



UFABC

ENGENHARIA AMBIENTAL E URBANA

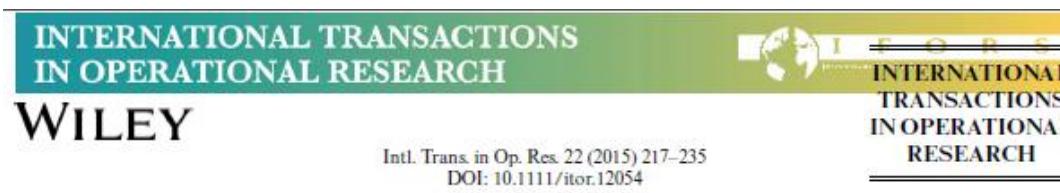
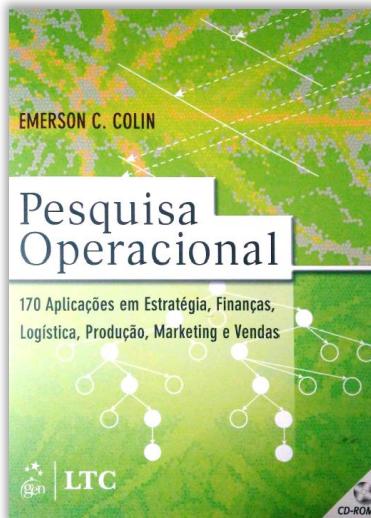
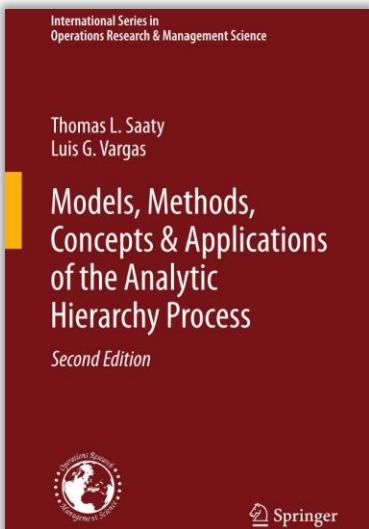
ESZU014-17 – Métodos de tomada de decisão aplicados ao planejamento urbano-ambiental

Humberto de Paiva Junior

Aula 10 – Analytic Hierarchy Process

1. Definição e propósito
2. Estrutura
3. Julgamento
4. Consistência
5. Sensibilidade
6. Técnicas
7. Aplicação e Interpretação

Referências



PriEsT: an interactive decision support tool to estimate priorities from pairwise comparison judgments

Sajid Siraj^{a,b}, Ludmil Mikhailov^c and John A. Keane^d

^aPortsmouth Business School, Richmond Building, Portland Street, University of Portsmouth,
Portsmouth PO1 3DE, United Kingdom

^bDepartment of Electrical Engineering, COMSATS Institute of Information Technology, Wah Cantown, Pakistan

^cManchester Business School, Booth Street West, The University of Manchester, Manchester M15 6PB, United Kingdom

^dSchool of Computer Science, The University of Manchester, Manchester M13 9PL, United Kingdom
E-mail: sajidsiraj@comsats.edu.pk [Siraj]

Received 11 February 2013; received in revised form 10 September 2013; accepted 10 September 2013



Modelos de inteligência artificial

- Anthropic. (2024). Claude 3.5 Sonnet [Modelo de inteligência artificial].
<https://www.anthropic.com>
- Google AI. (n.d.). Gemini. [Modelo de linguagem]. Google. Disponível em:
<https://cloud.google.com/ai/llms?hl=en> [Acesso em: 20 out. 2024].
- Google. (n.d.). Google Colaboratory. [Ambiente de programação em Python]. Disponível em: <https://colab.research.google.com/> [Acesso em: 20 out. 2024].
- Maritaca AI. (2024). Maritaca AI Chatbot [Software online]. Disponível :
<https://www.maritaca.ai/>
- Microsoft. (2024). Copilot [Software]. Disponível em <https://www.microsoft.com>.
- OPENAI. ChatGPT (out. 2024). Disponível em: <https://chat.openai.com/>. Acesso em: 20 out. 2024.
- Perplexity AI. (2024). Perplexity AI: ferramenta de inteligência artificial com referências em tempo real. Disponível em: <https://sejarelevante.fdc.org.br/perplexity-ai/> [Acesso em: 20 out. 2024].



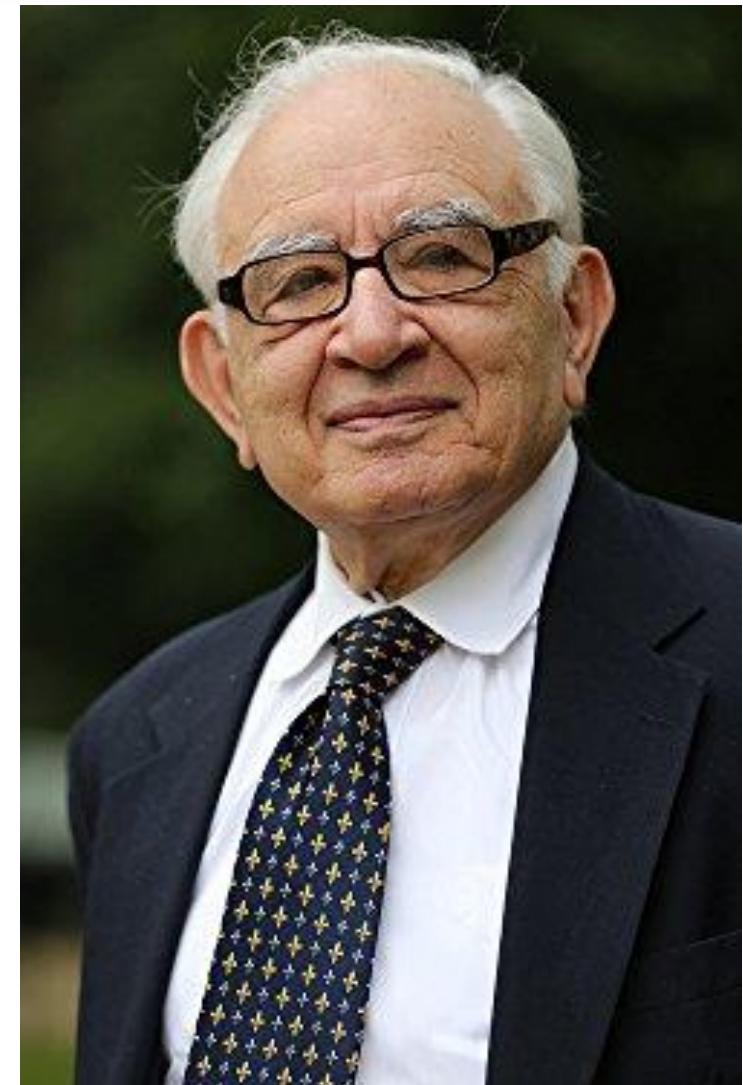
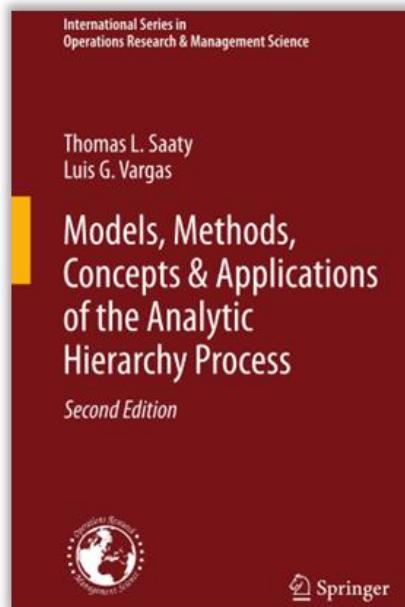
UFABC

ENGENHARIA AMBIENTAL E URBANA
Definição e propósito

Aula 08 – Analytic Hierarchy Process (AHP)

Definição

O Processo Analítico Hierárquico (AHP) é uma abordagem básica para tomada de decisão. Ele é projetado para lidar tanto com o racional quanto com o intuitivo, a fim de selecionar o melhor entre várias alternativas avaliadas em relação a vários critérios. Nesse processo, o tomador de decisão realiza julgamentos simples de comparação pareada, que são então usados para desenvolver prioridades gerais para classificar as alternativas. O AHP permite tanto a inconsistência nos julgamentos quanto fornece um meio para melhorar a consistência.



Thomas Saaty
1926-2017



UFABC

ENGENHARIA AMBIENTAL E URBANA
Estrutura

Axioma 1: Reciprocidade

Matriz de comparações paritárias

$$a_{ij} > 0$$

$$a_{ij} = 1 \therefore i = j$$

$$a_{ji} = \frac{1}{a_{ij}}$$

$$a_{jk} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{12} & 1 & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \hline a_{1j} & a_{ij} & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline a_{1n} & a_{in} & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$



Exemplo de reciprocidade

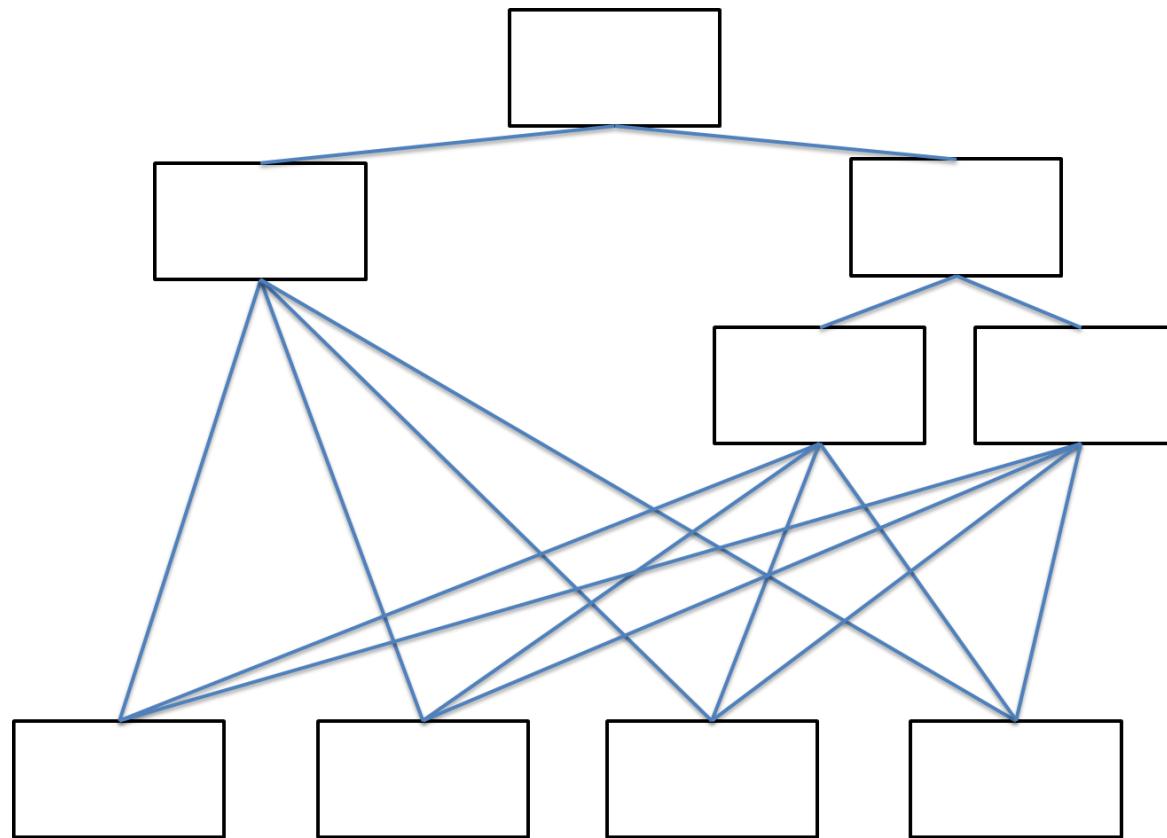
Axioma 1: *Comparação recíproca.* O deliberante deve ser capaz de fazer comparações e expressar a força de suas preferências. A intensidade dessas preferências deve satisfazer a condição de reciprocidade. Se A é x vezes mais preferível que B, então B é $\frac{1}{x}$ vezes mais preferível que A. A reciprocidade garante a clareza dos julgamentos nas comparações paritárias.

Tabela 8 - Exemplo de matriz de comparações paritárias

Critério M	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
A1	1,00	3	3	3	5	5	2	3	1
A2	0,33	1,00	1	1	3	2	0,50	1	0,33
A3	0,33	1,00	1,00	0,20	5	1	0,50	3	0,20
A4	0,33	1,00	5,00	1,00	5	3	1	2	0,33
A5	0,20	0,33	0,20	0,20	1,00	0,50	0,20	0,33	0,20
A6	0,20	0,50	1,00	0,33	2,00	1,00	0,33	0,33	0,20
A7	0,50	2,00	2,00	1,00	5,00	3,00	1,00	2	0,33
A8	0,33	1,00	0,33	0,50	3,00	3,00	0,50	1,00	0,25
A9	1,00	3,00	5,00	3,00	5,00	5,00	3,00	4,00	1,00

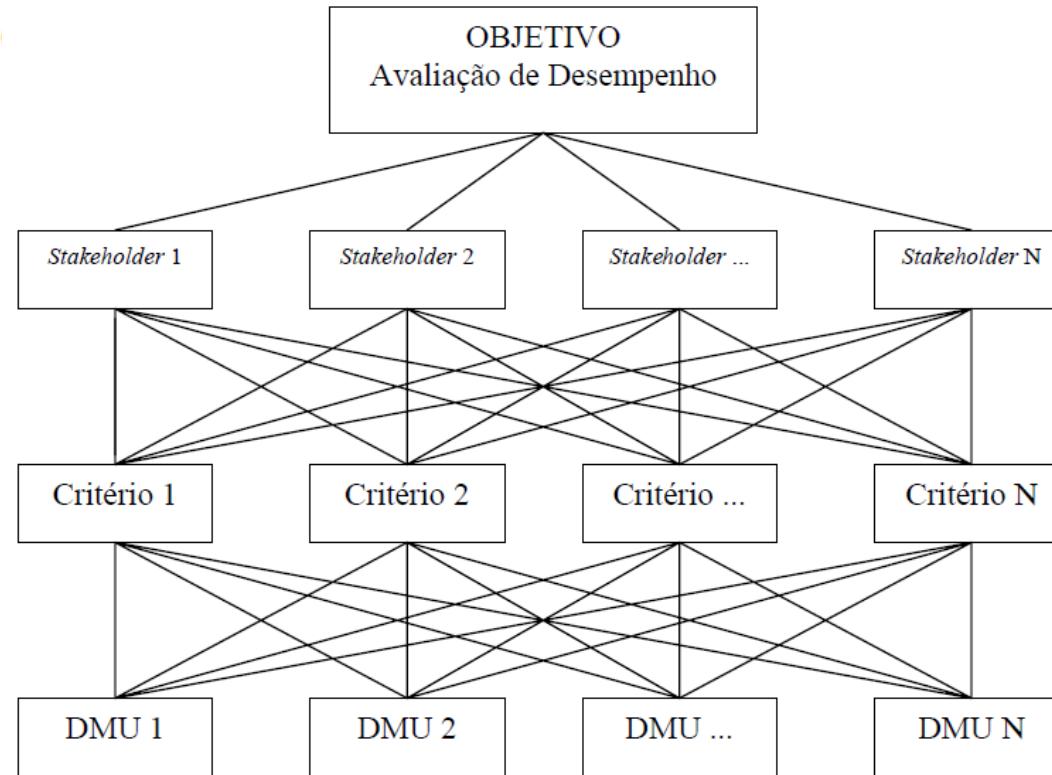
Axioma 2: Homogeneidade

Axioma 2: *Homogeneidade*. As preferências são representadas por meio de uma escala finita. A homogeneidade significa que a comparação só tem sentido entre elementos que apresentam a mesma magnitude e respeitam os limites da escala de comparação, caso isso não ocorra é necessário agrupar os elementos semelhantes segundo um certo atributo para analisá-los (*clustering*).



