Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

KKY/STP
Stochastické procesy a stacionarita

Yauheni Petrachenka
26. května 2024

1 Zadání

Stochastické procesy a stacionarita

Zadání semestrální práce č. 2

Příklad č. 1

Uvažujte Gauss-Markovův diskrétní proces generovaný vztahem

$$X_{k+1} = e^{-bT} X_k + W_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde W_k je bílý šum, $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, Q(1-e^{-2bT})\}$, počáteční podmínka je $p(X_0) = \mathcal{N}\{X_0; 0, Q\}$, $Q = 3$, $b = 0.5$ a $T = 1$. Vygenerujte $M = 10^4$ realizací Gauss-Markova procesu pro N=100 časových okamžiků. Vypočítejte odhad autokovarinanční funkce $\widehat{\mathsf{COV}[X_k, X_{k+\tau}]}$ pro $\tau \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 94\}$. Vykreslete a porovnejte tyto odhady s teoreticky vypočítanou autokovariančí funkcí $\mathsf{COV}[X_k, X_{k+\tau}]$. Určete, zda je proces stacionární v širším smyslu.

Příklad č. 2

Hodnotu Wienerova procesu v diskrétních časových okamžicích lze generovat pomocí vztahu

$$X_{k+1} = X_k + W_k, \ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

kde počáteční podmínka je $X_0 = 0$, interval mezi časovými okamžiky je roven jedné a W_k je bílý šum a $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, 1\}$.Vygenerujte $M = 10^4$ realizací Wienerova procesu pro N=100 časových okamžiků. Vykreslete 8 realizací a všimněte si nestacionarity procesu. Vypočítejte teoretickou hodnotu autokovarianční funkce procesu $\mathsf{COV}[X_{k+\tau}, X_k]$ a její odhad $\widehat{\mathsf{COV}[X_{k+\tau}, X_k]}$ pro $\tau \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 94\}$ vypočítaný z realizací. Obojí vykreslete s porovnejte.

Příklad č. 3

Uvažujte následující Gauss-Markovův model systému

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= 0.95 X_k + 0.5 W_k \\ Z_k &= 5 X_k + V_k, \end{aligned}$$

kde $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, 3\}$ a $p(V_k) = \mathcal{N}\{V_k; 0, 2\}$ jsou bílé šumy vzájemně nezávislé a nezávislé na počáteční podmínce $p(X_0) = \mathcal{N}\{X_0; 1, 5\}$. Vygenerujte $M = 10^4$ realizací modelu pro N=100 časových okamžiků. Vypočítejte teoretickou střední hodnotu procesů $\mathsf{E}[X_k]$, $\mathsf{E}[Z_k]$, jejich odhadů $\widehat{\mathsf{E}[X_k]}$, $\widehat{\mathsf{E}[Z_k]}$ pro $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ a ustálené hodnoty $\mathsf{E}[X_k]$, $\mathsf{E}[Z_k]$ pro $k \to \infty$. Výsledky vykreslete s porovnejte. Vypočítejte teoretickou hodnotu variance procesů $\mathsf{VAR}[X_k]$, $\mathsf{VAR}[Z_k]$, jejich odhadů $\widehat{\mathsf{VAR}[X_k]}$, $\widehat{\mathsf{VAR}[Z_k]}$ pro $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 99\}$ a ustálené hodnoty $\mathsf{VAR}[X_k]$, $\mathsf{VAR}[Z_k]$ pro $k \to \infty$. Výsledky opět vykreslete s porovnejte.

2 První příklad

2.1 Teoritický výpočet kovariační funkce

Pro pochopení závislosti kovariační funkce na tau je třeba spočítat několik prvních kovariačních funkcí ručně. Obecně platí vztah:

$$Cov(X_t, X_{t+\tau}) = E[X_t \cdot X_{t+\tau}] + E[X_t] \cdot E[X_{t+\tau}] \tag{1}$$

Pro další výpočty budeme používat následující vlastnosti: X a W jsou dvě nezávislé náhodné veličiny, střední hodnota W je rovna nule, a dále můžeme odvodit střední hodnotu procesu:

$$E[X_1] = E[e^{-bT} \cdot X_0 + W_1] \tag{2}$$

Teď můžeme použít linearitu střední hodnoty a dostaneme:

$$E[X_1] = e^{-bT} E[X_0] + E[W_0] = e^{-bT} \cdot 0 + 0 = 0 \tag{3}$$

Spočteme střední hodnotu X_2:

$$E[X_2] = E[e^{-bT} \cdot X_1 + W_2] \tag{4}$$

$$E[X_2] = e^{-bT} \cdot E[X_1] + E[W_2] = e^{-bT} \cdot 0 + 0 = 0 \tag{5}$$

Spočteme střední hodnotu X_3:

$$E[X_3] = E[e^{-bT} \cdot X_2 + W_3] \tag{6}$$

$$E[X_3] = e^{-bT} \cdot E[X_2] + E[W_3] = e^{-bT} \cdot 0 + 0 = 0 \tag{7}$$

Můžeme zapsat obecně pro X_k:

$$E[X_k] = E[e^{-bT} \cdot X_{k-1} + W_k] \tag{8}$$

$$E[X_k] = e^{-bT} \cdot E[X_{k-1}] + E[W_k] = e^{-bT} \cdot 0 + 0 = 0 \tag{9}$$

Dále bude odvozená variance. Variance pro X_1:

$$\mathrm{VAR}[X_1] = \mathrm{VAR}[e^{-bT} X_0 + W_1] \tag{10}$$

$$\mathrm{VAR}[X_1] = \mathrm{VAR}[e^{-bT} X_0] + \mathrm{W}_1 + 2 \cdot \mathrm{COV}[X_0, W_1] \tag{11}$$

$$\mathrm{VAR}[X_1] = e^{-2bT}\,\mathrm{VAR}[X_0] + \mathrm{VAR}[W_1] + 0 \tag{12}$$

$$\mathrm{VAR}[X_1] = e^{-2bT} \cdot Q + Q \cdot (1 - e^{-2bT}) = e^{-2bT} \cdot Q - e^{-2bT} \cdot Q + Q = Q \tag{13}$$

Byl obdržen výsledek $\mathrm{VAR}[X_1] = Q$ můžeme si všimnout, že $\mathrm{VAR}[X_1] = \mathrm{VAR}[X_0] = Q$, to znamená, že výpočet následující variance $\mathrm{VAR}[X_2]$ bude stejný a obdržíme stejný výsledek Q, z toho plyne že $\mathrm{VAR}[X_k] = Q$.

