Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»
Факультет Информационных технологий и
программирования

Расчетно-графическая работа

«Интеграл и функция нескольких переменных»

Математический анализ

Выполнили:
Бобков Артем
Грибов Артем
Комашко Александр
Насонов Петр

Группа:
M3100

Преподаватель:
Далевская Ольга Петровна

2023/2024 г.

Содержание

Задание 1. Интеграл функции одной переменной

Условие.

В задачах проведите исследование:

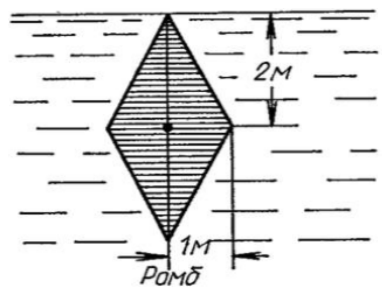
1.Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

2.Решите задачу аналитически.

3.Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи.

4.Запишите ответ.

Вычислите силу давления воды на пластинку, вертикально погруженную в воду, считая, что удельный вес воды равен 9.81 кН/м^3. Результат округлите до целого числа. Форма, размеры и расположение пластины указаны на рисунке.



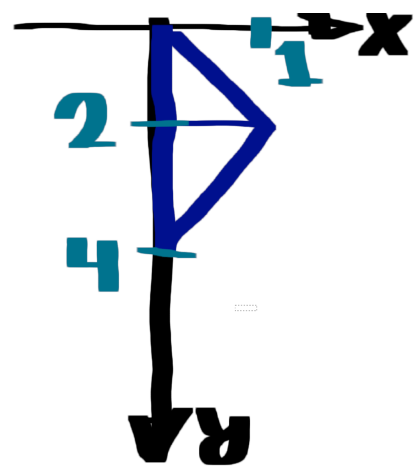
Решение.

Привяжем начало декартовой системы координат к верхней точке ромба на картинке. Ось Oy в положительном направлении направим вниз.

Сила давления воды вычисляется по формуле: $F = p(h) \cdot S, p(h) = \rho g h = \gamma h$, где γ =9.81 кН/м^3, S - площадь участка.

Разделим ромб на две части: верхнюю и нижнюю.

Сделаем равное дробление для каждой части горизонтальным линиями $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ – площадь получившихся трапеций вычисляется по формуле $f(\xi_i)\Delta y_i$, где $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\xi_i = \dfrac{y_i + y_{i-1}}{2}$ - ордината средней линии трапеции, $f(y)$ - длина разреза ромба на уровне y.



Для верхней половины ромба $f_1(y) = y$, для нижней $f_2(y) = 4 - y$

Получим предел суммы $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \tau\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta y_i f(\xi_i) p(\xi_i)$ или же интеграл $\int_a^b f(y)p(y)dy$

Сила давления $F = \int_0^2 f_1(y)p(y)dy + \int_2^4 f_2(y)p(y)dy = \gamma \int_0^2 y^2 dy + \gamma \int_2^4 (4y - y^2)dy = \gamma(\frac{y^3}{3}\Big|_0^2 + (2y^2 - \frac{y^3}{3})\Big|_2^4) = \gamma(\frac{8}{3} + 32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3}) = 8\gamma = 78,48$ кН

Ответ: $78,48$ кН

Задание 2. Исследование функции двух переменных

Условие.

A. Изобразите поверхность, заданную уравнением $z = z(x, y)$, в программе Geogebra 3D. Выполните следующие этапы исследования:

1. Найдите область определения $z = z(x, y)$.
2. Постройте в программе Geogebra Classic (на одном листе!) семейство линий уровня $z(x, y) = c$. Для построения выберите 3–4 значения c. Определите тип построенных кривых (найдите уравнения линий уровня при выбранных значениях c). Если разным c соответствуют кривые разных типов (например: прямые, окружности, точка), изобразите все типы линий уровня.
3. Выберите на поверхности какую-либо обыкновенную и не стационарную точку M_0 (определите ее координаты $x_0, y_0, z = z(x_0, y_0)$). Докажите (по определению), что выбранная точка не является особой и стационарной.
4. Найдите вектор $\overrightarrow{m}$ - направление наискорейшего спуска (подъема) в точке M_0.
5. Изобразите в программе Geogebra Classic линию уровня $z = z(x_0, y_0)$ и направление. Проверьте их ортогональность.

