Solutions Exercices MP/MP*

Table des matières

1 Suites et séries de fonctions

Solution 1.1. Pour $x \geqslant 0$, on a $F_n(x) > 0$, on a

$$\ln\left(F_n(x)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{kx}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln\left(1+tx\right) dt = G(x) \tag{1.1}$$

On a $G(0) = 0$ et pour $x > 0$, on a

$$G(x) = \left[\left(t+\frac{1}{x}\right)\ln(1+tx)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+tx}\left(t+\frac{1}{x}\right) dt \tag{1.2}$$

$$= \frac{x+1}{x}\ln(1+x) - 1 \tag{1.3}$$

(utiliser le fait que G est continue sur $[0,1]$ et que $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$).

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(0) = 1 = F(0)$. Pour $x > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = (1+x)^{\frac{x+1}{x}} \times \frac{1}{e} = F(x)$.

F est continue sur $[0,1]$. Soit $x \geqslant 0$. On écrit

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\mathrm{e}^{G_n(x)} - \mathrm{e}^{G(x)}\right| \tag{1.4}$$

On a d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \mathrm{e}^{G_n(x)}\left|G_n(x) - G(x)\right| \leqslant \mathrm{e}^{G_n(x)} \times \frac{x}{2n} \tag{1.5}$$

Si $f(t) = \ln\left(1+tx\right)$, on a $f'(t) = \frac{x}{1+tx} \geqslant 0$. Donc f est croissante et $G_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \ln(1+x)$. Finalement,

$$|F_n(x) - F(x)| \leqslant \frac{x(1+x)}{2n} \tag{1.6}$$

On a donc convergence uniforme sur $[0, A]$ pour tout $A \geqslant 0$. ■

Solution 1.2.

1. Si $x = 0$, on a $u_n(0) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge. Si $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| \tag{1.7}$$

Ainsi, si $|x| < 1$, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n(x)$ converge absolument. Si $|x| > 1$, il existe un rang n_0 à partir duquel $|U_{n+1}(x)| > |U_n(x)|$, donc $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 : $\sum u_n(x)$ diverge.

Si $x = 1$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_0$, on a $\frac{U_{n+1}(1)}{U_n(1)} > 0$ donc $(u_n)_{n\geqslant N_0}$ gare un signe constant. On a

$$\frac{u_{n+1}(1)}{u_n(1)} = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n+1+\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2n} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.8}$$

Ainsi, d'après la règle de Raabe-Duhamel, on a

$$|U_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}} \tag{1.9}$$

Ainsi, on a convergence si et seulement si $\alpha > 2$.

Si $x = -1$, on a toujours $|U_n(-1)| = |U_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. Si $\sum u_n(-1)$ converge, on a $\alpha > 0$. Réciproquement, si $\alpha > 0$, on a $|U_n(-1)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum u_n(-1)$ est une série alternée. On a donc

$$\left|\frac{u_{n+1}(-1)}{u_n(-1)}\right| = \frac{2n+1}{2n+1+\alpha} < 1 \tag{1.10}$$

donc $(|u_n(-1)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : d'après le critère spéciale des séries alternées, $\sum u_n(-1)$ converge. Ainsi, $\sum u_n(-1)$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

2. Supposons la convergence uniforme sur $[0,1[$. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to1^-} u_n(x) = u_n(1)$, d'après le théorème d'interversion des limites, comme il ya convergence uniforme au voisinage de 1, $\sum u_n(1)$ converge. Donc d'après ce qui précède, on a $\alpha > 2$.

   Réciproquement, si $\alpha > 2$, pour tout $x \in [0,1]$, on a $|u_n(x)| \leqslant |u_n(1)|$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). Donc on a convergence normale sur $[0,1]$.

3. Supposons convergence uniforme sur $]-1,0]$. Comme pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to-1^+} u_n(x) = u_n(-1)$. D'après le théorème d'interversion des limites, comme il y a convergence uniforme au voisinage de -1, $\sum u_n(-1)$ converge. D'après ce qui précède, on a $\alpha > 0$.

   Réciproquement, si $\alpha > 0$, soit $x \in [-1,0]$, $\sum u_n(x)$ est alternée dont le terme général décroît en valeur absolue (et tend vers 0). Donc pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant |u_N(x)| \leqslant |u_N(-1)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \tag{1.11}$$

   On a donc convergence uniforme de $\sum u_n(x)$ sur $[-1,0]$

$\blacksquare$

Remarque 1.1. *Pour rappel, on redonne la règle de Raabe-Duhamel : si* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ *et*

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{\frac{1}{n^2}} \tag{1.12}$$

alors il existe $C > 0$ *telle que* $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^\beta}$*. En effet, on écrit*

$$\ln\left((n+1)^\beta v_{n+1}\right) - \ln\left(n^\beta v_n\right) = \beta \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{1.13}$$

donc $(n^\beta v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{R}_+^*$*.*

Remarque 1.2. *On peut aussi éviter la règle de Raabe-Duhamel. On forme*

$$\ln\left(|u_n(1)|\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left|\frac{2k-1}{2k-1+\alpha}\right| = -\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\alpha}{2}\ln(n) - \frac{\gamma\alpha}{2} + K + \underset{n\to+\infty}{o}(1) \tag{1.14}$$

donc $|u_n(1)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{C}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ *avec* $C > 0$*.*

Solution 1.3. Pour $k \geqslant \lfloor x \rfloor$, on a

$$\arctan(k+x) - \arctan(k) \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\tag{1.15}$$

On a

$$f_k(x) = \arctan\left(\frac{x}{1+k(k+x)}\right) = \arctan\left(\frac{x}{k^2} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{x}{k^2} \tag{1.16}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)$ converge absolument et f définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f_k'(x) = \frac{1}{1+(k+x)^2} \tag{1.17}$$

On fixe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, pour tout $x \in [a,b]$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|k+x| \geqslant k - |x| \geqslant k - \underbrace{\max\left(|a|, |b|\right)}_{=M} \geqslant 0 \tag{1.18}$$

pour $k \geqslant \lfloor M+1 \rfloor$.

