



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный технологический университет
«СТАНКИН» (ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН»)**

**ИНСТИТУТ
Автоматизации
и робототехники**

**Кафедра
Робототехники
и мехатроники**

Неделчев Симеон Иванов

**«Задачи исследования динамики управляемого движения
многозвенных роботов»**

Выпускная квалификационная работа магистра по направлению 15.04.06
«Мехатроника и робототехника»

Профиль: Компьютерные технологии в робототехнике и мехатронике

Расчётно-пояснительная записка

Регистрационный № _____

Заведующий кафедрой

_____ д.т.н. проф. Ю.В. Подураев

Руководитель проекта

_____ д.т.н. проф. Ю.В. Подураев

Студент

_____ Неделчев С.И.

Москва, 2018

Аннотация

Данная выпускная квалификационная работа посвящена исследованию управляемого движения многозвенных роботов.

В качестве объекта исследования выбран манипуляционный робот *Universal Robot 5*.

В работе используются методы идентификации систем, а также принципы моделирования динамики движения многозвенных манипуляционных механизмов.

Большое место в работе уделено математическому описанию механики манипуляционных роботов с парами 5-го класса и разомкнутой кинематической цепью, приведены модели разной степени подробности.

Подробно описываются принципы и порядок идентификации инерционных параметров манипуляционных механизмов. Проведена идентификация параметров реального объекта, основанная на измерении его состояния и его математической модели. Полученные параметры верифицированы путем отработки тестовой траектории. Смоделировано управляемое движение манипулятора при действии нескольких алгоритмов управления и проведено сравнение результатов по точности.

Для наглядности результаты исследования представлены в виде графиков и таблиц.

Исследование представляет интерес с точки зрения возможности использования полученной модели для анализа динамических процессов возникающих в механической подсистеме манипуляционного робота при реализации различных алгоритмов управления, сравнения его теоретической модели и реального поведения.

Работа содержит ?? страниц текста, рисунков, таблиц.

Оглавление

Введение

Робототехника - относительно молодая область науки и техники, в которой органично пересекаются традиционно разделенные области инженерного знания. Разработка роботов и их исследование требуют знаний электротехники, механики, промышленного машиностроения, информатики и математики.

От иных известных типов машин, роботы принципиально отличаются универсальностью. Предшественниками роботов являлись различного рода манипуляторы с ручным и автоматическим управлением. В конце 40-х годов XX века были разработаны первые манипуляторы с электромеханическими приводами, предназначались они для работы с радиоактивными материалами и копировали движения рук человека-оператора. А уже к середине 50-х годов XX века американским инженером Джорджем Деволом был разработан и запатентован способ управления манипулятором с помощью сменных перфокарт, что послужило основой для создания в начале 1960-х первых промышленных роботов «Юнимейт».

Большую часть своего существования роботы были задействованы в основном в автомобилестроении и при крупносерийном производстве. В последнее время они нашли новые сферы применения в таких областях, как пищевая промышленность, металлообработка, электроника, медицина, военное дело. Однако, основной областью применения роботов по-прежнему осталась промышленность.

Так в данное время с помощью промышленных роботов уже эффективно выполняется:

- Манипулирование объектами
- Сборка
- Окраска
- Точечная и контурная сварка
- Лазерная резка
- Вспомогательные механические операции (удаление облоя, шлифование)

Основными направлениями исследований в области промышленной робототехники в последние 10 лет являются разработка робототехнических систем для механообработки, систем способных безопасно взаимодействовать с людьми (коллаборативные роботы), силовое осязание и дистанционное управление. Большинство из этих задач в итоге сводятся к поиску эффективных алгоритмов управления нелинейными объектами, коими в общем случае и являются роботы. При этом значительная часть этих алгоритмов в той или иной мере используют динамическую модель манипулятора, которая обычно представляет из себя сложную взаимосвязанную систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка.

Основная масса эффективных алгоритмов управления роботами были разработаны еще в период с 70-е по 90-е годы XX века как отечественными, так

и зарубежными специалистами, работающими в области теории автоматического управления. Существенным недостатком этих методов является необходимость использования динамической модели, которая в виду своей вычислительной сложности существенно ограничивала практическое применение данных методов управления. Однако, благодаря стремительному развитию цифровых систем и появлению высокоточных датчиков, возможности по реализации данных схем управления существенно возросли.

Выше сказанное и определило цель данной работы - проанализировать динамические процессы управляемого движения многосвязных манипуляционных механизмов. При этом были поставлены следующие задачи: построить модель динамики многосвязного манипуляционного робота, идентифицировать динамические параметры реального манипуляционного робота, сравнить полученную модель с реальным объектом, промоделировать управляемое движение реального объекта и сравнить полученные результаты.

Робота состоит из 5 разделов. В разделе 1 проведено краткое описание общих характеристик манипуляционных роботов. 2-й раздел посвящен принципам и способам математического описания механики манипулятора. В разделе под номером 3 описаны некоторые алгоритмы управления роботами и приведено доказательство их устойчивости. Раздел 4 посвящен постановке задачи идентификации и описанию математических методов ее решения. В заключительном разделе 5 описано экспериментальное исследование динамики реального манипулятора и моделирование его управляемого движения.

1. Общая характеристика манипуляционных роботов

Манипуляционные роботы - автоматические машины, стационарные или передвижные, состоящие из исполнительного устройства в виде манипулятора, имеющего несколько степеней подвижности (СП), и перепрограммируемого устройства программного управления для выполнения двигательных и управляющих функций. В состав манипуляционного робота (Рис. ??) входят [?]:

- Исполнительное устройство (ИУ) - устройство манипуляционного робота, выполняющее все его двигательные функции.
- Устройство управления (УУ) - устройство манипуляционного робота для формирования и выдачи управляющих воздействий исполнительному устройству в соответствии с управляющей программой

ИУ включает в себя пространственный механизм с несколькими степенями подвижности – называемый манипуляционным механизмом (исполнительным механизмом, ИМ), систему приводов и рабочий орган. Рабочий орган (РО) - устройство, предназначенное для выполнения технологических операций. УУ включает в себя сенсорные устройства, устройства обработки и хранения информации, устройство управления приводами.

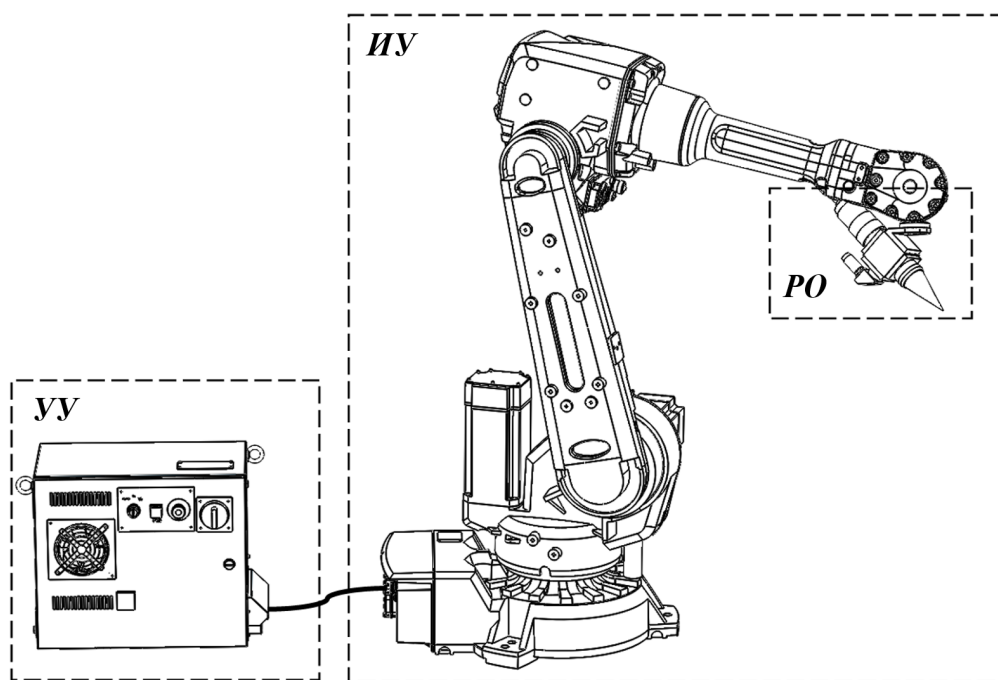


Рис. 1.1: Устройство манипуляционного робота

В настоящее время расширяются сферы приложения манипуляционных роботов. Все чаще их применяют в здравоохранении, военном деле, космосе, под водой и других экстремальных средах. Однако наибольшее развитие

и практическое применение манипуляционные роботы нашли в промышленности, где их называют промышленными роботами. Основной функцией манипуляционного робота является управление пространственным положением РО. Механизм, посредством которого РО переносится и ориентируется в пространстве называют манипуляционным механизмом.

Манипуляционный механизм - состоит из связанных с помощью кинематических пар (КП) твердых тел – звеньев.

Кинематическая пара (КП) - соединение двух звеньев, допускающие их относительное движение. КП классифицируют по числу связей, налагаемых на относительное движение звеньев (классификация И.И. Артоболевского [?]). Основными типами КП, используемыми в манипуляционных механизмах являются КП 5-ого класса.

Систему звеньев, связанных между собой кинематическими парами называют кинематической цепью. В зависимости от вида движения звеньев кинематические цепи подразделяют на плоские — звенья движутся в одной или нескольких параллельных плоскостях, и пространственные — звенья движутся в пространстве. Для возможности управления движением манипуляционного механизма необходимо, в первую очередь снабдить КП приводами, сообщающими движения звеньям механизма. КП снабженную приводом, позволяющим сообщать одному из звеньев этой КП управляемую обобщенную координату называют степенью подвижности (СП).

В промышленности наиболее часто используются манипуляционные механизмы с разомкнутой пространственной кинематической цепью (Рис. ??).

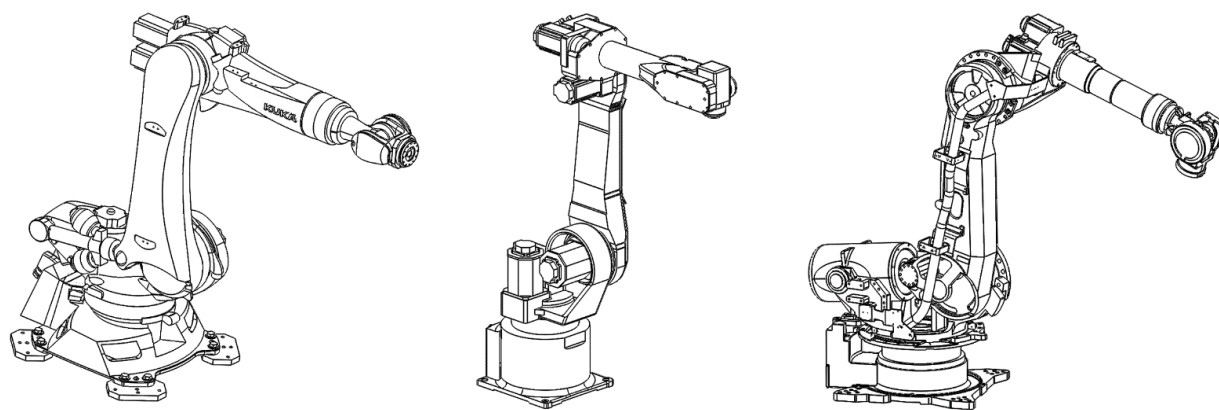


Рис. 1.2: Примеры промышленных манипуляционных роботов с разомкнутой пространственной кинематической цепью.

Как следует из выше сказанного, в большинстве случаев, манипуляционные механизмы промышленных роботов представляют собой систему последовательно связанных между собой твердых тел. В следующем разделе подробнее остановимся на математическом описании кинематики и динамики таких систем.

2. Математическая модель манипулятора

2.1 Принципы математического описания механики манипуляционных механизмов

Для математического описания движения манипуляционного механизма необходимо установить связь между требуемыми усилиями в приводах τ , внешними усилиями \mathbf{F} и обобщенными координатами \mathbf{q} , а также связать обобщенные координаты \mathbf{q} с положением и ориентацией концевой точки рабочего органа \mathbf{x} (вектор позы). Следовательно, манипуляционный механизм может быть упрощенно записан с помощью следующей системы уравнений [?]:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathcal{F}_k(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_k) \\ \mathbf{Q} = \mathcal{F}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_d, \mathbf{f}) \end{cases} \quad (2.1)$$

Первое уравнение: $\mathbf{x} = \mathcal{F}_k(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_k)$ - уравнение кинематики манипулятора, выражающее координаты и ориентацию звеньев и РО в базовой, инерциальной системе координат (в дальнейшем БСК) через относительные координаты в степенях подвижности, обобщенные координаты - \mathbf{q} и вектор кинематических параметров $\boldsymbol{\psi}_k$, в зависимости от способа описания кинематики манипуляционного механизма это могут быть длины звеньев углы их относительного расположения или иные параметры, подробнее вопрос нахождения данных параметров мы рассмотрим в разделе посвященной описанию пространственного положения механизмов. Последовательное дифференцирование выражения $\mathbf{x} = \mathcal{F}_k(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_k)$ по времени дает нам соответственно связь между скоростями и ускорениями в степенях подвижности и относительно БСК.

Второе уравнение $\mathbf{Q} = \mathcal{F}_d(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\psi}_k, \boldsymbol{\psi}_d, \mathbf{f})$ - уравнение динамики исполнительного устройства, связывает координаты \mathbf{q} , скорости $\dot{\mathbf{q}}$ и ускорения $\ddot{\mathbf{q}}$ в степенях подвижности при движении манипуляционного механизма под влиянием внешних сил и моментов \mathbf{f} приложенных к РО и обобщенных сил \mathbf{Q} развиваемых приводами в степенях подвижности. Здесь $\boldsymbol{\psi}_d$ - вектор динамических (массо-инерционных) параметров, таких например как массы и координаты центра масс звеньев, а так же их моменты инерции. Причина по которой вектор кинематических параметров $\boldsymbol{\psi}_k$ входит в описание динамической модели очевидна, в общем случае моменты на приводах и их влияние на движение манипулятора будут зависеть от длин звеньев и их относительного расположения, более того построение математической модели динамики в первую очередь базируется на кинематических соотношениях $\mathcal{F}_k(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_k)$

Как можно заметить, описание движения механизма может быть формально разделено на два класса задач: задачи кинематики - выражающие относительное движение звеньев относительно друг друга и БСК и задачи динамики - описывающие силовые взаимодействия между звеньями механизма и их взаимосвязь с его движением в пространстве. Каждая из этих задач,

в свою очередь, содержит набор более специфических задач. Перед тем как приступить к описанию методов решения и непосредственно решению каждой из этих задач, сформулируем их более подробно.

2.1.1 Задачи кинематики

Как уже было сказано выше под задачами кинематики в робототехнике в первую очередь понимают нахождение связи между положением и ориентацией РО, либо другой локальной системы координат (далее ЛСК) привязанной к звену механизма, относительно БСК. Операцию расчета координат и ориентации ЛСК относительно БСК, по заданным обобщенным координатам \mathbf{q} называют решением прямой задачи кинематики (ПЗК). Как показано выше в общем виде данная задача математически выражается как нелинейная функция вектора позы от обобщенных координат и геометрических параметров манипулятора: $\mathbf{x} = \mathcal{F}_k(\mathbf{q}, \psi_k)$. Необходимость решения ПЗК обуславливается тем, что прямое измерение положения и ориентации рабочего органа в пространстве чрезвычайно затруднительно и требует дорогостоящих сложнотехнических датчиков, в то время как обобщенные координаты легко определяются с помощью достаточно простых угловых или линейных датчиков перемещения. Точность измерения координат рабочего органа при решении ПЗК напрямую зависит от точности датчиков, установленных в сочленениях и точности параметров описывающих кинематическую модель. Стоит отметить, что решение ПЗК для механизмов с разомкнутой кинематической цепью единственно и существует всегда.

Управление манипулятором обычно происходит в пространстве обобщенных координат, т.е. путем управления положением валов приводов в составе СП исполнительного устройства, а необходимые координаты положения и ориентации РО задаются относительно БСК необходимо уметь пересчитывать координаты и ориентацию ЛСК выраженной в БСК в обобщенные координаты q . Задачу определения обобщенных координат в СП по заданному положению и ориентации ЛСК обычно называют обратной задачей кинематики (ОЗК). Задача решения ОЗК с математической точки зрения заключается в нахождении функции обратной ПЗК: $\mathbf{q} = \mathcal{F}_k^{-1}(\mathbf{x}, \psi_k)$. В общем случае для манипуляционных механизмов с разомкнутой кинематической структурой данная задача решается не однозначно, т.е. одному и тому же положению ЛСК может соответствовать разный набор обобщенных координат более того решению может и не существовать вовсе, в таком случае говорят что, поза \mathbf{x} не достижима [?, ?, ?].

Традиционно, в теоретической механике задачи кинематики так же включают в себя нахождение взаимосвязи между скоростями и ускорениями тел в различных системах отсчета, в робототехнике такие задачи, аналогично задачам о положении, называют прямыми и обратными задачами кинематики

для скоростей и ускорений соответственно. Решение данных задач необходимо для формирования полного описания кинематики механизма необходимой как для построения его динамической модели, так и для реализации эффективных кинематических алгоритмов управления манипулятором.

2.1.2 Задачи динамики

Как отмечалось выше задачами динамики в робототехнике называют построение математических моделей движения системы с учетом силовых взаимодействий, т.е. причин, вызвавших это движение.

Уравнение динамики $Q = \mathcal{F}_d(q, \dot{q}, \ddot{q}, \psi_\kappa, \psi_d, f)$ при моделировании манипуляционного механизма как системы n твердых тел, представляет собой систему n дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат. Чаще всего данная модель используется для:

- Моделирования движения манипулятора с помощью ЭВМ.
- Разработки законов управления.
- Энергетического расчета и подбора приводов.
- Планировании траекторий.
- Формирования критериев качества при проектировании манипулятора.

Под задачами динамики в узком смысле понимают решение двух основных задач, первой (прямой) и второй (обратной). Первой задачей динамики называют операцию расчета сил, действующих на тело (звено) по заданному закону движения этого тела (звена). Под второй задачей динамики понимают операцию определения закона движения (траектории) тела при действии на это тело известных силовых факторов (сил и моментов). В настоящее время существует множество методов решения как первой, так и второй задач динамики для механизмов различной степени сложности, применительно к манипуляционному механизму с разомкнутой кинематической цепью, наиболее эффективными являются:

- Кинетостатический метод, основанный на принципе Даламбера;
- Метод основанный на уравнениях Лагранжа II-го рода (метод Лагранжа — Эйлера);
- Метод основанный на уравнениях Гиббса — Аппеля;
- Метод основанный на принципе наименьшего принуждения Гаусса;
- Рекурсивный метод Ньютона — Эйлера;

Каждый из представленных выше методов имеет свои достоинства, недостатки и области применения, подробно описанные в [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]. В данной работе будут рассмотрены метод Лагранжа — Эйлера как наиболее часто используемый в задачах анализа и управления манипуляторами.

Результатом применения этих методов являются уравнения, связывающие действующие в СП силы и моменты с кинематическими характеристиками — обобщенными координатами, скоростями, ускорениями, а также массоинерционными и геометрическими параметрами звеньев. Стоит, однако отметить, что не все из этих методов могут использоваться для решения как прямой так и обратной задачи динамики. Так, например, метод Ньютона-Эйлера, хотя, благодаря своей рекурсивной природе, и обладает существенным преимуществом в виде меньшего объёма вычислений все-же не позволяет решать вторую задачу динамики.

Как будет показано в последующих разделах уравнение движения много подвижных механизмов с разомкнутой КЦ может быть записано матричным векторном виде:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^T \mathbf{f} \quad (2.2)$$

Где $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ - вектора обобщенных координат, скоростей и ускорений соответственно, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ - вектор управляющих моментов на приводах в СП, $\mathcal{D}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - матрица инерции манипуляционного механизма, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ - вектор равнодействующей внешних сил и моментов приложенный к РО, $\mathbf{J}_x(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ - матрица Якоби вычисленная для РО, $\mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathcal{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ - вектора влияния кориолисовых и центробежных сил.

Подробно вывод матриц и векторов входящих в уравнение (??) рассмотрим в дальнейших разделах работы, сейчас же отметим, что решение первой задачи динамики можем получить подставляя законы изменения обобщенных координат \mathbf{q} , скоростей $\dot{\mathbf{q}}$, ускорений $\ddot{\mathbf{q}}$ и внешних сил \mathbf{F} в проводя все необходимые арифметические операции получим искомый моменты либо силы на приводах $\boldsymbol{\tau}$. Т.е. уравнение в явном виде описывает решение первой задачи динамики. Для решения второй задачи динамики обычно используют тот факт что, уравнение (??) линейно по отношению к ускорениям. Решение данной системы линейных уравнений позволяет получить следующую систему в нормальной форме Коши:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathcal{D}(\mathbf{q})^{-1} (\mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^T \mathbf{F} - \boldsymbol{\tau}) \quad (2.3)$$

Последовательно проинтегрировав систему нелинейных уравнений (??) получим соответственно обобщенные скорости и ускорения, т.е. решим вторую задачу динамики. Стоит заметить, что для существования решения матрица $\mathcal{D}(\mathbf{q})$ должна быть обратима. Данное условие выполняется всегда т.е. для любых наборов обобщенных координат, что будет показано далее в тексте работы.

Не стоит забывать, что для упрощения записи, мы и не отметили в явном виде зависимость матрицы инерции, векторов кориолисовых и гравитационных сил от динамических и кинематических параметров, такая зависимость естественно присутствует. В дальнейших разделах будет показано, что для манипулятора с разомкнутой КЦ уравнения движения могут быть записаны в эквивалентной форме линейно к динамическим параметрам:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\psi}_k) \boldsymbol{\psi}_d \quad (2.4)$$

Где $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\psi}_k) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - нелинейная матричная функция закона движения и кинематических параметров называемая регрессором (в теории линейной регрессии) либо матрицей наблюдений (в теории фильтрации Калмана и идентификации динамических систем), $\boldsymbol{\psi}_d \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ - вектор изменяющихся либо постоянных во времени параметров.

Запись уравнений движения в виде линейном к параметрам позволяет использовать достаточно развитую теорию идентификации линейных детерминированных и стохастических систем, эффективные алгоритмы адаптивного управления, а также оптимизации механизма с помощью хорошо исследованных задач квадратичного и линейного программирования. Стоит отметить, однако, что запись уравнений в данной форме не всегда тривиальная задача, за последнее десятилетие разработаны несколько алгоритмов автоматического формирования регрессора основанных на разработанных ранее алгоритмах решения динамических задач.

Перед тем как приступить к подробному описанию методов разработки кинематических и динамических моделей отметим, что достаточно часто в модель ИУ включатся так же модели приводов СП и механических передач, в этом случае порядок дифференциальных уравнений, описывающих манипуляционный механизм вырастает, к примеру, при моделировании ИУ с n звеньями и приводами на базе двигателей постоянного тока (ДПТ), минимальный порядок уравнений, описывающих систему - $3n$. При включении в модель податливости механических передач порядок уравнений возрастает до $5n$. Точность моделей и соответственно сложность модели полностью определяется исследователем исходя из поставленных перед ним задач. К примеру, для габаритных космических манипуляторов, установленных на МКС существенны эффекты, вызванные упругостью звеньев, в то время как для массивных грузоподъемных роботов существенными оказываются массоинерционные факторы. Часто сложность модели может быть продиктована имеющимся в наличии измерительным оборудованием. В случае наличия датчиков момента нам для идентификации механизма не к чему вводить в модель уравнения связи между моментом и напряжением на обмотках двигателя, в то же время при косвенной оценке момента (по показаниям тока), эти уравнения должны быть включены в модель.

2.2 Кинематическая модель манипулятора

Кинематическая модель манипуляционного механизма - простейшая модель механизма описывающая взаимосвязь положения, скоростей и ускорений звеньев робота относительно друг друга либо инерциальной системы отсчета без учета внешних и внутренних сил и инерционных характеристик.

2.2.1 Описание пространственного положения механизма

Каждое звено исполнительного механизма может совершать вращательное и/или поступательное движение относительно базовой системы координат (БСК), обычно привязанной к основанию манипулятора. Если считать звенья манипулятора абсолютно твердыми телами, то все точки i -го звена не меняют своего положения относительно этого звена. Для упрощения нахождения координат точки, принадлежащей определенному звену к нему привязывают свою локальную систему координат (ЛСК). Тогда для описания пространственного положения манипулятора необходимо уметь пересчитывать координаты точек, заданные в ЛСК в координаты этих же точек, заданных в БСК. Обычно для осуществления данного перехода последовательно совмещают начала БСК и ЛСК с помощью переноса начала координат вдоль вектора \mathbf{p} , а затем совершают вращение с помощью матрицы вращения \mathbf{R} до совпадения ЛСК и БСК, тогда координаты точки \mathbf{c}_i заданной в ЛСК могут быть пересчитаны в \mathbf{c}_0 заданной в БСК используя следующее выражение:

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{p}_i + \mathbf{R}_0^i \mathbf{c}_i \quad (2.5)$$

Однако, при использовании данного метода вычисления становятся довольно громоздкими. Чаще, все вектора трехмерного пространства $\mathbf{c} = [c_x \ c_y \ c_z]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ дополняют еще одной размерностью в результате чего они принимают вид, $\tilde{\mathbf{c}} = [sc_x \ sc_y \ sc_z \ s]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$, вектор $\tilde{\mathbf{c}}$ называют вектором однородных координат вектора \mathbf{c} . В пространстве однородных координат $\mathbb{R}^{4 \times 1}$ процедуру преобразования однородных координат $\tilde{\mathbf{c}}$ из ЛСК в БСК можно выполнить с помощью следующего выражения:

$$\tilde{\mathbf{c}}_0 = \mathbf{A}_0^i \tilde{\mathbf{c}}_i \quad (2.6)$$

Матрица $\mathbf{A}_0^i \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ называется матрицей преобразования однородных координат, в общем случае данная матрица имеет следующий вид:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \text{Поворот} & \text{Сдвиг} \\ \hline \text{Перспектива} & \text{Масштаб} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{p}_{3 \times 1} \\ \hline \mathbf{n}_{1 \times 3} & s_{1 \times 1} \end{array} \right] \quad (2.7)$$

В данном виде матрица преобразования однородных координат встречается достаточно часто в задачах машинной графики и технического зрения [?],

в задачах же преобразования декартовых координат вектор перспективы \mathbf{n} содержит нулевые компоненты, а компонента s масштаба равна единице, в таком случае матрицу перехода из j -й ЛСК в i -ю можем записать следующим образом:

$$\mathbf{A}_j^i = \left[\begin{array}{ccc|c} \hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\mathbf{x}}_i & \hat{\mathbf{x}}_k \cdot \hat{\mathbf{y}}_i & \hat{\mathbf{x}}_j \cdot \hat{\mathbf{z}}_i & p_{x_i} \\ \hat{\mathbf{y}}_j \cdot \hat{\mathbf{x}}_i & \hat{\mathbf{y}}_k \cdot \hat{\mathbf{y}}_i & \hat{\mathbf{y}}_j \cdot \hat{\mathbf{z}}_i & p_{y_i} \\ \hat{\mathbf{z}}_j \cdot \hat{\mathbf{x}}_i & \hat{\mathbf{z}}_k \cdot \hat{\mathbf{y}}_i & \hat{\mathbf{z}}_j \cdot \hat{\mathbf{z}}_i & p_{z_i} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.8)$$

Где, $\mathbf{p}_i = [p_{x_i} \ p_{y_i} \ p_{z_i}]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ единичные орты соответствующих ЛСК, операция $\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$ - векторное произведение единичных векторов $\hat{\mathbf{a}}$ и $\hat{\mathbf{b}}$. Из курса линейной алгебры и аналитической геометрии известно, что в случае единичных векторов $\cos \gamma = \hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}$, т.е. матрица вращения в (??) представляют собой косинусы углов между ортами соответствующих ЛСК, по этой причине матрицу вращения \mathbf{R} часто называют матрицей направляющих косинусов.

2.2.2 Нотация Денавита-Хартенберга

Описанным выше матричным представлением для описания пространственной геометрии манипулятора впервые воспользовались Денавит и Хартенберг [?]. В их работе это представление применяется для обобщенного подхода к описанию расположения любой точки манипулятора относительно заданной БСК и дает универсальный алгоритм для вывода уравнений кинематики манипулятора. Рассмотрим его подробнее.

Для начала задаются БСК $\{\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{z}}_0\}$, ось $\hat{\mathbf{z}}_0$ которой направлена по оси 1-й кинематической пары; оси $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{y}}_0$ выбирают так чтобы БСК имела правую ориентацию. Затем к оси сочленения каждого звена привязывают ортонормированную декартову ЛСК $\{\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{z}}_i\}$, где $i = 1, 2, \dots, n$, а n равно числу степеней подвижности. Каждая система координат формируется по следующим правилам:

1. Ось $\hat{\mathbf{z}}_i$ направляют по оси кинематической пары связывающей i и $i + 1$ звенья;
2. Ось $\hat{\mathbf{x}}_i$ направляют по общей нормали к $\hat{\mathbf{z}}_{i-1}$ и $\hat{\mathbf{z}}_i$, а также так, чтобы она пересекала ось $\hat{\mathbf{z}}_{i-1}$;
3. Ось $\hat{\mathbf{y}}_i$ направляют перпендикулярно $\hat{\mathbf{x}}_i$ и $\hat{\mathbf{z}}_i$ так чтобы обеспечить правую ориентацию системы координат $\{\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{y}}_i, \hat{\mathbf{z}}_i\}$;

Пример расстановки ЛСК приведен на рис.??.

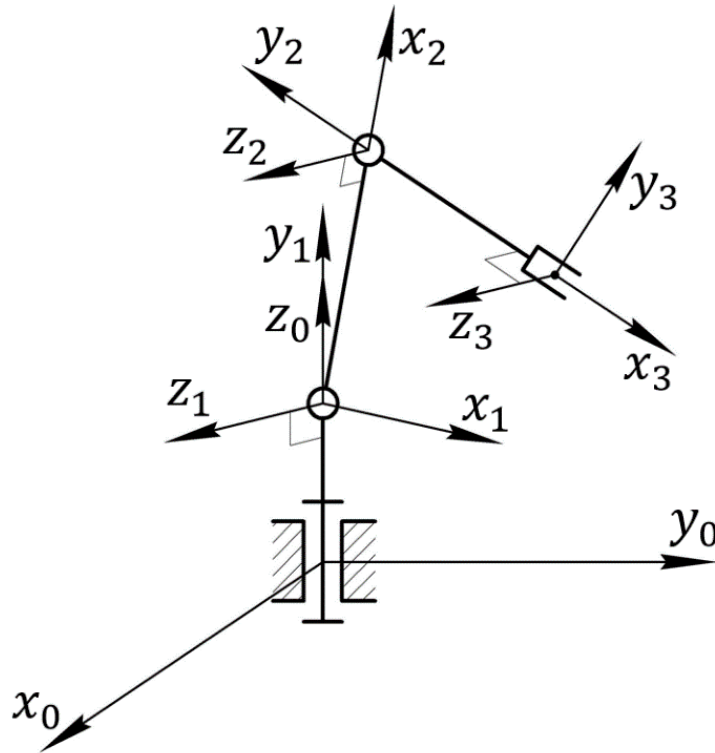


Рис. 2.1: Пример расстановки ЛСК.

После того как сформированы ЛСК для каждого звена, вводятся 4 независимых параметра (ДХ параметры) которые описывают расположение i -й ЛСК относительно $(i-1)$ -й ЛСК [1,6].

- θ_i – угол, на которой необходимо повернуть ось $\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ вокруг оси $\hat{\mathbf{z}}_{i-1}$ для того, чтобы она была со-направлена с осью $\hat{\mathbf{x}}_i$;
- d_i – расстояние между пересечением оси $\hat{\mathbf{z}}_{i-1}$ с $\hat{\mathbf{x}}_i$ и началом $i - 1$ -й системы координат, отсчитывается вдоль оси $\hat{\mathbf{z}}_{i-1}$;
- a_i – расстояние между пересечением оси $\hat{\mathbf{z}}_{i-1}$ с $\hat{\mathbf{x}}_i$ и началом i -й системы координат, отсчитываемое вдоль оси $\hat{\mathbf{x}}_i$;
- α_i – угол, на который надо повернуть ось $\hat{\mathbf{z}}_{i-1}$ вокруг $\hat{\mathbf{x}}_i$, чтобы она стала со-направленной с осью $\hat{\mathbf{z}}_i$;

Знаки углов θ_i и α_i определяются в соответствии с правилом правой руки; Наглядно данные параметры представлены на рис.?? Стоит отметить, что для вращательных КП параметры d_i, a_i, α_i являются постоянными характеристиками для данной кинематической схемы робота, в то время как θ_i является переменной величиной, зависящей от q_i ; для поступательных КП постоянными характеристиками являются параметры θ_i, a_i, α_i , а переменной величиной, зависящей от q_i , является d_i .

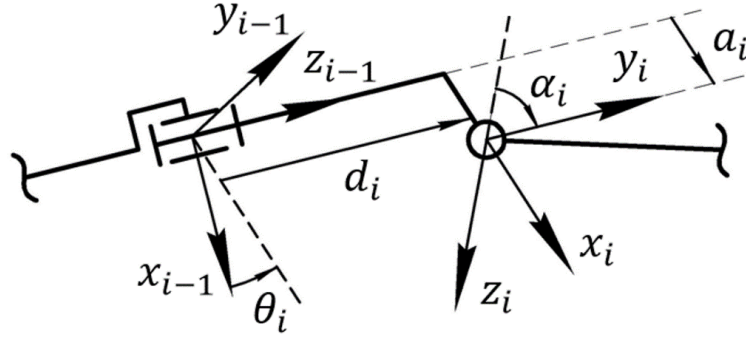


Рис. 2.2: Иллюстрация параметров Денавита - Хартенберга.

После того как параметры θ_i , d_i , a_i , α_i сформированы, строят однородные матрицы преобразования связывающие расположение i -й ЛСК относительно $i - 1$ -й ЛСК следующего вида:

$$\mathbf{A}_{i-1}^i \triangleq \left[\begin{array}{ccc|c} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (2.9)$$

Тогда матрица преобразования из j -й ЛСК в k -ю:

$$\mathbf{A}_j^k = \begin{cases} \mathbf{I}_4, & k = j \\ (\mathbf{A}_k^j)^{-1}, & j > k \\ \prod_{i=j+1}^k \mathbf{A}_{i-1}^i, & j < k \end{cases} \quad (2.10)$$

2.2.3 Прямая задача кинематики

Описанный в предыдущем разделе метод матричного представления Денавита - Хартенберга можно эффективно использовать для решения ПЗК. Для этого необходимо задаться однородными координатами характеристической точки манипулятора относительно собственной ЛСК. Затем с помощью матрицы преобразования из БСК в ЛСК i -го звена (14) найти координаты этой точки относительно БСК, а также ориентацию ЛСК i -го звена:

$$\mathbf{r}_0^i = \left(\prod_{i=1}^j \mathbf{A}_{i-1}^i \right) \mathbf{r}_i^i = \mathbf{A}_0^i \mathbf{r}_i^i \quad (2.11)$$

В итоге после всех преобразований компоненты вектора \mathbf{r}_0^i и компоненты матрицы \mathbf{A}_0^i являются функциями от переменных d_i и/или θ_i и постоянных векторов $\boldsymbol{\psi}_{\kappa_i} = [\theta_i \ \alpha_i \ a_i]^T$ и/или $\boldsymbol{\psi}_{\kappa_i} = [d_i \ \alpha_i \ a_i]^T$ (в зависимости от типов КП входящих в состав манипуляционного механизма). Так как переменные d_i

или θ_i есть обобщенные координаты q_i то можем заключить что, сформированна функция отображающая вектор обобщенных координат в вектор позы: $\mathbf{x} = \mathcal{F}_k(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_\kappa)$

Рассуждение выше естественно преобразуются на случай решения ПЗК не для произвольной точки принадлежащей i -у звену, а для характеристической точки РО. В этом случае достаточно положить $i = n$

2.2.4 Определение скоростей и ускорений

Рассмотрим уравнения кинематической связи (??), будем считать что геометрические параметры $\boldsymbol{\psi}_\kappa$ не изменяются во времени (в рамках допущений об абсолютной жесткости) дифференцирование данного уравнения по времени есть вектор скорости:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{F}_\kappa(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_\kappa)}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\frac{\partial \mathcal{F}_\kappa(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_\kappa)}{\partial \boldsymbol{\psi}_\kappa} \dot{\boldsymbol{\psi}}_\kappa}_0 = \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.12)$$

Здесь вектор $\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{v} \ \boldsymbol{\omega}]^T \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ - вектор угловой и линейной скорости выбранной характеристической точки \mathbf{x} , $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ - вектор обобщенных скоростей, $\mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathcal{F}_\kappa(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}_\kappa)}{\partial \mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$ - матрица Якоби вычисленная для точки \mathbf{x} . Матрицей Якоби для векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ векторного аргумента \mathbf{x} называют матрицу с элементами: $\mathbf{J}_\mathbf{f}(\mathbf{x})_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$

Разложение матрицы Якоби по столбцам дает следующее выражение для линейных и угловых скоростей точки \mathbf{c} принадлежащей i -й ЛСК относительно БСК:

$$\dot{\mathbf{c}}_0^i = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^i \\ \boldsymbol{\omega}_0^i \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^i \mathbf{J}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q})_{:j} \dot{q}_j \quad (2.13)$$

Где $\mathbf{v}_0^i, \boldsymbol{\omega}_0^i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ - вектора абсолютной (относительно БСК) линейной и угловой скорости, $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q})_{:j} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ это j -й столбец матрицы Якоби соответствующий точке \mathbf{c} принадлежащей i -у звену с координатами заданными в БСК радиус вектором \mathbf{r}_0^c .

