

# ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА



# **План темы**

## **«Транспортная задача»:**

1. Постановка задачи, основные определения
2. Закрытая и открытая транспортная задача
3. Метод северо-западного угла
4. Метод минимального тарифа
5. Метод потенциалов

## ***Цель транспортной задачи***

- разработка наиболее рациональных путей и способов транспортировки товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных и повторных перевозок.

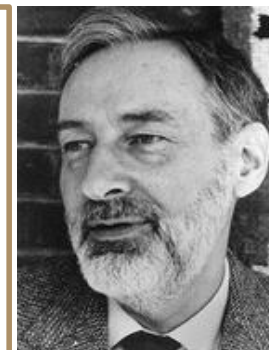


# Исторические этапы исследований транспортной задачи

**I.этап.** Задача национального плана перевозок, позволяющего минимизировать суммарный километраж в железнодорожных перевозках при наличии не более двух поставщиков

*Толстой А. Н. Методы устранения нерациональных перевозок при планировании. - Социалистический транспорт, 1939, № 9.*

**II.этап.** Одну из разновидностей транспортной задачи в 1941 г. Поставил американец Хичкок. Детально разобрал Тьяллинг Чарльз Купманс, который работал членом Объединенного комитета перевозок во время Второй мировой войны.

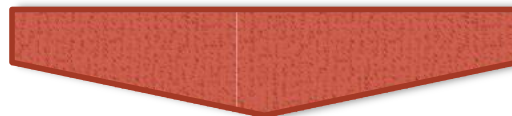


**III этап.** Первый общий, законченный метод решения транспортной задачи («метод потенциалов») разработан Леонидом Канторовичем.

*Канторович Л. В., Гавурин М. К., Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков, Сб. ст. Проблемы повышения эффективности работы транспорта, АН СССР, 1949*

# На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

**1. Необходимо найти оптимальную структуру транспортных средств, обеспечивающую минимизацию издержек на транспортировку.**

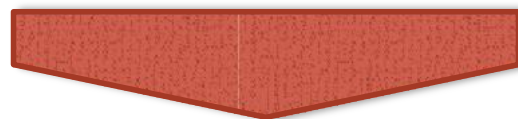


*эксплуатационные и экономические показатели зависят от состава транспорта*



## На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

**2. Необходимо установить такое распределение грузов между имеющимися в хозяйстве видами транспорта, при котором затраты на перевозки всего объёма грузов были бы минимальными**

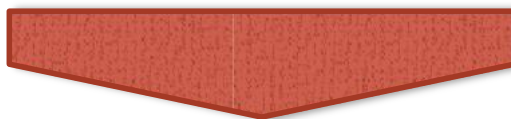


*эффективность использования различного транспорта на одной и той же работе не всегда одинакова*



# На практике существуют 3 основные постановки транспортной задачи:

## 3. Задача прикрепления потребителей к поставщикам



*экономичный план перевозок однородного груза из пункта производства в пункты потребления*



**минимум денежно-  
материальных затрат на  
перевозки**

**1.**

**Критерии  
оптимизации  
транспортной  
задачи**

**2.**

**минимум  
затрат  
времени на  
перевозки**

**3.**

**минимум объёма  
транспортных работ**

**4.**

**Минимум  
приведенных  
затрат**





Однородный продукт, сосредоточенный в  $m$  пунктах отправления в количествах  $a_1, a_2, \dots, a_m$  единиц соответственно, необходимо доставить в каждый из  $n$  пунктов назначения в количествах  $b_1, b_2, \dots, b_n$  единиц соответственно.

Стоимость (расстояние) перевозки единицы продукта из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения равна  $C_{ij}$  (стоимость доставки) и известна для каждого маршрута.

Пусть  $x_{ij}$  – количество продукта, перевозимого из  $i$ -го пункта отправления в  $j$ -й пункт назначения.