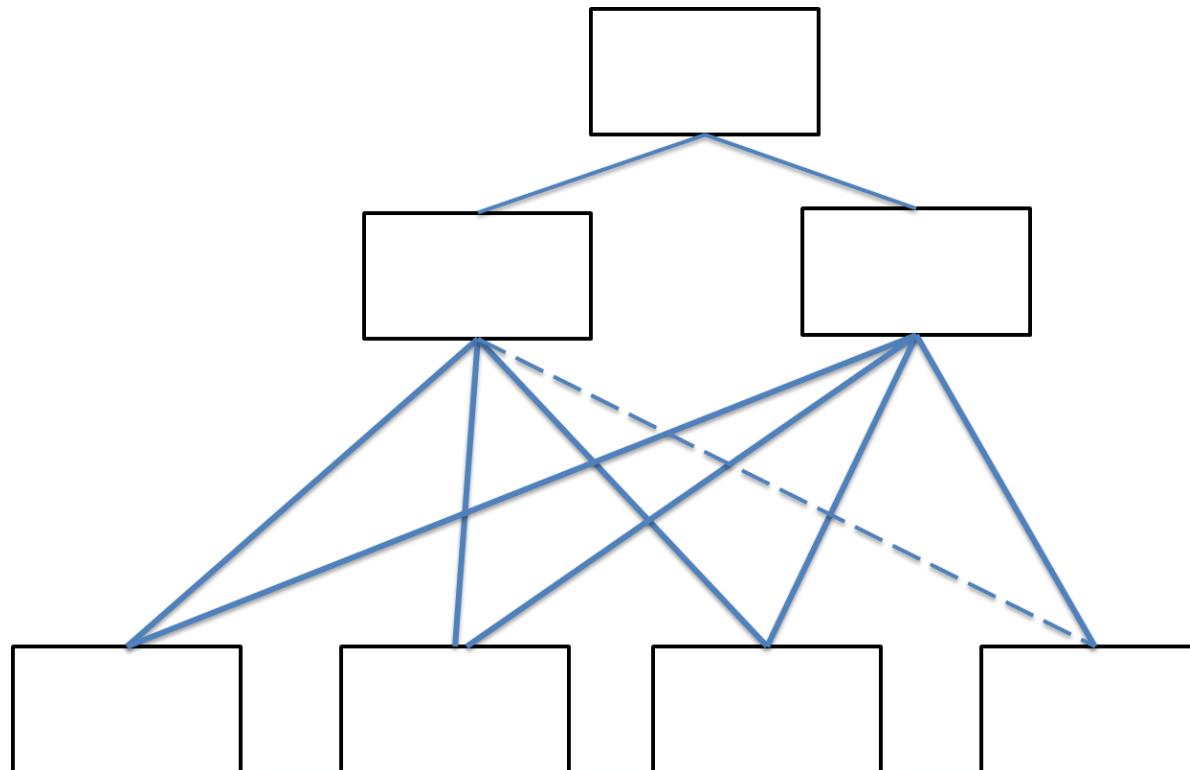
Axioma 3: Independência

Axioma 3: *Independência*. Quando expressamos as preferências, os critérios são considerados independentes das propriedades das alternativas. Esse axioma exige que os pesos dos critérios não sejam influenciados pelas alternativas, ou seja, os elementos de um nível superior da hierarquia não devem ser dependentes dos elementos do nível inferior. Caso essa condição seja violada recaímos em uma generalização do AHP chamada *Analytic Network Process (ANP)*.

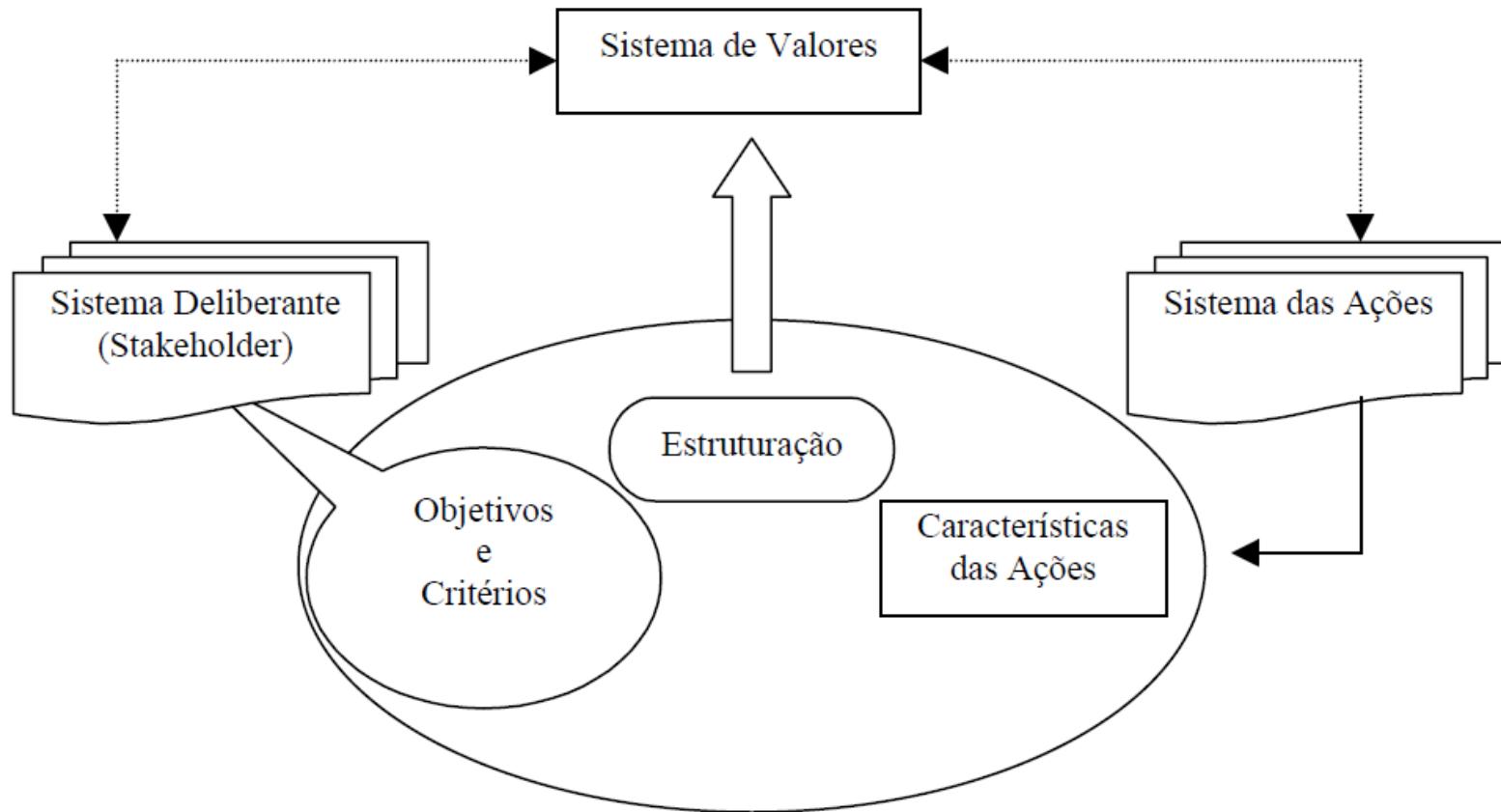


Axioma 4: Expectativa

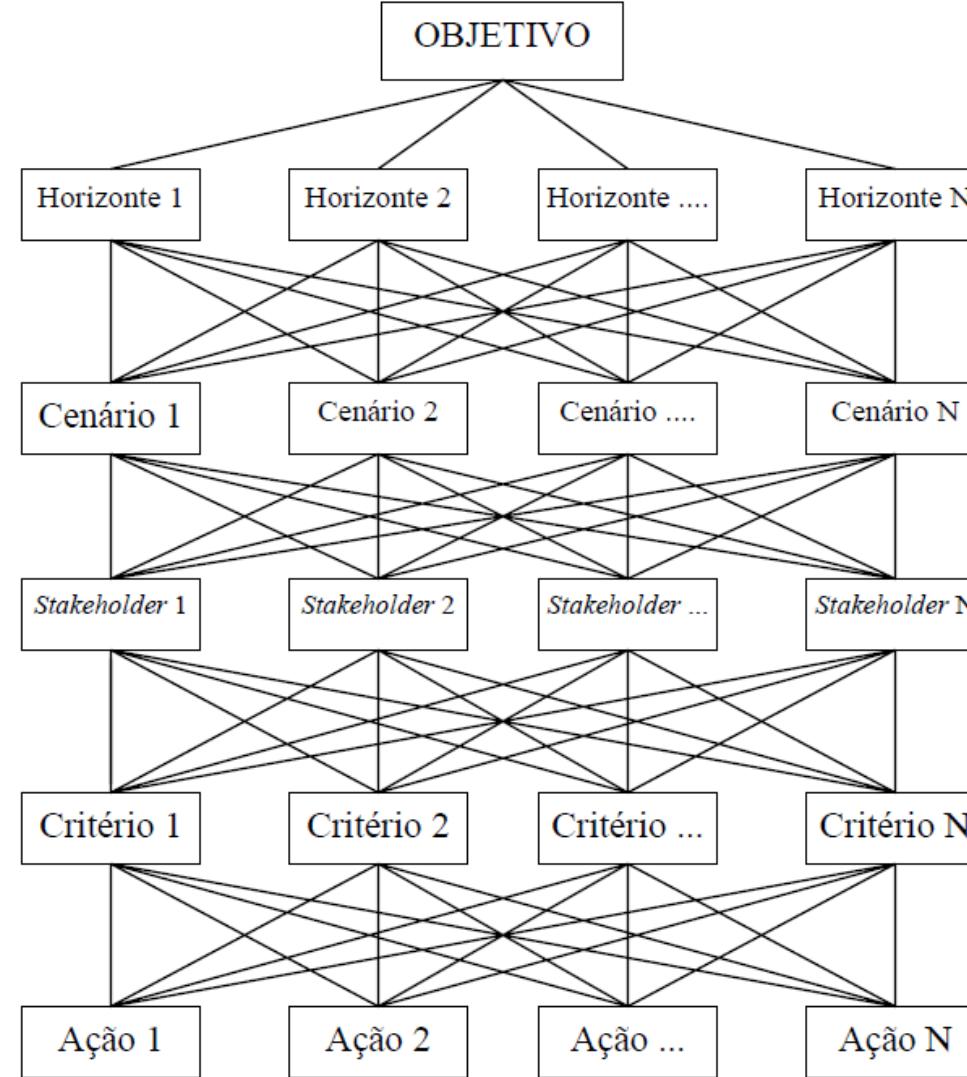
Axioma 4: *Expectativa*. Para o propósito de tomar uma decisão, a estrutura hierárquica é considerada como completa. Quando a estrutura hierárquica é incompleta, o analista não está considerando todos os critérios ou alternativas disponíveis para atender as expectativas racionais da análise e, portanto a decisão é incompleta.



Processo de decisão



Estrutura Completa



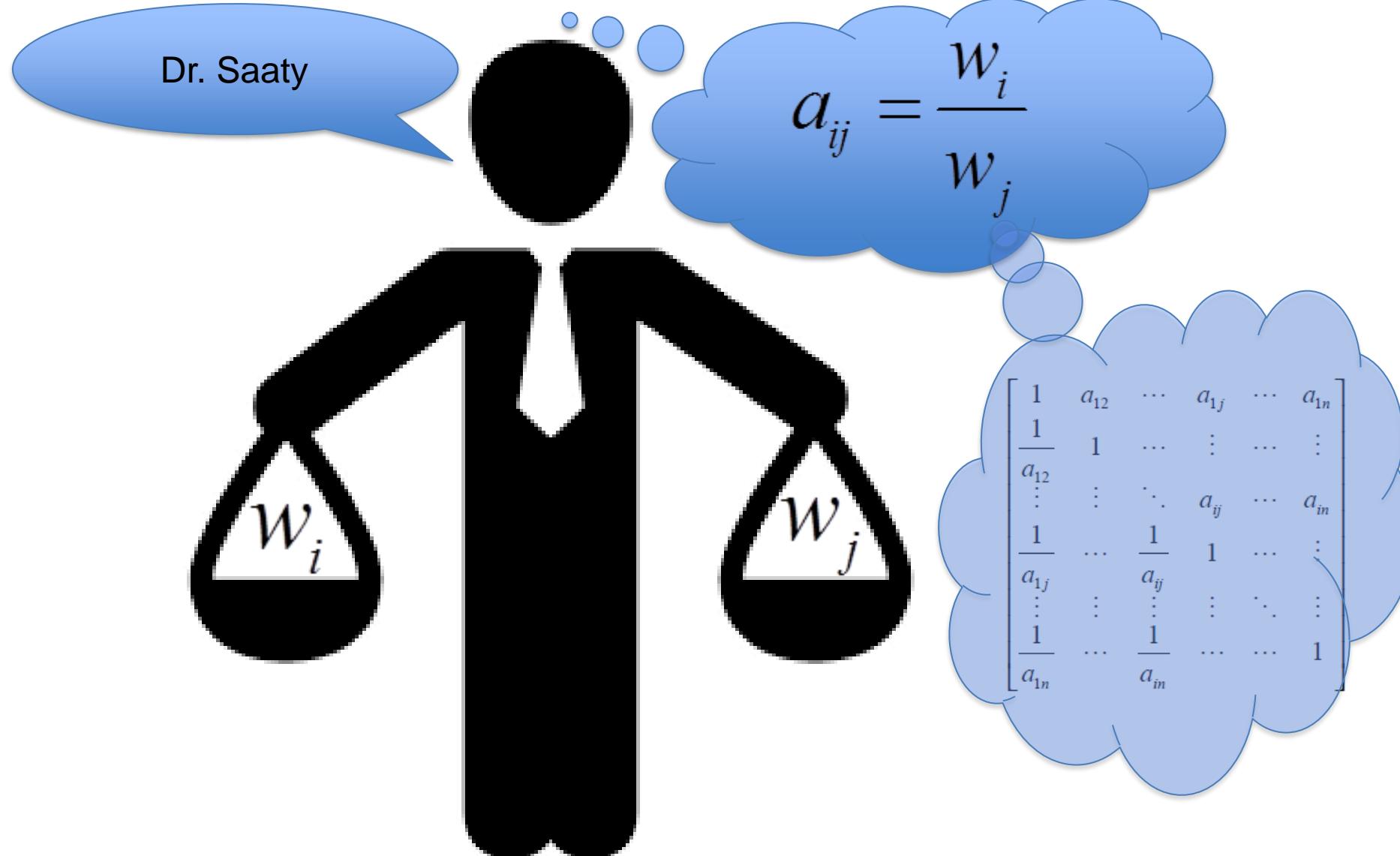


UFABC

ENGENHARIA AMBIENTAL E URBANA

Julgamento

Julgamento



Escala de julgamento

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

Tabela 4.3.2 - Escala utilizada para o julgamento no método MAH – (Saaty, 1980)

