Пухов Николай ПМИ-4

Теоретическая справка по теме „Численное интегрирование". Лабораторная работа №6.

Задача:

$$I = \int_a^b p(x) f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

1) $p(x)$ – весовая ф-ия
2) n – порядок квадратурной формулы
3) x_i – узлы кв. формулы
4) A_i – коэффициенты кв. формулы

Формулы Ньютона-Котеса

Случай $p(x) \equiv 1$

Приблизим $f(x)$ интерполяц. многочленом $P_n(x)$:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(f;x) \leftarrow \text{остаточ. член}$$

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b P_n(x)\,dx} + \int_a^b R_n(f;x)\,dx \leftarrow \text{аддитивное св-во интеграла}$$

$$\underset{\text{порядок}}{S_n} = \int_a^b P_n(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \left(\cancel{\prod_{j=0}^{n} f(x_i)} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

(Тут мы использовали многочлен Лагранжа)

Отсюда $A_i = \int_a^b \left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) dx, \quad i = \overline{0,n}$

Погрешность интерполирования:

$$R_n(f) = \int_a^b \underbrace{R_n(f;x)}_{\text{из многочлена Лагранжа}}\,dx = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b w_{n+1}(x)\,dx$$

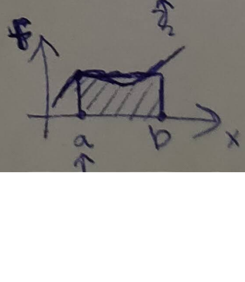
→ Частные случаи:

1) Формула „левых прямоугольников":

$n=0$, $x_0 = a$ (Используется 1 узел)

$$A_0 = \int_a^b dx = b - a, \quad S_0 = (b-a) f(a)$$

$$R_0 = f'(\xi) \frac{(b-a)^2}{2}$$



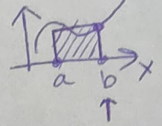
2) Формула „правых" прямоугольников

$n=0$ - прямая $y=a$

$x_0=b$

$$A_0=\int_a^b dx = b-a,\quad S_0=(b-a)f(b)$$

$$R_0=-f'(\xi)\frac{(b-a)^2}{2}$$



3) Формула трапеций

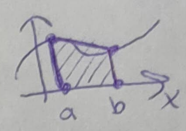
$n=1$ - прямая $y=kx+b$

$x_0=a$

$x_1=b$

$$A_0=\frac{b-a}{2},\quad A_1=\frac{b-a}{2},\quad S_1=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$R_1(f)=\frac{-f''(\xi)}{12}(b-a)^3$$



4) Формула Симпсона

$n=2$ - парабола $y=x^2\cdot L$

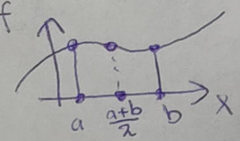
$x_0=a$

$x_1=\frac{a+b}{2}$ - центр

$x_2=b$

$$A_0=A_2=\frac{b-a}{6},\quad A_1=\frac{2}{3}(b-a).$$

$$S_2=\frac{b-a}{6}\underbrace{\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)}_{\text{„6 слагаемых находим „среднее""}}$$



$$R_2(f)=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{2880}(b-a)^5$$

→ Алгебраический подход

$$I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx,$$

$$I(x^k)=\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1},\quad k=\overline{0,n}$$

Пусть кв. формула даёт точный результат для многочлена k-ого порядка: ~~$P_k(x)$, построенного по n+1 узлам~~:

$$I(x^k)=\sum_{i=0}^{n}A_i x_i^k=\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1},\quad k=\overline{0,n}$$

↑ базисные ф-ии

Т.к. любой интерполяционный многочлен можно представить:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k(x^k),$$

то по св-ву аддитивности интеграла ф-ла I - линейный:

$$I(f)\approx I(P_n(x))=\sum_{k=0}^{n}C_k I(x^k).$$

Таким образом получили СЛАУ относительно A_i.

→ Общий случай ($[a,b]\leftrightarrow[-1,1]$)

$$I'(f)=\frac{b-a}{2}I(f),\ \text{где}\quad I'(f)=\int_a^b f(x)\,dx,\quad I(f)=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$

Пример
$$I'(f)=\frac{b-a}{6}\left(f(\overset{-1}{a})+4f\left(\overset{0}{\frac{a+b}{2}}\right)+f(\overset{1}{b})\right)$$

- ф. Симпсона ← использована ф.

$$x'=\frac{1}{2}(a(1-x)+b(1+x))$$

$$x\in[-1,1],\quad x'\in[a,b]$$

→ Квадратурная формула Гаусса (трёхточечная)

Мы ~~...~~ не знаем $\{x_i, A_i\}_{i=\overline{0,n}}$, $I(f)=\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$

Условия для определения $\{x_i, A_i\}_{i=\overline{0,n}}$:

$$I(x^k)=\sum_{i=0}^{n} A_i x_i^k = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}, \quad k=\overline{0,2n+1}$$

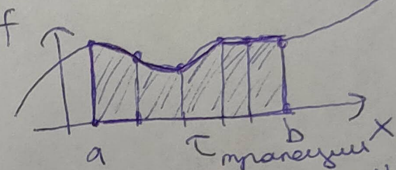
Пусть $n=2$ (3 узла):

$$\left.\begin{aligned} &x_0=-\sqrt{\tfrac{3}{5}},\ x_1=0,\ x_2=\sqrt{\tfrac{3}{5}} \\ &A_0=A_2=\tfrac{5}{9},\ A_1=\tfrac{8}{9} \end{aligned}\right\}\ \text{трёхточ. кв. фор. Гаусса}$$

$$R_2(f)=f^{(6)}(\xi)\,\frac{(b-a)^7\cdot 6^4}{12^3\cdot 7}$$ – погрешность интегрирования

→ Повышение точности интегрирования за счёт разбиения отрезка на равные части

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{j=0}^{N-1}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,dx$$



1) Составная ф. трапеций

$$S_1(f)=\frac{h}{2}\sum_{j=0}^{N-1}\left(f(x_j)+f(x_{j+1})\right)=h\left(\frac{1}{2}\left(f(x_0)+f(x_N)\right)+\sum_{j=1}^{N-1}f(x_j)\right)$$

$$|R_1(f;[a,b])|\leqslant\frac{h^2}{12}(b-a)M_2$$

2) Составная ф. Симпсона

$$S_2(f)=\frac{h}{3}\left(f(x_0)+f(x_N)+4\sum_{k=1}^{N/2}f(x_{2k-1})+2\sum_{k=1}^{N/2-1}f(x_{2k})\right)$$

$$|R_2(f;[a,b])|\leqslant\frac{h^4(b-a)}{2880}M_4$$

3) Составная ф. трапеций (модифиц.)

$$S_3(f)=\underbrace{S_1(f)}_{\text{сост. ф. трапец.}}+\frac{h^2}{12}\left(f'(x_0)-f'(x_N)\right)$$

→ Метод Рунге оценки погрешности.

$$C_1(\alpha h)^k=\frac{\alpha^k}{1-\alpha^k}\left(S(f;\alpha h)-S(f;h)\right)$$

Для оценки порядка аппроксимации:

$$k=\frac{1}{\ln(\alpha)}\ln\left(\frac{S(f;\alpha^2 h)-S(f;h)}{S(f;\alpha h)-S(f;h)}-1\right)$$