Понятия модели и моделирования

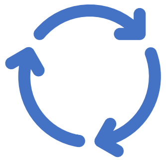
Моделирование - построение модели изучаемого объекта, явления или процесса.

Моделирование - воспроизведение или имитирование поведения какой-либо реально существующей системы на специально построенном аналоге или модели.

Задача моделирования состоит в математической формализации закономерностей, информационно отображающих поведение реальной системы.

Объект – это физическое (материальное) тело, вещь.

Явление – это внешние свойства и признаки предмета, постигаемые через ощущение, восприятие, представление. Например, в парфюмерной промышленности моделируются запахи.



Процесс – это ход, развитие явления, последовательная смена состояний объекта. Например, моделирование роста и развития растений в биологии.

Модель (modulus – образец, норма, мера)

Модель - отображение каким-либо способом наиболее существенных характеристик, процессов и взаимосвязей реальных систем.

Например, макет (модель) здания воспроизводит его архитектуру, топографо-геодезическая карта местности говорит о характере ландшафта.

- **Исследование операций – наука, занимающаяся количественным обоснованием решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности.**
- Под операцией понимается совокупность управляемых действий, объединенных единым замыслом, направленных на достижение определенных целей и имеющих повторяемый характер.

3 вида моделей:

1. Геометрические модели представляют некоторый объект, геометрически подобный своему оригиналу.
2. Физические модели отражают подобие между оригиналом и моделью не только с точки зрения их формы и геометрических пропорций, но и с точки зрения происходящих в них физических процессов.
3. Математические модели представляют собой абстрактные описания объектов с помощью знаков (символов). Обычно они имеют вид совокупности уравнений (или неравенств), таблиц, графиков, формул.

Все модели обладают рядом общих свойств:

а) они подобны изучаемому объекту и отражают его наиболее существенные стороны;

б) при исследовании модели способны замещать изучаемый объект, явление или процесс;

в) они дают информацию не только о самом моделируемом объекте, но и о его предполагаемом поведении при изменяющихся условиях.

- *Экономико-математические модели* – это смешанные модели, включающие в себя совокупность математических зависимостей, логических построений, схем, графиков и т.д., связанных в некоторую единую систему, имеющую экономический смысл.
- *Экономико-математические методы* – комплекс экономических и математических научных дисциплин, объединенных для изучения социально-экономических систем и процессов.
- *Экономико-математическое моделирование* – описание экономических и социальных систем и процессов в виде экономико-математических моделей.

Методы математического программирования

Все экономико-математические задачи имеют многовариантный, альтернативный характер.

Необходимо из множества допустимых вариантов выбрать оптимальный по заданному критерию.

Математически это означает поиск максимума или минимума той или иной функции.

При решении таких задач возникает 2 случая:

- Задача может быть решена классическими методами дифференциального исчисления;
- Классические методы трудно применимы или вообще не могут быть использованы.

Во 2-м случае применяют *методы математического программирования.*

Программирование - составление, выбор наилучшего варианта, плана, использование алгоритма последовательных приближений.

Математическое программирование – это раздел теории оптимизации (теории экстремальных задач), занимающийся изучением и решением задач минимизации (максимизации) функции нескольких переменных не подмножестве конечномерного векторного пространства, заданного в виде системы уравнений и/или неравенств.

Методы математического программирования представляют класс моделей, применяемых для формализации задач планирования целенаправленной деятельности, предусматривающих распределение ограниченного количества ресурсов разных видов.

Методы оптимизации

- Поиск экстремума функции (в практических задачах — критериев оптимальности) при наличии ограничений или без ограничений очень широко используются на практике:
- оптимальное проектирование (выбор наилучших номинальных технологических режимов, элементов конструкций, структуры технологических цепочек, условий экономической деятельности, повышение доходности),
- оптимальное управление,
- построение нелинейных математических моделей объектов управления,
- другие аспекты решения экономических и социальных проблем (например, управление запасами, трудовыми ресурсами, транспортными потоками).