S výrazu (9) plyne, že střední hodnota náhodné veličiny X je rovna nule. Použitím této informace bylo zjištěno, že hodnota $E[X^2]$ se rovná(14):

$$\mathrm{VAR}[X] = E[X^2] + E[X]^2 = E[X^2] = Q \tag{14}$$

Dále bude zkoumána kovariační funkce v případě že hodnota τ se rovná 1:

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k \cdot X_{k+1}] + E[k] \cdot E[k+1] \tag{15}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k \cdot (e^{-b \cdot T} \cdot X_k + W_k)] + E[X_k] \cdot E[X_{k+1}] \tag{16}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[e^{-b \cdot T} \cdot X_k^2 + W_k \cdot X_k] + 0 \cdot E[X_{k+1}] \tag{17}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = e^{-b \cdot T} E[X_k^2] + E[X_k \cdot W_k] \tag{18}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = e^{-b \cdot T} \cdot Q \tag{19}$$

Dále bude zkoumána kovariacni funkce v případě že hodnota τ se rovná 2:

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = E[X_k \cdot X_{k+2}] + 0 \cdot E[X_{k+2}] \tag{20}$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = E[X_k \cdot (e^{-bT} \cdot X_{k+1} + W_{k+1})] \tag{21}$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = E[X_k \cdot (e^{-bT} \cdot (e^{-bT} \cdot X_k + W_k) + W_{k+1})] \tag{22}$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = E[e^{-2bT} \cdot X_k^2 + e^{-bT} \cdot W_k \cdot X_k + W_{k+1}] \tag{23}$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = e^{-2bT} \cdot E[X_k^2] + e^{-bT} \cdot E[W_k] \cdot E[X_k] + E[W_{k+1}] \tag{24}$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = e^{-2bT} \cdot E[X_k^2] + e^{-bT} \cdot 0 \cdot E[X_k] + 0 \tag{25}$$

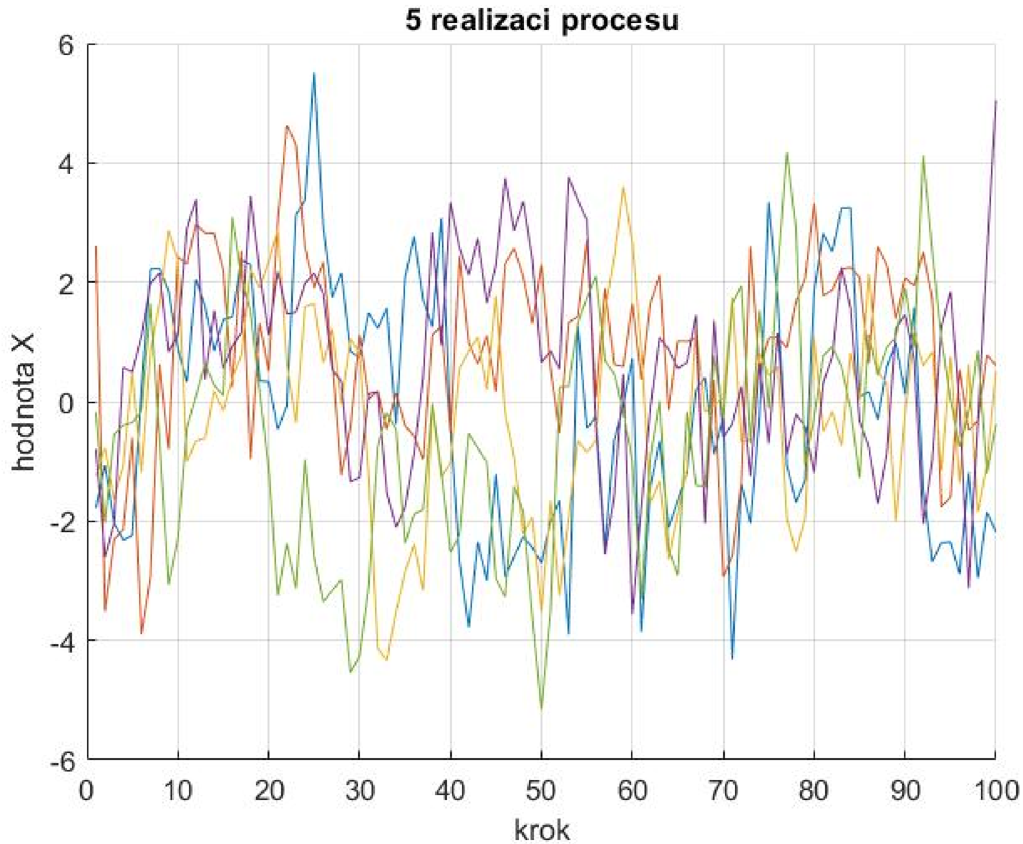
$$Cov(X_k, X_{k+2}) = e^{-2bT} \cdot Q \tag{26}$$

Takovým způsobem bude odvozen obecní vztah(27):

$$Cov(X_k, X_{k+\tau}) = e^{-\tau bT} \cdot Q \tag{27}$$

2.2 Naměřený kovariační funkce

Pro odhad kovariáční funkce bylo provedeno 10000 procesu (obr. č. 1):