С другой стороны, используя известное соотношение связывающее скорость точки принадлежащей произвольно движущейся ЛСК со скоростью этой же точки относительно БСК (формула Эйлера) можем записать:

$$\mathbf{v}_0^i = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i^c \quad (2.14)$$

Где $\mathbf{v}_0^i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ - линейная скорость точки \mathbf{c} принадлежащей i -й ЛСК относительно БСК, $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ - линейная скорость начала i -й ЛСК, $\boldsymbol{\omega}_i$ - угловая скорость i -й ЛСК относительно БСК, $\mathbf{r}_i^c \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ - вектор направленный из начала i -й ЛСК к точке \mathbf{c} .

В случае наличия только вращательных КП 5-го класса основываясь на формуле Эйлера несложно составить следующую формулу для скорости точки \mathbf{c} :

$$\mathbf{v}_0^i = \sum_{j=1}^i \boldsymbol{\omega}_{j-1}^j \times \mathbf{r}_{j-1}^c = \sum_{j=1}^i \hat{\mathbf{z}}_{j-1} \times (\mathbf{r}_0^c - \mathbf{r}_{j-1}) \dot{q}_j \quad (2.15)$$

Здесь $\mathbf{r}_{j-1}^c \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ - вектор направленный из начала $j-1$ -й ЛСК к точке \mathbf{c} , $\hat{\mathbf{z}}_{j-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ орт оси z для $j-1$ -й ЛСК, $\mathbf{r}_{j-1} \in \mathbb{R}^{3 \times 1}$ - вектор начала $j-1$ -й ЛСК, \dot{q}_j - обобщенная скорость в j -й СП.

Используя теорему о сложении угловых скоростей, при наличии только вращательных КП для угловой скорости i -й ЛСК можем записать:

$$\boldsymbol{\omega}_0^i = \sum_{j=1}^i \hat{\mathbf{z}}_{j-1} \dot{q}_j \quad (2.16)$$

Ясно, что обобщенные скорости соответствующие поступательным КП 5-го класса будут входить аддитивно в уравнение (??), в то же время влияния на угловые скорости (??) данная КП не будет оказывать, т.е комбинируя выражения (??), (??) и (??), можем записать i -й столбец матрицы Якоби в следующем виде:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q})_{:i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \times (\mathbf{r}_0^c - \mathbf{r}_{i-1}) \\ \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \end{bmatrix}, & i\text{-я КП - вращательная} \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{z}}_{i-1} \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, & i\text{-я КП - поступательная} \end{cases} \quad (2.17)$$

Необходимо учитывать то факт что, для разомкнутой КЦ в том случае если выбранная точка \mathbf{c} принадлежит j -у звену тогда $\mathbf{J}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q})_{:i} = \mathbf{0}_{6 \times 1}, \forall i > j$.

После того как матрица Якоби составлена, как отмечалось ранее скорость точки \mathbf{c} принадлежащей i -й ЛСК может быть вычислена следующим образом:

$$\dot{\mathbf{c}}_0^i \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0^i \\ \boldsymbol{\omega}_0^i \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.18)$$

Дифференцируя предыдущие выражение по времени, получим ускорение точки:

$$\ddot{\mathbf{c}}_0^i \triangleq \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}_0^i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_0^i \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0^i \\ \boldsymbol{\epsilon}_0^i \end{bmatrix} = \mathbf{J}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.19)$$

Уравнения (??) и (??) позволяют свести задачу о нахождении скоростей произвольной точки \mathbf{c} принадлежащей произвольному звену к простым алгебраическим операциям. Для расчета по этим формулам в первую очередь нам необходимо определить матрицу Якоби. Для этого сформируем матрицы

преобразования однородных координат из БСК в соответствующие ЛСК: \mathbf{A}_i^0 . Затем, выделим из них вектора ортов $\hat{\mathbf{z}}_{i-1}$ и вектора положения $\mathbf{r}_{i-1}^0 = \mathbf{p}_{i-1}^0$:

Решив ПЗК для точки \mathbf{c} используя уравнение (??): $\mathbf{r}_0^c = \mathbf{A}_0^i \mathbf{r}_i^c$, подставим полученные вектора для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ в выражение (??) после чего процедура расчета матрицы Якоби считается выполненной.

Имея в распоряжении матрицу Якоби и ее производную не сложно рассчитать линейные и угловые скорости и ускорения по формулам (??) и (??).

Отметим так же важный в дальнейшем факт о том что векторное произведение может быть представлено как следующее линейное преобразование [?, ?]:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{S}(\mathbf{a})\mathbf{b} \quad (2.20)$$

Где матрица $\mathbf{S}(\mathbf{a})$ кососимметричная матрица ($\mathbf{S}^T - \mathbf{S} = \mathbf{0}$) следующего вида:

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Во многих случаях использование матрицы Якоби для вычисления скоростей с помощью процедуры описанной выше не совсем удобно так как предполагает решение ПЗК для центра каждого из сочленений и характеристической точки, более того для решения задачи об нахождении ускорений в данном виде необходимо дифференцировать найденную матрицу Якоби. Решение этой проблемы может быть получено используя подход предложенный в работах [?, ?, ?], в них вывод линейных и угловых скоростей и ускорений основывается на свойствах матриц преобразования однородных координат. Опишем кратко данный метод.

Найдем скорость точки i -го звена как производную от положения, которое представим с помощью матриц преобразования однородных координат (т.е решим ПЗК для данной точки).

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{v}}_0^i \triangleq \dot{\bar{\mathbf{r}}}_0^i &= \dot{\mathbf{A}}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \dots \mathbf{A}_{i-1}^i \bar{\mathbf{r}}_i^i + \mathbf{A}_0^1 \dot{\mathbf{A}}_1^2 \dots \mathbf{A}_{i-1}^i \bar{\mathbf{r}}_i^i + \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \dots \dot{\mathbf{A}}_{i-1}^i \bar{\mathbf{r}}_i^i + \\ &+ \underbrace{\mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \dots \mathbf{A}_{i-1}^i}_{\mathbf{0}} \dot{\bar{\mathbf{r}}}_i^i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial \mathbf{A}_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \bar{\mathbf{r}}_i^i \end{aligned} \quad (2.22)$$

Введем в рассмотрение матрицы частных производных от \mathbf{A}_0^i по q_j . В [?, ?, ?] показано что, данные матрицы могут быть найдены с помощью следующего линейного преобразования:

$$\mathbf{U}_{ij} \triangleq \frac{\partial \mathbf{A}_0^i}{\partial q_j} = \begin{cases} \mathbf{A}_0^{j-1} \mathbf{D}_j \mathbf{A}_{j-1}^i, & j \leq i \\ \mathbf{0}_{4 \times 4}, & j > i \end{cases} \quad (2.23)$$

Где вспомогательные матрицы \mathbf{D} задаются следующим образом:

$$\mathbf{D}_i = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i\text{-я КП - вращательная} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & i\text{-я КП - поступательная} \end{cases} \quad (2.24)$$

Подставляя выражение (??) в (??) получим выражение для вычисления линейной скорости:

$$\bar{\mathbf{v}}_0^i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial \mathbf{A}_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \mathbf{r}_i^i = \sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij} \bar{\mathbf{r}}_i^i \dot{q}_j \quad (2.25)$$

Линейное ускорение найдем как производную от скорости по времени:

$$\bar{\mathbf{a}}_0^i \triangleq \dot{\bar{\mathbf{v}}}_0^i = \sum_{j=1}^i \dot{\mathbf{U}}_{ij} \bar{\mathbf{r}}_i^i \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij} \bar{\mathbf{r}}_i^i \ddot{q}_j = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} \bar{\mathbf{r}}_i^i \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij} \bar{\mathbf{r}}_i^i \ddot{q}_j \quad (2.26)$$

Введем матрицу частных производных от \mathbf{U}_{ij} по q_k :

$$\mathbf{U}_{ijk} \triangleq \frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}_0^i}{\partial q_j \partial q_k} = \begin{cases} \mathbf{A}_0^{j-1} \mathbf{D}_j \mathbf{A}_{j-1}^{k-1} \mathbf{D}_k \mathbf{A}_{k-1}^i, & i \geq k \geq j \\ \mathbf{A}_0^{k-1} \mathbf{D}_k \mathbf{A}_{k-1}^{j-1} \mathbf{D}_j \mathbf{A}_{j-1}^i, & i \geq j \geq k \\ \mathbf{0}_{4 \times 4}, & i < j \vee i < k \end{cases} \quad (2.27)$$

Тогда выражение для линейного ускорения запишется в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{a}}_0^i \triangleq \dot{\bar{\mathbf{v}}}_0^i = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \mathbf{U}_{ijk} \bar{\mathbf{r}}_i^i \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i \mathbf{U}_{ij} \bar{\mathbf{r}}_i^i \ddot{q}_j \quad (2.28)$$

Угловые скорости могут быть найдены с помощью обобщения уравнения (??) следующим образом:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}}_0^i = \sum_{j=1}^i \mathbf{A}_0^{j-1} \bar{\mathbf{e}}_3 \rho_j \dot{q}_j \quad (2.29)$$

Где вектор $\bar{\mathbf{e}}_3 = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$ - орт оси $\hat{\mathbf{z}}_i$ собственной ЛСК выраженный в однородных координатах, $\rho_j = 0$ - для поступательной i -й КП и $\rho_i = 1$ если i -я КП - вращательная.

Дифференцируя выражение выше по времени получим следующую формулу для угловой скорости:

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_0^i \triangleq \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}_0^i = \sum_{j=1}^i \mathbf{A}_0^{j-1} \bar{\mathbf{e}}_3 \rho_j \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \mathbf{U}_{(j-1)k} \bar{\mathbf{e}}_3 \rho_j \dot{q}_k \dot{q}_j \quad (2.30)$$

Уравнения выше дают общий подход к решению прямой задачи о скоростях и ускорениях основанный только на матрицах преобразования обобщенных координат и координатах выбранной точки в своей ЛСК. Более того сравнивая уравнения, нетрудно заметить, что i -й столбец матрицы Якоби может быть вычислен с помощью матриц \mathbf{U} следующим образом:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q})_{:i} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{U}_{ji}\bar{\mathbf{r}}_j^j \\ \mathbf{C}\mathbf{A}_0^{i-1}\bar{\mathbf{e}}_3\rho_i \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Здесь $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ - матрица преобразования однородных координат 4×1 в декартовы 3×1 (выбор первых трех элементов вектора): $\mathbf{C} = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0}_{3 \times 1}]$

После анализа выражений (??), (??) становится очевидно что, i -й столбец производной от матрицы Якоби по времени, так же может быть вычислен с помощью матриц \mathbf{U} используя следующее выражение:

$$\dot{\mathbf{J}}_{\mathbf{r}_0^c}(\mathbf{q})_{:i} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \sum_{k=1}^j \mathbf{U}_{jik} \bar{\mathbf{r}}_j^j \dot{q}_k \\ \mathbf{C} \sum_{k=1}^j \mathbf{U}_{(i-1)k} \bar{\mathbf{e}}_3 \rho_i \dot{q}_k \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Того же результата можно добиться проведя следующие замены в уравнении (??): $\hat{\mathbf{z}}_{i-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}_0^{i-1}\bar{\mathbf{e}}_3$, $\mathbf{r}_0^c = \mathbf{C}\mathbf{A}_0^{i-1}\mathbf{A}_{i-1}^j\bar{\mathbf{r}}_j^c$, $\mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{C}\mathbf{A}_0^{i-1}\bar{\mathbf{e}}_4$ и дифференцируя полученное выражение по времени с помощью матриц (??),(??)

2.2.5 Обратные задачи кинематики

Обратной задачей кинематики (ОЗК) называют задачу определения обобщенных координат в СП по заданным координатам концевой точки РО и его ориентации.

Для решения ОЗК пользуются следующими методами:

- Геометрический метод
- Численный метод
- Аналитический метод

Выбор метода диктуется условиями задачи. Основными критерием для выбора метода является: количество и тип СП в составе манипуляционного механизма, количество вычислений, необходимых для решения ОЗК и их сложность. Наиболее сложными с точки зрения решения ОЗК являются механизмы с разомкнутой кинематической структурой, шестью и более вращательными СП. Следует понимать, что решение ОЗК в большинстве случаев неоднозначно, т.е. одному и тому же положению, и ориентации РО манипулятора соответствуют разные наборы возможных обобщенных координат. Избавиться от неоднозначности решения можно путем ввода ограничений

на обобщенные координаты, что в основном осуществляется путем предварительного выбора некоторой допустимой конфигурации манипуляционного механизма.

В данной работе будет рассмотрен численный метод решения ОЗК, основывающийся на следующих соображениях: пусть в данный момент манипулятор находится в некоторой конфигурации соответствующей вектору позы \mathbf{x}^* и заданной вектором обобщенных координат \mathbf{q}^* . Разложим вектор позы \mathbf{x} в ряд Тейлора в близкой окрестности точки \mathbf{q}^* и отбросим члены соответствующие производным выше первого порядка и подразумевая постоянство вектора параметров ψ_κ :

$$\mathbf{x} \approx \mathcal{F}_\kappa(\mathbf{q}^*, \psi_\kappa) + \frac{\partial \mathcal{F}_\kappa(\mathbf{q}^*, \psi_\kappa)}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q} - \mathbf{q}^*) = \mathbf{x}^* + \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q}^*)\delta\mathbf{q} \quad (2.33)$$

Тогда для малых приращений вектора позы $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ можем записать следующее:

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q}^*)\delta\mathbf{q} \quad (2.34)$$

Итеративно решая данную систему линейных уравнений относительно $\delta\mathbf{q}$ при значениях $\mathbf{q}^* = \mathbf{q}$ получим необходимые приращения вектора обобщенных координат, т.е. решим ОЗК для приращений:

$$\delta\mathbf{q} = \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})^{-1}\delta\mathbf{x} \quad (2.35)$$

Стоит отметить что в таком виде задача решается только для невырожденной квадратной матрицы Якоби $\mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q}^*) \in \{\mathbb{R}^{n \times n} : \text{rank } \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q}^*) = n\}$.

В том случае если матрица не квадратная или имеет не полный ранг решение системы (??) ищут как вектор доставляющий минимум функции невязки:

$$\delta\mathbf{q}^* = \arg \min_{\delta\mathbf{q}} \frac{1}{2} \|\delta\mathbf{x} - \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})\delta\mathbf{q}\|_2^2 \quad (2.36)$$

Известно что если на решение $\delta\mathbf{q}$ не наложены ограничения то задача имеет следующую точку минимума:

$$\delta\mathbf{q}^* = (\mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})^T \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})^T \delta\mathbf{x} = \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})^+ \delta\mathbf{x} \quad (2.37)$$

Здесь $(\cdot)^+$ - оператор псевдо-инверсии, например для матрицы \mathbf{A} оператор псевдоинверсии запишется как $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$

При наличии ограничений на обобщенные координаты $\{\mathbf{q} : \mathbf{q}_l \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_u\}$ решение в общем виде может и не совпадает с (??). Интересно отметить, что для приращений обобщенных координат задача может быть сформулирована как стандартная оптимизационная задача квадратичного программирования с ограничением в виде линейных неравенств. Задачу подобного рода мы рассмотрим в конце данной работы в разделе посвященному идентификации.

Другим оптимизационным подходом решения ОЗК с учетом ограничений на обобщенные координаты может быть сведение задачи к форме нелинейного программирования:

$$\begin{aligned} \text{минимизировать:} \quad & \| \mathbf{x} - \mathcal{F}_\kappa(\mathbf{q}, \psi_\kappa) \|_2^2 \\ \text{с условием:} \quad & \mathbf{q}_l \leq \mathbf{q} \leq \mathbf{q}_u \end{aligned} \quad (2.38)$$

Решение задачи (??) позволяет найти значения обобщенных координат не принадлежащее малой окрестности начальной точки \mathbf{q}^* . Методы решения задач нелинейного программирования подробно описаны в литературе по теории оптимизации [?, ?]. Отметим что, применение численного метода хотя и обладает существенным преимуществом в виде простоты формулировки задачи и общности подхода, с точки зрения вычислений менее требовательными является методы базирующиеся на выражении вектора обобщенных координат как нелинейной функции вектора позы (аналитический и геометрический). Для манипуляторов с шестью СП и последними тремя осями пересекающихся в одной точке существуют общие подходы к решению ОЗК о положении в аналитическом виде [?, ?, ?], однако для более общих случаев такие методы не разработаны в этом случае рекомендуется использовать оптимизационный подход описанный выше.

Как было отмечено ранее, в общем виде под решением ОЗК понимают не только нахождение обобщенных координат по заданному закону изменения положения и ориентации РО, но и необходимых скоростей и ускорений в СП способных обеспечить заданное движение РО. В данном виде решение задачи существенно проще, т.к. при заданном законе изменения обобщенных координат скорости и ускорения в СП и РО линейно зависят друг от друга. Тогда для решения ОЗК о скоростях достаточно решить следующую систему линейных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.39)$$

В случае ускорений необходимо решить система имеет следующий вид:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_\mathbf{x}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (2.40)$$

Для обратимой квадратной матрицы Якоби и отсутствии ограничений на скорости и ускорения в СП решение найдем стандартным образом, т.е для скоростей:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})^{-1}\dot{\mathbf{x}} \quad (2.41)$$

Для ускорений:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\mathbf{x}(\mathbf{q})^{-1}(\dot{\mathbf{J}}_\mathbf{x}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{x}}) \quad (2.42)$$

При неквадратной либо вырожденной матрице Якоби рекомендуется использовать оператор псевдоинверсии.

2.3 Динамическая модель манипулятора

2.3.1 Метод Лагранжа-Эйлера

Метод Лагранжа — Эйлера позволяет найти экстремали гладких функционалов следующего вида [?]:

$$J = \int_a^b F(x, f(x), f'(x)) dx. \quad (2.43)$$

В соответствии с этим методом экстремаль f доставляющая минимум функционалу выше должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} - \frac{\partial F}{\partial f} = 0 \quad (2.44)$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа получено Эйлером и Лагранжем при решении задачи об определении кривой соответствующей движению тяжёлой частицы при попадании в фиксированную точку за заданное время, независимо от выбранной начальной точки. Решение Лагранжем этой задачи и развитый им в последствии метод и применение его в механике привело к формулировке лагранжевой механики. Эйлер же в результате работы с Лагранжем стал основоположником вариационного исчисления (термин был введен им же). Уравнения Эйлера-Лагранжа могут быть рассмотрены как обобщение леммы Ферма (о равенстве нулю производной) на случай гладких функционалов.

В механике уравнения Лагранжа-Эйлера используются для нахождения движения систем с голономными связями состояние которых описывается вектором независимых обобщенных координат \mathbf{q} и скоростей $\dot{\mathbf{q}}$. Для таких систем выполняется принцип наименьшего действия (Гамильтона-Остроградского [?]) т.е. выбирая специальную функцию (Лагранжиан) равную разнице кинетической и потенциальной энергии системы $\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \triangleq E_K - E_{\Pi}$, можно показать что функционал (действие):

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (2.45)$$

Принимает минимальное значение на истинной траектории $\mathbf{q}(t)$. Но тогда эта траектория должна удовлетворять дифференциальному уравнению Эйлера-Лагранжа (??):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.46)$$

При наличии не потенциальных активных сил \mathbf{Q}_i соответствующих обобщенным координатам \mathbf{q}_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}_i} = \mathbf{Q}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.47)$$

Несмотря на то что выражение выше есть частный случай экстремали найденной с помощи уравнений Эйлера-Лагранжа (??), достаточно часто в литературе данные уравнения носят название уравнений Лагранжа второго рода, в таком виде они в отличии от уравнений Эйлера-Лагранжа (??) применяются к физическим системам для которых выполняется принцип Гамильтона-Остроградского. Стоит так же отметить что, вывод уравнений Лагранжа второго рода обычно производят исходя из общего уравнения динамики (принцип Даламбера) без прямого применения оптимизационной схемы по методу Эйлера-Лагранжа.

2.3.2 Кинетическая энергия манипулятора

Рассмотрим n -звенный манипулятор как систему n -твердых тел, кинетическая энергия системы твердых тел может быть найдена как сумма кинетической энергии движения каждого из тел:

$$E_K = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i^T \mathbf{J}_i \boldsymbol{\omega}_i \quad (2.48)$$

Подставляя выражения для линейных и угловых скоростей получим следующую формулу для кинетической энергии манипулятора [?, ?] :

$$E_K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr}[\mathbf{U}_{ij} \boldsymbol{\mathcal{J}}_i \mathbf{U}_{ik}^T] \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (2.49)$$

Здесь $\boldsymbol{\mathcal{J}}_i$ обобщенная матрица инерции заполняемая элементами следующим образом:

$$\boldsymbol{\mathcal{J}}_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-J_{xx_i} + J_{yy_i} + J_{zz_i}) & J_{xy_i} & J_{xz_i} & m_i x_{c_i} \\ J_{xy_i} & \frac{1}{2}(J_{xx_i} - J_{yy_i} + J_{zz_i}) & J_{yz_i} & m_i y_{c_i} \\ J_{xz_i} & J_{yz_i} & \frac{1}{2}(J_{xx_i} + J_{yy_i} - J_{zz_i}) & m_i z_{c_i} \\ m_i x_{c_i} & m_i y_{c_i} & m_i z_{c_i} & m_i \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Где $J_{kl_i}, m_i, x_{c_i}, y_{c_i}, z_{c_i}$ соответственно элементы тензора инерции, масса и координаты центра масс i -го звена записанные в i -й ЛСК. В дальнейшем, для краткости, введем в рассмотрение псевдо-тензор инерции \mathbf{J}_i^* и однородный

вектор координат центра масс $\mathbf{r}_{c_i} = [x_{c_i} \ y_{c_i} \ z_{c_i} \ 1]^T$, тогда матрицу выше представим в компактном блочном виде:

$$\mathcal{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_i^* & m_i \mathbf{r}_{c_i} \\ m_i \mathbf{r}_{c_i}^T & m_i \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

Анализируя выражения (??) и (??) не трудно заключить что кинетическая энергия линейна к параметрам т.к. элементы матрицы \mathcal{J}_i не зависят от $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ и (??) содержит только линейные операции.

Для дальнейших рассуждений полезно будет представить кинетическую энергию в форме линейной к параметрам в данном разделе вывод такой формы проведем, используя следующее свойства следа:

$$\text{Tr}[\mathbf{U}_{ij} \mathcal{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T] = \text{Tr}[\mathbf{U}_{ik}^T \mathbf{U}_{ij} \mathcal{J}_i]$$

Сформулируем выражение выше используя оператор векторизации [?]:

$$\text{Tr}[\mathbf{U}_{ik}^T \mathbf{U}_{ij} \mathcal{J}_i] = \text{vec}(\mathbf{U}_{ij}^T \mathbf{U}_{ik})^T \text{vec}(\mathcal{J}_i)$$

Так как 4×4 матрица \mathcal{J}_i является симметричной то только 10 из 16 элементов вектора $\text{vec}(\mathcal{J}_i)$ являются уникальными, в этом случае вместо оператора векторизации выгоднее рассмотреть оператор полу-векторизации [?], применив его к обобщенной матрице инерции. Как показано в [?] для любой диагональной матрицы \mathbf{A} размера $n \times n$ существует единственное линейное преобразование $\mathbf{D}_n \text{vech}(\mathbf{A}) = \text{vec}(\mathbf{A})$, в частном случае 4×4 матрицы \mathcal{J}_i оператор векторизации может быть получен из оператора полу-векторизации следующим образом:

$$\text{vec}(\mathcal{J}_i) = \mathbf{D}_4 \text{vech}(\mathcal{J}_i)$$

Где 16×10 матрица \mathbf{D} (матрица дублирования) заполняемая следующим образом:

$$\mathbf{D}_4 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_8, \mathbf{e}_9, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_9, \mathbf{e}_{10}]^T$$

Здесь, \mathbf{e}_i - единичный вектор-столбец 10×1 с i -м элементом равным единице и остальными элементами равными нулю.

На данном этапе мы преобразовали след $\text{Tr}[\mathbf{U}_{ij} \mathcal{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T]$ к линейной функции уникальных элементов матрицы \mathcal{J}_i , введем теперь вектор параметров следующего вида:

$$\boldsymbol{\psi}_i = [m_i r_{x_i}^c, m_i r_{y_i}^c, m_i r_{z_i}^c, m_i, J_{xx_i}^*, J_{yy_i}^*, J_{zz_i}^*, J_{xy_i}, J_{xz_i}, J_{yz_i}]^T$$

Нетрудно убедиться (прямой подстановкой), что линейное преобразование связывающее $\boldsymbol{\psi}_i$ и $\text{vech}(\mathcal{J}_i)$ может быть записано как $\text{vech}(\mathcal{J}_i) = \mathbf{D}_\psi \boldsymbol{\psi}_i$, где 10×10 матрица \mathbf{D}_ψ заполняется следующим образом:

$$\mathbf{D}_\psi = [\mathbf{e}_{10}, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_7, \mathbf{e}_9, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_8, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_6]^T$$

Что соответствует простой перестановке порядка следования элементов. При желании можно так же преобразовать элементы псевдотензоров инерции к истинным. Однако для дальнейших рассуждений это не имеет практического смысла. Введем в рассмотрение следующую функцию, $\phi_{K_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

$$\phi_{K_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{vec}(\mathbf{U}_{ij}^T \mathbf{U}_{ik})^T \mathbf{D}_4 \mathbf{D}_\psi \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Тогда кинетическая энергия запишется в следующем виде:

$$E_K = \sum_{i=1}^n \phi_{K_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \psi_i \quad (2.52)$$

Перейдем к вычислению потенциальной энергии.

2.3.3 Потенциальная энергия манипулятора

При наличии постоянного гравитационного поля и пренебрежении упругостью сочленений и звеньев потенциальная энергия манипулятора может быть найдена следующим образом:

$$E_\Pi = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \bar{\mathbf{r}}_0^c = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{A}_b^i \bar{\mathbf{r}}_i^c \quad (2.53)$$

Стоит отметить, что так как \mathbf{A}_b^i есть функция обобщенных координат то и потенциальная энергия E_Π зависит только от обобщенных координат и постоянных $m_i, \mathbf{g}, \bar{\mathbf{r}}_i^c$.

Перепишем потенциальную энергию в форме линейной к параметрам для этого введем в рассмотрение введем в рассмотрение функцию $\phi_{\Pi_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$:

$$\phi_{\Pi_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [\mathbf{g}^T \mathbf{A}_b^i \mid \mathbf{0}_{1 \times 6}] \quad (2.54)$$

Тогда потенциальная энергия запишется в следующем виде:

$$E_\Pi = \sum_{i=1}^n \phi_{\Pi_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \psi_i \quad (2.55)$$

2.3.4 Полная энергия манипулятора

Полной энергией механического движения \mathcal{H} (Гамильтониан) при наличии потенциального поля называется величина равная сумме потенциальной и кинетической энергии:

$$\mathcal{H} \triangleq E_K + E_\Pi \quad (2.56)$$

Нетрудно заметить что полная энергия манипулятора линейна к параметрам ψ_i т.к. кинетическая и потенциальная энергия соответственно линейны:

$$\mathcal{H} \triangleq E_K + E_{\Pi} = \sum_{i=1}^n (\phi_{K_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \phi_{\Pi_i}^T(\mathbf{q})) \psi_i = \sum_{i=1}^n \phi_{\mathcal{H}_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \psi_i \quad (2.57)$$

Используя теорему об изменении полной энергии для склерономной системы с потенциальной энергией явно независимой от времени [?] можем записать:

$$d\mathcal{H} = \boldsymbol{\tau}^T d\mathbf{q} = \boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}} dt = P dt \quad (2.58)$$

Где P - мгновенная механическая мощность. Интегрируя данное выражение на интервале от t_1 до t_2 получим:

$$\mathcal{H}_{t_2} - \mathcal{H}_{t_1} = \Delta\mathcal{H} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}} dt \quad (2.59)$$

В случае постоянства параметров ψ_i на области интегрирования $[t_1, t_2]$ используя (??) можем переписать выражение выше в следующей форме:

$$\Delta\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \left(\phi_{\mathcal{H}_i}(\mathbf{q}_{t_2}, \dot{\mathbf{q}}_{t_2}) - \phi_{\mathcal{H}_i}(\mathbf{q}_{t_1}, \dot{\mathbf{q}}_{t_1}) \right)^T \psi_i = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}} dt \quad (2.60)$$

2.3.5 Расчет динамических коэффициентов

Рассмотрим Лагранжиан склерономной системы определяемый как разность кинетической и потенциальной энергии:

$$\mathcal{L} \triangleq E_K - E_{\Pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Tr}[\mathbf{U}_{ij} \mathcal{J}_i \mathbf{U}_{ik}^T] \dot{q}_j \dot{q}_k - \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{A}_b^i \mathbf{r}_i^c \quad (2.61)$$

Подстановка данного Лагранжина в уравнение дает следующее выражение:

$$\mathbf{Q} = \mathcal{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{G}(\mathbf{q}) \quad (2.62)$$

Где \mathcal{D} положительно определенная симметричная матрица инерции, элементы которой рассчитываются следующим образом:

$$\mathcal{D}_{ik} = \sum_{j=\max\{i,k\}}^n \text{Tr}[\mathbf{U}_{jk} \mathcal{J}_j \mathbf{U}_{ji}^T] \quad (2.63)$$

Вектор \mathcal{C} , определяет так называемые гироскопические силы (кориолисовы и центробежные частный случай гироскопических сил), i -ый элемент

данного вектора является квадратичной формой обобщенных скоростей и рассчитывается следующим образом:

$$C_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j, \text{ где: } c_{ijk} = \sum_{h=\max\{i,j,k\}}^n \text{Tr}[U_{hjk} \mathcal{J}_h U_{hi}^T], \quad (2.64)$$

Вектор гравитационных сил рассчитывается как дифференциал потенциальной энергии следующим образом:

$$\mathcal{G}_i = - \sum_{j=i}^n \mathbf{g}^T U_{ji} m_j \mathbf{r}_j^c, \quad (2.65)$$

Вектор \mathbf{Q} - представляет собой так называемые обобщенные силы, в отсутствии внешних активных сил и выборе обобщенных координат как углов в степенях подвижности обобщенные силы представляют собой моменты на приводах $\boldsymbol{\tau}$. При наличии активных сил \mathbf{F} обобщенные силы могут быть найдены исходя из принципа возможных перемещений следующим образом (см приложение):

$$\mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^T \mathbf{f} \quad (2.66)$$

После подстановки в получим систему дифференциальных уравнений порядка $2n$ относительно обобщенных координат q :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^T \mathbf{f} \quad (2.67)$$

Часто в литературе посвященной управлению манипуляторами уравнение выше записывают в следующей форме:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{D}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^T \mathbf{f} \quad (2.68)$$

Где i -ый столбец матрицы $\mathcal{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ рассчитывается как:

$$\mathcal{C}_{:,i}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k \quad (2.69)$$

В таком виде уравнения движения обладают некоторыми интересными свойствами, которые будут рассмотрены несколько позднее.

Интересно отметить что, кинетическая энергия манипулятора может быть вычислена через матрицу инерции как [?, ?]:

$$E_K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.70)$$

2.3.6 Общие свойства уравнений движения манипулятора

Уравнения динамики (??) обладают некоторыми особыми свойствами которые могут быть полезны как в ходе симуляции движения манипулятора так и разработки алгоритмов управления и проверки их устойчивости. Перечислим эти свойства:

- Положительная определенность и ограниченность матрицы инерции, $d_l \mathbf{I}_n \leq \mathbf{D}(\mathbf{q}) \leq d_u \mathbf{I}_n, \forall \mathbf{q}$, и $0 \leq d_l \leq d_u$
- Кососимметричность $\dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \forall \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$.
- Линейность к параметрам $\mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\psi}$

Замечательным следствием положительной определенности матрицы инерции является ее обратимость, так как используя критерий Сильвестра [?] можем заключить что ее определитель $\det \mathbf{D}(\mathbf{q}) > 0$ т.е. данная матрица всегда обратима. Более того дано свойство выполняется для любой голономной системы, состоящей из n связанных твердых тел либо материальных точек, доказательство данного факта приведено в [?]

Свойство кососимметричной достаточно часто используется для разработки алгоритмов управления и проверки их устойчивости с помощью прямого метода Ляпунова, более подробно это рассмотрим в разделе посвященном управлению.

Последнее, но не по важности, свойство линейности к динамическим параметрам является прямым свойством линейности кинетической E_K и потенциальной E_Π , а соответственно полной энергии \mathcal{H} и Лагранжиана \mathcal{L} к параметрам $\boldsymbol{\psi}$ и может быть использовано для идентификации параметров, задач управления, проектирования оптимального механизма и планирования траекторий.

Наиболее широко свойство линейности, конечно же, применяется для оценки вектора параметров $\boldsymbol{\psi}$ так как задача идентификации параметров в данной форме представляет из себя хорошо изученную задачу линейной регрессии, для решения которой существует множество известных методов. Подробно данную проблему будем рассматривать в соответствующем разделе, сейчас же кратко опишем один из способов получения матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\psi}$

2.3.7 Модель линейная к параметрам

Как видно из уравнений (??), (??), (??) мы можем представить Лагранжиан системы в виде линейном к параметрам :

$$\mathcal{L} \triangleq E_K - E_\Pi = \sum_{i=1}^n (\phi_{K_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \phi_{\Pi_i}^T(\mathbf{q}))\psi_i \quad (2.71)$$

Где $\phi_{K_i}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\psi_i$ и $\phi_{\Pi_i}^T(\mathbf{q})\psi_i$ соответственно кинетическая и потенциальная энергии i -го звена.

