CPE LYON

Année universitaire

2025 - 2026

Signaux analogiques et numériques — 3ETI

Séance pratique 1

Analyse temporelle - Corrélation entre signaux

Serge Mazauric

Eric Van Reeth

Contexte

Ce travail pratique a pour objectif de mettre en application les outils vus en cours pour la mise en œuvre d'une analyse temporelle de signaux continus.

Mise en place

Ce TP sera codé en Python, en utilisant l'environnement virtuel `env_msi` mis en place en début d'année. Avant de démarrer, vous effectuerez la mise à jour de la librairie `msicpe` pour avoir accès à certaines fonctions utiles au TP.
Rappel : Mise à jour de la librairie `msicpe` :

- Ouvrez un terminal ou une invite de commandes et placez vous dans le répertoire où l'environnement `msicpe` a été installé :
  `cd chemin_dossier_contenant_env_msi`
- Activez votre environnement virtuel :
  Pour Windows : `.\env_msi\Scripts\activate`
  Pour Linux/Mac : `source env_msi/bin/activate`
- Exécutez la commande suivante dans le même terminal :
  `python -m pip install -U msicpe`

Les librairies Python à importer sont les suivantes :

```
import numpy as np
import msicpe.san as san
from plotly import express as px
import scipy.signal as signal
```

1 Partie 1

1.1 Signaux périodiques - signaux non périodiques

Tracer les signaux suivants sur l'intervalle $[0, 4\pi]$ et retrouver les résultats mis en évidence à l'exercice 3 corrigé en séance de TD.

$$x(t) = \cos(3t) + \sin(5t)$$
$$y(t) = \cos(\sqrt{2}t) + \sin(3t)$$
$$z(t) = \cos(t^2/2)$$

1.2 Inter-corrélation

On considère les signaux $x(t) = \cos(2\pi t)$ et $y(t) = \sin(2\pi t)$ pour $t \in [0, 1]$.

1. Générer l'intervalle temporel $[0, 1]$ à l'aide la fonction `np.linspace()` en considérant 500 points dans l'intervalle, puis générer les signaux $x(t)$ et $y(t)$.
   - Calculer la fonction d'inter-corrélation $\gamma_{x,y}(t)$ à l'aide de la fonction `correlate()` de la librairie `msicpe`.
   - Tracer la courbe de $\gamma_{x,y}(t)$. Que peut-on dire de la parité de la fonction d'inter-corrélation ?

- L'expression analytique de $\gamma_{x,y}(\tau)$ a été calculée en cours ; ajouter le tracé de cette courbe et vérifier la cohérence avec le tracé obtenu à la question précédente.

2. Annulation de la fonction d'inter-corrélation
   - Pour quelles valeurs (positives ou nulles) de τ, la fonction $\gamma_{x,y}(\tau)$ est-elle nulle ?
   - Pour chacune de ces valeurs, tracer les courbes de $x(t)$, $y(t-\tau)$ et $x(t)y(t-\tau)$ dans un même `plot`. Quel est le domaine d'intégration sur lequel est calculé $\gamma_{x,y}(\tau)$?
   - Par simple analyse graphique, expliquer pourquoi la fonction d'inter-corrélation est nulle.
3. Maximum de la fonction d'inter-corrélation
   - Pour quelle valeur $\widehat{\tau}_m$ de τ, la fonction $\gamma_{x,y}(\tau)$ est-elle maximale ? (pour cela, utiliser la commande `np.argmax(L)` qui renvoie l'indice pour lequel le maximum des valeurs de la liste L est atteint).
   - Tracer les courbes de $x(t)$, $y(t-\widehat{\tau}_m)$ et $x(t)y(t-\widehat{\tau}_m)$ dans un même `plot`. Quel est le domaine d'intégration sur lequel est calculé $\gamma_{x,y}(\tau)$?
   - On aurait pu croire que le maximum serait atteint lorsque les fonctions $x(t)$ et $y(t-\tau)$ sont confondues. A quelle valeur de τ cette situation correspond-elle ? On note τ_0 cette valeur, tracer les courbes de $x(t)$, $y(t-\tau_0)$ et $x(t)y(t-\tau_0)$ dans un même `plot`, et comparer avec la situation précédente.