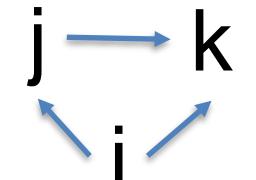
Intensidade de Importância	Definição	Explicação
1	Mesma Importância	Os dois critérios contribuem igualmente para o objetivo
3	Importância pequena de uma sobre a outra	A experiência e o julgamento favorecem levemente um critério em relação a outro
5	Importância grande ou essencial	A experiência e o julgamento favorecem fortemente um critério em relação ao outro
7	Importância muito grande ou demonstrada	Um critério é fortemente favorecido em relação ao outro; sua dominação de importância é demonstrada na prática
9	Importância extrema ou absoluta	A evidência favorece um critério em relação ao outro com o mais alto grau de certeza
2, 4, 6, 8	Valores intermediários entre os valores adjacentes	Quando se procura uma condição de compromisso entre duas definições
Recíprocos dos valores acima de zero	Se a atividade i recebe um valor acima de zero quando comparada com a atividade j, então j tem o valor recíproco quando comparada com i.	

Gonçalves 2005

Comparações paritárias

Tabela 8 - Exemplo de matriz de comparações paritárias

Critério M	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
A1	1,00	3	3	3	5	5	2	3	1
A2	0,33	1,00	1	1	3	2	0,50	1	0,33
A3	0,33	1,00	1,00	0,20	5	1	0,50	3	0,20
A4	0,33	1,00	5,00	1,00	5	3	1	2	0,33
A5	0,20	0,33	0,20	0,20	1,00	0,50	0,20	0,33	0,20
A6	0,20	0,50	1,00	0,33	2,00	1,00	0,33	0,33	0,20
A7	0,50	2,00	2,00	1,00	5,00	3,00	1,00	2	0,33
A8	0,33	1,00	0,33	0,50	3,00	3,00	0,50	1,00	0,25
A9	1,00	3,00	5,00	3,00	5,00	5,00	3,00	4,00	1,00



$$\frac{w_j}{w_k} = \frac{w_i}{w_k} \cdot \frac{w_j}{w_i}$$

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$$

$$a_{ij} > 0$$

$$a_{ii} = 1 \therefore i = j$$

$$n \times n$$

$$n - 1$$

$$\frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\text{Reciprocidade}$$

$$a_{jk} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}}$$

Autovetores e Autovalores

$$A \cdot w = n \cdot w$$

Autovetor principal direto

Matriz
consistente

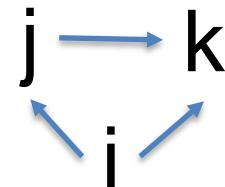
$$\left(\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \dots & \frac{w_1}{w_1} \\ w_1 & \ddots & w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_n} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \right) = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Autovalor principal direto

Inconsistência

Tabela 8 - Exemplo de matriz de comparações paritárias

Critério M	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9
A1	1,00	3	3	3	5	5	2	3	1
A2	0,33	1,00	1	1	3	2	0,50	1	0,33
A3	0,33	1,00	1,00	0,20	5	1	0,50	3	0,20
A4	0,33	1,00	5,00	1,00	5	3	1	2	0,33
A5	0,20	0,33	0,20	0,20	1,00	0,50	0,20	0,33	0,20
A6	0,20	0,50	1,00	0,33	2,00	1,00	0,33	0,33	0,20
A7	0,50	2,00	2,00	1,00	5,00	3,00	1,00	2	0,33
A8	0,33	1,00	0,33	0,50	3,00	3,00	0,50	1,00	0,25
A9	1,00	3,00	5,00	3,00	5,00	5,00	3,00	4,00	1,00



$$a_{jk} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}}$$

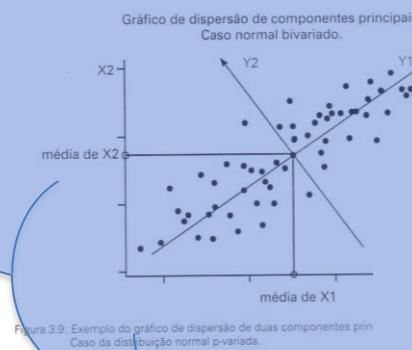
$$a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$$
$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k} \cdot \frac{w_k}{w_j}$$



UFABC

ENGENHARIA AMBIENTAL E URBANA
Consistência

Autovalor e Inconsistência



$$A \cdot w = \lambda_{\max} \cdot w$$



Autovalor principal da
matriz inconsistente

Consistência

IC – Índice Consistência

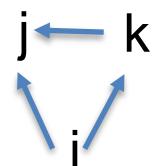
IR – Índice Consistência Randômico

$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

Congruência

$$\theta_{ij} = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^n |\log(a_{ij}) - \log(a_{ik}a_{kj})|$$

