{0\}$ et $A^n = 0$ ce qui est impossible car ses coefficients sont strictement positifs. D'où $Y > 0$.

Ainsi, par définition de X^+ , on a $X^+ > 0$ et $|V| > 0$. On a alors

$$(X^+)_i + t|v_i| \geq 0 \quad (6.67)$$

si et seulement si

$$t \geq -\frac{|X^+|_i}{|v_i|} \quad (6.68)$$

On prend

$$t = \min_{1 \leq i \leq n} -\frac{|X^+|_i}{|v_i|} \quad (6.69)$$

Finalement, on a $X^+ + t|V| \geq 0$ et une de ses coordonnées vaut 0 (car on a pris le minimum sur les i). Nécessairement, $X^+ + t|V| = 0$ (car $A(X^+ + t|V|) = r_0(X^+ + t|V|)$) et donc $|V| \in \mathbb{R}X^+$. Donc $V = e^{i\theta}|V| \in \mathbb{C}X^+$ et ainsi

$$\dim(\ker(A - r_0I_n)) = 1 \quad (6.70)$$

■

Solution 6.26. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : U \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \|x - y\| \end{aligned}$$

On a

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x', y')| = ||\|x - y\| - \|x' - y'\|| \leq \|(x - y) - (x' - y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| \leq 2\|(x, y) - (x', y')\|_\infty \quad (6.71)$$

donc φ est continue.

$U \times V$ est compact, donc il existe $(x_1, y_1) \in (U \times V)$ telle que $\varphi(x_1, y_1) = \min_{(x, y) \in U \times V} \varphi(x, y)$. Comme U et V sont disjoints, $x_1 \neq y_1$ et $\varphi(x_1, y_1) = d(U, V) > 0$.

Soit $\alpha = \frac{d(U, V)}{3}$. On pose $U' = \{x \in E \mid d(x, U) < \alpha\}$ et $V' = \{x \in E \mid d(x, V) < \alpha\}$. $x \mapsto \|x\|$ est continue car 1-lipschitzienne donc U' et V' sont des ouverts et on a bien $U \subset U'$ et $V \subset V'$. Soit ensuite $x \in U' \cap V'$, on a $d(x, U) < \alpha$ et $d(x, V) < \alpha$ donc il existe $(u, v) \in U \times V$, $d(x, u) < \alpha$ et $d(x, v) < \alpha$. Alors $d(u, v) \leq 2\alpha$ ce qui est absurde. Donc $U' \cap V' = \emptyset$. ■

Solution 6.27.

1. f est 1-lipschitzienne donc est continue. On forme

$$\begin{aligned} g : K &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x - f(x)\| \end{aligned}$$

g est continue, K est compact donc il existe $a \in K$ tel que $g(a) = \min_{x \in K} g(x)$. Si $a \neq f(a)$, alors $\|f(a) - f^2(a)\| = g(f(a)) < \|a - f(a)\| = g(a)$ ce qui est impossible par définition de a . Donc $f(a) = a$. S'il existe $a' \neq a$ tel que $f(a') = a'$, alors $\|f(a) - f(a')\| = \|a - a'\| < \|a - a'\|$ ce qui est impossible. Donc a est unique.

2. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} = a$ alors pour tout $n \geq n_0$, $u_n = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_{n+1} - a\| = \|f(u_n) - f(a)\| < \|u_n - a\| \quad (6.72)$$

donc la suite $(\|u_n - a\|)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante dans \mathbb{R}_+ donc elle converge vers $l \geq 0$. Par compacité de K , il existe une extraction σ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\sigma(n)} = \alpha \in K$. Par continuité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_{\sigma(n)} - a\| = \|\alpha - a\| = l \quad (6.73)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\|u_{\sigma(n)+1} - f(a)\|}_{f(u_{\sigma(n)})} = \|f(\alpha) - f(a)\| = l = \|\alpha - a\| \quad (6.74)$$

par continuité de f . Ainsi, on a $\alpha = a$ et $l = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

3. f est \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Soit $x < y \in \mathbb{R}^2$, il existe $z \in]x, y[$ tel que (égalité des accroissements finis)

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = |f'(z)| = \left| \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}} \right| < 1 \quad (6.75)$$

donc f vérifie bien l'hypothèse de contraction. Cependant, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{a^2 + 1} > a$ donc pas de point fixe. La démonstration tombe en défaut car \mathbb{R} n'est pas compact. ■

Solution 6.28. La condition est équivalente à pour tout $(M_1, M_2, M_3) \in K_1 \times K_2 \times K_3$, M_1, M_2 et M_3 ne sont pas alignés.

On forme alors

$$\begin{aligned} f : K_1 \times K_2 \times K_3 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (M_1, M_2, M_3) &\mapsto R(M_1, M_2, M_3) \end{aligned}$$

où $R(M_1, M_2, M_3)$ est le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par M_1, M_2 et M_3 .

On note $M_i = (x_i, y_i)$ et Δ_i la médiatrice de $[M_j M_k]$. Établissons une équation de Δ_i . On a $M = (x, y) \in \Delta_i$ si et seulement si $\|M\vec{M}_j\|_2^2 = \|M\vec{M}_k\|_2^2$ si et seulement si $(M\vec{M}_j + M\vec{M}_k \mid M\vec{M}_j - M\vec{M}_k) = 0$ (produit scalaire), si et seulement si $(M\vec{C}_i \mid M_j\vec{M}_k) = 0$ où C_i est le milieu de $[M_j M_k]$, si et seulement si (calculer le produit scalaire)

$$\left(\frac{x_j + x_k}{2} - x\right)(x_k - x_j) + \left(\frac{y_j + y_k}{2} - y\right)(y_k - y_j) = 0 \quad (6.76)$$

Soit alors $M_0 = (x_0, y_0)$ le centre du cercle circonscrit. $M_0 \in \Delta_i \cap \Delta_j$ avec $i \neq j$. Par exemple, $M_0 \in \Delta_3 \cap \Delta_1$ si et seulement si

$$\begin{cases} \left(\frac{x_2 + x_1}{2} - x_0\right)(x_2 - x_1) + \left(\frac{y_2 + y_1}{2} - y_0\right)(y_2 - y_1) = 0 \\ \left(\frac{x_3 + x_2}{2} - x_0\right)(x_3 - x_2) + \left(\frac{y_3 + y_2}{2} - y_0\right)(y_3 - y_2) = 0 \end{cases} \quad (6.77)$$

si et seulement si $(L_2 \leftarrow L_1(x_3 - x_2) + L_2(x_1 - x_2))$

$$\begin{cases} x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2} \\ x_0(x_2 - x_3) + y_0(y_2 - y_3) = \frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2} \end{cases} \quad (6.78)$$

si et seulement si $(L_1 \leftarrow L_2(y_2 - y_1) + L_1(y_2 - y_3))$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}(y_2 - y_3) - (y_1 - y_2)\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \\ y_0 = \frac{\frac{x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2}{2}(x_1 - x_2) - (x_2 - x_3)\frac{x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2}{2}}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)} \end{cases} \quad (6.79)$$

et $R(M_1, M_2, M_3) = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2}$. En reportant, f est continue sur $K_1 \times K_2 \times K_3$ compact donc f atteint son minimum. ■

Solution 6.29.

1. Pour tout $f \in E$, $T(f)$ est \mathcal{C}^1 et $(T(f))' = f$, $T(f)(0) = 0$. T est clairement linéaire, soit ensuite $x \in [0, 1]$, on a

$$|T(f)(x)| = \left| \int_0^x f(t) dt \right| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq x \|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad (6.80)$$

Donc $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ donc T est continue et $\|T\| \leq 1$. Pour $f = 1$, on a $\|f\|_\infty = 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $T(f)(x) = x$ donc $\|T(1)\|_\infty = 1$. Ainsi, $\|T\| = 1$.

2. $id_E - T$ est continue. Soit $(f, g) \in E^2$, on a $g = f - T(f)$ si et seulement si $g = y' - y$ et $y(0) = 0$. On a $g(x)e^{-x} = \underbrace{e^{-x}(y'(x) - y(x))}_{(e^{-x}y(x))'}$ donc en intégrant de 0 à x on a

$$y(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt \quad (6.81)$$

Donc $T(f)$ vérifie le problème de Cauchy si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt$ si et seulement si pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = g(x) + e^x \int_0^x e^{-t} g(t) dt \quad (6.82)$$

Donc $id_E - T$ est bijective. Enfin, on a pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| \leq |g(x)| + \left| \int_0^x g(t) e^{x-t} dt \right| \leq \|g\|_\infty (1 + xe^x) \leq \|g\|_\infty (1 + e) \quad (6.83)$$

Ainsi,

$$\|f\|_\infty = \|(id_E - T)^{-1}(g)\|_\infty \leq \|g\|_\infty (1 + e) \quad (6.84)$$

donc $(id_E - T)^{-1}$ est continue. Ainsi, $id_E - T$ est un homéomorphisme. ■

Solution 6.30.