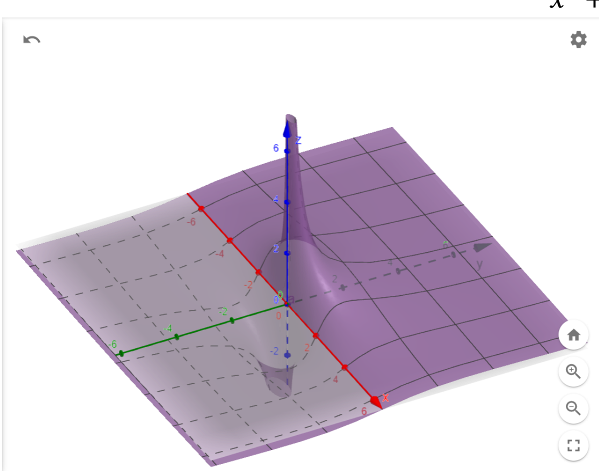
B. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u = u(x, y)$ в области D:

1. Найдите стационарные точки внутри области.
2. Определите, являются ли стационарные точки точками экстремума.
3. Исследуйте значения функции вдоль границ области.
4. Определите точки области, в которых достигаются наибольшее и наименьшее значения функции, и сами значения

Функция $z = z(x, y)$	Функция $u = u(x, y)$	Область D
$z = \dfrac{8y}{x^2 + 4y^2}$	$u = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4$	$0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$

Решение.

A. Изображение данной поверхности $z = \dfrac{8y}{x^2 + 4y^2}$



1. Исследуем $z = \dfrac{8y}{x^2 + 4y^2}$ - функция принимает все значения (x, y), кроме тех, что дают нулевой знаменатель, то есть $x^2 + 4y^2 = 0 \Longrightarrow x = y = 0$

$D(z) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

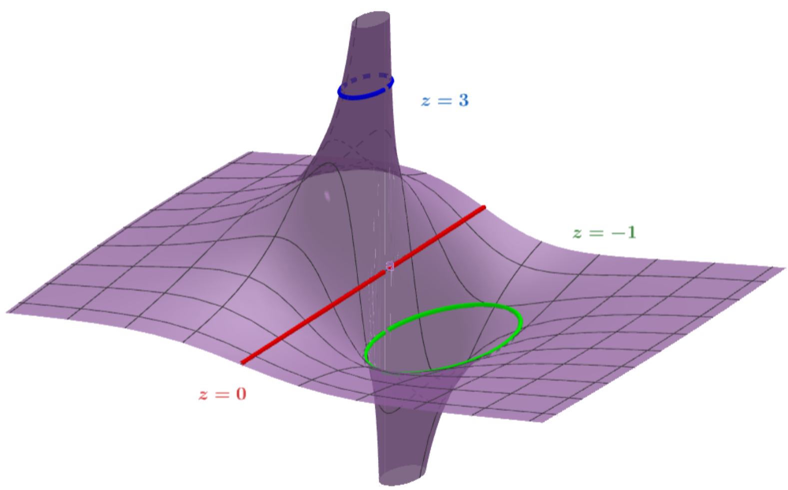
2. Заметим, что при $z = 0$ получаем $\dfrac{8y}{x^2+4y^2} = 0 \Longrightarrow y = 0 (x \neq 0)$ - прямую с выколотой точкой

   При $z > 0$ получаем $zx^2 + 4zy^2 = 8y \Longrightarrow zx^2 + 4zy^2 - 8\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}}y + \dfrac{4}{z} - \dfrac{4}{z} = 0 \Longrightarrow$

   $zx^2 + \left(2\sqrt{z}y - \dfrac{2}{\sqrt{z}}\right)^2 = \dfrac{4}{z}$ - эллипс

   Аналогично при $z < 0$ получаем $zx^2 - \left(2\sqrt{|z|}y + \dfrac{2}{\sqrt{|z|}}\right)^2 = -\dfrac{4}{z}$ - эллипс

   Возьмем кривые при $z = 0, z = 3, z = -1$, вот, как они будут выглядеть:



3. Выберем точку $M_0 = (1,0,0)$. Она нестационарная, по определению стационарные точки - это те, в которых
   $$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{16xy}{(x^2+4y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{8x^2+32y^2-64y^2}{(x^2+4y^2)^2} = 0 \end{cases}$$
   Но простой подстановкой мы можем убедиться, что это не так.

   Она обыкновенная: пусть наша поверхность - $F(x,y,z) = z - \dfrac{8y}{x^2+4y^2} = 0$, тогда по определению особой точки должна выполняться система:
   $$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{16xy}{(x^2+4y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{8x^2+32y^2-64y^2}{(x^2+4y^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$
   Но это не выполняется, так как $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 1 \neq 0$

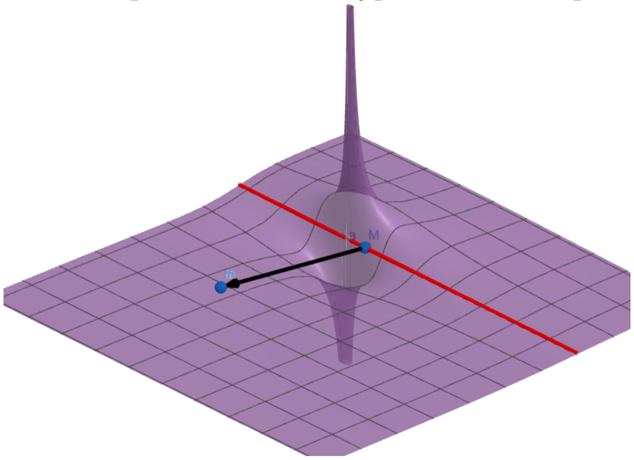
4. Найдем вектор направления наискорейшего подъема при помощи градиента:
   $\overrightarrow{m} = \overrightarrow{\nabla} F = \left(-\frac{16xy}{(x^2+4y^2)^2}\overrightarrow{i} - \frac{8x^2+32y^2-64y^2}{(x^2+4y^2)^2}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right)\Big|_{M_0} = -8\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$

