Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Algèbre Générale

2 Séries numériques et familles sommables

3 Probabilités sur un univers dénombrable

4 Calcul matriciel

5 Réduction des endomorphismes

6 Espaces vectoriels normés

Solution 6.1.

1. *A $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & x\cos(t) + y\sin(2t) \end{array}$$

est bornée, donc le sup *sur $\mathbb{R}$ existe. Pour la séparation, prendre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{4}$. Pour l'inégalité triangulaire, montrer l'inégalité à t fixé puis passer au* sup *sur $\mathbb{R}$.*

2. *Si $|x| + |y| \leqslant 1$, alors $N(x,y) \leqslant 1$ donc on a la première inclusion.*
Si $N(x,y) \leqslant 1$, utiliser $t = 0$ pour avoir $|x| \leqslant 1$ et $t = \frac{\pi}{4}$ puis $t = -\frac{\pi}{4}$ pour pouvoir justifier

$$|2y| \leqslant \left| x\frac{\sqrt{2}}{2} + y \right| + \left| y - x\frac{\sqrt{2}}{2} \right| \leqslant 2$$

et donc $|y| \leqslant 1$. D'où la deuxième inclusion.

3. *On fixe $(x,y) \in S_N(0,1) \cap (\mathbb{R}_+)^2$. φ est 2π-périodique, $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$ et $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)| = 1$. On peut donc se limite à un intervalle de longueur 2π pour l'étude de φ.*
On note que si $t \in [-\pi, 0]$, $\cos(t)$ et $\sin(2t)$ sont de signes opposés. Donc

$$|\varphi(t)| \leqslant x|\cos(t)| + y|\sin(2t)| = |\varphi(-t)|$$

et $-t \in [0, \pi]$. Donc le sup *est atteint sur $[0, \pi]$.*
On note maintenant, comme $|\varphi(\pi - t)| = |\varphi(t)|$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, que si $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leqslant \varphi(t) = x\underbrace{\cos(t)}_{\in[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]} + y\sin(2t) \leqslant x\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}_{\in[\frac{\sqrt{2}}{2},1]} + y\sin(2 \times (\frac{\pi}{2} - t)) = \varphi(\frac{\pi}{2} - t)$$

Donc le sup *est atteint sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Soit maintenant $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que $\varphi(t_0)$ réalise le* sup *(existe car φ est continue sur un compact). Comme c'est aussi le* sup *sur $\mathbb{R}$ qui est ouvert, on a la condition d'Euler du premier ordre : $\varphi'(t_0) = 0$.*
On a donc $x\cos(t_0) + y\sin(2t_0) = 1$ et $-x\sin(t_0) + 2y\cos(2t_0) = 0$. On en déduit les valeurs de x et y en fonction de t_0, en faisant attention que $\cos(t_0) \neq 0$ sinon $\sin(t_0) = 0$ aussi ce qui n'est pas le cas, et au cas où $t_0 = 0$.
Réciproquement, s'il existe $t_0 \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tel que x et y s'écrivent de la façon demandée, alors t_0 est l'unique point satisfaisant $\varphi(t_0) = 1$ et $\varphi'(t_0) = 0$. Mais alors le sup *de φ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est atteint en un point t_1 qui vérifie les mêmes choses, donc $t_1 = t_0$ d'où $N(x,y) = 1$.*

Solution 6.2.

1. *Pour l'inégalité triangulaire, introduire la forme bilinéaire symétrique positive sur E*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E \times E & \to & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \mapsto & f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt \end{array}$$

Alors $N(f) = \sqrt{\varphi(f,f)}$ et on utilise l'inégalité de Minkowski.

2. *Pour* $x \in [0,1]$, *écrire* $|f(x)| = |f(0) + f(x) - f(0)|$, $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt$, *utiliser Cauchy-Schwarz avec* f' *et* 1 *puis que* $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a+b}$, *pour enfin passer au* $\sup$ *sur* x.