## Содержательная постановка задачи

*Задача заключается в определении таких величин  $x_{ij}$  для всех маршрутов, при которых суммарная стоимость или расстояние перевозок были бы минимальными.*

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

## Обозначения:

$m$  – количество пунктов отправления (поставщиков);

$i$  – номер поставщика;

$n$  – количество пунктов назначения (потребителей);

$j$  – номер потребителя;

$a_i$  – объем однородного груза  $i$ -го поставщика (запасы);

$b_j$  – объем однородного груза, требуемого  $j$ -ому потребителю (спрос);

$C_{ij}$  – стоимость доставки единицы груза  $i$ -го поставщика  $j$ -ому потребителю;

$x_{ij}$  – количество груза, доставляемое от  $i$ -го поставщика к  $j$ -му потребителю;

$C$  – общие затраты на перевозки.

потребители

поставщики

Потреб. Поставщ.	1	...	j	...	n	Запас
1	$c_{11}$ $x_{11}$	...	$c_{1j}$ $x_{1j}$	...	$c_{1n}$ $x_{1n}$	$a_1$
...	...	...	...	...	...	...
i	$c_{i1}$ $x_{i1}$	...	$c_{ij}$ $x_{ij}$	...	$c_{in}$ $x_{in}$	$a_i$
...	...	...	...	...	...	...
m	$c_{m1}$ $x_{m1}$	...	$c_{mj}$ $x_{mj}$	...	$c_{mn}$ $x_{mn}$	$a_m$
Спрос	$b_1$	...	$b_j$	...	$b_n$	$\sum_{i=1}^m a = \sum_{j=1}^n b$

стоимость доставки единицы груза от i-го поставщика к j-ому потребителю

# Стоимость перевозок можно выразить так

$$C = c_{11}x_{11} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min$$

или более компактно

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

это целевая функция, которая позволяет определить численное значение критерия оптимальности на всех этапах расчетов и в оптимальном плане

**Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:**

**1 условие.** Вывоз всего груза от каждого поставщика:

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{11} + & \dots & + x_{1j} + & \dots & + x_{1m} & = a_1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_{i1} + & \dots & + x_{ij} + & \dots & + x_{in} & = a_i \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_{m1} + & \dots & + x_{mj} + & \dots & + x_{mn} & = a_m
 \end{array}$$

**или**

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad \text{где } i = 1 \dots m$$

**Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:**

**2 условие.** Удовлетворение спроса каждого потребителя:

$$\begin{array}{cccccc}
 x_{11} + & \dots & + x_{i1} + & \dots & + x_{m1} & = b_1 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_{1j} + & \dots & + x_{ij} + & \dots & + x_{mj} & = b_j \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 x_{1n} + & \dots & + x_{in} + & \dots & + x_{mn} & = b_n
 \end{array}$$

**или**

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad \text{где } j = 1 \dots m$$



**Необходимо найти минимальное значение целевой функции при следующих возможных условиях:**

**3 условие.** Равенство запаса и спроса:

$$a_1 + \dots + a_i + \dots + a_m = b_1 + \dots + b_j + \dots + b_n$$

или

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

*Равенство запаса и спроса есть необходимое и достаточное условие совместимости и, следовательно, разрешимости транспортной задачи.*

**Закрытая модель  
транспортной  
задачи**

**Открытая модель  
транспортной  
задачи**

**Спрос равен запасу**

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

**Спрос не равен  
запасу**

$$\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$$

## Модель закрытой транспортной задачи

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

При ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

## Открытая модель транспортной задачи

1. Запас превышает спрос

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

2. Спрос превышает запас

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

## 1. Запас превышает спрос

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

При ограничениях:

если  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq a_i \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

*Не требуется весь имеющийся груз вывозить от поставщика, после удовлетворения спроса часть его может остаться не вывезенной*