2 Partie 2 : Echos radar

Les objectifs sont les suivants :

- Utiliser la fonction d'inter-corrélation pour estimer le temps de propagation d'une onde réfléchie
- Etudier l'influence de l'effet Doppler sur l'estimation du retard
- Etudier l'influence du bruit sur l'estimation du retard

Un radar émet une impulsion sinusoïdale $x(t)$ de fréquence ν_0, de durée T et d'amplitude constante. Cette onde atteint une cible qui renvoie un écho vers l'émetteur.
Nous nous intéressons à l'estimation du temps de propagation de l'onde grâce à la fonction d'inter-corrélation entre le signal émis et l'écho reçu.

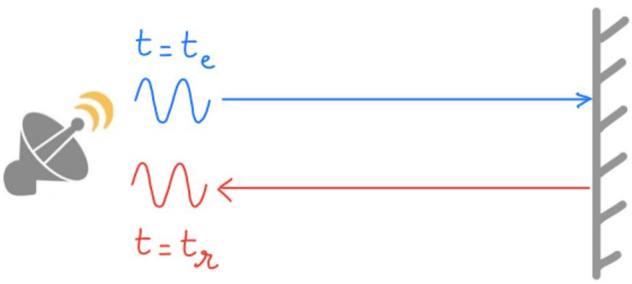

FIGURE 1 : Schéma de principe du radar : émission d'une impulsion monochromatique à l'instant t_e, réflexion sur une cible et réception de l'écho à l'instant $t_r \geq t_e$. Temps de propagation $\tau_0 = t_r - t_e$.

2.1 Propagation sans altération

On considère dans un premier temps le cas où la transmission / réflexion n'introduit aucune déformation sur les signaux : l'écho est donc considéré comme une réplique retardée en temps de l'impulsion émise.

2.1.1 Synthèse des signaux

1. Générer le signal sinusoïdal suivant :

$$x(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)\,\Pi\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{T}\right), \quad t \in [0, D[$$

   où la durée D est supérieure à la durée T de l'impulsion.
   Pour cela, on générera un vecteur temps de 1000 valeurs comprises entre 0 et D, et on choisira les caractéristiques suivantes :
   - amplitude $A = 1$
   - fréquence de l'impulsion $\nu_0 = 7$ Hz
   - durée de l'impulsion $T = 5T_0$ où $T_0 = 1/\nu_0$
   - durée de l'observation $D = 3T$

2. En gardant les mêmes paramètres, générer le signal reçu (l'écho) par le radar $y(t) = x(t - \tau_0)$ (on choisira $\tau_0 = 1$ seconde pour tout le TP).

3. Tracer, en les superposant sur un même `plot`, les signaux $x(t)$ et $y(t)$ en fonction du temps $0 \leq t < D$.

2.1.2 Fonction d'inter-corrélation

1. On note E_x l'énergie du signal $x(t)$. Montrer que :

$$\gamma_{y,x}(\tau_0) = E_x \tag{1}$$

2. Par la suite, on admettra que l'expression théorique de la fonction d'inter-corrélation de $y(t)$ et $x(t)$ est :

$$\gamma_{y,x}(\tau) = \frac{A^2 T}{2}\left(1 - \frac{|\tau - \tau_0|}{T}\right)\cos(2\pi\nu_0(\tau - \tau_0)), \quad \tau \in [\tau_0 - T, \tau_0 + T] \tag{2}$$

   - Calculer $\gamma_{y,x}(\tau)$ à l'aide de la fonction `correlate()` de la librairie `msicpe`, tracer sa courbe et la comparer avec la courbe de la formule théorique donnée par l'Eq. (2).
   - Mesurer la fréquence des oscillations de $\gamma_{y,x}(\tau)$, son support ainsi que la variation globale de son enveloppe.
   - Quelle est la valeur maximale de $\gamma_{y,x}(\tau)$? A quelle grandeur théorique correspond-elle ?