Суть принципа оптимальности

состоит в стремлении выбрать такое управленческое решение, которое *наилучшим образом учитывало бы внутренние возможности и внешние условия производственной* деятельности хозяйствующего субъекта.

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КЛАССИФИЦИРУЮТ ПО СЛЕДУЮЩИМ ПРИЗНАКАМ

по характеру взаимосвязи между переменными:

а) *линейные* — все функциональные связи в системе ограничений и функция цели — линейные функции;

б) *нелинейные* — наличие нелинейности хотя бы в одном из упомянутых в п. «а» элементов;

по характеру изменения переменных:

а) *непрерывные* — значения каждой из управляющих переменных могут заполнять сплошь некоторую область;

б) *дискретные* — все или хотя бы одна переменная могут принимать некоторые целочисленные значения;

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КЛАССИФИЦИРУЮТ ПО СЛЕДУЮЩИМ ПРИЗНАКАМ

3) ***по учету фактора времени:***

а) *статические* — моделирование и принятие решений осуществляются в предположении о независимости от времени элементов модели в течение периода, на который принимается управленческое решение;

б) *динамические* — предположение о независимости элементов модели от времени в достаточной мере не обосновано;

ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ КЛАССИФИЦИРУЮТ ПО СЛЕДУЮЩИМ ПРИЗНАКАМ

4) ***по наличию информации о переменных:***

а) *задачи в условиях полной определенности* (детерминированные);

б) *задачи в условиях неполной информации* (случай риска) — отдельные элементы являются вероятностными величинами, однако известны или дополнительными статистическими
исследованиями могут быть установлены их законы распределения вероятностей;

в) *задачи в условиях неопределенности* — можно сделать предположение о возможных исходах случайных элементов, но нет возможности сделать вывод о вероятностях исходов;

Задачи оптимального программирования классифицируют по следующим признакам

5) ***по числу критериев оценки альтернатив:***

а) *простые, однокритериальные* — задачи, где экономически приемлемо использование одного критерия оптимальности или удается специальными процедурами свести многокритериальный поиск к однокритериальному;

б) *сложные, многокритериальные* — выбор управленческого решения по нескольким показателям.

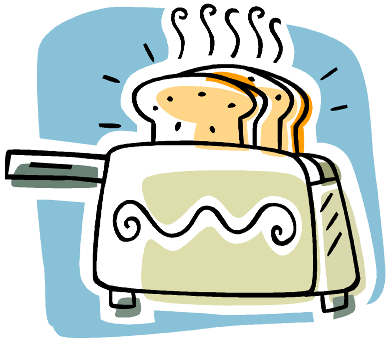
Задачи линейного программирования

- Задачи нахождения значений параметров, при которых получается минимум или максимум целевой функции с учетом ограничений, наложенных на ее аргументы, называются задачами ***математического программирования***.
- Если целевая функция выражает линейную зависимость между величинами, мы имеем дело с частным случаем – с задачами ***линейного программирования***.

Пример 1 Задача использования сырья

Для изготовления двух видов продукции П1 и П2 используется три вида сырья: С1 ,С2 и С3. Запасы сырья на складе и расход сырья на изготовление ед. продукции, приведены в таблице:

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья	
		П1	П2
С1	20	2	5
С2	40	8	5
С3	30	5	6

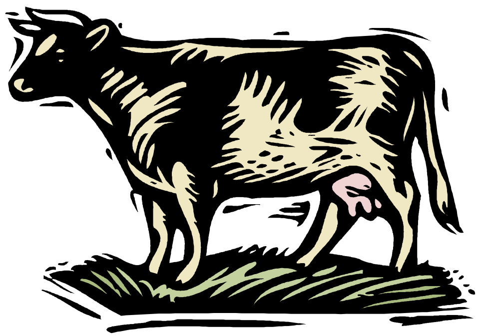


Прибыль от реализации единицы продукции П1 составляет 50 руб., а продукции П2 – 40 руб. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить max прибыль.

