

-
- ▶ **Опорный план** является допустимым решением ТЗ и используется в качестве начального базисного решения при нахождении оптимального решения методом потенциалов.
 - ▶ Существует три метода нахождения опорных планов: метод северо-западного угла, метод минимального элемента и метод Фогеля.
 - ▶ "Качество" опорных планов, полученных этими методами, различается: в общем случае метод Фогеля дает наилучшее решение (зачастую оптимальное), а метод северо-западного угла – наихудшее.
-



Суть метода

- ▶ Метод Фогеля состоит в вычислении для каждой строки транспортной таблицы разницы между двумя наименьшими тарифами. Аналогичное действие выполняют для каждого столбца этой таблицы. Наибольшая разница между двумя минимальными тарифами соответствует наиболее предпочтительной строке или столбцу (если есть несколько строк или столбцов с одинаковой разницей, то выбор между ними произволен). В пределах этой строки или столбца отыскивают ячейку с минимальным тарифом, куда пишут отгрузку. Строки поставщиков или столбцы потребителей, которые полностью исчерпали свои возможности по отгрузке или потребности которых в товаре были удовлетворены, вычеркиваются из таблицы (в примерах ниже они закрашиваются серым цветом), и вычисление повторяются до полного удовлетворения спроса и исчерпания отгрузок без учета вычеркнутых («серых») ячеек
-



Алгоритм решения

- ▶ Шаг 1. Составляют транспортную таблицу.
- ▶ Шаг 2. Для каждой строки и каждого столбца транспортной таблицы определяют разность между наименьшим тарифом и ближайшим к нему значением
- ▶ Шаг 3. В строке или в столбце, которым соответствует наибольшая разность, выбирают клетку с наименьшим тарифом.
- ▶ Шаг 4. В выбранную клетку, аналогично предыдущим методам, записывают максимально возможное число единиц продукции, которое разрешается ограничениями на предложение и спрос. После этого вычеркивают либо строку, если предложение поставщика исчерпано, либо столбец, если спрос потребителя удовлетворен.
- ▶ Если все клетки таблицы заполнены или вычеркнуты, то план перевозок построен. В противном случае переходят к шагу 2 без учета вычеркнутых и заполненных клеток.
- ▶ В методе Фогеля используются штрафы, взимаемые за неудачный «выбор» маршрута. Рассчитанные на шаге 2 разности между двумя уровнями затрат на перевозку являются штрафами за неверно выбранный маршрут перевозки.



Числовой пример

- В этом примере стоимость доставки в рублях за кг записана в ячейках в квадратных скобках.

	Потребитель В1, потребность 20 кг.	Потребитель В2, потребность 30 кг.	Потребитель В3, потребность 30 кг.	Потребитель В4, потребность 10 кг.
Поставщик А1, запас 30 кг.	[2 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[4 руб./кг.]
Поставщик А2, запас 40 кг.	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[5 руб./кг.]	[1 руб./кг.]
Поставщик А3, запас 20 кг.	[4 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[6 руб./кг.]

- В эти же ячейки транспортной таблицы следует вписать объемы перевозки, чтобы
- распределить запасы поставщиков по потребителям.

Шаг 1

Вычислим разницы между двумя минимальными тарифами по строкам, а затем по столбцам:

- ▶ Строка 1: $2-2=0$
- ▶ Строка 2: $2-1=1$
- ▶ Строка 3: $3-2=1$
- Столбец 1: $3-2=1$
- Столбец 2: $3-2=1$
- Столбец 3: $2-2=0$
- Столбец 4: $4-1=3$

	Потребитель В1, потребность 20 кг.	Потребитель В2, потребность 30 кг.	Потребитель В3, потребность 30 кг.	Потребитель В4, потребность 10 кг.
Поставщик А1, запас 30 кг.	[2 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[4 руб./кг.]
Поставщик А2, запас 40 кг.	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[5 руб./кг.]	[1 руб./кг.] <u>10 кг</u>
Поставщик А3, запас 20 кг.	[4 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[6 руб./кг.]

Шаг 2

Вычислим разницы между двумя минимальными тарифами по строкам (не учитывая закрашенные серым и распределенные ячейки)

Строка 1: $2-2=0$

Строка 2: $3-2=1$

Строка 3: $3-2=1$

Столбец 1: $3-2=1$

Столбец 2: $3-2=1$

Столбец 3: $2-2=0$

	Потребитель В1, потребность 20 кг.	Потребитель В2, потребность 30 кг.	Потребитель В3, потребность 30 кг.	Потребитель В4, потребность 10 кг.
Поставщик А1, запас 30 кг.	[2 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[4 руб./кг.]
Поставщик А2, запас 40 кг.	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.] <u>30 кг.</u>	[5 руб./кг.]	[1 руб./кг.] <u>10 кг.</u>
Поставщик А3, запас 20 кг.	[4 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[6 руб./кг.]

Шаг 3.

