MATh.en.JEANS : Taches de Maxime

Lycée Pierre Mendès France

Selim HARZALLAH
Khalil BIBI
Sophie GAYES

2020/2021

Résumé

Cet article est un compte rendu des recherches hebdomadaires mathématiques à Maths en Jean au sein de notre lycée sur le sujet "Les taches de Maxime". Bonne lecture !

Table des matières

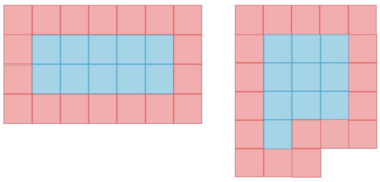
1 Présentation du sujet

Maxime, un élève, tache sa copie. Chaque goutte tombée sur un carreau, la noirci complètement. Pour ne pas se faire gronder par sa maîtresse et pour rendre une copie propre, Maxime colorie en rouge les carrés autour de chaque tâche.
Quel est le nombre minimum de carreaux à colorier s'il tache dix carreaux ?
Posons les premières tâches comme étant bleues et celles autour comme rouges.

2 Procédons par tâtonnement

2.1 Réponse rapide au sujet : le nombre de taches rouges pour 10 taches bleues

La question posée est quel est le nombre minimum de carreaux à colorier s'il tache 10 carreaux, ce que nous pouvons reformuler : "Quelle serait la disposition idéale des taches bleues sachant qu'on en a 10 pour avoir un minimum de carreau rouges autour ?"
Nous avons procédé par tâtonnement et il nous a fallu que très peu de temps pour trouver la réponse, deux dispositions étaient possibles celle qu'on nomma 5.5 et l'autre 3.3.3.1 consciencieusement selon la répartition des carreaux comme illustré ci-dessous.

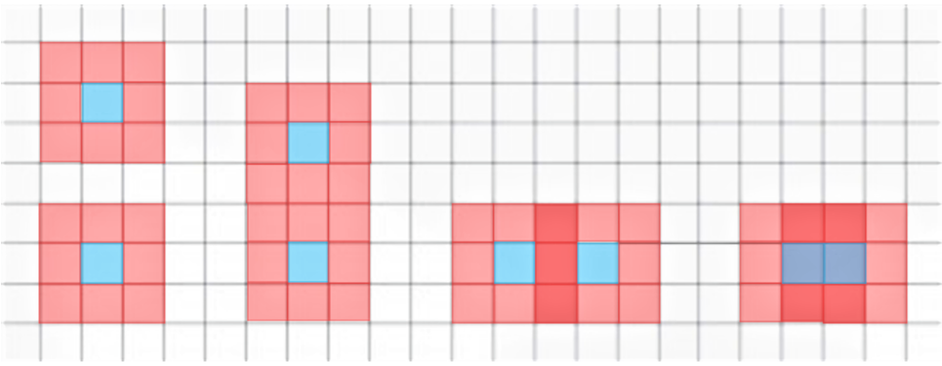


Le nombre minimum de carreaux rouges pour 10 carreaux bleus était donc 18.

2.2 Creusons plus loin : nombre de taches rouges pour n taches bleues

Soit n le nombre de taches bleues. Par intuition, obtenir un minimum de carreaux rouges à colorier pour n carreaux bleus se ferait en rapprochant au maximum nos tâches initiales (bleues). Ce, car 1 tache bleue, à elle toute seule, permet l'existence de 8 carreaux rouges autour. De ce fait, au moment de tacher une nouvelle fois sa feuille, il doit la rapprocher un maximum de la première tache. Pour en être convaincu, étudions les configurations ci-dessous pour n=2 (c'est-à-dire pour 2 taches bleues). Ainsi, nous qualifions la première disposition de carreaux bleus comme étant la pire. Dans le cas où les deux taches bleues sont au moins séparées d'un carreau sur les longueurs ou d'au moins 2 carreaux en diagonale ; les 8 taches qui les entourent demeurent distinctes. Par conséquent, cette disposition nous impose 16 taches rouges pour chacune des taches bleues (c'est d'ailleurs le nombre maximal de taches rouges pour $n = 2$). Puis, en rapprochant petit à petit les deux taches on peut voir que certaines taches rouges finissent par se confondre, et donc "s'annuler". A la troisième étape, on remarque que l'on a déjà gagné 3 taches rouges de moins sur les 16 taches obtenues lors de l'étude du pire des cas.

