

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky



KKY/STP
STOCHASTICKÉ PROCESY A STACIONARITA

Yauheni Petrachenka
13. května 2024

Stochastické procesy a stacionarita*Zadání semestrální práce č. 2***Příklad č. 1**

Uvažujte Gauss-Markovův diskretní proces generovaný vztahem

$$X_{k+1} = e^{-bT} X_k + W_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde W_k je bílý šum, $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, Q(1 - e^{-2bT})\}$, počáteční podmínka je $p(X_0) = \mathcal{N}\{X_0; 0, Q\}$, $Q = 3$, $b = 0.5$ a $T = 1$. Vygenerujte $M = 10^4$ realizací Gauss-Markova procesu pro $N=100$ časových okamžiků. Vypočítejte odhad autokovarianční funkce $\widehat{\text{COV}}[X_k, X_{k+\tau}]$ pro $\tau \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $k \in \{0, 1, 2, \dots, 94\}$. Vykreslete a porovnejte tyto odhady s teoreticky vypočítanou autokovarianční funkcí $\text{COV}[X_k, X_{k+\tau}]$. Určete, zda je proces stacionární v širším smyslu.

Příklad č. 2

Hodnotu Wienerova procesu v diskretních časových okamžicích lze generovat pomocí vztahu

$$X_{k+1} = X_k + W_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

kde počáteční podmínka je $X_0 = 0$, interval mezi časovými okamžiky je roven jedné a W_k je bílý šum a $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, 1\}$. Vygenerujte $M = 10^4$ realizací Wienerova procesu pro $N=100$ časových okamžiků. Vykreslete 8 realizací a všimněte si nestacionarity procesu. Vypočítejte teoretickou hodnotu autokovarianční funkce procesu $\text{COV}[X_{k+\tau}, X_k]$ a její odhad $\widehat{\text{COV}}[X_{k+\tau}, X_k]$ pro $\tau \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ a $k \in \{0, 1, 2, \dots, 94\}$ vypočítaný z realizací. Obojí vykreslete s porovnejte.

Příklad č. 3

Uvažujte následující Gauss-Markovův model systému

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= 0.95X_k + 0.5W_k \\ Z_k &= 5X_k + V_k, \end{aligned}$$

kde $p(W_k) = \mathcal{N}\{W_k; 0, 3\}$ a $p(V_k) = \mathcal{N}\{V_k; 0, 2\}$ jsou bílé šumy vzájemně nezávislé a nezávislé na počáteční podmínce $p(X_0) = \mathcal{N}\{X_0; 1, 5\}$. Vygenerujte $M = 10^4$ realizací modelu pro $N=100$ časových okamžiků. Vypočítejte teoretickou střední hodnotu procesů $E[X_k]$, $E[Z_k]$, jejich odhadů $\widehat{E}[X_k]$, $\widehat{E}[Z_k]$ pro $k \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ a ustálené hodnoty $E[X_k]$, $E[Z_k]$ pro $k \rightarrow \infty$. Výsledky vykreslete s porovnejte. Vypočítejte teoretickou hodnotu variance procesů $\text{VAR}[X_k]$, $\text{VAR}[Z_k]$, jejich odhadů $\widehat{\text{VAR}}[X_k]$, $\widehat{\text{VAR}}[Z_k]$ pro $k \in \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ a ustálené hodnoty $\text{VAR}[X_k]$, $\text{VAR}[Z_k]$ pro $k \rightarrow \infty$. Výsledky opět vykreslete s porovnejte.

2 První příklad

2.1 Teoritický výpočet kovariační funkce

Pro pochopení závislosti kovariační funkce na τ je třeba spočítat několik prvních kovariačních funkcí ručně. Obecně platí vztah:

$$Cov(X_t, X_{t+\tau}) = E[X_t \cdot X_{t+\tau}] + E[t] \cdot E[t + \tau] \quad (1)$$

Pro další výpočty budeme používat následující vlastnosti: X a W jsou dvě nezávislé náhodné veličiny, střední hodnota W je rovna nule, a taky platí:

$$E[X_1] = e^{-bT} E[X_0] + E[W_0] = e^{-bT} \cdot 0 + 0 = 0 \quad (2)$$

S výrazu (2) logicky plyne, že střední hodnota náhodné veličiny X je rovna nule. Použitím této informace bylo zjištěno, že hodnota $E[X^2]$ se rovná (3):

$$VAR[X] = E[X^2] + E[X]^2 = E[X^2] = Q \quad (3)$$

Dále bude zkoumána kovariační funkce v případě že hodnota τ se rovná 1:

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k \cdot X_{k+1}] + E[k] \cdot E[k + 1] \quad (4)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k \cdot (e^{-bT} \cdot X_k + W_k)] + E[X_k] \cdot E[X_{k+1}] \quad (5)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[e^{-bT} \cdot X_k^2 + W_k \cdot X_k] + 0 \cdot E[X_{k+1}] \quad (6)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = e^{-bT} E[X_k^2] + E[X_k \cdot W_k] \quad (7)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = e^{-bT} \cdot Q \quad (8)$$

Dále bude zkoumána kovariační funkce v případě že hodnota τ se rovná 2:

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = E[X_k \cdot X_{k+2}] + 0 \cdot E[X_{k+2}] \quad (9)$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = E[X_k \cdot (e^{-bT} \cdot X_{k+1} + W_{k+1})] \quad (10)$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = E[X_k \cdot (e^{-bT} \cdot (e^{-bT} \cdot X_k + W_k) + W_{k+1})] \quad (11)$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = E[e^{-2bT} \cdot X_k^2 + e^{-bT} \cdot W_k \cdot X_k + W_{k+1}] \quad (12)$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = e^{-2bT} \cdot E[X_k^2] + e^{-bT} \cdot E[W_k] \cdot E[X_k] + E[W_{k+1}] \quad (13)$$

$$Cov(X_k, X_{k+2}) = e^{-2bT} \cdot E[X_k^2] + e^{-bT} \cdot 0 \cdot E[X_k] + 0 \quad (14)$$

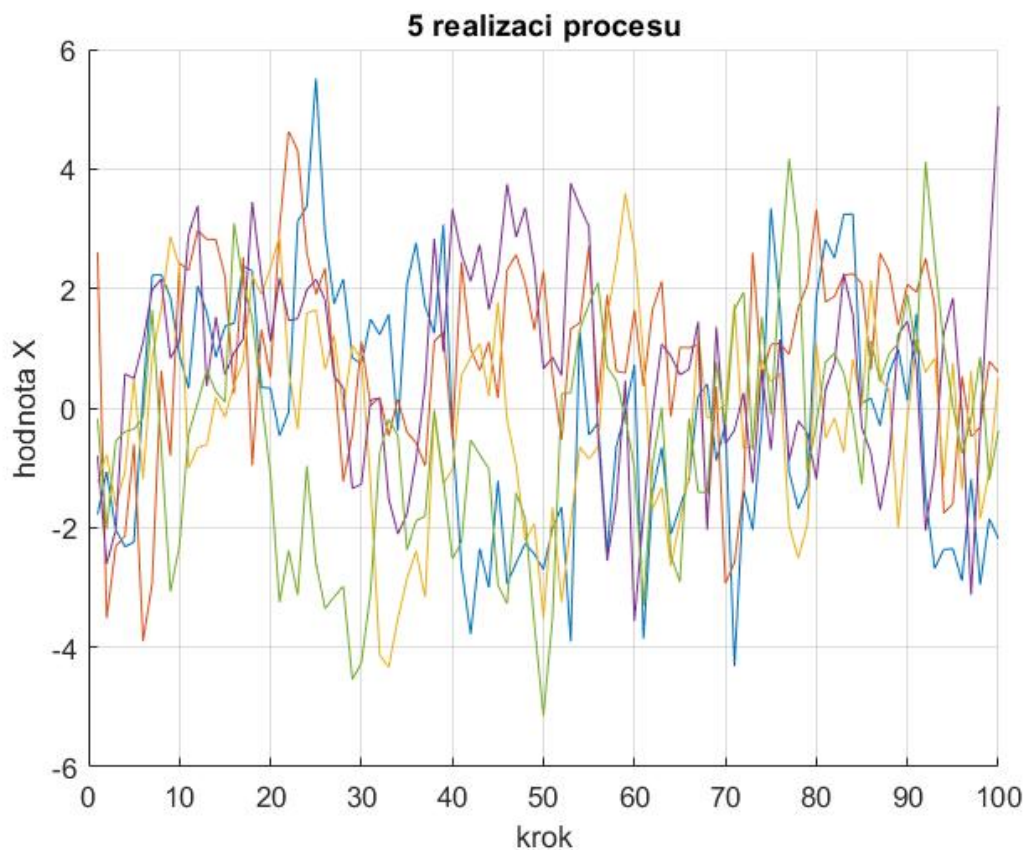
$$Cov(X_k, X_{k+2}) = e^{-2bT} \cdot Q \quad (15)$$