Так как вектор параметров постоянен то подставляя вектор функции ϕ_{K_i}, ϕ_{Π_i} в уравнения Лагранжа-Эйлера получим уравнения движения манипулятора в следующем виде [?]:

$$\tau_i = \sum_{j=i}^n \mathbf{h}_{ij}^T \psi_j \quad (2.72)$$

Где \mathbf{h}_{ij}^T находятся через уравнения Лагранжа-Эйлера следующим образом:

$$\mathbf{h}_{ij}^T = \frac{d}{dt} \frac{\partial \phi_{K_i}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \phi_{K_i}}{\partial q_i} + \frac{\partial \phi_{\Pi_i}}{\partial q_i} \quad (2.73)$$

Для манипуляторов последовательной структуры кинетическая и потенциальная энергии любого звена не зависят от массо-инерционных характеристик предыдущих звеньев что позволяет нам записать уравнения движения (??) в следующей матрично-векторной форме:

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{11}^T & \mathbf{h}_{12}^T & \cdots & \mathbf{h}_{1n}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_{22}^T & \cdots & \mathbf{h}_{2n}^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{h}_{nn}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Или более кратко:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\psi} \quad (2.75)$$

В случае действия на рабочий орган активных сил \mathbf{f} воспользовавшись выражением (??) можем преобразовать линейную модель к следующему виду:

$$\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \mid -\mathbf{J}_x^T] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

В итоге можем заключить что нами определены все функции необходимые для определения матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$, более того данная матрица может быть найдена и в общем виде путем подстановки выражений для кинетической и потенциальной энергий (??), (??) в (??) и дифференцирования с использованием свойства матриц $\mathbf{A}_b^i, \mathbf{U}_{ij}, \mathbf{U}_{ijk}$

Отметим хотя и очевидный, но все же важный факт, что модель в матричной форме может быть получена из модели линейной к параметрам. Для расчета гравитационных усилий достаточно положить нулю все скорости и ускорения $\mathcal{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\boldsymbol{\psi}$, для расчета динамических составляющих положим вектор ускорения свободного падения равным нулю $\mathbf{g} = \mathbf{0}$. Тогда i -ый столбец матрицы инерции и вектор кориолисовых сил рассчитаем как: $\mathcal{D}_{:i}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \mathbf{0}, \mathbf{e}_i)\boldsymbol{\psi}$, $\mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{0})\boldsymbol{\psi}$, где \mathbf{e}_i - имеет тот же смысл что и прежде - единичного вектора с i -й компонентой равной единице и размерностью равной размерности вектора обобщенных координат.

2.3.8 Учет динамики привода и упругости сочленений

Уравнение (??) описывает динамику манипуляционного механизма без учета влияния динамики привода, однако инерция движущихся частей привода может оказывать существенное влияние на необходимые силы в СП. Например, в случае привода на базе замкнутого по току ДПТ с ПИ регулятором математическая модель исполнительного механизма описывается следующей системой нелинейных уравнений порядка $3n$:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) + \mathcal{G}(q) - J_x(q)^T f = \tau \\ K_r^2 J_m \ddot{q} = K_r K_m I - \tau \\ L\dot{I} = V - RI - K_r^{-1} K_\epsilon \dot{q} \\ V = R(K_{P_c}(I_d - I) + K_{I_c} \int (I_d - I) dt) \\ I_d = K_r^{-1} K_m^{-1} U \end{cases}$$

Где $K_r \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - диагональная матрица передаточных отношений преобразователей движения, $J_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - диагональная матрица моментов инерции роторов двигателей, $R, L, K_\epsilon, K_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - диагональные матрицы сопротивлений, индуктивности обмотки двигателей, коэффициента ЭДС, и коэффициента момента. $V, I, U \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ - вектора токов, напряжений на двигателе и сигнал управления несущий информацию о желаемом моменте, $K_{P_c}, K_{I_c} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - диагональные матрицы коэффициентов пропорциональной и интегральной, составляющей регулятора тока, Складывая первое и второе уравнение системы получим:

$$\begin{cases} \mathcal{M}(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) + \mathcal{G}(q) - J(q)_q^T f = K_r K_m I \\ L\dot{I} = V - IR - K_r^{-1} K_\epsilon \dot{q} \\ V = R(K_{P_c}(I_d - I) + K_{I_c} \int (I_d - I) dt) \\ I_d = K_r^{-1} K_m^{-1} U \end{cases} \quad (2.77)$$

Здесь матрица $\mathcal{M}(q) = \mathcal{D}(q) + K_r^2 J_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - матрица инерции учитывающая моменты инерции роторов двигателей.

В случае настройки контура тока на технический оптимум поведение замкнутой системы обычно аппроксимируют уравнениями первого или второго порядка:

$$\begin{aligned} I &= K_r^{-1} K_m^{-1} (\Omega_{cc}^{-1} \dot{U} + U) \\ I &= K_r^{-1} K_m^{-1} (\frac{1}{2} \Omega_{cc}^{-1} \ddot{U} + \frac{\sqrt{2}}{2} \Omega_{cc}^{-1} \dot{U} + U) \end{aligned} \quad (2.78)$$

Иногда, основываясь на том что процессы в контуре регулирования тока протекают гораздо быстрее процессов в механической части, связь между током и сигналом управления считают статической: $I = K_r^{-1} K_m^{-1} U$ [?].

В данной работе при моделировании управляемого движения будем использовать модель первого порядка (первое уравнение в). Тогда полную модель системы запишем как следующую:

$$\mathcal{M}(q)\ddot{q} + \mathcal{C}(q, \dot{q}) + \mathcal{G}(q) - J_q^T f = \Omega_{cc}^{-1} \dot{U} + U \quad (2.79)$$

Во всех предыдущих моделях мы учитывали лишь динамику абсолютно жестких тел, соединенных идеальными недеформируемыми преобразователями движения, в реальности эти допущения работают не всегда. Так как манипуляционный механизм представляет собой разомкнутую КЦ деформации сочленениях и звеньях накапливаются от БСК до РО и могут существенно влиять на точность позиционирования. Учесть упругость сочленений в модели относительно просто.

Добавим в потенциальную энергию член описывающий энергию упругих деформаций преобразователей движения СП:

$$E_{\Pi} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_0^c + \delta \mathbf{q}^T \mathbf{K} \delta \mathbf{q} \quad (2.80)$$

Где $\delta \mathbf{q} = (\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_m) = (\mathbf{q}_r - \mathbf{K}_r^{-1} \boldsymbol{\theta})$ - вектор деформаций приведенных к выходу преобразователей движения.

Кинетическая энергия манипуляционного механизма и вращающихся роторов двигателей:

$$E_K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_r^T \mathcal{D}(\mathbf{q}_r) \dot{\mathbf{q}}_r + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_m^T \mathbf{J}_m \dot{\mathbf{q}}_m \quad (2.81)$$

Подставляя выражение (??) в уравнение Лагранжа второго рода и используя аппроксимацию модели динамики привода, получим следующую систему относительно переменных $\mathbf{q}_r, \boldsymbol{\theta}$ с общим порядком $4n$:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(\mathbf{q}_r) \ddot{\mathbf{q}}_r + \mathcal{C}(\mathbf{q}_r, \dot{\mathbf{q}}_r) + \mathcal{G}(\mathbf{q}_r) - \mathbf{J}(\mathbf{q}_r)_q^T \mathbf{f} + \mathbf{K}(\mathbf{q}_r - \mathbf{K}_r^{-1} \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_m \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{K}_m \mathbf{I} + \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{q}_r - \mathbf{K}_r^{-1} \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{I} = \mathbf{K}_r^{-1} \mathbf{K}_m^{-1} (\boldsymbol{\Omega}_{cc}^{-1} \dot{\mathbf{U}} + \mathbf{U}) \end{cases} \quad (2.82)$$

Необходимо понимать, что полученные уравнения учитывают лишь упругость преобразователей движения, как отмечалось ранее при учете упругости звеньев порядок дифференциальных уравнений, описывающих движение существенно возрастает. Вывод моделей учитывающих упругость звеньев кратко описан в [?] там же приведена обширная библиография с работами, посвященными данному вопросу. В ходе данной работы такие модели рассмотрены не будут.

2.3.9 Моделирование сил трения

Способность контактирующих поверхностей звеньев сопротивляться их относительному движению называется трением. Трение обусловлено шероховатостью контактирующих поверхностей и силами межмолекулярного сцепления. Трение в КП характеризуется силами трения и моментами сил трения. Силы трения относятся к числу диссипативных сил [?], т.е. сил при действии

которых на механизм его полная механическая энергия убывает, переходя в другие виды (например тепловую). Как было сказано в начале этого раздела силы трения могут оказывать достаточно сильное влияние на динамику механизма. Силы трения могут оказывать достаточно сильное влияние на динамику механизма. Различают следующие виды трения [?]:

- Трение покоя – препятствует возникновению относительного движения двух тел (элементов КП).
- Трение скольжения – препятствует относительному движению двух тел (элементов КП).
- Трение качения – препятствует качению одного тела по поверхности другого (возникает в высших КП).
- Трение верчения – препятствует верчению (вращению вокруг общей нормали к поверхности контакта) одного тела относительно другого.

По характеру фрикционного взаимодействия в КП трение так же можно разделить на следующие виды:

- Сухое – возникает, когда между соприкасающимися телами отсутствует жидкостная или газообразная прослойка (смазка). Характеризуется большим значением силы трения покоя.
- Жидкостное (вязкое) - возникает при относительном движении тел, разделённых слоем жидкости или газа различной толщины.
- Смешанное – возникает при относительном движении тел поверхность контакта между которыми содержит участки как жидкостного, так и сухого трения.

Как было отмечено ранее основными КП, использующиеся в манипуляционных механизмах, являются низшие КП 5-ого класса. Поэтому в ходе данной работы рассмотрим моделирование сил сухого трения и жидкостного трения именно в таких КП.

Пусть два соприкасающихся тела находятся в состоянии относительного покоя. Приложим к одному из тел внешнюю силу F_e . Возникнет сила трения покоя F_{se} направленная противоположно внешней силе и препятствующая возникновению относительного движения тел: $F_e = -F_{st}$. Значение силы трения покоя исходя из простейшего закона Амонтона-Кулона [?, ?]:

$$|F_{se}| = \mu_{se} |N| \quad (2.83)$$

Где μ_{se} - коэффициент трения покоя, N - нормальная реакция опоры.

Если $|F_{se}| = \mu_{se} |N|$ то тела начнут совершать относительное движение при этом возникнет сила трения скольжения F_{sm} препятствующая относительному движению тел и направленная противоположно скорости v этого движения, тогда равнодействующая приложенных сил:

$$F = F_e - |F_{sm}| \operatorname{sign} v \quad (2.84)$$

Согласно тому-же закону Амонтона-Кулона $|F_{sm}| = \mu_{sm} |N|$, где μ_{sm}

Формулы выше подходят для моделирования сухого трения, возникающего в поступательной КП 5-го класса с учетом независимости сил трения скольжения от скорости относительного движения v (закон Кулона-Амонтона). В действительности же трение нелинейно зависит от относительной скорости движения, температуры, конструкции фрикционного сочленения [?].

Для моделирования моментов трения возникающих во вращательных КП 5-го класса в простейшем случае [?] силы F, F_e, F_{se}, F_{sm} заменяют моментами $\tau, \tau_e, \tau_{se}, \tau_{sm}$, в качестве коэффициентов трения μ_{sm}, μ_{se} выступают радиус круга трения $\rho_{se} \approx r\mu_{se}$ и $\rho_{sm} \approx r\mu_{sm}$, r – радиус цилиндрической поверхности вращающегося элемента КП.

Рассмотрим моделирование сил вязкого трения. Как было сказано выше при вязком трении поверхности тел полностью разделены слоем смазки. Тогда трение между поверхностями тел полностью определяется внутренним трением смазки, в этом случае для определения силы трения можно воспользоваться формулой Ньютона [?]:

$$F_{vf} = S\mu_v \nabla_x v \quad (2.85)$$

Где μ_v - гидродинамическая вязкость смазки, $\nabla_x v$ – градиент скорости по толщине смазки, S – площадь поверхности смазки, v – скорость относительного движения поверхностей тел.

При обеспечении одинаковой толщины смазочного материала h формулу (??) представляют в упрощенном виде:

$$F_{vf} = S\mu_v \frac{v}{h} = bv \quad (2.86)$$

Где $b = \frac{S\mu_v}{h}$ - постоянный коэффициент вязкого трения.

Отметим так же, что формулы являются достаточно грубым упрощением, однако для многих инженерных расчетов применения этих формул вполне достаточно. В настоящее время вопросы изучения сил трения чрезвычайно актуальны. Исследованию всевозможных проявлений трения посвящен целый раздел физики, носящий название – трибология.

Практическое применения формул в задачах идентификации и управления затруднено тем что измерение сигнала скорости обычно производится косвенно, с помощью дифференцирования сигнала положения. Следовательно, полученная оценка скорости становится зашумленной, а значит применение

ние формул невозможно по причине частого переключения значений функции $\text{sign } v$. Наиболее просто обойти данное затруднение можно вводя вспомогательную функцию $\varphi(x, \delta)$ определяющую малость аргумента x :

$$\varphi(x, \delta) = \begin{cases} 1, & |v| \leq \delta \\ 0, & |v| > \delta \end{cases} \quad (2.87)$$

Где δ определяет область малости скорости, к примеру, если шум измерения скорости имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией σ_v рекомендуется выбирать $\delta = 2\sigma_v$.

Используя введенную функцию можем записать следующее выражение для модели смешанного трения:

$$F_f = \phi(v, 2\sigma_v) |F_{se}| \text{sign } v + (1 - \phi(v, 2\sigma_v)) |F_{sm}| \text{sign } v + bv \quad (2.88)$$

Объединим полученную упрощенную модель трения с моделью динамики манипуляционного механизма. Полученную полную модель можем записать в следующем виде:

$$\tau = \mathbf{H}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \psi_f \quad (2.89)$$

Где матрица $\mathbf{H}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 14n}$ - полный регрессор:

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = [\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \mid \mathbf{J}_q^T \mid \phi_f(\dot{\mathbf{q}})] \quad (2.90)$$

Здесь $\phi_f(\dot{\mathbf{q}}) = [\varphi(\dot{\mathbf{q}}, 2\sigma_{\dot{\mathbf{q}}}) \text{sign } \dot{\mathbf{q}} \mid (\mathbf{I}_n - \varphi(\dot{\mathbf{q}}, 2\sigma_{\dot{\mathbf{q}}})) \text{sign } \dot{\mathbf{q}} \mid \dot{\mathbf{q}}]$ - добавка к матрице регрессору, позволяющая переписать моменты трения линейно к параметрам.

Вектор параметров $\psi_f \in \mathbb{R}^{14n \times 1}$ содержит массо инерционные параметры, внешние усилия приложенные к РО, моменты сухого трения покоя и скольжения а также коэффициенты вязкого трения:

$$\psi_f^T = [\psi \mid \mathbf{f} \mid \tau_{se} \mid \tau_{sm} \mid \mathbf{b}] \quad (2.91)$$

В общем случае, конечно же элементы вектора внешних сил и моментов трения изменяются во времени. Улучшить точность модели можно вычислив реакции в СП как функции обобщенных координат и применив полученные знания для соответствующей модификации регрессора. В данной работе, однако в дальнейшем мы будем рассматривать методы адаптивной подстройки параметров с помощью которых оценки моментов трения и внешних сил, будут найдены автоматически в ходе работы системы управления.

3. Методы управления манипуляционными роботами

Пусть в нашем распоряжении имеется следящий привод, замкнутый по моменту (току), тогда задача управления манипуляционным механизмом может быть сформулирована как определение такой функции моментов от времени которая бы гарантировала выполнение цели управления. Обычно целью управления является слежение за заданной как функция времени траекторией в пространстве обобщенных $\mathbf{q}(t)$ или декартовых $\mathbf{x}(t)$ координат. Однако целью управления так же может быть не только слежение за траекторией, но и сообщение заданного вектора усилий и моментов \mathbf{f} на РО, в данной работе мы рассмотрим только задачи слежения за траекториями.

Схемы управления манипуляционными механизмами традиционно разделяют на два типа:

- Децентрализованное управление
- Централизованное управление

При децентрализованном управлении n звенный манипулятор рассматривается как n независимых систем с одним входом и одним выходом, эффекты взаимовлияния из-за кориолисовых центробежных и инерционных моментов в ходе движения манипулятора рассматриваются как возмущения. То есть задача управления манипуляционным механизмом сводится к задаче управления приводом, замкнутым по положению, таким образом, чтобы как можно точнее отрабатывать заданные траектории и при этом минимизировать влияние возмущающих моментов. Обычно децентрализованное управление эффективно при наличии преобразователей движения с большими передаточными отношениями, либо отработке относительно медленных траекторий.

С другой стороны, когда требуются большие рабочие скорости либо система является без редукторной, нелинейные эффекты взаимовлияния движения между СП выходят на первый план и существенно влияют на производительность системы так как возмущения, обусловленные этими нелинейными эффектами существенно, возрастают. Для этих случаев была разработана группа методов, называемых методами централизованного управления. При централизованном управлении динамическая модель манипулятора используется для выработки таких управляющих моментов, соответствующих заданной траектории, которые бы компенсировали все нелинейные эффекты и обеспечивали асимптотическую сходимость реальной траектории к желаемой.

В данной работе мы кратко рассмотрим лишь централизованные алгоритмы управления, однако стоит понимать, что в определенных ситуациях децентрализованное управление может показывать сравнительно похожую производительность хотя в то же время реализация такого управления обычно проще и эффективней с точки зрения вычислительных затрат. Описание алгоритмов управления приводами необходимых для реализации децентрализованного управления подробно рассмотрена в [?, ?, ?].

3.1 Централизованные алгоритмы управления

Рассмотрим динамическую модель манипулятора в простейшем виде (?). Очевидно, что даже при пренебрежении упругостью сочленений и звеньев, манипулятор не является системой состоящей из n независимых подсистем, но сложной многопараметрической нелинейной системой $\mathcal{F}_m(\tau, \psi, f)$ с n входами - моментами τ и $2n$ выходами - координатами q и скоростями \dot{q} связанными нелинейно (рис ??). Нагрузку f на РО, в случае задач слежения будем воспринимать как возмущение.

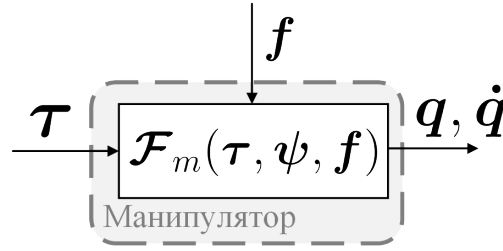


Рис. 3.1: Манипулятор как нелинейная система

Тогда наша задача состоит в управлении нелинейной многопараметрической системой. Этот подход, очевидно, требует наличия динамической модели манипулятора и приводит к поиску нелинейного закона управления u_τ реализация которого обеспечит выполнение поставленной задачи слежения за траекторией заданной в пространстве обобщенных или декартовых координат как функций времени $q_d(t), \dot{q}_d(t), \ddot{q}_d(t)$ ($x_d(t), \dot{x}_d(t), \ddot{x}_d(t)$ - для декартовых координат). Наиболее часто закон управления ищут как нелинейную функцию желаемой траектории и измеренных выходов системы $u_\tau(q_d, \dot{q}_d, \ddot{q}_d, q, \dot{q})$, полученная система имеет структуру показанную на рисунке ??. Стоит понимать что при реализации алгоритмов управления на практике функция $\mathcal{F}_m(\tau, \psi, f)$ - является абстракцией и представляет собой реальный объект. В задачах моделирования данная функция полагается известной и должна описывать реальный объект как можно точнее. Аргументы τ, ψ, f выделены нами как наиболее основные характеристики реального объекта. В дальнейшем на схемах данный объект будем обозначать блоком "Манипулятор".

Существенным минусом таких нелинейных законов является их вычислительная сложность, так как модель манипулятора обычно состоит из большого числа нелинейных функций и для обеспечения стабильности должна быть рассчитана системой управления с высокой частотой. Более того при увеличении числа СП уравнения манипулятора существенно усложняются. Именно поэтому задача нахождения эффективных с вычислительной точки зрения алгоритмов решения первой задачи динамики была столь актуальной темой в последние 30 лет. В настоящее время такие алгоритмы найдены, их основой обычно является рекурсивный метод Ньютона-Эйлера [?, ?]. Бо-

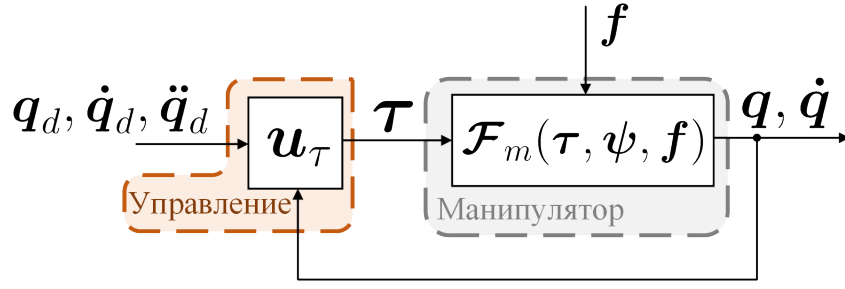


Рис. 3.2: Обобщенная структура системы управления

лее того разработаны методы рекурсивного вычисления регрессора и полной энергии манипулятора [?, ?].

Стоит отметить, что для роботов, оснащенных точными датчиками крутящих моментов реализация алгоритмов централизованного управления на базе динамической модели не столь существенна. Прямые измерения моментов могут быть удобно использованы для генерирования нелинейной компенсации таким образом избегая онлайн вычисления динамической модели.

Далее кратко рассмотрим основные методы централизованного управления. Более подробно данные методы рассмотрены в [?, ?, ?, ?]. Там же можно найти доказательства устойчивости данных законов управления, традиционно базирующихся на методе функций Ляпунова. [?, ?, ?]

3.1.1 Пропорционально-дифференциальное управление

Рассмотрим простой закон управления в момент следующей форме:

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.1)$$

Где $\mathbf{K}_p \mathbf{K}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ положительно определенные симметричные матрицы. Весьма примечательно, что данная простейшая схема пропорционально дифференциального (ПД) управления, изображенная на рисунке ?? гарантирует асимптотическую сходимость реальных обобщенных координат \mathbf{q} к постоянному вектору желаемых \mathbf{q}_d в случае наличия только инерционных и кориолисовых моментов. Для подтверждения этого факта рассмотрим модель манипулятора в случае отсутствия гравитационных моментов, внешних сил, упругости преобразователей движения и сил трения:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.2)$$

Введем следующую положительно определенную кандидат-функцию Ляпунова:

$$V(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathcal{D}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} > 0 \quad (3.3)$$

С энергетической точки зрения (??) представляет собой сумму кинетической энергии манипулятора и потенциальной энергии упругих деформаций виртуальных пружин с жесткостью \mathbf{K}_p обеспеченной обратными связями.

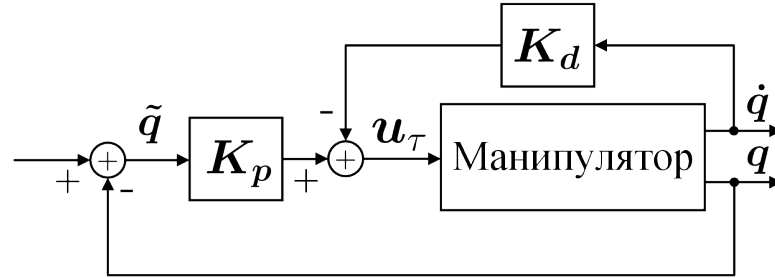


Рис. 3.3: Схема пропорционально-дифференциального управления

Дифференцируя функцию (??) и подставляя динамическую модель манипулятора (??) получим :

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}) \quad (3.4)$$

Подставляя закон управления ??:

$$\dot{V}(\dot{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (3.5)$$

Однако негативная полу-определенность функции выше не является достаточным условием асимптотической устойчивости точки $\tilde{\mathbf{q}}$, а лишь утверждает что обобщенные скорости будут сходиться к нулю $\dot{\mathbf{q}} = 0$. Для доказательства того факта что равенство нулю обобщенных скоростей приводит к нулевой ошибке отработки обобщенных координат подставим закон управления (??) в упрощенную модель манипулятора (??):

$$\mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \quad (3.6)$$

Исходя из сходимости обобщенных скоростей к нулю $\dot{\mathbf{q}} = 0$ обобщенные ускорения так же сходятся к нулю $\ddot{\mathbf{q}} = 0$ тогда уравнение выше запишется как:

$$\mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} = 0 \quad (3.7)$$

Что означает тождественное равенство нулю невязки $\tilde{\mathbf{q}} = 0$, иначе говоря $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d$. Подробнее доказательство устойчивости ПД схемы в случае наличия сил вязкого трения рассмотрено в [?].

3.1.2 Пропорционально-дифференциальное управление с компенсацией

Так как в общем случае момент манипулятора не описывается лишь инерционными и кориолисовыми составляющими, асимптотическая сходимость

обобщенных координат к желаемым не может быть гарантирована использованием только ПД управления.

В самом деле, подставим уравнение (??) в (??):

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = \dot{q}^T (u_\tau - K_p \tilde{q} - \mathcal{G}(q) + J_x(q)^T f) \quad (3.8)$$

Подставляя закон ПД управления в данную функцию нетрудно убедиться, что она не будет отрицательно определенной для $\forall q$. Рассмотрим следующую модификацию закона управления:

$$u_\tau = K_p \tilde{q} - K_d \dot{q} + \mathcal{G}(q) - J_x(q)^T f \quad (3.9)$$

Подставляя данный закон в (??) получим как и в случае ПД управления:

$$\dot{V}(\dot{q}, \tilde{q}) = -\frac{1}{2} \dot{q}^T K_d \dot{q} \leq 0 \quad (3.10)$$

То есть, при абсолютно точном расчете векторов гравитационных моментов $\mathcal{G}(q)$, внешних сил f и матрицы Якоби $J_x(q)$. К сожалению, в реальных системах всегда существует некоторая неопределенность в массо инерционных и геометрических параметрах, кроме того в измерениях внешнего усилия всегда присутствует шум. Эти факторы часто не позволяют достичь нулевой ошибки слежения даже в установившемся режиме. Однако точность такого управления существенно выше чем у обычного ПД регулятора, при том что вычислительные затраты и сложность уравнений для расчета $\mathcal{G}(q)$, $J_x(q)$ даже для манипулятора с 6-ю СП не столь велики.

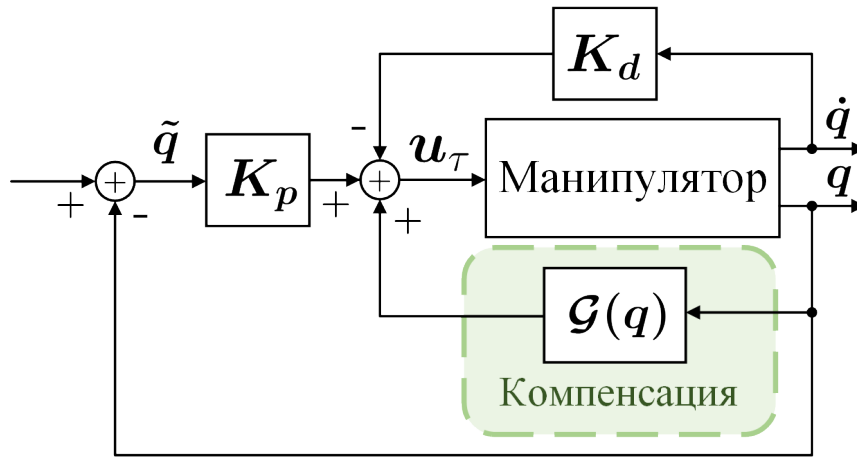


Рис. 3.4: Компенсация по гравитации

3.1.3 Линеаризация обратной связью

Гравитационная компенсация, введенная в разобранный выше алгоритме управления, существенно увеличивает эффективность управления, однако

при частом изменении скоростей и ускорений ПД регулятор не обеспечивает заданной динамической точности обработки траекторий. Это связано с тем что моменты вызванные инерционными, кориолисовыми и центробежными силами вырастают что ведет к существенным ошибкам между гравитационной компенсацией и реально необходимыми моментами. Существенно увеличить точность обработки траектории можно воспользовавшись алгоритмом линеаризации обратной связью. Данный алгоритм базируется на вычислении полной динамической модели и использовании ее для точной линеаризации динамики. Кратко опишем данный алгоритм.

Запишем динамическую модель манипулятора в следующей форме:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.11)$$

Где вектор-функция $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ вычисляется как:

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \triangleq \mathcal{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathcal{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^T \mathbf{f} \quad (3.12)$$

Метод линеаризации обратной связью состоит в поиске такого управления \mathbf{u}_τ которое трансформирует нелинейные уравнения системы в линейную форму относительно нового входа \mathbf{u}^* .

Применим данный метод к нашей системе, введем в рассмотрение следующий закон управления относительно входа \mathbf{u}^* :

$$\mathbf{u}_\tau = \mathcal{D}(\mathbf{q})\mathbf{u}^* + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.13)$$

Сравнивая выражения (??) и (??) очевидно что:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}^* \quad (3.14)$$

Выражение выше описывает обычную линейную систему второго порядка относительно входа \mathbf{u}^* . Выберем следующий закон управления для \mathbf{u}^* :

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{K}_p \mathbf{q} - \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{r} \quad (3.15)$$

Где вектор \mathbf{r} :

$$\mathbf{r} = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{q}_d + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}}_d \quad (3.16)$$

Подстановка (??) в (??) ведет к следующей линейной системе:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Из курса управления линейными системами известно, что при следующем выборе матриц $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d$:

$$\mathbf{K}_p = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2 \dots \omega_n^2\}, \quad \mathbf{K}_d = \text{diag}\{2\omega_1, 2\omega_2 \dots 2\omega_n\} \quad (3.18)$$

Таких что $\omega_i > 0, \forall i$, вектор невязки асимптотически сходится к нулю и следственно $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_d$.

Нетрудно это проверить. Запишем уравнение (??) в матричной форме (пространство состояний):

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \ddot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{K}_p & \mathbf{K}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{q} \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.19)$$

В соответствии с теоремой Ляпунова для устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами - непрерывная система является асимптотически устойчивой когда действительные части всех собственных значений матрицы \mathbf{A} меньше нуля, $\Re(\lambda) < 0, \forall \lambda$. Для вычисления собственных значений необходимо разрешить следующее уравнение относительно λ :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_{2n}) = \det(\lambda^2 \mathbf{I}_n + \lambda \mathbf{K}_d + \mathbf{K}_p) = 0 \quad (3.20)$$

Подставляя матрицы $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d$ в выражение выше получим:

$$\prod_{i=1}^n (\lambda^2 + 2\lambda\omega_i + \omega_i^2) = \prod_{i=1}^n (\lambda + \omega_i)^2 = 0 \quad (3.21)$$

Очевидно что корни данного характеристического уравнения: $\lambda_i = -\omega_i, i = 1, 2 \dots n$, тогда для положительных ω система (??) асимптотически устойчива.

Полученная система состоит из несвязанных между собой апериодических звеньев второго порядка, то есть в системе полностью отсутствует перерегулирование, а время переходного процесса обратно пропорционально ω . Хотя теоретически, повышая коэффициенты ω_i быстродействие системы может быть задано сколь угодно высоким, на практике в следствии зашумленности измеряемых сигналов скорости и положения и дискретной природы системы управления неограниченное увеличение параметра ω_i ведет к потере устойчивости.

Полученная схема управления представлена в виде блок диаграммы на рисунке ???. Как можно заметить система охвачена двумя вложенными контурами обратной связи. Внутренний контур, основанный на динамической модели манипулятора, и внешний контур, замкнутый на ошибку отработки траектории. Функция внутреннего контура заключается в линеаризации системы, тогда как внешний контур необходим для ее стабилизации.

Тем не менее, этот метод так же, как и метод ПД управления с компенсацией основан на предположении об идеальном знании динамической модели. Так как динамические параметры известны лишь с некоторой, ограниченной степенью достоверности, и при моделировании всегда существует некоторые неучтенные эффекты, то нелинейности компенсируются не полностью. С другой стороны, вычисление динамической модели должно выполняться за один такт управления (порядка миллисекунды). Это может существенно увеличить требования к аппаратной составляющей системы управления. В таких случаях может быть целесообразным вычислять лишь те составляющие

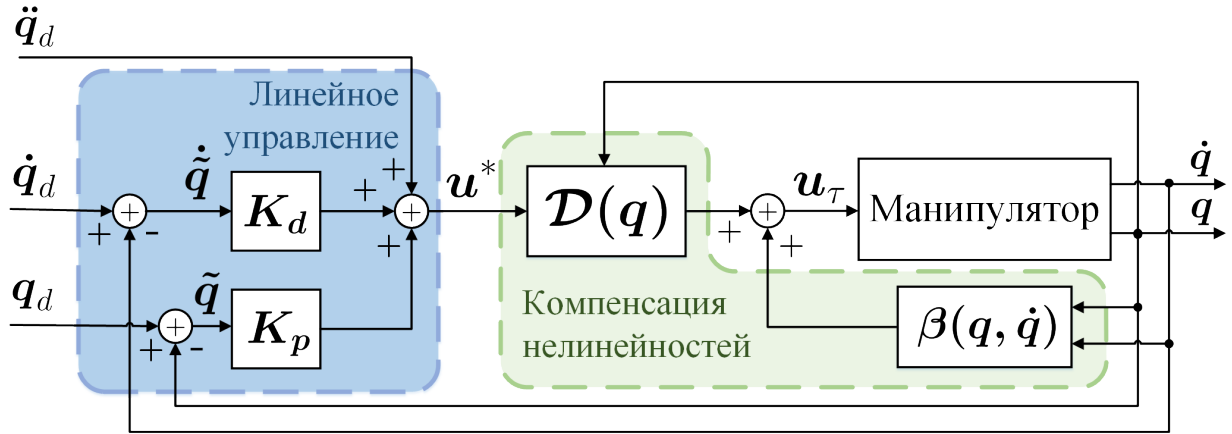


Рис. 3.5: Схема управления при линеаризации обратной связью

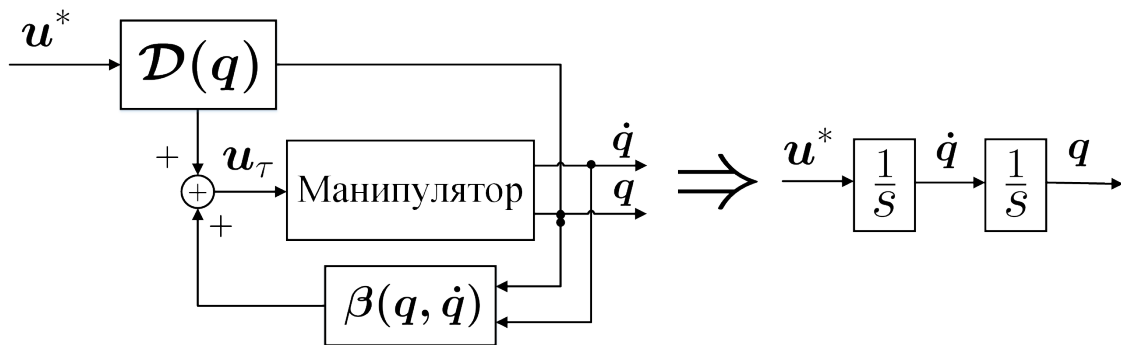


Рис. 3.6: Эквивалентность скомпенсированной и линейной систем.

уравнения динамики которые несут наибольший вклад в результирующий момент, например в [?, ?] предложены алгоритмы базирующиеся на вычислении только диагональных моментов матрицы инерции, и упрощении вектора кориолисовых сил.

Стоит отметить так же что, линеаризация обратной связью традиционно подразумевает более широкий класс нелинейных систем нежели манипуляторы, приведенный выше алгоритм скорее частный случай. Достаточно часто в литературе данный алгоритм можно встретить как метод вычисленного момента или метод решения прямой задачи динамики.