On a de plus $0 \leqslant f_k'(x) \leqslant \frac{1}{1+(k-M)^2}$ (terme général d'une série à termes positifs convergente). On $\sum_{k \geqslant \lfloor M \rfloor +1} f_k'$ converge normalement sur $[a,b]$. Enfin,

$$f - \sum_{k=1}^{\lfloor M \rfloor} f_k = \sum_{k=\lfloor M \rfloor +1}^{+\infty} f_k \tag{1.19}$$

est donc $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ d'après le théorème de dérivation terme à terme, donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ (car $\sum_{k=1}^{\lfloor M \rfloor} f_k$ est une somme finie de fonctions $\mathcal{C}^1$ donc est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$). Ainsi f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N} f_k(n) &= \sum_{k=0}^{N} \arctan(k+n) - \arctan(k) && (1.20)\\
&= \sum_{k=n}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{N} \arctan(k) && (1.21)\\
&= \sum_{k=N+1}^{n+N} \arctan(k) - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) && (1.22)\\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} n\frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \arctan(k) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \arctan(\frac{1}{k}) = f(n) && (1.23)
\end{aligned}$$

On a $\arctan\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k} > 0$, d'après le théorème de comparaison des sommes partielles de séries à termes positifs divergente, donc $f(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. Par ailleurs, f est croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$\ln\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} f\left(\lfloor x \rfloor\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\lfloor x \rfloor + 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x) \tag{1.24}$$

donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$. ∎

Solution 1.4. Soit $t > 0$, on a $\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-nt}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\mathrm{e}^{-nt}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} -\mathrm{e}^{nt} = 0$ (terme général d'une série à termes positifs convergente car $t > 0$).

On définit

$$\begin{array}{rccl} g_+ : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-xt}\right) \geqslant 0 \end{array} \tag{1.25}$$

On a $-f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_t(x)$. De plus, $g_t'(x) = -\frac{t\mathrm{e}^{-xt}}{1-\mathrm{e}^{-xt}} \leqslant 0$. g_+ est décroissante, et on a

$$\int_n^{n+1} g_+(x)dx \leqslant g_+(x) \leqslant \int_{n-1}^{n} g_+(x)dx \tag{1.26}$$

On somme de $n=1$ à $+\infty$ (on admet l'existence pour $n=0$). On obtient

$$-\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xt}\right)=\int_1^{+\infty} g_+(x)dx \leqslant -f(t) \leqslant \int_0^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xt}\right)dx \tag{1.27}$$

On pose $u=xt$ et $dx=\frac{du}{t}$ car $t>0$. On a

$$\int_1^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xt}\right)dx=\frac{1}{t}\int_t^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{u}\right)du \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}I \tag{1.28}$$

et

$$\int_0^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-xt}\right)dx=\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} -\ln\left(1-\mathrm{e}^{-u}\right)du=\frac{I}{t} \tag{1.29}$$

donc

$$\boxed{f(t) \underset{t\to+0^+}{\sim} -\frac{I}{t}} \tag{1.30}$$

■

Solution 1.5.

1. On a $\|f_n\|_\infty=\frac{1}{2}$ donc
$$\left|\frac{1}{2^p}f_n(x-a_p)\right| \leqslant \frac{1}{2^{p+1}}, \tag{1.31}$$
et $g_n(x)$ est définie. Soit $x\in\mathbb{R}$, on pose
$$\begin{array}{rccc} F_p: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \frac{1}{2^p}f_n(x-a_p) \end{array} \tag{1.32}$$
On a $|F_p(n)|\leqslant\frac{1}{2^{p+1}}$ et pour p fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty}F_p(n)=0$. Donc $\sum_{p\geqslant 0}F_p$ converge normalement sur $\mathbb{N}$. D'après le théorème d'interversion des limites, on a
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0.} \tag{1.33}$$

2. S'il existe $p_0\in\mathbb{N}$ tel que $a_{p_0}\in[a,b]$, alors il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $a_{p_0}+\frac{1}{n}$ ou $a_{p_0}-\frac{1}{n}\in[a,b]$ et $g_n(a_{p_0}\pm\frac{1}{n})\geqslant\frac{1}{2^{p_0+1}}$ (série à termes positifs).