- (i) \Rightarrow (ii) $f^{-1}(K)$ est fermé car f est continue. K est borné, donc il existe $M > 0$, tel que pour tout $y \in K$, $\|y\| \leq M$. Donc pour tout $x \in f^{-1}(K)$, $\|f(x)\| \leq M$. Par contraposée de (i) pour $A = M + 1$, il existe $B > 0$ tel que $\|f(x)\| < A \Rightarrow \|x\| < B$. Donc pour $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| < B$ donc $f^{-1}(K)$ est borné. C'est donc un compact.

- (ii) \Rightarrow (i) Soit $A \geq 0$. Soit $K = \overline{B(0, A)}$ compact car fermé et borné en dimension finie. D'après (ii), $f^{-1}(K)$ est compact donc borné : il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| \leq B$. Par contraposée, si $\|x\| > B$ alors $x \notin f^{-1}(K)$ et $f(x) \notin K$ donc $\|f(x)\| > A$. Ainsi, $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|f(x)\| = +\infty$. ■

Remarque 6.7. *Exemple pour l'exercice précédent : les fonctions polynômiales non constantes. Contre-exemple : l'exponentielle, cf $\exp([0, 1]) = \mathbb{R}_+$ non compact.*

Solution 6.31.

1. Soit $(x, y) \in K^2$ compact. Soit σ une extraction telle que

$$(f^{\sigma(n)}(x), f^{\sigma(n)}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (l, l') \in K^2 \quad (6.85)$$

On a

$$f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (6.86)$$

de même pour y . Soit $\varepsilon > 0$,

$$\begin{cases} \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(x) - f^{\sigma(n)}(x)\| \leq \varepsilon \\ \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \|f^{\sigma(n+1)}(y) - f^{\sigma(n)}(y)\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (6.87)$$

Pour $N = \max(N_1, N_2)$ et $p = \sigma(N + 1) - \sigma(N) \in \mathbb{N}^*$, on a

$$d(x, f^p(x)) \leq d(f^{\sigma(n+1)}(x), f^{\sigma(n)}(x)) \leq \varepsilon$$

et de même pour y avec le même p .

2. On a

$$d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \quad (6.88)$$

$$\leq d(f^p(x), f^p(y)) \quad (6.89)$$

$$\leq d(f^p(x), x) + d(x, y) + d(y, f^p(y)) \quad (6.90)$$

$$\leq 2\varepsilon + d(x, y) \quad (6.91)$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a égalité tout du long. On a donc notamment, $\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$ et donc f est une isométrie.

3. f est 1-lipschitzienne donc continue. Donc $f(K)$ est compact donc fermé. Il suffit donc de montrer que $f(K)$ est dense dans K . Soit $x \in K$ et $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|x - \underbrace{f^p(x)}_{\in f(K)}\| \leq \varepsilon$ d'après la première question. Donc $f(K)$ est dense dans K et $f(K) = \overline{f(K)} = K$.

■

Remarque 6.8. *Exemple pour l'exercice précédent : une rotation sur la sphère unité.*

Solution 6.32. Soit

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M \mapsto f(M) = \text{rayon du cercle circonscrit au triangle MAB}$$

On a $F = f(K)$. Soit (C, i, j) un repère orthonormé où C est le milieu de $[AB]$ et $A(-\alpha, 0)$ et $B(\alpha, 0)$ avec $\alpha > 0$. La médiatrice Δ de $[A, B]$ a pour équation $x = 0$. Si $M(x, y)$, soit $\varphi(M)$ le centre du cercle circonscrit. On a $\varphi(M) \in \Delta$ donc $\varphi(M)(0, y_1)$ et $\varphi(M)$ appartient à la médiatrice de $[MA]$. On a $y_1 \neq 0$ car $M \notin (AB)$.

Notons M' le milieu de $[MA]$. On a $M'(\frac{x-\alpha}{2}, \frac{y}{2})$ d'où $M'\vec{\varphi}(M) \cdot \vec{MA} = 0$ d'où (en développant le produit scalaire),

$$y_1 = \left((\alpha + x) \left(\frac{\alpha - x}{2} \right) - \frac{y^2}{2} \right) \left(-\frac{1}{y} \right) \quad (6.92)$$

φ est donc continue donc f également et $f(K) = F$ est compact. ■

Solution 6.33.

1. Soit $\lambda \in \text{Sp}(\tau)$ et $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ avec $\tau(P) = \lambda P$. Si P n'est pas constant, notons $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $P(\alpha) = 0$. Alors $P(\alpha + 1) = 0$. En itérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\alpha + n) = 0$, impossible car P n'est pas constant donc pas nul. Finalement, P est constant et $\lambda = 1 : \text{Sp}(\tau) = \{1\}$.
2. $f : x \mapsto P(x)e^{-x}$ est continue et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc le sup est bien défini. Il est ensuite facile de vérifier que $\|P\|$ est une norme.
3. On a

$$\|\tau(P)\| = \sup_{x \geq 0} |P(x+1)e^{-x}| = \sup_{x' \geq 1} |P(x')e^{-x'}e| \leq \sup_{x' \geq 0} |P(x')e^{-x'}e| \leq e\|P\| \quad (6.93)$$

4. Utiliser $P = X$.

■

Solution 6.34.

1. Pour x fixé, $\min(x, \varphi(t)) = \frac{x + \varphi(t) - |x - \varphi(t)|}{2}$ est continue. Donc $T(f)$ est définie.

Si $x \leq \varphi(0)$,

$$T(f)(x) = \int_0^1 x f(t) dt = x \int_0^1 f(t) dt \quad (6.94)$$

et si $x \geq \varphi(1)$,

$$T(f)(x) = \int_0^1 \varphi(t) f(t) dt \quad (6.95)$$

et si $\varphi(0) \leq x \leq \varphi(1)$, il existe un unique $t_1 = \varphi^{-1}(x)$ (car φ induit un homéomorphisme de $[0, 1]$ dans $\varphi([0, 1])$).

Si $t \leq t_1$, on a $\varphi(t) \leq x$, donc $\min(x, \varphi(t)) = \varphi(t)$. Si $t \geq t_1$, on a $\min(x, \varphi(t)) = x$. On a donc

$$T(f)(x) = \int_0^{t_1} \varphi(t) f(t) dt + \int_{t_1}^1 x f(t) dt \quad (6.96)$$

$$= \underbrace{\int_0^{\varphi^{-1}(x)} \varphi(t) f(t) dt}_{=F_1(\varphi^{-1}(x))} + x \underbrace{\int_{\varphi^{-1}(x)}^1 f(t) dt}_{=F_2(\varphi^{-1}(x))} \quad (6.97)$$

et f et φ étant continues, F_1 et F_2 sont continues.

Donc $T(f)$ continue et T linéaire, c'est un endomorphisme de E .

2. On a

$$|T(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \underbrace{\int_0^1 \min(x, \varphi(t)) dt}_{=A(x)}$$

donc

$$\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|A\|_\infty \quad (6.98)$$

donc T est continue et $\|T\| \leq \|A\|_\infty$. De plus pour $f = 1$, on a $\|T\| = \|A\|_\infty$.

3. On a

$$A(x) = \int_0^1 \min(x, \varphi(t)) dt = \begin{cases} x & \text{si } x \leq \varphi(0) \\ \int_0^1 \varphi(t) dt & \text{si } x \geq \varphi(1) \end{cases} \quad (6.99)$$

Dans tous les cas,

$$\|A\|_\infty \leq \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (6.100)$$

donc

$$\|A\|_\infty = \int_0^1 \varphi(t) dt \quad (6.101)$$

Solution 6.35.

1. φ est une forme linéaire. et on a

$$|\varphi(P)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{a_k}{2^k} \right| \leq 2\|P\|_\infty \quad (6.102)$$

donc φ est continue et $\|\varphi\| \leq 2$. Pour $p \neq 0$, $|\varphi(P)| < 2\|P\|_\infty$: pour avoir égalité, il faudrait pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \text{constante} \neq 0$ ce qui n'est pas possible. Pour $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\varphi(P_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ donc $\|\varphi\| = 2$. De plus, $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est fermé.

2. Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi(P) = 0$ d'où $a_0 = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k}$ (et il existe $N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, a_n = 0$). On a donc

$$P(X) - 1 = (a_0 - 1) + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k X^k \quad (6.103)$$

et si $\|P - 1\|_\infty \leq \frac{1}{2}$, on a

$$\begin{cases} |a_0 - 1| \leq \frac{1}{2} \\ \forall k \in \mathbb{N}^*, |a_k| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.104)$$

et

$$|a_0| = \left| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} \quad (6.105)$$

Et $\frac{1}{2} \leq 1 - |a_0| \leq |1 - a_0| \leq \frac{1}{2}$. Donc $|a_0| = \frac{1}{2}$ et $|1 - a_0| = \frac{1}{2}$.

$$a_0 = \frac{1}{2} e^{i\theta} \Rightarrow \left| 1 - \frac{1}{2} e^{i\theta} \right|^2 = \frac{1}{4} \quad (6.106)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{2} \cos(\theta) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \sin(\theta) \right)^2 = \frac{1}{4} \quad (6.107)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos(\theta) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (6.108)$$

$$\Rightarrow \cos(\theta) = 1 \quad (6.109)$$

et donc $a_0 = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \quad (6.110)$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| = \frac{1}{2}$, impossible car $P \in \mathbb{C}[X]$, ainsi $\|P - 1\|_\infty > \frac{1}{2}$.

3. On définit, pour $n \geq 1$, $P_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (-\frac{1}{2} + \varepsilon_n) X^k$ avec $\varepsilon_n \in \mathbb{R}$ tel que $P_n \in \ker(\varphi)$. On a

$$P_n \in \ker(\varphi) \Rightarrow \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_n\right) \frac{1}{2^k} = 0 \quad (6.111)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_n = -\frac{1}{2^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2^n}} \quad (6.112)$$

et donc $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (et $\varepsilon_n < 0$). On a donc $\|P_n - 1\|_\infty = \frac{1}{2} - \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Donc $d(1, \ker(\varphi)) = \frac{1}{2}$ et cette distance n'est pas atteinte. ■

Solution 6.36. Prouvons d'abord l'existence. Soit $M \in \mathbb{R}^n$, on définit $r(M) = \sup\{\|M - A\| \mid A \in K\}$ et $\varphi: A \mapsto \|M - A\|$ est continue sur K compact donc le sup est en fait un max. On a notamment $r(M) = \{R > 0 \mid K \subset B(M, R)\}$. Soit

$$\begin{aligned} r : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ M &\mapsto r(M) \end{aligned}$$

Soit $(M, M') \in (\mathbb{R}^n)^2$. Pour tout $A \in K$, on a

$$\|M - A\| \leq \|M - M'\| + \|M' - A\| \leq \|M - M'\| + r(M') \quad (6.113)$$

En particulier, on a

$$r(M) \leq \|M - M'\| + r(M') \quad (6.114)$$

et en échangeant M et M' , on a $|r(M) - r(M')| \leq \|M - M'\|$. Donc r est 1-lipschitzienne donc continue. Soit $A_0 \in K$, $R(M) \geq \|M - A_0\| \geq \|M\| - \|A_0\| \xrightarrow{\|M\| \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc il existe $M_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $r(M_0) = \min_{M \in \mathbb{R}^n} r(M) = r_0$, d'où l'existence d'une boule fermée de rayon minimal.

Pour l'unicité, soit $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $r(M_1) = r(M_2) = r_0$. On suppose que $\|M_1 - M_2\| = \varepsilon > 0$. Soit M_3 le milieu de $[M_1 M_2]$. On a $K \subset B_{M_1, r_0} \cap B_{M_2, r_0}$. On prend $r^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 = r_0^2$ d'où

$$r = \sqrt{r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}} < r_0 \quad (6.115)$$

Soit $M \in B(M_1, r_0) \cap B(M_2, r_0)$, on a

$$\|M - M_3\|^2 = \frac{1}{4} \left(\|M - M_1 + M - M_2\|^2 \right) \quad (6.116)$$

$$= \frac{1}{4} \left(2\|M - M_1\|^2 + 2\|M - M_2\|^2 - \underbrace{\|M_1 - M_2\|^2}_{=\varepsilon^2} \right) \quad (6.117)$$

$$\leq \frac{1}{4} (2r_0^2 + 2r_0^2 - \varepsilon^2) \quad (6.118)$$

$$\leq r_0^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} = r^2 \quad (6.119)$$

Donc $B_1 \cap B_2 \subset \overline{B(M_3, r)}$ d'où $K \subset \overline{B(M_3, r)}$, ce qui est absurde car $r < r_0$. Donc $M_1 = M_2$. ■

Solution 6.37. φ est évidemment définie et linéaire. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

$$|\varphi(f)| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right| \quad (6.120)$$

$$\leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right| \quad (6.121)$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f| + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f| \quad (6.122)$$

$$\leq \int_0^1 \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \quad (6.123)$$

■

Donc φ est continue et $\|\varphi\| \leq 1$. Notons que si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors on a égalité partout au-dessus et pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| = \|f\|_\infty$ et comme $\left| \int f \right| = \int |f|$ implique que f est de signe constant sur l'intervalle d'intégration, si l'on a $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, alors f est de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $[\frac{1}{2}, 1]$. Or $\left| \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f \right|$, f est de signe opposé sur les deux segments. Or f est continue en $\frac{1}{2}$, donc f est nulle. Donc pour f non nulle, on a $|\varphi(f)| < \|f\|_\infty$ donc la norme triple n'est pas atteinte. Enfin, pour montrer que $\|\varphi\| = 1$, on utilise pour $n \geq 1$,

$$f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \\ (\frac{1}{2} - t)n & \text{si } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}] \\ -1 & \text{si } t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \end{cases} \quad (6.124)$$

On a bien $\|f_n\|_\infty = 1$.

Solution 6.38.

1. Non car on applique l'application trace.
2. On a le résultat par récurrence.
3. On a

$$(n+1)\|v^n\| = \|u \circ v^n \circ v - v^n \circ v \circ r\| \leq 2\|u\|\|v\|\|v^n\| \quad (6.125)$$

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v^n = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n+1 \leq 2\|u\|\|v\| \quad (6.126)$$

ce qui est impossible. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $v^n = 0$. Alors $u \circ v^n - v^n \circ u = nv^{n-1} = 0$ donc $v^{n-1} = 0$ et de proche en proche $v = 0$: contradiction.

4. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$(D \circ T - T \circ D)(P) = (XP)' - XP' = P \quad (6.127)$$

donc $D \circ T - T \circ D = id$. D'après ce qui précède, T et D ne peuvent pas être continus simultanément.

■

Solution 6.39.

1. $\sum_{k \geq 0} (A - I_n)^k$ converge absolument car $\|A - I_n\|^k \leq \alpha_k$ et $\alpha < 1$.

Si $AX = 0$, $\|(A - I_n)X\| = \|X\| \leq \alpha\|X\|$ donc $\|X\| = 0$ et $X = 0$ donc $A \in GL_n(\mathbb{C})$, idem pour B . On a alors

$$A \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k = ((A - I_n) + I_n) \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k = I_n$$

par télescope. Donc

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (I_n - A)^k \quad (6.128)$$

et

$$\|A^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} \quad (6.129)$$

et de même pour B . On écrit alors

$$ABA^{-1}B^{-1} - I_n = (AB - BA)A^{-1}B^{-1} = ((A - I_n)(B - I_n) - (B - I_n)(A - I_n))A^{-1}B^{-1} \quad (6.130)$$

d'où

$$\| \| ABA^{-1}B^{-1} - I_n \| \| \leq \frac{2 \| \| A - I_n \| \| \| B - I_n \| \|}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \quad (6.131)$$

2. On prend $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$.
3. Pour tout $M \in G$, il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \cap G = \{M\}$. Montrons que G est discret si et seulement si I_n est isolé. En effet, si I_n est isolé, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(I_n, r_0) \cap G = \{I_n\}$. Soit $M \in G$, alors pour tout $M' \in G$, $M - M' = M(I_n - M^{-1}M')$ d'où $I_n - M^{-1}M' = M^{-1}(M - M')$. Si

$$\| \| M - M' \| \| < \frac{r_0}{\| \| M^{-1} \| \|} \quad (6.132)$$

on a $\| \| I_n - M^{-1}M' \| \| < r_0$ et donc $M' = M$ et M est isolé. Ainsi G est isolé. La réciproque est évidente.

C est dans le commutant si et seulement si C commute avec A et B si et seulement si

$$\begin{cases} ACA^{-1}C^{-1} = I_n \\ BCB^{-1}C^{-1} = I_n \end{cases} \quad (6.133)$$

Notons maintenant que

$$\overline{B_{\| \cdot \|}(I_n, \frac{1}{4})} \cap G = \mathcal{A} \quad (6.134)$$

est fini. En effet, si cet ensemble était infini, il existerait $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite injective dans \mathcal{A} . La suite étant bornée, on peut extraire $(M_{\sigma(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge et alors pour tout $p \in I_n$

$$\underbrace{M_{\sigma(p)}M_{\sigma(p+1)}^{-1}}_{\xrightarrow{pto+\infty} I_n} \in G \setminus \{I_n\} \quad (6.135)$$

ce qui est impossible car I_n est isolé.