5. В точке M_0 линии уровня $z = z(M_0) = 0$ - это $y = 0 (x \neq 0)$ с направляющим вектором $(1,0,0)$.

   Вектор направления $\overrightarrow{m}$ в точке M_0 - это $(0,-8,1)$

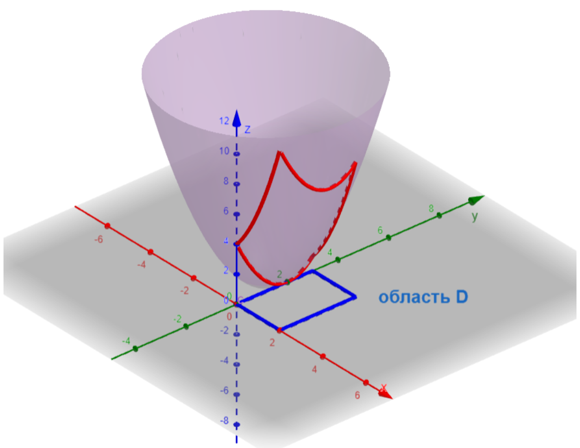
   Их скалярное произведение $(1,0,0)\cdot(0,-8,1) = 0$ - линия уровня $z = 0$ и $\overrightarrow{m}$ перпендикулярны

Вот изображение линии уровня и вектора $\overrightarrow{m}$:



B. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 4$ в области $D\{0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$:

1. По определению стационарные точки - это те, в которых выполняется система:
   $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$
2. Найдем производные второго порядка:
   $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2; B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0; C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$
   По достаточному условию экстремума в точке должно соблюдаться $AC - B^2 > 0$, что в точке $(-1, 2)$ верно, поэтому она экстремум
3. Приведем график этой функции и ее значений в данной области:



   Как можем заметить, все значения в данной области неотрицательные
4. Исходя из графика выше, наименьшее значения в области D достигается в точке $(0, 2)$ - это 0
   Так как, функция - это эллипсоидный параболоид (в данном случае эллипс - это окружность), то наибольшее значение этой функций будет достигаться при наибольшем удалении от центра параболоида (что в нашем случае минимум параболоида, то есть $(-1, 2)$)
   Таким образом, из всех точек в области подходит точка $(2, 0)$, находящаяся от центра на расстоянии $\sqrt{13}$, а функция в данной точке имеет значение 12
   Аналогично находится минимум: точка $(0, 2)$ ближайшая к центру, поэтому функция принимает в нем наименьшее значение, то есть 0, что соответствует графику выше

Задание 3. Интегралы Пуассона и Френеля

Условие.

Вычислите интеграл K:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sqrt{t}} dt$$

Замечание. В задачах физики и дифракционной оптики возникают интегралы вида:

$$\int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt, \int \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$$

которые являются специальными функциями (т.е. «неберущимися» интегралами).

Однако, переход к «многомерным» интегралам позволяет вычислить по крайней мере функцию ошибок $\Phi(z) = \int_0^z e^{-x^2} dx$ и интегралы Френеля: $\Phi_S(z) = \int_0^z \frac{\sin(t)}{\sqrt{t}} dt$ и $\Phi_C(z) = \int_0^z \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$

1. Вычисление $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = I$:
   - Заметьте, что $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$ Тогда $I^2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$ - двукратный интеграл.
   - Перейдите к полярным координатам и вычислите его.
2. Вычисление $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt = J$
   - Используя результат пункта 1), докажите справедливость интегрального представления функции $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t} du = \frac{1}{\sqrt{t}}$.В интеграле J замените функцию $\frac{1}{\sqrt{t}}$ её интегральным представлением и получите двойной (несобственный) интеграл.
   - Выберите порядок интегрирования так, чтобы можно было найти первообразную в элементарных функциях. (Смена порядка интегрирования требует обоснования, но в данном случае она разрешена.)
   - Вычислите интеграл J, затем интеграл K.
   - Используя замену переменной и сводя эти интегралы к J, вычислите также: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$ и $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\frac{\pi x^2}{2}) dx$
3. Нарисуйте графики функции ошибок, интегралов Френеля и их подынтегральных функций.

Решение.