Si pour tout $p\in\mathbb{N}$, $a_p\notin[a,b]$, soit $\varepsilon>0$. Il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que $\sum_{p=N_0+1}^{+\infty}\frac{1}{2^{p+1}}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Alors pour tout $x\in[a,b]$, on a
$$0\leqslant\sum_{p=N_0+1}^{+\infty}\frac{1}{2^p}f_n(x-a_p)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.34}$$

Notons $\alpha) \min_{\substack{0\leqslant p\leqslant N_0\\ x\in[a,b]}} |x-a_p|>0$. Pour tout $x\in[a,b]$, pour tout $p\in[\![0,N_0]\!]$, $|x-a_p|\geqslant\alpha$ et il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_1$, $\frac{1}{n}\leqslant\alpha$. Alors pour tout $x\in[a,b]$, pour tout $p\in[\![0,N_0]\!]$, $f_n(x-a_p)\leqslant f_n(\alpha)$ et

$$0\leqslant\sum_{p=0}^{N_0}\frac{1}{2^p}f_n(x-a_p)\leqslant\sum_{p=0}^{N_0}\frac{1}{2^p}f_n(\alpha)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0. \tag{1.35}$$

Ainsi, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_2$, pour tout $x\in[a,b]$, $\sum_{p=0}^{N_0}\frac{1}{2^p}f_n(x-a_p)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, pour tout $x\in[a,b]$, $0\leqslant g_n(x)\leqslant\varepsilon$. D'où le résultat.

■

Solution 1.6. f_n est définie car $\frac{1}{x^2+n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$. Soit $a>0$. Sur $[-a,a]$, $|f_n(x)|\leqslant\frac{|a|}{n^2}$, terme général d'une série à termes positifs convergente. Il y a donc convergence normale sur $[-a,a]$, et f_n est continue pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc f l'est aussi. Soit $g_n(x)=\frac{1}{x^2+n^2}$. On a $g_n'(x)=-\frac{2x}{(x^2+n^2)^2}$ et pour tout $x\in[-a,a]$, $|g_n'(x)|\leqslant\frac{2|a|}{n^4}$. Il y a à nouveau convergence normale sur $[-a,a]$ pour tout $a\in\mathbb{R}$ et donc $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}g_n(x)$ est $\mathcal{C}^1$ et donc f aussi.

Sur $[-1,1]$, on peut intervertir les limites :

$$\boxed{\lim_{x\to0}f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to0}f_n(x)=0.} \tag{1.36}$$

Fixons $x>0$, on pose $\psi_x(t)=\frac{x}{x^2+t^2}$. ψ_x est positive décroissante. Ainsi, pour tout $n\geqslant1$,

$$\int_n^{n+1}\psi_x(t)\mathrm{d}t\leqslant\psi_x(n)\leqslant\int_{n-1}^{n}\psi_x(t)\mathrm{d}t. \tag{1.37}$$

On a

$$\int_A^X\frac{x\mathrm{d}t}{x^2+t^2}=\int_A^X\frac{\frac{\mathrm{d}t}{x}}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}\xrightarrow[X\to+\infty]{}\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{A}{x}\right). \tag{1.38}$$

Ainsi, en sommant pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\int_1^{+\infty}\psi_x(t)\mathrm{d}t\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\psi_x(n)\leqslant\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\mathrm{d}t. \tag{1.39}$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{\pi}{2}$.

En 0, on a $f(x) = xg(x)$ avec convergence normale sur $\mathbb{R}$ pour g, g continue sur $\mathbb{R}$ et $g(0) = \frac{\pi^2}{6}$. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\frac{\pi^2}{6}.} \tag{1.40}$$

■

Solution 1.7. Les f_n sont M-Lipschitziennes. Soient $x, y \in [a, b]$. On a $|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant M\,|x-y|$ donc par passage à la limite, f est M-Lipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$, on considère la subdivision $(a_1, \ldots, a_N)$ de $[a, b]$ de pas δ. Soit $x \in [a, b]$ et $K \in [\![0, N-1]\!]$ tel que $x \in [a_K, a_{K+1}]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant |f_n(x) - f_n(a_K)| + |f_n(a_K) - f(a_K)| + |f(a_K) - f(x)| \leqslant M\delta + |f_n(a_k) - f(a_k)| + M\delta. \tag{1.41}$$

On s'impose $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, on a pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $|f_n(a_k) - f(a_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, pour tout $n \geqslant N_1$, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. ■

Remarque 1.3. *L'existence de M est nécessaire, cf $f_n\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = x^n$.*

Remarque 1.4. *f n'est pas nécessairement dérivable, cf $f_n\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ avec $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ et*

$$|f_n'(x)| = \left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}\right| \leqslant 1. \tag{1.42}$$

Solution 1.8. Si $x = 2$, on a

$$f_n(2) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{p}{n}\right)^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \left[\ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^1 = \ln(2). \tag{1.43}$$

Si $x < 2$, on a pour tout $n \geqslant 1$, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{1}{n}. \tag{1.44}$$

On somme pour obtenir

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant f_n(x) \leqslant 1 \tag{1.45}$$

et donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 1.} \tag{1.46}$$

De plus, soit $a < 2$, pour tout $x \in]-\infty, a]$, on a

$$0 \leqslant 1 - f_n(x) \leqslant 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^x}} \leqslant 1 - \frac{n}{\sqrt{n + n^a}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.47}$$

Donc $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers 1 sur $]-\infty, a]$.

Si $x > 2$, soit $\alpha \in [0,1]$, on a

$$f_n(x) = \sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} + \sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor + 1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}}. \tag{1.48}$$

On a

$$\sum_{p=1}^{\lfloor n^\alpha \rfloor} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+n^2}} \underset{n\to+\infty}{n^{\alpha-1}}, \tag{1.49}$$

et

$$\sum_{p=\lfloor n^\alpha \rfloor + 1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + p^x}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2 + n^{x\alpha}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^{x\alpha - 2}}}. \tag{1.50}$$

On choisit α tel que $\alpha < 1$ et $x\alpha - 2 > 0$ (possible car $x > 2$). Si $a > 2$, pour $\alpha = \left(1 + \frac{2}{a}\right) \times \frac{1}{2}$, si $x \geqslant a$, on a $\frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{a} < \alpha < 1$ donc

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{n^\alpha}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{1 + n^{\alpha x - 2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.51}$$

Il y a donc convergence uniforme vers 0 sur $[a, +\infty[$. ∎

Solution 1.9.

1. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times [\![0, n]\!]$,

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n \times n \times \cdots \times n} \leqslant \frac{1}{k!}. \tag{1.52}$$

Ainsi,

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - f_n(a) \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} \right\|, \tag{1.53}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) \|a\|^k, \tag{1.54}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\|a\|^k}{k!} - \left(1 + \frac{\|a\|}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.55}$$

On a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = \exp(a)$.

Soit $R \geqslant 0$, pour tout $a \in \overline{B(0,R)}$,

$$\|\exp(a) - f_n(a)\| \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{n^k} \right\| + \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right\| \tag{1.56}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \right) R^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.57}$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\exp(a)$ sur les compacts.

2. D'après ce qui précède, $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} = \sin(z)$. Et on a convergence sur les compacts.

3. On peut déjà dire que $\deg(P_n) \leqslant 2n+1$. Le coefficient en X^{2n+1} de P_n est

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\mathrm{i}}{2n+1}\right)^{2n+1} - \left(\frac{-\mathrm{i}}{2n+1}\right)^{2n+1}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{(2n+1)^{2n+1}} \times \frac{(-1)^n}{2\mathrm{i}} [\mathrm{i} - (-\mathrm{i})] \neq 0 \tag{1.58}$$

et donc $\deg(P_n) = 2n+1$.

Le coefficient en X est $\frac{(2+1)\left(\frac{\mathrm{i}}{2n+1} - \left(\frac{-\mathrm{i}}{2n+1}\right)\right)}{2\mathrm{i}} = 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$P_n(z) = 0 \Longleftrightarrow \left(1 + \frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 - \frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right)^{2n+1}, \tag{1.59}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ 1 - \frac{\mathrm{i}z}{2n+1} = \left(1 + \frac{\mathrm{i}z}{2n+1}\right) \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right), \tag{1.60}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ 1 - \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\mathrm{i}z}{2n+1} \left(1 + \exp\left(\frac{2\mathrm{i}k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{1.61}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ z = (2n+1) \times (-\mathrm{i}) \times \frac{(-2\mathrm{i}) \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}{2\cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}, \tag{1.62}$$

$$\Longleftrightarrow \exists k \in [\![0, 2n]\!],\ = -(2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right). \tag{1.63}$$

On a

$$P_n = aX \times \prod_{k=1}^{2n} \left(X + (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{1.64}$$

$$= aX \prod_{k=1}^{n} \left(X + (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n} \left(X + (2n+1)\tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{1.65}$$

$$= aX \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - (2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right), \tag{1.66}$$

$$= a'X \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right). \tag{1.67}$$

Comme le coefficient de X vaut 1, on a $a' = 1$, d'où le résultat.

4. Soit $f_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ telle que $f(p) = a_{n,p}$. D'après (i), $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{N}$, et d'après (ii), on peut intervertir et $\lim\limits_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n$.
5. tan est impaire, et $\tan'' = 2\tan(1+\tan^2) > 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, donc tan est convexe et $\tan(t) > t$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et c'est bon par imparité.

   Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \frac{x^2}{k^2\pi^2}$. Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant k_0$, $\frac{x^2}{k^2\pi^2} \leqslant \frac{1}{2}$, alors pour tout $n \geqslant k_0$, pour tout $k \in [\![k_0, n]\!]$, $1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} \geqslant \frac{1}{2} > 0$. Alors

$$0 \leqslant -\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{3n+1}\right)}\right)\right) = \sum_{k=k_0}^{n} -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right). \tag{1.68}$$

   On a

$$0 \leqslant -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \leqslant -\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right) = \underset{k\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \tag{1.69}$$

   terme général d'une série à termes positifs convergente.

   Si $g_n(x) = -\ln\left(\prod_{k=k_0}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{3n+1}\right)}\right)\right)$, alors $g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_{n,k}$ où l'on définit pour tout $k \geqslant k_0, n \geqslant k_0$,

$$a_{n,k} = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \tag{1.70}$$

   si $k \leqslant n$, et 0 sinon. On pose aussi $\alpha_k = -\ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. On a bien $|a_{n,k}| \leqslant \alpha_k$ terme général d'une série à termes positifs convergente.

Pour $k \geqslant k_0$ fixé, pour $n \geqslant k$, on a

$$a_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha_k. \tag{1.71}$$

On peut donc appliquer ce qui précède, et on a

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(x) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \alpha_k, \tag{1.72}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=k_0} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) = \prod_{k=k_0}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right). \tag{1.73}$$

Soit $R_n(x) = x\prod_{k=1}^{k_0} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2 \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\prod_{k=1}^{k_0} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$. Finalement, on a bien

$$\boxed{\sin(x) = x\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).} \tag{1.74}$$

■

Remarque 1.5. *En identifiant le coefficient en x^3, on obtient*

$$-\frac{1}{6} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2}, \tag{1.75}$$

d'où

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}. \tag{1.76}$$

De même, en identifiant le coefficient en x^5, on obtient

$$\frac{1}{120} = \sum_{\substack{(k_1,k_2)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ k_1\neq k_2}} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \pi^4} = \sum_{(k_1,k_2)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{k_1^2 k_2^2 \pi^4} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4\pi^4} = \zeta(2)^2 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4\pi^4}. \tag{1.77}$$

On trouve donc

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}. \tag{1.78}$$

De la même façon, on montre de manière générale que

$$\zeta(2p) = a_p \pi^{2p}, \tag{1.79}$$

avec $a_p \in \mathbb{Q}$.