Пример 2 Задача о составлении пищевого рациона

Предприятие производит откорм бычков (свиней, уток). Имеется два вида продуктов П1 и П2. При откорме это животное должно ежедневно получать не менее 9 ед. питательного вещества С1, не менее 8 ед. вещества С2 и не менее 12 ед. вещества С3.

Питательные вещества	Корм П1	Корм П2
С1	2	1
С2	1	2
С3	1	6



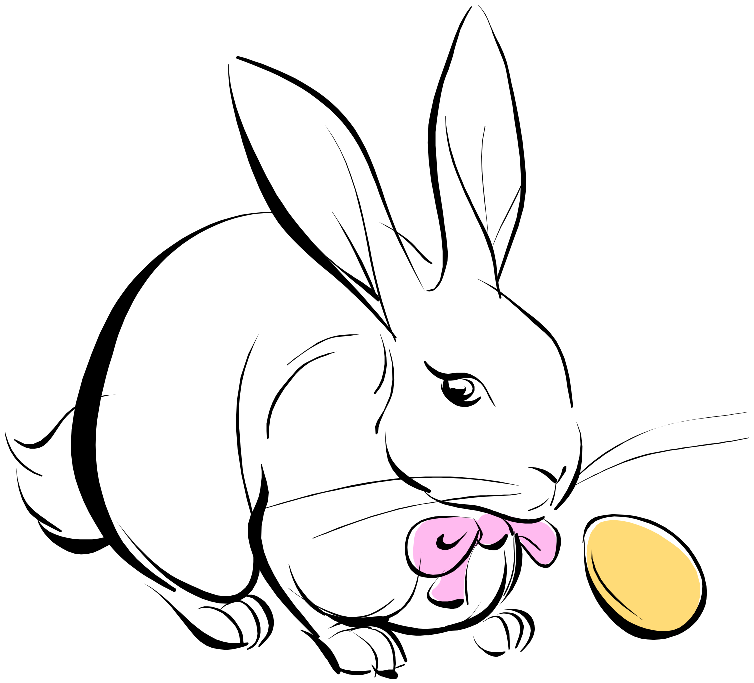
Требуется составить такой пищевой рацион, чтобы заданные условия по содержанию в рационе основных питательных веществ были выполнены, при этом стоимость рациона была бы минимальна.

Пример 3 Нахождение максимума и минимума при условиях-ограничениях

Найдите максимум и минимум линейной функции $F = -2x_1 + 4x_2$

при условиях-ограничениях:

- $6x_1 - 2x_2 <= 12$,
- $- x_1 + 2x_2 <= 5$,
- $x_1 + x_2 * >= 1$,
- $x_1, x_2 >= 0$.



Независимо от смыслового значения все задачи математического программирования с формальной точки зрения сводятся к одной и той же проблеме: найти значения переменных которые удовлетворяют заданным ограничениям, и при которых целевая функция достигает максимального (минимального) значения. В задачах линейного программирования целевая функция имеет вид линейной функции.

Задача математического программирования

Переменные $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$

Ограничения – уравнения или неравенства, построенные в соответствии с логическим содержанием задачи.

Целевая функция (ЦФ) выражает принятый критерий оптимальности.

Требуется найти такой набор значений переменных, который удовлетворяет системе ограничений и при котором ЦФ принимает наибольшее или наименьшее значение.

Задача математического программирования (линейный вид)

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m; \\ x_j \ge 0,\ i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Задача математического программирования (нелинейный вид)

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots x_n) \to \max(\min)$$

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, \ldots x_n) \le = \ge 0 \\ x_j \ge 0, \;\; i = 1,2,\ldots,m; \;\; j = 1,2,\ldots,n \end{cases}$$

Линейное программирование - система ограничений и ЦФ линейны относительно искомых величин $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$

Нелинейное программирование - имеется хотя бы одно нелинейное выражение.