*Потребности (спрос) каждого потребителя необходимо удовлетворить полностью*

# 1. Запас превышает спрос



Решение

$$\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = b_{n+1}$$

$$c_{n+1} = 0$$

**Фиктивный  
потребитель**

*При введении фиктивного потребителя  
открытая модель преобразуется в закрытую*



## 2. Спрос превышает запас

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

При ограничениях:

если  $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

## 2. Спрос превышает запас



Решение

$$\sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i = a_{m+1}$$

**Фиктивный  
поставщик**



## «Метод северо-западного угла» на примере:

### Пример:

С 3-х баз требуется доставить в магазины однородный товар. Пусть на базе А1 имеется 50 единиц груза, на базе А2 – 40 единиц, на базе А3 – 20 единиц. Указанный товар нужно отгрузить 4-м потребителям: В1, В2, В3, В4, потребности которых составляют соответственно 35, 25, 30, 25 единиц товара. Стоимость перевозки от базы до потребителей представлена в таблице:

	<i><b>В1</b></i>	<i><b>В2</b></i>	<i><b>В3</b></i>	<i><b>В4</b></i>
<i><b>А1</b></i>	3	2	4	6
<i><b>А2</b></i>	2	3	1	2
<i><b>А3</b></i>	3	2	7	4

Требуется составить такой план перевозок, который обеспечит минимальные транспортные расходы.

**Решение:****1 этап. Составление распределительной таблицы**

	<i><b>B1</b></i>	<i><b>B2</b></i>	<i><b>B3</b></i>	<i><b>B4</b></i>	<i><b>Наличие товара</b></i>
<i><b>A1</b></i>	3	2	4	6	<b>50</b>
<i><b>A2</b></i>	2	3	1	2	<b>40</b>
<i><b>A3</b></i>	3	2	7	4	<b>20</b>
<i><b>Потребность в товаре</b></i>	<b>30</b>	<b>25</b>	<b>30</b>	<b>25</b>	<b>110</b>

**Решение:****2 этап. Составление модели**

Целевая функция (стоимость всей перевозки):

$$C = 3x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 6x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + 3x_{31} + 2x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min$$

Проверяем задачу на разрешимость:  $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^4 b_j$

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 50 + 40 + 20 = 110, \sum_{j=1}^4 b_j = 30 + 25 + 30 + 25 = 110$$

**Ограничения по поставкам**

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 20 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$$

**Ограничения по потребителям**

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 25 \end{cases}$$

## Условимся:

1. Построение опорных решений системы, а также преобразования этих решений будут производиться в таблицах.
2. Если базисное неизвестное  $x_{ij} = a$ , то это число записывается в соответствующей клетке  $(i, j)$ , и эта клетка называется загруженной, если же переменная не базисная, то  $x_{ij} = 0$  и соответствующая клетка остается свободной



### 3 этап. Составление плана

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	Наличие товара
$\min(50, 30) = 30$		$\min(25, 20) = 20$			
A1	30 3	20 2	4	6	50-30 = 20 50
A2	2	3	1	2	40
A3	3	2	7	4	20
Потребность в товаре	30-30 = 0	25 25 - 20 = 5	30	25	110

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	<i>Наличие товара</i>
A1	30 3	20 2	4	6	50
A2	min (5, 40) = 5		1	2	40
A3	3	2	7	4	20
<i>Потреб- ность в товаре</i>	30	25	30	25	110
30 - 30 = 0		25 - 20 = 5			

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	<i>Наличие товара</i>
A1	3 0	3 20	2 4	6	50
A2	$\min(5, 40) = 5$ 5	$\min(20, 25) = 20$ 5	$\min(4, 30) = 4$ 30	2	$40 - 5 = 35$ 40
A3	3	2	7	4	20
<i>Потребность в товаре</i>	30 $30 - 30 = 0$	25 $5 - 5 = 0$	30	25	110

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	<i>Наличие товара</i>
A1	30 3	20 2	4	6	50
A2	2	3	1	2	40-35 = 5 40
A3	3	2	7	4	20
<i>Потреб- ность в товаре</i>	30 30-30 = 0	25 5-5 = 0	30 30-30 = 0	25	110

Метод северо-западного угла заключается в том, что заполнение таблицы начинают с левого верхнего угла, двигаясь далее по строке вправо или по столбцу вниз.