Solution 1.10.

1. Soit $\alpha \in [a,b]$. f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. On a $f([0,1]) \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$. Pour tout $x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $f(x) \geqslant x$. $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante, majorée par $\frac{1}{2}$, donc converge vers $\frac{1}{2}$ seul point fixe de f (continue). Ainsi (f_n) converge simplement vers $\frac{1}{2}$ sur $[a,b]$.

   Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left|f_n(x) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - f_n(x) \leqslant \max\left(\frac{1}{2} - f_n(a), \frac{1}{2} - f_n(b)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \tag{1.80}$$

   Donc $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

   On a $f_n(0) = f_n(1) = 0 \neq \frac{1}{2}$, on n'a donc pas la continuité de la limite simple. Donc il ne peut y avoir convergence uniforme sur $[0,1]$ (même sur $]0,1[$).

2. Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Q_2 est dense dans $\mathbb{R}$, donc pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, il existe $(\alpha_{k,m})_{m\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}_2^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n} \alpha_{k,m} = a_k$. Soit $Q_n = \sum_{k=0}^n \alpha_{k,m} X^k \in \mathbb{Q}_2[X]$. Pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$|P(x) - Q(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k - \alpha_{k,m}|\,|x|^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k - \alpha_{k,m}| \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0 \tag{1.81}$$

   donc il existe $M \in \mathbb{N}$, si $Q = Q_M$, alors $\|P - Q\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$, tel que $\|f - P\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Si $Q = \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{2^{n_k}} X^k$, soit pour $m \in \mathbb{N}$, $Q_m = \sum_{k=0}^n p_k (f_m)^{n_k} X^k$ converge uniformément vers Q sur $[a,b]$ (n est fixé), et $Q_m \in \mathbb{Z}[X]$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathbb{Z}[X]$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|Q_{n_0} - Q\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Si $A = Q_{n_0} \in \mathbb{Z}[X]$, on a bien $\|f - A\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \varepsilon$.

   Sur $[0,1]$, on n'a pas de suite de polynômes dans $\mathbb{Z}[X]$ qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f = \frac{1}{2}$ car pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(0) \in \mathbb{Z}$.

■

Solution 1.11.

1. Par croissance des taux d'accroissements (en un point fixé) :

$$\frac{u_n(y) - u_n(x)}{y - x} \leqslant \frac{u_n(y) - u_n(b)}{y - b} \leqslant \frac{u_n(\beta) - u_n(b)}{\beta - b}, \tag{1.82}$$

et de même

$$\frac{u_n(y)-u_n(x)}{y-x} \geqslant \frac{u_n(\alpha)-u_n(a)}{\alpha-a}. \tag{1.83}$$

Finalement, on a

$$\left|\frac{u_n(x)-u_(y)}{x-y}\right| \leqslant \max\left(\left|\frac{u_n(\alpha)-u_n(a)}{\alpha-a}\right|, \left|\frac{u_n(\beta)-u_n(b)}{\beta-b}\right|\right), \tag{1.84}$$

qui sont des suites bornées car convergent. D'où l'existence de A.

2. Par passage à la limite (simple), u est A-Lipschitzienne sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon>0$. Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ une subdivision de pas d de $[a,b]$. Pour tout $x\in[a,b]$, il existe $k\in[\![1,N-1]\!]$ tel que $x\in[a_k,a_{k+1}]$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$|u_n(x)-u(x)| \leqslant |u_n(x)-u_n(a_k)|+|u_n(a_k)-u(a_k)|+|u(a_k)-u(x)|, \tag{1.85}$$

$$\leqslant 2Ad+|u_n(a_k)-u(a_k)|. \tag{1.86}$$

On choisit d tel que $2Ad\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Par convergence simple, il existe $N_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N_0$, pour tout $k\in[\![1,N]\!]$, $|u_n(a_k)-u(a_k)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n\geqslant N_0$, pour tout $x\in[a,b]$, $|u_n(x)-u(x)|\leqslant\varepsilon$. Donc (u_n) converge uniformément vers u sur $[a,b]$.

■

Remarque 1.6. *C'est faux si $I=[a,b]$, cf $f_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ donnée par $f_n(x)=x^n$.*

Solution 1.12. Soit $f\in E$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. Si φ est une fonction polynômiale, $\varphi=\sum_{k=0}^N\alpha_kX^k$. Pour tout $k\in[\![0,N]\!]$, (f_n^k) converge uniformément vers f^k sur $[a,b]$. Par combinaison linéaire, $(\varphi\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\varphi\circ f$ sur $[a,b]$. $(\|f_n\|_\infty)$ est bornée (car converge), donc il existe $A\geqslant0$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty\leqslant A$ et $\|f\|_\infty\leqslant A$.