Вышеупомянутая методика линеаризации привлекательна поскольку нелинейная сложная динамическая система механизма заменяется на n линейных и независимых подсистем второго порядка (рис ??). Однако исходя из вышеприведенных замечаний, эффективность данной схемы уменьшается как из-за некоторой неопределенности динамической модели, так и в следствии прикладывания нагрузки к РО. Простейшим способом повышения точности в этом случае является увеличение коэффициентов усиления K_p , K_d . Однако верхние границы данных параметров не могут быть сколь угодно большими, во-первых - данные коэффициенты будут усиливать шум измерения датчика

положения и ошибок вычисления скорости. Другим ограничением является дискретизация непрерывного закона при переводе его в систему компьютерного управления с ограниченной частотой, то есть квантование сигнала по времени. Кроме того, в реальной системе присутствуют множество неучтенных в модели факторов. При этом при увеличении коэффициентов $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d$ система может потерять устойчивость что естественно недопустимо. Обойти данный недостаток можно, например, используя адаптивную подстройку параметров таким образом, чтобы вычисленные на основании динамической модели моменты сходились к истинными. Данный метод рассмотрим далее.

3.1.4 Адаптивное управление

Как было сказано выше, главным недостатком метода управления, построенного на линеаризации обратной связью с помощи нелинейной модели объекта является неопределенность в векторе динамических параметров. Решить данную проблему в некоторой степени помогают методы адаптивного управления. Рассмотрим один из таких методов. Введем допущение о том, что реальный манипуляционный механизм имеет ту же математическую структуру что и его модель, однако динамические параметры известны не точно. Пусть истинный объект описывается системой:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathcal{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\psi} \quad (3.22)$$

$\mathcal{D}(\mathbf{q}), \mathcal{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathcal{G}(\mathbf{q})$ матрицы и вектора точно описывающие истинный объект, $\boldsymbol{\psi}$ - истинный вектор параметров. Для определения закона управления введем следующую кандидат-функцию Ляпунова:

$$V(t) = \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathcal{D}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^T \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\psi}} > 0 \quad (3.23)$$

Где $\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \hat{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\psi}$ - вектор ошибки между истинными параметрами и их оценкой. Дифференцируя по времени получим:

$$\dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \dot{\mathcal{D}}(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\psi}}^T \boldsymbol{\Gamma} \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} \quad (3.24)$$

Добавим и вычтем $2\mathcal{C}^*$:

$$\dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\dot{\mathcal{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathcal{C}^*)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \hat{\mathcal{C}}^*\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^T \boldsymbol{\Gamma} \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}$$

Распишем $\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = \ddot{\mathbf{q}}_d - \ddot{\mathbf{q}}$, и учтем свойство кососимметричности $\dot{\mathcal{D}}(\mathbf{q}) - 2\mathcal{C}^*$:

$$\dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \mathcal{D}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \ddot{\mathbf{q}}) + \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T \hat{\mathcal{C}}^*\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_p \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^T \boldsymbol{\Gamma} \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}}$$

Выразим $\mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$ из уравнения динамики ???. Проведя алгебраические преобразования получим:

$$\dot{V}(t) = \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d - \mathcal{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}}) + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^T \boldsymbol{\Gamma} \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} \quad (3.25)$$

Используя свойства линейности к параметрам введем матрицу получаемую из $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\psi}$ с помощью замены соответствующих обобщенных скоростей $\dot{\mathbf{q}}$ на их желаемые значения $\dot{\mathbf{q}}_d$:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\boldsymbol{\psi} = \mathcal{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{C}^*(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_d + \mathcal{G}(\mathbf{q}) \quad (3.26)$$

Зададимся следующим законом управления:

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\hat{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.27)$$

Подставляя данный закон в производную функции Ляпунова (??) и проводя преобразования получим:

$$\dot{V}(t) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}^T (\boldsymbol{\Gamma} \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} + \mathbf{H}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \quad (3.28)$$

Тогда при условии постоянных параметров $\boldsymbol{\psi}$ а следовательно $\dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = \dot{\boldsymbol{\psi}}$ выбирая закон адаптации следующим образом :

$$\boldsymbol{\Gamma} \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} + \mathbf{H}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = \dot{\boldsymbol{\psi}} = -\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d)\dot{\tilde{\mathbf{q}}} \quad (3.29)$$

Обеспечим не-положительность производной функции Ляпунова :

$$\dot{V}(t) = -\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{q}} \leq 0 \quad (3.30)$$

Как уже было отмечено ранее не положительность функции выше не является достаточным условием асимптотической устойчивости точки $\tilde{\mathbf{q}}$.

В [?] показано что вводя вспомогательные переменные линейно зависящие от ошибок $\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^* &= \tilde{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\Lambda} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}}_r &= \dot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda} \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_r &= \ddot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda} \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Где $\boldsymbol{\Lambda}$ - положительно определенная матрица.

Затем задавшись следующей функцией Ляпунова :

$$V(t) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^{*T} \mathcal{D}(\mathbf{q}) \mathbf{q}^* + \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\psi}}^T \boldsymbol{\Gamma} \tilde{\boldsymbol{\psi}} > 0 \quad (3.32)$$

Можем обеспечить асимптотическую сходимость обобщенных координат и положений к их желаемым значениям, используя закон управления:

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r)\hat{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{K}_d \mathbf{q}^* \quad (3.33)$$

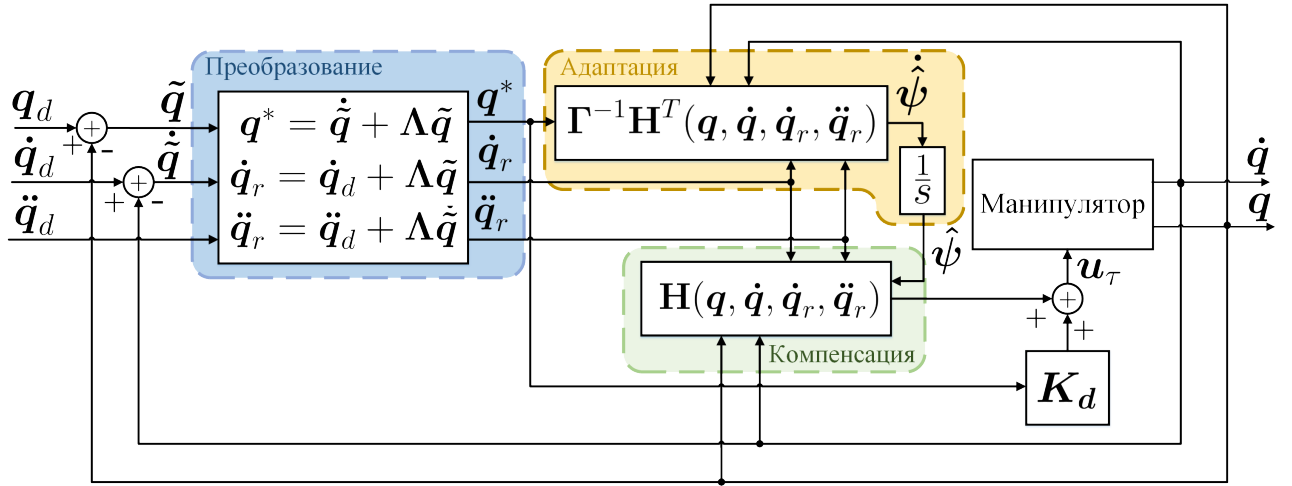


Рис. 3.7: Схема адаптивного управления.

Совместно со следующим законом адаптации:

$$\dot{\hat{\psi}} = \Gamma^{-1} \mathbf{H}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_r, \ddot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{q}^* \quad (3.34)$$

Полученный закон управления схематически представлен на рисунке ??

Асимптотическая устойчивость гарантирована так как производная функции Ляпунова всюду отрицательно-определенна:

$$\dot{V}(t) = -\mathbf{q}^{*T} \mathbf{K}_d \mathbf{q}^* \leq 0 \quad (3.35)$$

Так как Λ положительно определенная матрица $\mathbf{q}^* = 0 \Rightarrow \tilde{\mathbf{q}} = 0, \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = 0$. Стоит отметить, что в анализе выше мы подразумевали постоянность параметров, однако при модифицировании регрессора для оценки внешних усилий (??) или моментов трения (??), т.е когда вектор параметров ψ изменяется во времени анализ устойчивости должен производиться иначе. Строго говоря, алгоритм адаптации должен быть выбран таким образом, что-бы обеспечить:

$$\tilde{\psi}^T (\Gamma \dot{\tilde{\psi}} + \mathbf{H}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d, \ddot{\mathbf{q}}_d) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \leq 0 \quad (3.36)$$

Данное условие нетрудно удовлетворить, обладая некоторой априорной информацией о параметрах и пределах их изменения. Более подробно данный адаптивный алгоритм и анализ его устойчивости рассмотрен в [?, ?].

Необходимо понимать, что выполнение цели управления (сходимость координат к желаемым) не означает сходимости оценок параметров к их истинным значениям. Наилучшая оценка параметров является целью идентификации. Интуитивно понятно, что задачи идентификации систем и адаптивного управления взаимосвязаны, более подробно обсудим это в соответствующем разделе.

3.1.5 Управление в пространстве декартовых координат

Во всех рассмотренных выше алгоритмах управление манипулятором происходило в пространстве обобщенных координат, т.е. желаемая траектория и измерения описаны в терминах \mathbf{q} . Однако, как уже было отмечено выше, в большинстве задач робототехники касающихся манипуляционных роботов, желаемая траектория \mathbf{x} задается в пространстве обобщенных координат. Подразумевая что ошибка между желаемым движением и реальным мала (что и есть цель управления) используя выражения кинематики (??),(??) можем записать:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} &= \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}(\dot{\mathbf{J}}_x(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \ddot{\tilde{\mathbf{x}}})\end{aligned}\quad (3.37)$$

Тогда для обратимой матрицы Якоби, для малых ошибок обобщенных и декартовых координат справедливо:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_x(\mathbf{q})\tilde{\mathbf{q}} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}\tilde{\mathbf{x}} \quad (3.38)$$

Аналогичным образом вычисляются связи между ошибками обобщенных и декартовых скоростей.

Используя уравнения выше нетрудно найти соответствующие аналоги описанных ранее алгоритмов управления для траекторий, но с учетом того что желаемые траектории теперь заданы в декартовом пространстве. Например, для ПД управления с компенсацией нетрудно записать следующий закон управления в декартовых координатах:

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} - \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \mathcal{G}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^T\mathbf{f} \quad (3.39)$$

При реализации линеаризации обратной связью, для управления в пространстве декартовых координат достаточно модифицировать внешний контур (линеаризованную систему) следующим образом:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}(\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_d + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{J}}_x(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \quad (3.40)$$

Для адаптивного алгоритма необходимо модифицировать вспомогательные переменные:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^* &= \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}(\dot{\tilde{\mathbf{x}}} + \Lambda\tilde{\mathbf{x}}) \\ \dot{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}(\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_d + \Lambda\dot{\tilde{\mathbf{x}}}) \\ \ddot{\mathbf{q}}_r &= \mathbf{J}_x(\mathbf{q})^{-1}(\ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_d + \Lambda\ddot{\tilde{\mathbf{x}}} - \dot{\mathbf{J}}_x(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}}_r)\end{aligned}\quad (3.41)$$

3.2 Иные алгоритмы управления

Естественно, что кратко разобранные выше алгоритмы управления не являются единственными, а скорее базовыми методами, в классе централизо-

ванных алгоритмов управления существует огромное множество, других алгоритмов, базирующихся как на совершенно различных, так и на схожих идеях. Наиболее известные из них:

- Робастные алгоритмы
- Оптимальное управление
- Методы скользящих режимов
- Пассивные алгоритмы
- Методы нечеткого управления и нейронных сетей

Как уже было отмечено выше, в задачах робототехники достаточно часто необходимо как управление движением, так и усилием вдоль необходимой траектории. Следовательно, задачи управления манипуляторами не ограничиваются лишь управлением движением, но также развиваемыми усилиями. Для ознакомления с подобными методами рекомендуется обратиться к [?] там же кратко описаны наиболее эффективные методы управления движением и приведена обширная библиография работ по данной тематике.

4. Идентификация инерционных параметров

Исходя из предыдущей главы ясно, что большинство эффективных схем управления требуют наличия точной динамической модели. Следовательно, стабильность и точность такого управления в значительной степени зависят от точности модели. Адаптивные и робастные (грубые) схемы могут допускать некоторые ошибки в динамических параметрах, в то время как другие схемы, например, линеаризация обратной связью подразумевают знание точных массо-инерционных параметров. Более того имея точные значения параметров становится возможным производить достаточно точную симуляцию робототехнической системы если эксперимент в данный момент не возможен либо слишком затрачен с материальной точки зрения.

Точные значения динамических параметров обычно не предоставляются производителем робота. Конечно же наиболее простым способом узнать данные параметры является полный разбор манипулятора и проведение прямых измерений. Измерения масс не составляют технических проблем, центры масс могут быть измерены балансировкой звеньев, а моменты инерции установлены экспериментально или косвенно. Однако ясно, что полный разбор манипулятора обычно не представляется возможным. Тогда для оценки параметров ψ необходимо использовать доступные измерения например токи \mathbf{I} и напряжения \mathbf{V} на исполнительных двигателях, моменты $\boldsymbol{\tau}$ и координаты \mathbf{q} в сочленениях, и математическую модель системы. Сравнивая значения рассчитанные на основании модели с реальными измерениями возможно найти такие параметры $\hat{\psi}$ которые минимизируют ошибки между ними. При выполнении некоторых условий, полученные оценки параметров являются истинными. В данный момент существует большое количество методов идентификации, однако наиболее исследованным и чаще используемым на практике является метод наименьших квадратов (МНК). Идентификация параметров с помощью МНК обычно называется задачей регрессии, здесь и далее, когда речь будет заходить об МНК, стоит понимать что имеется ввиду решение частной задачи регрессии.

4.1 Метод наименьших квадратов

Кратко рассмотрим математическую формулировку метода. (хотя мы уже и использовали в главе посвященной решению ОЗК) Пусть есть заданная вектор-функция $\mathbf{y} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \psi) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$, при этом нам известны (измерены) пары $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ а параметры модели являются неизвестными подлежащими определению. Зададимся функцией невязки:

$$\mathbf{e}(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \psi) = \mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \psi) \quad (4.1)$$

Тогда оценки $\boldsymbol{\psi}$ используя МНК можно провести как половину суммы квадратов элементов вектора невязки, т.е. целевой скалярной функции \mathcal{J}_c вида:

$$\mathcal{J}_c = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^p e_i^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{e}\|_2^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi})\|_2^2 \quad (4.2)$$

Значения параметров доставлявшие минимум функции выше и будут искомыми оценками:

$$\boldsymbol{\psi}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\psi}_k} J_c \quad (4.3)$$

Используя определение нормы можно переписать целевую функцию в матричной форме используя операцию транспонирования:

$$\mathcal{J}_c = \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi})\|_2^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}))^T (\mathbf{y} - \mathcal{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi})) \quad (4.4)$$

Для решения задачи (??) раскроем скобки в (??) и найдем градиент:

$$\nabla_{\boldsymbol{\psi}} \mathcal{J}_c = \mathcal{F}^T \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \boldsymbol{\psi}} - \mathbf{y}^T \mathcal{F} = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{e} = 0 \quad (4.5)$$

Взятие вторых производных дает нам матрицу Гессе и необходимое условие минимума ошибки:

$$\nabla_{\boldsymbol{\psi}}^2 \mathcal{J}_c = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{J}_{\boldsymbol{\psi}} + \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i \nabla_{\boldsymbol{\psi}}^2 \mathbf{e}_i > 0 \quad (4.6)$$

4.1.1 Оценка инерционных параметров с помощью МНК

Применим метод наименьших квадратов для оценки динамических параметров. Пусть в нашем распоряжении имеется вектор моментов $\boldsymbol{\tau}$ либо их оценок исходя из токов $\dot{\mathbf{i}}$. Кроме того, нам необходимы измерения положений \mathbf{q} , и их производных. Используя свойство линейности динамической модели к параметрам запишем целевую функции:

$$\mathcal{J}_c = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\tau} - \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\psi}\|_2^2 \quad (4.7)$$

Используя (??) и (??) получим следующие условия минимума ошибки оценки:

$$\nabla_{\boldsymbol{\psi}} \mathcal{J}_c = -\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \mathbf{e} \quad (4.8)$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\psi}}^2 \mathcal{J}_c = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})^T \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) > 0 \quad (4.9)$$

Сформируем вектора измерений $\boldsymbol{\tau}_a, \mathbf{q}_a, \dot{\mathbf{q}}_a, \ddot{\mathbf{q}}_a \in \mathbb{R}^{mn \times 1}$, и матрицу $\mathbf{H}_a \in \mathbb{R}^{mn \times p}$ следующего вида:

$$\boldsymbol{\tau}_a = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_m \end{bmatrix}, \mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_m \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix}, \ddot{\mathbf{q}}_a = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{q}}_m \end{bmatrix}, \mathbf{H}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{q}_1, \dot{\mathbf{q}}_1, \ddot{\mathbf{q}}_1) \\ \mathbf{H}(\mathbf{q}_2, \dot{\mathbf{q}}_2, \ddot{\mathbf{q}}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{H}(\mathbf{q}_m, \dot{\mathbf{q}}_m, \ddot{\mathbf{q}}_m) \end{bmatrix}$$

Сформируем следующую систему линейных уравнений:

$$\boldsymbol{\tau}_a = \mathbf{H}_a \boldsymbol{\psi} \quad (4.10)$$

Тогда подставляя данную функцию в градиент, вычисленный выше получим:

$$\mathbf{H}_a^T \mathbf{H}_a \boldsymbol{\psi} - \mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\tau}_a = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

Оценку параметров найдем как:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = (\mathbf{H}_a^T \mathbf{H}_a)^{-1} \mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\tau}_a \quad (4.12)$$

Выражение выше есть не что иное как переопределенная система линейных уравнений в которой уравнений больше чем переменных, в данной работе мы уже решали подобную задачу в главе посвященной решению ОЗК (??), собственно оценки параметров в виде описанном выше напрямую используют оператор псевдо инверсии $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{H}_a^+ \boldsymbol{\tau}_a$.

Отметим так же важный факт, что выше мы описывали наш объект с помощью системы линейных уравнений игнорируя шум измерений моментов (токов) $\boldsymbol{\tau}_a$. В реальности же система будет подвержена влиянию высокочастотного шума, перепишем модель (??) в форме:

$$\boldsymbol{\tau}_a = \mathbf{H}_a \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\nu}_a \quad (4.13)$$

Где $\boldsymbol{\nu}_a \in \mathbb{R}^{mn \times 1} \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}_a)$ белый гауссовский шум измерений с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации $\boldsymbol{\Sigma}_a = \text{cov}(\boldsymbol{\nu}_k, \boldsymbol{\nu}_a) = \mathbb{E} [\boldsymbol{\nu}_a \boldsymbol{\nu}_a^T]$.

Замечательным свойством оценок сделанных с помощью (??) является то что даже при наличии белого шума с одинаковым распределением, то есть матрицей ковариации в форме $\boldsymbol{\Sigma}_a = \sigma \mathbf{I}$ - оценки сохраняют свою оптимальную природу. Это позволяет нам игнорировать шум измерений в случае если его параметры одинаковы для всех элементов измеряемого вектора, и он является гауссовским.

Как нетрудно заметить для того что бы система (??) была разрешима (то есть оператор псевдо инверсии существовал) необходимо чтобы матрица Гессе была обратима, данное свойство тесно связано с идентифицируемостью параметров $\boldsymbol{\psi}$ и будет рассмотрено нами несколько позже.

Отметим что в большинстве практических случаев исследователь обладает некоторыми априорными знаниями об объекте. То есть, может быть известен как вектор начальных параметров $\boldsymbol{\psi}_0$ так и параметры описывающие шум измерений тока или моментов, например среднеквадратическое отклонение σ_I . Учет данных параметров может существенно повысить точность оценок.

4.1.2 Учет априорных оценок

При наличии априорной информации о шуме, интуитивно ясно что измерения с большим среднеквадратичным отклонением σ несут меньше полезной информации о истинном значении, поэтому имеет смысл использовать алгоритм, более доверяющий точным измерениям (с малой σ). Данный алгоритм носит название взвешенного метода наименьших квадратов. Тогда исходя из априорных знаний о шуме формируется матрица ковариации $\boldsymbol{\Sigma}_a^{-1}$ и оценка параметров проводят следующим образом [?]:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = (\mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{H}_a)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\tau}_a \quad (4.14)$$

Выражение выше позволяет существенно увеличить точность оценки параметров в случае если вектор шума имеет гауссовское распределение с разными дисперсиями.

Кроме предварительных знаний о шуме в достаточно часто перед тем как переходить к оценке параметров основываясь на измерениях, исследователь обладает некоторыми предположениями о возможных векторах параметров, такими предположения могут основываться на предварительном расчете, САД модели объекта, простом физическом смысле, либо данных предоставленных производителем робота. По сущности имеющихся предположений их можно разделить на два класса, знания о пределах изменения параметров и предварительные оценки параметров.

Пределы изменений параметров обычно описывают с помощи системы линейных неравенств $\boldsymbol{\psi}_l \leq \boldsymbol{\psi} \leq \boldsymbol{\psi}_u$, что соответствует следующей системе в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ -\mathbf{I}_p \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \leq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_u \\ -\boldsymbol{\psi}_l \end{bmatrix}$$

Здесь $\boldsymbol{\psi}_u, \boldsymbol{\psi}_l$ - соответственно верхние и нижние пределы для вектора параметров.

В данном виде задача может быть представлена как стандартная задача квадратичного программирования:

$$\begin{aligned} &\text{минимизировать:} && \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} + \mathbf{p}^T \mathbf{y} + h \\ &\text{с условием:} && \mathbf{M} \mathbf{y} \leq \mathbf{b} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Где:

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\psi}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{H}_a, \quad \mathbf{p} = -\boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\tau}_a, \quad h = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_a^T \boldsymbol{\tau}_a,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ -\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_u \\ -\boldsymbol{\psi}_l \end{bmatrix}$$

Решая задачу (??) найдем такой вектор параметров $\boldsymbol{\psi}$ который доставляет минимум функции невязки и удовлетворяет ограничениям $\boldsymbol{\psi}_l \leq \boldsymbol{\psi} \leq \boldsymbol{\psi}_u$.

При наличии некоторых знаний о возможном векторе $\boldsymbol{\psi}_0$ можно сформулировать задачу оценки параметров $\hat{\boldsymbol{\psi}}$ как совместную минимизацию отклонений модели от экспериментальных данных и полученных параметров от начальных. Для этого введем следующую систему уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_a \\ \mathbf{I}_{pn} \end{bmatrix} \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_a \\ \boldsymbol{\psi}_0 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Или в терминах отклонений $\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\psi}_0$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_a \\ \lambda \mathbf{I} \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\psi}} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Где λ - коэффициент отвечающий за уверенность в предварительных оценках, чем выше этот коэффициент тем выше мы полагаем точность наших изначальных оценок $\boldsymbol{\psi}_0$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_a = \boldsymbol{\tau}_a - \mathbf{H}_a \boldsymbol{\psi}_0$ - разность между измеренными моментами и их предсказаниями с помощью предварительных оценок.

Решая данную задачу с помощью метода наименьших квадратов получим:

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = (\mathbf{H}_a^T \mathbf{H}_a + \lambda^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}_a^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_a \quad (4.18)$$

Данный метод носит название демонтированного метода наименьших квадратов, а λ называют коэффициентом демпфирования, в литературе данный алгоритм так же часто можно встретить как метод Левенберга — Марквардта. Левенберг [?] предложил итеративную версию алгоритма для решения нелинейных задач с помощью МНК. Марквардт улучшил алгоритм с помощью введения следующей регуляризации [?]:

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{\psi}}} = (\mathbf{H}_a^T \mathbf{H}_a + \lambda^2 \text{diag} \{ \mathbf{H}_a^T \mathbf{H}_a \})^{-1} \mathbf{H}_a^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_a \quad (4.19)$$

Существенен вклад советского математика Андрея Николаевича Тихонова. Им предложена следующая, носящая его фамилию регуляризация [?]

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = (\mathbf{H}_a^T \mathbf{H}_a + \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma})^{-1} \mathbf{H}_a^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_a \quad (4.20)$$

Здесь матрица $\boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{\Gamma}$ может быть интерпретирована со статистической точки зрения как обратная к матрицы ковариации предварительной оценки и

истинного значения $\mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} = \mathbf{P} = \text{cov}(\tilde{\boldsymbol{\psi}}, \tilde{\boldsymbol{\psi}})$. В настоящее время предложенная Тихоновым регуляризация используется наиболее часто. Заметим, что при учете шума измерений получим следующее выражение:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}} = (\mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{H}_a + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma})^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{H}_a^T \tilde{\boldsymbol{\tau}}_a \quad (4.21)$$

Что является более общим случаем регуляризации Тихонова (обобщенная регуляризация тихонова).

Учтем прежние ограничения на параметры: $\boldsymbol{\psi}_l - \boldsymbol{\psi}_0 \leq \tilde{\boldsymbol{\psi}} \leq \boldsymbol{\psi}_u - \boldsymbol{\psi}_0$ Тогда для нахождения оценок удовлетворяющих ограничению можем переписать нашу задачу стандартной форме квадратичного программирования (??) со следующими параметрами $\mathbf{y}, \mathbf{Q}, \mathbf{p}, h, \mathbf{M}, \mathbf{b}$:

$$\mathbf{y} = \tilde{\boldsymbol{\psi}}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{H}_a + \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{\Gamma}, \quad \mathbf{p} = -\boldsymbol{\Sigma}_a^{-1} \mathbf{H}_a^T \boldsymbol{\tau}_a, \quad h = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau}_a^T \boldsymbol{\tau}_a,$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ -\mathbf{I}_p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_u - \boldsymbol{\psi}_0 \\ -\boldsymbol{\psi}_l + \boldsymbol{\psi}_0 \end{bmatrix}$$

Данный метод можно считать наиболее общим и гибким так как в нем учитываются априорные знания как о границах изменения параметров так о их начальном значении и различной дисперсии шума в измерениях.

4.1.3 Рекурсивная оценка параметров

Рассмотренные выше методы - предполагают, что идентификация происходит в два этапа. Первый этап состоит из накоплений измерений, второй же непосредственно применение методов оценки. Однако, достаточно часто в задачах робототехники оценки параметров должны быть произведены непосредственно в ходе работы системы - онлайн, как например в случае адаптивного управления. Для этого существует группа методов под общим названием рекурсивные МНК (РМНК).

Естественным алгоритмом рекурсивного оценки параметров является движение в направлении наискорейшего убывания ошибки (вдоль анти-градиента - противоположно градиенту):

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_k = \hat{\boldsymbol{\psi}}_{k-1} + \mathbf{S}_k \mathbf{R}_k^{-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{e}_k \quad (4.22)$$

Где k - шаг алгоритма (дискретное время). Тогда положительная определенная диагональная матрица \mathbf{S} , достаточно часто принимается как $\mathbf{S} = \mathbf{P}$ регулирует размер шага вдоль направления анти-градиента т.е. скорость сходимости алгоритма. Малые значения элементов матрицы соответствует большей скорости сходимости.

Выбор различных матриц \mathbf{R} существенно влияют на скорость и свойства сходимости алгоритма, как показано в [?] в зависимости от вида матрицы Гесса и ее определенности наилучшим выбором может быть:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_k &= \mathbf{I} - \text{Градиентный спуск} \\ \mathbf{R}_k &= \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k - \text{Метод Ньютона} \\ \mathbf{R}_k &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k - \text{Метод Гаусса-Ньютона}\end{aligned}\quad (4.23)$$

Достаточно часто выбирают $\mathbf{R} = \Sigma$

Однако наиболее оптимальная (с точки зрения минимума следа вариационной матрицы предсказания) оценка постоянных параметров ψ может быть произведена рекурсивно используя следующий алгоритм:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_k &= (\mathbf{H}_k \Sigma_k \mathbf{H}_k^T + \mathbf{P}_{k-1}^{-1})^{-1} \\ \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k \mathbf{H}_k^T \Sigma_k^{-1} \\ \hat{\psi}_k &= \hat{\psi}_{k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{e}_k\end{aligned}\quad (4.24)$$

К сожалению в реальной ситуации не все элементы вектора параметров постоянны во времени, для оценки переменных во времени параметров можно использовать не оптимальный закон (??). Однако чаще модифицируют оптимальный метод (??) таким образом что бы наиболее актуальные измерения вносили большие вклад нежели старые:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T (\Upsilon + \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{H}_k^T + \Sigma_k)^{-1} \\ \mathbf{P}_k &= \Upsilon^{-1} (\mathbf{I}_k - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k-1} \Upsilon^{-1} \\ \hat{\psi}_k &= \hat{\psi}_{k-1} + \mathbf{K}_k \mathbf{e}_k\end{aligned}\quad (4.25)$$

Где $\mathbf{0} < \Upsilon < \mathbf{I}$ - диагональная матрица отвечающая за то насколько быстро алгоритм забывает старые данные, чем ближе значение матрицы к единице тем больше старых данных учитывает алгоритм.

В настоящее время предложены множество модификаций РМНК, например в работе [?] предложены рекурсивные варианты МНК использующих регуляризацию Тихонова и Левенберга-Марквардта а так же параметр памяти Υ .

4.2 Идентифицируемость и наблюдаемость

Перед тем как непосредственно приступать к самой идентификации необходимо отметить, что не все параметры могут быть найдены с помощью непосредственного измерения входов и выходов (управления и состояний) системы.

Как показано в [?] параметры динамической модели могут быть классифицированы по трем признакам:

- Полностью идентифицируемые.
- Линейно зависимые.
- Не идентифицируемые.

Следовательно, матрица наблюдений $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$, соответствующая некоторому набору параметров $\boldsymbol{\psi}$ может быть дефектна (некоторые столбцы $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ линейно зависимы для любых значений $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$) и чтобы получить уникальное решение, нам необходимо определить минимальный набор независимых идентифицируемых параметров, которые также называются базовыми динамическими параметрами: Методы нахождения базовых параметров подробно рассмотрены в [?]. В данной работе однако будет использован подход основывающийся на базовых понятиях линейной алгебры.[?, ?]

Задача определения базовых параметров состоит из трех частей. Первая - определить не идентифицируемые параметры, вторая - линейно зависимые, третья - соответственно преобразовать матрицу регрессии и параметры. Определение не идентифицируемых параметров сводится к нахождению нулевых столбцов матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$. Напомним для того что бы вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ был нулевым, необходимо и достаточно $\|\mathbf{v}\| = \mathbf{0}$. Линейную зависимость определим с помощью неравенства Коши — Буняковского — Шварца. Два вектора $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ линейно зависимы тогда и только тогда когда выполняется:

$$\rho_{uv} = \rho_{vu} = \frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}|}{\|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{u}\|_2} = 1 \quad (4.26)$$

Тогда если два вектора линейно зависимы коэффициент данной зависимости может, быть найден как отношение их норм взятый с соответственным знаком, например так: $c = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{v}\|_2^2}$. Используя это нетрудно организовать процедуру поиска линейно зависимых векторов, попеременно вычисляя (??) для столбцов матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$. В математической статистике на основе (??) вводится понятие корреляции, что аналогично линейной зависимости в случае случайных векторов.

Кратко опишем суть алгоритма поиска линейно зависимых векторов. Пронормируем столбцы матрицы \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}_n = \mathbf{H}\mathbf{N}$$

Где $\mathbf{N} = \text{diag} \{ \|\mathbf{H}_{:1}\|_2^{-1}, \|\mathbf{H}_{:2}\|_2^{-1}, \dots, \|\mathbf{H}_{:p}\|_2^{-1} \}$ - диагональная матрица составленная из элементов обратных нормам соответствующих столбцов. При этом если норма какого нибудь из столбцов под номером i равна нулю соответствующий элемент \mathbf{N} равен нулю, а значит параметр ψ_i - не идентифицируем и исключается из вектора параметров в месте с соответствующим ему

столбцом $\mathbf{H}_{:i}$

Найдем матрицу "корреляции":

$$\mathbf{R}_\mathbf{H} = \mathbf{H}_n^T \mathbf{H}_n$$

Если элемент матрицы $\mathbf{R}_\mathbf{H}$ стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца равен единице то соответствующие вектора - линейно зависимы. Отметим что, так как $\rho_{uv} = \rho_{vu}$ нам необходимо вычислять не p^2 а $\frac{p(p-1)}{2}$ элементов. Найдя номера линейно зависимых векторов сформируем матрицу $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k]$. Тогда нетрудно найти коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_k линейной зависимости между ними. Для этого необходимо найти матрицу канонического вида по строкам \mathbf{V}_e , например с помощью преобразований строк по методу Гаусса Верхняя строка полученной матрицы \mathbf{V}_e будет содержать коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_k . Более того, на основании этого метода можно искать и линейную зависимость между данными векторами, оценивая положения ведущего элемента. Так для двух линейно зависимых векторов формирующей матрицу $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ соответствующая матрица канонического вида по строкам \mathbf{V}_e должна содержать два ведущих элемента. При наличии же одного ведущего элемента вектора будут $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ линейно зависимы. То есть задачу можно сформулировать и в виде поиска канонической формы матрицы регрессора по строкам:

$$\mathbf{H}_b \boldsymbol{\psi}_b = \mathbf{H} \mathbf{E}_\mathbf{H}^T \mathbf{E}_\psi \boldsymbol{\psi}$$

Где $\mathbf{E}_\psi \in \mathbb{R}^{n \times p-r}$ - матрица канонического вида \mathbf{H} по строкам, $\boldsymbol{\psi}_b = \mathbf{E}_\psi \boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^{p-r \times 1}$ - вектор базовых параметров, $\mathbf{H}_t = \mathbf{H} \mathbf{E}_\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times p-r}$ - преобразованный регрессор, $\mathbf{E}_\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times p-r}$ - матрица полученная из канонической формы \mathbf{E}_ψ обнулением всех не ведущих элементов, r - сумма количества линейно зависимых и нулевых столбцов матрицы \mathbf{H} . Полученные матрицы позволяют удобно переходить от выбранного вектора параметров к базовым, и соответственно трансформировать регрессор. Анализ $\boldsymbol{\psi}_t \in \mathbb{R}^{p-r \times 1}$ сразу же дает информацию об идентифицируемости и линейной зависимости параметров. Ограничением данного метода является необходимости тщательно контролировать порядок элементарных операции над столбцами регрессора, с другой стороны матрицы $\mathbf{E}_\psi, \mathbf{E}_\mathbf{H}$, могут быть найдены с помощью неравенства Коши - Буняковского, на этом подходе и остановимся.

В дальнейшем будем предполагать, что матрица наблюдений соответствует базовому набору параметров. Стоит, однако подчеркнуть, что, обладая достаточно точными априорными знаниями о параметрах и накладывая некоторые ограничения на область их изменения определение базового набора оказывается не столь существенным. Кроме того, нахождения минимального набора параметров так же не существенно при использовании некоторых алгоритмах вычисления, которые будут рассмотрены нами далее.