3. *Utiliser, pour* $n \in \mathbb{N}^*$, *la fonction*

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n \end{array}$$

Solution 6.3. *Si* f *est ouverte,* $f(\mathbb{R}^n)$ *est un sous-espace vectoriel ouvert de* R^p. *Donc* f *est surjective.*

Si f *est surjective, on prend* F *un supplémentaire de* $\ker(f)$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *avec* $\dim(\ker(f)) = n - p$ *et* $\dim(F) = p$. *Soit* $(e_1, \dots, e_p)$ *une base de* F *et* $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ *une base de* $\ker(f)$. *On vérifie que* $(f(e_1, \dots, f(e_p))$ *est une base de* $\mathbb{R}^p$. *On définit*

$$N_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ \sum_i^n x_i e_i & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^n$ *et*

$$N_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \to & \mathbb{R} \\ \sum_i^p y_i f(e_i) & \mapsto & \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |y_i| \end{array}$$

norme sur $\mathbb{R}^p$.

Soit Θ *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, *soit* $y_0 \in f(\Theta)$, *il existe* $x_0 \in \Theta$: $y_0 = f(x_0)$. *Si* $x_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, *alors* $y_0 = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i)$. *Comme* Θ *est un ouvert, il existe* $r_0 > 0$ *tel que*

$$B_{N_1}(x_0, r_0) \subset \Theta$$

Soit $y = \sum_{i=}^p \beta_i f(e_i) \in \mathbb{R}^p$, *si* $N_2(y - y_0) < r_0$, *pour tout* $i \in \{1, \dots, p\}$, $|\beta_i - \alpha_i| < r_0$ *et*

$$y = f\left(\sum_{i=1}^p \beta_i e_i + \sum_{i=p+1}^n \alpha_i e_i\right) \stackrel{def}{=} f(x)$$

avec $N_1(x - x_0) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} |\beta_i - \alpha_i| < r_0$. *Ainsi* $x \in \Theta$ *et* $y \in f(\Theta)$, *donc* $B_{N_2}(y_0, r_0) \subset f(\Theta)$ *et* $f(\Theta)$ *est un ouvert.*

Solution 6.4.

1. *Classique.*

2. $$|f(x)| \leqslant |f(0)| + |f(x) - f(0)| \leqslant |f(0)| + \kappa(f)x \leqslant N(f)$$

   car $x \leqslant 1$, *donc* $N_\infty \leqslant N$. *Pour la non-équivalence, prendre*

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t^n \end{array}$$

3. *On a* $|f(0)| \leqslant N_\infty(f)$ *donc* $N(f) \leqslant N'(f)$. *Ensuite,* $N_\infty \leqslant N$ *donne* $N' \leqslant N + \kappa \leqslant 2N$. *Donc* N *est* N' *sont équivalentes.*

Remarque 1. Exemple de normes qui, en dimension infinie, ne se dominent pas mutuellement. On prend $(e_i)_{i\in I}$ une base (de Hamel), $J=(i_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset I$ dénombrable. Si $x=\sum_{i\in I}x_ie_i$, on peut vérifier que

$$N_1(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}|x_{i_n}|+\sum_{i\in I\setminus J}|x_i|$$

et

$$N_2(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}n|x_{i_{2n}}|+\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n+1}|x_{i_{2n+1}}|+\sum_{i\in I\setminus J}|x_i|$$

ne se dominent pas.

Solution 6.5. *Il existe $\alpha>0$ tel que $B_{\|\cdot\|_\infty}(I_n,\alpha)\subset G$. Soient $i\neq j$ et $\lambda\in\mathbb{C}$. Il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{|\lambda|}{p}<\alpha$. Alors*

$$\left\|T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right)-I_n\right\|_\infty=\left|\frac{\lambda}{p}\right|<\alpha$$

donc $T_{i,j}(\lambda)\in G$ ($T_{i,j}$ est la matrice de transvection : $T_{i,j}(\lambda)=I_n+\lambda E_{i,j}$).

Ainsi,

$$T_{i,j}(\lambda)=\left(T_{i,j}\left(\frac{\lambda}{p}\right)\right)^p\in G$$

Soit $\delta=\rho e^{\mathrm{i}\theta}\in\mathbb{C}^*$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\rho^{\frac{1}{p}}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}}=1$ donc il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $|\rho^{\frac{1}{p}}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}}-1|<\alpha$.

On a alors

$$\left\|D_n\left(\rho^{\frac{1}{p}}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}}\right)-I_n\right\|_\infty<\alpha$$

donc $D_n(\delta)=D_n(\rho^{\frac{1}{p}}e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{p}})^p\in G$ (matrice de dilatation).

Comme les matrices de transvection et de dilatation engendrent $GL_n(\mathbb{C})$, on a bien $G=GL_n(\mathbb{C})$.