Основные проблемы решения задач программирования

Задачи нелинейной оптимизации в их самой общей форме являются *численно неразрешимыми.*

Метод перебора является *асимптотически оптимальным* методом на классе задач нелинейного программирования общего вида

План задачи - любая совокупность численных значений переменных.

План, удовлетворяющий системе ограничений, называется *допустимым*.

Допустимый план, максимизирующий или минимизирующий ЦФ, называется *оптимальным*.

Система ограничений, которой не отвечает ни одна совокупность неотрицательных значений переменных, называется *несовместной,* т.е. не имеет решения.

Совместной называется система, имеющая хотя бы одно допустимое решение.

Задача линейного программирования (ЛП)

- Задачей ЛП называется оптимизационная задача, в которой целевая функция – линейна на множестве линейных ограничений.

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i,\ i = \overline{1,\ m},\ x_j \ge 0$$

- Ограничения, накладываемые на координаты x_j , могут быть равенствами и неравенствами (I и II рода).

Задачи ЛП – самая обширная часть оптимизационных (примерно 70%)

Этапы построения математической модели

1. Определение переменных задачи.
2. Представление ограничений в виде линейных уравнений или неравенств.
3. Задание линейной целевой функции и смысла оптимизации.

Задача линейного программирования (ЛП)

- Задачей ЛП называется оптимизационная задача, в которой целевая функция – линейна на множестве линейных ограничений.

$$f(\overline{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i,\ i = \overline{1,\ m},\ x_j \ge 0$$

- Ограничения, накладываемые на координаты x_j , могут быть равенствами и неравенствами (I и II рода).

Задачи ЛП – самая обширная часть оптимизационных (примерно 70%)

Этапы построения математической модели

1. Определение переменных задачи.
2. Представление ограничений в виде линейных уравнений или неравенств.
3. Задание линейной целевой функции и смысла оптимизации.

Задача технического контроля

Примечание: ОТК – Отдел Технического Контроля

- В ОТК некоторой фирмы работают контролеры 1 и 2 разрядов (К1 и К2);
- Норма выработки ОТК за 8 часов (раб. день) составляет не менее 1800 изделий;
- К1 проверяет 25 изделий/час (точность 98%);
- К2 проверяет 15 изделий/час (точность 95%);
- Заработная плата К1 равна 4$ / час;
- Заработная плата К2 равна 3$ / час;
- При каждой ошибке контролера фирма несет убыток в 2$;
- Фирма может использовать не более 8 - К1 и 10 - К2;

Определить оптимальный состав ОТК,
при котором общие затраты на контроль будут минимальны.

Разряд	1	2
Выработка	25 изд/час.	15 изд/час
Точность	98 %	95 %
Зарплата	4$/час	3$/час
Макс. количество	8	10

Построение модели

1. Определим переменные задачи
   - x_1 – число контролеров 1 разряда;
   - x_2 – число контролеров 2 разряда.
2. Представим ограничение в виде неравенств

$$\begin{cases} x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 10 \end{cases}$$

Построение модели

В день необходимо изготовить 1800 изделий (за 8 часов работы).

$$8 \cdot (25 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2) \geq 1800$$
$$200 \cdot x_1 + 120 \cdot x_2 \geq 1800$$

Или

$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45$$

3. Задание целевой функции

$$f(\bar{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2$$

Расходы фирмы имеют две составляющие

- заработная плата контроллеров;
- убытки из-за ошибок контроллеров.