Soit $\varepsilon>0$, il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ telle que $\|\varphi-P\|_{\infty,[-A,A]}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}$ d'après le théorème de Weierstrass. Ainsi, pour tout $x\in[a,b]$,

$$|(\varphi\circ f_n)(x)-(\varphi\circ f)(x)| \leqslant |(\varphi\circ f_n)(x)-(P\circ f_n)(x)| \tag{1.87}$$

$$+|P\circ f_n(x)-P\circ f(x)|+|P\circ f(x)-\varphi\circ f(x)|, \tag{1.88}$$

$$\leqslant 2\frac{\varepsilon}{3}+\|P\circ f_n-P\circ f\|_{\infty,[a,b]} \tag{1.89}$$

et le dernier terme tend vers 0 donc est plus petit que $\frac{\varepsilon}{3}$ pour n suffisamment grand. D'où le résultat.

■

Remarque 1.7. *Pour la deuxième partie du raisonnement, on peut aussi invoquer la continuité uniforme de φ sur $[-A, A]$.*

Solution 1.13.

1. Pour $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{1}{1+n^2}$ donc on a convergence normale sur $\mathbb{R}^+$. Pour $t < 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} (t) = +\infty$ donc la série diverge grossièrement. Ainsi, $E = \mathbb{R}_+$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et on a convergence normale donc f est continue sur E. Pour tout $n \geqslant 1$, $\lim\limits_{t \to +\infty} (t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} f_0(t) = 1$. On peut intervertir par convergence normale, donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f_n(t) = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur E. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a
$$f_n^{(k)}(t) = \frac{(-n)^k \mathrm{e}^{-nt}}{1+n^2}. \tag{1.90}$$
Soit $\alpha > 0$. Pour $t \geqslant \alpha$, on a
$$\left|f_n^{(k)}(t)\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{1+n^2} = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{1.91}$$
Ainsi, $\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 0$, donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $t > 0$,
$$\boxed{f''(t) + f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-t}}.} \tag{1.92}$$

■

Solution 1.14.

1. On a $u_n(0) = 0$. Soit $x > 0$, on a $|u_n(x)| = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc on a bien convergence simple sur $[0, 1]$.
2. On a
$$u_n(x) = \frac{(1-nx)\mathrm{e}^{-nx}}{n^a}. \tag{1.93}$$
Ainsi, u_n est croissante de 0 à $\frac{1}{n}$ et décroît de $\frac{1}{n}$ à 1, et on a $u_n(0) = 0$, $u_n(1) = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{a}$ et $u_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}n^{a+1}} = \|u_n\|_{\infty,[0,1]}$. On a donc convergence normale si et seulement si $a > 0$.

3. Pour $a = 1$ (respectivement $a = 2$), S est continue par convergence normale car u_n est $\mathcal{C}^\infty$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $x > 0$, si $g_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$ (respectivement $h_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$) et $g(x) = \frac{S(x)}{x}$ (respectivement $h(x) = \frac{S(x)}{x}$), soit $\alpha \in]0, 1]$ et $x \in [\alpha, 1]$, on a

$$|g_n'(x)| = \left|\mathrm{e}^{-nx}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-n\alpha} \tag{1.94}$$

(respectivement

$$|h_n'(x)| \leqslant \left|\frac{\mathrm{e}^{-n\alpha}}{n}\right| \tag{1.95}$$

et $|h_n''(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-n\alpha}$). Donc $\sum g_n'$ (respectivement $\sum h_n'$ et $\sum h_n''$) converge normalement sur $[\alpha, 1]$ pour tout $\alpha \in]0, 1]$ donc g est $\mathcal{C}^1$ (respectivement h est $\mathcal{C}^2$) sur $]0, 1]$.

Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\mathrm{e}^{-nx} = \frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}}, \tag{1.96}$$

et donc (par changement de variable dans l'intégrale)

$$g(x) = g(1) + \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-1}\right) - \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-x}\right). \tag{1.97}$$

puis $S(x) = xg(x)$. On fait de même pour $a = 2$.

■

Solution 1.15. Si $x > 0$, on a $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{+nx^{\frac{3}{2}}} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Ainsi, le domaine de f est $]0, +\infty[$.

Chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$, pour $x \geqslant a$, pour $n \geqslant 1$, on a

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + na^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.98}$$

et le terme de droite est le terme général d'un série à termes positifs convergente indépendante de x. Donc $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement ssur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(nx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \times \zeta\left(\frac{3}{2}\right), \tag{1.99}$$

donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Fixons $x > 0$, soit

$$\begin{array}{rccc} g_x : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{1+tx^{\frac{3}{2}}} \end{array} \tag{1.100}$$

g est continue positive et décroissante. Elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ car est équivalente à $\frac{1}{\sqrt{t}}$ quand $t \to 0$, et est un $O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$ quand $t \to +\infty$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$g_x(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant g_x(n) \tag{1.101}$$

Ainsi, en sommant, on obtient

$$f(x) - \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \times \frac{1}{1+(n+1)x^{\frac{3}{2}}} \leqslant I(x) = \int_1^{+\infty} g_x(t)\mathrm{d}t \leqslant f(x). \tag{1.102}$$

Pour calculer $I(x)$, on fait les changements de variables $u = \sqrt{t}$ puis $v = ux^{\frac{3}{4}}$ pour avoir

$$I(x) = \frac{2}{x^{\frac{3}{4}}} \int_{x^{\frac{3}{4}}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{x^{\frac{3}{4}}}. \tag{1.103}$$

Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi}{x^{\frac{3}{4}}}$. Donc f est intégrale sur $]0,1]$. Finalement, f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. ■

Remarque 1.8. *On peut aussi former, pour $n \geqslant 1$,*

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}(1+nx^{\frac{3}{2}})} = \frac{1}{n^{\frac{7}{6}}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.104}$$

en faisant le changement de variables $u = n^{\frac{2}{3}}x$. u_n est alors le terme général d'une série à termes positifs convergente, et on peut intervertir les signes $\sum$ et $\int$.