Рассуждения выше касались лишь взаимосвязи между столбцами матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$, однако не стоит забывать что данная матрица является в

общем случае функцией обобщенных координат, скоростей и ускорений. Естественно полагать, что при отработке различных траекторий элементы матрицы $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ так же будут различными. То есть, даже при выборе набора базовых параметров и преобразования регрессора к соответствующему виду возможен выбор таких траекторий \mathbf{q} которые не позволяют определить весь вектор параметров $\boldsymbol{\psi}$. Интуитивно понятно, что при равномерном движении на малых скоростях не удастся определить значения тензора инерции так-как инерционный момент зависит от ускорений. Возможность определения параметров по входам и выходам системы тесно связано с понятием наблюдаемости [?]. Для решения этой проблемы выбранная траектория должна соответствовать определенным критериям. Для рассматриваемой модели (линейной к параметрам) разработаны множество статистических критериев, базирующихся на теории оптимального планирования эксперимента, наиболее популярными из них являются следующие:

1. Минимизация следа матрицы гессе $\text{Tr}(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$
2. Максимизация определителя $\det(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$
3. Максимизация минимального сингулярного значения $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$

Данные критерии достаточно просто вычисляются через численный анализ матрицы \mathbf{H} и допускают наглядную геометрическую интерпретацию. В самом деле для фиксированного вектора измерений линейное преобразование \mathbf{H} может быть описано с помощью характеристического эллипсоида $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ в области параметров $\boldsymbol{\psi}$ тогда критерии выше могут быть рассмотрены с геометрической точки зрения как соответственно максимизация суммы полуосей (критерий 1.), максимизация объема (критерий 2), максимизация самой короткой полуоси. Интересно заметить, что, хотя данные критерии являются широко известными в области регрессионного анализа линейных моделей в области калибровки роботов широкого распространения они не получили, но в тоже время были предложены схожие критерии:

1. Максимизация произведения собственных значений $\mathcal{O}_1 = \prod_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i}$
2. Минимизация числа обусловленности $\mathcal{O}_2 = \kappa(\mathbf{H}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{H})}{\sigma_{\min}(\mathbf{H})}$,
3. Максимизация минимального сингулярного значения $\mathcal{O}_3 = \sigma_{\min}(\mathbf{H})$

Как и прежде данные критерии допускают наглядную геометрическую интерпретацию, \mathcal{O}_1 - максимизирует объем гипер-эллипсоида, \mathcal{O}_2 - минимизирует эксцентриситет гипер-эллипсоида т.е. делает его более похожим на гипер-сферу, \mathcal{O}_3 - удлиняет самую короткую ось эллипсоида. Основываясь на данных критериях может быть выбран такой оптимальный закон изменения

обобщенных координат $\mathbf{q}^*(t)$ который позволит наилучшим образом провести процедуру идентификации. В общем случае можно задасться функционалом $\mathcal{F}_c = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{O}_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) dt$ с граничными условиями, а затем применить оптимизационную схему Эйлера-Лагранжа (уравнение Эйлера-Пуассона), и проинтегрировать полученную систему дифференциальных уравнений третьего порядка, однако в этом случае существование решения не очевидно, а обобщенные скорости и ускорения между граничными точками могут принимать сколь угодно большие значения, ограничения же скоростей и ускорений ведут к условной задаче вариационного исчисления. Более того необходима проверка и доказательство типа экстремума. Иной подход был предложен в работе. Для этого, например, можно задасться ограничениями

В теории линейной идентификации предложен общий критерий сходимости параметров к истинным значениям в случае линейной модели вида (??) является критерий интегральной не выраженности матричной функции $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ [?, ?], в соответствии с этим критерием матричная функция $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ называется интегрально-невырожденной если существует $t_0 > 0, \beta \geq \alpha > 0, t_1 > 0$ такие, что для всех $t > t_0$ выполняется:

$$\alpha \mathbf{I}_n \leq \int_t^{t+t_1} \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \tau)^T \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \tau) d\tau \leq \beta \mathbf{I}_n \quad (4.27)$$

В литературе данный критерий часто называют "постоянным возбуждением нетрудно заметить что данный критерий гарантирует постоянную положительную определенность матрицы Гессе (??).

Другим популярным методом оценки параметров является применение фильтра Калмана [?], нетрудно показать что для постоянного вектора параметров и отсутствия шума в процессе оценка по фильтру Калмана эквивалентна (??). С другой стороны, фильтр Калмана способен учитывать неопределенность в параметрах если она задана белым гауссовым шумом с известной ковариационной матрицей, что в некоторых случаях является полезным свойством.

4.3 Рекомендации при оценке параметров

Перед тем как приступать к применению методов, описанных выше к экспериментальным данным следует учесть некоторые замечания [?]:

- Дифференцирование сигналов положения и скорости должно производиться по алгоритму центральных разностей дабы избежать запаздывания сигнала на один шаг;
- Сигналы моментов (токов) должны быть отфильтрованы с помощью фильтра нижних частот, тот же фильтр должен применяться к столбцам регрессора;

- В случае если робот имеет большое число СП (обычно 6) рекомендуется проводить идентификацию в два этапа, сначала трех первых сочленений, а затем трех последних, так как силовые факторы влияющие на данные сочленения существенно различны по величине;
- Количество измерений должно как минимум в 500 раз превосходить количество идентифицируемых параметров;
- Параметры фильтров и их порядок может быть определен при симуляции алгоритма идентификации;

Для проверки адекватности полученной модели могут быть проведены следующие тесты:

- Оценка ошибки на идентифицируемой траектории;
- Оценка ошибки на траектории, которая не была использована для идентификации;
- Нагружение робота дополнительной известной нагрузкой и сравнение ее значений с результатами идентификации;
- Проверка выполнения свойств динамических уравнений (положительная определенность и симметричность матрицы инерции и т.д.);
- Симуляция системы с идентифицированными параметрами и сравнение с реальными измерениями.

Как уже не раз отмечалось, для идентификации параметров манипуляционного робота основанной на его динамической модели, нам необходимы оценки ускорений, к сожалению, для этого необходимо реализовывать алгоритмы численного дифференцирования, которые обладают существенными недостатками, либо использовать запаздывающие реальные дифференцирующие звенья. Обойти данный факт можно использовав для идентификации модель энергии либо мощности. Действительно, в главе посвященной динамике манипуляционного механизма нами были получены формулы для модели энергии (??) и ее приращения (??) за фиксированное время Δt :

$$\Delta \mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \left(\phi_{\mathcal{H}_i}(\mathbf{q}_{t_2}, \dot{\mathbf{q}}_{t_2}) - \phi_{\mathcal{H}_i}(\mathbf{q}_{t_1}, \dot{\mathbf{q}}_{t_1}) \right)^T \boldsymbol{\psi}_i = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{q}} dt$$

Нетрудно заметить, что данные модели не зависят от ускорения, однако при этом они также линейны к параметрам. Более того, уравнения для расчета полной энергии существенно проще полной динамической модели манипулятора. То есть теоретически манипуляционный механизм может быть идентифицирован на основе модели его энергии либо мощности, данный подход

хотя и является интуитивно понятным, был предложен сравнительно недавно. В [?] можно найти следующие замечания касательно сравнения моделей базирующейся на энергии и полным уравнением динамики:

- Количество уравнений в динамической модели равно количеству СП, в то время как энергия представляет собой скаляр, из-за чего идентификация, базирующаяся на модели энергии более чувствительна к выбору траектории.
- Процедура идентификации, построенная на модели энергии не чувствительна к шуму измерений и практически не нуждается в применении фильтров, в то время как модель динамики существенно зависит от параметра используемых фильтров.

Примечательно что при правильно построенной модели динамики оба метода дают сравнительно одинаковые оценки параметров. В тексте данной работе все же сконцентрируемся на использовании модели динамики. Сравнение идентифицированных параметров с результатами, полученными для энергетической модели может быть рассмотрено как дальнейшее логическое продолжение данной работы.

5. Экспериментальная часть

В ходе данной работы нами будет исследовано управляемое движение колабративного робота *Universal Robot 5* (далее *UR5*) изображенного на рисунке ???. Исследование будет проводится следующим образом:

1. Разработка кинематической математической модели и ее проверка.
2. Разработка математической модели динамики манипулятора включающей модель трения.
3. Идентификация параметров динамики и трения.
4. Верификация найденных параметров
5. Симуляция управляемого движения модели с учетом найденных параметров
6. Сравнение результатов управления для различных алгоритмов

Перед тем как приступать непосредственно к анализу и обработке результатов измерений опишем наш объект.

5.1 Объект исследования

Объектом исследования в данной работе является манипуляционный робот фирмы *Universal Robots* грузоподъемностью 5 кг. Основные технические характеристики данного робота приведены в таблице ??. Роботы данной компании ежедневно используются более чем на 20000 производственных участках. Главной отличительной чертой данных роботов является их колабративность - т.е. возможность безопасного взаимодействия с человеком-оператором. Восемьдесят процентов от общего числа роботов *UR* эксплуатируется во всем мире без защитных ограждений (после оценки рисков) рядом с рабочими местами операторов. Системы безопасности данных роботов одобрены и сертифицированы в большинстве стран. В настоящий момент роботы *UR* являются лидерами на рынке колабративных роботов.

Для обмена информацией между ПК оператора и ПК системы управления роботом используется интерфейс обмена данными в реальном времени работающий по протоколу *TCP/IP* с частотой 125 Гц. В ходе работы системы, оператору передается сообщение содержащие информацию о статусе робота. Данное сообщение содержит информацию об углах и скоростях в СП, токах на двигателях и т.д.

Полезная нагрузка:	5 кг
Количество СП:	5
Ср. потр мощность:	150 Вт
Координаты СП:	360
Макс. скорости СП:	180
Макс. скорость РО:	1 м/с
Макс. моменты в СП:	
Для СП 1 – 3:	28 Нм
Для СП 4 – 6:	150 Нм
Масса:	15

Таблица 5.1: Основные технические характеристики робота

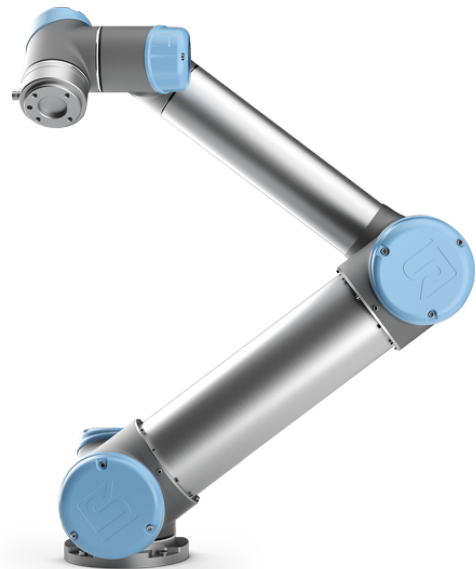


Рис. 5.1: Манипуляционный робот UR5

При взаимодействии через данный интерфейс оператор отвечает за настройку переменных, которые должны быть синхронизированы. Можно указать любую комбинацию входных и выходных регистров, которые оператор должен отправлять и принимать, соответственно. В ходе данной работы интерфейс был настроен таким образом, чтобы получать максимально возможный набор переменных. Наименование данных переменных и их расшифровка приведены в таблице ??:

<i>time</i>	время работы СУ	<i>actual_q</i>	измеренные углы в СП
<i>target_q</i>	необходимые углы в СП	<i>actual_qd</i>	измеренные скорости в СП
<i>target_qd</i>	необходимые скорости в СП	<i>actual_current</i>	измеренные токи на двигателях
<i>target_qdd</i>	необходимые ускорения в СП	<i>tcp_pose</i>	вычисленное положение РО
<i>target_current</i>	необходимые токи на двигателях	<i>tcp_speed</i>	вычисленная скорость РО
<i>target_moment</i>	необходимые моменты на двигателях	<i>tcp_force</i>	вычисленная сила на РО

Таблица 5.2: Принимаемые с робота данные

СУ робота вычисляет необходимые моменты на приводах на основании некоторой динамической модели. Вычисленные на основании модели моменты служат для определения оценок необходимых токов на приводах. Для этого в системе управления реализована модель связи токов и моментов учитывающая трение в преобразователях движения. Модель трения подобна описанной нами ранее (?). К сожалению параметры этой модели не известны.

Однако так как мы обладаем данными описывающими желаемые токи и моменты то данные параметры могут быть идентифицированы.

5.1.1 Априорные знания об объекте

Перед тем как приступить к идентификации желательно определить начальный вектор параметров и/или возможную область их изменения.

Производитель робота любезно предоставляет данные о массах звеньев и расположении их центров масс, их можно найти в конфигурационном файле робота *urontrol.conf* хранящемся в ПК системы управления либо, напрямую через сайт компании *UR*. Значение данных параметров представлены в таблице ??.

Номер звена, i :	1	2	3	4	5	6
Масса звена, [кг]	3.7000	8.3930	2.330	1.2190	1.2190	0.1897
Коорд. x ЦМ, [м]:	0	0.2125	0.15	0.0	0.0	0.0
Коорд. y ЦМ, [м]:	-0.02561	0	0	-0.0018	-0.0018	0.0
Коорд. z ЦМ, [м]:	0.00193	0.11336	0.0265	0.01634	0.01634	-0.001159

Таблица 5.3: Исходные массы и центры масс

Стоит отметить что координаты ЦМ вычислены по отношению к ЛСК привязанным к звеньям, что полностью соответствует выбранному нами ранее способу и избавляет нас от необходимости проводить их пересчет.

В том же файле производитель робота любезно указывает параметры Денавита-Хартенберга (таблица ??), применив которые в нашей кинематической модели сразу же получим решение ПЗК. Более того так как модель динамики механизма была описана нами в терминах матриц преобразования обобщенных координат то, построение динамической модели существенно упрощается.

СП: i	1	2	3	4	5	6
a , [м]	0	-0.42500	-0.39225	0	0	0
d , [м]	0.089459	0	0	0.10915	0.09465	0.0823
α , [рад]	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$	$-\pi/2$	0

Таблица 5.4: Параметры Денавита-Хартенберга

Отметим что в данной работе мы предполагаем, что параметры ДХ предоставляемые производителем робота несущественно отличаются от истинных. Естественно для подтверждения этого факта нам необходимо непосредственно измерять положения РО, а затем идентифицировать ошибку ДХ параметров. Данная задача является задачей геометрической идентификации и в

тексте данной работы рассматриваться не будет. В дальнейшем будем основываться на предположении о равенстве истинных и предоставляемых производителем геометрических параметров.

5.2 Модель объекта

Перед непосредственным применением методов идентификации требуется разработать математическую модель объекта параметры которой и необходимо определить. В ходе данной работы будет построена кинематическая модель объекта - служащая для проверки правильности составления матриц преобразования. После того как мы убедимся в точности кинематической модели перейдем к расчету динамической модели в форме линейной к параметрам. При необходимости будем усложнять модель вводя не промоделированные ранее факторы, такие, например, как силы трения либо редуцировать модель отбрасывая слабо влияющие параметры.

Приступим к первому шагу - моделированию кинематики объекта.

5.2.1 Кинематическая модель объекта

Кинематическая модель объекта построена с помощью выражений (??), (??) и представляет из себя вычислительную процедуру решения ПЗК о положении и скорости, при этом ДХ параметры выбраны нами из таблицы ?? и предоставляются производителем. Для вычислений напрямую используются измеренные углы в СП.

Сравним результаты расчета с данными полученными из системы управления роботом. Полученные графики решения ПЗК о положении и скорости представлены на рисунках (??)

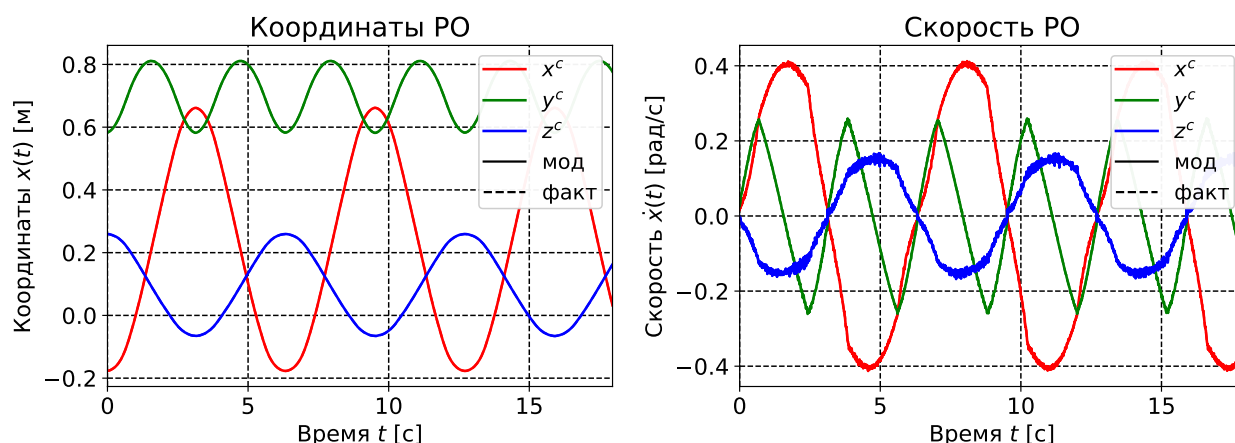


Рис. 5.2: Решение ПЗК о положении и скорости

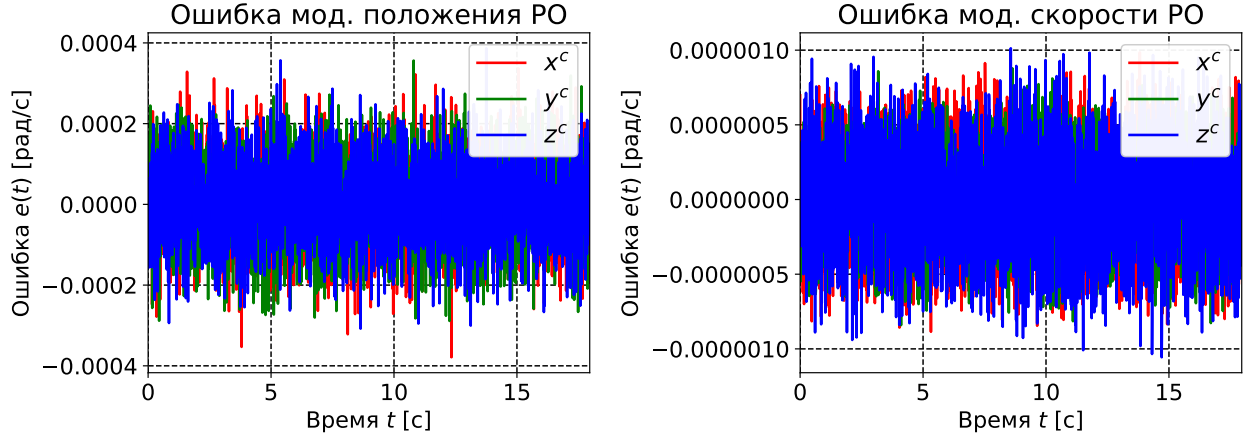


Рис. 5.3: Желаемые в СП манипулятора

Как можно убедиться ошибка модели пренебрежительно мала, что позволяет нам перейти к созданию модели динамики.

5.2.2 Динамическая модель объекта

Построение модели динамики будем проводить в форме линейной к параметрам $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\psi}$, Для этого зададимся вектором параметров исходя из данных предоставляемых производителем робота.

Так как компоненты вектора параметров вычислены по отношению к началу своих ЛСК то необходимо провести пересчет тензоров инерции из центров масс в соответствующие ЛСК, для этого воспользуемся теоремой Гюйгенса-Штенейра в тензорной форме:

$$\mathbf{J}_{ij}^a = \mathbf{J}_{ij}^c + m (\|\mathbf{r}\|^2 \delta_{ij} - r_{c_i} r_{c_j}) \quad (5.1)$$

Где, \mathbf{J}_{ij}^c - тензор инерции выраженный в ЛСК расположенной в центре масс, \mathbf{J}_{ij}^a - тензор инерции рассчитанный относительно параллельной ЛСК но в новой точке a , r_{c_j} - вектор смещения от центра масс к новой точке, а δ_{ij} — символ Кронекера. В ходе наших расчетов за начальные моменты тензоров инерции примем нулевые. Так же учтем, что нам известны вектора, направленные из начала каждой ЛСК к соответствующему центру масс. Подставляя данные вектора со знаком минус в уравнение выше получим начальные значения тензоров инерции. Проводя анализ полученных матриц заключим что начальный вектор параметров может быть выбран как $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_{1...6} \mid J_{xz_2} \ J_{xz_3} \ J_{yz_4} \ J_{yz_5}]^T$ где $\boldsymbol{\psi}_{1...6}$ вектор параметров составленных из шести векторов $\boldsymbol{\psi}_i = [m_i r_{x_i}^c, m_i r_{y_i}^c, m_i r_{z_i}^c, m_i, J_{xx_i}^*, J_{yy_i}^*, J_{zz_i}^*]^T$ для каждого из 6 звеньев робота.

Далее построим матрицу $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})$ с помощью уравнений (??) и найдем линейно зависимые столбцы полученной матрицы с помощью процедуры опи-

санной нами в главе посвященной идентифицируемой. Данный анализ показывает следующее:

- Параметры $m_1 r_{x_1}^c, m_1 r_{y_1}^c, m_1 r_{z_1}^c, J_{yy_1}^*, m_1$ не идентифицируемы и должны быть исключены из модели объекта.
- Параметры $J_{xx_1}^*, J_{zz_1}^*, J_{zz_2}^*, J_{zz_3}^*, J_{yy_4}^*$ линейно зависимы с единичными коэффициентами и могут быть объединены в параметр ψ_1^* , то же касается параметров $\{m_2 r_{z_2}^c, J_{xz_2}\} \rightarrow \psi_2^*, \{J_{zz_4}^*, J_{yy_5}^*\} \rightarrow \psi_3^*, \{J_{zz_5}^*, J_{zz_6}^*\} \rightarrow \psi_4^*$

Итоговые предварительные оценки параметров внесем в таблицу ???. В данной таблице желтым цветом отмечены линейно зависимые параметры.

ψ_1^*	$m_2 r_{x_2}^c$	$m_2 r_{y_2}^c$	ψ_2^*	m_2	$J_{xx_2}^*$	$J_{yy_2}^*$	$m_3 r_{x_3}^c$	$m_3 r_{y_3}^c$	$m_3 r_{z_3}^c$	m_3	$J_{xx_3}^*$
0.0345	1.7835	0.	0.4757	8.393	1.379	1.	0.3495	0.	0.0617	2.33	1.0524
$J_{yy_3}^*$	$m_4 r_{x_4}^c$	$m_4 r_{y_4}^c$	$m_4 r_{z_4}^c$	m_4	$J_{xx_4}^*$	ψ_3^*	$m_5 r_{x_5}^c$	$m_5 r_{y_5}^c$	$m_5 r_{z_5}^c$	m_5	$J_{xx_5}^*$
1.	0.	-0.0022	0.0199	1.219	0.075	0.0003	0.	-0.0022	0.0199	1.219	0.075
ψ_4^*	$m_6 r_{x_6}^c$	$m_6 r_{y_6}^c$	$m_6 r_{z_6}^c$	m_6	$J_{xx_6}^*$	$J_{yy_6}^*$	J_{xz_3}	J_{yz_4}	J_{yz_5}		
0.0003	0.	0.	-0.0002	0.1897	0.075	0.075	0.0093	-0.00013	-0.0001		

Таблица 5.5: Предварительные оценки параметров

Перейдем к непосредственно к процедуре идентификации. При этом параметры приведенные в таблице ?? будем использовать в качестве начальных. Отметим что в данной таблице мы так же учли моменты инерции роторов двигателей, примерно равные $J_m \approx 1^{-4}$ кг м² для первых трех СП и $J_m \approx 0.15^{-4}$ кг м² для последних трех СП.

5.3 Идентификация параметров объекта

В ходе данной работы идентификация параметров объекта будет производиться в три этапа.

1. Оценка внутренней модели трения
2. Идентификация параметров механизма
3. Верификация полученных параметров

Процедура идентификации будет считаться успешно завершенной в том случае если будут найдены параметры объекта, удовлетворяющие физическому смыслу и минимизируйте норму ошибки между реальными измерениями и полученной моделью. Кроме того, имеет смысл полагать что идентифицированные массы и центры масс должны быть близки к данным предоставляемым производителем робота.

Однако предварительно необходимо выбрать траекторию пригодную для идентификации.

5.3.1 Тестовая траектория

В данной работе нами будут рассмотрены две траектории, первая из них предназначена для идентификации модели, вторая для ее верификации. Графики обобщенных координат скоростей и положений для идентифицирующей траекторий приведен на рисунках ??,??,?? соответственно. Данная

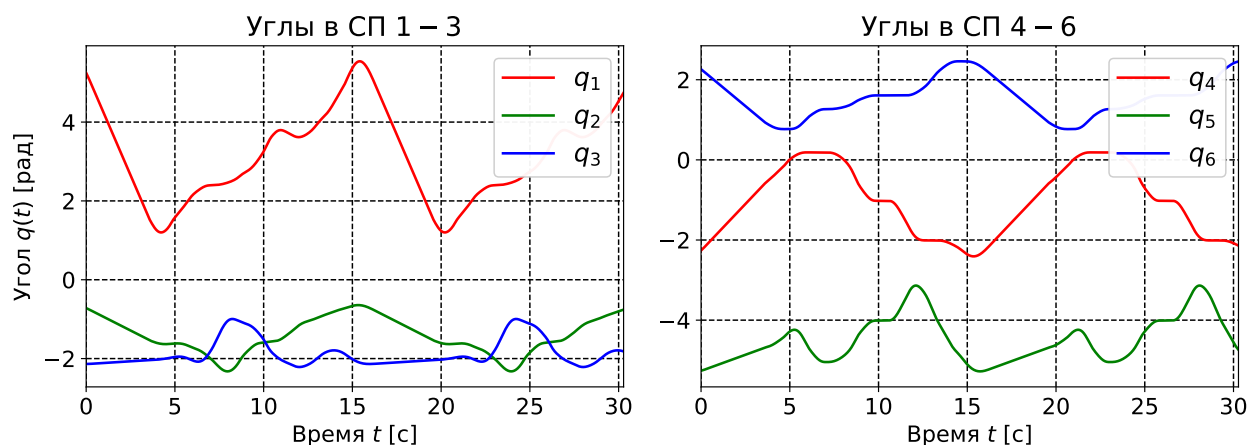


Рис. 5.4: Желаемые углы в СП манипулятора

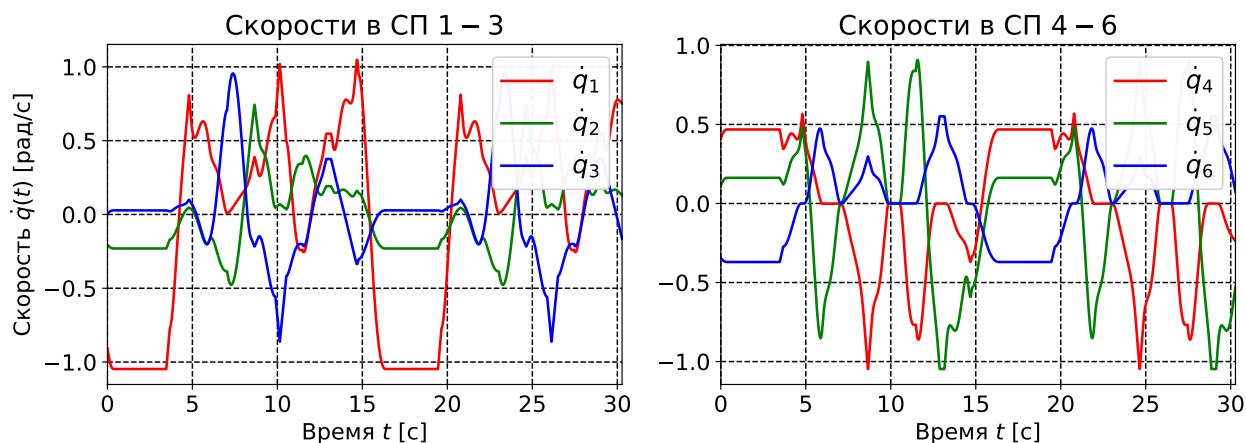


Рис. 5.5: Желаемые скорости в СП манипулятора

траектория была выбрана эвристически, таким образом, чтобы обеспечить широкие диапазоны изменения как положений, так и скоростей с ускорениями. После чего траектория была успешно проверена по критерию постоянного возбуждения, что означает допустимость данной траектории для идентификации. При дальнейшем развитии данной работы траектория может быть выбрана оптимальной (с точки зрения наблюдаемости).

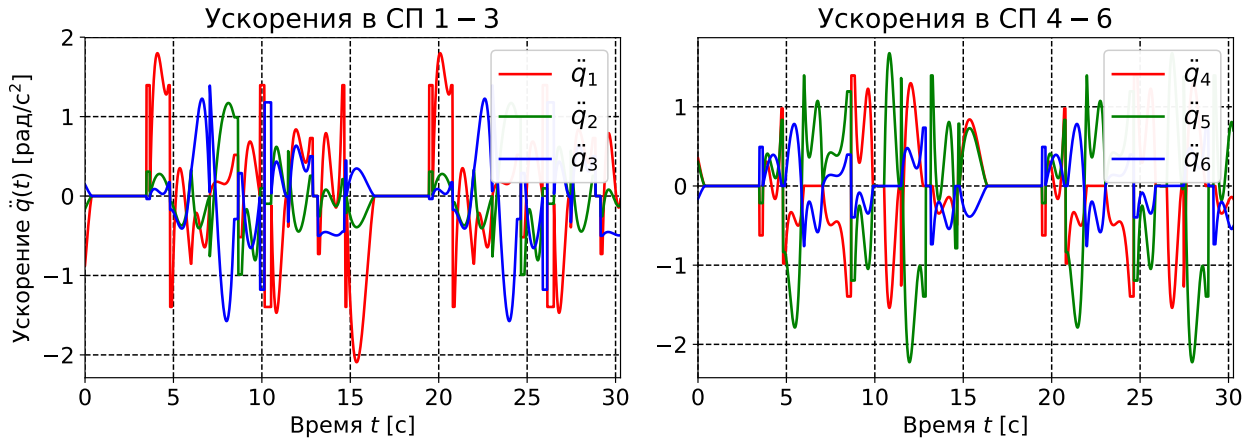


Рис. 5.6: Желаемые ускорения в СП манипулятора

5.3.2 Модель силы трения

Как уже было сказано выше в системе управления манипулятором реализована внутренняя модель связи между током на приводе и моментом на выходном валу его редуктора. Одной из наиболее часто используемых моделей базируется на описанной нами ранее модели (??) смешанного трения. Тогда для i -го сочленения можем записать:

$$K_{m_i} K_{r_i} I_i = \tau_i + \varphi(\dot{q}_i, 2\sigma_{\dot{q}_i}) |\tau_{se}| \text{sign } \dot{q}_i + (1 - \varphi(\dot{q}_i, 2\sigma_{\dot{q}_i})) |\tau_{sm}| \text{sign } \dot{q}_i + b\dot{q}_i \quad (5.2)$$

Зададимся вектором параметров $\psi_f^T = [\tau_{se} \ \tau_{sm} \ b \ K_m K_r]$ и перепишем уравнение выше форме линейной к этим параметрам:

$$\tau = \phi_f(\dot{q}, I) \psi_f \quad (5.3)$$

Здесь $\phi_f(\dot{q}) = [-\varphi(\dot{q}, 2\sigma_{\dot{q}}) \text{sign } \dot{q} \quad -(I_n - \varphi(\dot{q}, 2\sigma_{\dot{q}})) \text{sign } -\dot{q} \quad -\dot{q} \quad I]$ - матрица регрессор для трения.

Так как уравнение выше записано в форме линейной к параметрам то для их оценки можно воспользоваться любым из методов, описанных в главе, посвященной МНК. При этом стоит учесть априорные знания о параметрах, например, о коэффициентах моментов и передаточных отношениях редукторов. Тогда для определения параметров модели реализованной в системе управления, сформируем переопределенную систему уравнений, задавая в качестве векторов τ, \dot{q}, I их желаемые значения предоставляемые системой управления. Решив данную систему с помощью МНК получим значения искоемых моментов и коэффициентов сил трения. Полученные данные приведены в таблице ??

О точности полученных оценок можно судить изучая графики ??, ??. Как можем заключить из графика ?? максимальная ошибка предсказания с помощью модели (??) не превышает 0.4 Н для первых трех сочленений и примерно

Номер СП, i :	1	2	3	4	5	6
$K_m K_r$, [Нм/А]	12.094	11.940	11.972	6.33	5.513	6.713
τ_{se} , [Нм]:	5.7494	5.3904	5.0548	0.343	0.384	0.268
τ_{sm} , [Нм]:	7.8117	6.544	6.733	2.1363	1.32415	1.3856
b , [Нс]:	9.744	14.222	12.207	0.915	0.533	0.980

Таблица 5.6: Параметры внутренней модели связи момента и тока

0.2 для последних трех. Для более точного расчета погрешности воспользуемся значением удвоенного среднеквадратичного отклонения. Расчет показал, что для первых трех СП максимальное значение удвоенного среднеквадратичного отклонения $2\sigma_{max} = 0.128$ Н, в то время как для последних трех сочленений $2\sigma_{max} = 0.095$ Н. В данной работе такую точность будем считать приемлемой, тогда найденные параметры τ_{se} , τ_{sm} , b , $K_m K_r$ могут быть использованы для расчетов тока по моменту.

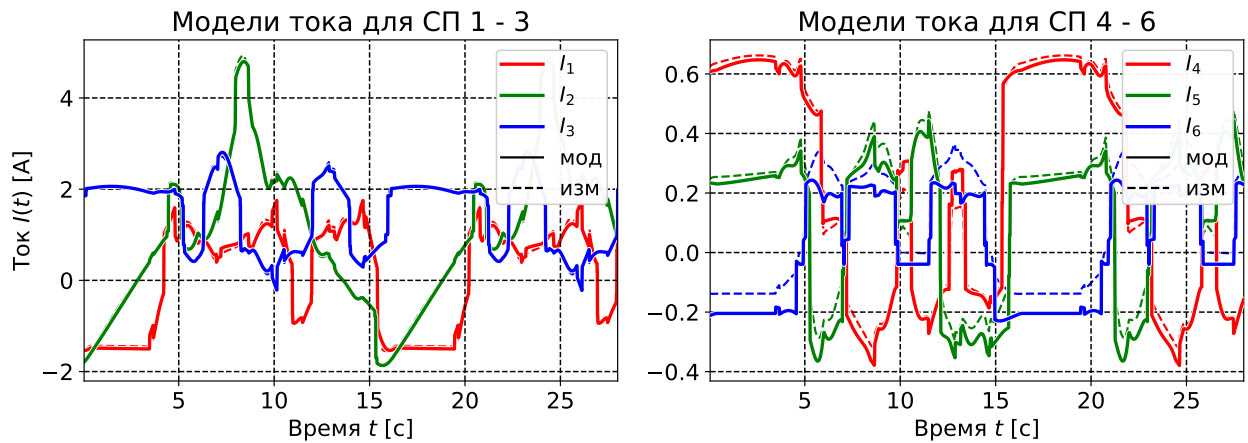


Рис. 5.7: Модель тока

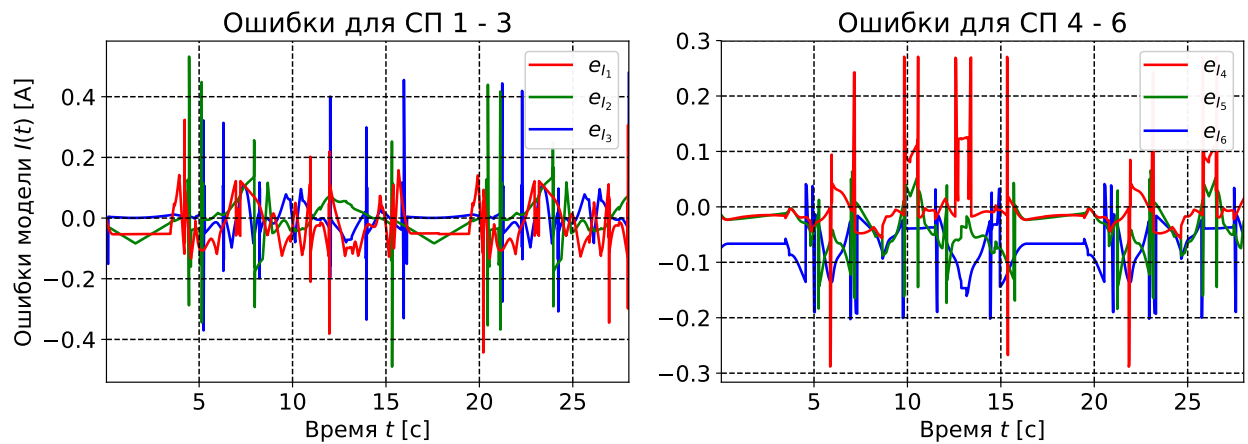


Рис. 5.8: Ошибки модели

5.3.3 Оценка динамических параметров манипулятора

Выше мы провели предварительную оценку модели трения реализованной в системе управления. Следующим этапом будет идентификация непосредственно динамических параметров манипулятора робота. Имея в наличии связь между током и моментом сформируем модель динамики по отношению к току:

$$IK_m K_r = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) & \phi_f(\dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi \\ \psi_f \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Для начала, сравним расчет токов, сделанный с использованием начальных векторов параметров с их измеренными значениями. Для этого подставим предварительно отфильтрованные значения скоростей и ускорений в выражение выше и сравним результат с реальным током. Полученный график приведен на рисунке ??, ошибки показаны на рисунке ??