Enfin, observons la configuration optimale, celle-ci colle complètement nos 2 taches bleues afin d'éliminer 4 carreaux rouges par rapport à la première configuration.



C'est en procédant ainsi qu'on obtient les figures pour 1,2 et même jusqu'à 8 carreaux bleus (voir sur géogébra en ligne).

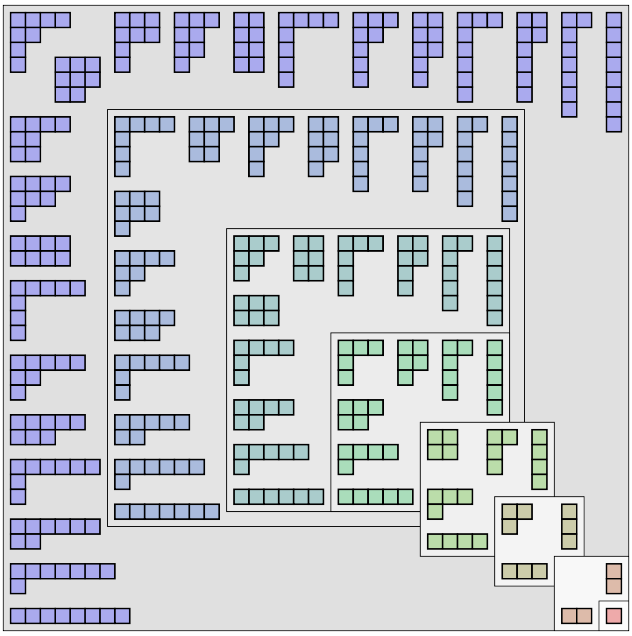
3 Diagramme de Ferrers

Justifions qu'il s'agit bien de la forme la plus optimisée en termes de tâches à colorier. Pour cela, nous pouvons utiliser les diagrammes de ferrers.

Mais tout d'abord il faudrait définir ce qu'est le fondement de ces diagrammes : les partitions d'un entier. Une partition est de ce fait, la décomposition d'un entier naturel en une somme d'entiers naturels. Ainsi l'ensemble des partitions d'un entier représente toutes les manières de le décomposer en différentes sommes d'entiers (sans tenir compte de l'ordre des termes.

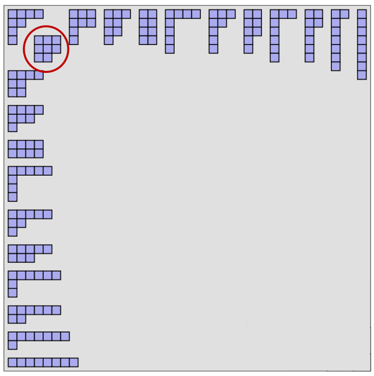
Voici par exemple, quelques partitions de 6 :
6
$= 3 + 3$
$= 2 + 2 + 2$
$= 1 + 5$

Le diagramme de Ferrers est en fait une représentation d'une partition d'un entier. Sur la figure ci-dessous, on a tous les diagrammes de Ferrers de chaque entier de 1 à 8. On remarque que chacunes des partitions représentent un ensemble de carreaux les uns aux côtés des autres. Pour en tirer la partition en termes d'entiers on compte les carreaux par colonne (chaque colonne représentant un terme de la décomposition). Les diagrammes et donc, chaque partitions d'un entier n correspond à toutes les configurations de n tâche(s) bleue(s) possible(s). On peut facilement trouver la configuration la plus optimale (en assumant que cela est le cas lorsque nos taches, soit les carreaux, sont disposés de la manière la plus compacte) parmi toutes les représentations de chaque partition pour n.



