Методические указания к выполнению расчётно-графической работы по теме: **«Дифференциальные уравнения»**

Расчетно-графические работы выполняются командами студентов (по 3-5 человек) и заключаются в выполнении заданий, оформлении отчета и индивидуальной устной защите работы преподавателю. Сроки выполнения и защиты работ устанавливаются преподавателем.

К расчетно-графической работе предъявляются следующие **требования**:

1. ОТЧЕТ должен быть сделан в электронном виде в форматах docx, pptx или tex, затем **преобразован в формат** pdf для сдачи преподавателю на проверку.
   Отчет должен содержать:

Титульный лист:

- название работы;
- название дисциплины;
- список студентов, выполнявших работу;
- номер группы;
- место (Университет ИТМО),
- учебный год.

Условие каждого задания перед его решением.

Вводимые обозначения и их расшифровку (например: S – площадь фигуры). Если вводятся обозначения для геометрических параметров, их можно указать на рисунке к задаче.

Основные этапы решения (исследования) каждой задачи, его теоретическое обоснование, численные результаты.

Графики или рисунки, иллюстрирующие решение задачи. Обозначения величин на графиках должны соответствовать их обозначениям в решении задачи. Графики выполняются в математическом редакторе Desmos: https://www.desmos.com/ или Geogebra: https://www.geogebra.org/. В случае интерактивных графиков и рисунков допускается вставить в отчёт вместо них ссылки на рабочие листы математического редактора.

Числовой ответ к задаче и/или логическое заключение (результат исследования).

2. ЗАЩИТА работы проводится в форме устной беседы с преподавателем. Для успешной защиты необходимо:
   a. знать определения и свойства (теоремы и формулы) тех понятий, которые были использованы в решении задач или исследовании;
   b. уметь строить отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию и следствие из утверждений (определений, теорем), исследовать их на истинность;
   c. уметь иллюстрировать определения и свойства (если это возможно);
   d. приводить примеры и контрпримеры множеств и функций с заданными свойствами.

Пример вопросов на защите:

A. Сформулируйте условия существования и единственности решения задачи Коши.

B. Что называется фазовым портретом системы ДУ?

Задание 1. Дифференциальные модели первого порядка

В задачах проведите исследование:

1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, в задаче В сделайте чертеж, составьте дифференциальное уравнение и запишите начальные условия.
2) Решите аналитически составленную задачу Коши.
3) Изобразите семейство интегральных кривых и решение задачи Коши.
4) Запишите ответ.

№ команды	Задачи
1	A. Скорость роста площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее в свою очередь пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью. Найдите зависимость между площадью S листа и временем t, если известно, что в 6 часов утра эта площадь равнялась 1600 см^2, а в 6 часов вечера того же дня 2500 см^2. (Предполагается, что наблюдение производилось на экваторе в день равноденствия, когда угол между направлением лучей солнца и вертикалью можно считать равным 90° в 6 часов утра и в 6 часов вечера и 0° в полдень.)
	B. Найти в полярных координатах такую кривую, в каждой точке которой тангенс угла, образуемого радиус-вектором с касательной, равен квадрату радиус-вектора.
2	A. В электрическую цепь с сопротивлением 3/2 Ом в течение двух минут равномерно вводится напряжение (от нуля до 120 В). Кроме того, автоматически вводится индуктивность, так что число, выражающее индуктивность цепи в генри, равно числу, выражающему ток в амперах. Найдите зависимость тока от времени в течение первых двух минут опыта.
	B. Найти такую кривую, проходящую через точку (0, -2), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, увеличенной на три единицы.
3	A. Предприятие установило, что скорость изменения расходов по реализации взаимосвязана с рационализаторскими предложениями в производстве. В частности, если y – расходы по реализации (в млн. руб.), а x – число новаторских предложений в производстве, то изменение y в зависимости от изменения x равно $-\frac{1}{8}y$. Определите расходы по реализации в виде функции рационализаторских предложений производства, если известно, что когда число рационализаторских предложений 4, то расходы по реализации составляют 3 млн. руб.
	B. Найти такую кривую, проходящую через точку (1, 1), чтобы угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке был пропорционален квадрату ординаты в этой точке.