Таким образом, один контроллер соответствующего разряда обходится фирме:

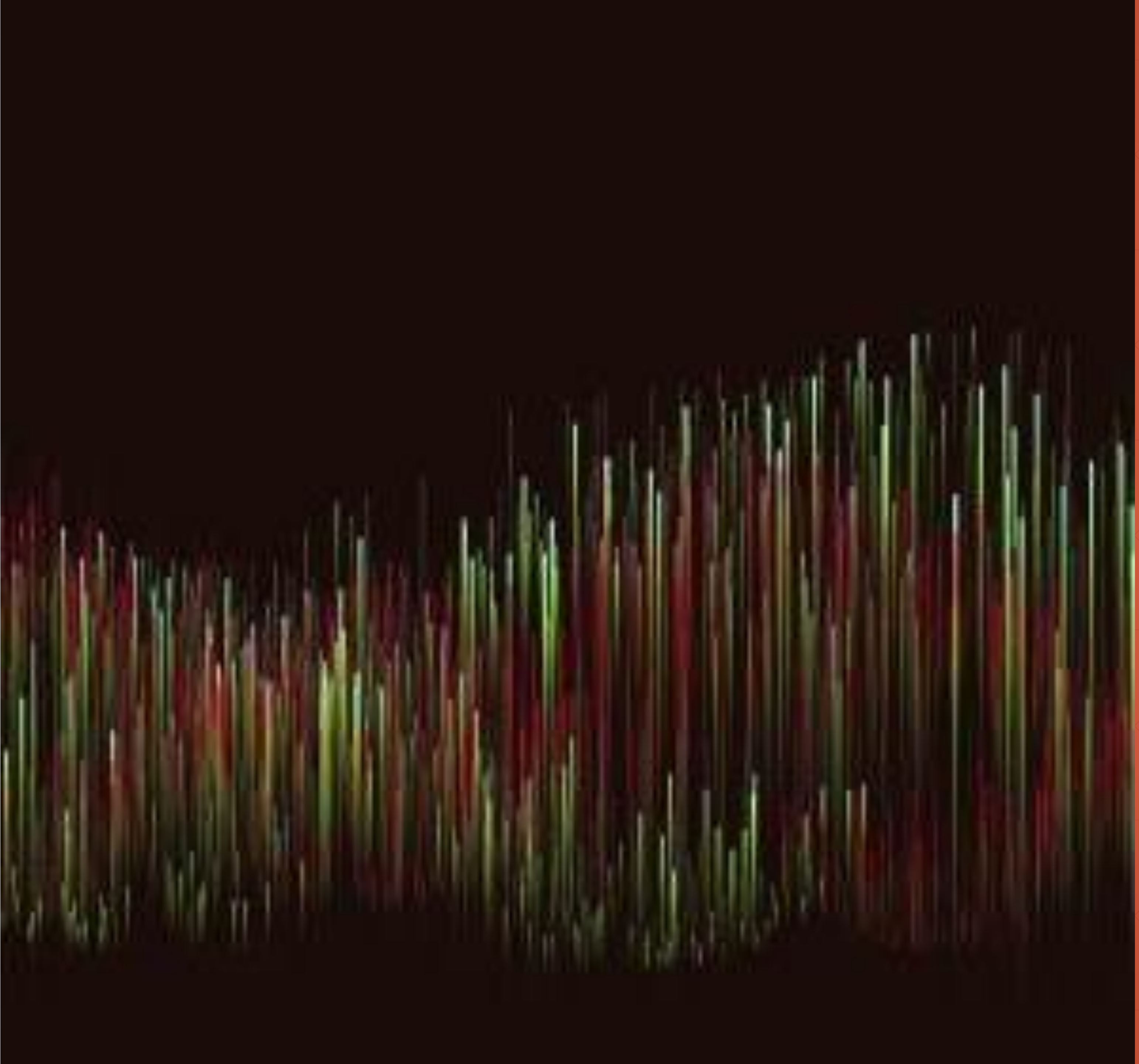
- I разряд $4 + 2 \cdot 0.02 \cdot 25 = 5$ \$/час
- II разряд $3 + 2 \cdot 0.05 \cdot 15 = 4.5$ \$/час

Целевая функция затрат на ОТК за 8 часов:

$$f(\bar{x}) = 8 \cdot (5 \cdot x_1 + 4.5 \cdot x_2) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2$$

Вся задача технического контроля может быть сформулирована следующим образом.

$$
\left.
\begin{array}{l}
f(\overline{x}) = 40 \cdot x_1 + 36 \cdot x_2 \rightarrow \min \\
\text{при} \quad 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \geq 45 \\
\qquad\quad\; x_1 \leq 8 \ , \ x_2 \leq 10 \\
\qquad\quad\; x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0
\end{array}
\right\}
$$



Транспортная задача

Или задача о рациональном перевозе однородных продуктов из пунктов производства в пункты потребления.