Remarque 2. C'est faux sur $\mathbb{R}$. Contre-exemple : matrices de déterminant positif.

Solution 6.6. *Si f n'est pas continue en 0, il existe $\varepsilon_0>0$ tel que pour tout $\alpha>0$, il existe $h\in E$ avec $\|h\|\leqslant\alpha$ et $\|f(h)\|>\varepsilon_0$. On prends $\alpha_n=\frac{1}{n+1}$, d'où $\|nh_n\|\leqslant 1$ mais $\underbrace{\|f(nh_n)\|}_{\leqslant M}>n\varepsilon_0\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.*

Donc f est continue en 0. Comme f est linéaire, pour tout $x\in E$,

$$\lim_{\|h\|\to 0}f(x+h)=\lim_{\|h\|\to 0}f(x)+f(h)=f(x)$$

donc f est continue.

On a $f(px)=p(fx)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$ puis $qf(\frac{p}{q}x)=f(px)=pf(x)$ pour tout $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ donc pour tout $r\in\mathbb{Q}$, $f(rx)=rf(x)$. Soit $\lambda\in\mathbb{E}$, il existe une suite de rationnels telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=\lambda$. Comme f est continue, on a

$$\begin{aligned}f(\lambda x)&=\lim_{n\to+\infty}f(r_nx)\\&=\lim_{n\to+\infty}r_nf(x)\\&=\lambda f(x)\end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

Remarque 3. Soit $e_0 = 1$ et $e_1 = \sqrt{2}$ et $(e_i)_{i\in I}$ une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ ($0 \in I$). On définie

$$f\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i e_i\Big) = \lambda_0 e_0 + \sqrt{2}\sum_{i\in I\setminus\{0\}}\lambda_i e_i$$

f vérifie $f(x+y) = f(x) + f(y)$, mais si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers $\sqrt{2}$, $f(r_n) = r_n \to \sqrt{2} \neq f(\sqrt{2}) = 2$.

Solution 6.7.

1. *On a $\alpha(A) \subset \overline{A}$ donc $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)$. Comme $\alpha(A)$ est un ouvert inclus dans $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$ donc $\alpha(A) \subset \alpha(\alpha(A))$.*
2. *Si $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$, on montre aussi que $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$. On a donc $A, \overline{A}, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ et c'est tout.*

Solution 6.8.

1. *Si $d_A = d_B$,*
$$\overline{A} = \{x \in E \mid d_A(x) = 0\} = \{x \in E \mid d_B(x) = 0\} = \overline{B}$$
Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a_1 \in \overline{A}$, $\|x - a_i\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de l'inf). Il existe $a_2 \in A$, $\|a_1 - a_2\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ (par définition de la fermeture). Ainsi,
$$d_A(x) \leqslant \|x - a_2\| \leqslant \|x - a_1\| + \|a_1 - a_2\| \leqslant d_{\overline{A}}(x) + \varepsilon$$
Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, $d_A(x) \leqslant d_{\overline{A}}(x)$. Comme $A \subset \overline{A}$, $d_{\overline{A}} \leqslant d_A$, on a $d_A = d_{\overline{A}} = d_{\overline{B}} = d_B$.
2. *Soit $x \in A$, on a $d_B(x) = |d_B(x) - d_A(x)| \leqslant \rho(A,B)$ donc $\sup\limits_{x\in A} d_B(x) \leqslant \rho(A,B)$, de même pour $\sup\limits_{y\in B} d_A(y)$ donc on on a un première inégalité.*
Réciproquement, soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $\|x - a\| \leqslant d_A(x) + \varepsilon$ et $\|x - b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon$. On a alors
$$d_A(x) \leqslant \|x - a\| \leqslant \|a - b\| + \|x - b\| \leqslant d_B(x) + \varepsilon + \alpha(A,B)$$
Ceci vaut pour tout $\varepsilon > 0$, donc $d_A(x) \leqslant d_B(x) + \alpha(A,B)$. De même, $d_B(x) \leqslant d_A(x) + \alpha(A,B)$ donc $\rho(A,B) \leqslant \alpha(A,B)$.

Solution 6.9.