Source, visitée le 18/07/2021

On remarque d'ailleurs que concernant nos taches comme pour les partitions d'un entier sous forme de somme, l'ordre ne nous importe pas. Or, cela n'est pas tenu en compte sur la figure (car pour représenter les termes d'une partition on le fait colonne par colonne). Pour un souci de clarté, faisons abstraction d'une partie de la figure étant donné que la disposition des carreaux de diagrammes en bas à gauche équivaut à ceux en haut à droite en termes de taches. Puis parmi ces diagrammes, nous arrivons à trouver l'unique disposition, la plus compacte, celle qu'on qualifie d'optimale. Les diagrammes pour $n = 8$, est entouré en rouge celui qui est visiblement la forme optimale.



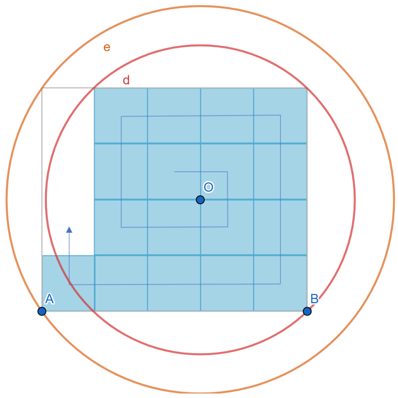
4 Isopérimétrie du cercle : Terrains et gourdes crapauds ?

Cela revient à se poser cette question : comment obtenir le maximum en minimisant sur les bords ? Voici la réponse de la renommée princesse phénicienne, Didon :
Elle obtint du roi de Numidie « autant de terre qu'elle pourrait en faire tenir

dans la peau d'un bœuf ». Didon fit de ce fait, découper la peau en fines lamelles qu'elle mit bout à bout afin d'en faire une longue lanière. Puis, elle fit étendre cette lanière sur un cercle. Didon avait intuitivement trouvé la solution au problème isopérimétrique.

Ce problème de la plus grande surface plane que l'on peut délimiter par une corde d'une certaine longueur fascine depuis l'antiquité. Les grecs annonçait la réponse : la forme optimale est le cercle. Et pourtant il faudra attendre le XIXe siècle pour en avoir la première démonstration.
Puisqu'avec nos taches bleues, on a une surface croissante(à chaque ajout de tache), la configuration optimale serait de disposer nos taches de manière à se rapprocher le plus possible d'un cercle (bien qu'elles soient carrées) afin de minimiser les bords.

Pour mieux comprendre, étudions cette figure :
Notre premier cercle (d) de centre O est atteint au bout de 16 taches bleues. A cette étape, imaginons les carreaux rouges à colorier autour ; ils restent relativement proche de ce même cercle (d). Ajoutons une tache, alors un autre objectif se dessine : celui d'atteindre le cercle (e) de centre O. Cela nous contraint alors de déposer les prochaines taches au bord de celles déjà existantes suivant la spirale illustrée.
C'est ainsi que cela nous fait penser à la gourde crapaud. En effet, celle-ci à la forme sphérique est souvent utilisée au Sahara. Sa forme a d'ailleurs pour but de protéger le liquide qui s'y trouve de l'environnement extérieur. On pourrait penser exactement de la même manière en tachant sa feuille. On "serre" alors les taches les unes contre les autres, pour garder une certaine température ou concentration de bleu en un espace le plus réduit que possible, et donc proche d'un cercle.



On en déduit enfin que procéder en spirale est un protocole qui assure d'obtenir la disposition optimale.