1. Полярные координаты:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot \rho \\ y = \sin\varphi \cdot r \end{cases} \tag{1}$$

Ограничения на x, y:

$$\begin{cases} 0 \le x < +\infty \\ 0 \le y < +\infty \end{cases} \tag{2}$$

Т. е. мы ограничены первой четвертью пространства. Рассмотрим это в полярных координатах:

$$\begin{cases} 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho < +\infty \end{cases} \tag{3}$$

Найдём Якобиану перевода из ДПСК в ПСК: $J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(\cos\varphi\cdot\rho)}{\partial\rho} & \frac{\partial(\cos\varphi\cdot\rho)}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial(\sin\varphi\cdot\rho)}{\partial\rho} & \frac{\partial(\sin\varphi\cdot\rho)}{\partial\varphi} \end{vmatrix} =$
$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi\cdot\rho \\ \sin\varphi & \cos\varphi\cdot\rho \end{vmatrix} = \rho \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \rho$

Преобразуем двойной интеграл в ПСК:

$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy = \iint_D e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_D e^{-\rho^2}dxdy = \iint_{D'} e^{-\rho^2}Jd\varphi d\rho = \iint_{D'} e^{-\rho^2}\rho d\varphi d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}d\rho$

Пусть $t = e^{-\rho^2}$, $dt = e^{-\rho^2}\cdot(-2\rho)$

$\int \rho e^{-\rho^2}d\rho = \int -\frac{1}{2}dt = -\frac{1}{2}t = -\frac{1}{2}e^{-\rho^2}$

$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{+\infty} \rho e^{-\rho^2}d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\frac{1}{2e^{\rho^2}})\Big|_0^{+\infty} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0+\frac{1}{2})d\varphi = \frac{\pi}{4}$

Таким образом $I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

2. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2t}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-(\sqrt{t}\cdot u)^2}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Заменим в J $\frac{1}{\sqrt{t}}$ на интеграл:

$J = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-u^2t}dtdu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-u^2t}dtdu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-u^2t}dtdu$

$\int \cos(t)e^{-u^2t}dt = \cos(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{-u^2} - \int -\sin(t)\cdot\frac{1}{-u^2}\cdot e^{-u^2t}dt = -\cos(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^2} - \frac{1}{u^2}\int \sin(t)e^{-u^2t}dt = -\cos(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^2} - \frac{1}{u^2}(\sin(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^2} - \int\cos(t)\cdot\frac{1}{-u^2}\cdot e^{-u^2t}dt) = -\cos(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^2} - \frac{1}{u^2}(\sin(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^2} + \frac{1}{u^2}\int\cos(t)e^{-u^2t}dt) = -\cos(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^2} - \sin(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^4} - \frac{1}{u^4}\int\cos(t)e^{-u^2t}dt) =$

$(1+\frac{1}{u^4})\int \cos(t)e^{-u^2t}dt = -\cos(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^2} - \sin(t)\cdot\frac{e^{-u^2t}}{u^4}$

$(1+u^4)\int \cos(t)e^{-u^2t}dt = -\cos(t)\cdot e^{-u^2t}\cdot u^2 - \sin(t)\cdot e^{-u^2t}$

$\int \cos(t)e^{-u^2t}dt = \frac{e^{-u^2t}(-u^2\cos(t) - \sin(t))}{1+u^4}$

$\int \cos(t)e^{-u^2t}dt = -\frac{e^{-u^2t}(u^2\cos(t) + \sin(t))}{1+u^4}$

$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-u^2t}dtdu = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^{+\infty}(-\frac{e^{-u^2t}(u^2\cos(t)+\sin(t))}{1+u^4})\Big|_0^{+\infty}du = \frac{-2}{\sqrt{\pi}}\cdot \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^4}(e^{-u^2t}(u^2\cos(t)+\sin(t)))\Big|_0^{+\infty}du$

$$\lim_{t\to+\infty}(e^{-u^2t}(u^2\cos(t)+\sin(t))) = \frac{\lim_{t\to+\infty}(u^2\cos(t)+\sin(t))}{\lim_{t\to+\infty}e^{u^2t}} = 0$$

(Пусть $n \in \mathbb{N}$, так как $u^2\cos(t)+\sin(t)$ ограничено, а $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{u^2t} = +\infty$)

$$J = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}(e^{-u^2t}(u^2\cos(t)+\sin(t)))\Big|_0^{+\infty} du = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}(0-1)du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^4}du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Аналогично $K = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