	B1	B2	B3	B4	<i>Наличие товара</i>
A1	30 3	20 2	4	6	50
A2	2	5 3	30 1	5 2	40
A3	3	2	$\min(25, 20) = 20$	4 20	20
<i>Потреб- ность в товаре</i>	30	25	30	25	110
	$30 - 30 = 0$	$5 - 5 = 0$	$35 - 35 = 0$	$25 - 25 = 0$	

*Исчерпаны все запасы и удовлетворены все потребности*

	B1		B2		B3		B4		Наличие товара
A1	30	3	20	2		4		6	50
A2		2		3		1		2	
A3		3	5	2	30	7	20	4	20
Потребность в товаре	30								



## Условия разрешимости задачи:

**1 условие –**  
число загруженных  
клеток должно быть  
равно  $(m+n-1)$

**2 условие -**  
загруженные клетки  
не должны  
образовывать  
замкнутого  
цикла

**4 этап. Подсчет стоимости перевозки**

	B1		B2		B3		B4		запас
A1		3		2		4		6	50
	30		20						
A2		2		3		1		2	40
			5		30		5		
A3		3		2		7		4	20
							20		
спрос	30		25		30		25		110

$$C = 30 \cdot 3 + 20 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 30 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 20 \cdot 4 = 265$$

**Ответ:** Общие затраты на доставку всей продукции, для начального решения, составляют **265 ден. ед.**

## **Метод минимального тарифа**

учитывает величины затрат на грузоперевозки, позволяет найти опорный план транспортной задачи, при котором общая стоимость перевозок груза меньше, чем стоимость перевозок при плане северо-западного угла



## Этапы метода минимального тарифа

### Этап 1

Выбирается клетка, имеющая минимальную стоимость перевозок (минимальный тариф). Если таких клеток более одной, то выбирается первая по порядку.

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>
<i>A1</i>	3	2	4	6
<i>A2</i>	2	3	1	2
<i>A3</i>	3	2	7	4

	<i>B1</i>	<i>B2</i>	<i>B3</i>	<i>B4</i>
<i>A1</i>	3	2	4	6
<i>A2</i>	2	3	5	2
<i>A3</i>	3	2	7	4

## Этап 2

В клетку с наименьшим тарифом помещается  
наименьшее из чисел  $a_i$  или  $b_j$

	В1		В2		В3		В4		запасы
А1		3		2		4		6	50
			min (30, 40) = 30						
А2		2		3		1		2	40
					30				
А3		3		2		7		4	20
спрос	30		25		30		25		110

## Этап 3

Затем из рассмотрения исключается строка, соответствующая поставщику, запасы которого полностью израсходованы, или столбец, соответствующий потребителю, спрос которого полностью удовлетворен.

	B1		B2		B3		B4		<i>запасы</i>
A1		3		2		4		6	<b>50</b>
A2		2		3	30			2	<b>40</b>
A3		3		2				4	<b>20</b>
<i>спрос</i>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		<b>110</b>

## Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

	$\min(25, 50) = 25$		В3	В4	запасы
A1	3	2	4	6	50
A2	2	3	1	2	40
A3	3	2	7	4	20
спрос	30	25	30	25	110

Additional annotations from the image:

- A red circle highlights the cell (A1, B2) with value 2.
- A yellow box next to the 'запасы' column shows the calculation:  $40 - 30 = 10$ .
- The value 25 is written next to the cell (A1, B2).
- The value 30 is written next to the cell (A2, B3).

## Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

	B1	B2	B3	B4	запасы
A1	3	2	4	6	50
A2	2	3	1	2	40
A3	3	2	7	4	20
спрос	30	25	30	25	110

$\min(30, 10) = 25$

$50 - 25 = 25$

$40 - 30 = 10$



## Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

min (20, 25) = 20		B1	B2	B3	B4	запасы	
A1	20	3	2	4	6	50	50-25 = 25
A2	10	2	3	1	2	40	40-10-30 = 0
A3		3	2	7	4	20	
спрос	30	25	30	25	110		

30-10 = 20

## Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1		3		2		4		6	50
	20		25		-				
A2		2		3		1		2	40
	10		-		20				
A3		3	min(2, 0, 25) = 20					4	20
	-		-		-		20		
спрос	30		25		30		25		25-20 = 5

## Этап 4

Из оставшихся клеток таблицы снова выбирается клетка с наименьшим тарифом, и процесс распределения запасов продолжается до тех пор, пока все они не будут распределены, а спрос удовлетворен.

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1	20	3	25	2	-	4	5	6	50
A2	10	2	-	3	30	1	-	2	40
A3	-	3	-	2	-	7	20	4	20
спрос	30		25		30		25		

$\min(5, 5) = 5$   
 $50 - 45 = 5$   
 $25 - 20 = 5$



## Получается оптимальный план грузоперевозок по минимальному тарифу

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1		3		2		4		6	50
	20		25		-		5		
A2		2		3		1		2	40
	10		-		30		-		
A3		3		2		7		4	20
	-		-		-		20		
<b>спрос</b>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		<b>110</b>

## Этап 5

В завершении проверяется число загруженных клеток  $(m + n - 1)$ .

*Если число загруженных клеток будет меньше, то следует загрузить нулем клетку с наименьшим тарифом, но такую, чтобы она не образовывала замкнутого цикла.*

**Ответ:****Оптимальный опорный план грузоперевозок:**

	B1		B2		B3		B4		<i><b>запасы</b></i>
A1		3		2		4		6	<b>50</b>
	20		25		-		5		
A2		2		3		1		2	<b>40</b>
	10		-		30		-		
A3		3		2		7		4	<b>20</b>
	-		-		-		20		
<i><b>спрос</b></i>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		<b>110</b>

**Минимальная стоимость грузоперевозок:**

$$C = 20 \bullet 3 + 25 \bullet 2 + 5 \bullet 6 + 10 \bullet 2 + 30 \bullet 1 + 20 \bullet 4 = 270$$

**Метод потенциалов** -  
процесс последовательного  
улучшения исходного плана  
грузоперевозок до  
ОПТИМАЛЬНОГО

*Автор метода: Л. В. Канторович 1949 год*

## **Теорема:**

Если для некоторого плана транспортной задачи можно набрать систему из  **$m+n$**  чисел  **$u_i$** , называемых потенциалами поставщика и  **$v_j$** , называемыми потенциалами потребителя, удовлетворяющим условиям

$$v_j - u_i = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0$$

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0,$$

**то план оптимальный.**



## **Экономический смысл выражения**

$$V_j - u_i = c_{ij}, \text{ если } x_{ij} > 0$$

*Для поставщиков и потребителей, между которыми запланированы перевозки, разность потенциалов совпадает с затратами на транспортировку единицы груза.*

## Экономический смысл выражения

$$v_j - u_i \leq c_{ij}, \text{ если } x_{ij} = 0$$

*Для всех остальных пар поставщиков и покупателей, между которыми перевозки не запланированы, разности потенциалов не превосходят затраты по транспортировке.*

Если план перевозок *оптимален*, то можно присвоить грузам в пунктах отправления и пунктах назначения потенциалы при которых перевозка из любого пункта отправления в любой пункт назначения не могла дать «прибыль», и чтобы в то же время перевозки, внесенные в план, являлись безубыточными

**Экономический смысл потенциалов**

## Определения:

**1. Набор** – произвольная совокупность клеток в матрице перевозок.

**2. Цепь** – последовательный набор клеток, в котором каждые две соседние клетки расположены в одном ряду (строке или столбце).

