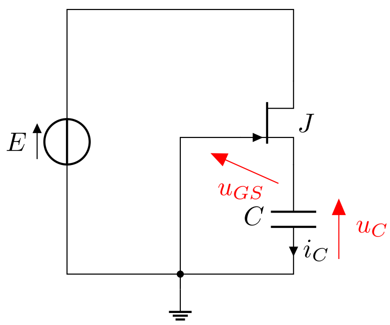
Chapitre 1

Solution analytique de l'équation différentielle ELA1 TP3

1.1 Phase 1 : De la mise sous tension au blocage du transistor

Le circuit est le suivant :



1.1.1 Analyse qualitative

Le condensateur est initialement déchargé. La tension à ses bornes est donc nulle. La maille (E) impose $v_{GS} = 0$ et J conduit entre Drain et Source un courant dont la valeur initiale est I_{DSS}. Comme $I_G = 0$, ce courant charge le condensateur qui voit la tension à ses bornes u_C évoluer. A ce niveau du raisonnement, on peut seulement dire que u_C (telle qu'elle est fléchée sur le schéma précédent) va croître. v_{GS} va donc diminuer, de 0 jusqu'à $-V_P$, conduisant ainsi J au blocage. Une fois J bloqué, le régime permanent est atteint : plus rien n'évolue.

Le système s'auto-modère : "plus il évolue, moins il évolue vite". La conséquence de l'évolution limite la cause de l'évolution. Cette modération est illustrée sur le schéma ci dessous :

$$i_C > 0 \xrightarrow{C} u_C \nearrow \xrightarrow{(E)} v_{GS} \searrow \xrightarrow{J} i_{DS} = i_C \searrow$$

Le système est clairement d'ordre 1 (un seul réservoir d'énergie : C). L'évolution temporelle de v_{GS} est donc régit par une équation différentielle stable (tous les coefficients de même signe, stabilité assurée par la modération décrite ci dessus) d'ordre 1. De plus, la caractéristique $I_{DS}(V_{GS})$ de J étant non linéaire, l'équation différentielle sera également non linéaire (avec la même non-linéarité de celle présente dans la caractéristique $I_{DS}(V_{GS})$). Sachant qu'en régime permanent, $v_{GS} = -V_P$, l'équation différentielle recherchée s'écrit nécessairement :

$$\frac{dv_{GS}}{dt} + k \times v_{GS}^2 = -k \times V_P^2$$

Le coefficient k, nécessairement positif, peut être déterminé facilement à partir de sa dimension : pour que l'équation différentielle ci dessus soit homogène, k s'exprime en $V^{-1}s^{-1}$. Les paramètres pertinents du circuit étant C, I_{DSS} et V_P, il vient rapidement que $k \propto \frac{I_{DSS}}{C \times V_P^2}$ (à un facteur adimentionné près).

1.1.2 Mise en équation du circuit

La maille d'entrée (E) donne directement :

$$v_{GS} + u_C = 0$$

En dérivant par rapport au temps la relation précédente, et comme pour le condensateur C, $du_C/dt = i_C/C$, on obtient :

$$\frac{dv_{GS}}{dt} + \frac{i_C}{C} = 0$$

Or le courant i_C est nécessairement identique au courant drain source de J : i_{DS}. Ce courant est relié à v_{GS} par la caractéristique $I_{DS}(V_{GS})$ du transistor J : $i_{DS} = \frac{I_{DSS}}{V_P^2}(v_{GS} + V_P)^2$. Par substitution dans la relation précédente, il vient :

$$\frac{dv_{GS}}{dt} + \frac{I_{DSS}}{C \times V_P^2}(v_{GS} + V_P)^2 = 0$$

Il s'agit bien de l'équation prédite qualitativement en posant $K = \frac{I_{DSS}}{C \times V_P^2}$ et $v_0 = V_P$.