Вычислим разницы между двумя минимальными тарифами по строкам
(не учитывая закрашенные серым и распределенные ячейки)

Строка 1: $2-2=0$

Строка 3: $4-2=2$

Столбец 1: $4-2=2$

Столбец 3: $2-2=0$

	Потребитель В1, потребность 20 кг.	Потребитель В2, потребность 30 кг.	Потребитель В3, потребность 30 кг.	Потребитель В4, потребность 10 кг.
Поставщик А1, запас 30 кг.	[2 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.]	[4 руб./кг.]
Поставщик А2, запас 40 кг.	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.] <u>30кг.</u>	[5 руб./кг.]	[1 руб./кг.] <u>10кг.</u>
Поставщик А3, запас 20 кг.	[4 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.] <u>20кг.</u>	[6 руб./кг.]

Шаг 4.

Заполнение оставшихся ячеек безальтернативно, присваиваем разницы = 0, если число нераспределенных ячеек в строке или столбце меньше двух.

	Потребитель В1, потребность 20 кг.	Потребитель В2, потребность 30 кг.	Потребитель В3, потребность 30 кг.	Потребитель В4, потребность 30 кг.
Поставщик А1, запас 30 кг.	[2 руб./кг.] <u>20 кг.</u>	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.] <u>10 кг.</u>	[4 руб./кг.]
Поставщик А2, запас 40 кг.	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.] <u>30 кг.</u>	[5 руб./кг.]	[1 руб./кг.] <u>10кг.</u>
Поставщик А3, запас 20 кг.	[4 руб./кг.]	[3 руб./кг.]	[2 руб./кг.] <u>20 кг.</u>	[6 руб./кг.]

Дальнейшая оптимизация решения

- ▶ Полученный результат распределения составляет $2*20+2*10+2*30+1*10+2*20 = 170$ рублей.
- ▶ Метод минимальных тарифов на этом же примере дал результат стоимостью 210 рублей, а метод северо-западного угла — 290 руб., то есть — наименее оптимальный.

Проверить этот результат на оптимальность и, при необходимости, окончательно его оптимизировать можно при помощи метода потенциалов (который в этом примере покажет, что это распределение оптимально)



Пример №2

Задача:

На три базы A1, A2, A3 поступил однородный груз в количествах, соответственно равных 160, 140 и 170 ед. Это груз требуется перевезти в четыре пункта назначения B1, B2, B3 и B4 соответственно в количествах 120, 50, 190 и 110 ед.

Тарифы перевозок единицы груза с каждого из пунктов отправления в соответствующие пункты назначения указаны в таблице:



Пример №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам					
	В1	В2	В3	В4							
A1	7	8	1	2	160						
A2	4	5	9	8	140						
A3	9	2	3	6	170						
Потребности	120	50	190	110	470						
Разности по столбцам											



Пример №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам					
	В1	В2	В3	В4							
A1	7	8	1	2	160	1					
				110	50						
A2	4	5	9	8	140	1					
A3	9	2	3	6	170	1					
Потребности	120	50	190	110	470						
Разности по столбцам	3	3	2	4							



Пример №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам				
	B1	B2	B3	B4						
A1	7	8	1 50	2 110	160 50	1	6			
A2	4	5	9	8	140	1	1			
A3	9	2	3	6	170	1	1			
Потребности	120	50	190 140	110	470					
Разности по столбцам	3	3	2	4						
	3	3	2							

Пример №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам					
	B1	B2	B3	B4							
A1	7	8	1 50	2 110	160 50	1	6				
A2	4	5	9	8	140	1	1	1			
A3	9	2	3 140	6	170 30	1	1	1			
Потребности	120	50	190 140	110	470						
Разности по столбцам	3	3	2	4							
	3	3	2								
	5	3	6								

Пример №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам						
	В1	В2	В3	В4								
A1	7	8	1 50	2 110	160 50	1	6					
A2	4	5	9	8	140	1	1	1	1			
A3	9	2 30	3 140	6	170 30	1	1	1	7			
Потребности	120	50 20	190 140	110	470							
Разности по столбцам	3	3	2	4								
	3	3	2									
	5	3	6									
	5	3										

Пример №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам							
	B1	B2	B3	B4									
A1	7	8	1 50	2 110	160 50	1	6						
A2	4	5	9	8	140	1	1	1	1				
A3	9	2 30	3 140	6	170 30	1	1	1	7				
Потребности	120	50 20	190 140	110	470								
Разности по столбцам	3	3	2	4									
	3	3	2										
	5	3	6										
	5	3											

Пример №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам								
	В1	В2	В3	В4										
A1	7	8	1 50	2 110	160 50	1	6							
A2	4 120	5	9	8	140 20	1	1	1	1	1				
A3	9	2 30	3 140	6	170 30	1	1	1	7					
Потребности	120	50 20	190 140	110	470									
Разности по столбцам	3	3	2	4										
	3	3	2											
	5	3	6											
	5	3												
	0	0												

Пример №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Запасы	Разности по строкам					
	B1	B2	B3	B4							
A1	7	8	1 50	2 110	160 50	1	6				
A2	4 120	5 20	9	8	140 20	1	1	1	1	1	0
A3	9	2 30	3 140	6	170 30	1	1	1	7		
Потребности	120	50 20	190 140	110	470						
Разности по столбцам	3	3	2	4							
	3	3	2								
	5	3	6								
	5	3									
	0	0									
▶		0									

-
- ▶ В итоге, общая стоимость перевозок равна:

$$S = 1 * 50 + 2 * 110 + 4 * 120 + 5 * 20 + 2 * 30 + 3 * 140 = 1330$$