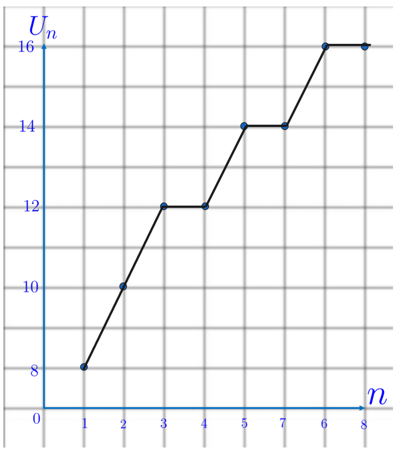
PS : Étant donné que le nombre de taches rouges dépend de n (soit le nombre de taches bleues) ; nous avons cherché à établir un lien entre les deux périmètres, celui du polygone bleu et celui du polygone rouge. Il est à préciser que notre recherche sur ce point s'est basé sur des polygones créés par des taches agencées selon la configuration la plus optimale. Or cette piste ne nous a mené à rien. De ce fait, nous nous intéresserons au nombre de carreaux rouges en fonction du nombre de carreaux bleus, et ce en se penchant sur les suites.

5 Suite arithmétique

Posons n le nombre de taches bleues et les termes de la suite U_n les taches rouges.
En calculant à la main les premières valeurs de U_n, on remarque qu'elle n'est pas arithmétique :

$$U_1 = 8$$
$$\mathrm{U}_2 = 10$$
$$\mathrm{U}_3 = 12$$
$$\mathrm{U}_4 = 12$$
$$\mathrm{U}_5 = 14$$
$$\mathrm{U}_6 = 14$$
$$\mathrm{U}_7 = 16$$
$$\mathrm{U}_8 = 16$$

En effet, nous observons une augmentation de 2 à certaines valeurs de n alors qu'à d'autres elle stagne. C'est donc une suite non monotone. La raison est donc différente, car le passage qui se fait entre deux termes n'est pas le même que celui entre deux autres. Par exemple, le passage de U_2 à U_3 se fait en ajoutant 2 à la valeur de U_2. Alors que, d'autre part $U_3 = U_4$. Cependant, malgré l'irrégularité des termes la suite, on observé une régularité de stagnation qui nous a amenés à garder cette piste.
Pour mieux y voir, nous avons représenté graphiquement via Géogébra la courbe représentative de la fonction : $f(n) = U_n$.



Nous remarquons de ce fait, que les points ne sont pas alignés, la suite n'est donc pas arithmétique.

Nous avons cependant, essayer de modéliser cette courbe par une suite, et de l'exprimer en fonction de n.
Observons de nouveau nos termes (ci-dessus), un certain motif se répète à partir de $n = 3$: les termes de la suite augmentent de 2 lors d'un passage d'un n pair à un n impair (et inversement), avant de stagner : $U_3 + 2 = U_4$,$U_5 + 2 = U_6$ et

$U_7 + 2 = U_8$.

Alors, nous avons exprimé U_n tel que :

$$\begin{cases} U_1 = 8 \\ U_2 = 10 \\ U_n = U_{n-2} + 2 \end{cases}$$

Cela signifierait que :
$U_3 = U_1 + 2$
$\Leftrightarrow U_3 = 8 + 2 = 10$ or, $U_3 = 12$.

Nous en avons déduit que la suite devait se fonder sur les 3 premiers termes, d'où l'expression d'une nouvelle suite :

$$\begin{cases} U_1 = 8 \\ U_2 = 10 \\ U_3 = 12 \\ Un = U_{n-3} + 4 \end{cases}$$

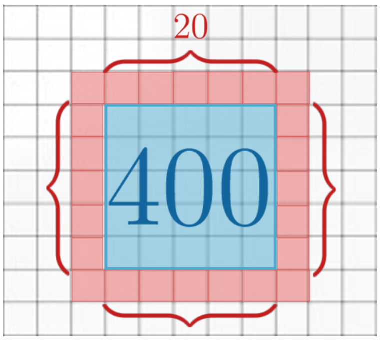
Nous l'avons donc implémenté en python :

```python
dico={1:8,2:10,3:12}
def jusqua(n) :
  for i in range(4,n+1) :
        U=dico.get(i-3)+4 #  U_n = U_n-3 + 4
        dico.update({i: U})
  return(dico)

n=500
print(jusqua(n))
```

Ce qui est pratique c'est qu'en implémentant nous pouvons aller plus loin et parcourir de grandes valeurs de n. (Nous vous conseillons vivement de compiler le code ci-dessus).