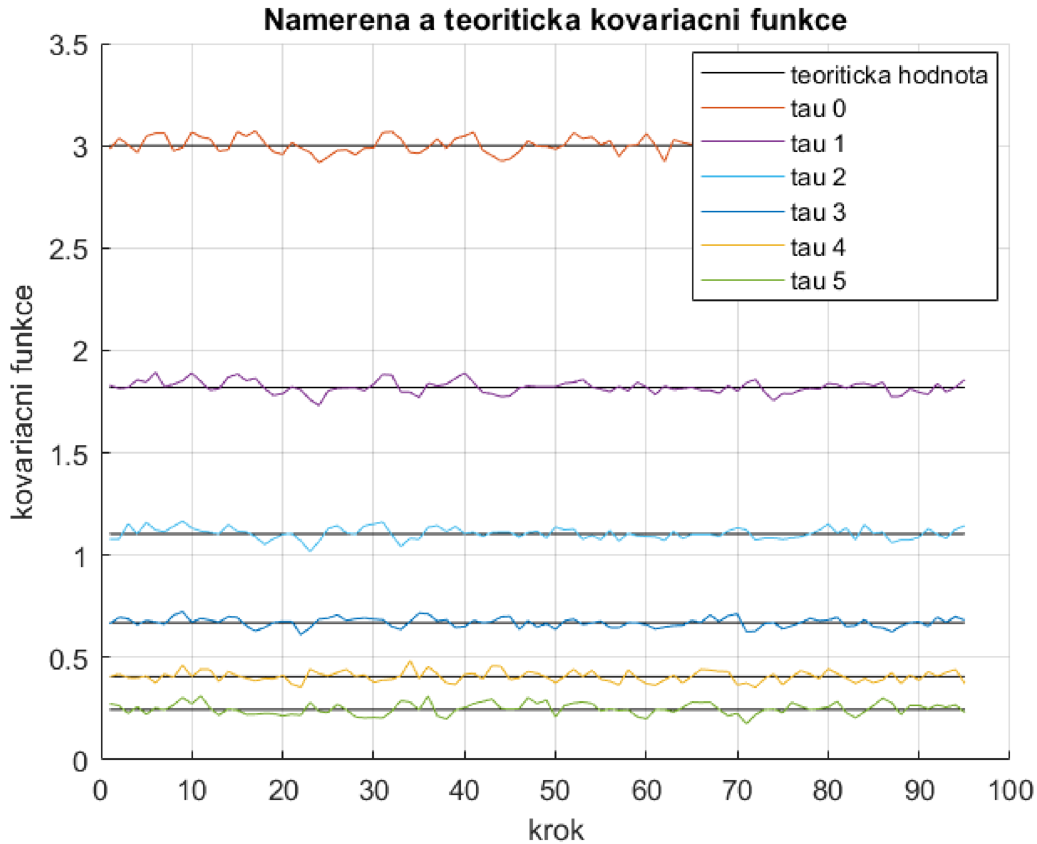


Obrázek 1: 5 realizace procesu

Spočteme empirickou kovariacni funkce pomocí vztahů (28) a výsledek vykreslíme na obrázek číslo 2.

$$\mathrm{COV}(X_k, X_{k+\tau}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_k - \overline{X_k}) \cdot (X_{k+\tau} - \overline{X_{k+\tau}}) \tag{28}$$

Z obrázku č. 2 je zřejmé, že díky velkému počtu realizací procesu empirická kovarianční funkce konverguje k teoretické kovarianční funkci. Tento výsledek ilustruje přesnost a spolehlivost použitých metod pro odhadování vlastností stochastických procesů.



Obrázek 2: Teoretická a naměřená hodnota kovariační funkce

2.3 Stacionarita procesu

Aby proces byl stacionární v širším smyslu, musí platit:

1. Střední hodnota je konstantní.
2. Autokovarianční funkce závisí pouze na rozdílu časových okamžiků.

Střední hodnota už byla spočítána dříve:

$$E[X_{k+1}] = e^{-bT} E[X_k] + E[W_k] = e^{-bT} \cdot 0 + 0 = 0 \tag{29}$$

Z rovnice (17) plyne, že první podmínka je splněna. Ze zobecnění kovarianční funkce (16) je vidět, že pro stejný proces funkce závisí pouze na parametru τ, což znamená, že druhá podmínka je také splněna. Z toho plyne, že proces je stacionární v širším smyslu.

3 Druhý příklad

3.1 Teoritický výpočet kovariační funkce

Odvodíme střední hodnotu náhodné veličiny X:

$$E[X_1] = E[X_0 + W_1] \tag{30}$$

$$E[X_1] = E[X_0] + E[W_1] \tag{31}$$

Vzhledem k tomu, že počáteční podmínka $X_0 = 0$,ستření hodnota X_0 se rovná 0.

$$E[X_1] = 0 + 0 = 0 \tag{32}$$

Analogický výsledek dostaneme při výpočtu $E[X_2], E[X_3]$... a tak dále lze říct že střední hodnota se rovná:

$$E[X_k] = 0 \tag{33}$$

Teď spočteme variance X_k, pro variance X_1 platí:

$$\mathrm{VAR}[X_1] = \mathrm{VAR}[X_0 + W_1] \tag{34}$$

$$\mathrm{VAR}[X_1] = \mathrm{VAR}[X_0] + \mathrm{VAR}[W_1] \tag{35}$$

$$\mathrm{VAR}[X_1] = 0 + \mathrm{VAR}[W_1] = 1 \tag{36}$$

Pro variance X_2 platí:

$$\mathrm{VAR}[X_2] = \mathrm{VAR}[X_1] + \mathrm{VAR}[W_2] \tag{37}$$

$$\mathrm{VAR}[X_2] = 1 + 1 = 2 \tag{38}$$

Analýzou variance zjistíme, že variance se zvyšuje o 1 kvůli variance W a přičítá se k předchozí varianci kvůli minulému stavu variance X:

$$\mathrm{VAR}[X_k] = \mathrm{VAR}[X_{k-1}] + \mathrm{VAR}[W_k] = k \tag{39}$$

Výpočet kovariační funkce ve druhém příkladu bude podobný, jako v prvním příkladu.

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k \cdot X_{k+1}] + E[X_k] \cdot E[X_{k+1}] \tag{40}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k(X_k + W_k)] + E[X_k] \cdot E[X_k + W_k] \tag{41}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k^2 + X_k \cdot W_k] + E[X_k] \cdot E[X_k + W_k] \tag{42}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k^2] + E[X_k] \cdot E[W_k] + E[X_k]^2 + E[X_k] \cdot E[W_k] \tag{43}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k^2] + E[X_k]^2 \tag{44}$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = VAR[X_k] \tag{45}$$