**3. Цикл** – замкнутая цепь, последняя клетка которой расположена в одном ряду с первой.

**1 шаг.** После того как найден исходный опорный план перевозок, каждому поставщику  $a_i$  ставится в соответствие потенциал  $u_i$ , а каждому потребителю  $b_j$  ставится в соответствие потенциал  $v_j$ ;



Числа  $u_i$  и  $v_j$  выбираются так, чтобы в любой загруженной клетке сумма потенциалов равнялась стоимости перевозки в этой клетке:

$$v_j + u_i = c_{ij}$$

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1		3		2		4		6	50
	U1+V1=3		U1+V2=2		-		U1+V4=6		
A2		2		3		1		2	40
	U2+V2=2		-		U2+V3=1		-		
A3		3		2		7		4	20
	-		-		-		U3+V4=4		
спрос	30		25		30		25		110

Предполагается, что  $U_1 = 0$ , тогда



$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 0$$

$$U_3 = -2$$

$$V_1 = 3$$

$$V_2 = 2$$

$$V_3 = 2$$

$$V_4 = 6$$

**2 шаг.** Для оценки плана необходимо просмотреть **свободные клетки**, для которых определяются косвенные тарифы  $C'_{ij} = u_i + v_j$

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1	20	3	25	2	-	4	5	6	50
A2		2		3		1		2	
	10		-		30		-		40
A3	-	3	-	2	-	7	20	4	20
спрос	30		25		30		25		110

$$C'_{13} = U_1 + V_3 = 0 + 1 = 1$$

$$C'_{22} = U_2 + V_2 = 0 + 2 = 2$$

$$C'_{24} = U_2 + V_4 = 0 + 6 = 6$$

$$C'_{31} = U_3 + V_1 = -2 + 3 = 1$$

$$C'_{32} = U_3 + V_2 = -2 + 2 = 0$$

$$C'_{33} = U_3 + V_3 = -2 + 1 = 1$$



**3 шаг.** Для каждой свободной клетки вычисляется оценка – разность между тарифом клетки и ее косвенным тарифом:

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}$$

***План оптимален тогда, когда по каждой свободной клетке эта оценка неотрицательна.***

$$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13} = 4 - 1 = 3$$

$$\Delta_{22} = C_{22} - C'_{22} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_{24} = C_{24} - C'_{24} = 2 - 6 = -4$$

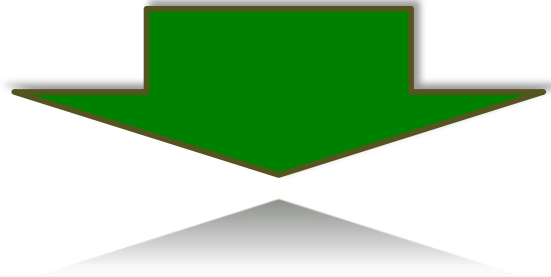
$$\Delta_{31} = C_{31} - C'_{31} = 3 - 1 = 2$$

$$\Delta_{32} = C_{32} - C'_{32} = 2 - 0 = 2$$

$$\Delta_{33} = C_{33} - C'_{33} = 7 - 1 = 6$$

Полученный план перевозок не является оптимальным, так как среди оценок  $\Delta_{ij}$  имеется отрицательная оценка  $\Delta_{24}$

**4 шаг.** Если есть хоть одна отрицательная оценка, то план надо улучшить, то есть построить новый план.



Загружается та клетка, у которой оценка отрицательная. Если будет несколько отрицательных оценок, то выбирается клетка для загрузки, у которой отрицательная оценка наибольшая по абсолютной величине.