$a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}$



$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k} \cdot \frac{w_k}{w_j}$$

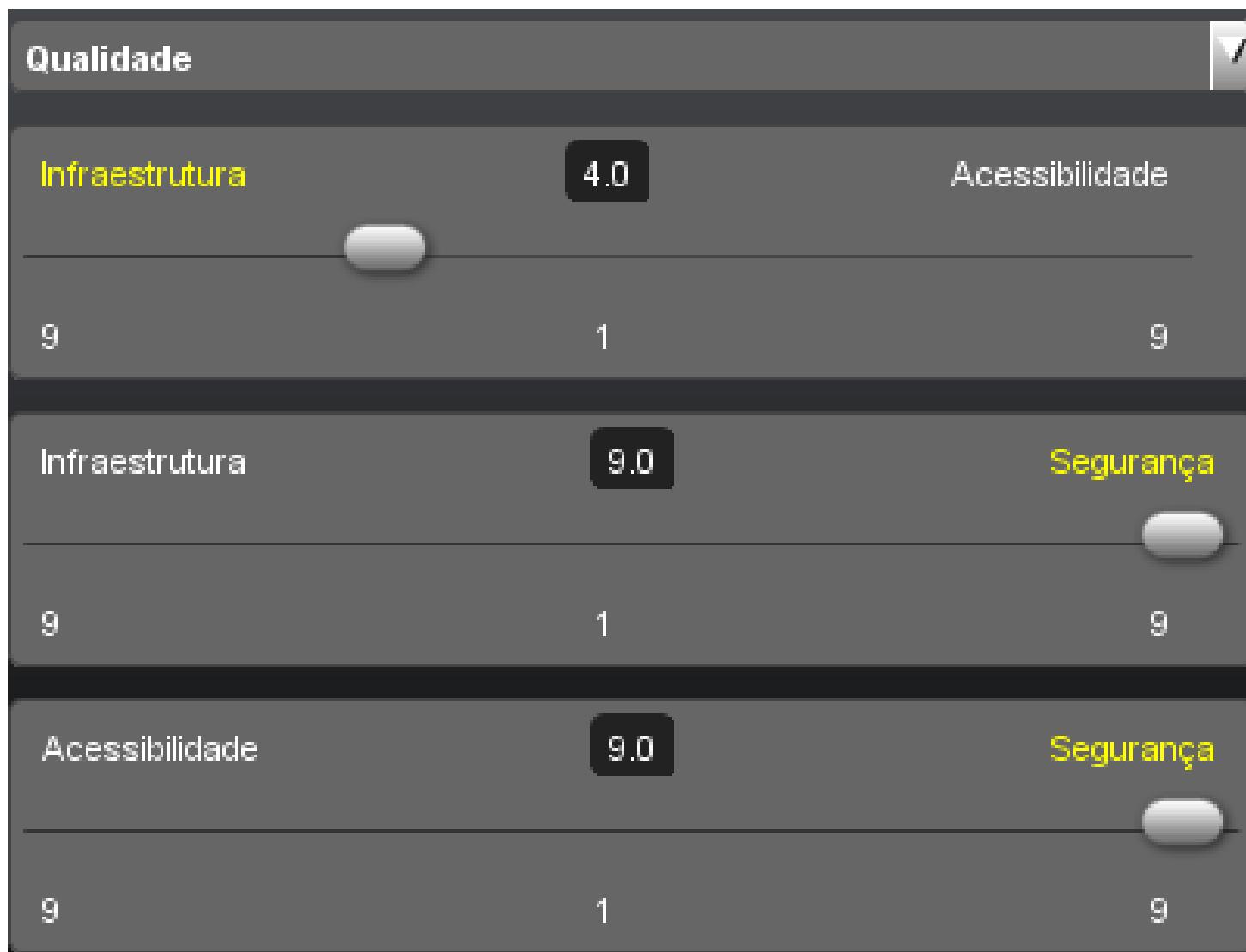
Discrepância

$$\psi_{ij} = \frac{1}{(n-2)} \sum_k step(-\log a_{ij} \log a_{ik}a_{kj})$$

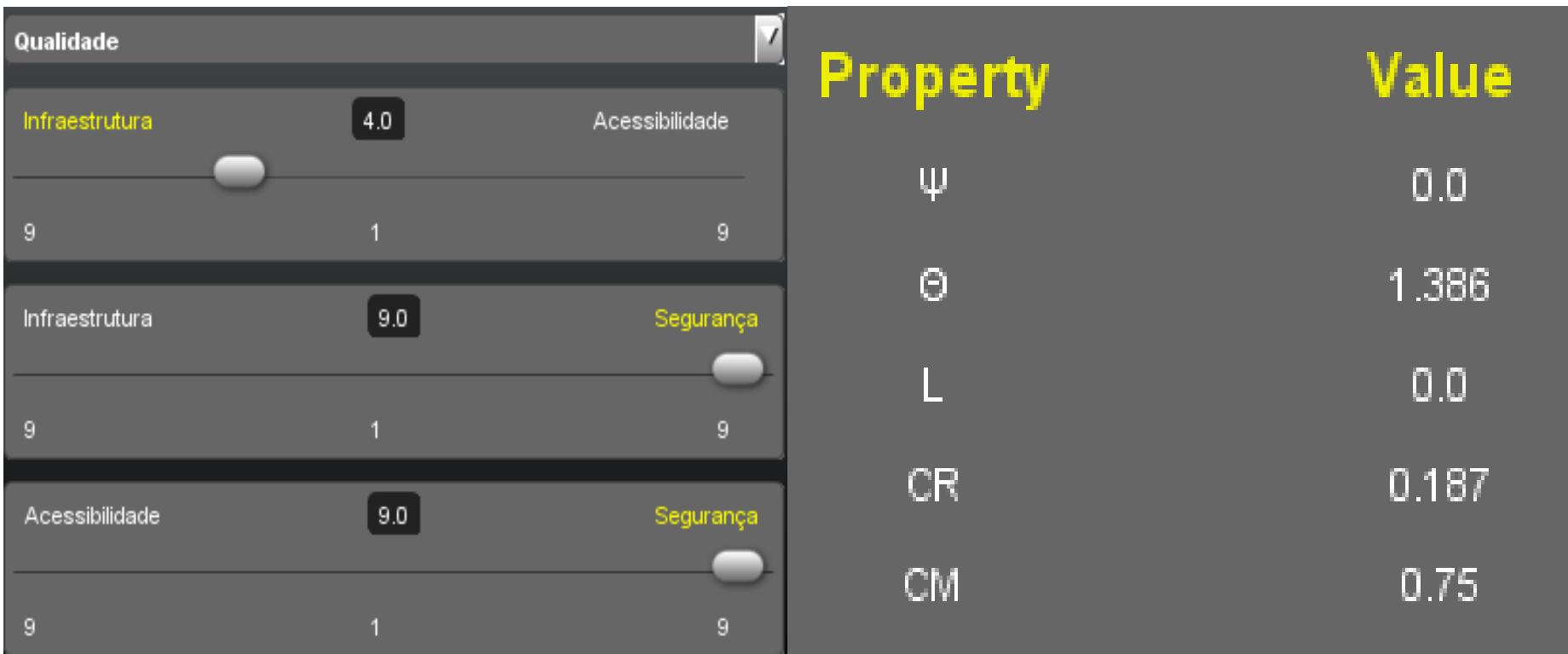


1 para valores positivos
0 caso contrário

Consistência



Consistência



$$CR = \frac{IC}{n-1}$$

$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$$

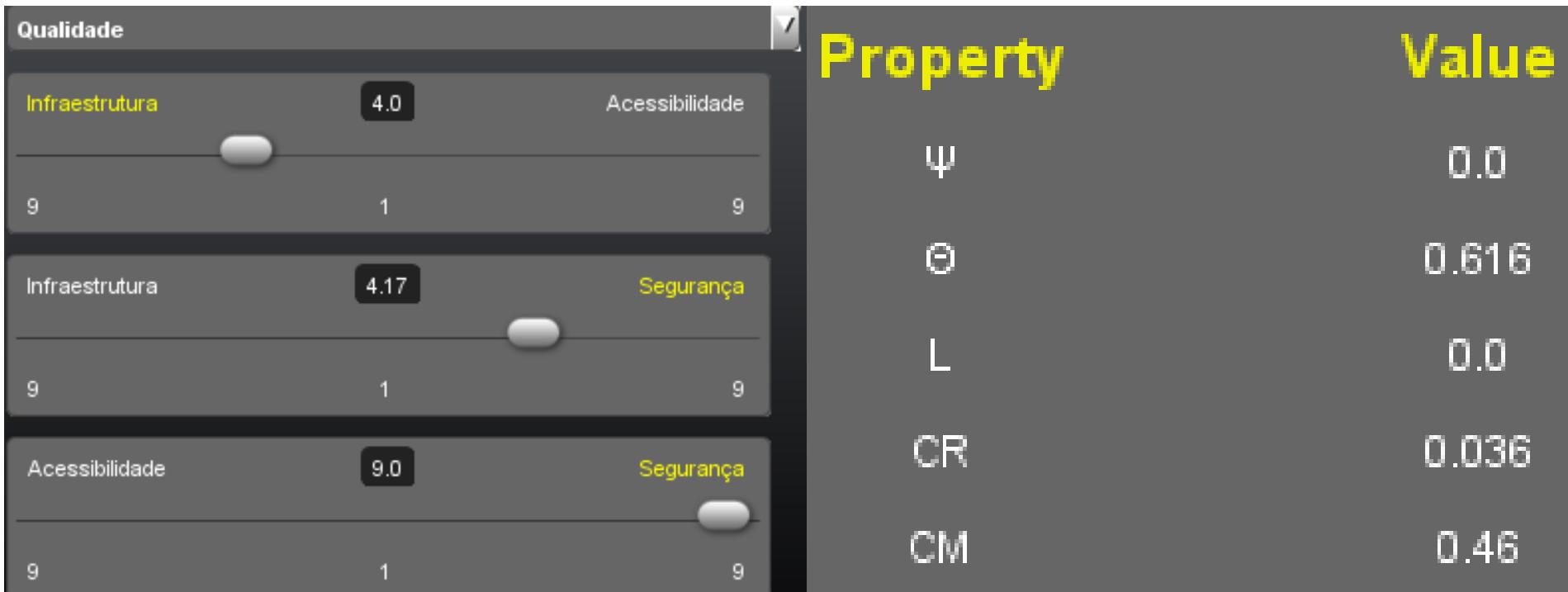
Média de matrizes aleatórias

n	3	4	5	6	7	8	9	10
RI_n	0.5247	0.8816	1.1086	1.2479	1.3417	1.4057	1.4499	1.4854

$$\theta_{ij} = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^n |\log(a_{ij}) - \log(a_{ik}a_{kj})|$$

CR≤0,1 Satisfatório
CR> 0,1 Insatisfatório

Consistência



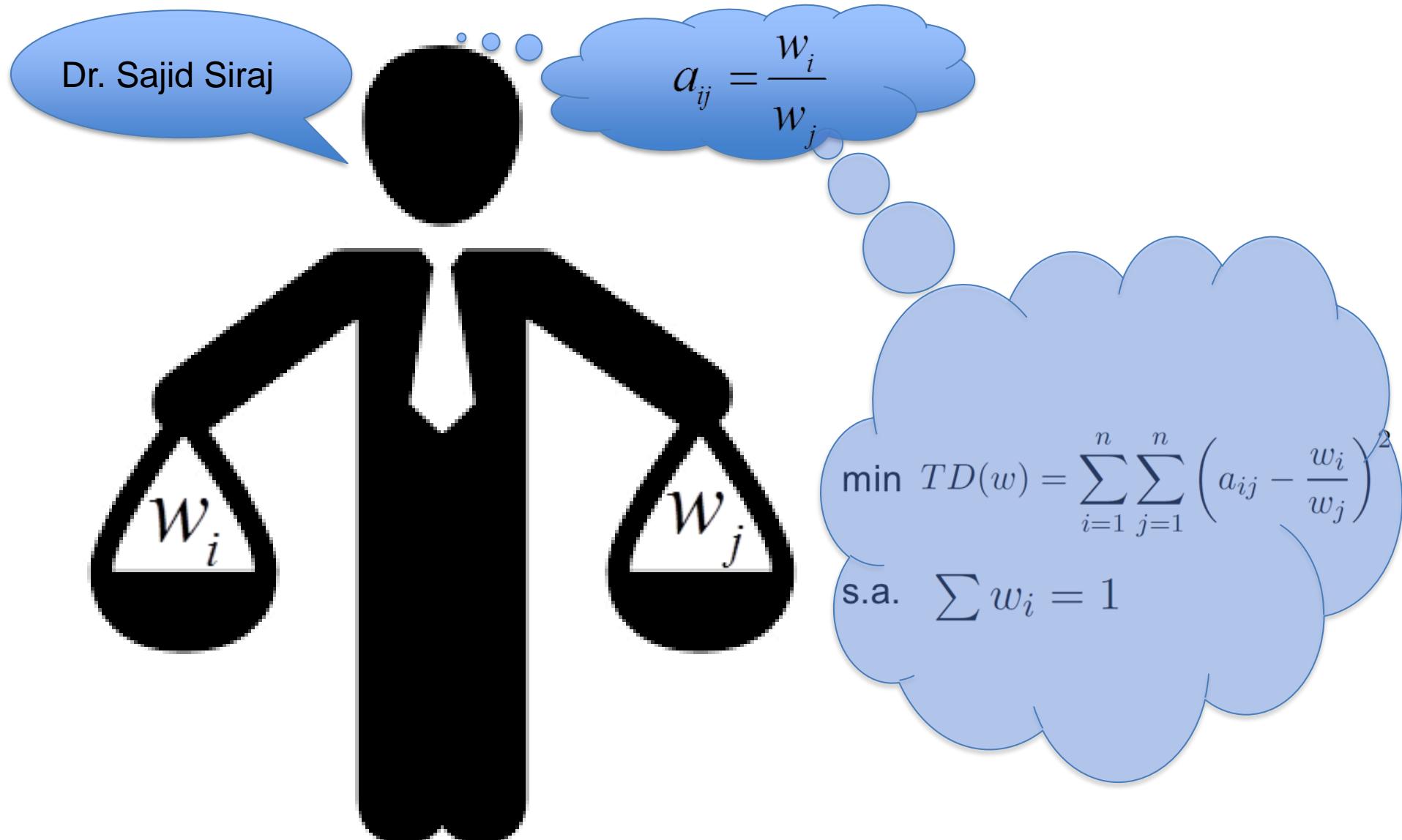
$$CR = \frac{IC}{\overline{IC}}$$
$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$
$$\overline{IC} = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

Média de matrizes aleatórias

$$\theta_{ij} = \frac{1}{n-2} \sum_{k=1}^n |\log(a_{ij}) - \log(a_{ik}a_{kj})|$$

CR \leq 0,1 Satisfatório
CR $>$ 0,1 Insatisfatório

Consistência e Priorização



Priorização

Autovetor

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_1}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \dots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Função da distância

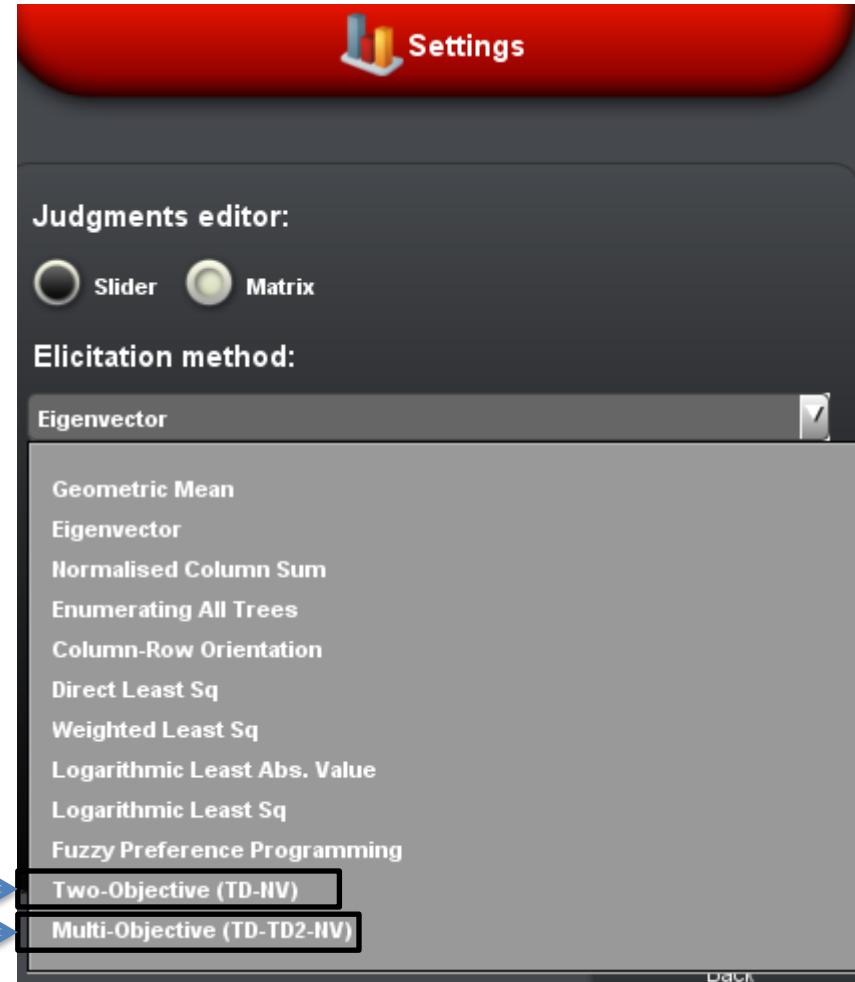
$$\min TD(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

$$\text{s.a. } \sum w_i = 1$$

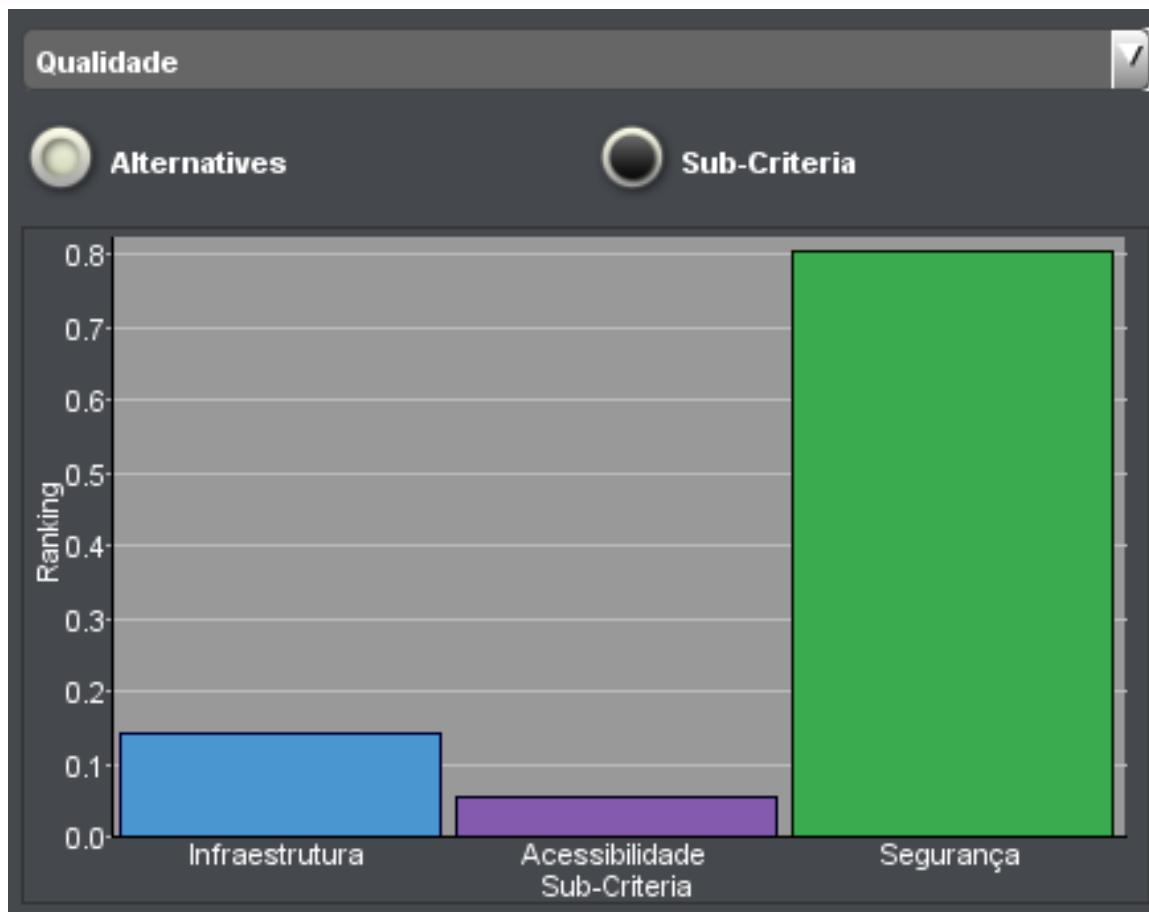
Desvio de 2^a ordem

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & [TD(w), TD2(w), NV(w)]^T \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i w_i = 1, w_i > 0, i \in \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

$$TD2(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(a_{ik}a_{kj} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$