Prenons alors $n = 400$ (soit le cas de 400 taches bleues). 400 étant un carré parfait on aura $20 * 4 + 4 = 84$ taches rouges.
Or, d'après la sortie de notre programme qui modélise la suite posée précédemment : $U_400 = 540$ (d'après celle-ci on aurait 540 taches rouges).



6 Suite géométrique

L'allure de la suite (ci dessus) n'a pas l'air géométrique du tout puisque 1 fois sur 2 le nombre de carreau rouge stagne, avant d'augmenter de 2, et cela est une indication qu'il n'y a aucun facteur multiplicatif d'un nombre de tache bleues au suivant.

Nous avons donc :
$U_2 = U_1 \cdot 1.25$
$U_3 = U_2 \cdot 1.2$
$U_5 = U_4 \cdot 1$

Nous pouvons voir ainsi que le facteur multiplicatif change et que nous n'avons pas de forme géométrique pour la suite.

7 Suite arithmético-géométrique

N'étant ni arithmétique ni géométrique, supposons alors que la suite recherchée soit arithmético-géométrique.

Celle ci est s'exprime de la sorte :
$U_{n+1} = a \cdot U_n + b, a \neq 1 \ et \ b \neq 0 \in \mathbb{R}$.

D'après la formule d'une suite arithmético-géométrique :
$U_2 = a \cdot U_1 + b$
$U_3 = a \cdot U_2 + b$
$U_4 = a \cdot U_3 + b$
$U_5 = a \cdot U_4 + b$

Considérons maintenant les deux dernières équations :
$$\begin{cases} U_4 = a \cdot U_3 + b \\ U_5 = a \cdot U_4 + b \end{cases}$$
Cela impliquerait que $12 = 14$ ce qui nous mène donc à une contradiction. Notre suite n'est donc pas arithmético-géométrique.

8 Polynômes d'interpolation et d'extrapolation

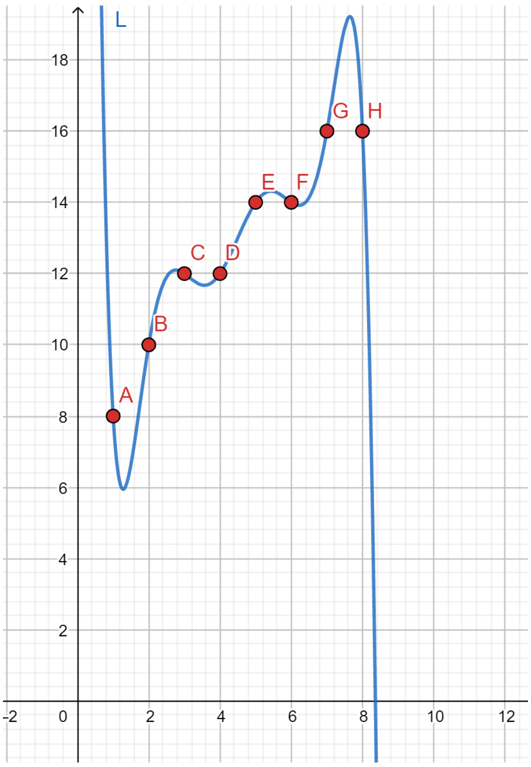
Penchons nous sur la représentation graphique de f tel que $U_n = f(n)$ afin de trouver l'expression de f soit la formule explicite de (U_n).

8.1 Interpolons

Interpoler c'est remplacer une courbe par une autre courbe qui coïncide avec la première en un nombre fini de points. L'avantage, c'est que l'on a certains points de coordonnées (n, U_n) et que le polynôme d'interpolation de Lagrange va nous permettre d'obtenir un polynôme. Ce polynôme représente le nombre de carreaux rouges en fonction des taches bleues.