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1		3		2		4		6	50
	20		25		-		5		
A2		2		3		1		2	40
	10		-		30		-		
A3		3		2		7		4	20
	-		-		-		20		
<b>спрос</b>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		<b>110</b>

$$\Delta_{24} = C_{24} - C'_{24} = 2 - 6 = -4$$

Для выбранной клетки строится замкнутый цикл, то есть замкнутый путь, соединяющий выбранную незаполненную клетку с ней же самой и проходящий через заполненные клетки.  
***Для каждой свободной клетки существует только один цикл.***

	B1	B2	B3	B4	запасы
A1	<div>3</div>	<div>2</div>	<div>4</div>	<div>6</div>	<b>50</b>
	20	25	-	5	
A2	<div>2</div>	<div>3</div>	<div>1</div>	<div>2</div>	<b>40</b>
	10	-	30	-	
A3	<div>3</div>	<div>2</div>	<div>7</div>	<div>4</div>	<b>20</b>
	-	-	-	20	
<b>спрос</b>	<b>30</b>	<b>25</b>	<b>30</b>	<b>25</b>	<b>110</b>

В каждой клетке цикла, начиная со свободной проставляются поочередно знаки «+» и «-». В клетках со знаком «-» (*четные клетки*) выбирается наименьший груз, который «перемещается» по клеткам замкнутого цикла, т.е. прибавляется к поставкам  $x_{ij}$  в клетках со знаком «+» (включая свободную) и вычитается в клетках со знаком «-».

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1	+	3		2		4	-	6	50
	20		25		-		5		
A2	-	2		3		1	-	2	40
	10		-		30				
A3		3		2		7		4	20
	-		-		-		20		

В результате такого перемещения груза по циклу получим новый план перевозок.

## Строится новый план

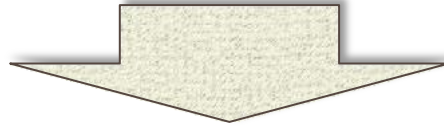
	B1		B2		B3		B4		<i>запасы</i>
A1		3		2		4		6	<b>50</b>
	25		25		-		-		
A2		2		3		1		2	<b>40</b>
	5		-		30		5		
A3		3		2		7		4	<b>20</b>
	-		-		-		20		
<b><i>спрос</i></b>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		<b>110</b>

Вычисления по методу потенциалов  
 повторяются с **1 этапа**

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1		3		2		4		6	50
	U1+V1=3		U1+V2=2		-		-		
A2		2		3		1		2	40
	U2+V2=2		-		U2+V3=1		U2+V4=2		
A3		3		2		7		4	20
	-		-		-		U3+V4=4		
спрос	30		25		30		25		110



Предполагается, что  $U_1 = 0$ , тогда



$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 0$$

$$U_3 = 2$$

$$V_1 = 3$$

$$V_2 = 2$$

$$V_3 = 1$$

$$V_4 = 2$$

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1		3		2		4		6	50
	25		25		-		-		
A2		2		3		1		2	40
	5		-		30		5		
A3		3		2		7		4	20
	-		-		-		20		
спрос	30		25		30		25		110

$$C'_{13} = U_1 + V_3 = 0 + 1 = 1$$

$$C'_{14} = U_1 + V_4 = 0 + 2 = 2$$

$$C'_{22} = U_2 + V_2 = 0 + 2 = 2$$

$$C'_{31} = U_3 + V_1 = 2 + 3 = 5$$

$$C'_{32} = U_3 + V_2 = 2 + 2 = 4$$

$$C'_{33} = U_3 + V_3 = 2 + 1 = 3$$

$$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13} = 4 - 1 = 3$$

$$\Delta_{14} = C_{14} - C'_{14} = 6 - 2 = 4$$

$$\Delta_{22} = C_{22} - C'_{22} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_{31} = C_{31} - C'_{31} = 3 - 5 = -2$$

$$\Delta_{32} = C_{32} - C'_{32} = 2 - 4 = -2$$

$$\Delta_{33} = C_{33} - C'_{33} = 7 - 3 = 4$$

Полученный план перевозок **не является оптимальным**, так как среди оценок  $\Delta_{ij}$  имеется отрицательная оценка  $\Delta_{31}, \Delta_{32}$