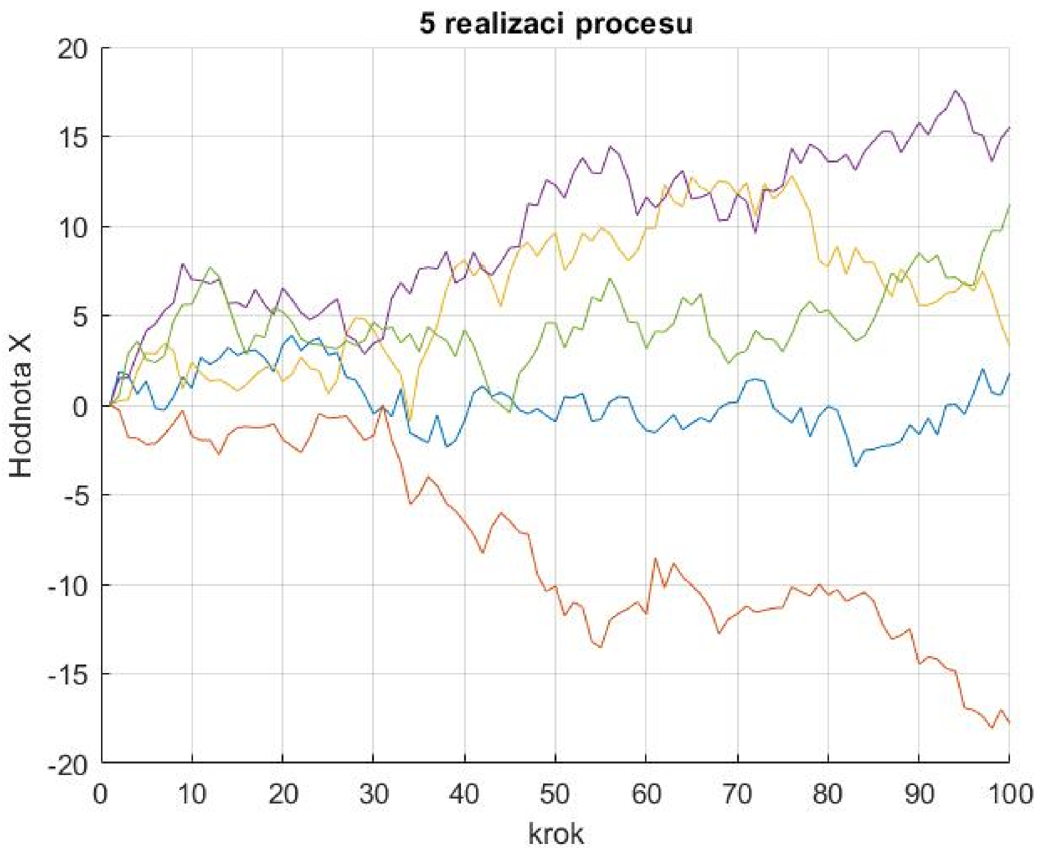
$$Cov(X_k, X_{k+1}) = k \tag{46}$$

Obecně platí vztah:

$$Cov(X_k, X_{k+\tau}) = min(k, k+\tau) = k \tag{47}$$

3.2 Naměřený kovaricni funkce

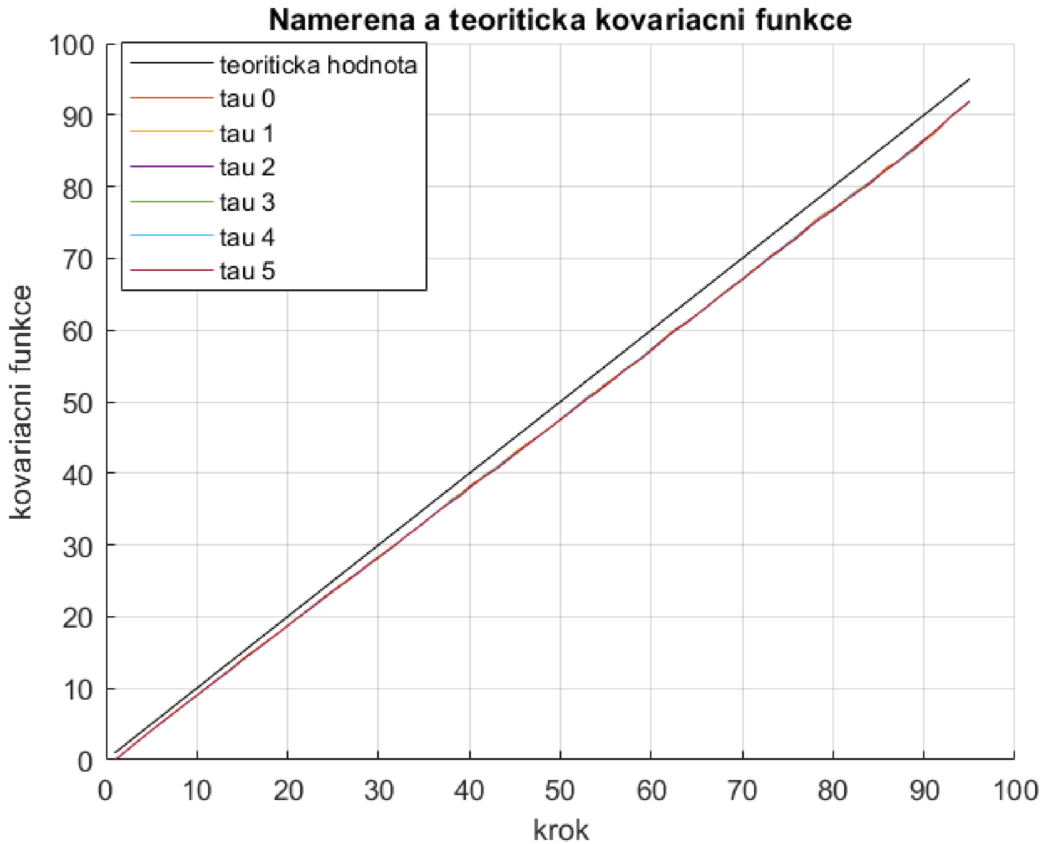
Na obrázku č. 3 je znázorněna jedna realizace procesu. Na základě této realizace byla vypočítána empirická kovariance. Porovnáním naměřených hodnot s teoretickými predikcemi, jak je znázorněno na obrázku č. 4, je zřejmé, že naměřené hodnoty konvergují k teoretickým hodnotám. Tento výsledek potvrzuje správnost teoretického modelu a vhodnost použitého přístupu.