Comme $A \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$, il existe $C \in \mathcal{A} \setminus \{I_n\}$ telle que $\| \| C - I_n \| \|$ soit minimale et $\| \| C - I_n \| \| \leq \frac{1}{4}$. D'après la question 2 on a

$$\| \| ACA^{-1}C^{-1} - I_n \| \| < \| \| C - I_n \| \| \quad (6.136)$$

et même chose pour B . Donc nécessairement, $ACA^{-1}C^{-1} = I_n$ et de même pour B . Ainsi, C commute avec toutes les matrices de G .

Solution 6.40.

1. $\mathbb{C}_{n-1}[A]$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie donc c'est un fermé. Par division euclidienne par χ_A , d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A]$. Comme

$$\exp(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \quad (6.137)$$

$$\exp(A) \in \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}_{n-1}[A].$$

2. Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = P^{-1} \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P \quad (6.138)$$

et donc

$$\exp(A) = P^{-1} \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P \quad (6.139)$$

et $\exp(A)$ est diagonalisable.

Si $\exp(A)$ est diagonalisable, on utilise la décomposition de Dunford : $A = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. On a donc

$$\exp(A) = \exp(D) \underbrace{\exp(N)}_{=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}} = \exp(D) + \exp(D) \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^k}{k!} \right) = \exp(D) + N' \quad (6.140)$$

avec N' nilpotente et $\exp(D)$ est diagonalisable d'après le sens direct. N' commute avec $\exp(D)$. Par unicité de la décomposition de Dunford, $\exp(A)$ étant diagonalisable, on a $N' = 0$. Comme $\exp(D)$ est inversible,

$$N \times \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{N^{k-1}}{k!}}_{=I_n + N''} = 0 \quad (6.141)$$

avec N'' nilpotente. $I_n + N''$ est donc inversible et ainsi $N = 0$ et A est diagonalisable.

3. D'après ce qui précède, $\exp(A) = I_n$ est diagonalisable et

$$\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(\exp(A)) = \{e^\lambda \mid \lambda \in \operatorname{Sp}_{\lambda}(\mathbb{C})\} = \{I_n\} \quad (6.142)$$

Donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

Réciproquement, si A est diagonalisable avec $\text{Sp}(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$, en diagonalisant, on a bien $\exp(A) = I_n$.

4. Sur \mathbb{R} , si A est diagonalisable, $\exp(A)$ l'est aussi. Cependant, la réciproque n'est pas vrai, par exemple

$$M = \begin{pmatrix} 2i\pi & 0 \\ 0 & -2i\pi \end{pmatrix} \text{ semblable à } \begin{pmatrix} 0 & -4\pi^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A \quad (6.143)$$

On a $\chi_M = X^2 + 4\pi^2$, $\exp(A) = I_2$ et A n'est pas diagonalisable sur \mathbb{C} .

■

Solution 6.41.

1. On a $\ln(1-x) = P(x) + x^2O(1)$ et $\exp(y) = Q(y) + y^nO(1)$ d'où

$$\exp(\ln(1+x)) = 1+x = Q(\ln(1+x)) + \underbrace{\ln(1+x)^nO(1)}_{O(x^n)} \quad (6.144)$$

alors $1+x = Q(P(x)+O(x^n))+O(x^n) = Q(P(x))+O(x^n)$. Soit $B(X) = Q(P(X))+O(x^n) \in \mathbb{R}[X]$, on a $\frac{B(x)}{x^n} = O(1)$ donc $X^n \mid B$ et

$$Q(P(X)) = 1 + X + B(X) = 1 + X + X^n A(X) \quad (6.145)$$

2. On a $N^n = 0$ donc $P(N)$ est aussi nilpotente et on a

$$\exp(P(N)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P(N)^k}{k!} = Q(P(N)) = I_n + N + 0 \quad (6.146)$$

3. Soit $M \in GL_n(\mathbb{C})$ et sa décomposition de Dunford : $M = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. On a $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(M) \subset \mathbb{C}^*$ et on écrit

$$M = D \left(I_n + \underbrace{D^{-1}N}_{\substack{\text{nilpotente} \\ =\exp(P(D^{-1}N))}} \right) \quad (6.147)$$

si $D = P_1 \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P_1^{-1}$, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ il existe $\mu_k \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda_k = \exp(\mu_k)$ (car \exp est surjectif sur \mathbb{C}^*). Alors

$$D = \exp(P_1 \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}) \in \mathbb{C}[D] \quad (6.148)$$

puis

$$M = \exp\left(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1}\right) \exp\left(P(D^{-1}N)\right) \quad (6.149)$$

$$= \exp\left(P_1 \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) P_1^{-1} + P(D^{-1}N)\right) \quad (6.150)$$

car les matrices commutent.

Donc \exp est surjective.

■

Solution 6.42. On a $A \subset \overline{A}$, $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^{2n} \in \overline{A}$ et $e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \in \overline{A}$.

Si $n \geq 2$ et $p \geq 2$, $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \leq 1$. Donc si $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \geq 1$, alors $n = 1$ ou $p = 1$.

Si $x > e$, à partir d'un certain rang, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \frac{e+x}{2}$ et si $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$. Si $1 \leq x < e$, à partir d'un certain rang, on a $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > x$ donc si $x \notin A$, $x \notin \overline{A}$.

Soit $x < 1$, si $n \geq 2$ et $p \geq 3$ ou $n \geq 3$ et $p \geq 2$, on a $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{5}{6}$ et

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} = \exp\left((n+p) \ln\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)\right) \quad (6.151)$$

$$\leq \exp\left((n+p) \ln\left(\frac{5}{6}\right)\right) \quad (6.152)$$

$$\leq \max\left(\underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^n}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}, \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^p}_{\xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0}\right) \quad (6.153)$$

Il existe N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$, $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \frac{x}{2}$. Si n ou p est plus grand que N_0 , on a donc

$$\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)^{n+p} \leq \frac{x}{2} \quad (6.154)$$

Donc il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de A plus grand que $\frac{x}{2}$. Ainsi,

$$\overline{A} = A \cup \{e, 0\} \quad (6.155)$$

■

Solution 6.43. On note

$$\mathbb{V} = \bigcup_{m \geq 1} \mathbb{U}_m = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{m}} \mid m \geq 1, k \in \{0, \dots, m-1\} \right\} \quad (6.156)$$

Soit $M \in H$. $X^m - 1$ est scindé à racines simples sur \mathbb{C} donc M est diagonalisable sur \mathbb{C} avec ses valeurs propres dans \mathbb{V} . Réciproquement, si M est diagonalisable sur \mathbb{C} et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{V}$. Alors pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, $\exists m_\lambda \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{U}_{m_\lambda}$ et soit $m = \text{ppcm}_{\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)}(m_\lambda)$. Alors $M^m = I_n$.

Soit $A \in \overline{H}$, il existe $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p = A$. Comme le polynôme caractéristique est une fonction continue des coefficients, pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \chi_{M_p}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = 0 \quad (6.157)$$

Or

$$|\chi_{M_p}(\lambda)| = |\lambda - \lambda_{1,p}| \dots |\lambda - \lambda_{n,p}| \geq d(\lambda, \mathbb{U})^n \quad (6.158)$$

avec $\lambda_{i,p} \in \mathbb{V}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Donc $d(\lambda, \mathbb{U}) = 0$ et comme \mathbb{U} est fermé, $\lambda \in \mathbb{U}$.

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathbb{U}$. Soit

$$\{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_r}\} \quad (6.159)$$

les valeurs propres distinctes de A de multiplicités m_1, \dots, m_r . Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$A = Q \text{diag}(\underbrace{e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_1}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{i\theta_r}, \dots, e^{i\theta_r}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1} \quad (6.160)$$

On a

$$\theta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2\pi}{k} \lfloor k \frac{\theta}{2\pi} \rfloor \quad (6.161)$$

donc on peut former, pour $p \in \mathbb{N}^*$,

$$A = Q \text{diag}(\underbrace{e^{i\theta_{1,p}}, \dots, e^{i\theta_{1,p}}}_{m_1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{e^{i\theta_{r,p}}, \dots, e^{i\theta_{r,p}}}_{m_r \text{ fois}}) Q^{-1} \quad (6.162)$$

avec $\theta_{i,p} = \frac{2\pi}{p} \lfloor p \frac{\theta_j}{2\pi} \rfloor + \frac{2j\pi}{p}$. Pour p suffisamment grand, les $(\theta_{j,p})$ sont deux à deux distincts donc A_p est diagonalisable et $A_p \in H$, et donc $A \in \overline{H}$. ■

Solution 6.44.