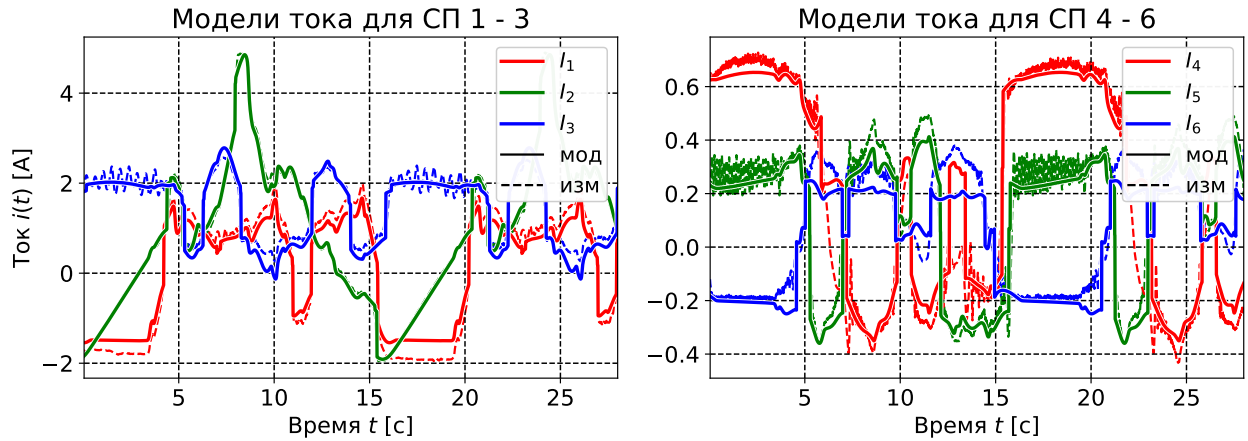


Рис. 5.9: Расчет токов для начальных параметров

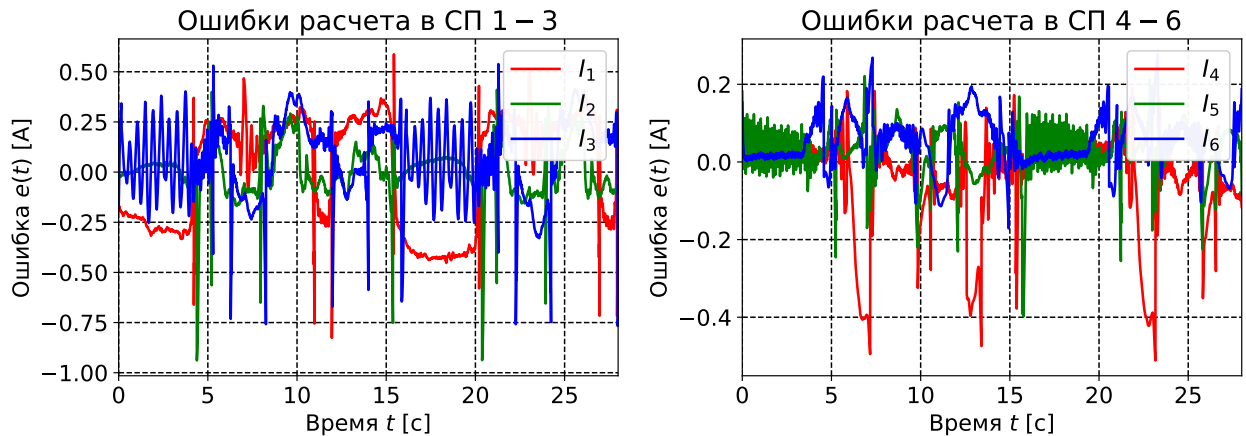


Рис. 5.10: Ошибка расчета

Заметим, что даже для начального вектора параметров модель имеет допустимую ошибку, что может свидетельствовать о близости полученной модели к реальному объекту. Ошибки, присутствующие в модели должны быть в большей мере обусловлены неточностями в оценках тензоров инерции. Основанием для этого является то что массы и центры масс предоставляются производителем и естественно полагать, что производитель обладает достаточно точными значениями этих параметров.

Воспользуемся МНК для получения новых оценок параметров. При этом введем некоторые ограничения на их значение. Для этого учтем положительность масс, допустимые области центров масс и т.д. Будем считать, что истинные параметры манипулятора отличаются от предоставляемых производителем не более чем на 10%. Тогда сведем задачу к стандартной форме квадратичного программирования, описанного нами в главе, посвященной методам идентификации. Отметим что матрица Тихонова $\mathbf{\Gamma}$ была выбрана таким образом что бы назначать большие веса в изменении вектора параметров трения. Полученный вектор параметров приведен в таблице ??.

ψ_1^*	$m_2 r_{x_2}^c$	$m_2 r_{y_2}^c$	ψ_2^*	m_2	$J_{xx_2}^*$	$J_{yy_2}^*$	$m_3 r_{x_3}^c$	$m_3 r_{y_3}^c$	$m_3 r_{z_3}^c$	m_3	$J_{xx_3}^*$
0.5585	1.8295	-0.0019	0.2368	8.3887	1.2947	1.0307	0.3235	0.0001	0.0138	2.4332	0.2328
$J_{yy_3}^*$	$m_4 r_{x_4}^c$	$m_4 r_{y_4}^c$	$m_4 r_{z_4}^c$	m_4	$J_{xx_4}^*$	ψ_3^*	$m_5 r_{x_5}^c$	$m_5 r_{y_5}^c$	$m_5 r_{z_5}^c$	m_5	$J_{xx_5}^*$
0.3984	-0.01	-0.001	0.0214	1.2088	0.0856	0.2514	0.0058	-0.0024	0.0117	1.2058	0.0265
ψ_4^*	$m_6 r_{x_6}^c$	$m_6 r_{y_6}^c$	$m_6 r_{z_6}^c$	m_6	$J_{xx_6}^*$	$J_{yy_6}^*$	J_{xz_3}	J_{yz_4}	J_{yz_5}		
0.0973	0.0	0.	-0.00017	0.1848	0.0494	0.0756	0.1578	0.0179	0.0012		

Идентифицированные параметры

Проведем расчет токов соответствующих новому вектору параметров (рис. ??), график ошибки приведен на рисунке ??.

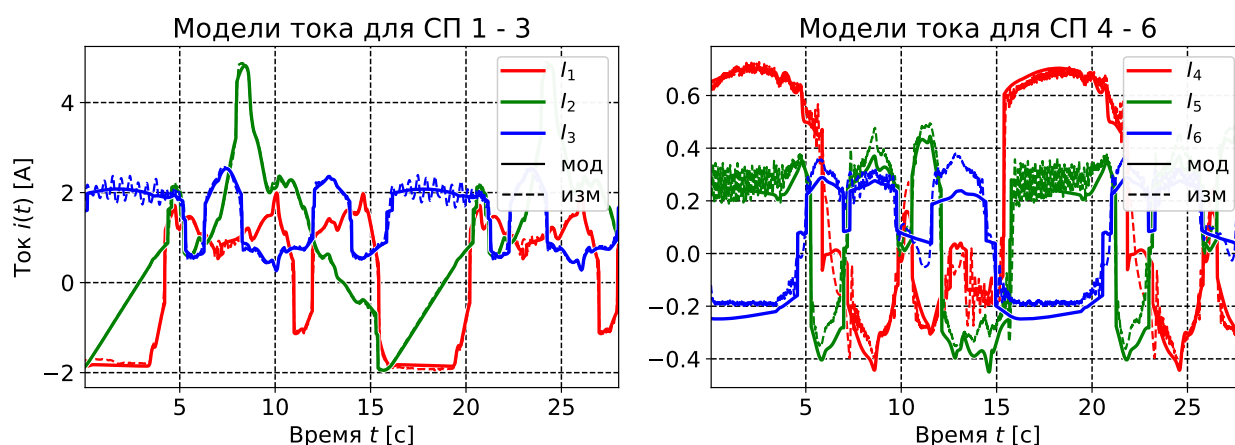


Рис. 5.11: Расчет токов для найденных параметров

Сравним полученные ошибки, соответствующие начальному и найденному вектору параметров в терминах среднеквадратичного отклонения и среднего. Полученные значения приведены в таблице ?. Основываясь на данной

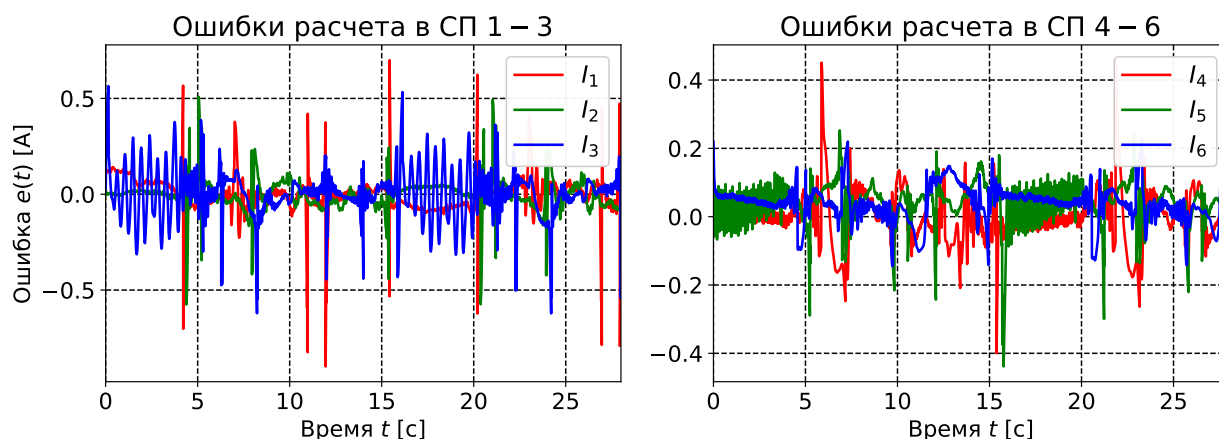


Рис. 5.12: Ошибки расчета

таблице можем заключить что точность модели повысилась. Особенно существенно уменьшение погрешности расчета для первой СП, одной из причин этому могут быть неучтенные прежде моменты инерции звеньев, так как именно первая СП наиболее подвержена влиянию инерционных эффектов. Кроме того, полученная модель более центрирована относительно нуля, о чем говорят меньшие значения средних μ .

Номер СП, i :		1	2	3	4	5	6
2σ	ψ_0	0.559	0.267	0.398	0.249	0.125	0.132
	$\hat{\psi}$	0.211	0.166	0.264	0.153	0.124	0.107
μ	ψ_0	0.01	0.003	0.068	0.043	0.038	0.052
	$\hat{\psi}$	-0.004	-0.001	0.0013	-0.004	0.026	0.039

Таблица 5.8: Оценка точности модели

Естественно, что одного среднеквадратичного отклонения и среднего вычисленного для той же траектории для которой и решалась задача МНК не достаточно для оценки модели. Одним из вариантов верификации полученных параметров, как мы уже отмечали ранее может быть проверка на другой траектории.

5.3.4 Верификация моделей

В целях подтверждения адекватности полученных параметров, используем их для решения первой задачи динамики и вычисления токов на приводах, соответствующих слежению за траекторией отличной от той что была выбрана для целей идентификации.

Для этого рассмотрим периодическую траекторию с трапецеидальным законом изменения скорости представленную на рисунках ??,??,??.

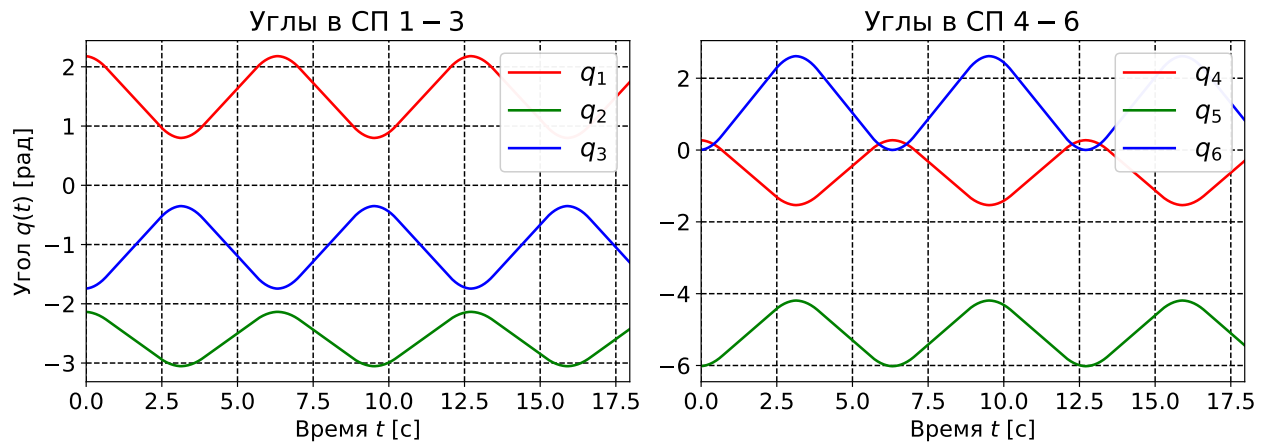


Рис. 5.13: Желаемые углы в СП манипулятора

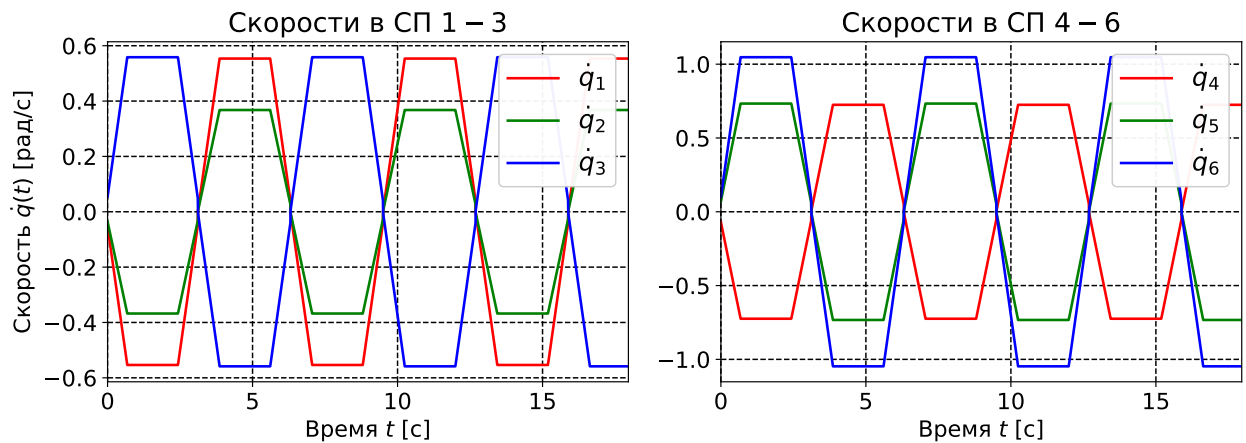


Рис. 5.14: Желаемые ускорения в СП манипулятора

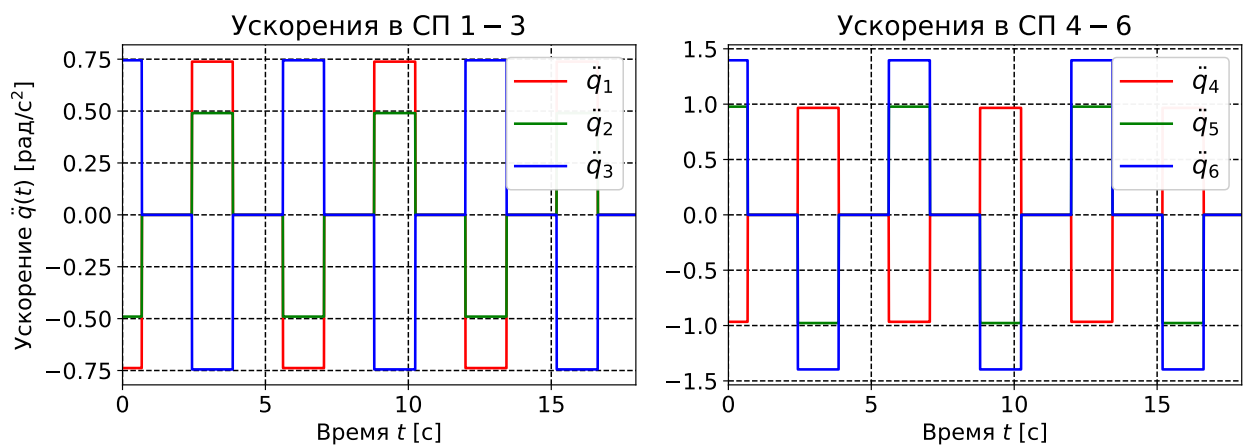


Рис. 5.15: Желаемые в СП манипулятора

Проводя расчет для траекторий выше получим следующие графики токов (рис.??) и ошибок расчета (рис. ??). Как можно заметить по данным графикам в некоторых случаях поведение модели и реальной системы различно.

Особенно сильно это проявляется на последних 3-х СП, там же можем отметить некоторую установившуюся ошибку. Повысить качество идентификации последних трех сочленений можно с помощью двух этапной процедуры, в ходе которой первые и последние звенья манипулятора идентифицируются последовательно и независимо.

Резкие скачки ошибок можно объяснить неучтенной динамикой управляемого привода, так как ток не может мгновенно достичь желаемого значения, учесть данный фактор можно идентифицируя частоту среза контура регулирования тока с помощью аппроксимации его дифференциальным уравнением первого либо второго порядка, оставим эту методику для дальнейшего развития работы, сейчас же данную динамическую ошибку будем считать допустимой.

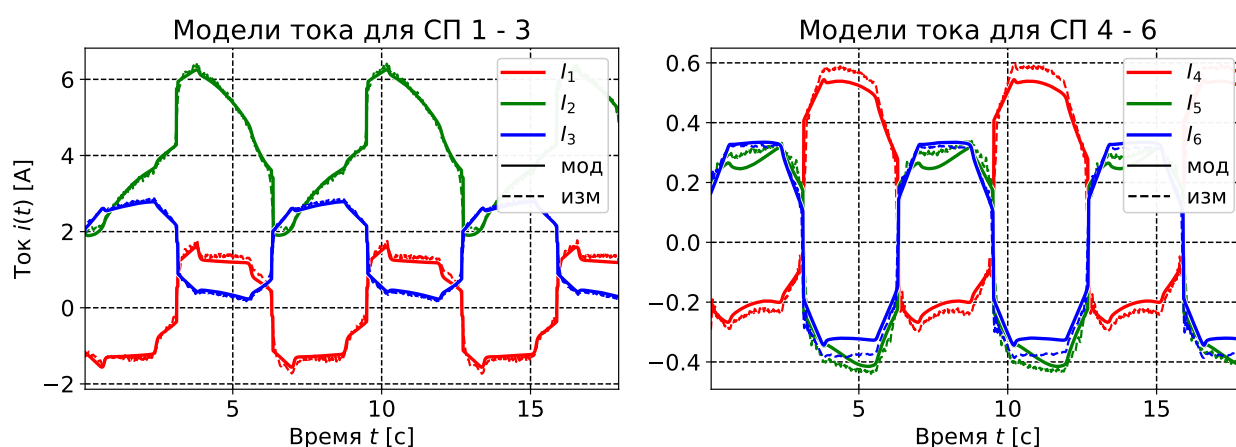


Рис. 5.16: Расчет токов для найденных параметров

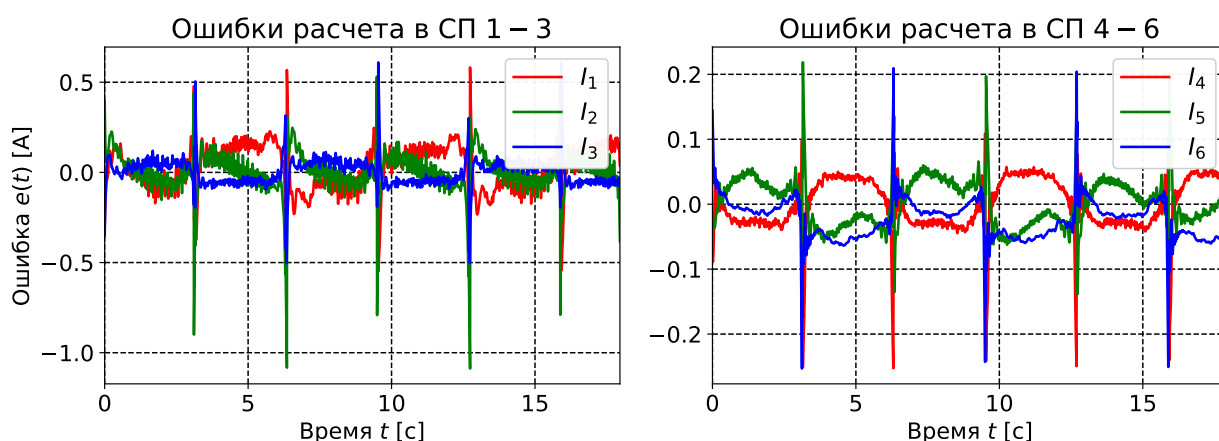


Рис. 5.17: Ошибки модели

Рассчитаем величины среднеквадратичных отклонений и средних значений. Внесем результаты расчетов в таблицу ??

СП, i :	1	2	3	4	5	6
2σ	0.2504	0.2435	0.1506	0.0861	0.074	0.0661
μ	0.0251	0.0001	-0.0005	-0.0011	0.0023	-0.0241

Таблица 5.9: Оценка точности модели

Проводя анализ полученных среднеквадратичных отклонений можно заключить, что найденные параметры обеспечивают приемлемую точность модели. Полученные оценки $\hat{\psi}$ могут использоваться для формирования динамической модели необходимой при симуляции управляемого движения.

5.4 Моделирование управляемого движения

5.4.1 Задание модели

Известно, что привода манипулятора *UR5* построены на базе синхронной электрической машины с постоянными магнитами, однако для упрощения будем моделировать динамику привода как ДПТ независимого возбуждения со схожими параметрами. При этом контур управления тока обычно реализуется с помощью ПИ регулятора. Тогда учитывая внешнее усилие, и упругости преобразователей движения можем записать следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}(q_r)\ddot{q}_r + \mathcal{C}(q_r, \dot{q}_r) + \mathcal{G}(q_r) - J_x^T(q_r)f + K(q_r - K_r^{-1}\theta) = 0 \\ J_m\ddot{\theta} = K_m I + K_r^{-1}K(q_r - K_r^{-1}\theta) \\ L\dot{I} = V - RI - K_\epsilon \dot{\theta} \\ V = R(K_{P_c}(I_d - I) + K_{I_c} \int (I_d - I)dt) \\ I_d = K_r^{-1}K_m^{-1}u_\tau \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Выражение выше нетрудно представить в нормальной форме Коши, вводя дополнительную переменную e_I , такую что $\dot{e}_I = I_d - I$, а значит $e_I = \int (I_d - I)dt$. Подставляя различные законы управления u_τ и интегрируя полученную систему получим закон изменения обобщенных координат q_r и скоростей \dot{q}_r робота, положение валов двигателей θ , их скорость $\dot{\theta}$ а также токи на обмотках двигателей I .

Отметим, что интегрирование данной системы для шести звенного манипулятора сложная с точки зрения количества вычислений задача, однако, как можно заметить из графиков, иллюстрирующих моменты на валах двигателей представленные выше - основная нагрузка приходится на первые три СП манипулятора. Поэтому в данной работе для уменьшения порядка дифференциальных уравнений рассмотрим редуцированную модель включающую лишь первые три звена.

В данной работе мы воспользуемся эвристическим методом, отбросив все центробежные моменты инерции и малые значения компонент векторов центра масс, соответствующие несносности звеньев. При этом будем считать, что суммарная масса последних трех звеньев сконцентрирована в начале 3-й ЛСК. Преобразование тензора инерции через соответствующие матрицы поворота $\mathbf{J}_a = \mathbf{R}_a^b \mathbf{J}_b \mathbf{R}_a^{bT}$ и применение теоремы Гюйгенса-Штейнера показывает что максимальный элемент тензора инерции последних трех звеньев записанный по отношению к 3-й ЛСК не превышает 10^{-4} , кгм². Соответственно влияние инерционных моментов последних трех звеньев учитывать не будем. Тогда вектор параметров представим в виде: $\boldsymbol{\psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_3]$, где $\boldsymbol{\psi}_i$ редуцированный вектор параметров i -го звена: $\boldsymbol{\psi}_i = [m_i r_{x_i}^c, m_i, J_{xx_i}^*, J_{yy_i}^*, J_{zz_i}^*]^T$.

Проведя анализ регрессора полученного трехзвенного манипулятора на линейную зависимость его столбцов определим, что параметры $J_{xx_1}^* + J_{zz_1}^* + J_{zz_2}^* + J_{zz_3}^*$ могут быть идентифицированы только как линейная комбинация. Тогда вектор параметров может быть заменен на следующий:

$$\boldsymbol{\psi} = [J_{xx_1}^* + J_{zz_1}^* + J_{zz_2}^* + J_{zz_3}^*, m_2 r_{x_2}^c, m_2, J_{xx_2}^*, J_{yy_2}^*, m_3 r_{x_3}^c, m_3^*, J_{xx_3}^*, J_{yy_3}^*]^T$$

Здесь $m_3^* = m_3 + m_4 + m_5 + m_6$ - эквивалентная масса третьего звена.

Итоговые параметры преобразованной модели представлены в таблице ??

ψ_1^*	$m_2 r_{x_2}^c$	m_2	J_{xx_2}	J_{yy_2}	$m_3 r_{x_3}^c$	m_3	J_{xx_3}	J_{yy_3}
0.5585	1.8295	8.3887	1.2947	1.0307	0.3235	5.0326	0.2328	0.3984

Таблица 5.10: Параметры редуцированной модели

Оптимальное редуцирование модели может быть выполнено используя методы факторного анализа, с помощью спектрального или сингулярного разложения матрицы регрессора и отбрасывания параметров, соответствующих малым сингулярным значениям [?].

5.4.2 Желаемые траектории

Перед тем как переходить к моделированию управляемого движения необходимо задастся желаемой траекторией, которую робот и должен будет отработать. В большинстве случаев в робототехнике выделяют два основных движения - от точки к точке ($p2p$) и контурное движение, заключающееся в отработке определенной непрерывной траектории. При этом чтобы уменьшить динамическую нагрузку на манипулятора, вызванную резкими скачками скорости и ускорения, движения от точки к точке обычно задаются в виде

полиномов порядка 6 следующего вида:

$$\begin{aligned}
 q_i(t) &= q_s + 6\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^5}t^5 - 15\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^4}t^4 + 10\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^3}t^3 \\
 \dot{q}_i(t) &= 30\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^5}t^4 - 60\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^4}t^3 + 30\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^2}t^2 \\
 \ddot{q}_i(t) &= 120\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^5}t^3 - 180\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^4}t^2 + 60\frac{(q_{f_i}-q_{s_i})}{t_{f_i}^3}t
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Построение $p2p$ движения таким образом обеспечивает уход из начальной точки q_{s_i} с начальной нулевой скоростью $\dot{q}_{s_i} = 0$ и ускорением $\ddot{q}_{s_i} = 0$ и приход в точку $q_{f_i} = 0$ с конечными нулевыми скоростью и ускорением $\dot{q}_{f_i} = 0, \ddot{q}_{f_i} = 0$. Причем данный переход осуществляется за время t_f .

Выберем следующие начальные и конечные желаемые положения в пространстве обобщенных координат: $\mathbf{q}_s = [5.1, 1.0, -2.4], \mathbf{q}_f = [1.0, -2.1, 1.5]$. При этом время перехода $t_f = 3$ с. Полученная траектория изображена на рисунке ??

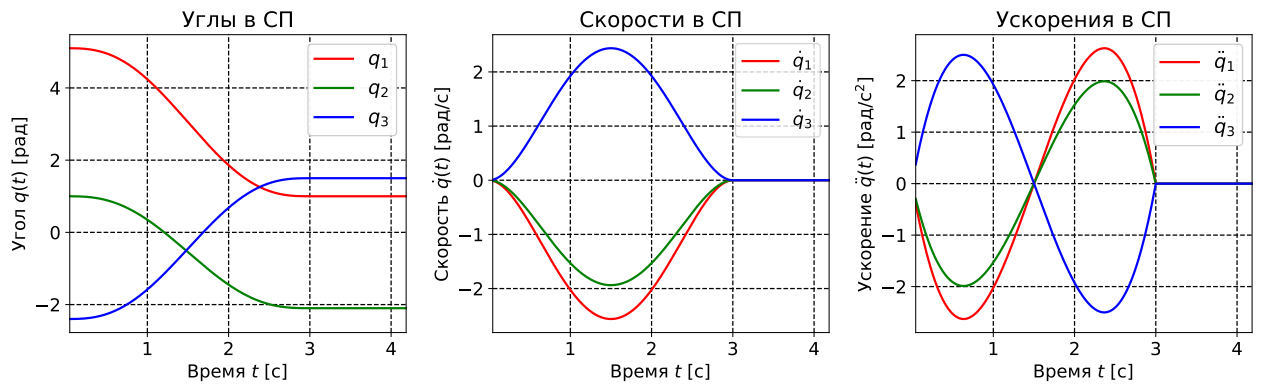


Рис. 5.18: Траектория перехода из точку в точку

В качестве траектории для контурного движения выберем следующую гармоническую функцию:

$$\begin{aligned}
 q_i(t) &= \frac{1}{2}(q_{s_i} + q_{f_i}) + \frac{1}{2}(q_{s_i} - q_{f_i}) \cos(2\pi\omega_{t_i}t) \\
 \dot{q}_i(t) &= \pi\omega_{t_i}(q_{f_i} - q_{s_i}) \sin(2\pi\omega_{t_i}t) \\
 \ddot{q}_i(t) &= 2\pi^2\omega_{t_i}^2(q_{f_i} - q_{s_i}) \sin(2\pi\omega_{t_i}t)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Где $q_{s_i}, q_{f_i}, t_{f_i}$ имеют тот же смысл что и прежде, а ω_{t_i} угловая частота гармонического сигнала.

Выберем следующие координаты $\mathbf{q}_s = [5.1, 1.0, -2.4], \mathbf{q}_f = [1.0, -2.1, 1.5]$ и частоты $\boldsymbol{\omega}_t = [1.8^{-1}, 2.7^{-1}, 3.2^{-1}]$. График полученной траектории представлен на рисунке ??

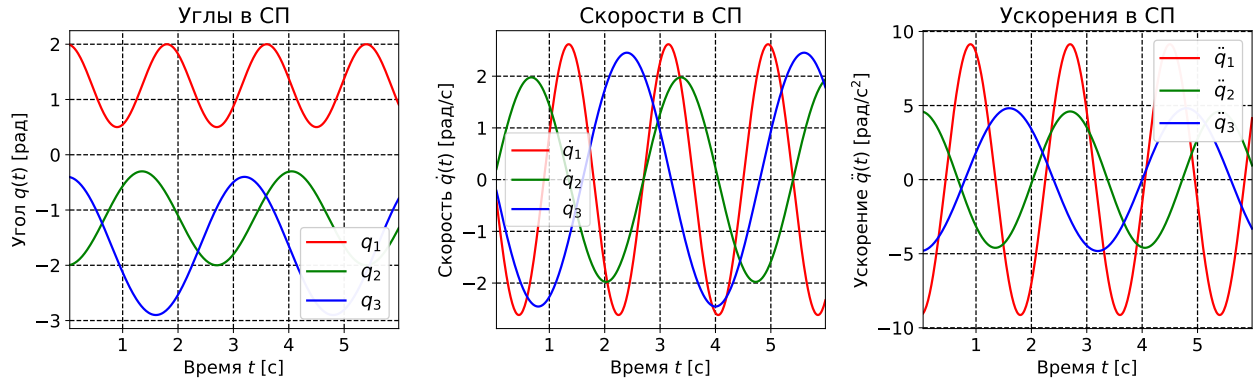


Рис. 5.19: Траектория контурного управления

5.4.3 Пропорционально-дифференциальное управление

Рассмотрим первый закон - ПД управление, при этом модифицируем его для слежения за траекторией следующим образом:

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{K}_p \tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d \dot{\tilde{\mathbf{q}}}$$

Где коэффициенты ПД регулятора выбраны как: $\mathbf{K}_p = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_2^2 \dots \omega_n^2\}$, $\mathbf{K}_d = \text{diag}\{2\omega_1, 2\omega_2 \dots 2\omega_n\}$, и $\omega_i = 38$, для $i = 1, 2, 3$ постоянная задающее быстродействие регулятора (сопрягающая частота линейной части контура управления).

Графики отработки $p2p$ траектории показаны на рисунке ??, ошибки по положению и скорости на рисунке ??.

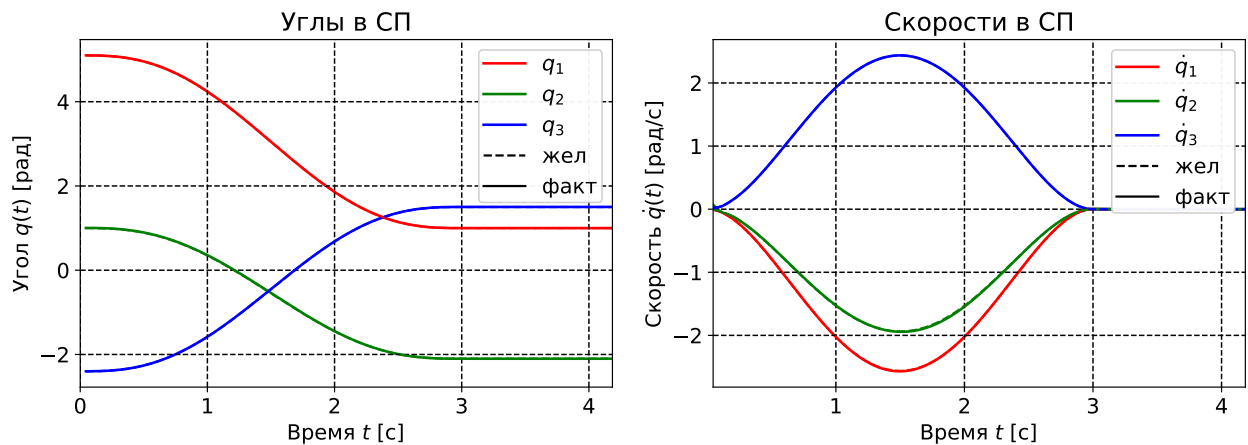


Рис. 5.20: Переход из точки в точку, ПД регулятор.

Процесс регулирования тока в обмотках приводов представлен на рисунке ??.

