Морозов Андрей

M3236

Вариант 15

Задача №1.3

Пусть X_1 и X_2 – одинаково распределённые, независимые случайные величины и $X_1 + X_2 = X$.
если X_1 принимает некоторое значение $n \in \mathbb{R}$ с вероятностью p, тогда

$$P(X = 2n) \geq P(X_1 = n \wedge X_2 = n) = P(X_1 = n) \cdot P(X_2 = n) = p^2,$$

предпоследнее равенство в силу независимости, а последнее в силу того, что распределены одинаково.

Тогда $2n$ равно 0, или 1, или -1, то есть X_1 может принимать только значения $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$. Пусть она принимает их с вероятностями $x, 1-x-y, y$.

$$P(X = 0) = P(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0) + P\left(X_1 = \frac{1}{2} \wedge X_2 = -\frac{1}{2}\right) + P\left(X_1 = -\frac{1}{2} \wedge X_2 = \frac{1}{2}\right) = 2xy + 1 - x - y$$

$$\begin{cases} p_2 = 2xy + 1 - x - y \\ p_1 = x^2 \\ p_3 = y^2 \end{cases} \text{сложив получим: } p_1 + p_2 + p_3 = 1 = (x+y)^2 + 1 - (x+y),$$

откуда:

1. $x + y = 0 \Rightarrow p_2 = 1$

2. $x + y = 1 \Rightarrow \begin{cases} p_1 = x^2 \\ p_2 = 2x(1-x), \text{где } 0 \leq x \leq 1 \\ p_3 = (1-x)^2 \end{cases}$

Ответ:

$$\begin{cases} p_1 = x^2 \\ p_2 = 2x(1-x), \text{где } 0 \leq x \leq 1 \text{ или } p_1 = p_3 = 0, p_2 = 1 \\ p_3 = (1-x)^2 \end{cases}$$

Задача №2.2

Так как случайные величины θ и R независимы, то их совместная плотность находится как произведение плотностей:

$$f_{\theta,R}(\theta,r)=f_\theta(\theta)f_R(r)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{2\pi}\cdot 1(r\geq 0)\cdot 1(0\leq\theta\leq 2\pi)$$

Воспользуемся формулой для преобразования совместного распределения $f_{X,Y}$, где $X=R\cos\theta$; $Y=R\sin\theta$. Якобиан отображения:

$$J^{-1}=\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial X}{\partial\theta} & \frac{\partial X}{\partial R}\\ \frac{\partial Y}{\partial\theta} & \frac{\partial Y}{\partial R}\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}-R\sin\theta & \cos\theta\\ R\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\right|=R$$

Тогда $f_{X,Y}(x,y)=f_{\theta,R}(\theta,r)\cdot\dfrac{1}{|J^{-1}|}$, подставляя $r=\sqrt{x^2+y^2}$ и $\theta=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (стандартная полярная замена), получаем:

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{r}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\cdot 1(r\geq 0)\cdot 1(0\leq\theta\leq 2\pi)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

Откуда получаем, что X и Y - независимы, так как представимы в виде произведения функций, где каждая функция от одной переменной и $X\sim N(0,\sigma^2), Y\sim N(0,\sigma^2)$.