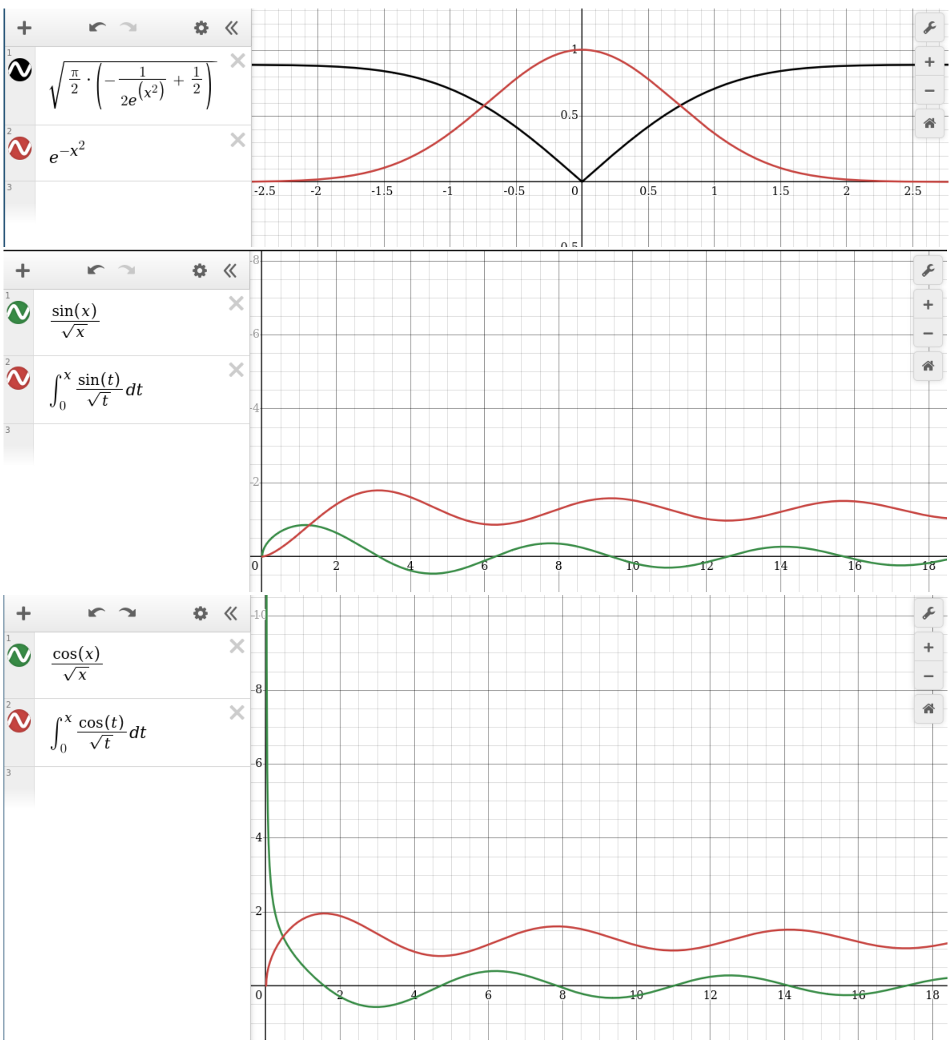
Вычисления используя замену:

$t = x^2$, $dt = 2xdt$

$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \int_0^{+\infty} \frac{2x\cos(x^2)}{2x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\int_0^{+\infty} \cos(\frac{\pi x^2}{2})dx = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

3.



Задание 4. Потенциал векторного поля

Условие.

Дано векторное поле $\overrightarrow{H} = \left(\frac{1}{x^2}; \frac{1}{y^2}\right)$

Выполните:

1. Убедитесь, что данное векторное поле потенциально.
2. Найдите уравнения векторных линий. Изобразите векторные линии на рисунке.
3. Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла.
4. Найдите уравнения линий уровня потенциала (эквипотенциальных линий). Изобразите линии уровня потенциала.
5. Докажите ортогональность найденных векторных линий поля и линий уровня потенциала. Проиллюстрируйте ортогональность на графике.
6. Выберите какую-либо векторную линию поля и зафиксируйте на ней точки A и B, выбрав для них числовые координаты. Вычислите работу поля вдоль этой линии, используя найденный в п. 3) потенциал.

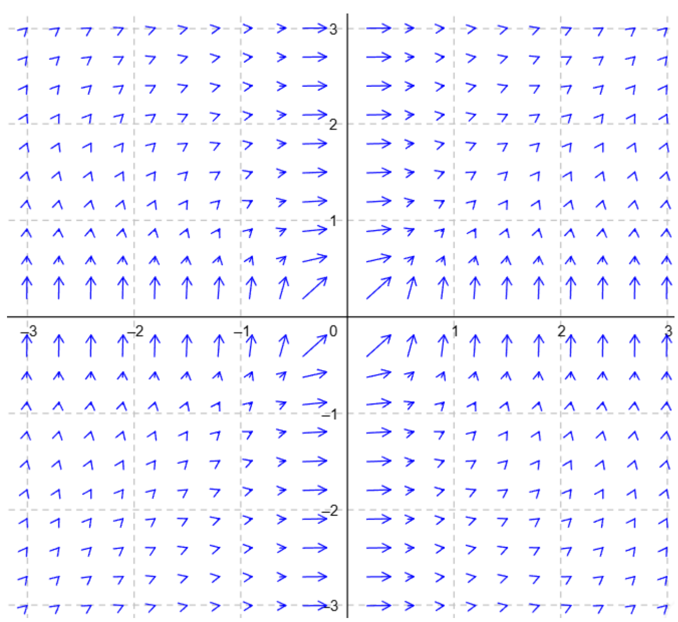
Решение.