Obrázek 3: 5 realizace procesu

Spočteme empirickou kovariacni funkce pomocí vztahů (48) a výsledek vykreslíme na obrázek číslo 4.

$$\mathrm{COV}(X_k, X_{k+\tau}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_k - \overline{X_k}) \cdot (X_{k+\tau} - \overline{X_{k+\tau}}) \tag{48}$$



Obrázek 4: Teoretická a naměřená hodnota kovariační funkce

4 Třetí příklad

4.1 Teoretická střední hodnota

Pro výpočet střední hodnoty procesů X_k, Z_k postupujeme následujícím způsobem:

$$E[X_0] = 1 \tag{49}$$

$$E[X_1] = 0.95 \cdot E[X_0] + 0.5 \cdot E[W_0] = 0.95 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0 = 0.95 \tag{50}$$

$$E[X_2] = 0.95 \cdot E[X_1] + 0.5 \cdot E[W_1] = 0.95 \cdot 0.95 + 0.5 \cdot 0 = 0.95^2 \tag{51}$$

$$E[X_3] = 0.95 \cdot E[X_2] + 0.5 \cdot E[W_2] = 0.95 \cdot 0.95^2 + 0.5 \cdot 0 = 0.95^3 \tag{52}$$

$$E[X_4] = 0.95 \cdot E[X_3] + 0.5 \cdot E[W_3] = 0.95 \cdot 0.95^3 + 0.5 \cdot 0 = 0.95^4 \tag{53}$$

Opakovanou aplikací dostáváme:

$$E[X_k] = 0.95 \cdot E[Xk - 1] = 0.95^k \tag{54}$$

Pro proces Z_k:

$$E[Z_0] = 5 \cdot E[X_0] + E[V_0] = 5 \cdot 1 + 0 = 5 \tag{55}$$

$$E[Z_1] = 5 \cdot E[X_1] + E[V_1] = 5 \cdot 0.95 + 0 = 5 \cdot 0.95 \tag{56}$$

$$E[Z_2] = 5 \cdot E[X_2] + E[V_2] = 5 \cdot 0.95^2 + 0 = 5 \cdot 0.95^2 \tag{57}$$

$$E[Z_k] = 5 \cdot E[X_k] + E[V_k] = 5 \cdot 0.95^k \tag{58}$$

4.2 Teoretická variance

Pro výpočet variance procesů X_k, Z_k postupujeme následovně:

$$\mathrm{VAR}[X_0] = 5 \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{VAR}[X_1] &= \mathrm{VAR}[0.95 \cdot X_0 + 0.5 \cdot W_0] \\
&= \mathrm{VAR}[0.95 \cdot X_0] + \mathrm{VAR}[0.5 \cdot W_0] \\
&= 0.95^2\,\mathrm{VAR}[X_0] + 0.5^2\,\mathrm{VAR}[W_0] \\
&= 0.95^2 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{VAR}[X_2] &= \mathrm{VAR}[0.95 \cdot X_1 + 0.5 \cdot W_1] \\
&= \mathrm{VAR}[0.95 \cdot X_1] + \mathrm{VAR}[0.5 \cdot W_1] \\
&= 0.95^2\,\mathrm{VAR}[X_1] + 0.5^2\,\mathrm{VAR}[W_1] \\
&= 0.95^2 \cdot (0.95^2 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3) + 0.5^2 \cdot 3 \\
&= 0.95^4 \cdot 5 + 0.95^2 \cdot 0.5^2 \cdot 3 + 0.5^2 \cdot 3 \\
&= 0.95^4 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot (0.95^2 + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{VAR}[X_3] &= 0.95^2 \cdot \mathrm{VAR}[X_2] + 0.5^2\,\mathrm{VAR}[W_2] \\
&= 0.95^2 \cdot (0.95^4 \cdot 5 + 0.95^2 \cdot 0.5^2 \cdot 3 + \\
&+ 0.5^2 \cdot 3) + 0.5^2 \cdot 3 \\
&= 0.95^6 \cdot 5 + 0.95^4 \cdot 0.5^2 \cdot 3 + 0.95^2 \cdot 0.5^2 \cdot 3 + 0.5^2 \cdot 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{VAR}[X_k] &= 0.95^{2 \cdot k} \cdot 5 + 0.95^{2 \cdot k - 2} \cdot 0.5^2 \cdot 3 + ... + 0.5^2 \cdot 3 \\
&= 0.95^{2 \cdot k} \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n}
\end{aligned}$$

Při znalosti variance X můžeme spočítat variance Z:

$$\begin{aligned}
\mathrm{VAR}[Z_0] &= \mathrm{VAR}[5 \cdot X_0 + V_0] \\
&= \mathrm{VAR}[5 \cdot X_0] + \mathrm{VAR}[V_0] \\
&= 5^2 \cdot \mathrm{VAR}[X_0] + 2 \\
&= 5^3 + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}[Z_1] &= \text{VAR}[5 \cdot X_1 + V_1] \\ &= 5^2 \cdot (0.95^2 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3) + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}[Z_k] &= \text{VAR}[5 \cdot X_k + V_k] \\ &= 5^2 \cdot (0.95^{2 \cdot k} \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n}) + 2\end{aligned}$$

4.3 Výpočet limitních hodnot

Limita pro střední hodnotu X:

$$\lim_{k\to\infty} E[X_k] = \lim_{k\to\infty} 0.95^k = \lim_{k\to\infty} \frac{95^k}{100^k} = 0 \tag{60}$$

Limita pro střední hodnotu Z:

$$\lim_{k\to\infty} E[Z_k] = \lim_{k\to\infty} 5 \cdot 0.95^k = 5 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{95^k}{100^k} = 0 \tag{61}$$

Pro zjištění variace X musíme uvažovat že suma $\sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n}$ představuje sebou geometrickou řadu a proto musíme najít příslušné koeficienty geometrické řady:

$$q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{0.95^{2 \cdot 1}}{0.95^{2 \cdot 0}} = 0.95^2 \tag{62}$$

Díky tomu že $q = 0.95^2 < 1$ naše řada konverguje a můžeme spočítat součet

$$\lim_{k\to\infty} \text{VAR}[X_k] = 0 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n} \tag{63}$$