Так как манипулирование объектами и большинство технологических операций определяются в пространстве декартовых координат то перейдем в

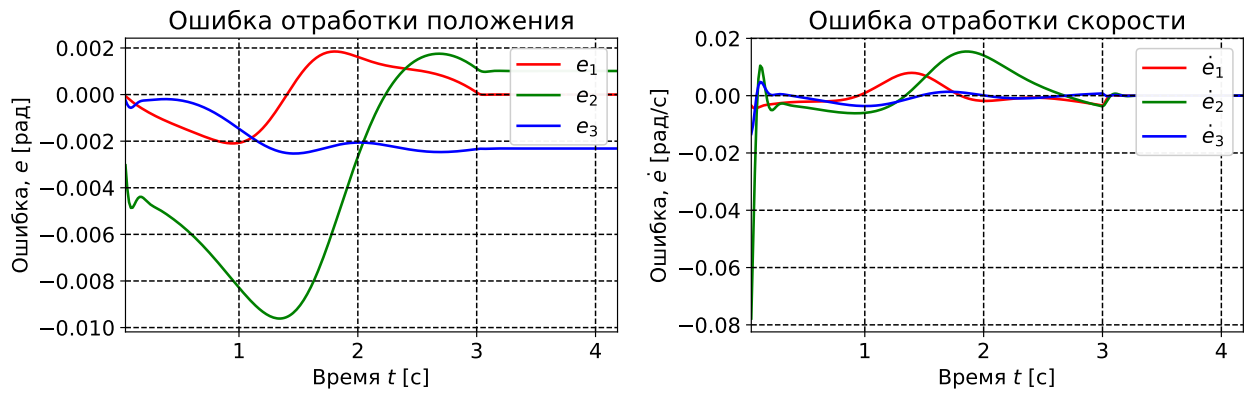


Рис. 5.21: Ошибки обработки траектории, ПД регулятор

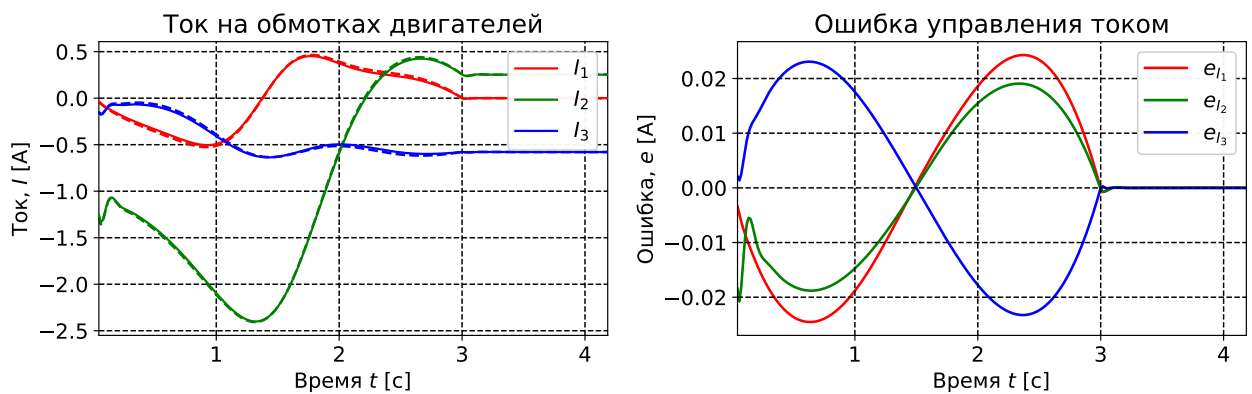


Рис. 5.22: Токи в обмотках двигателей

него решив ПЗК о положении и скорости. В дальнейшем будем представлять результаты обработок траекторий именно в пространстве декартовых координат. Интересующимся, автор может предоставить соответствующие графики в пространстве обобщенных координат по запросу. Полученные графики обработки траекторий перехода из точки в точку и слежения за контурной траекторией представлены на рисунках ??, ??

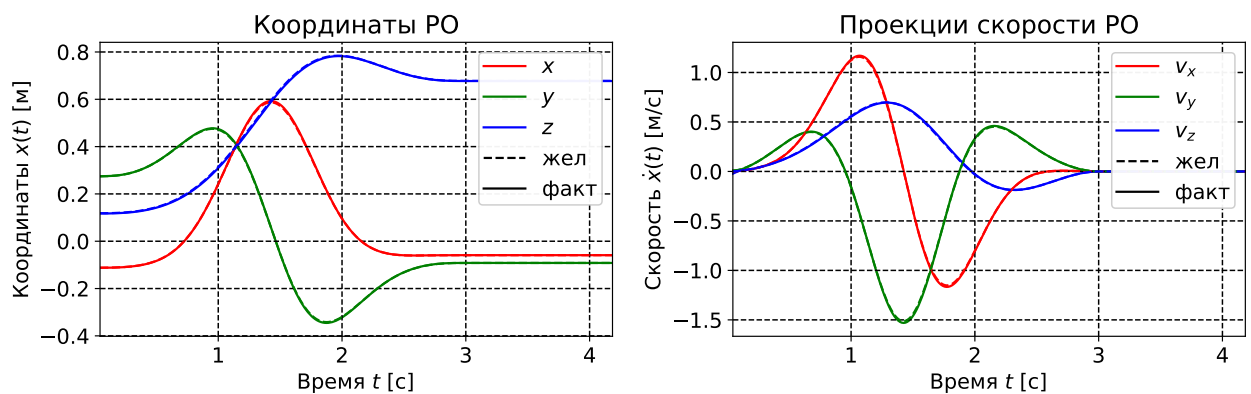


Рис. 5.23: Переход из точки в точку

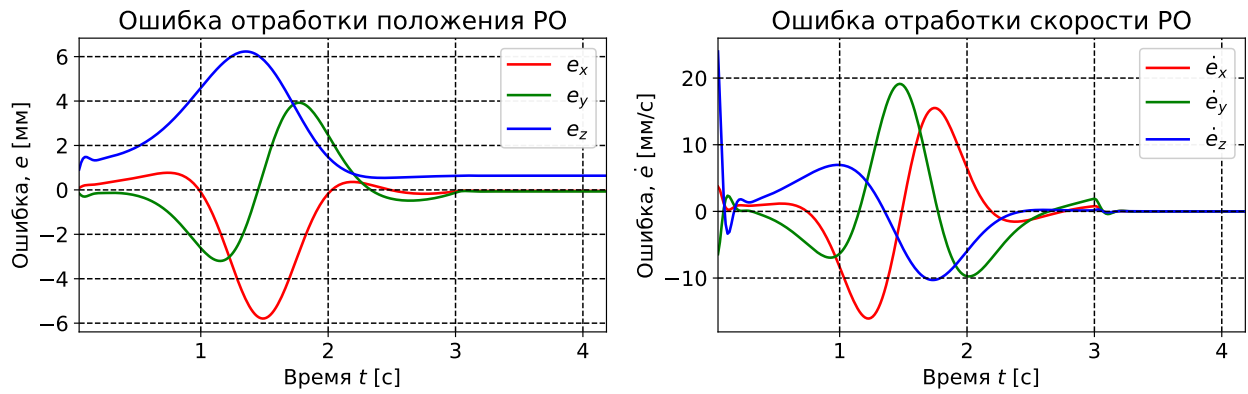


Рис. 5.24: Ошибки обработки траектории

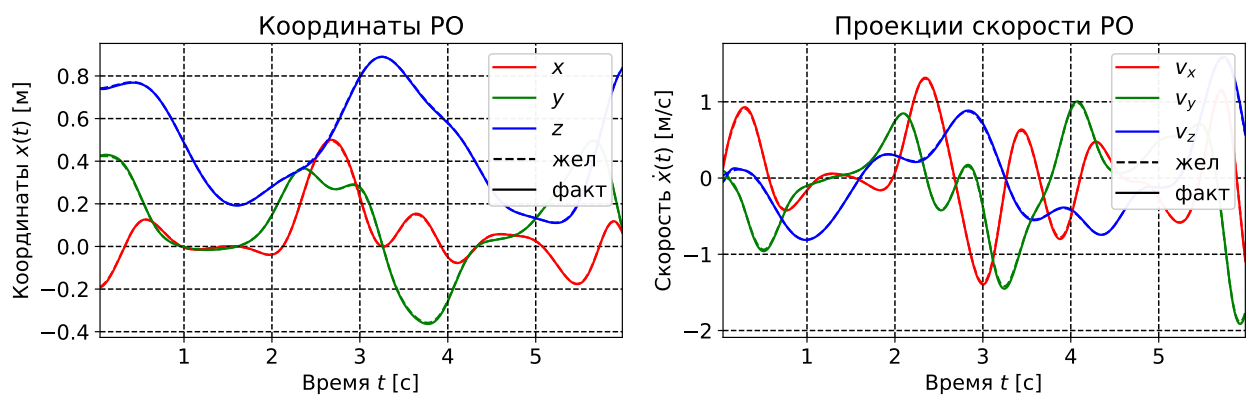


Рис. 5.25: Гармоническая траектория

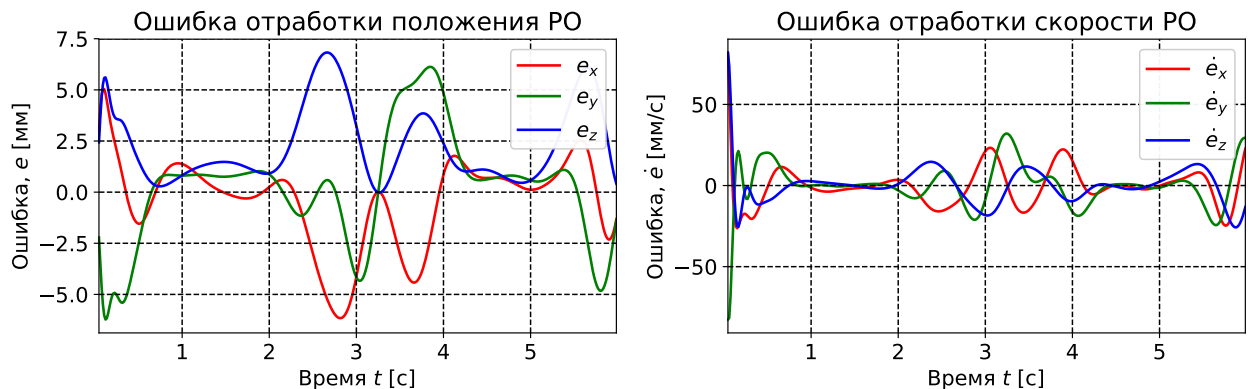


Рис. 5.26: Ошибки обработки гармонической траектории

Как видно из полученных графиков данное управление не обеспечивает эффективного слежения. Можно наблюдать скачки скорости, существенную ошибку управления, особенно в динамическом режиме. Более того даже в установившемся режиме присутствует некомпенсированная ошибка. Нетрудно понять, что это является следствием влияния гравитационных сил. Так как наибольшая ошибка соответствует наиболее статически нагруженной СП - 2. Рассмотрим следующий алгоритм, позволявший нивелировать влияние гра-

ВИТАЦИОННЫХ СИЛ.

5.4.4 Компенсация по гравитации

Перейдем к моделированию второго закона управления, для этого введем компенсацию по гравитации. Так как параметры механизма были найдены нами в виде вектора ψ , удобнее переписать закон управления (??) в форму линейную к параметрам:

$$u_\tau = K_p \tilde{q} + K_d \dot{\tilde{q}} + H(q, 0, 0) \psi$$

Позволим себе представлять лишь графики ошибок, так как траектории остаются постоянными от управления к управлению. Графики ошибок для траектории из точки в точку представлен на рисунке ??, для гармонической траектории на рисунке ??.

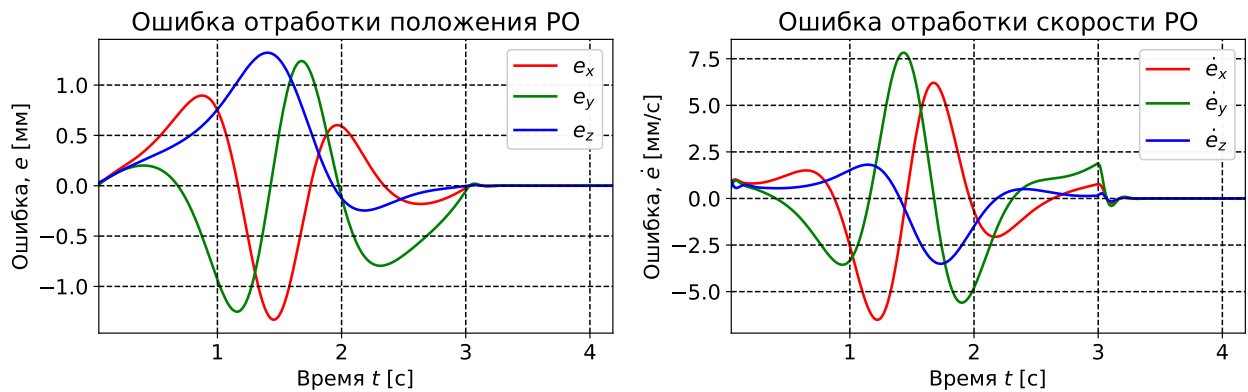


Рис. 5.27: Ошибки обработки траектории из точку в точку

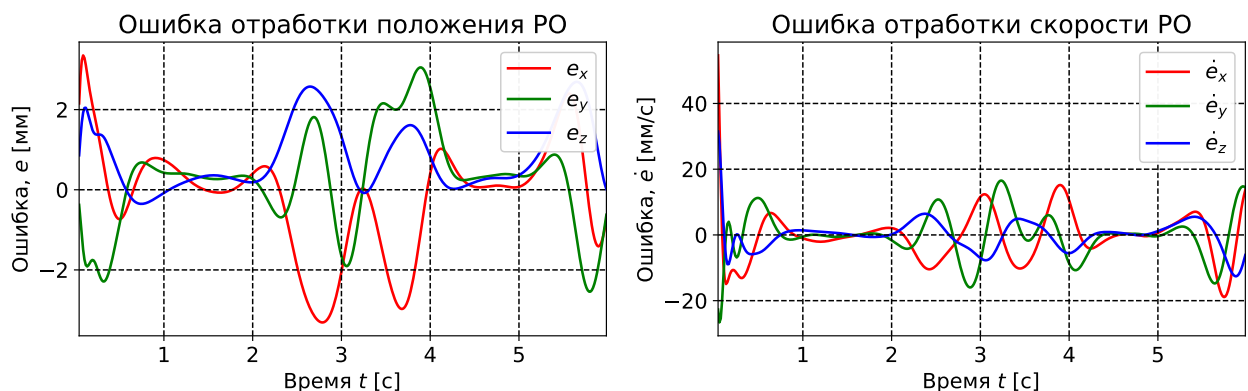


Рис. 5.28: Ошибки обработки гармонической траектории

Нетрудно заметить, что при реализации данного закона управления ошибка уменьшилась практически в четыре раза, более того в установившемся режиме, так как статические силы нагрузки скомпенсированы - ошибка

полностью отсутствует, однако с точки зрения динамической точности данное управление все так же неэффективно. Одним из эффективных способов уменьшения динамической ошибки является описанный нами выше алгоритм управления, основанный на линеаризации обратной связи.

5.4.5 Линеаризация обратной связи

Промоделируем движение манипулятора при реализации закона управления, базирующегося на полной компенсации нелинейностей. Воспользовавшись моделью объекта в линейной к параметрам форме перепишем закон управления в следующем виде:

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}^*)\boldsymbol{\psi}$$

Где, как и прежде: $\mathbf{u}^* = \ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p\tilde{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_d\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ Матрицы коэффициентов $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d$ оставим прежними для последующего сравнения результатов отработки траекторий при применении различных законов управления.

Полученные графики ошибок представлены на рисунках ??,??.

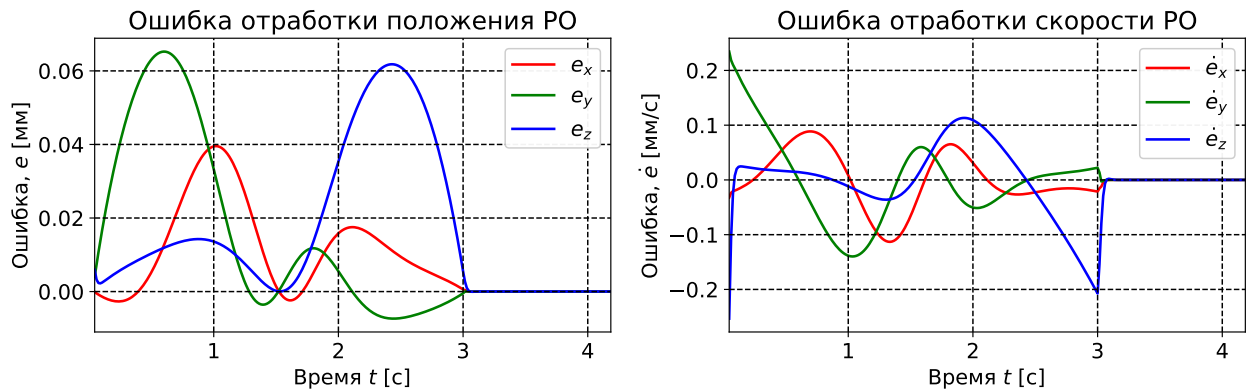


Рис. 5.29: Ошибки отработки траектории из точку в точку

Как нетрудно заметить полная динамическая компенсация существенно увеличила точность отработки траектории, при этом в установившемся режиме мы, как и прежде имеем нулевую ошибку регулирования.

К сожалению, как мы уже отмечали выше, динамические параметры $\boldsymbol{\psi}$ не бывают известны со степенью точности способной обеспечить полную нелинейную компенсацию, в большинстве случаев даже после процедуры идентификации мы обладаем знанием лишь о приближенных параметрах объекта. Данная неопределенность вызывает негативные эффекты недокомпенсации либо перекомпенсации, что служит причиной возрастания динамической ошибки и появления статической.

Продemonстрируем степень влияния параметров на ошибку введя погрешность в вектора параметров $\hat{\boldsymbol{\psi}} = \boldsymbol{\psi} + \tilde{\boldsymbol{\psi}}$, где как и прежде $\boldsymbol{\psi}$ - истинный вектор

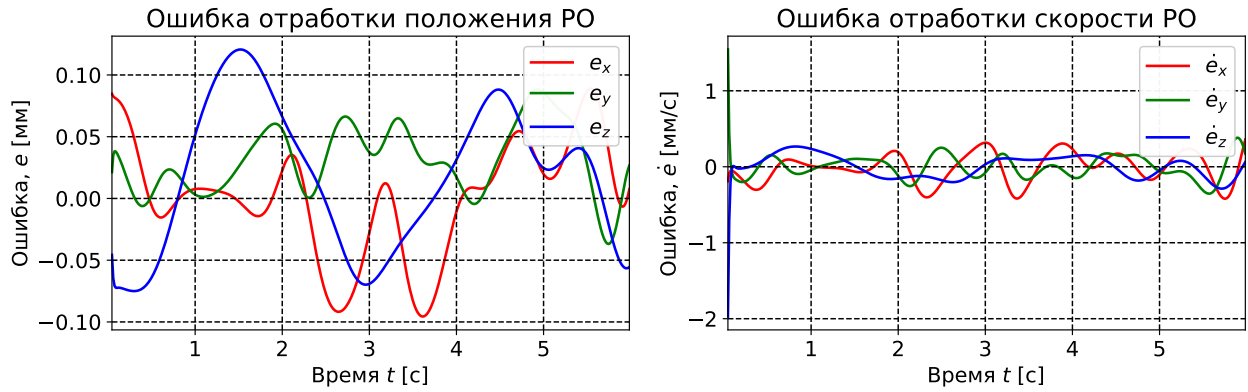


Рис. 5.30: Ошибки обработки гармонической траектории

параметров, $\tilde{\psi}$ - ошибка в их определении. Зададимся следующим вектором ошибки параметров: $\tilde{\psi} = [-0.06, 0.2, -0.3, 0.15, -0.12, 0.01, 0.19, -0.05, 0.1]^T$. В процентном соотношении относительно реальных параметров примерно: $\tilde{\psi}_{\%} = [10.7, 10.9, 3.5, 11.6, 11.6, 3.1, 7.8, 21.4, 25.1]^T$.

Проведем моделирование движения для нового вектора параметров $\hat{\psi} = \psi + \tilde{\psi}$. Графики полученных ошибок слежения представлены на рисунках ??,??

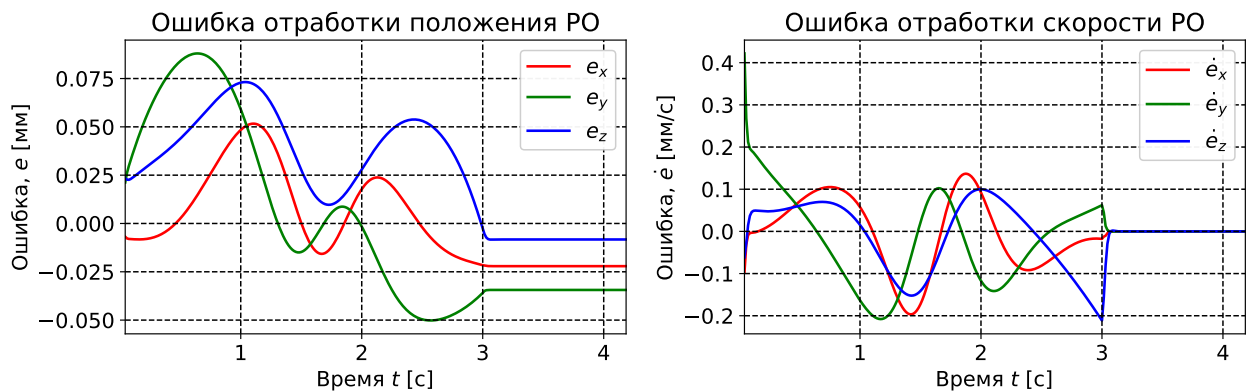


Рис. 5.31: Ошибки обработки траектории из точку в точку

Можем заметить, что в случае некоторой неопределенности в параметрах динамическая ошибка обработки положения возросла не существенно. С другой стороны, нельзя не отметить появление статической ошибки.

Интуитивно понятно, что при увеличении неопределенности в параметрах как динамическая, так и статическая ошибка будут возрастать. Более того, до сих пор мы рассматривали лишь свободное движение манипулятора, однако в этом случае робот не совершает никакой полезной работы, так как к РО не приложена нагрузка. Рассмотрим влияние нагрузки, приложенной к РО на точность обработки траектории, при этом будем полагать, что манипулятор не обеспечен датчиком сил и моментов на РО, так как в этом случае компенсация усилий не вызывает никаких проблем. Для анализа точности

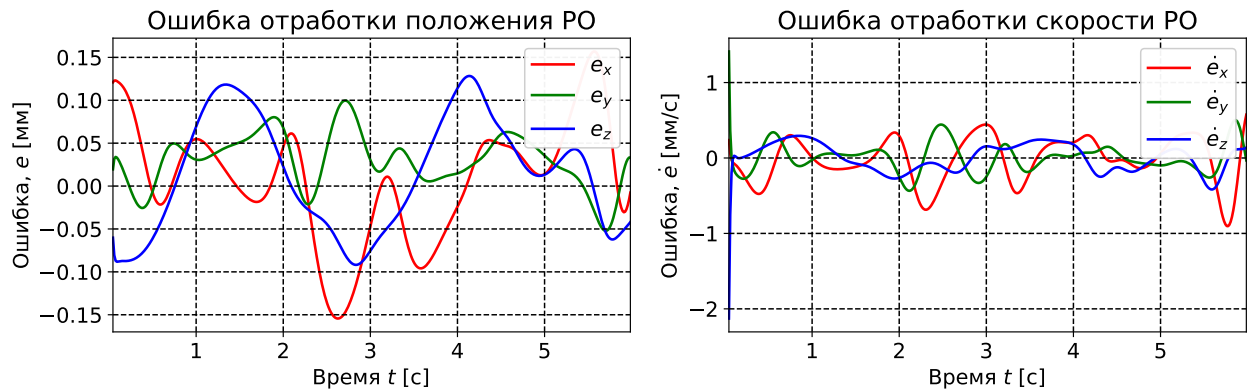


Рис. 5.32: Ошибки обработки гармонической траектории

отработки траектории при наличии внешней силы промоделируем движение манипулятора приложив к РО вертикальное усилие $\mathbf{f} = [0, 0, -40]$, в момент времени $t = 1.5$ с. При этом будем полагать что параметры известны абсолютно точно, то есть все прочие нелинейности скомпенсированы. Полученные графики представлены на рисунках ??,??:

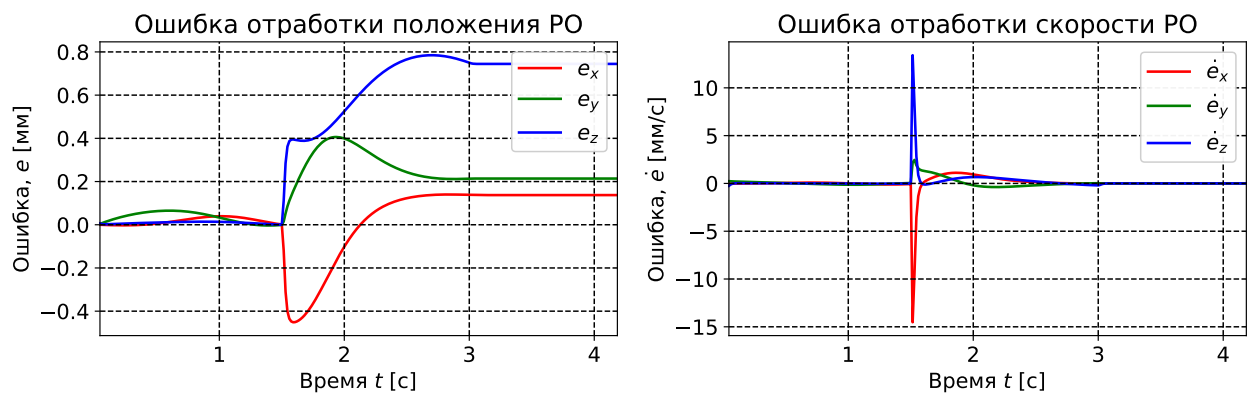


Рис. 5.33: Ошибки обработки траектории из точки в точку

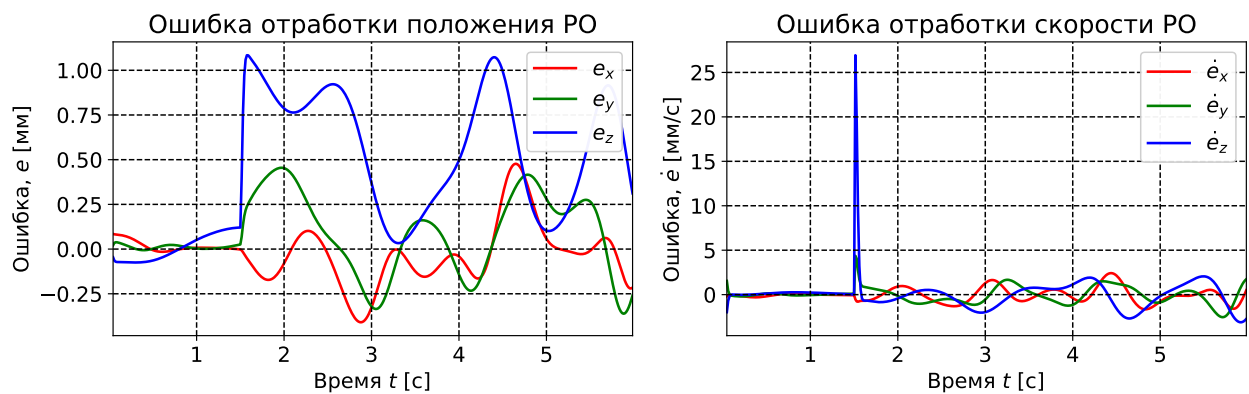


Рис. 5.34: Ошибки обработки гармонической траектории

Очевидно, что точность системы кардинально ухудшилась. Конечно же полученная ошибка не является допустимой. При-этом присутствует некомпенсированная ошибка положения, и резкий скачок скорости. Естественно предполагать, что при совместном действии факторов неопределенности параметров и приложенного внешнего усилия ошибка системы существенно возрастет. Как мы уже отмечали, простейшим способом повышения точности является увеличение коэффициентов усиления K_p, K_d . Однако, в этом случае система может потерять устойчивость. Более эффективным способом является реализация адаптивного управления, автоматически подстраивающегося под неизвестную силу на РО и неопределенность в параметрах.

5.4.6 Адаптивное управление

Изучим способность метода адаптивного управления к увеличению точности отработки выбранных траекторий последовательно, для случаев неопределенности в параметрах динамической модели, приложенного к РО усилия и совместного влияния этих факторов.

Для этого введем тот же вектор неопределенности в параметры, и промоделируем движение нашей системы при действии законов управления и адаптации:

$$u_\tau = \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r) \hat{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{K}_d \mathbf{q}^*$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\psi}}} = \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{H}^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}_r) \mathbf{q}^*$$

Где матрица $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\frac{1}{2}\omega_1, \frac{1}{2}\omega_2 \dots \frac{1}{2}\omega_n\}$, и ω_i имеет тот же смысл и значение что для предыдущих законов управления. Выбранная таким образом матрица $\mathbf{\Lambda}$ обеспечивает соответствие коэффициентов усиления при $\ddot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}$ коэффициентам K_p, K_d ПД регулятора выбранных выше. Матрицу $\mathbf{\Gamma}$ будем выбирать соответственно каждой задаче.

Рассмотрим случай неопределенности в параметрах. При этом матрицу $\mathbf{\Gamma}$ выберем как: $\mathbf{\Gamma} = 0.08 \text{diag}\{\sqrt{|\boldsymbol{\psi}_0|}\}$

Полученные графики ошибок слежения представлены на рисунках ??, ??.

Сравнивая данные графики с результатами, полученными для алгоритма линеаризации обратной связью можно констатировать увеличение точности слежения за положением, при этом в установившемся режиме ошибка равна нулю. Интересно рассмотреть процесс адаптации к параметрам. (рис ??, ??)

Отметим что, хотя и не все оценки параметров сошлись к своим истинным значениям, точность управления существенно выросла, а ошибка в установившемся режиме равна нулю, что полностью соответствует теоретическим результатам, полученным с помощью анализа функции Ляпунова, проведенного нами в главе описывающий методы управления.

Перейдем к исследованию движения при влиянии внешней силы. Для этого модифицируем матрицу регрессор таким образом, чтобы вектор парамет-

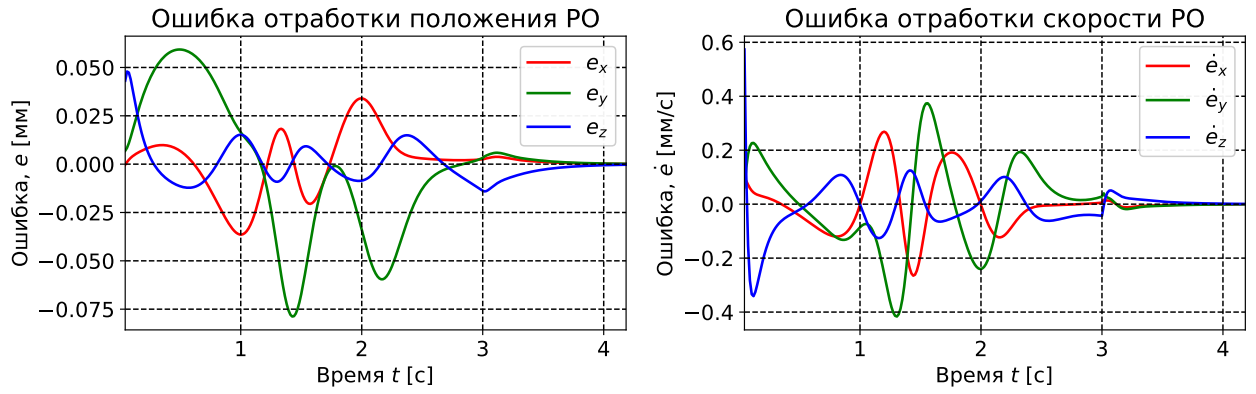


Рис. 5.35: Ошибки обработки траектории из точку в точку

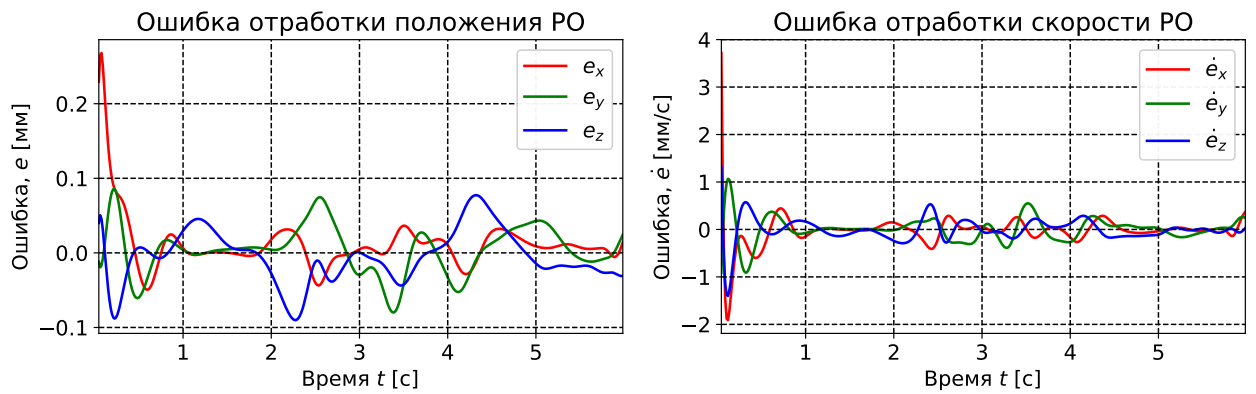


Рис. 5.36: Ошибки обработки гармонической траектории

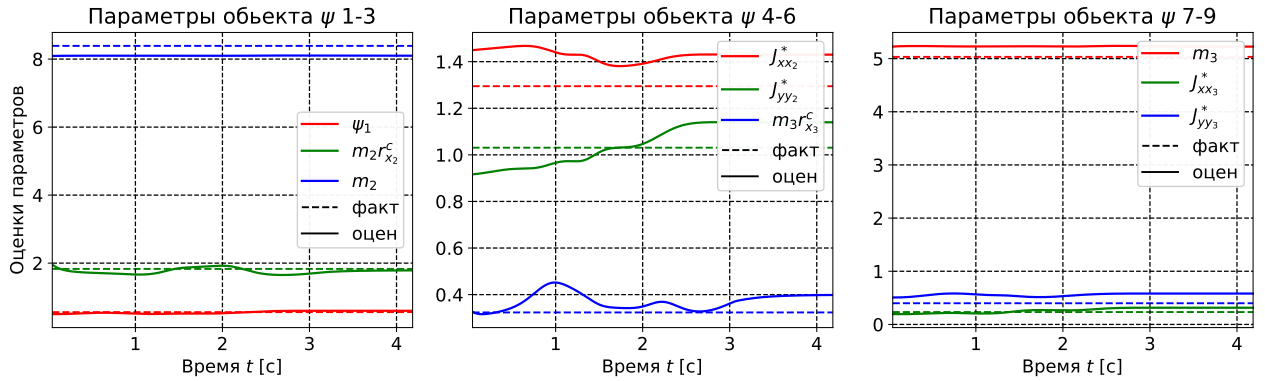


Рис. 5.37: Процесс адаптации при обработке траектории из точку в точку

ров содержал неизвестные усилия. Как было показано в главе посвященной моделированию динамики это может быть сделано следующим образом:

$$\tau = \left[\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \mid -\mathbf{J}_x^T \right] \begin{bmatrix} \psi \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

При этом, для начала смоделируем ситуацию, когда неопределенность в

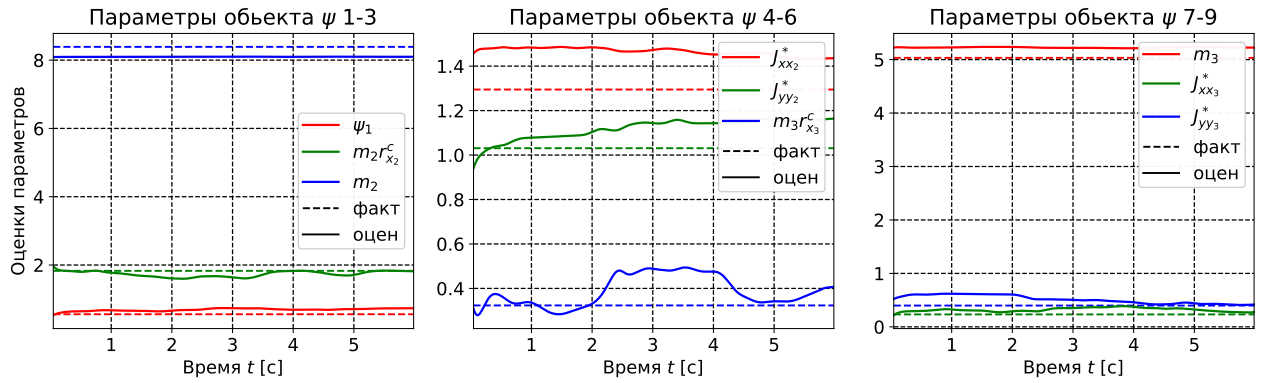


Рис. 5.38: Процесс адаптации при обработке гармонической траектории параметрах отсутствует. Тогда выберем следующую матрицу Γ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 10^4 \mathbf{I}_9 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 10^{-4} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Полученные ошибки слежения представлены на рисунках ??,??.