1. On a l'inégalité triangulaire et l'homogénéité. On a cependant $N_a(X^k) = |a_k|$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X^k \neq 0$. Donc N_a est une norme implique que a ne s'annule pas sur \mathbb{N} . Réciproquement, si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$, si $P \neq 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $p_k \neq 0$ et donc $N_a(P) > 0$. Donc N_a est une norme si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k \neq 0$.
2. Si N_a et N_b sont équivalentes, alors il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta N_b(X^k) \leq N_a(X^k) \leq \alpha N_b(X^k) \quad (6.163)$$

d'où

$$\beta |b_k| \leq N_a(X^k) \leq \alpha |b_k| \quad (6.164)$$

Donc $a = O(b)$ et $b = O(a)$.

Réciproquement, si $a = O(b)$ et $b = O(a)$, alors on a l'inégalité précédente sur les a_k et b_k ,

d'où

$$\beta \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k a_k| \leq \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k b_k| \quad (6.165)$$

et donc pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$

$$\beta N_b(P) \leq N_a(P) \leq \alpha N_b(P) \quad (6.166)$$

et N_a et N_b sont équivalentes.

3. Δ est continue pour N_a si et seulement s'il existe $c \geq 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $N_a(\Delta P) \leq c N_a(P)$. Si Δ est continue alors il existe $c \geq 0$ tel que $N_a(kX^k) \leq c N_a(X^k)$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|ka_{k-1}| \leq c |a_k| \quad (6.167)$$

Réciproquement, si on a (6.167), pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ $N_a(\Delta P) \leq c N_a(P)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = k!$, (6.167) est vérifiée pour $c = 1$. Si $b_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, (6.167) n'est pas vérifiée donc Δ n'est pas continue pour N_b .

■

Solution 6.45.

1. On a $d(x, A) = 0$ si et seulement si $\inf_{a \in A} \|x - a\| = 0$ si et seulement si $\varepsilon > 0, \exists a \in A: \|x - a\| < \varepsilon$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

On a $A \subset \overline{A}$ donc $d(x, \overline{A}) \leq d(x, A)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $a' \in \overline{A}$ tel que $\|x - a'\| < d(x, \overline{A}) + \varepsilon$ et il existe $a \in A$ tel que $\|a - a'\| < \varepsilon$. Ainsi,

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq d(x, \overline{A}) + 2\varepsilon \quad (6.168)$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(x, A) \leq d(x, \overline{A})$ et donc on a égalité.

2. $A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B}$ donc $d(A, B) \geq d(\overline{A}, \overline{B})$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(a', b') \in \overline{A} \times \overline{B}$ tel que $\|a' - b'\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + \varepsilon$ et il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $\|a - a'\| < \varepsilon$ et $\|b - b'\| < \varepsilon$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a donc

$$d(A, B) \leq \|a - b\| < d(\overline{A}, \overline{B}) + 3\varepsilon \quad (6.169)$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a bien l'égalité. ■

Solution 6.46. φ_{x_0} est une forme linéaire. Elle est continue si et seulement si $C > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$,

$$|P(x_0)| \leq C \|P\|_\infty \quad (6.170)$$

Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on a

$$|P(x_0)| \leq \|P\|_\infty \sum_{k=0}^n |x_0|^k \quad (6.171)$$

Si $|x_0| < 1$, on a

$$|P(x_0)| \leq \|P\|_\infty \frac{1}{1 - |x_0|} \quad (6.172)$$

donc φ_{x_0} est continue et si $x_0 = |x_0|e^{i\theta_0}$, soit $n \in \mathbb{N}$ et $P_n = \sum_{k=0}^n e^{-ik\theta_0} X^k$, on a $\|P_n\|_\infty = 1$ et

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - |x_0|} \quad (6.173)$$

donc $\|\varphi_{x_0}\| = \frac{1}{1 - |x_0|}$.

Si $|x_0| \geq 1$,

$$|\varphi_{x_0}(P_n)| = \sum_{k=0}^n |x_0|^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (6.174)$$

donc φ_{x_0} n'est pas continue. ■

Solution 6.47. Pour le sens indirect, soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M_p)$ donc $\det(M_p - \lambda I_n) = 0$. Par continuité du déterminant, on a $0 = \det(M_p - \lambda I_n) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \det(-\lambda I_n)$. Donc $\lambda = 0$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ donc M est nilpotente.

Pour le sens direct, soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M . On trigonalise u sur une base $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $u(\varepsilon_1) = 0, u(\varepsilon_2) = a_{1,2}\varepsilon_1, \dots, u(\varepsilon_n) = a_{1,n}\varepsilon_1 + \dots + a_{n-1,n}\varepsilon_{n-1}$. Posons pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\varepsilon_{i,p} = \frac{\varepsilon_i}{p^{i-1}}$. On pose $\mathcal{B}_p = (\varepsilon_{1,p}, \dots, \varepsilon_{n,p})$ et $M_p = \text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u)$, semblable à M et $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ car $\|M_p\| \leq \frac{1}{p} \|M_1\|$. ■

Solution 6.48. On pose $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ canoniquement associée à M .

Pour le sens indirect, si M n'est pas diagonalisable, il existe une base $B = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{C}^n telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = D + N \quad (6.175)$$

où D est diagonale et N est nilpotente (décomposition de Dunford). En reprenant les bases \mathcal{B}_p définies à l'exercice précédent, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}_p}(u) = D + N_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} D \quad (6.176)$$

Si $D \in S_M$, alors M est diagonalisable ce qui est exclu par hypothèse. Donc S_M n'est pas fermé.

Pour le sens direct, si M est diagonalisable, soit $(M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (S_M)^{\mathbb{N}}$ avec $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M'$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On a $\chi_{M_p}(\lambda) = \det(\lambda I_n - M_p) = \chi_M(\lambda)$ car M et M_p sont semblables. Par continuité du déterminant, on a $\chi_{M'}(\lambda) = \chi_M(\lambda)$, donc $\chi_{M'} = \chi_M$. De plus, $A \mapsto \Pi_M(A)$ (polynôme minimal) est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\Pi_M(M_p) = 0$ donc $\Pi_M(M') = 0$. M' est donc annulée par Π_M , donc M' est diagonalisable et comme $\chi_M = \chi_{M'}$, M et M' ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités. Donc $M' \in S_M$. ■

Remarque 6.9. Le polynôme caractéristique est une fonction continue de la matrice, mais c'est faux pour le polynôme minimal, par exemple pour

$$M_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 0 \\ 0 & \frac{2}{p} \end{pmatrix} \quad (6.177)$$

On a $M_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ et $\Pi_{M_p} = (X - \frac{1}{p})(X - \frac{2}{p}) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} X^2 \neq X = \Pi_{M_\infty}$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} \Pi_{M_p} \neq \Pi_{\lim_{p \rightarrow +\infty} M_p}$.

Solution 6.49. On note $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leq h\}$.

1. ω_φ est bien défini car $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq 2\|\varphi\|_\infty$. Si $0 < h \leq h'$, alors $A_h \subset A_{h'}$ donc $\sup(A_h) \leq \sup(A_{h'})$ donc $\omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h')$.
2. Soit $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, soit $(x, y) \in I^2$ tel que $|x - y| \leq h + h'$ (où on peut supposer que $x \leq y$).
 - Si $y \in [x, x + h]$, alors $|x - y| \leq h$ donc $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
 - Si $y \in [x + h, x + h + h']$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\varphi(x) - \varphi(x + h)| + |\varphi(x + h) - \varphi(y)| \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$ car $|x - (x + h)| \leq h$ et $|x + h - y| \leq h'$.
 Donc $\omega_\varphi(h + h') \leq \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on a $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\lambda h \leq ([\lambda] + 1)h$ et par croissance et ce qui précède, on a

$$\omega_\varphi(\lambda h) \leq ([\lambda] + 1)\omega_\varphi(h) \leq (\lambda + 1)\omega_\varphi(h) \quad (6.178)$$

4. Soit $\varepsilon > 0$. φ étant uniformément continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$, si $|x - y| \leq \alpha$ on a $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$ et on a pour $h \leq \alpha$, $\omega_\varphi(h) \leq \varepsilon$ d'où $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_\varphi(h) = 0$.

Soit alors $h_0 > 0$ fixé et $h > 0$,

— si $h_0 \leq h$, on a $0 \leq \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leq \omega_\varphi(h - h_0)$.

— si $h \leq h_0$, on a $0 \leq \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leq \omega_\varphi(h_0 - h)$.

Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0)| \leq \omega_\varphi(|h_0 - h|)$. Donc on a bien $\lim_{h \rightarrow h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$.

Donc ω_φ est continue (et même uniformément).