Utilisons alors un outil en ligne qui nous permet d'obtenir le polynôme en fonction des coordonnées de points donnés. Donnons alors les coordonnées des 8 premiers points (calculés à la main).
Voir le polynôme et sa représentation en ligne. En regardant la solution étape par étape, nous remarquons que si nous l'avions fait à la main ça aurait été non seulement délicat mais fastidieux.

Une fois avec le polynôme en main, nous le représentons : en rouge nos points et la courbe en bleu est notre polynôme.
Soulignons que l'interpolation fait son travail puisqu'à chaque antécédent donné on a la bonne image par la fonction L. Allons alors plus loin que $n = 8$, $L(9)$ semble aller vers $-\infty$. D'ailleurs si l'on revient sur le lien précédent, on nous propose un point d'interpolation. En testant de mettre une des valeurs fournies à la fonction, on obtient fatalement le bon résultat. Mais, essayons maintenant de mettre 9 par exemple (rappelons aussi que l'on s'est arrêté au point de coordonnées $(8, 16)$) : on obtient $L(9) = -108.00$ ce qui est tout à fait absurde.



8.2 Extrapolons

L'extrapolation linéaire consiste en l'estimation d'une valeur inconnue d'une variable grâce aux valeurs précédentes connues. Elle permet donc d'estimer des valeurs en dehors d'un champ d'études. Cependant il est à noter que le résultat reste approximatif.

Nous avons donc extrapolé nos points de coordonnées (n, U_n) pour trouver à partir d'un point, le point suivant qui nous permettra de trouver le nombre de carreaux minimum à colorier pour le reste des taches au delà de $n = 7$.

Utilisons alors un outil en ligne (le même que pour l'interpolation de Lagrange) qui nous permet d'obtenir plusieurs courbes d'approximation (et leurs expressions) à travers le nuage de points, chacune d'entre elles ont un taux d'erreur qui leur est propre.
Voir le polynôme et sa représentation en ligne. Étant donné que nous avons entré les coordonnées des points jusqu'à $n = 7$ et que nous connaissons la valeur de U_8, soit 16. Nous pouvons dés lors, comparer la valeur prédite avec la valeur exacte (que l'on connaît). On en a donc déduit que l'extrapolation la plus effi-

cace était celle de la quadratique. En effet, à partir de 8, les valeurs deviennent très éloignées les uns des autres. Plus n grandit, plus les valeurs s'éloignent d'un résultat satisfaisant. Par exemple, la 9ème valeur est -108 ce qui est très peu logique puisque cela signifie que le nombre de taches rouges à colorier est négatif.

En testant de mettre une des valeurs fournis à la fonction, on obtient fatalement le bon résultat. D'ailleurs, essayons d'obtenir l'image de 7,6 qu'on arrondit grossièrement à 8, en définissant cette courbe comme la courbe représentative de la fonction f on a $f(8) = 16$ (rappelons aussi qu'on s'est arrêté au point de coordonnées (7,16) lors de la rentrée des données). Sauf qu'en calculant pour les valeurs suivantes, on remarque que l'écart entre la valeur prédite et celle qu'on a se creuse de plus en plus et la marge d'erreur devient significative...

D'ailleurs, par rapport à l'extrapolation nous pouvons aussi un modèle assez similaire : la régression. Même si les deux sont très semblables, il y a quand même une petite différence cependant elle requiert des connaissances que nous n'avons pas encore assez développées (variance uniforme par exemple...) et donc nous ne l'avons pas assez approfondie. Mais elle pourrait rester quand même comme une autre piste exploitable.