Priorização

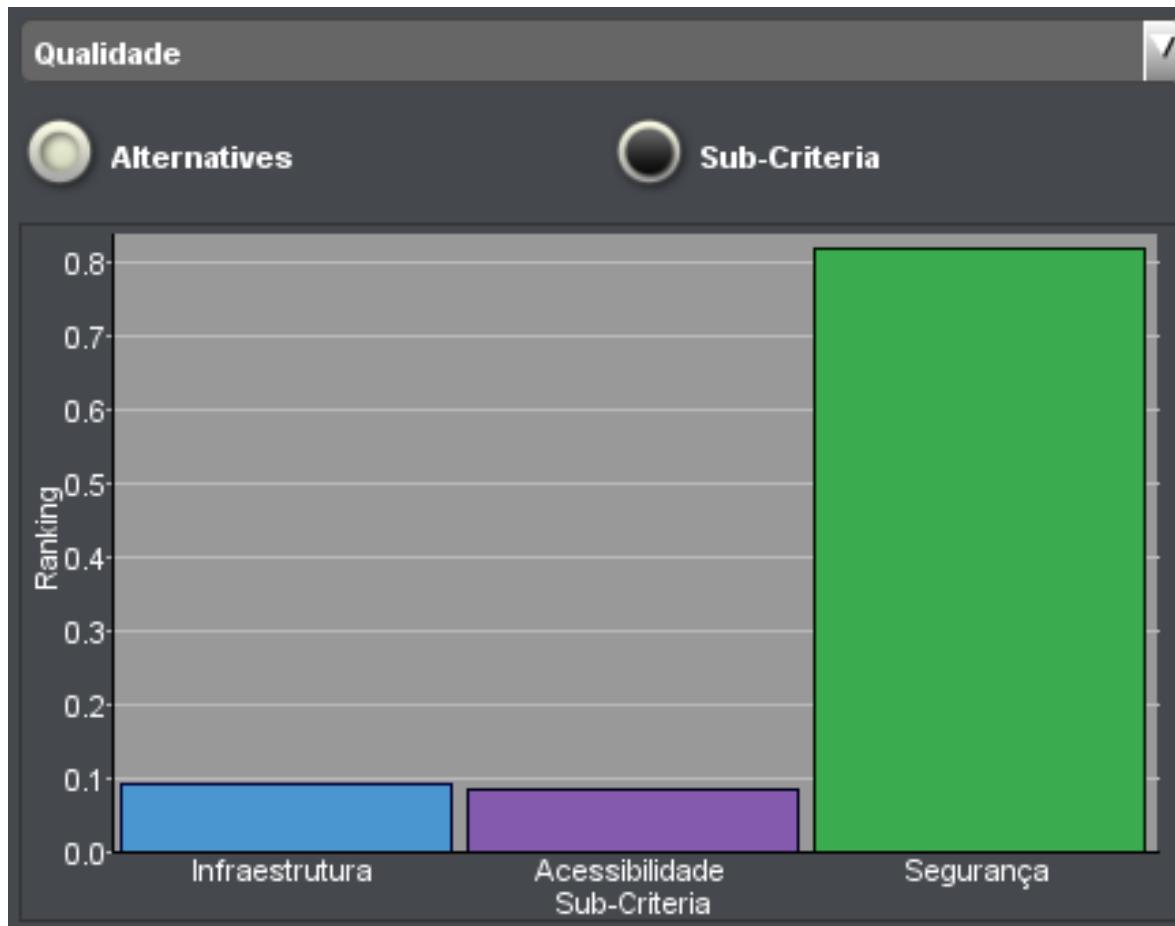


Name	Value
TD	41.258
NV	0.0
TD2	485.913
Method	EV

Criterion	Weight
Infraestrutura	0.142
Acessibilidade	0.056
Segurança	0.802

$$\begin{bmatrix} w_1 & \dots & w_1 \\ w_1 & \dots & w_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & \dots & w_n \\ w_1 & \dots & w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Priorização



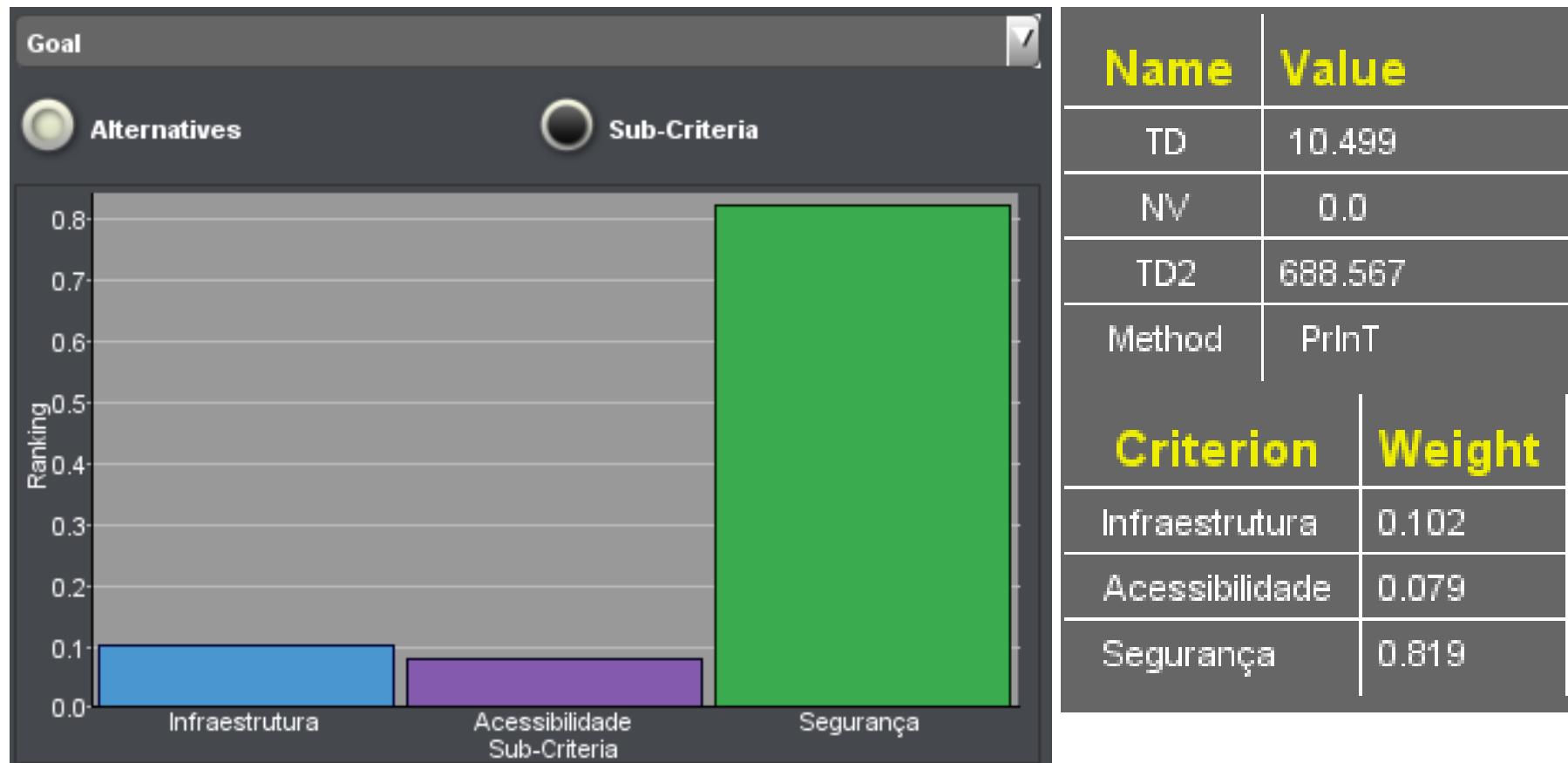
Name	Value
TD	9.211
NV	0.0
TD2	747.368
Method	TOP

Criterion	Weight
Infraestrutura	0.096
Acessibilidade	0.087
Segurança	0.818

$$\min TD(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_{ij} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$

$$\text{s.a. } \sum w_i = 1$$

Priorização



$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} && [TD(w), TD2(w), NV(w)]^T \\
 & \text{s.t.} && \sum_i w_i = 1, w_i > 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}
 \end{aligned}$$

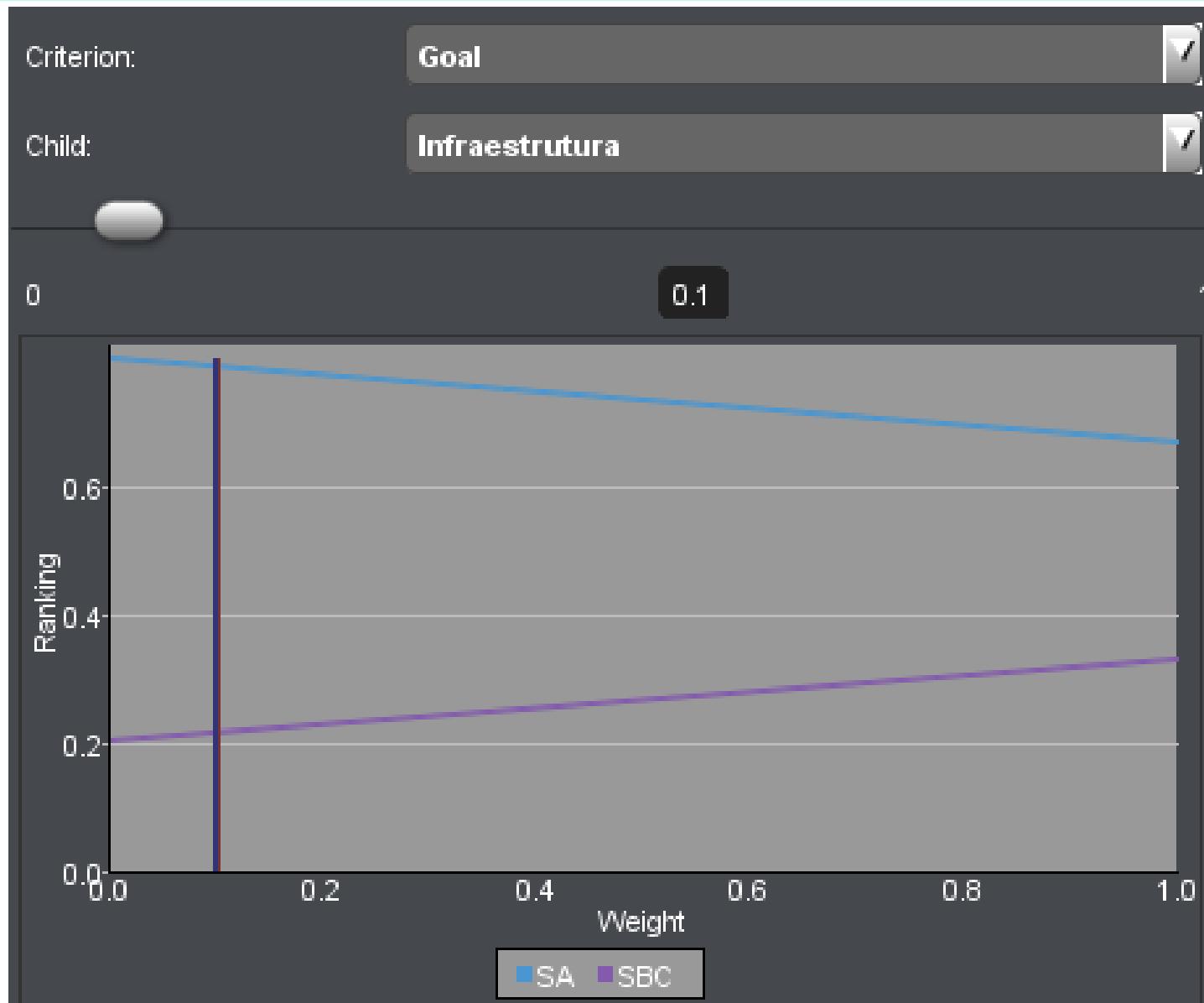
$$TD2(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{w_i}{w_j} \right)^2$$



UFABC

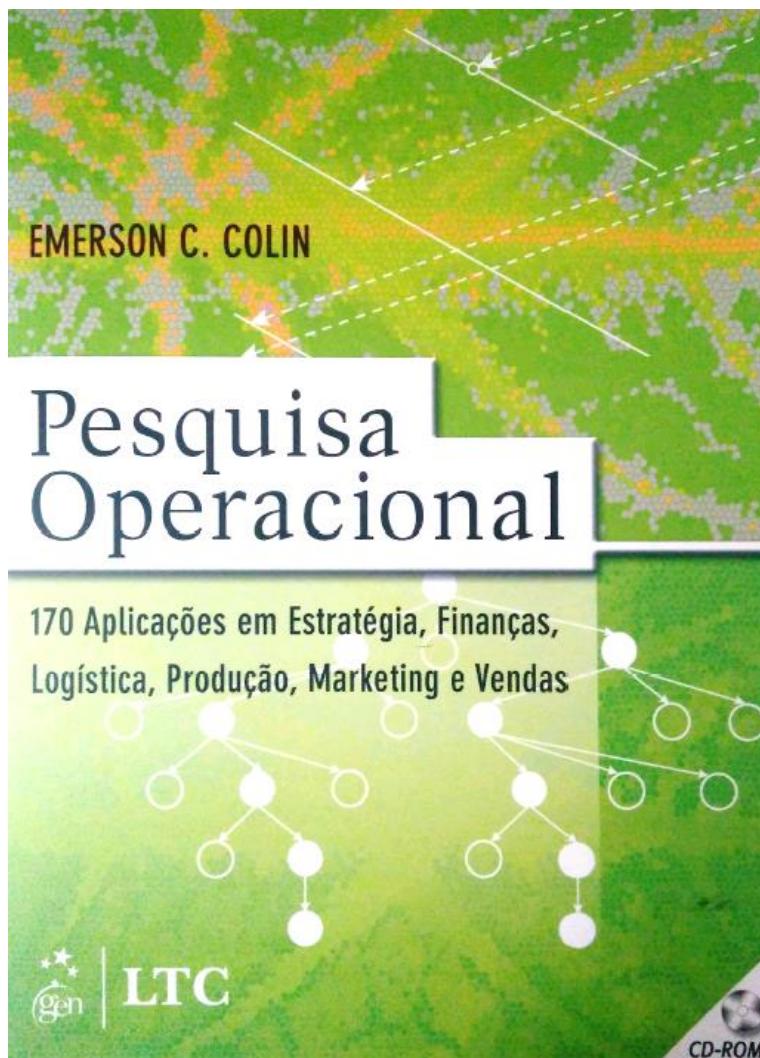
ENGENHARIA AMBIENTAL E URBANA
Sensibilidade

Analise de sensibilidade



30.2 Exemplo: Seleção de consultorias

Capítulo 30 – Processo Hierárquico Analítico



Na última decisão do conselho da Construtora Construção Pesada, ficou decidido que o diretor executivo da empresa ficaria responsável pela contratação de uma empresa de consultoria para ajudá-los num processo de *turn around*. O *turn around* é um termo que está associado ao desejo da empresa de inverter seu desempenho financeiro. Na verdade, eles estão tendo prejuízos seguidos, e o conselho está interessado em um processo de transformação radical que mude a mentalidade e a forma como a Construtora Construção Pesada trabalha.

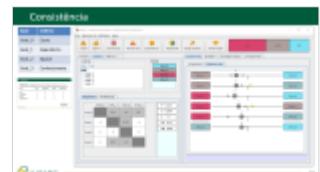
O diretor executivo pré-selecionou três empresas de consultoria com características distintas. A consultoria A é pertencente ao segmento especializado em procedimentos. As maiores empresas pertencem a esse segmento, e os projetos em geral são grandes, como por exemplo a implementação de sistemas de gestão e o redesenho dos processos de seus clientes. A consultoria B pertence ao segmento denominado especialista. Embora não sejam especialistas em *turn around*, eles são especializados em construção civil. A terceira empresa de consultoria, a consultoria C, pertence ao segmento caracterizado como o de gestão. Consultorias de gestão são generalistas e procuram trabalhar em temas diversos, desde que associados a melhorias das capacidades gerenciais de seus clientes. Em geral eles são mais caros e trabalham com a maior proporção de recursos seniores por recursos juniores.