4	A. В резервуаре, объём которого 100 л, находится рассол, содержащий 10 кг растворённой соли. В резервуар втекает вода со скоростью 3 л/мин, а смесь с такой же скоростью перекачивается во второй резервуар ёмкостью также 100 л, первоначально наполненный чистой водой, из которого избыток жидкости выливается. Сколько соли будет содержать второй резервуар по прошествии часа? Каково максимальное количество соли во втором резервуаре? Когда это максимальное количество достигается? (Концентрация соли в каждом из резервуаров поддерживается равномерной посредством перемешивания.)
	B. Найдите кривую, проходящую через точку (1, 1), такую, что угловой коэффициент ее касательной в любой точке обратно пропорционален абсциссе точки касания.
5	A. Капля с начальной массой M г, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет m г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли. Найдите зависимость скорости движения капли от времени, прошедшего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли была равна нулю. Примите, что коэффициент пропорциональности $k \neq m$.
	B. Найти такую кривую, для которой угловой коэффициент касательной в любой ее точке в 5 раз больше углового коэффициента прямой, соединяющей ту же точку с началом координат.
6	A. Точка массой, равной m, движется прямолинейно; на неё действует сила, пропорциональная кубу времени, протекшего с момента, когда скорость была v_0 (коэффициент пропорциональности равен k). Кроме того, точка испытывает противодействие среды, пропорциональное произведению скорости и времени (коэффициент пропорциональности равен p). Найдите зависимость скорости от времени.
	B. Нормаль отсекает на оси абсцисс отрезок, равный квадрату радиус-вектора любой точки кривой. Найдите уравнение кривой, если она проходит через точку (0,3).

Задание 2. Графическое решение ДУ первого порядка

В задачах проведите исследование:

1) Изучите по источникам **метод изоклин** (*например, здесь: Романко, В. К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления — URL:* https://e.lanbook.com/book/152035).
2) Постройте приближенно семейство интегральных кривых данного ДУ методом изоклин.
3) Решите задачу аналитически. Изобразите точное решение.
4) Сравните точное и приближенное решение.

№ команды	1	2	3
ДУ	$y' = x + y$	$y' = \dfrac{y}{x+y}$	$y' = y - x^2$
№ команды	4	5	6
ДУ	$y' = 1 + y$	$y' = -y/x$	$y' = \dfrac{y-3x}{x+3y}$

Задание 3. ДУ второго порядка

Пружинный маятник движется по закону:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t).$$

1) Запишите однородное уравнение движения маятника. Выясните, почему движение описывается уравнением такого вида (каков физический смысл коэффициентов левой части уравнения).
2) Установите характер движения (периодический, апериодический) при данных $p(t)$ и $q(t)$.
3) Найдите ФСР ЛОДУ и убедитесь в ее линейной независимости с помощью вронскиана.
4) Найдите общее решение ЛОДУ.
5) Задайте начальные условия в момент $t_0 = 0$ и найдите удовлетворяющее им частное решение ЛОДУ. Изобразите закон движения в системе координат.
6) Составьте линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) с правой частью $f(t)$. Выясните физический смысл функции $f(t)$.
7) Найдите решение ЛНДУ, удовлетворяющее начальным условиям. Изобразите закон движения в системе координат.
8) Сделайте вывод о влиянии на движение функции $f(t)$.

№ команды	1	2	3
Условия	$p(t) = 6\,, q(t) = 10$ $f(t) = \cos t$	$p(t) = 4\,, q(t) = 5,$ $f(t) = t^2 e^{2t}$	$p(t) = 0\,, q(t) = 4\,,$ $f(t) = e^t \sin t$
№ команды	4	5	6
Условия	$p(t) = 4, q(t) = 3$ $f(t) = t\cos t + e^{-t}$	$p(t) = 4\,, q(t) = 4$ $f(t) = e^{-2t} + \sin t$	$p(t) = 6\,, q(t) = 9$ $f(t) = te^{-3t} + 2$

Задание 4. Системы ДУ. Устойчивость.

Дана система ДУ:

1) Найдите общее решение системы.
2) Изобразите на фазовой плоскости семейство интегральных кривых $y = y(x)$.
3) Исследуйте решение системы на устойчивость при $t \to +\infty$.
4) Определите характер особой точки.

№ команды	1	2	3
Условие	$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y,$ $\frac{dy}{dt} = -3x + 2y$	$\frac{dx}{dt} = -2x + 5y,$ $\frac{dy}{dt} = 2x + y$	$\frac{dx}{dt} = x + 5y,$ $\frac{dy}{dt} = x - 3y$
№ команды	4	5	6
Условие	$\frac{dx}{dt} = 12x + 18y,$ $\frac{dy}{dt} = -8x - 12y$	$\frac{dx}{dt} = -4x - 10y,$ $\frac{dy}{dt} = x - 2y$	$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y,$ $\frac{dy}{dt} = 6x - 5y$