1. Обозначим $P(x,y) = \dfrac{1}{x^2}, Q(x,y) = \dfrac{1}{y^2}, \overrightarrow{H} = (P,Q)$.

   Если поле потенциально, то вне зависимости от выбора пути «работа» от одной точки до другой должна быть равной.

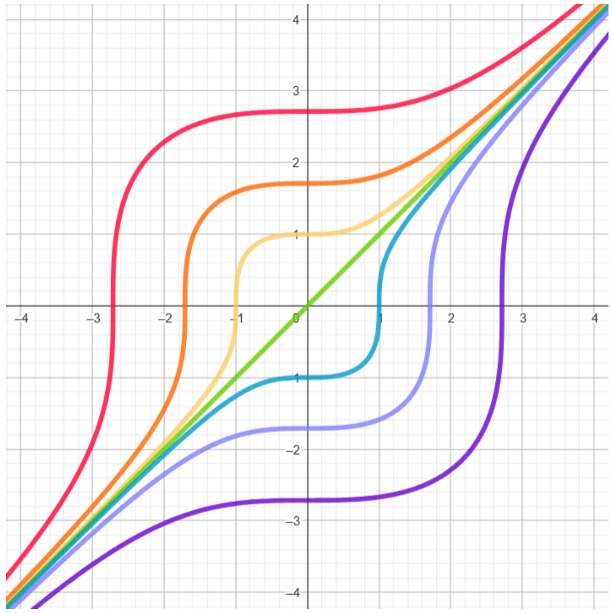
   По теореме об интеграле, независящего от пути, поле называется потенциальным или безвихревым, если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \iff \left(\frac{1}{x^2}\right)'_y = \left(\frac{1}{y^2}\right)'_x$, что выполняется, поэтому наше поле потенциальное

   Векторное поле выглядит так:

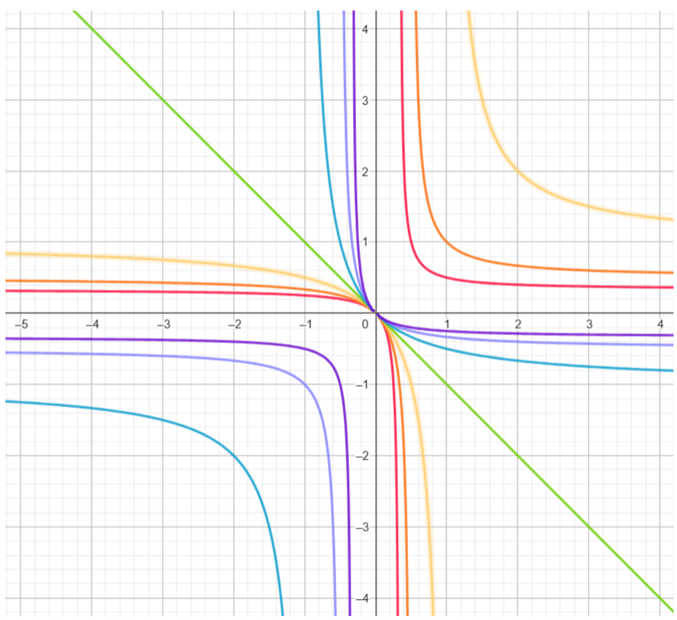


2. По определению, векторные линии удовлетворяют уравнению $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} \iff x^2dx = y^2dy \iff y^3 = x^3 + C$

   Векторные линии при разных C выглядят так:



3. Потенциалом поля называется такое поле $\overrightarrow{u}$, что $\overrightarrow{\nabla}\overrightarrow{u} = \overrightarrow{H}$
   Тогда: $\frac{\partial u}{\partial x} = P, \frac{\partial u}{\partial y} = Q$
   $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{y^2} \end{cases} \implies \begin{cases} u = -\frac{1}{x} + f(y), \\ u = -\frac{1}{y} + g(x) \end{cases} \implies u = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$
4. Линии уровня потенциала определяется по уравнению $u = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = k$, где k - потенциал на этой линии
   Тогда $y = -\dfrac{x}{1+kx}$, график некоторых эквипотенциальных линий:



5. Линии поля ортогональны, если они не пересекаются, значит $y^3 = x^3 + C_1$ и $y^3 = x^3 + C_2$ не имеют точек пересечения при различных C_1 и C_2
   $x^3 + C_1 = y^3 \neq y^3 = x^3 + C_2$
   $C_1 \neq C_2$ - тождество
   Аналогично для линии потенциалов:

$-\dfrac{x}{1+C_1x} \neq -\dfrac{x}{1+C_2x}$ $\quad x \neq 0$ - поле неопределенно при $x = 0$
$1+C_1x \neq 1+C_2x$
$C_1 \neq C_2$ - тождество

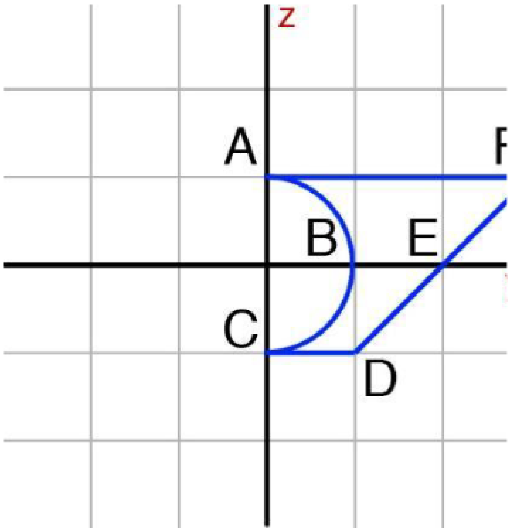
6. Пусть у векторной линии коэффициент $C = 3$, тогда выберем такие A и B, что $y^3 = x^3 + 8$, пусть $A = (1, \sqrt[3]{9})$, $B = \left(4, 2\sqrt[3]{9}\right)$

Тогда $\displaystyle\int_A^B Pdx + Qdy = u(B) - u(A) = -\frac{1}{x_B} - \frac{1}{y_B} + \frac{1}{x_A} + \frac{1}{y_A} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt[3]{9}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt[3]{9}} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt[3]{81}}{18}$

Проверим: $\displaystyle\int_A^B Pdx + Qdy = \int_{(1,\sqrt[3]{9})}^{(4,\sqrt[3]{9})} Pdx + Qdy + \int_{(4,\sqrt[3]{9})}^{(4,2\sqrt[3]{9})} Pdx + Qdy = \int_{(1,\sqrt[3]{9})}^{(4,\sqrt[3]{9})} \frac{1}{x^2}dx + \int_{(4,\sqrt[3]{9})}^{(4,2\sqrt[3]{9})} \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{x}\Big|_{(1,\sqrt[3]{9})}^{(4,\sqrt[3]{9})} - \frac{1}{y}\Big|_{(4,\sqrt[3]{9})}^{(4,2\sqrt[3]{9})} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{1} + (-\frac{1}{2\sqrt[3]{9}} + \frac{1}{\sqrt[3]{9}}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\sqrt[3]{9}}$ - верно

Задание 5. Поток векторного поля

Условие.



Дано тело T, ограниченное следующими поверхностями: $y - \sqrt{1-x^2-z^2} = 0, x^2+z^2 = 1, y - z = 2$.

На рисунке представлено сечение тела T координатной плоскостью Oyz.

1) Изобразите тело T на графике в пространстве.