- В каждом пункте A_i производится a_i количество продукта, $i = \overline{1, m}$.
- Пункт B_j потребляет b_j количества продукта, j= $\overline{1, n}$.
- Предполагается, что спрос соответствует предложению:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

- Транспортные издержки перевозки продукта из пункта A_i в пункт B_j составляют c_{ij} .

Требуется минимизировать транспортные издержки и удовлетворить запросы всех потребителей за счет производства

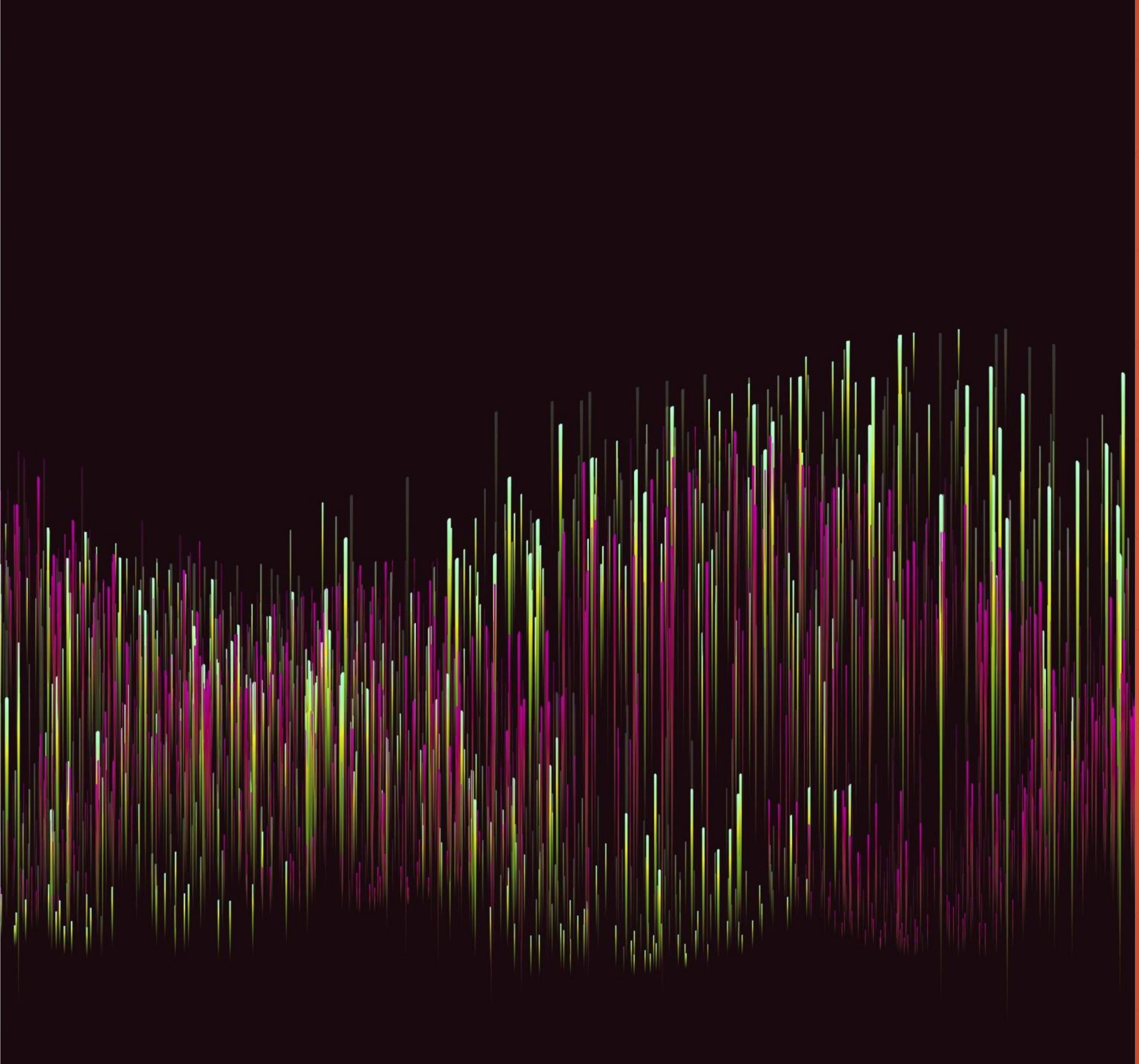
Математическая модель задачи

Введем переменные

- x_{ij} - количество продукта перевозимого из пункта A_i в пункт B_j.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij} \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad , \quad i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad , \quad j = \overline{1,n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$



Задача о диете

Или задача о составлении рациона

Имеется n различных продуктов. Стоимость каждого продукта составляет c_j .

Ингредиенты продуктов следующие:

- Калорийность a_{1j} $(j = 1, n)$;
- жиры a_{2j};
- белки a_{3j};
- углеводы a_{4j}.

Суточная потребность конкретного человека в калориях, жирах, белках и углеводах составляет b_1, b_2, b_3, b_4 единиц соответственно.

Требуется удовлетворить суточную потребность в энергии, не превышая потребления жиров, белков, углеводов при минимальных затратах.