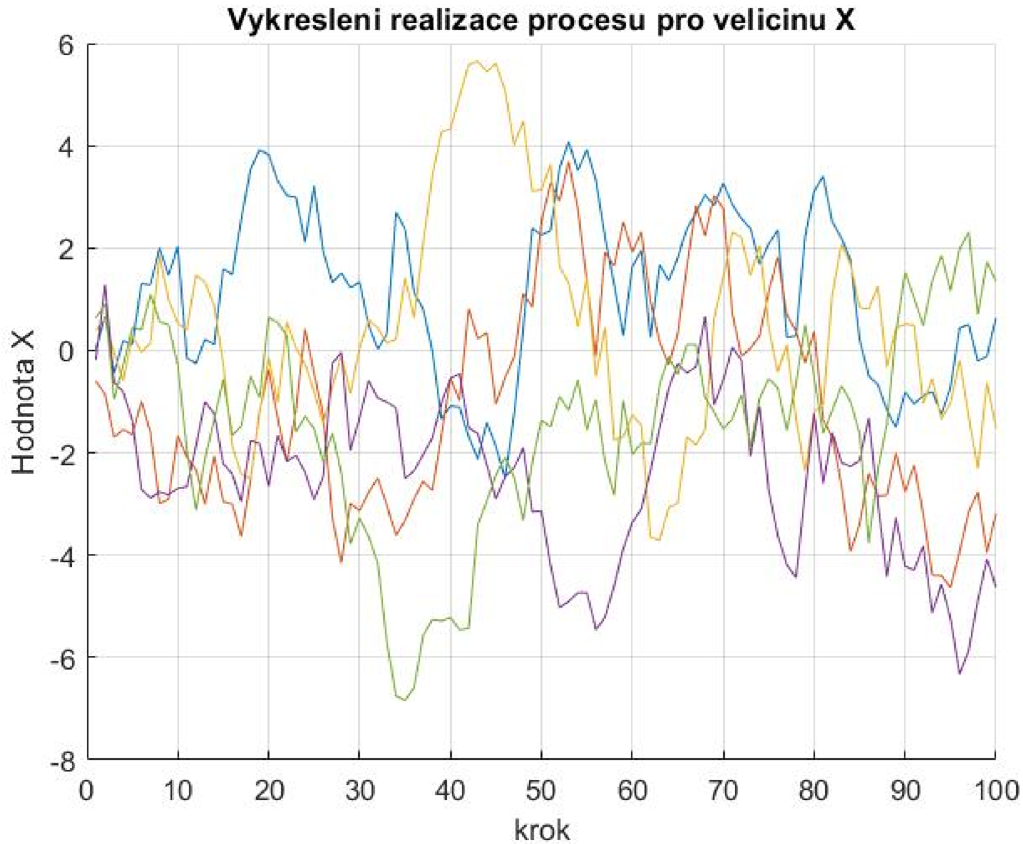
$$\lim_{k\to\infty} \text{VAR}[X_k] = 0.5^2 \cdot 3 \cdot \frac{a_0}{1-q} = 0.5^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1-0.95^2} = 7.692 \tag{64}$$

Když známe variace X můžeme určit variance Z:

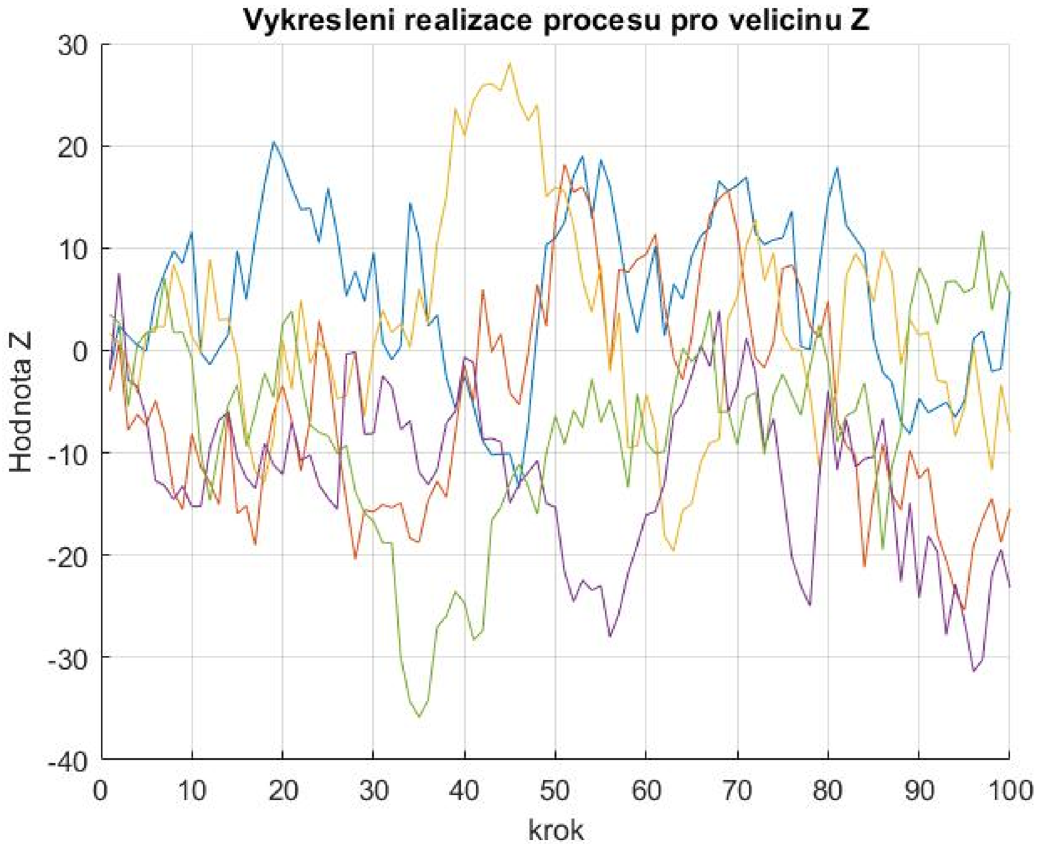
$$\lim_{k\to\infty} VAR[Z_k] = 5^2 \cdot (0 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n}) + 2 = 25 \cdot 7.692 + 2 = 194.3 \tag{65}$$

4.4 Porovnání teoretických a naměřených parametrů

Pro kvantifikaci naměřených parametrů byly generovány procesy pro náhodné proměnné X a Z. Vizualizace těchto procesů je zobrazena na obrázcích 5 a 6. Tato metodologie umožňuje přímé srovnání teoretických predikcí a empirických dat, což je klíčové pro ověření stacionarity a dalších charakteristik stochastických procesů v rámci zvoleného modelu.