1. *Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in P(F)^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $y \in \mathbb{C}$ donc il existe $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(x_n) = y_n$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car $\lim\limits_{z\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ (car P est non constant), donc on peut extraire (Bolzano-Weierstrass) $x_{\sigma(n)} \to x$ et $x \in F$ car F est fermé. Par continuité de $z \mapsto P(z)$ sur $\mathbb{C}$, on a $y = P(x) \in P(F)$.*

2. *Soit Θ un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $y \in P(\Theta), \exists x \in \Theta$ tel que $P(x) = y$ et il existe $r > 0$, $B(x,r) \subset \Theta$. Soit $y' \in \mathbb{C}$, supposons que pour tout $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$, on a $|x - x'| > r$. Soit $Q(X) = P(X) - y' = a\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ non constant où a est le coefficient dominatrice de P. Par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$: $|x_i - x| > r$ (car $P(x_i) = y'$), ainsi*

$$|Q(x)| = |y - y'| \geqslant |a|r^n$$

Par contraposée, si $|y - y'| \leqslant \frac{|a|r^n}{2}$, alors il existe $x' \in \mathbb{C}$ tel que $P(x') = y'$ et $|x' - x| < r$.Ainsi, $x' \in B(x,r) \subset \Theta$ et $y' \in P(\Theta)$. Donc $B(y, |a|r^n) \subset P(\Theta)$ et $P(\Theta)$ est un ouvert.

7 Fonction d'une variable réelle

Solution 7.1. *On note* $A_h = \{|\varphi(x) - \varphi(y)| \mid (x, y) \in I^2 \text{ et } |x - y| \leqslant h\}$.

1. ω_φ *est bien défini car* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant 2\|\varphi\|_\infty$*). Si* $0 < h \leqslant h'$*, alors* $A_h \subset A_{h'}$ *donc* $\sup(A_h) \leqslant \sup(A_{h'})$ *donc* $\omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h')$.
2. *Soit* $(h, h') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$*, soit* $(x, y) \in I^2$ *tel que* $|x-y| \leqslant h+h'$ *(où on peut supposer que* $x \leqslant y$*).*
   — *Si* $y \in [x, x+h]$*, alors* $|x - y| \leqslant h$ *donc* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$
   — *Si* $y \in [x+h, x+h+h']$, $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)-\varphi(x+h)|+|\varphi(x+h)-\varphi(y)| \leqslant \omega_\varphi(h)+\omega_\varphi(h')$ *car* $|x - (x+h)| \leqslant h$ *et* $|x + h - y| \leqslant h'$.
   Donc $\omega_\varphi(h + h') \leqslant \omega_\varphi(h) + \omega_\varphi(h')$.
3. *Par récurrence sur* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $\omega_\varphi(nh) = n\omega_\varphi(h)$*. Si* $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$*, on a* $\lambda h \leqslant (\lfloor\lambda\rfloor + 1)h$ *et par croissance et ce qui précède, on a*
$$\omega_\varphi(\lambda h) \leqslant (\lfloor\lambda\rfloor + 1)\omega_\varphi(h) \leqslant (\lambda + 1)\omega_\varphi(h)$$
4. *Soit* $\varepsilon > 0$. φ *étant uniformément continue, il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $(x, y) \in I^2$*, si* $|x - y|\alpha$ *on a* $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \varepsilon$ *et on a pour* $h \leqslant \alpha$, $\omega_\varphi(h) \leqslant \varepsilon$ *d'où* $\lim_{h\to 0} \omega_\varphi(h) = 0$.
   Soit alors $h_0 > 0$ *fixé et* $h > 0$,
   — *si* $h_0 \leqslant h$*, on a* $0 \leqslant \omega_\varphi(h) - \omega_\varphi(h_0) \leqslant \omega_\varphi(h - h_0)$.
   — *si* $h \leqslant h_0$*, on a* $0 \leqslant \omega_\varphi(h_0) - \omega_\varphi(h) \leqslant \omega_\varphi(h_0 - h)$.
   Dans tous les cas, on a $|\omega_\varphi(h)-\omega_\varphi(h_0)| \leqslant \omega_\varphi(|h_0-h|)$*. Donc on a bien* $\lim_{h\to h_0} \omega_\varphi(h) = \omega_\varphi(h_0)$.
   Donc ω_φ *est continue (et même uniformément).*

8 Suites et séries de fonctions

9 Séries entières

10 Intégration

11 Espaces préhilbertiens

12 Espaces euclidiens

13 Calcul différentiel

14 Équation différentielles linéaires