1.1.3 Résolution analytique

On cherche donc la ou les solutions analytiques de l'équation :

$$\frac{dv_{GS}}{dt} + K(v_{GS} + v_0)^2 = 0$$

Par séparation des variables, cette équation s'écrit :

$$\frac{dv_{GS}}{(v_{GS} + v_0)^2} = -K \times dt$$

En posant $U = v_{GS} + v_0$, avec $dU = dv_{GS}$, l'équation devient :

$$\frac{dU}{U^2} = -K \times dt$$

Par intégration, sans oublier la constante d'intégration et en notant $U_0 = U(t = 0)$, il vient :

$$\frac{-1}{U} = -Kt - \frac{1}{U_0}$$

Après quelques manipulations et en revenant à la variable initiale v_{GS}, la solution s'écrit :

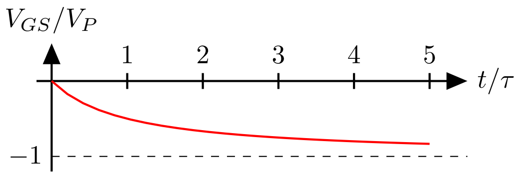
$$v_{GS}(t) = \frac{v_{GS0} + v_0}{1 + K(v_{GS0} + v_0)t} - v_0$$

1.1.4 Analyse de la solution analytique

Le condensateur étant initialement déchargé, $u_C(t = 0) = 0$ et donc par la maille (E), $v_{GS0} = v_{GS}(t = 0) = 0$. La tension Grille Source de J évolue donc temporellement selon la relation :

$$v_{GS}(t) = \frac{V_P}{1 + \underbrace{KV_P}_{1/\tau} t} - V_P$$

Cette solution vérifie bien, d'une part, la condition initiale : $v_{GS}(t = 0) = V_P - V_P = 0$ et, d'autre part, la condition finale : $v_{GS}(t \to \infty) = -V_P$. Le temps caractéristique τ de l'évolution de temporelle est $\tau = 1/(K \times V_P) = \frac{C \times V_P}{I_{DSS}}$. L'allure de v_{GS}/V_P en fonction du temps réduit t/τ est la suivante :

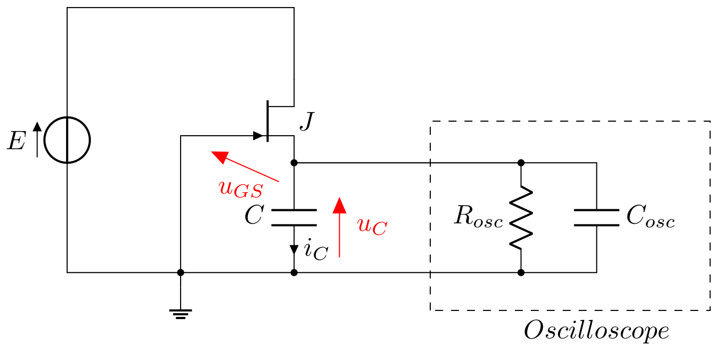


1.1.5 Conclusion

Après la mise sous tension, au bout d'un temps t $10 \times \tau$, le transistor J est donc bloqué et V_P peut être mesuré directement sur la source du transistor comme $V_G = 0$. D'ailleurs, pourquoi avoir utilisé un condensateur ? Un circuit ouvert au niveau de la source de J aurait amené "instantanément" le transistor à $I_{DS} = 0$ et par conséquent à $V_S = V_P$.

1.2 Phase 2 : Mise en conduction involontaire du transistor

En présence de la sonde sur la source de J pour mesurer $V_S = V_P$, le circuit devient :



1.2.1 Analyse qualitative

La présence de l'oscilloscope créé un chemin de courant possible pour I_{DS} en régime permanent via R_{osc}. Bien que courant soit faible, de l'ordre de grandeur de $V_P/R_{osc} \approx uA$, il va fausser significativement la mesure de V_P car pour V_{GS} au alentour de $-V_P$, la caractéristique $I_{DS}(V_{GS}$ a une pente très faible.
Au moment où la sonde est posée sur la source de J, un nouveau régime transitoire apparaît, amenant J à un nouveau point de fonctionnement caractérisé par $V_{GS} = -V_P + \delta$ comme illustré sur la figure ci dessous :