Takovým způsobem bude odvozen obecní vztah (16):

$$Cov(X_k, X_{k+\tau}) = e^{-\tau bT} \cdot Q \quad (16)$$

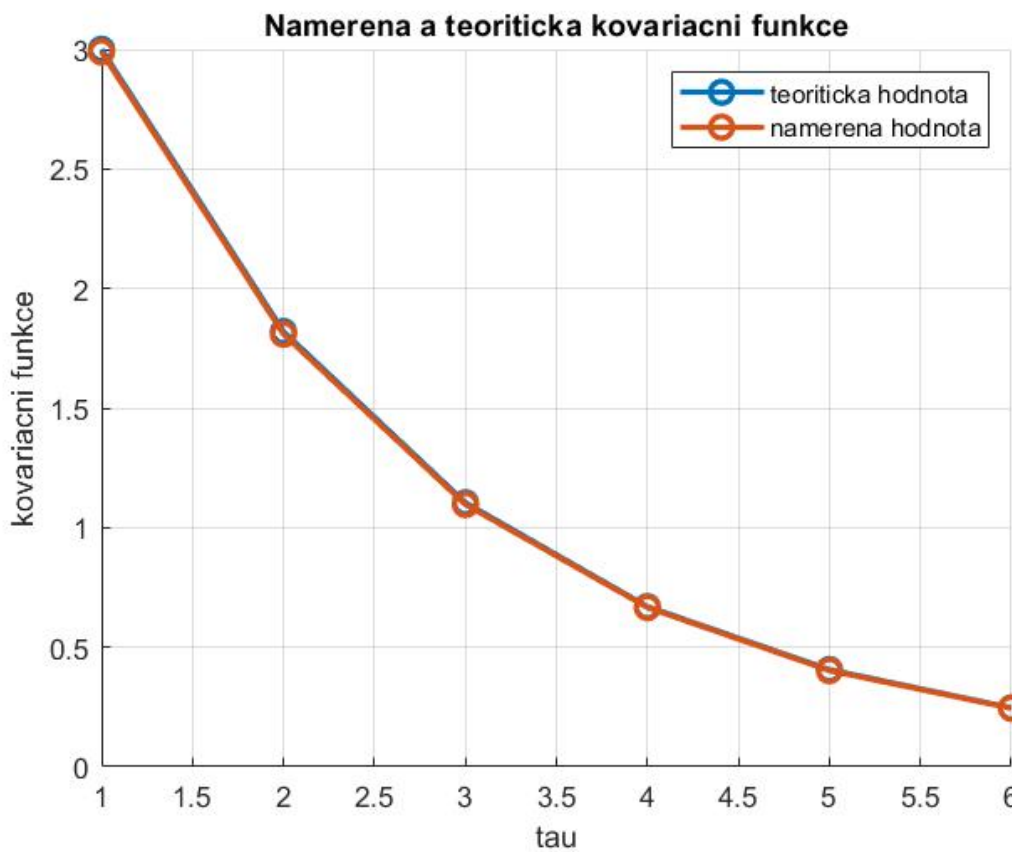
2.2 Naměřený kovariační funkce

Pro odhad kovariační funkce bylo provedeno 10000 procesů (obr. č. 1):



Obrázek 1: 5 realizace procesu

Z obrázku č. 2 je zřejmé, že díky velkému počtu realizací procesu empirická kovarianční funkce konverguje k teoretické kovarianční funkci. Tento výsledek ilustruje přesnost a spolehlivost použitých metod pro odhadování vlastností stochastických procesů.