Obrázek 5: Proces pro náhodnou veličinu X

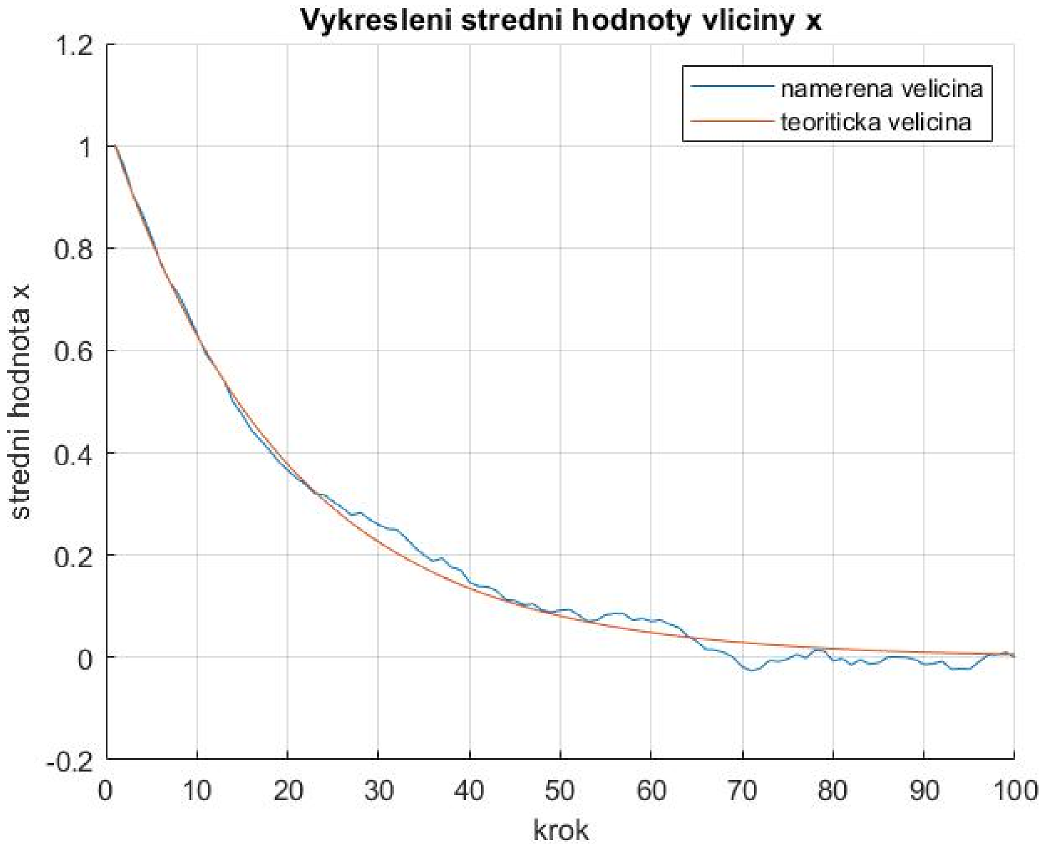


Obrázek 6: Proces pro náhodnou veličinu Z

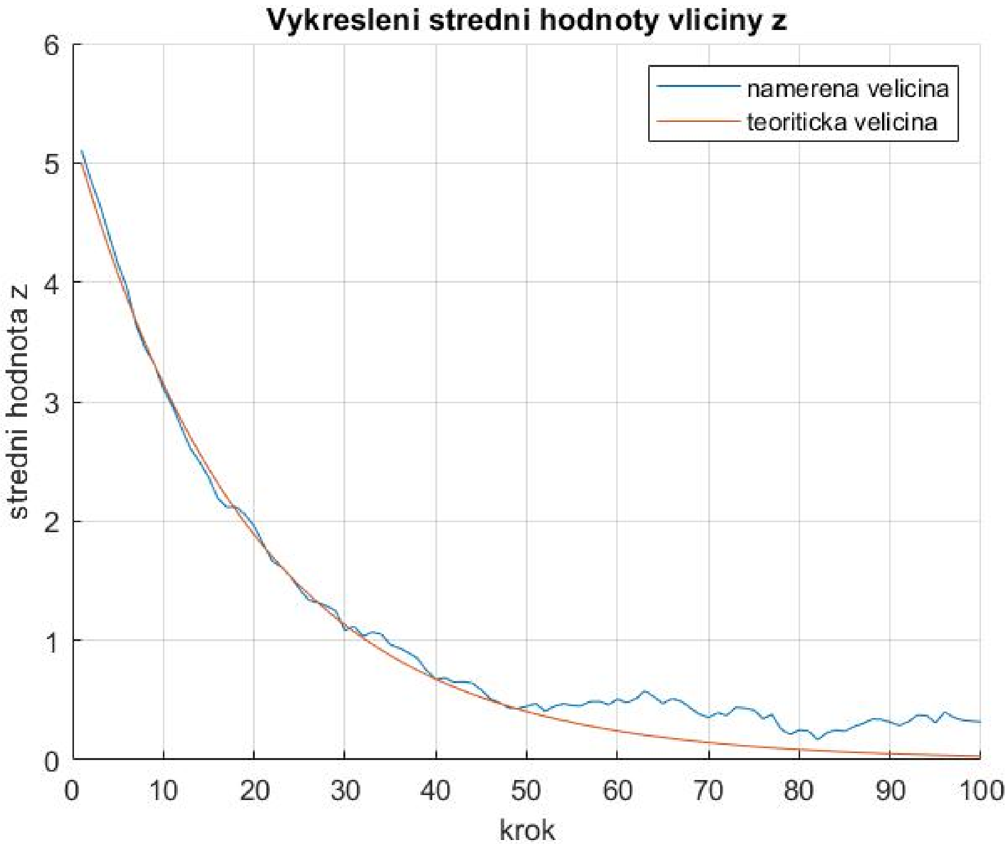
4.5 Porovnání středních hodnot

Na grafech (7), (8) můžeme pozorovat malou odchylku naměřený střední hodnoty od teoretické to je způsobeno nepostačujícím počtem realizací. Emperické střední hodnoty budou spočítány pomocí vztahu (66):