■

Solution 6.50. G est borné car si $M \in G$, $\|M\| \leq \|I_n\| + \mu = 1 + \mu$. Montrons donc que si G_0 est un sous-groupe borné de $GL_n(\mathbb{C})$, alors les valeurs propres de ses éléments sont de module 1, et ceux-ci sont diagonalisables.

En effet, soit $M \in G$ et $\lambda \in \text{Sp}(M)$, soit X un vecteur propre associé. On a $\|MX\| = |\lambda|\|X\| \leq \|M\|\|X\|$ donc $|\lambda| \leq \|M\| \leq \sup_{M \in G} \|M\|$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $M^k \in G$ et $\lambda^k \in \text{Sp}(M^k)$, donc si $|\lambda| > 1$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} |\lambda|^k = +\infty$, et si $|\lambda| < 1$, on a $\lim_{k \rightarrow -\infty} |\lambda|^k = +\infty$. Comme G est borné, $|\lambda| = 1$.

On utilise ensuite la décomposition de Dunford pour M : $M = D + N$ avec $DN = ND$, D diagonalisable et N nilpotente. Grâce au binôme de Newton, pour $k \geq r$ $p^* r$ est l'indice de

nilpotence de N , on a

$$M^k = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} N^p D^{k-p} = \underbrace{D^k}_{\text{borné}} + kND + \sum_{p=2}^{r-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\substack{\sim \frac{k^p}{p!} \\ k \rightarrow +\infty}} N^p \underbrace{D^{k-p}}_{\text{borné car } \text{Sp}(D) \subset \mathbb{U}} \quad (6.179)$$

Donc

$$M^k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \underbrace{\frac{k^{r-1}}{(r-1)!} \underbrace{N^{r-1}}_{\neq 0} D^{k-r+1}}_{\text{non borné si } N \neq 0} \quad (6.180)$$

Donc $N = 0$ et $M = D$ est diagonalisable.

Revenons donc à l'exercice. Soit $M \in G$ et $\lambda = e^{i\theta} \in \text{Sp}(M)$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$. Si X est un vecteur propre associé à λ , on a

$$(\lambda - 1)\|X\| = \|(M - I_n)X\| \leq \mu\|X\| \quad (6.181)$$

donc $|\lambda - 1| = 2 \underbrace{|\sin(\frac{\theta}{2})|}_{\geq 0} \leq \mu$. Donc $\theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ où $\theta_0 = \arcsin(\frac{\mu}{2}) \in [0, \pi]$.

Si $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$, $e^{ik\pi} \in \text{Sp}(M^k)$, $|e^{ik\theta} - 1| \leq \mu$. Alors $\{k\theta + 2l\pi \mid (k, l) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non monogène et donc dense, et alors $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$ est dense dans \mathbb{U} , donc il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $|e^{ik_0\theta} + 1| = |2 - (1 - e^{ik_0\theta_0})| < 2 - \mu$, ce qui est impossible car $|2 - (1 - e^{ik_0\theta_0})| \geq 2 - |1 - e^{ik_0\theta_0}| \geq 2 - \mu$.

Ainsi, $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = e^{i\theta} \in \mathbb{U}_m$. Ce n'est pas forcément le même m pour tout les M dans G . Notons alors pour

$$\lambda \in \bigcup_{M \in G} \text{Sp}(M) = \mathcal{A} \quad (6.182)$$

$\omega(\lambda)$ l'ordre (multiplicatif) de λ dans \mathbb{U} .

Si $\omega(\lambda) = m$, on a $gr(\lambda) = \mathbb{U}_m$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\lambda^k = e^{\frac{2i\pi}{m}} \in \mathcal{A}$ (car $\lambda^k \in \text{Sp}(M^k)$). Supposons que $\{\omega(\lambda) \mid \lambda \in \mathcal{A}\}$ non borné. Alors il existe $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tel que $m_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $e^{\frac{2i\pi}{m_k}} \in \mathcal{A}$. Alors

$$\underbrace{e^{2i \lfloor \frac{m_k}{2} \rfloor \frac{\pi}{m_k}}}_{\xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} e^{i\pi} = -1} \in \mathcal{A} \quad (6.183)$$

ce qui est impossible car $|\lambda + 1| \geq 2 - \mu > 0$. On peut donc noter

$$m = \bigvee_{\lambda \in \mathcal{A}} \omega(\lambda) \quad (6.184)$$

et pour tout $M \in G$, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(M)$, $\lambda^m = 1$. Or M est diagonalisable, donc $M^m = I_n$. ■

Solution 6.51. Si $M \in \mathcal{G}_q$, $P(X) = X^q - 1$ annule M donc M est diagonalisable à valeurs propres dans \mathbb{U}_q . Réciproquement, si M est diagonalisable et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \mathbb{U}_q$ alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ avec

$$M = P \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1} \quad (6.185)$$

et donc

$$M^q = P \text{diag}(\lambda_1^q, \dots, \lambda_n^q) P^{-1} = I_n \quad (6.186)$$

Si $M \in \mathcal{G}_q$ n'est pas une homothétie, il existe $\lambda \neq \mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)^2$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \quad (6.187)$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$M = P \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} & \\ & \mu & \\ & & \ddots \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} M \quad (6.188)$$

Or

$$\begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{k} \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est semblable } \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (6.189)$$

car $\chi_A = (X - \lambda)(X - \mu)$ donc est diagonalisable. Donc $M_k \sim M$ et $M_k \in \mathcal{G}_q$ et M n'est pas isolé.

Montrons le petit lemme suivante : soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{C}^n et $\|\!\|\!\|\cdot\|\!\|\!$ la norme subordonnée, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$. Si $\|\!\|M - \lambda I_n\|\!\| \leq \varepsilon$ alors $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(M) \subset \overline{B(\lambda, \varepsilon)}$. En effet, soit X un vecteur propre de M associé à $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On a

$$\|(M - \lambda I_n)X\| = |\mu - \lambda| \|X\| \leq \|\!\|M - \lambda I_n\|\!\| \|X\| \leq \varepsilon \|X\| \quad (6.190)$$

donc $|\mu - \lambda| \leq \varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \sin(\frac{\pi}{q}) > 0$ et $\lambda \in \mathbb{U}_q$; si $M \in B_{\|\cdot\|}(\lambda I_n, \varepsilon) \cap \mathcal{G}_q$ alors pour tout $\mu \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, on a $|\lambda - \mu| \leq \sin(\frac{\pi}{q})$ donc $\lambda = \mu$. Donc si $M = \lambda I_n$ alors M est isolé (avec $\lambda \in \mathbb{U}_q$). Donc les matrices scalaires sont isolées. ■

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. Tout d'abord, $\deg(L_n) = n$ et son coefficient dominant est $\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$.

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. -1 et 1 sont racines d'ordre n de P_n donc pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$ $P_n^{(k)}(-1) = P_n^{(k)}(1) = 0$. Ainsi, on a par intégrations par parties successives :

$$(f|L_n) = (-1)^n \int_{-1}^1 f^{(n)}(t) P_n(t) dt \quad (7.1)$$

Notamment, si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $P^{(n)} = 0$ et $(P|L_n) = 0$. En particulier, pour tout $m < n$, $\deg(L_m) \leq n-1$ et $(L_m|L_n) = 0$ donc $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale. Notons dès maintenant que l'on peut calculer la norme de L_n grâce aux intégrales de Wallis :

$$\|L_n\|_2^2 = (L_n|L_n) \quad (7.2)$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^1 L_n^{(n)}(t^2 - 1)^n dt \quad (7.3)$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt \quad (7.4)$$

On pose $t = \cos(\theta)$ d'où $dt = -\sin(\theta)d\theta$, d'où

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^\pi \sin(\theta)^{2n+1} d\theta \quad (7.5)$$

$$= 2I_{2n+1} \text{ [Wallis]} \quad (7.6)$$

On a classiquement $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$. D'où

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \dots \times \frac{2}{3} \times \underbrace{I_1}_{=1} = 1 \quad (7.7)$$

$$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (7.8)$$

d'où

$$\|L_n\|_2^2 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \times 2 \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1} \quad (7.9)$$

2. On utilise la formule de Leibniz en écrivant $X^2 - 1 = (X+1)(X-1)$.
3. On montre le résultat par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$ en invoquant le théorème de Rolle. On trouve donc que $L_n = P_n^{(n)}$ s'annule au moins n fois sur $] -1, 1[$. Or $\deg(L_n) = n$, donc ces zéros sont simples et ce sont les seuls.