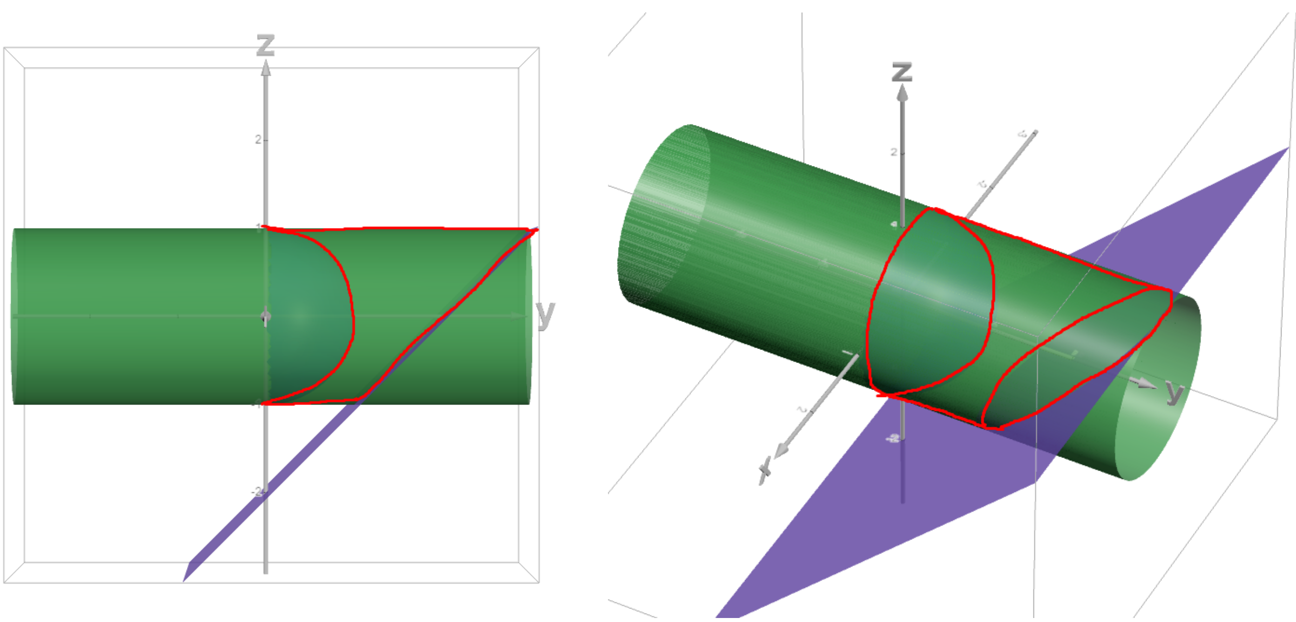
2) Вычислите поток поля

$\overrightarrow{a} = (\cos^2(z+y))\overrightarrow{i} + 2x\overrightarrow{j} + \left(\sqrt{y+5}+2z\right)\overrightarrow{k}$

через боковую поверхность тела T, образованную вращением дуги ABC вокруг оси Oy, в направлении внешней нормали поверхности тела T.

Решение.

1. Графики:



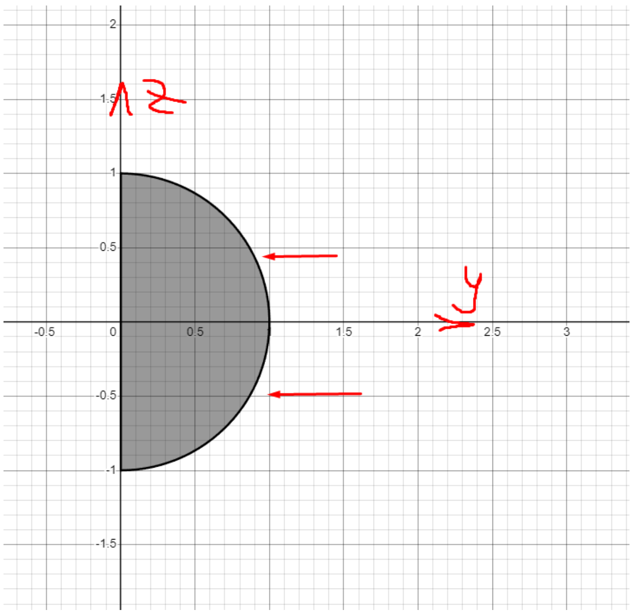
2. Векторное поле: $\overrightarrow{a} = (\cos^2(z+y))\overrightarrow{i} + 2x\overrightarrow{j} + \left(\sqrt{y+5}+2z\right)\overrightarrow{k}$, поверхность задается уравнением: $y - \sqrt{1-x^2-z^2} = 0$.

   Потоком векторного поля через эту поверхность будет двойной интеграл: $\iint_\sigma \cos^2(z+y)\ dydz + 2x\ dxdz + (\sqrt{y+5}+2x)\ dxdy$.

   Разобьем на три интеграла: $\iint_{D_1} \cos^2(z+y)\ dydz + \iint_{D_2} 2x\ dxdz + \iint_{D_3} (\sqrt{y+5}+2x)\ dxdy$.

$$D_1 = \begin{cases} y \geqslant 0 \\ z \leqslant \sqrt{1-y^2} \end{cases}; \quad D_2 = x^2 + z^2 \leqslant 0; \quad D_3 = \begin{cases} y \geqslant 0 \\ y \leqslant \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Так как поток идет в направлении внешнего вектора нормали, то интегрировать мы будем в этом направлении для плоскости $0yz$ и аналогично для остальных:



$$\iint_{D_1} \cos^2(z+y) = \int_{-1}^{1} \int_{z=\sqrt{1-y^2}}^{z=0} \cos^2(y+z)\, dydz = \int_{-1}^{1} \int_{z=\sqrt{1-y^2}}^{z=0} \frac{1+\cos(2y+2z)}{2}\, dydz = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}((0 - \sqrt{1-y^2}) + \int_{z=\sqrt{1-y^2}}^{z=0} \cos(2y+2z))\, dz)dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{2}(\sin 2y - \sin(2\sqrt{1+y^2}+2y)))dy \approx -1$$

$$\iint_{D_2} 2x\, dxdz = \int_{-1}^{1} \int_{z=-\sqrt{1-x^2}}^{z=\sqrt{1-x^2}} 2x\, dxdz = \int_{-1}^{1} 4x\sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\, dx^2 = 0$$

$$\iint_{D_3} (\sqrt{y+5} + 2x)\, dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{y=\sqrt{1-x^2}}^{y=0} (\sqrt{y+5} + 2x)\, dxdy = \int_{-1}^{1} (-\tfrac{2}{3}(5\sqrt{5} - \sqrt{(5+\sqrt{1-x^2})^3}) - 2x\sqrt{1-x^2})\, dx \approx -3.657$$

Получается $-1 - 3.657 = -4.657$

Ответ: -4.657