TABELA 30.5 Informações relativas às consultorias

Item	Consultoria		
	A	B	C
Custo [milhões de R\$]	0,9	1,3	3,0
Experiência nesse tipo de serviço	Média	Baixa	Alta
Equipe envolvida no trabalho	Pouco qualificada	Bem qualificada	Bem qualificada
Transferência de conhecimento	Média-alta	Média	Média

TABELA 30.6 Comparação entre os pares de fatores da seleção da consultoria

Fator	Custo	Experiência	Equipe	Conhecimento
Custo	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$
Experiência	4	1	$\frac{1}{3}$	4
Equipe	5	3	1	2
Conhecimento	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1



Julgamento de alternativas por critério

TABELA 30.8 Comparação entre pares e prioridades do nível 3 – Custo

Custo	Cons. A	Cons. B	Cons. C	Prioridade
Consultoria A	1,00	2,00	6,00	0,6127
Consultoria B	0,50	1,00	2,00	0,2693
Consultoria C	0,17	0,50	1,00	0,1180

TABELA 30.9 Comparação entre pares e prioridades do nível 3 – Experiência

Experiência	Cons. A	Cons. B	Cons. C	Prioridade
Consultoria A	1,00	3,00	0,33	0,2510
Consultoria B	0,33	1,00	0,17	0,0960
Consultoria C	3,00	6,00	1,00	0,6530

Julgamento de alternativas por critério

TABELA 30.10 Comparação entre pares e prioridades do nível 3 – Equipe

Equipe	Cons. A	Cons. B	Cons. C	Prioridade
Consultoria A	1,00	0,14	0,14	0,0667
Consultoria B	7,00	1,00	1,00	0,4667
Consultoria C	7,00	1,00	1,00	0,4667

TABELA 30.11 Comparação entre pares e prioridades do nível 3 – Conhecimento

Conhecimento	Cons. A	Cons. B	Cons. C	Prioridade
Consultoria A	1,00	5,00	4,00	0,6806
Consultoria B	0,20	1,00	0,50	0,1179
Consultoria C	0,25	2,00	1,00	0,2014

Julgamento de alternativas por critério

TABELA 30.12 Matriz de prioridade do nível 3 com relação ao nível 2

	Custo	Experiência	Equipe	Conhecimento
Consultoria A	0,613	0,251	0,067	0,681
Consultoria B	0,269	0,096	0,467	0,118
Consultoria C	0,118	0,653	0,467	0,201

Consistência

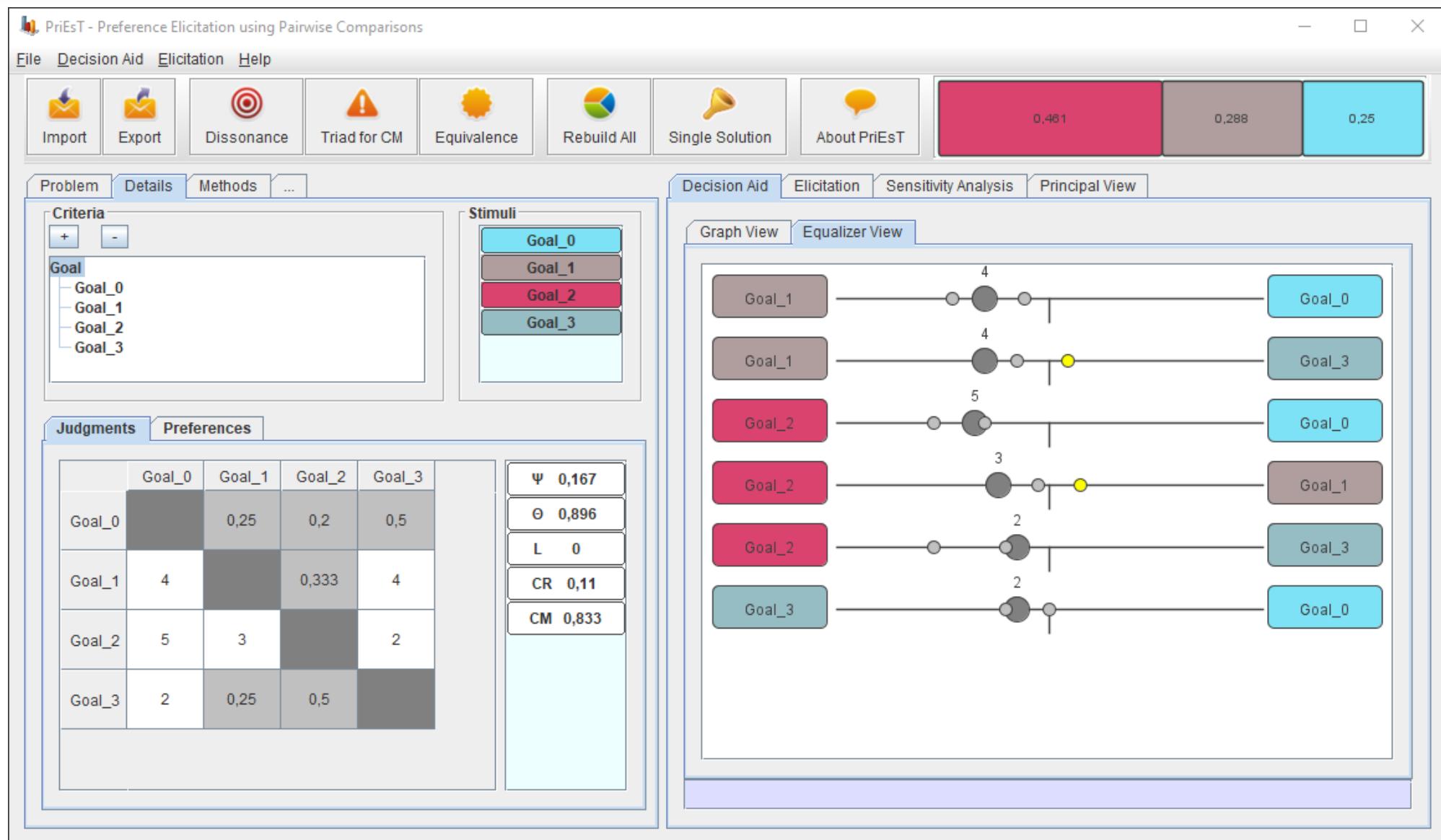
Goal	Critério
Goal_0	Custo
Goal_1	Experiência
Goal_2	Equipe
Goal_3	Conhecimento

Critérios

TABELA 30.6 Comparação entre os pares de fatores da seleção da consultoria

Fator	Custo	Experiência	Equipe	Conhecimento
Custo	1	½	½	½
Experiência	4	1	½	4
Equipe	5	3	1	2
Conhecimento	2	½	½	1

UFABC

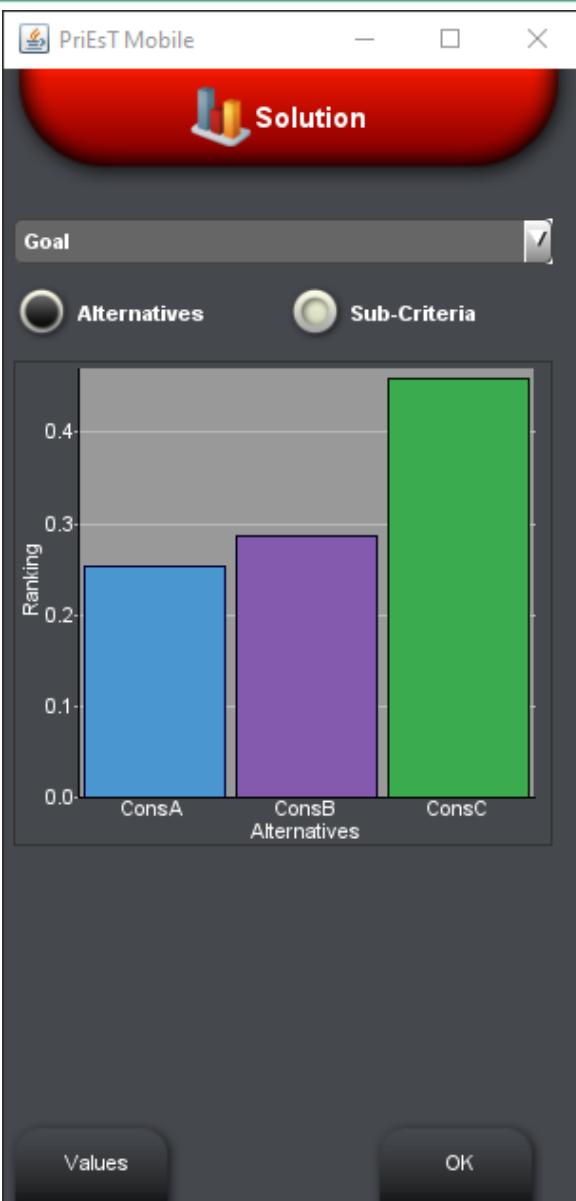
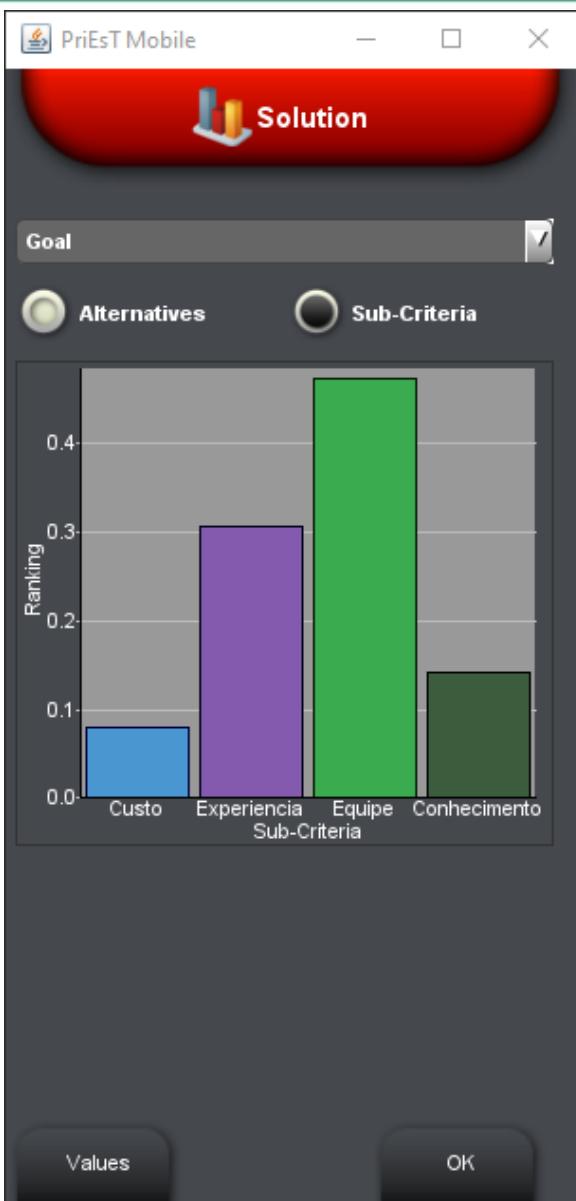