## План необходимо улучшить и построить НОВЫЙ

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1	25	3	25	2	-	4	-	6	50
A2		2		3		1		2	
A3	5	3	-	2	30	7	5	4	20
	-		-		-		20		
<b>спрос</b>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		<b>110</b>

Загружается та клетка, у которой оценка отрицательная.

$$\Delta_{31} = C_{31} - C'_{31} = 3 - 5 = -2$$

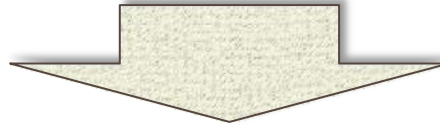
$$\Delta_{32} = C_{32} - C'_{32} = 2 - 4 = -2$$

	B1		B2		B3		B4		<i>запасы</i>
A1	25	3	25	2	-	4	-	6	<b>50</b>
A2		-		3		1		2	
A2	5	2	-	3	30	1	5	2	<b>40</b>
A3	+	3	-	2	-	7	20	-4	
A3	-	3	-	2	-	7	20	-4	<b>20</b>
<i>спрос</i>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		

## Строится новый план

	B1		B2		B3		B4		<i>запасы</i>
A1		3		2		4		6	<b>50</b>
	25		25		-		-		
A2		2		3		1		2	<b>40</b>
	-		-		30		10		
A3		3		2		7		4	<b>20</b>
	5		-		-		15		
<b><i>спрос</i></b>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		<b>110</b>

Предполагается, что  $U_1 = 0$ , тогда



$$U_1 = 0$$

$$U_2 = -2$$

$$U_3 = 0$$

$$V_1 = 3$$

$$V_2 = 2$$

$$V_3 = 3$$

$$V_4 = 4$$

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1		3		2		4		6	50
	25		25		-		-		
A2		2		3		1		2	40
	-		-		30		10		
A3		3		2		7		4	20
	5		-		-		15		
спрос	30		25		30		25		110

$$C'_{13} = U_1 + V_3 = 0 + 3 = 3$$

$$C'_{14} = U_1 + V_4 = 0 + 4 = 4$$

$$C'_{21} = U_2 + V_1 = -2 + 3 = 1$$

$$C'_{22} = U_2 + V_2 = -2 + 2 = 0$$

$$C'_{32} = U_3 + V_2 = 0 + 2 = 2$$

$$C'_{33} = U_3 + V_3 = 0 + 3 = 3$$

$$\Delta_{13} = C_{13} - C'_{13} = 4 - 3 = 1$$

$$\Delta_{14} = C_{14} - C'_{14} = 6 - 4 = 2$$

$$\Delta_{21} = C_{21} - C'_{21} = 2 - 1 = 1$$

$$\Delta_{22} = C_{22} - C'_{22} = 3 - 0 = 3$$

$$\Delta_{32} = C_{32} - C'_{32} = 2 - 2 = 0$$

$$\Delta_{33} = C_{33} - C'_{33} = 7 - 3 = 4$$

Полученный план перевозок является оптимальным, так как среди оценок  $\Delta_{ij}$  нет отрицательных оценок

## Ответ:

### Оптимальный план грузоперевозок:

	B1		B2		B3		B4		запасы
A1		3		2		4		6	50
	25		25		-		-		
A2		2		3		1		2	40
	-		-		30		10		
A3		3		2		7		4	20
	5		-		-		15		
<b>спрос</b>	<b>30</b>		<b>25</b>		<b>30</b>		<b>25</b>		<b>110</b>

### Минимальная стоимость грузоперевозок:

$$C = 25 \bullet 3 + 25 \bullet 2 + 30 \bullet 1 + 10 \bullet 2 + 5 \bullet 3 + 15 \bullet 4 = 250 \text{ ден.ед.}$$



**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**