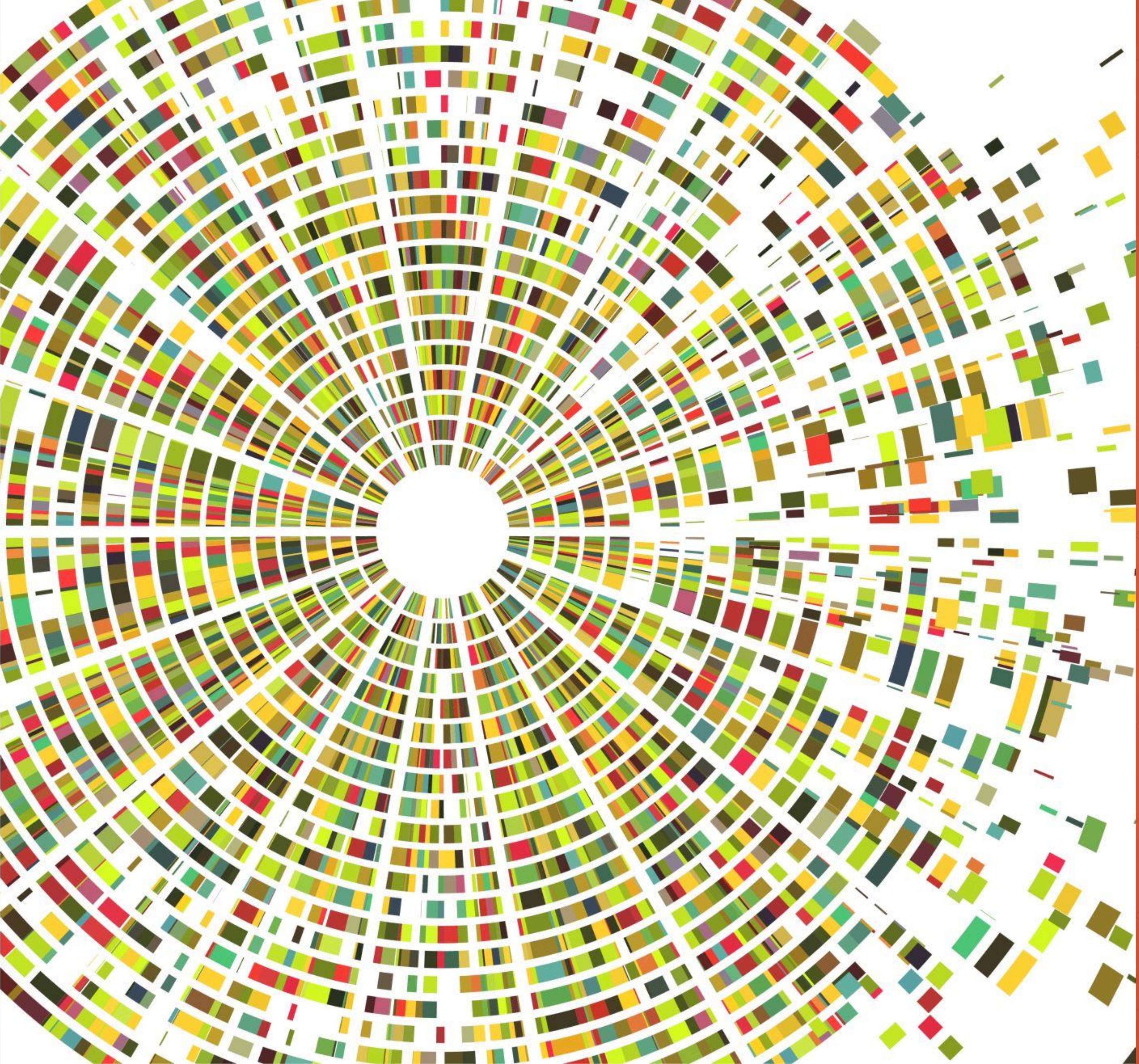
Математическая модель задачи

Введем переменные

- x_{ij} - количество потребления j-го продукта.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \ge b_1; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{3j} \cdot x_j \ge b_3; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \ge b_2; \quad \sum_{j=1}^{n} a_{4j} \cdot x_j \ge b_4. \end{array}\right\}$$



Задача об использовании сырья

Изготавливаются два продукта Π_1и Π_2из трех видов сырья s_1, s_2, s_3.

Запасы каждого сырья равны b_1, b_2, b_3.

На единицу продукции Π_1 уходит a_{11} количества сырья s_1

$$a_{21} - s_2;$$

$$a_{31} - s_3.$$

На единицу продукции Π_2 уходит a_{12} количества сырья s_1

$$a_{22} - s_2;$$

$$a_{32} - s_3.$$

Требуется так запланировать выпуск продуктов Π_1и Π_2, чтобы доход от реализации продукции был максимален при имеющихся запасах сырья.

Исходные данные задачи

Представим исходные данные в виде таблицы

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		Π_1	Π_2
s_1	b_1	a_{11}	a_{12}
s_2	b_2	a_{21}	a_{22}
s_3	b_3	a_{31}	a_{32}
Доход		c_1	c_2

Пусть имеет место задача об использовании сырья некоторого кондитерского предприятия, выпускающего

- Π_1 - карамель А;
- Π_2 - карамель Б.

При этом используется сырье

- s_1 – сахар;
- s_2 – джем;
- s_3 – шоколад.

Исходные данные для кондитерской

Тогда после перехода к условным единицам получим таблицу

Вид сырья	Запасы сырья	Расход сырья на единицу продукции	
		карамель А	карамель Б
сахар	160	5	2
джем	180	3	4
шоколад	196	7	0
Доход		3	2

Математическая модель задачи

Введем переменные

- x_1 единиц продукции Π_1 выпускает предприятие;
- x_2 единиц продукции Π_2 выпускает предприятие;

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$
\left.
\begin{array}{l}
f(\overline{x}) = 3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \to \max \\
5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 160 \\
3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 180 \\
7 \cdot x_1 \qquad\qquad \le 196 \\
x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
\right\}
$$