Prioridades

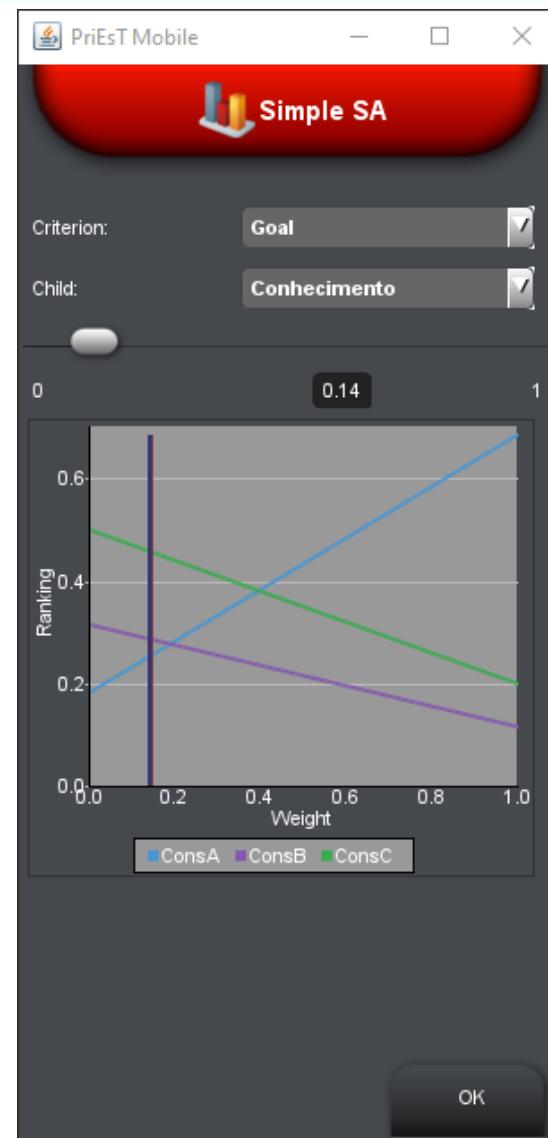
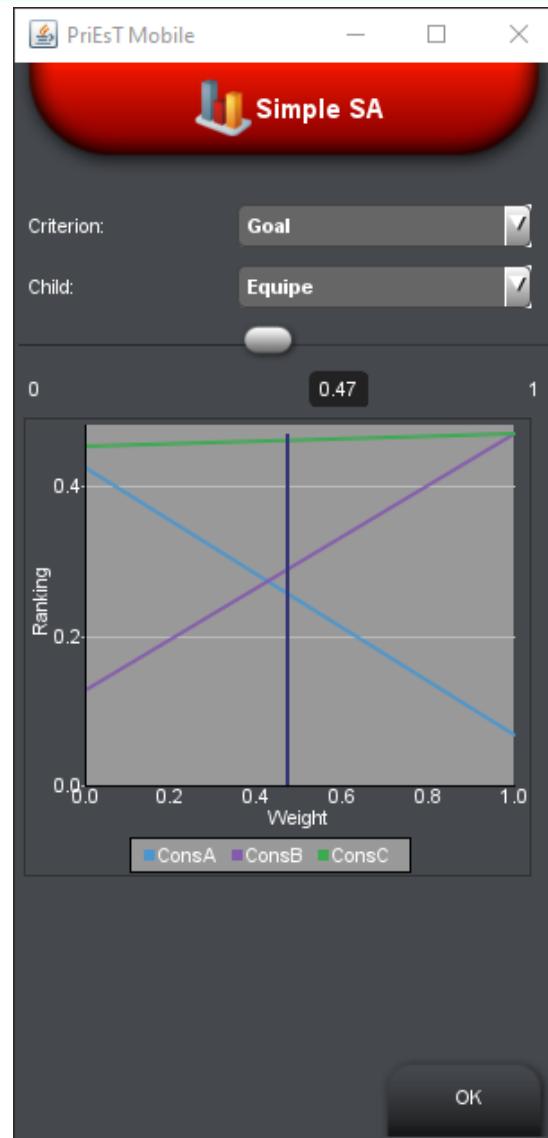
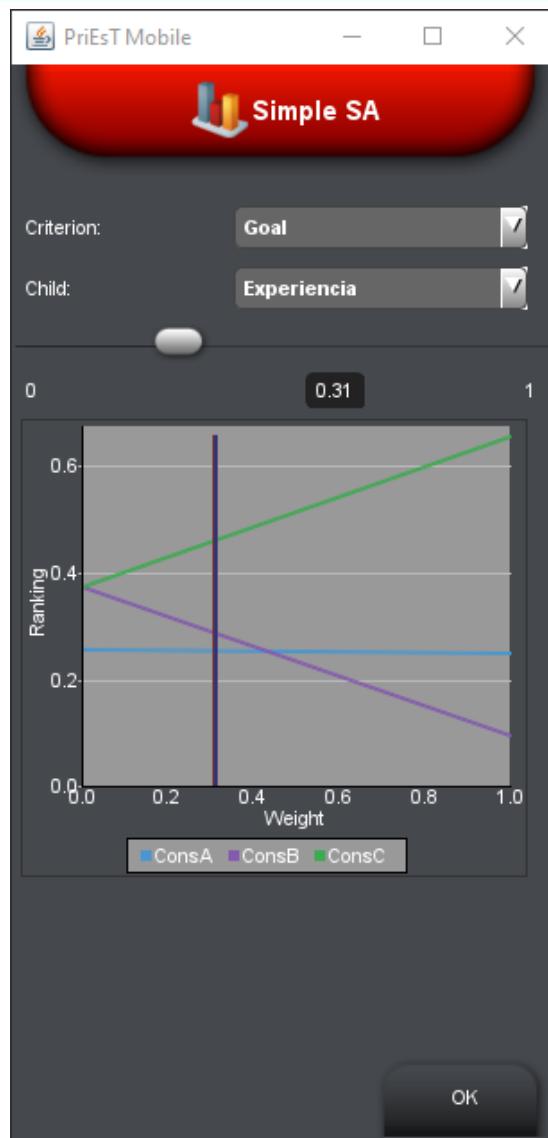
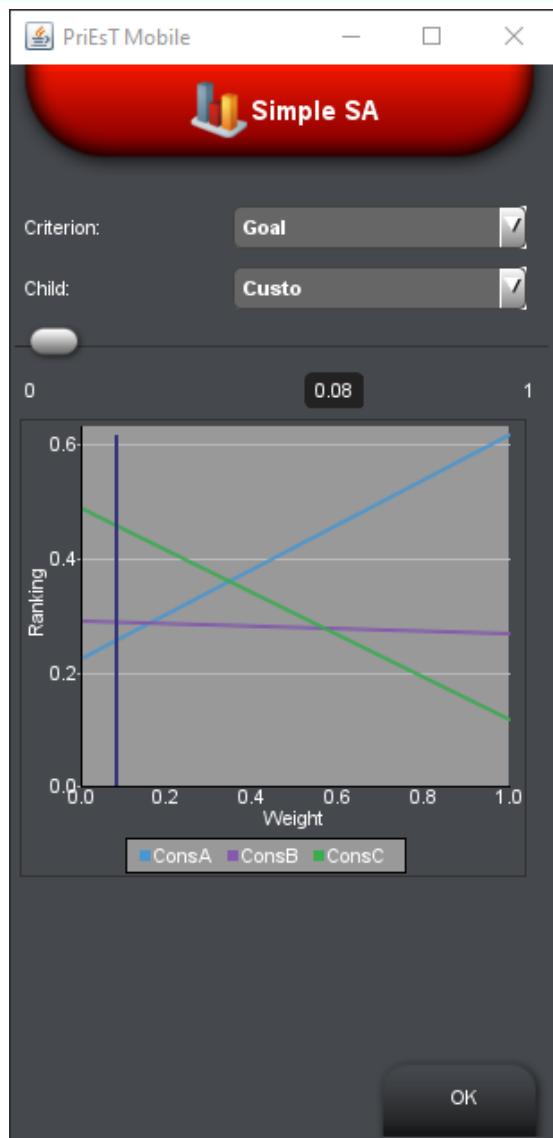
Prioridades nível 3	Custo	Experiência	Equipe	Conhecimento
Consultoria A	0,613	0,251	0,067	0,681
Consultoria B	0,269	0,096	0,467	0,118
Consultoria C	0,118	0,653	0,467	0,201

Prioridades nível 2
Custo 0,075979
Experiência 0,313206
Equipe 0,460451
Conhecimento 0,150364

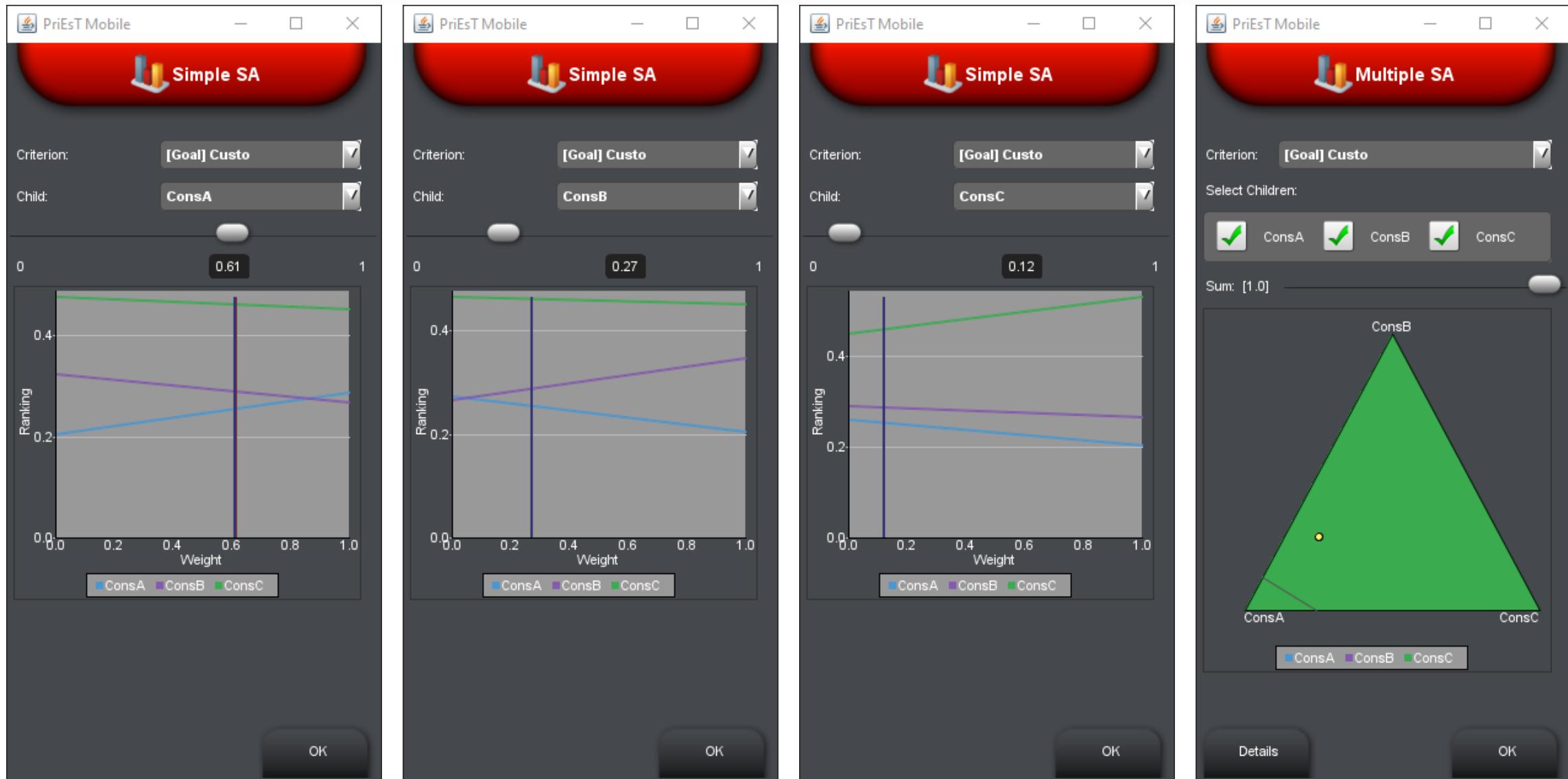
Alternativas	Prioridade
Consultoria A	0,25821
Consultoria B	0,28315
Consultoria C	0,45865



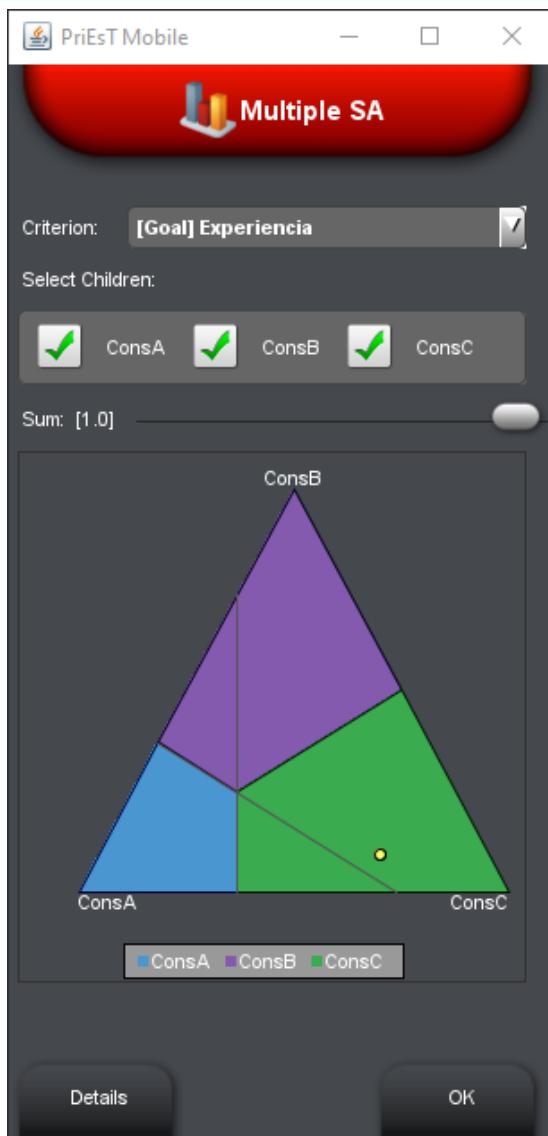
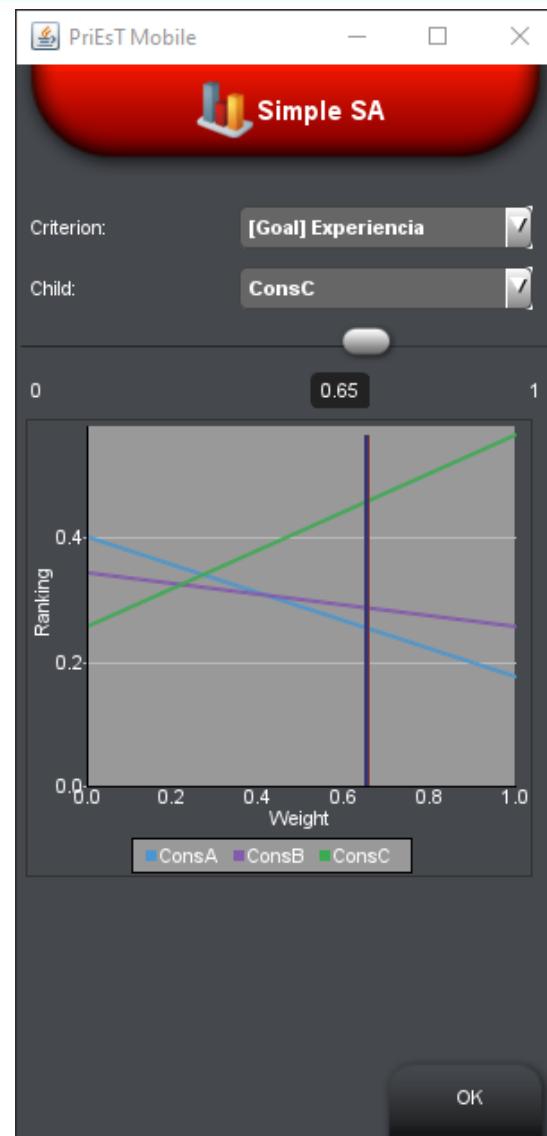
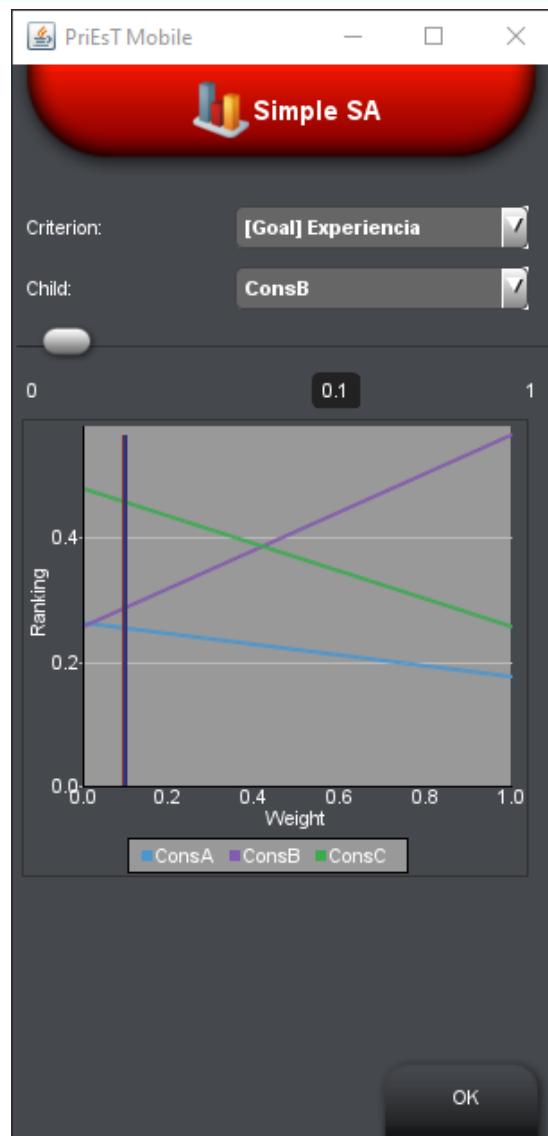
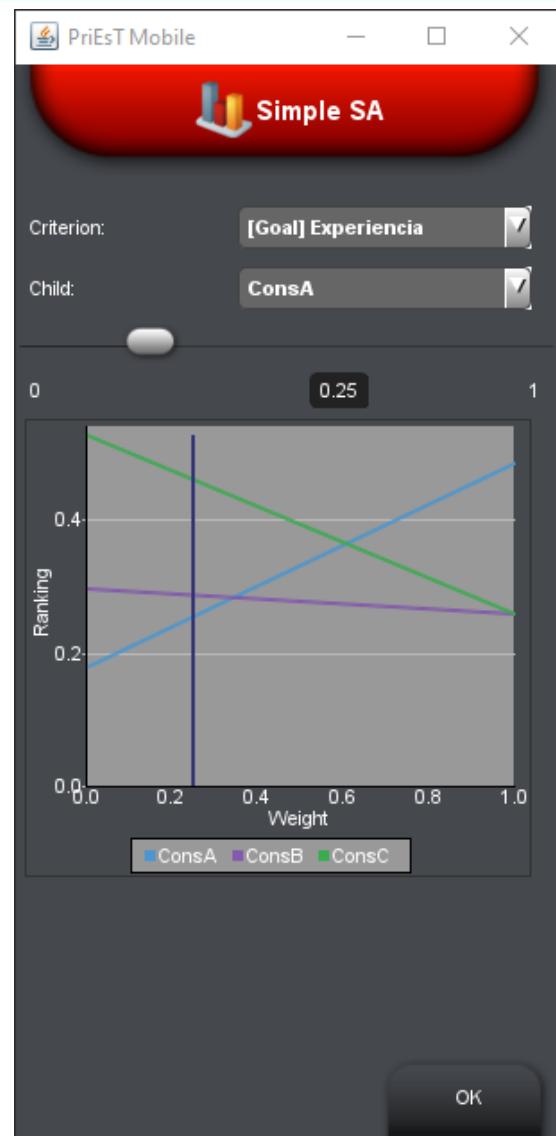
Análise de sensibilidade - Critérios