4. (L_0, \dots, L_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (étagée en degré). Donc il existe $(\alpha_{n,0}, \dots, \alpha_{n,k}) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $XL_{n-1} = \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} L_k$. Si $k \leq n-3$, on a

$$(XL_{n-1}L_k) = \alpha_{n,k} \|L_k\|_2^2 = (L_{n-1}XL_k) = 0 \quad (7.10)$$

car $\deg(XL_k) = k+1 \leq n-2$. Donc

$$XL_{n-1} = \alpha_{n,n-2}L_{n-2} + \alpha_{n,n-1}L_{n-1} + \alpha_{n,n}L_n \quad (7.11)$$

Pour calculer les coefficients, on fait tout simplement les produits scalaires :

$$(XL_{n-1}|L_{n-1}) = \int_{-1}^1 tL_{n-1}(t)^2 dt \quad (7.12)$$

Or P_n est paire, donc L_n est de la parité de n et donc L_n^2 est paire puis XL_n^2 est impaire. Donc $\alpha_{n,n-1} = 0$.

$$(XL_{n-1}|L_{n-2}) = \alpha_{n,n-2} \underbrace{\|L_{n-2}\|_2^2}_{=\frac{2}{2n-3}} \quad (7.13)$$

$$= (-1)^n \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) \underbrace{(XL_{n-2})^{(n-1)}(t)}_{\frac{(2n-4)!(n-1)}{2^{n-2}(n-2)!}} \quad (7.14)$$

Par ailleurs,

$$(-1)^{n-1} \int_{-1}^1 P_{n-1}(t) dt = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \underbrace{\int_{-1}^1 (1-t^2)^{n-1} dt}_{2I_{2n-1}} \quad (7.15)$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \times 2 \times \frac{2^{2n-2}(n-1)!^2}{(2n-1)!} \quad (7.16)$$

$$= \frac{2^n(n-1)!}{(2n-1)!} \quad (7.17)$$

donc $\frac{\alpha_{n,n-2}}{\alpha_{n,n}} = \frac{n-1}{n}$. D'où le résultat. ■

Solution 7.2. On forme

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \underbrace{\Delta f(x_0, \dots, x_{n-1}, x)}_{\varphi(x)} - \underbrace{\prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i) A}_{P(x)} \end{aligned}$$

On a $g(x_n) = 0$. On suppose les $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ distincts, et on pose

$$A = \frac{V(x_0, \dots, x_n)}{\prod_{i=0}^{n-1} (x_n - x_i)} \quad (7.18)$$

g est de classe \mathcal{C}^n et pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a $g(x_i) = 0$. Donc il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $g^{(n)}(\xi) = 0$ (théorème de Rolle appliqué n fois. $\deg(P) = n$ et son coefficient dominant est A donc $P^{(n)}(\xi) = An! = \varphi^{(n)}(\xi)$).

On développe maintenant $\varphi(x)$ par rapport à la dernière colonne :

$$\varphi(x) = f(x) \times V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) + Q(X) \quad (7.19)$$

avec $\deg(Q) \leq n-1$ et $V_n(x_0, \dots, x_{n-1}) = \prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (x_i - x_j)$ (déterminant de Vandermonde). On a donc

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \prod_{0 \leq j < i \leq n-1} (x_j - x_i) \quad (7.20)$$

et en reportant, on a

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{A}{\prod_{0 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)} = \Delta f(x_0, \dots, x_n) \quad (7.21)$$

■

Solution 7.3. On utilise le développement de Taylor avec reste intégral.

$$f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^0 -tf''(t)dt \quad (7.22)$$

et de même

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f''(t)dt \quad (7.23)$$

D'où

$$A(f) = f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) \quad (7.24)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} tf''(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)f''(t)dt \quad (7.25)$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{2}} tdt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)dt \quad (7.26)$$

$$= \frac{1}{4} \quad (7.27)$$

Et c'est atteint pour $f(t) = \frac{t^2}{4}$. ■

Solution 7.4. Pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x)$ donc

$$f'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) \quad (7.28)$$

donc f' est \mathcal{C}^1 et donc f est \mathcal{C}^2 . On fixe alors x et on dérive deux fois (7.28) en fonction de h . On a alors

$$f''(x+h) = f''(x-h) \quad (7.29)$$

pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$ donc f'' est constante et f est polynômiale de degré 2.

Réciproquement, si $f(x) = ax^2 + bx + c$, on a bien la relation de l'énoncé. ■

Solution 7.5.

1. Soit $a > 0$,

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathbb{R} &\rightarrow]a, +\infty[\\ x &\mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{aligned}$$

est croissante. Donc il existe $l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tau_a(x) \in \overline{\mathbb{R}}$. On écrit alors

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times \frac{x - a}{x} + \frac{f(a)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \quad (7.30)$$

2. S'il existe $a < b \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $f(a) < f(b)$, alors $\tau_a(b) > 0$. Comme τ_a est croissante, $l \geq \tau_a(b) > 0$. Par contraposée, si $l \geq 0$, f est décroissante.

3. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(x) = f(x) - lx$. Pour $x < y$, on a

$$\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - l \leq 0 \quad (7.31)$$

Donc φ est décroissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existe. ■

Solution 7.6.

1. On forme

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{\frac{1}{p} + x} \end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{np} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{k}{np}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\frac{1}{p} + x} = \ln(p+1) = l_p \quad (7.32)$$

2. On note $f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\alpha_0 > 0$ tel que si $0 < x < \alpha_0$, alors $|\varepsilon(x)| \leq \varepsilon_0$, et il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_0$, $\frac{1}{n} \leq \alpha_0$. Alors pour tout $n \geq N_0$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$,

$$\frac{1}{k+n} \Rightarrow \left| \varepsilon\left(\frac{1}{k+n}\right) \right| \leq \frac{\varepsilon_0}{p} \quad (7.33)$$

et

$$\left| \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{k+n} \right| \leq \sum_{k=0}^{np} \frac{\frac{\varepsilon_0}{p}}{k+n} \leq \frac{\varepsilon_0}{p} \frac{np+1}{n+1} \leq \varepsilon_0 \quad (7.34)$$

On a donc

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{n+k} f'(0) + \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{n+k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(p+1) f'(0) \quad (7.35)$$

3. On peut penser à $f: x \mapsto \sqrt{x}$ continue et $f(0) = 0$. De plus,

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{np+1}{\sqrt{n(p+1)}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \quad (7.36)$$

donc v_n diverge.

4. On écrit $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi,

$$v_n = \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} + \sum_{k=0}^{bp} \frac{\varepsilon(\frac{1}{k+n})}{(k+n)^2} \quad (7.37)$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, pour tout $k \in \{0, \dots, np\}$, $|\varepsilon(\frac{1}{n+k})| \leq \varepsilon$ et donc

$$\left| \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} \right| \leq \sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon}{(n+k)^2} \quad (7.38)$$

donc

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{\varepsilon(\frac{1}{n+k})}{(n+k)^2} = O\left(\sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2} \times \frac{1}{(n+k)^2}\right) \quad (7.39)$$

puis

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{np} \frac{f''(0)}{2(n+k)^2} \quad (7.40)$$

Or

$$\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(np)^2} \sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2} \quad (7.41)$$

$$= \frac{1}{np} \times \frac{1}{np} \underbrace{\sum_{k=0}^{np} \frac{1}{(\frac{1}{p} + \frac{k}{np})^2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(\frac{1}{p} + x)^2}} \quad (7.42)$$

donc

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{f''(0)p}{n(p+1)} \quad (7.43)$$

■

Solution 7.7. Supposons que f' ne tend pas vers 0 en $+\infty$: il existe $\varepsilon_0 > 0, \forall A > 0, \exists x_A \geq A, |f'(x_A)| \geq \varepsilon_0 > 0$. Par continuité uniforme, il existe $\alpha_0 \geq 0, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, si $|x - y| \leq \alpha_0$ alors $|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$. Alors pour tout $t \in [x_A - \alpha, x_A + \alpha]$, on a

$$|f'(t)| \geq |f'(x_A)| - |f'(x_A) - f'(t)| \geq \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (7.44)$$

et pour $A = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \geq n, \forall t \in [x_n - \alpha, x_n + \alpha], |f'(t)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f' est de signe constant sur $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $f' > 0$ sur les $[x_n - \alpha, x_n + \alpha]$. Alors

$$f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = \int_{x_n - \alpha_0}^{x_n + \alpha_0} f'(t) dt \geq \varepsilon_0 \alpha_0 > 0 \quad (7.45)$$

mais comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n + \alpha_0) - f(x_n - \alpha_0) = 0 \quad (7.46)$$

d'où la contradiction.

Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$, on applique ce qui précède à $\Im(f)$ et $\Re(f)$.