Solution 1.16.

1. Si $x < 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = +\infty. \tag{1.105}$$

   Si $x = 0$, on a $S(0) = 0$. Si $x > 0$, on a $\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc on a convergence simple sur $\mathbb{R}_+$.

2. On cherche $\sup_{x\geqslant 0} |f_n(x)|$. Pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$f_n'(x) = \frac{(1-nx)}{\ln(n)}\mathrm{e}^{-nx}. \tag{1.106}$$

Ainsi, le sup est atteint en $x = \frac{1}{n}$. Comme $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n\mathrm{e}\ln(n)}$ est le terme général d'une série à termes positifs divergente (série de Bertrand), on n'a pas convergence normale sur $\mathbb{R}_+$.

Soit $N \geqslant 2$, $x \geqslant 0$. On a

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{x}{\ln(N)} \sum_{n=N}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}, \tag{1.107}$$

$$\leqslant \frac{x}{\ln(N)} \frac{\mathrm{e}^{-Nx}}{1-\mathrm{e}^{-x}}, \tag{1.108}$$

$$\leqslant \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{\ln(N)(1-\mathrm{e}^{-x})} \times \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}}, \tag{1.109}$$

$$\leqslant \frac{x}{\ln(N)(\mathrm{e}^{x}-1)}. \tag{1.110}$$

$x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1} \in \mathcal{C}^0\left(\mathbb{R}_+^*\right)$, tend vers 1 quand $x \to 0$ et tend vers 0 quand $x \to +\infty$. Donc cette fonction est bornée par $M \geqslant \mathrm{e}$ et

$$\sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \leqslant \frac{M}{\ln(N)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0. \tag{1.111}$$

On a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

3. On a $S(x) = x \times \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = x \times \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x)$. g_n est $\mathcal{C}^1$, et pour $a > 0$, $x \geqslant a$ et $n \geqslant 2$, on a $g_n'(x) = -\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$ d'où $|g_n'(x)| \leqslant \frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} \leqslant \frac{n\mathrm{e}^{-na}}{\ln(n)}$ qui est le terme général d'une série à termes positifs convergente car $a > 0$. Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n'$ converge normalement sur $[a, \infty[$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} g_n$ convergen simplement sur $\mathbb{R}_+$ donc $\sum_{n\geqslant 2} g_n$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

   On a $\frac{S(x)-S(0)}{x-0} = \sum_{n=2}^{+\infty} g_n(x) = \tau(x)$. τ est décroissante car les g_n le sont, donc $\tau(x) \xrightarrow[x\to 0]{} l \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Comme $g_n \geqslant 0$, pour tout $N \geqslant 2$ et $x > 0$, on a $\sum_{n=2}^{N} g_n(x) \leqslant \tau(x)$. Quand $x \to 0$, on a donc

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(n)} \leqslant l, \tag{1.112}$$

   et quand $N \to +\infty$, on a $l = +\infty$. Ainsi, S n 'est pas dérivable à droite en 0.

4. On a $x^k S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{k+1}\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} k_n(x)$. On a

$$k_n'(x) = \frac{x^k\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}\left(k+1-nx\right), \tag{1.113}$$

   donc le sup est atteinte en $x = \frac{k+1}{n}$. Pour tout $x \geqslant K+1$, on a $|k_n(x)| \leqslant |k_n(K+1)| \leqslant \frac{(k+1)^{k+1}\mathrm{e}^{-(k+1)n}}{\ln(n)} = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $\sum_{n\geqslant 2} k_n$ converge normalement sur $[k+1, +\infty[$ et on peut intervertir les limites. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^k S(x) = 0.} \tag{1.114}$$

$\blacksquare$

Solution 1.17.

1. Q_k est $\mathcal{C}^\infty$, 2π-périodique, paire, $0 \leqslant Q_k(t) \leqslant c_k$, $Q_k(-\pi) = Q_k(\pi) = 0$, $Q_k(0) = c_k$. Q_k est décroissante sur $[0,\pi]$. Pour tout $t \in [\delta,\pi]$, $0 \leqslant Q_k(t) \leqslant c_k \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k$. On a $I_k = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k \mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k}(u)\mathrm{d}u \underset{k\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{\pi}{k}}$ (via les intégrales de Wallis). Ainsi, c_k est équivalent à $\sqrt{k\pi}$ quand $k \to +\infty$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} c_k \left(\frac{1+\cos(\delta)}{2}\right)^k = 0$. Ainsi, on a bien