9 Solution

Finalement pour trouver une expression à notre suite, il fallait continuer à explorer. En effet, nous pouvons construire les tableaux suivants :
Soit n le nombre de taches et U_n le nombre de carreaux à colorier.

n	U_n
1	8
2	10
3	12
4	12
5	14
6	14
7	16
8	16
9	16

n	U_n
10	18
11	18
12	18
13	20
14	20
15	20
16	20
17	22
18	22

Ainsi, nous pouvons remarquer qu'à chaque multiple de deux entiers consécutifs et qu'à chaque carré parfait nous augmentons de 2 le nombre de carreaux à colorier. C'est le cas par exemple pour $n = 2$, puisque $2 = 1 \cdot 2$ ou encore pour $n = 6$ car $n = 2 \cdot 3$ et pour $n = 4$ puisque $4 = 2^2$ ou pour $n = 9$ car $9 = 3^2$ où n est le nombre de taches. Par ailleurs, nous remarquons une certaine structure

après $n = 2$ (soit $1 \cdot 2$), le nombre de carreaux à colorier stagne 2 fois. Puis, après $n = 6$ (soit $2 \cdot 3$), celui ci stagne 3 fois et de même ceux qui suivent $n = 9$ (soit 3^2) ; et ceux jusqu'au prochain n qui s'écrit sous la forme d'un carré ou d'un produit d'entiers consécutifs.

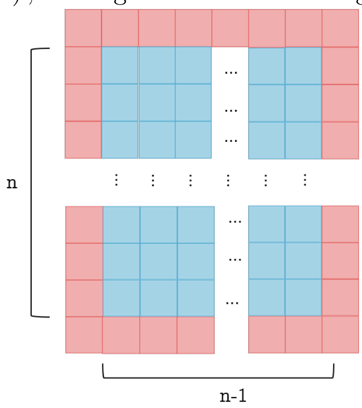
De cette manière nous pouvons définir la suite de la manière suivante :

Soit $m = n(n-1)$ ou $m = n$, $n \in \mathbb{N}$.
Alors, nous avons toujours $U_{m+y} = U_m + 2$ tel que $0 < y \leq n\,;\, n, y \;\in \mathbb{N}$.

9.1 Démontrons donc cela en premier temps pour le cas de $m = n(n-1)$:

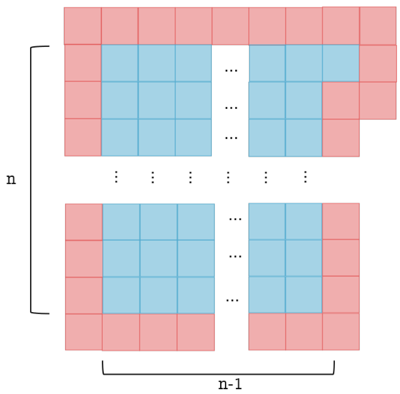
Nous pouvons construire un diagramme de ferrer (en bleu) représentant les tâches et les carreaux à colorier (en rouge) ; de longueur $n-1$ et de largeur n.

Ainsi nous pouvons compter que sur les deux longueurs nous avons $2 \cdot (n+1)$ carreaux à colorier et sur les largeurs il nous reste $2n$ carreaux à colorier donc pour $m = n(n-1)$ nous avons :
$U_m = 2(n+1) + 2n = 4n + 2$

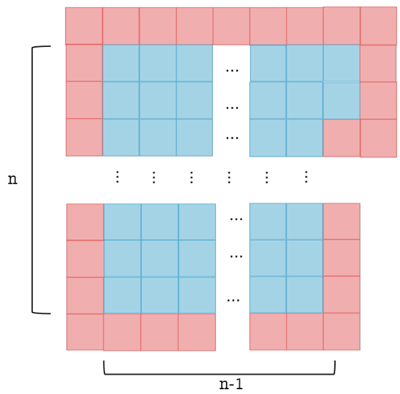


U_m

Maintenant rajoutons des carreaux :



Pour $y = 1$



Pour $y = 2$

Nous avons de ce fait, pour $y = 1$: $u_{m+1} = u_m + 3 - 1 = u_m + 2$
(Où nous avons 3 carreaux en plus colorier et 1 carreau que nous n'avons plus besoin de colorier puisque ce dernier est remplacé par la tâche).