$$E[X] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \tag{66}$$



Obrázek 7: Střední hodnota X

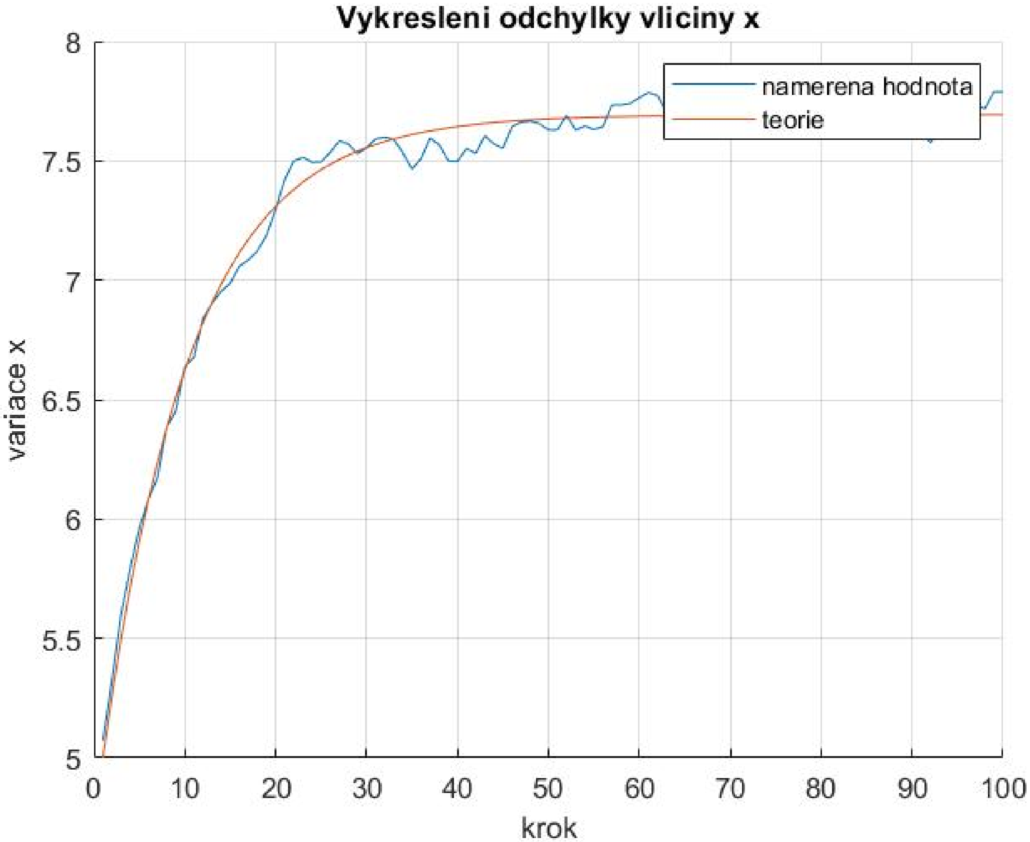


Obrázek 8: Střední hodnota Z

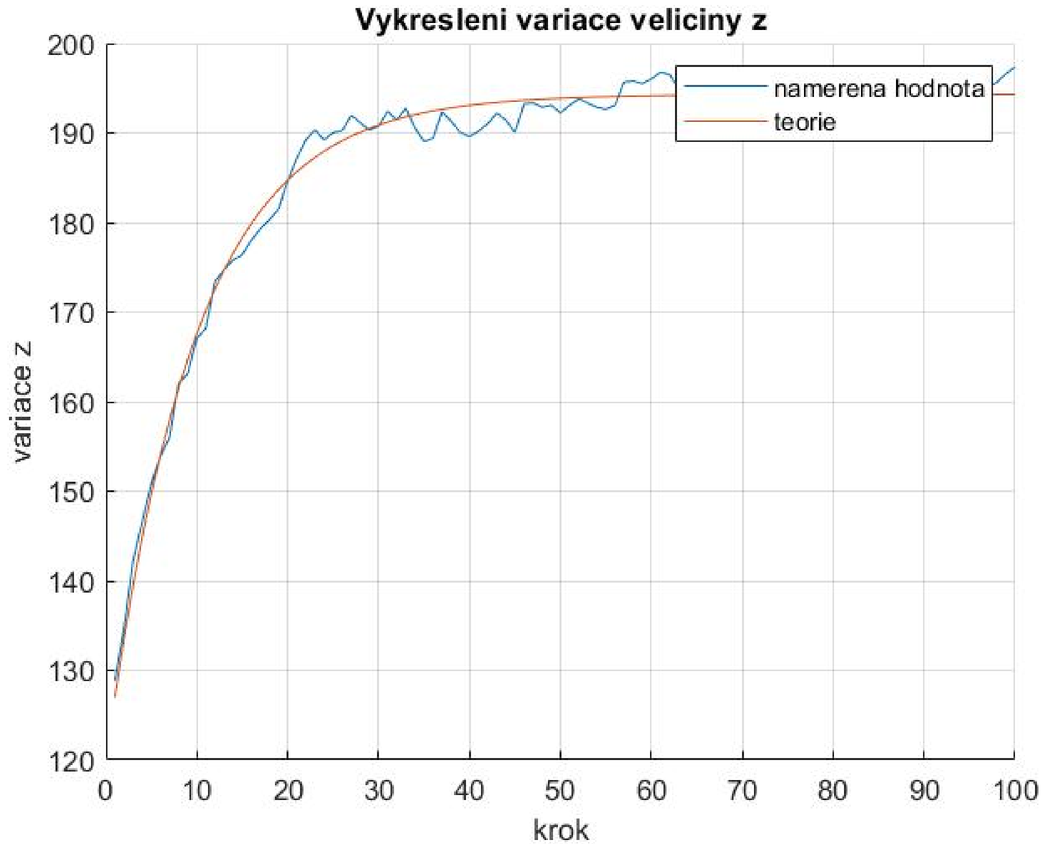
4.6 Porovnání variancí

Z grafů 8 a 9 je patrné, že hodnoty variance konvergují k teoretickým výpočtům. Nicméně, kvůli omezenému počtu realizací je možné pozorovat drobnou odchylku. Tato odchylka je očekávaná a zdůrazňuje potřebu dostatečného počtu vzorků pro přesnější odhad parametrů stochastických procesů. Emperická variance bude spočítána pomocí vztahu (67):

$$\mathrm{VAR} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) \tag{67}$$



Obrázek 9: Variance X



Obrázek 10: Variance Z

5 Závěr

Studium stochastických procesů zahrnuje analýzu vlastností, jako jsou kovariance a stacionarita, které jsou klíčové pro aplikace v různých oblastech. Teoretické výpočty a empirické simulace provedené v MATLABu potvrzují, že kovarianční funkce a stacionarita poskytují hlubší pochopení stochastických systémů. Gauss-Markovovy modely a Wienerovy procesy jsou zvláště důležité pro analýzu časových řad a zpracování signálů. Výsledky simulací ukazují, že teoretické modely jsou dobře aplikovatelné a empirické výsledky se těsně shodují s očekávanými hodnotami.