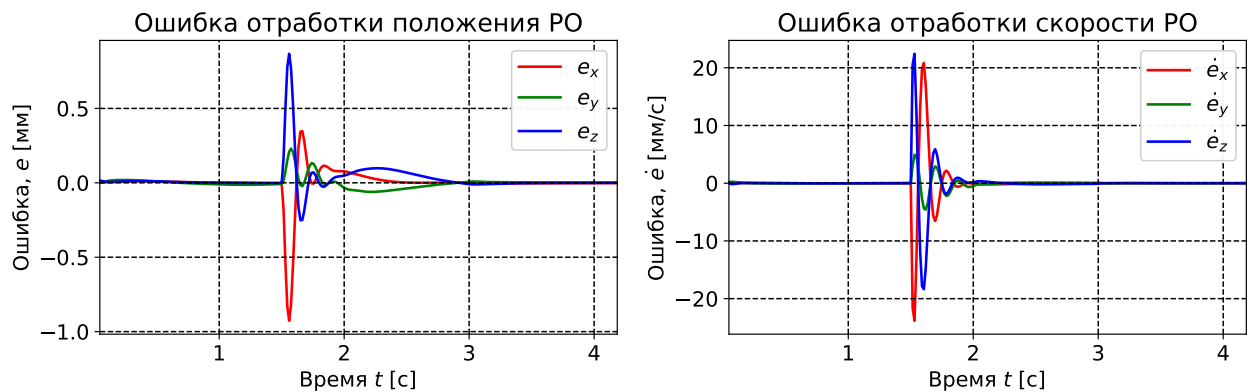


Рис. 5.39: Ошибки обработки траектории из точку в точку

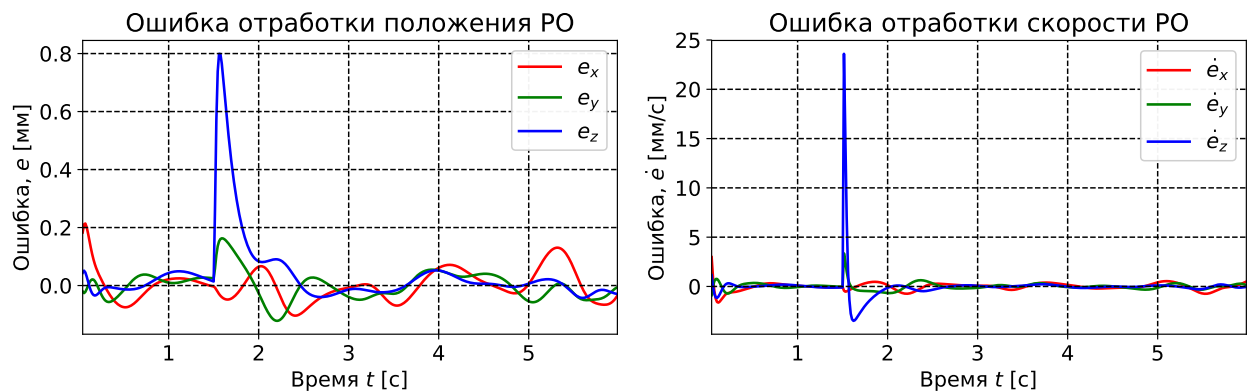


Рис. 5.40: Ошибки обработки гармонической траектории

Трудно не заметить существенный прирост точности обработки как положения, так и скорости. Точность данной системы сравнима с точностью полученной при реализации алгоритма линеаризации обратной связи без приложения нагрузки и наличия неопределенности в параметрах. Однако т.к. сила была приложена к РО в виде ступенчатого сигнала, а алгоритму адаптации необходимо некоторое время для подстройки параметров что приводит к резкому возрастанию ошибки как по скорости, так и по положению, и ее дальнейшей компенсации. Все-же существуют приложения, при которых такие скачко-образные изменения скорости не допустимы. Конечно же для уменьшения величины таких скачков скорости необходимо увеличить соответствующие элементы матрицы $\mathbf{\Gamma}$ что означает введение некоторой нечувствительности в определенные параметры. Один из подобных методов описан в [?]

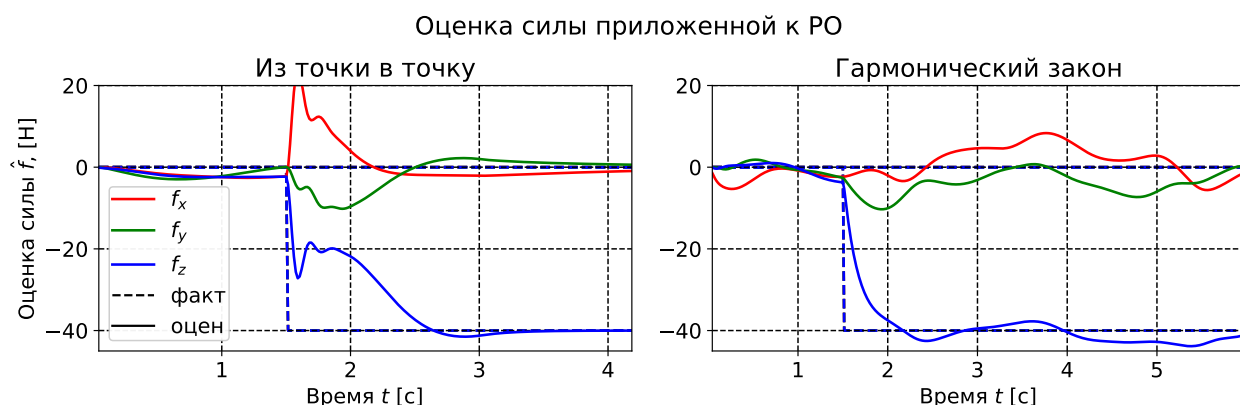


Рис. 5.41: Процесс оценки силы при отсутствии неопределенности

Стоит внимания процесс оценки силы показанный на рисунке ???. Как видно из этого рисунка в случае обработки траектории от точки к точке сила сходится к истинному значению, а при обработке гармонического сигнала колеблется возле истинного значения.

К сожалению, как уже было сказано выше - динамические параметры манипулятора никогда не бывают известны совершенно точно, то есть нами должны быть одновременно учтены как неопределенности в параметрах, так и влияние внешней нагрузки. При этом ясно что так как инерционные параметры могут быть идентифицированы предварительно то соответствующие им элементы матрицы $\mathbf{\Gamma}$ должны быть больше чем соответствующие компонентам вектора внешней силы \mathbf{f} . В соответствии с этим подходом выберем следующую матрицу $\mathbf{\Gamma}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 1.2 \operatorname{diag}\{\sqrt{|\boldsymbol{\psi}_0|}\} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 10^{-4} \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Смоделируем движение манипулятора при наличии как неопределенности заданной вектором $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ так и приложенного усилия \mathbf{f} . Полученные ошибки слежения проиллюстрированы на рисунках ?? и ??

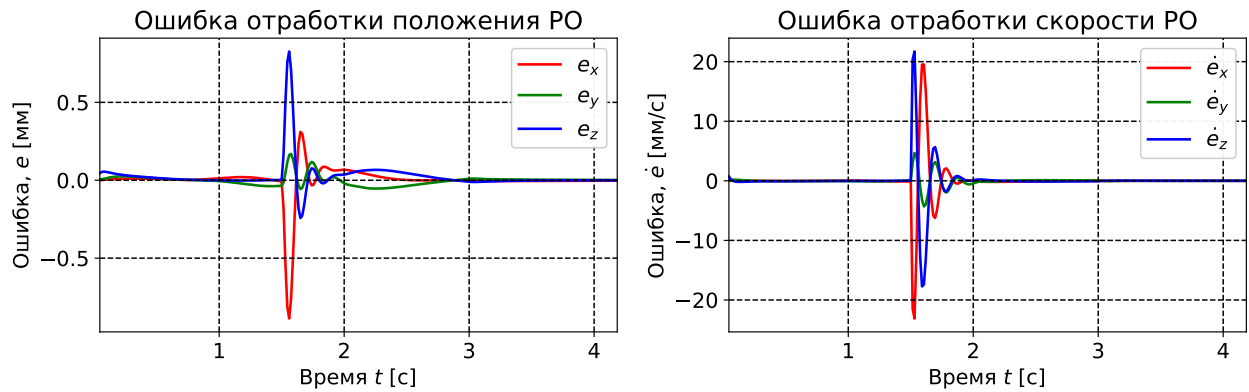


Рис. 5.42: Ошибки обработки траектории из точку в точку

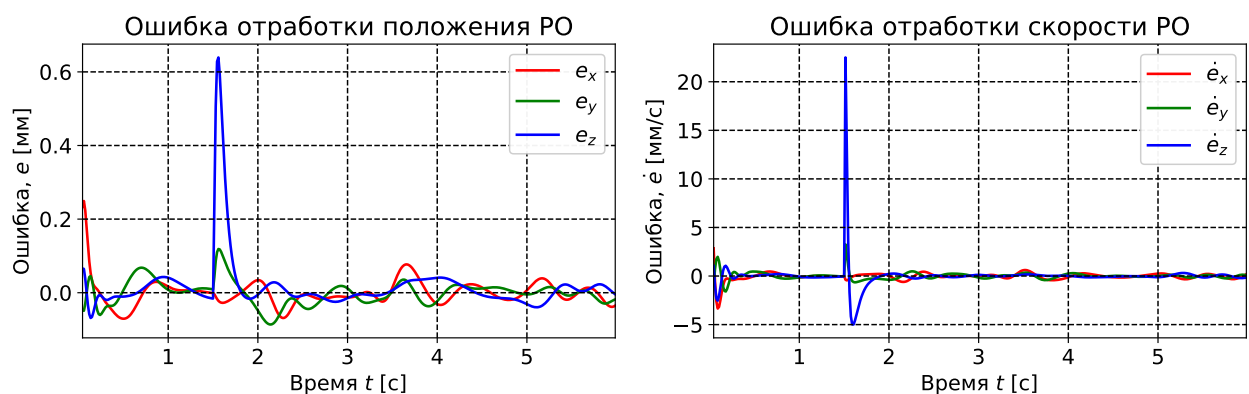


Рис. 5.43: Ошибки обработки гармонической траектории

Отметим что точность обработки траектории практически совпадает по сравнению со случаем приложенной внешней силы и отсутствия неопределенности в параметрах.

Процесс оценки значений параметров и усилия приложенного к РО представлены на рисунках ??,?? и ?? соответственно.

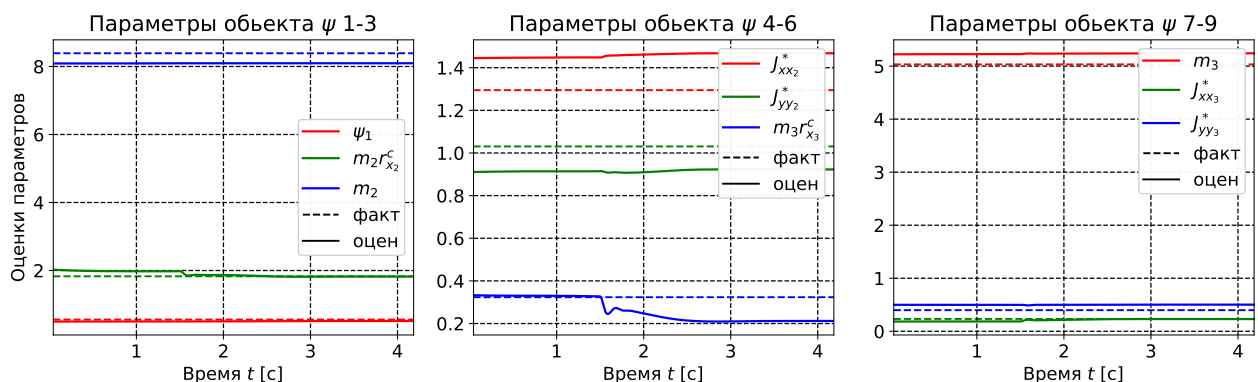


Рис. 5.44: Процесс адаптации при обработке траектории из точку в точку

Можно заметить, что и в этот раз параметры не сходятся к истинным значениям и как следствие, существует некоторая погрешность в определе-

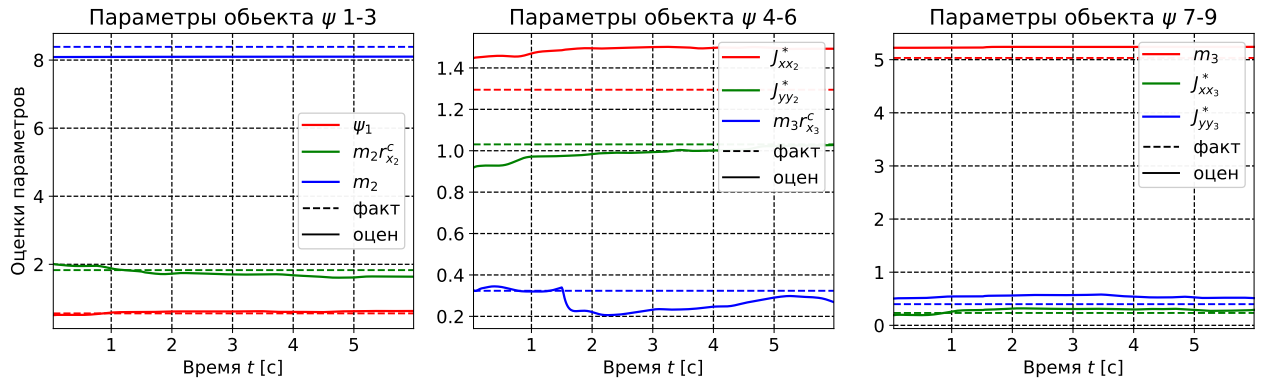


Рис. 5.45: Процесс адаптации при обработке гармонической траектории

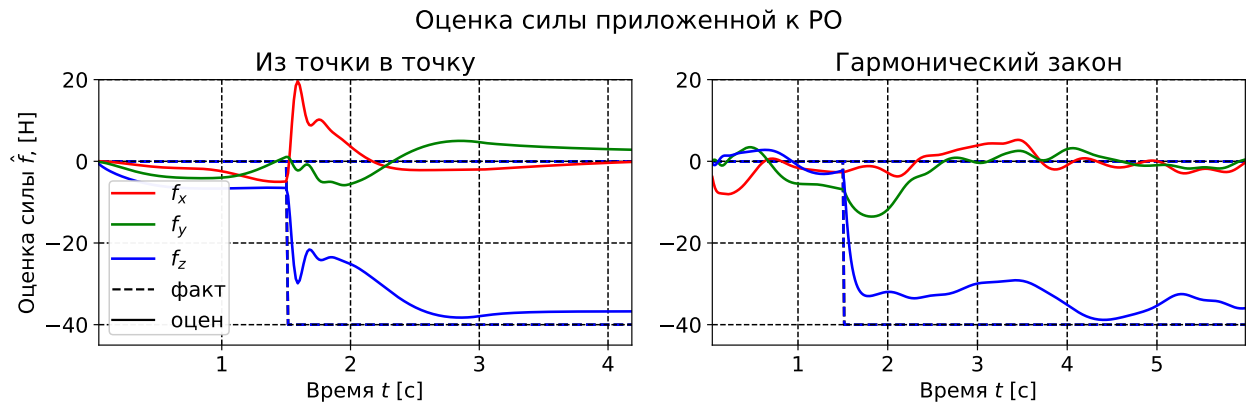


Рис. 5.46: Процесс оценки силы при наличии неопределенности

нии силы. Основной причиной этому может быть невыполнение принципа постоянного возбуждения для данной траектории.

С другой стороны, накладывая ограничения на возможные пределы изменения оценок параметров, можем существенно повысить точность оценки силы. Подобный алгоритм описан в [?], и рассматривается нами как один из возможных путей дальнейшего развития данной работы.

5.4.7 Сравнение точности управления

Проведем сравнительный анализ точности используемых алгоритмов управления. Для этого вычислим норму векторов ошибки отработки траекторий для описанных выше трех случаев: неопределенности в параметрах, приложенной к РО внешней силы и совместного влияния данных факторов. При этом будем сравнивать лишь алгоритм адаптивного управления и линеаризацию обратной связью, т.к. их превосходство (в смысле точности) над ПД управлением как с отсутствием, так и наличием компенсации - очевидны.

Полученные графики сравнивающие точность слежения за траекторией из точки в точку при использовании метода линеаризации обратной связью и

адаптивного управления для положения и скорости показаны на рисунках ?? и ?? соответственно. Те-же расчеты, но в случае гармонической траектории представлены на рисунках ?? и ??.

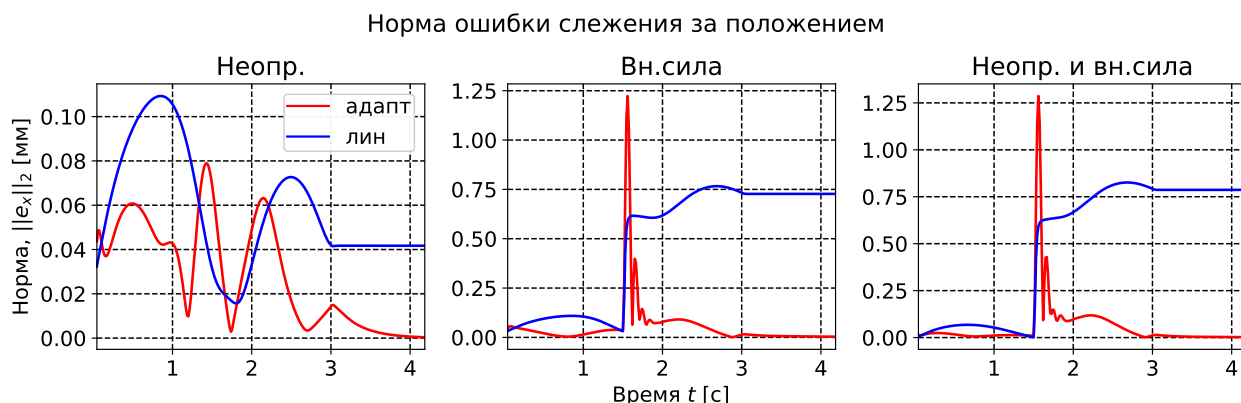


Рис. 5.47: Нормы ошибок по положению для траектории из точки в точку

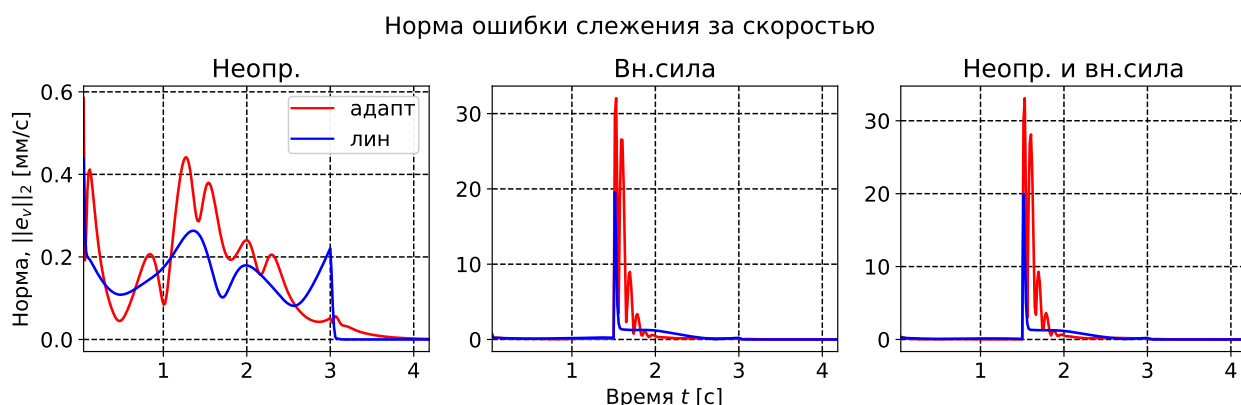


Рис. 5.48: Нормы ошибок по скорости для траектории из точки в точку

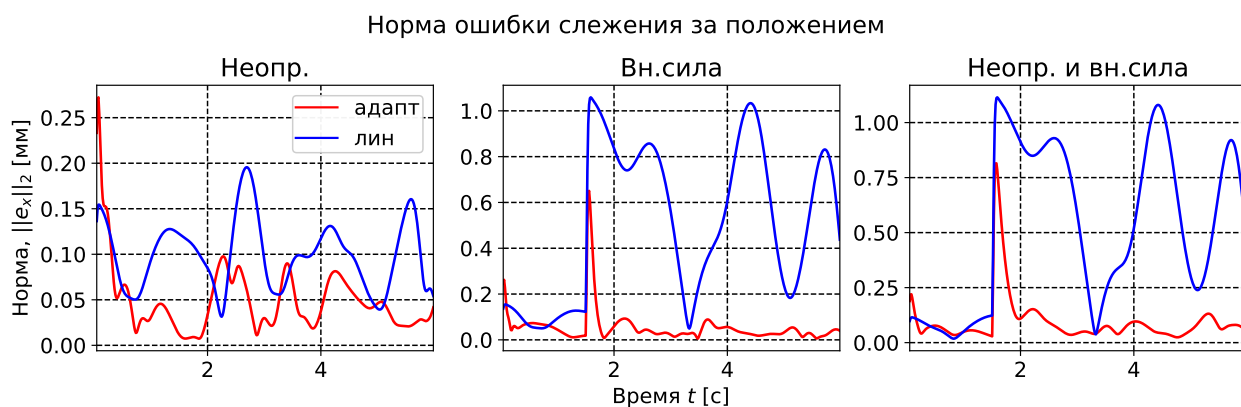


Рис. 5.49: Нормы ошибок по положению для гармонической траектории

Анализируя графики норм можем убедиться в эффективности адаптивного алгоритма. Основным достоинством данного управления помимо повышения

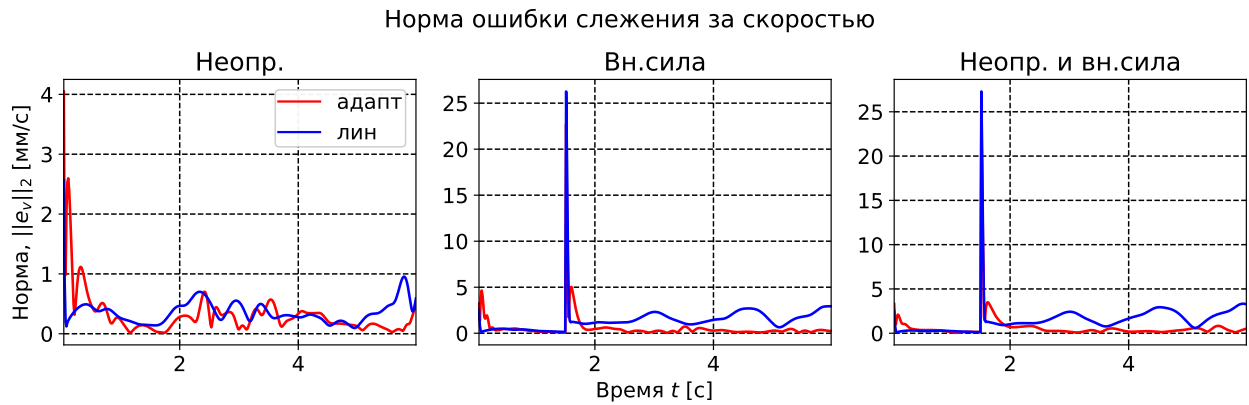


Рис. 5.50: Нормы ошибок по скорости для гармонической траектории

точности является нулевая статическая ошибка даже при отсутствии точных знаний о параметрах объекта и приложенной неизвестной внешней силе.

Интересно так же рассмотреть график нормы ошибки оценок параметров (рис. ??)

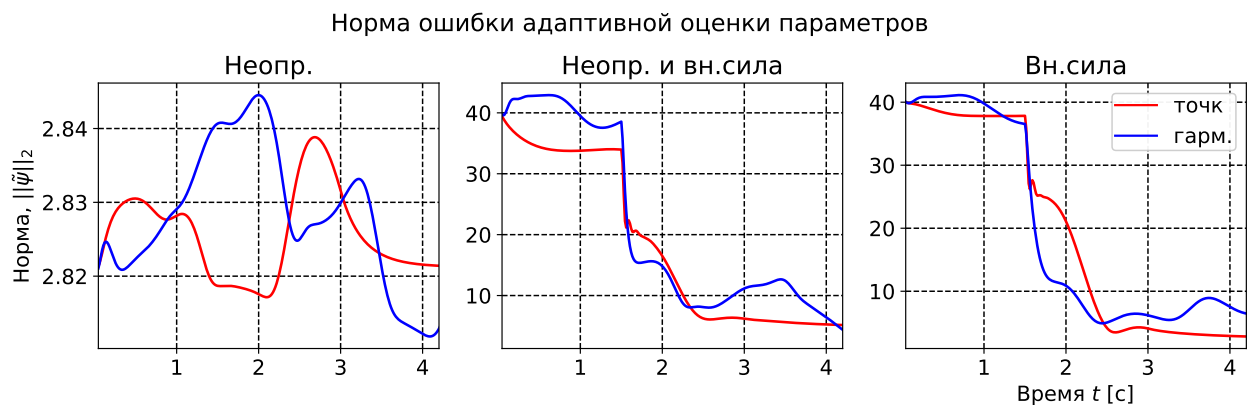


Рис. 5.51: Нормы ошибки оценок параметров

Как можно отметить в случае наличия нагрузки оценки параметров последовательно сходятся к своим истинным значениям, так как норма ошибки убывает. Однако в случае отсутствия нагрузки и траектории перехода из точки в точку норма ошибки не убывает, что может свидетельствовать о не оптимальности траектории либо близости регрессора к вырожденности. Однако, так как оценка параметров не является первоочередной целью управления (в отличии от задач идентификации) то сходимость параметров к истинным значениям не является критерием оценки эффективности управления.

Отметим что все приведенные выше графики демонстрируют идеальный случай абсолютной жесткости преобразователей движения и звеньев. С другой стороны, учет упругости сочленений в модели манипулятора позволяет нам оценить вклад деформаций в общую точность отработки траекторий.

5.4.8 Влияние упругости преобразователей движения

Рассмотрим влияние упругих деформаций на точность отработки траекторий. При этом понятно, что влияние упругости будет различными при отработке различных законов управления, так как приведенная к РО жесткость манипулятора есть функция от обобщенных координат. Для определенности будем рассматривать деформации соответствующие возникающие при адаптивном управлении. Моделирование данного эффекта в случае отсутствия приложенного к РО усилия проиллюстрировано на рисунках ??, ??.

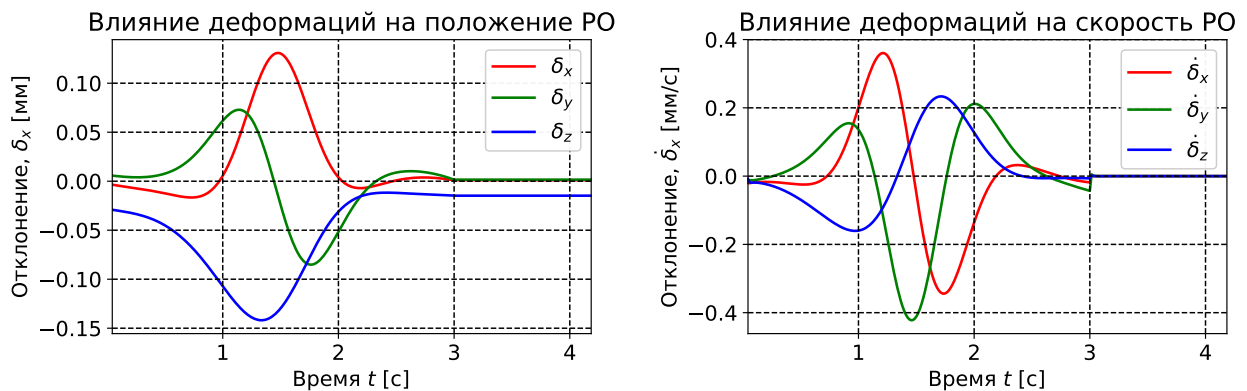


Рис. 5.52: Влияние упругих деформаций на точность отработки траектории от точки к точке при отсутствии нагрузки

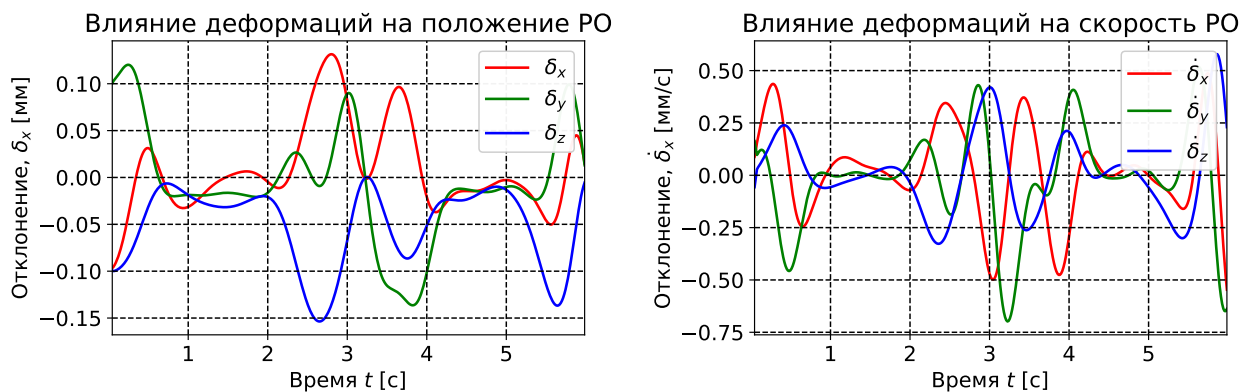


Рис. 5.53: Влияние упругих деформаций на точность отработки гармонической траектории при отсутствии нагрузки

Естественно полагать что при приложении нагрузки к РО деформации должны существенно возрасти. В примере рассмотрим как и прежде случай приложения усилия $\mathbf{f} = [0, 0, -40]$ Н, графики соответствующих деформаций приведены на рисунках ??, ??.

Анализ данных графиков показывает, что упругость сочленений оказывает существенное влияние как на статическую, так и динамическую ошибку.

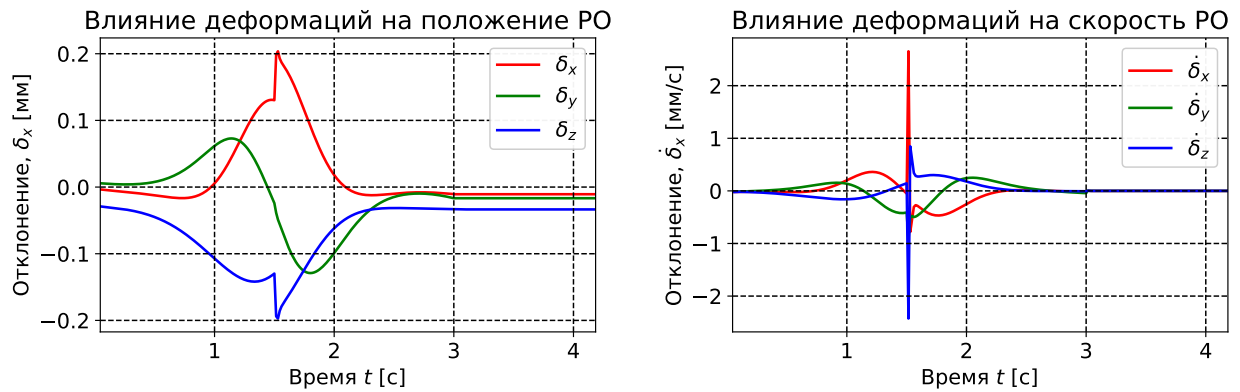


Рис. 5.54: Влияние упругих деформаций на точность отработки траектории от точки к точке при наличии нагрузки

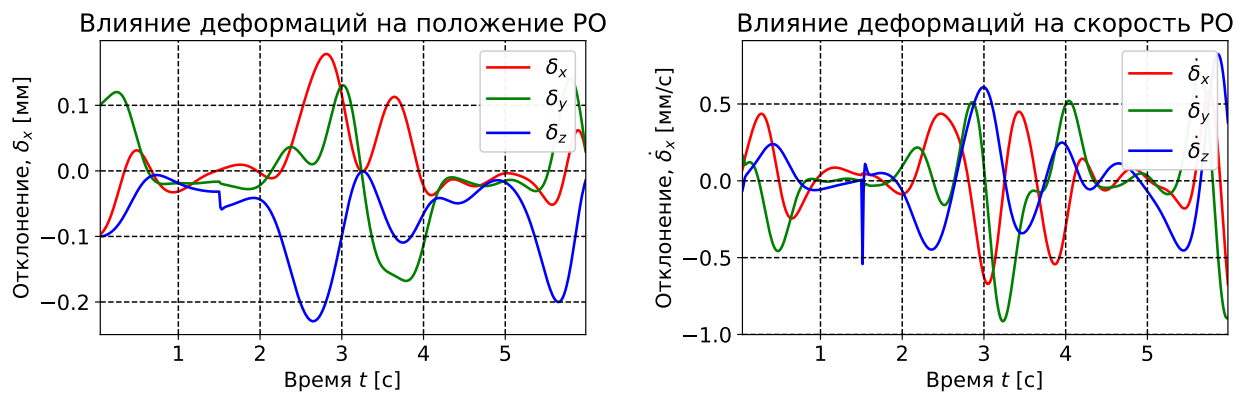


Рис. 5.55: Влияние упругих деформаций на точность отработки гармонической траектории при наличии нагрузки

Это наряду с люфтами в преобразователях движения является одной из причин почему управление манипулятором нельзя организовывать напрямую, измеряя положение на выходе редуктора. Так как при этом система может войти в режим автоколебаний и потерять устойчивость. Уменьшить влияние деформаций можно используя двухдатчиковую систему управления, либо специальные методы нелинейного управления [?].

Заключение

В ходе данной работы были решены следующие задачи:

- Предложены способы, позволяющие получить описание динамики объекта в форме линейной к параметрам, основываясь на той же нотации Денавита-Хартенберга.
- Описаны основные методы идентификации моделей линейных к параметрам, а также способов нахождения набора базовых параметров необходимых для описания манипулятора.
- Произведена идентификация динамических параметров реального манипуляционного робота учитывающая модель смешанного трения и ограничения на параметры, диктуемые физическим смыслом.
- Выполнена верификация полученных параметров путем проверки точности модели на отличной от идентифицирующей траектории.
- Реализовано моделирование управляемого движения манипулятора, основанного на его редуцированной модели и идентифицированных параметрах, учитывающее динамику привода на базе двигателя постоянного тока, а также упругость преобразователей движения.

Существенным отличием данной работы от предшествующих является использование модели линейной к параметрам как для синтеза алгоритмов управления, идентификации параметров так и моделирования движения.

Таким образом, задачи решены в полном объёме, цель исследования динамики управляемого движения многозвенных роботов достигнута.

Дальнейшим развитием данной работы может служить:

- Сравнение методов и результатов идентификации параметров с помощью модели энергии робота и полной модели динамики.
- Одновременная идентификация как массо инерционных так и упругих параметров с помощью прямого измерения положения РО.
- Оптимизация идентифицирующих траекторий по критериям наблюдаемости.
- Учет идентифицированных моментов трения и исследование способности адаптивного алгоритма к их компенсации.
- Экспериментальное исследование возможности оценки значения внешней нагрузки, основанной на алгоритме адаптивного управления и квадратичном программировании.