Ainsi, pour $y = 2$: $u_{m+2} = u_m + 4 - 2 = u_m + 2$ *(De la même manière...).*
Ce, jusqu'à $u_{m+n} = u_m + (n+2) - n$.

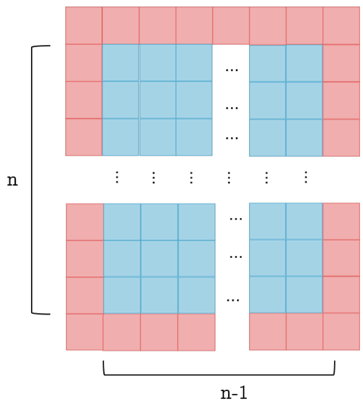
9.2 Démontrons maintenant pour le cas de $m = n^2$:

Reprenons le premier diagramme de ferrer de la démonstration précédente ; de longueur $n-1$ et de largeur n.

Nous pouvons ainsi compter $4n + 4$ carreaux à colorier soit :
$U_m = 4n + 4$

Aussi, appliquons la méthode précédente (que nous avions utilisé pour $m = n(n-1)$).
Ce qui nous montre encore une fois que :
$U_{m+n} = U_m + (n+2) - n = U_m + 2$.

De ce fait, nous avons bien la forme suivante pour notre suite :
$U_{m+y} = U_m + 2$, tel que $m = n(n-1)$ ou $m = n^2$; avec $0 < y \leq n$; $n, y \in \mathbb{N}$.



Pour $y = 0$

Alors, proposons une forme un peu plus explicite pour cette suite, étant donné que nous avons :
Pour $m = n^2, U_m = 4n + 4$ et pour $m = n(n-1), U_m = 4n + 2$.

Donc, nous avons en fin de compte :
Pour $m = n^2$, $U_{m+y} = 4n + 6$ et pour $m = n(n-1)$, $U_{m+y} = 4n + 4$;
avec $0 < y \leq n$; $n, y \in \mathbb{N}$.

Afin de modéliser cette suite et de générer facilement ses termes, nous avons réalisé un programme informatique en Python.

```
from math import *

rep=int(input("entrez le nombre de carreaux bleus tach s : "))

def suite(bleu,premiereFois):
  racine_carre = sqrt(bleu)
  if (racine_carre.is_integer()):
    print(4*racine_carre + 4 + 2*premiereFois)
    #Premier Cas : Bleu est un carr  parfait

  else:
    racine_carre = ceil(racine_carre)
    if (racine_carre*(racine_carre-1)) == bleu:
      print(4*int(racine_carre)+2+2*premiereFois)
      #Deuxi me Cas : Bleu est un produit de deux nombres
    cons cutifs

    else:
      suite(bleu-1,1)
      #Troisi me Cas : On cherche le n  ou le n(n-1) le plus
    proche

```

```
suite(rep,0)
```

10 Conclusion

Nous avons exploré un grand nombre de pistes, avant de trouver une réponse qui a assouvi notre désir de résoudre le sujet choisi. Ces mêmes pistes ne sont pas considérés comme des échecs, elles ont été extrêmement instructives et représente le fils conducteur qui nous mena à la piste finale. Ainsi, chacune d'entre elles a son importance [1].

De ce fait, nous remercions :
L'association MeJ pour ce club qui nous fait prendre goût à la recherche et au plaisir de faire des maths.
Le chercheur pour l'originalité des problèmes proposés.
Mr Ben Tiba et Mr Laaroussi pour nous avoir encouragé tout au longs de nos recherches. Merci à eux et au lycée d'avoir ouvert un atelier dans notre établissement.

Merci à vous de nous avoir lu, pour toute remarque nous vous invitons à vous adresser à une de ces deux adresses mail (valides jusqu'en juillet 2022) : yousra-sophie.gayes-e@ert.tn et khalil.bibi-e@ert.tn.

1. "En fait, la démarche scientifique représente un effort pour libérer de toute émotion la recherche et la connaissance."(François Jacob).