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} \sup_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} Q_k(t) = 0.} \tag{1.115}$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$|P_k(t) - f(t)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)\mathrm{d}s - \int_{-\pi}^{\pi} f(t)Q_k(s)\mathrm{d}s\right|, \tag{1.116}$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|\, Q_k(s)\mathrm{d}s, \tag{1.117}$$

car $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_k(s)\mathrm{d}s = 1$. f est $\mathcal{C}^0$ sur $[0,4\pi]$ donc f est uniformément continue sur $[0,4\pi]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que pour tout $(t,t') \in [0,4\pi]^2$, $|t-t'| \leqslant \delta_1 \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$. Alors pour tout $(t,t') \in \mathbb{R}^2$, si $|t-t'| \leqslant \min(\delta_1, 2\pi)$, alors $|f(t) - f(t')| \leqslant \varepsilon$. Donc f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et bornée sur $\mathbb{R}$ car continue 2π-périodique.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ ($\delta < \pi$) tel que pour tout $(t,t') \in [0,4\pi]^2$, $|t-t'| \leqslant \delta \Rightarrow |f(t) - f(t')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Alors on a

$$|P_k(t) - f(t)| \leqslant \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\delta,\delta]} 2\,\|f\|_\infty\, Q_k(s)\mathrm{d}s}_{\leqslant 2\|f\|_\infty \sup\limits_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} Q_k(t) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{\varepsilon}{2} Q_k(s)\mathrm{d}s}_{\leqslant\frac{\varepsilon}{2}}, \tag{1.118}$$

donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|P_k(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$. Donc P_k converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons que $P_k \in F$. On a

$$P_k(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)Q_k(s)\mathrm{d}s, \tag{1.119}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)Q_k(t-u)\mathrm{d}u, \tag{1.120}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{c_k}{2^k}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(1+\cos(t-u)\right)^k \mathrm{d}u, \tag{1.121}$$

$$= \frac{c_k}{2^{k+1}\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sum_{m=-k}^{k}\alpha_m \mathrm{e}^{\mathrm{Im}(t-u)}\mathrm{d}u, \tag{1.122}$$

où la dernière ligne est obtenue en développant $\cos(t-u) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t-u)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u-t)}}{2}$. Ainsi,

$$P_k(t) = \sum_{m=-k}^{k}\left(\frac{c_k}{2^{k+1}\pi}\alpha_m\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mu}\mathrm{d}u\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mt} \in F. \tag{1.123}$$

Donc F est dense dans E.

■

Remarque 1.9. *Plus généralement, on peut remplacer la suite Q_k par une « approximation de l'unité » : il faut une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

i) $\forall k \in \mathbb{N}$, f_k *est continue et positive,*

ii) $\int_{\mathbb{R}} f_k = 1$,

iii) $\forall \delta > 0$, $\lim\limits_{k+\infty} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} f_k = 0$.

Alors si f est uniformément continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors $(f \star f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Remarque 1.10. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{C} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \tag{1.124}$$

f est continue, on lui associe $g = f \circ \cos$, qui est continue 2π-périodique. Ainsi, $(P_k \star g)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$ et

$$(Q_k \star g)(t) = \frac{c_k}{2^{k+1}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos(t-u)\right)^k \mathrm{d}u, \tag{1.125}$$

qui est une fonction de t parie car g l'est. On a $(1+\cos(t-u))^k = \left(1+\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)\right)^k$. En développant, on a

$$(Q_k \star g)(t) = A_k(\cos(t),\sin(t)) = B_k(\cos(t)), \tag{1.126}$$

où $A_k \in \mathbb{C}[X,Y]$ (polynôme à deux variables) et $B \in \mathbb{C}[X]$ par parité. Ainsi, $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-1,1]$: on vient de redémontrer le théorème de Weierstrass.

Solution 1.18.

1. Si (u_n) est croissante, on pose $f_n = u - u_n$. Sinon, on pose $f_n = u_n - u$.
2. f_n est continue et $F_{n,\varepsilon} = f_n^{-1}\left([\varepsilon, +\infty[\right)$ donc $F_{n,\varepsilon}$ est fermé dans K, donc fermé.

   Si $x \in F_{n+1,\varepsilon}$, on a $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x) \geqslant \varepsilon$ donc $x \in F_{n,\varepsilon}$.

   Soit $x \in K$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant f_N(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ donc $x \notin F_{n,\varepsilon}$ et $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $F_{n,\varepsilon} \neq \emptyset$, alors soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in F_{n,\varepsilon}$. K étant compact, il existe $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x \in K$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(k) \geqslant n$. $x_{\varphi(k)} \in F_{\varphi(k),\varepsilon} \subset F_{n,\varepsilon}$. Alors, quand $k \to +\infty$, $x \in F_{n,\varepsilon}$ (fermé) donc $x \in \cap_{n\in\mathbb{N}} F_{n,\varepsilon} = \emptyset$ ce qui est absurde.

   Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F_{N,\varepsilon} = \emptyset$ et pour tout $n \geqslant N$, $F_{n,\varepsilon} = \emptyset$. Donc pour tout $n \geqslant N$, pour tout $x \in K$, $f(x) < \varepsilon$. Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur K.
3. f est continue sur un compact donc son maximum est atteint et x_n existe. $(\|f_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante positive, donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \geqslant 0$. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in K$. Si $l > 0$, alors il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_{\varphi(N_0)}(x) \leqslant \frac{l}{2}$. Par continuité de $f_{\varphi(N_0)}$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $y \in \overline{B(x,\alpha)}$, $f_{\varphi(N_0)}(y) < l$. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N_1$, $x_{\varphi(n)} \in \overline{B(x,\alpha)}$ donc pour tout $n \geqslant N_1$, $f_{\varphi(N_0)}(x_{\varphi(n)}) < l$. Pour $n = \max(N_0, N_1)$, on a

   $$l \leqslant f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) \leqslant f_{\varphi(N_0)}(x_{\varphi(n)}) < l, \tag{1.127}$$

   ce qui est absurde. Donc $l = 0$ et (f_n) converge uniformément sur K.

■

Table des figures