Si f' n'est pas uniformément continue, ce n'est plus valable, par exemple

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (7.47)$$

car $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$ et

$$f'(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2} \sin(x^2)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{\frac{2x \cos(x^2)}{x}}_{\text{n'a pas de limite en } +\infty} \quad (7.48)$$

■

Solution 7.8. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g\left(x + \frac{h}{2}\right) \xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x) \quad (7.49)$$

par continuité de g . Donc f est dérivable et $f' = g$. Par ailleurs, pour $y = \frac{1}{2}$, on a

$$f'(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x - \frac{1}{2}) \quad (7.50)$$

par récurrence f est \mathcal{C}^∞ .

En outre, en fixant x et en dérivant la relation de départ deux fois par rapport à y , on a

$$f''(x + y) - f''(x - y) = 0 \quad (7.51)$$

Donc f'' est constante donc f est un polynôme de degré plus petit que 2.

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions marchent (avec $f' = g$). ■

Solution 7.9. On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} (f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t) dt \quad (7.52)$$

On note $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ de classe \mathcal{C}^2 .

On a

$$F(b) = F(a) + F'(a)(b-a) + \int_a^b F''(t)(b-t) dt \quad (7.53)$$

Pour $a = k$ et $b = k + \frac{1}{2}$, on a

$$F(k + \frac{1}{2}) = F(k) + \frac{1}{2} F'(k) + \int_k^{k+\frac{1}{2}} (k + \frac{1}{2} - t) f'(t) dt = F(k) + \frac{1}{2} F'(k) + \int_0^{\frac{1}{2}} u f'(k + \frac{1}{2} - u) du \quad (7.54)$$

et pour $a = k + 1, b = k + \frac{1}{2}$,

$$F(k + \frac{1}{2}) = F(k+1) - \frac{1}{2} F'(k+1) + \int_{k+1}^{k+\frac{1}{2}} (k + \frac{1}{2} - t) f'(t) dt = F(k+1) - \frac{1}{2} F'(k+1) + \int_0^{\frac{1}{2}} u f'(k + \frac{1}{2} + u) du \quad (7.55)$$

On a donc

$$\frac{1}{2} (f(k) - f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} u (f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u)) du \quad (7.56)$$

d'où

$$S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} u \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u)}_{\geq 0 \text{ car } u \geq 0 \text{ et } f' \text{ croissante}} du \quad (7.57)$$

et $f'(k + \frac{1}{2} + u) - f'(k + \frac{1}{2} - u) \leq f'(k + 1) - f'(k)$ d'où

$$S_n \leq \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} u du}_{=\frac{1}{8}} (f'(n) - f'(1)) \quad (7.58)$$

■

Solution 7.10.

1. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\begin{cases} \|A\| \leq \frac{h^2}{2} M_2 \\ \|B\| \leq \frac{h^2}{2} M_2 \end{cases} \quad (7.59)$$

On a $B - A - f(x - h) + f(x + h) = 2hf'(x)$ d'où

$$\|f'(x)\| \leq \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h} \quad (7.60)$$

Donc f' est bornée sur \mathbb{R} . On a ensuite un majorant qui dépend de h que l'on peut optimiser, et on trouve la borne demandée.

2. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne à nouveau

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \|A_k\| \leq \frac{k^n}{n!} M_n \quad (7.61)$$

On forme alors

$$\begin{pmatrix} A_1 - f(x+1) \\ \vdots \\ A_k - f(x+k) \\ \vdots \\ A_n - f(x+n) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 & \dots & \frac{-1}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -k & \dots & \frac{-k^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & -n & \dots & \frac{-n^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} f(x) \\ \vdots \\ f^{(k)}(x) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \quad (7.62)$$

On a

$$\det(M) = \frac{(-1)^n}{1! \times 2! \times \dots \times (n-1)!} V(1, \dots, n) \quad (7.63)$$

où V est le déterminant de Vandermonde. Donc $\det(M) \neq 0$. On peut former les $f^{(j)}(x)$ en fonction des $(A_i - f(x+i))_{1 \leq i \leq n}$: il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (A_i - f(x+i))$. Donc

$$\|f^{(j)}(x)\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \left(\frac{n}{n!} M_n + M_0 \right) \quad (7.64)$$

Donc $f^{(j)}$ est bornée pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$. ■

Solution 7.11.

1.

$$l_{\sigma, \gamma} = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad (7.65)$$

2. On a

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i)\| - \underbrace{\| (a_{i+1} - a_i) \gamma'(a_i) \|}_{>0} \right| \quad (7.66)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(a_{i+1}) - \gamma(a_i) - (a_{i+1} - a_i) \gamma'(a_i)\| \quad (7.67)$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|\gamma'(t) - \gamma'(a_i)\| dt \quad (7.68)$$

3. $\|\gamma'\|$ est continue donc

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \lim_{\delta(\sigma) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \quad (7.69)$$

Donc α_0 existe.

γ' est continue sur $[a, b]$ donc uniformément continue sur $[a, b]$, et il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$, on a

$$|x - y| \leq \alpha \Rightarrow \|\gamma'(x) - \gamma'(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (7.70)$$

Alors si $\delta(\sigma) \leq \alpha_1$, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, pour tout $t \in [a_i, a_{i+1}]$, on a

$$|t - a_i| \leq (a_{i+1} - a_i) \leq \alpha_1 \quad (7.71)$$

d'où

$$\|\gamma'(a_i) - \gamma'(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (7.72)$$

et d'après la question 2, on a donc

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma'(a_i)\| (a_{i+1} - a_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (7.73)$$

Finalement, si $@d(\sigma) \leq \min(\alpha_0, \alpha_1)$, on a

$$\left| l_{\sigma, \gamma} - \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \right| \leq \varepsilon \quad (7.74)$$

Donc

$$l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \quad (7.75)$$

4. On a

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R \sin(t) \\ R \cos(t) \end{pmatrix} \quad (7.76)$$

donc $\|\gamma'(t)\| = R$ et $l(\gamma) = 2\pi R$.

■

Solution 7.12.

1. Pour tout $t \in I$, on a

$$\gamma(t) = |\gamma(t)| e^{i\theta_1(t)} = |\gamma(t)| e^{i\theta_2(t)} \quad (7.77)$$

donc

$$e^{i(\theta_1(t) - \theta_2(t))} = 1 \quad (7.78)$$

Ainsi, pour tout $t \in I$, il existe $k(t) \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta_2(t) - \theta_1(t) = 2k(t)\pi$. On a

$$k(t) = \frac{\theta_2(t) - \theta_1(t)}{2\pi} \quad (7.79)$$

qui est continue et à valeurs entières, donc constante égale à k_0 d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

2. Si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$,

$$|\gamma(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} \quad (7.80)$$

Comme $\sqrt{\cdot}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , par composition, f est \mathcal{C}^k . On a alors

$$f(t) = e^{i\theta(t)} \Rightarrow f'(t) = i\theta'(t)e^{i\theta(t)} = i\theta'(t)f(t) \quad (7.81)$$

Donc

$$\theta(t) = -i \frac{f'(t)}{f(t)} \quad (7.82)$$

De plus, on a

$$\theta(t) = \theta(t_0) - i \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du \quad (7.83)$$

pour $t_0 \in I$.

3. On fixe $t_0 \in I$. Soit θ_0 un argument de $\gamma(t_0)$, on pose

$$\theta(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t \frac{f'(u)}{f(u)} du \quad (7.84)$$

Comme $\frac{f'}{f}$ est \mathcal{C}^{k-1} , θ est bien \mathcal{C}^k . On forme $g(t) = e^{i\theta(t)}$ qui est de classe \mathcal{C}^k . On a

$$g'(t) = i\theta'(t)g(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}g(t) \quad (7.85)$$

donc $\left(\frac{g}{f}\right)' = 0$, donc $\frac{g}{f}$ est constante sur I et $g(t_0) = e^{i\theta_0} = f(t_0)$ donc $g = f$ sur I . Ainsi, pour tout $t \in I$, on a $|f(t)| = |e^{i\theta(t)}| = 1$ et si $\theta(t) = a(t) + i(t)$, on a donc

$$e^{i\theta(t)} = e^{-b(t)}e^{ia(t)} \quad (7.86)$$

donc $b(t) = 0$ et $\theta(t) \in \mathbb{R}$.

■

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires

Table des figures

1	$0 \leq \cosh(x) - 1 - \frac{x^2}{2} \leq x^4$ pour $x \in \mathbb{R}$.	51
2	$e^x - x - 1 \geq -x - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.	52
3	$x(1-x) \in]0, \frac{1}{4}]$ pour $x \in]0, 1[$.	53
4	$x \mapsto x^3 - x - 3$ a exactement un zéro sur \mathbb{R}_+ .	55
5	$x \mapsto 2 \ln(1+x)$ admet un unique point fixe sur \mathbb{R}_+^* .	60
6	$\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.	69
7	$\ln(1+x) \leq x$ pour $x > -1$.	103