2.2 Réflexion sur une cible en mouvement

Nous considérons dans cette partie que la cible est en mouvement. Si la cible se déplace à la vitesse v_0 **en direction du radar**, cela crée un effet Doppler qui se traduit par une variation de fréquence $\Delta\nu$ de l'écho reçu :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \pm\frac{v_0}{c} \tag{3}$$

où c est la vitesse de propagation de l'onde dans le média.
On suppose alors que le radar reçoit l'écho suivant :

$$w(t) = \cos(2\pi(\nu_0 + \Delta\nu)(t - \tau_0))\,\Pi\left(\frac{(t-\tau_0)-\frac{T}{2}}{T}\right)$$

En utilisant les paramètres $T = 5T_0$ et $D = 5T$, synthétiser le signal $w(t)$ avec la valeur $\Delta\nu = 0.15\,\nu_0$. Afficher, superposés sur un même `plot`, les signaux $x(t)$ et $w(t)$ ainsi obtenus.

1. Estimation du retard

(a) Calculer et afficher la fonction d'inter-corrélation $\gamma_{w,x}(\tau)$ entre $w(t)$ et $x(t)$. Comparer avec la fonction d'inter-corrélation $\gamma_{y,x}(\tau)$ obtenue à la question 2.1.2.

(b) Estimer à partir de $\gamma_{w,x}(\tau)$ le temps de propagation τ_0. Chiffrer en pourcentage, l'erreur d'estimation du retard $\widehat{\tau}_0$; pour cela, utiliser la commande `np.argmax(L)`. Commenter ?

(c) Ré-itérer la même expérience, en diminuant la durée de l'impulsion sinusoïdale à $T = 3T_0$. Quel effet cela a-t-il eu sur l'estimation ? Proposer une explication.

2. Estimation de la vitesse de la cible

   (a) Utiliser la fonction `san.trans_fourier()` de la librairie `msicpe` pour calculer les spectres du signal émis $x(t)$ et de son écho Doppler $w(t)$. Afficher ces spectres sur un même `plot`.

   (b) Mesurer le décalage Doppler $\Delta\nu$. En déduire la vitesse de déplacement de la cible (on se placera dans le contexte de signaux sonores se propageant dans l'air).

2.3 Propagation dans un média bruité

On suppose à présent la cible est fixe mais que le signal est émis dans un média *bruité*, que l'on modélise par l'addition d'un bruit $b(t)$ sur le signal reçu : $z(t) = y(t) + b(t)$. Sous Python, on utilisera la commande suivante :

```
z = y + sigma*np.random.randn(size(y)) ;
```

1. En utilisant les paramètres $T = 3T_0$ et $D = 3T$, générer le signal $z(t)$ avec la valeur `sigma=4`. Afficher, superposés sur un même `plot`, les signaux $x(t)$ et $z(t)$ ainsi obtenus.

2. Calculer et afficher la fonction d'inter-corrélation $\gamma_{z,x}(\tau)$. Comparer avec la fonction d'inter-corrélation $\gamma_{y,x}(\tau)$ obtenue à la question précédente.

3. Estimer à partir de $\gamma_{z,x}(\tau)$ le temps de propagation τ_0. Chiffrer en pourcentage l'erreur d'estimation. Pour cela, utiliser la commande `np.argmax(L)`. Que constate-t-on ?

4. Répéter plusieurs fois l'estimation de $\widehat{\tau}_0$ en re-générant à chaque fois un nouveau signal $z(t)$, puis calculer et afficher la moyenne et l'écart type de l'estimation obtenue (utiliser les fonctions `np.mean()` pour la moyenne et `np.std` pour l'écart type).

5. Ré-itérer la même expérience, en augmentant la durée T de l'impulsion sinusoïdale (choisir d'abord $T = 5T_0$ puis $T = 7T_0$). Que constate-t-on ? et quelle explication peut-on proposer ?