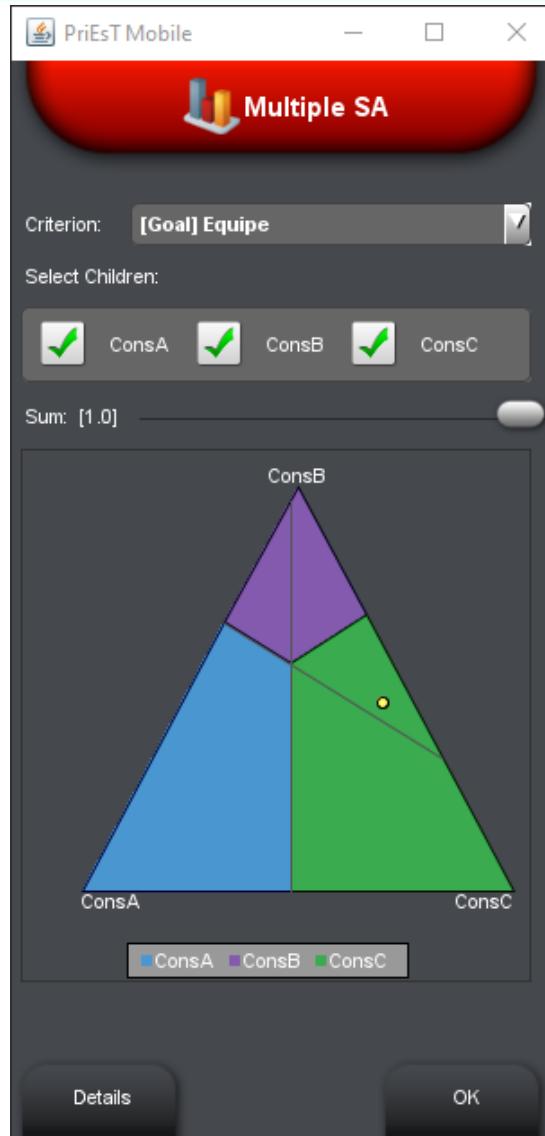
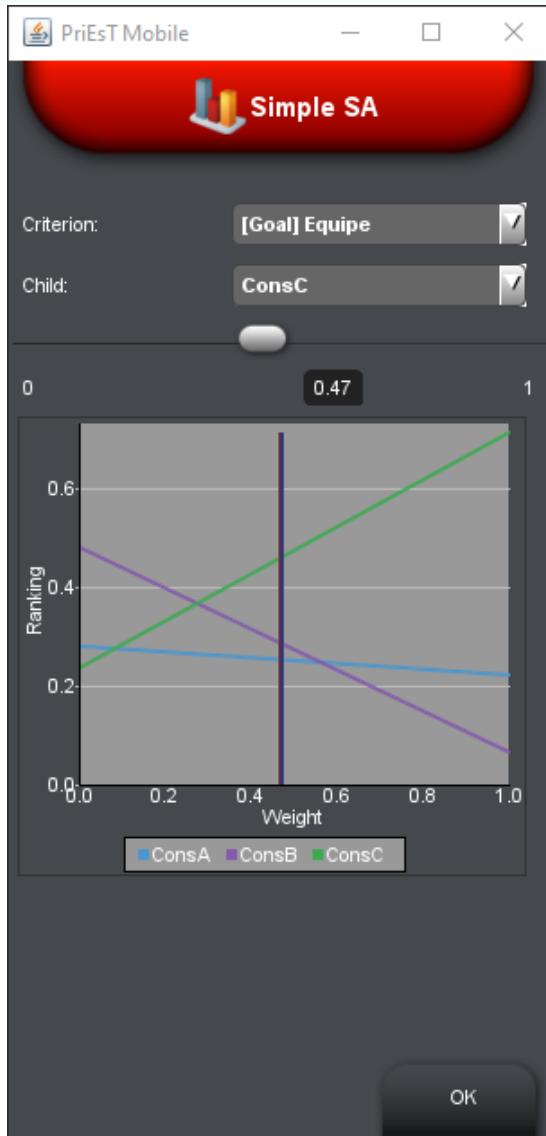
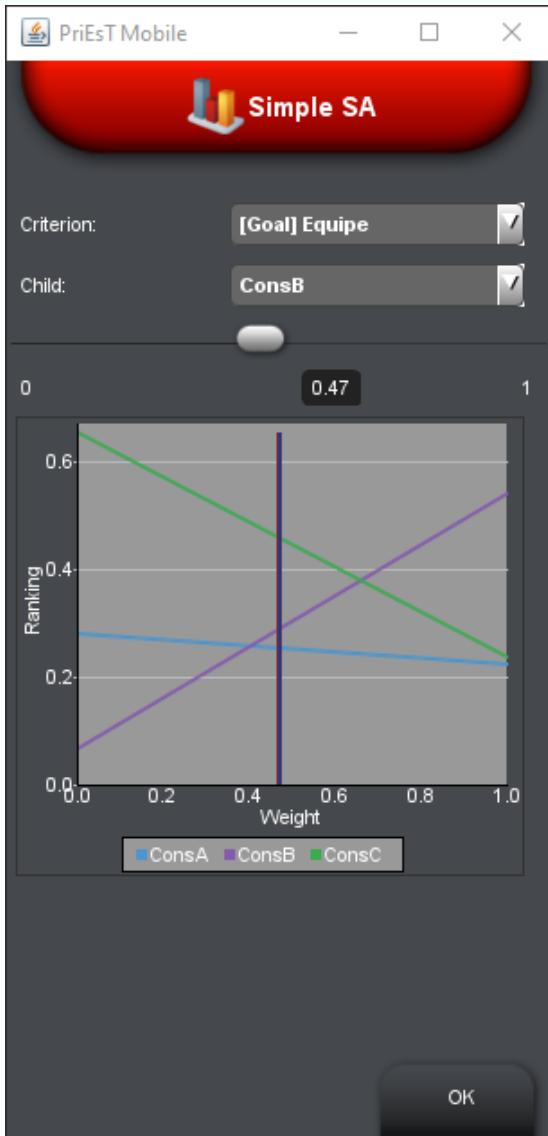
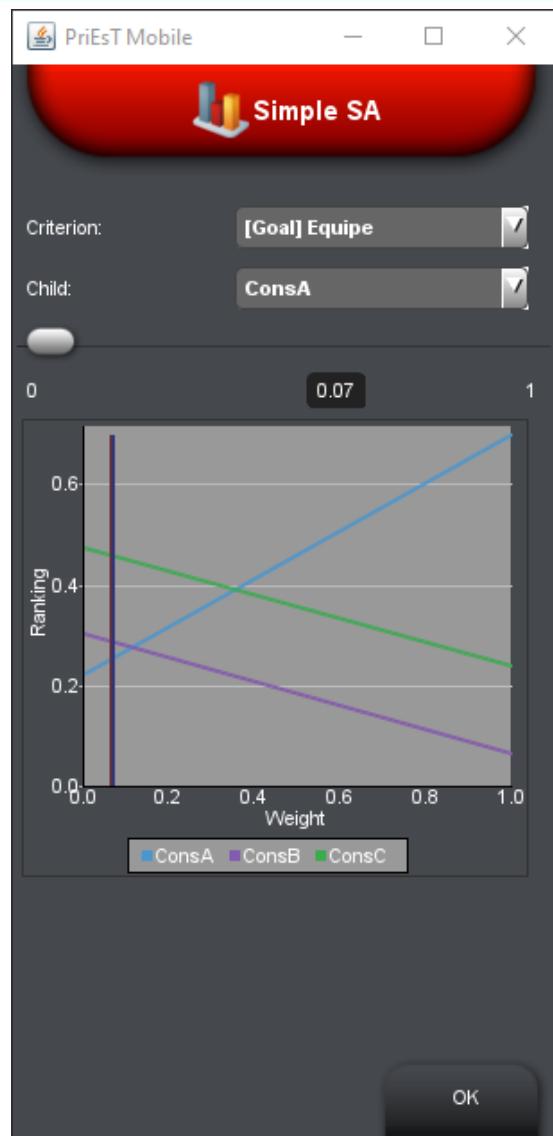
Análise de sensibilidade – Custo das consultorias



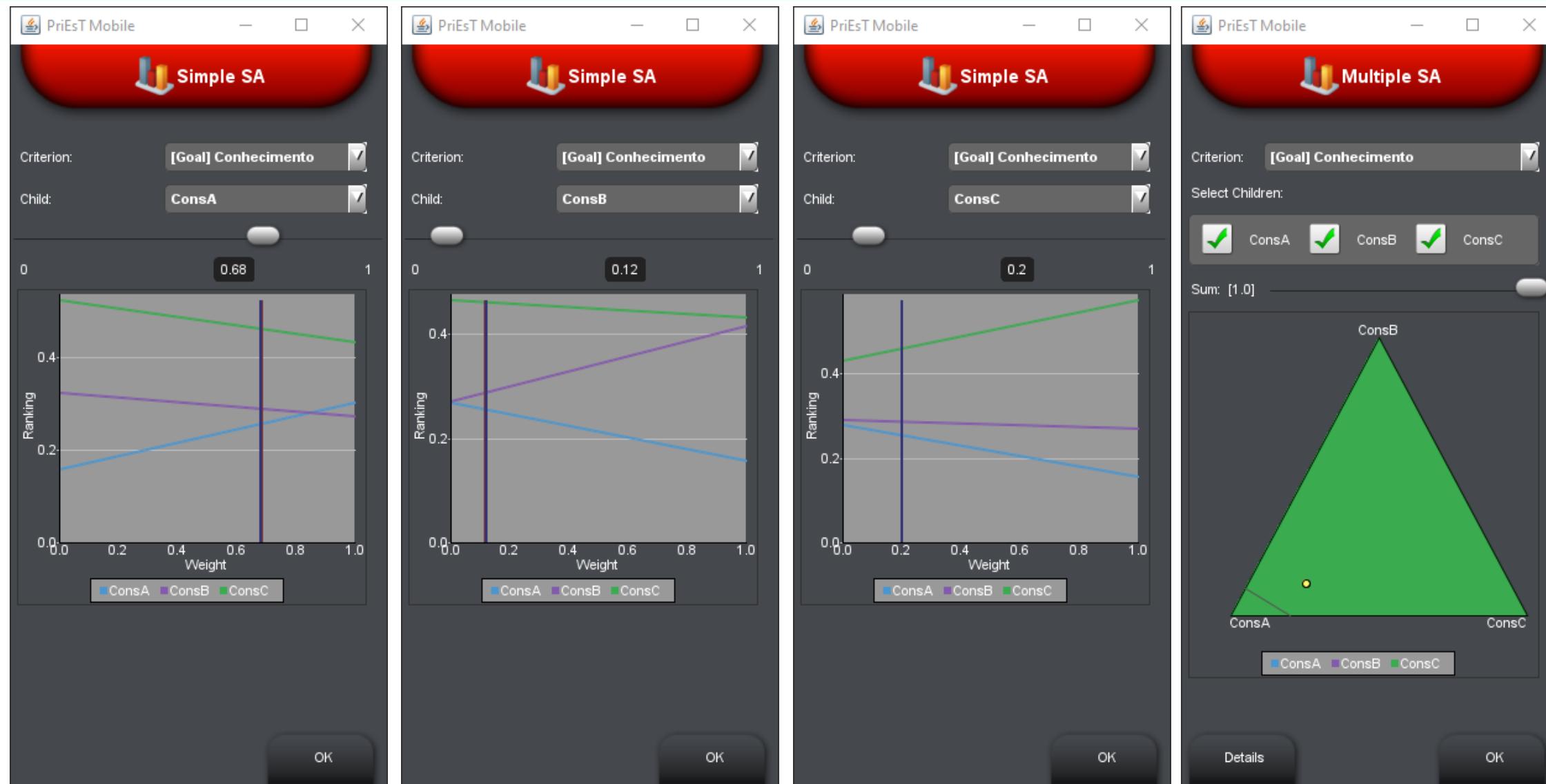
Análise de sensibilidade – Experiência das consultorias



Análise de sensibilidade – Equipe das consultorias



Análise de sensibilidade – Conhecimento das consultorias





UFABC

ENGENHARIA AMBIENTAL E URBANA
Avaliação

Avaliação Aula 10

- Construção
 - Sugerir novas referências sobre o assunto teórico da aula no mural do grupo, indicando sua aplicação em sua área de interesse ou do grupo de trabalho.

- Compartilhamento
 - Cada aluno deve publicar no mural um relato crítico do que foi aprendido na aula e atividade, bem como, declarar como deseja aplicar os conhecimentos da disciplina em sua área de interesse.



[Mural MDT](#)



UFABC

ENGENHARIA AMBIENTAL E URBANA

Obrigado

Humberto de Paiva Junior