Obrázek 2: Teoretická a naměřená hodnota kovariační funkce

2.3 Stacionarita procesu

Aby proces byl stacionární v širším smyslu, musí platit:

1. Střední hodnota je konstantní.
2. Autokovarianční funkce závisí pouze na rozdílu časových okamžiků.

Střední hodnota už byla spočítána dříve:

$$E[X_{k+1}] = e^{-bT} E[X_k] + E[W_k] = e^{-bT} \cdot 0 + 0 = 0 \quad (17)$$

Z rovnice (17) plyne, že první podmínka je splněna. Ze zobecnění kovarianční funkce (16) je vidět, že pro stejný proces funkce závisí pouze na parametru τ , což znamená, že druhá podmínka je také splněna. Z toho plyne, že proces je stacionární v širším smyslu.

3 Druhý příklad

3.1 Teoritický výpočet kovariační funkce

Výpočet kovariační funkce ve druhém příkladu bude podobný, jako v prvním příkladu.

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k \cdot X_{k+1}] + E[X_k] \cdot E[X_{k+1}] \quad (18)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k(X_k + W_k)] + E[X_k] \cdot E[X_k + W_k] \quad (19)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k^2 + X_k \cdot W_k] + E[X_k] \cdot E[X_k + W_k] \quad (20)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k^2] + E[X_k] \cdot E[W_k] + E[X_k]^2 + E[X_k] \cdot E[W_k] \quad (21)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = E[X_k^2] + E[X_k]^2 \quad (22)$$

$$Cov(X_k, X_{k+1}) = VAR[X_k] \quad (23)$$

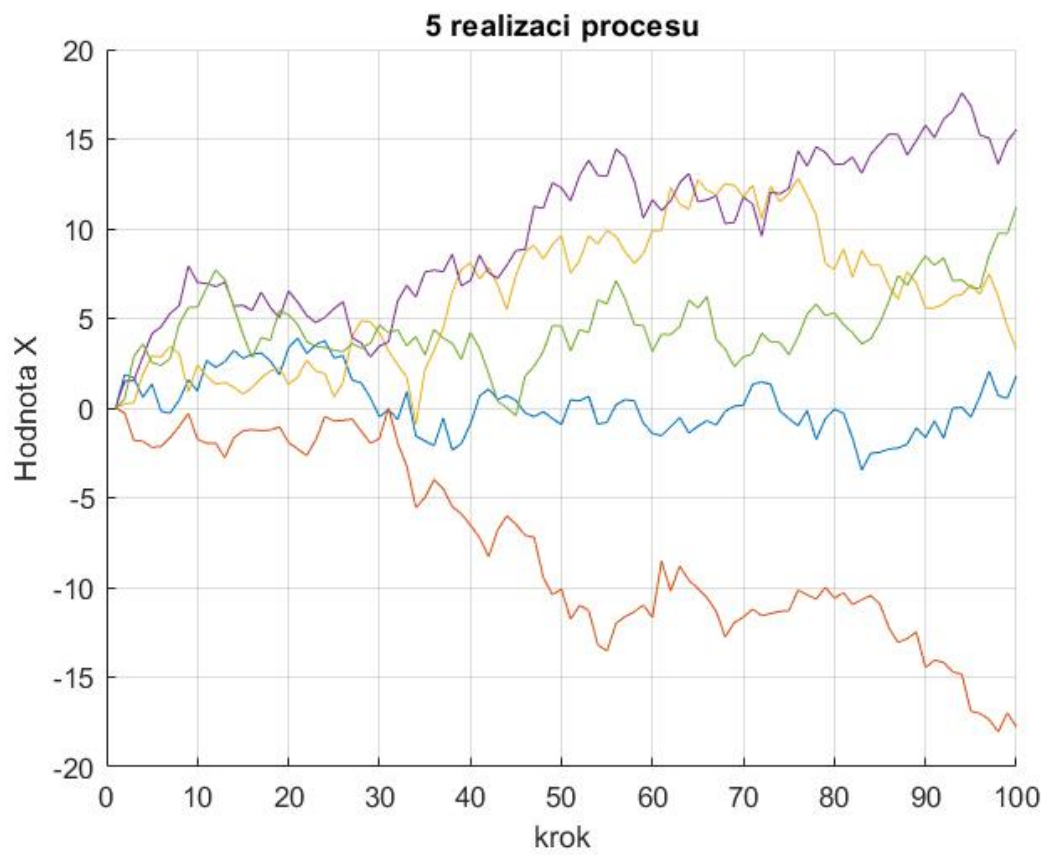
$$Cov(X_k, X_{k+1}) = k \quad (24)$$

Obecně platí vztah:

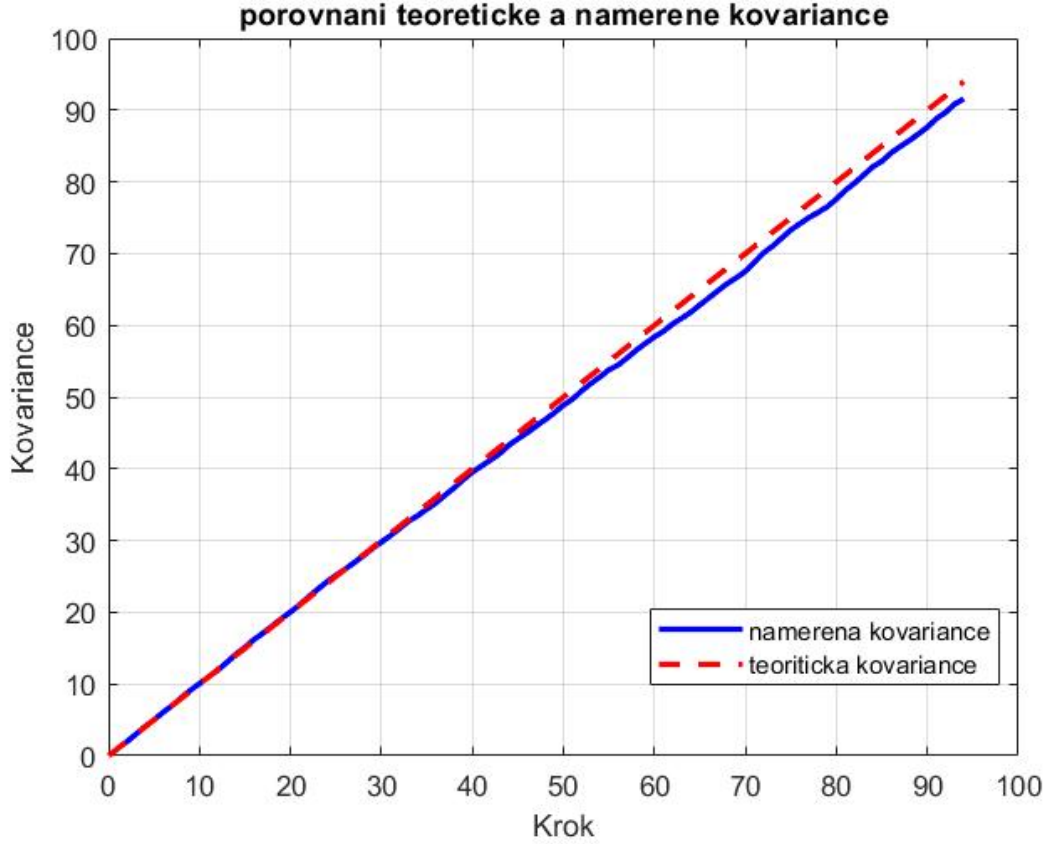
$$Cov(X_k, X_{k+\tau}) = \min(k, k + \tau) = k \quad (25)$$

3.2 Naměřený kovarianční funkce

Na obrázku č. 3 je znázorněna jedna realizace procesu. Na základě této realizace byla vypočítána empirická kovariance. Porovnáním naměřených hodnot s teoretickými predikcemi, jak je znázorněno na obrázku č. 4, je zřejmé, že naměřené hodnoty konvergují k teoretickým hodnotám. Tento výsledek potvrzuje správnost teoretického modelu a vhodnost použitého přístupu.



Obrázek 3: 5 realizace procesu



Obrázek 4: Teoretická a naměřená hodnota kovariační funkce

4 Třetí příklad

4.1 Teoretická střední hodnota

Pro výpočet střední hodnoty procesů X_k , Z_k postupujeme následujícím způsobem:

$$E[X_0] = 1 \quad (26)$$

$$E[X_1] = 0.95 \cdot E[X_0] + 0.5 \cdot E[W_0] = 0.95 \cdot 1 + 0.5 \cdot 0 = 0.95 \quad (27)$$

$$E[X_2] = 0.95 \cdot E[X_1] + 0.5 \cdot E[W_1] = 0.95 \cdot 0.95 + 0.5 \cdot 0 = 0.95^2 \quad (28)$$

$$E[X_3] = 0.95 \cdot E[X_2] + 0.5 \cdot E[W_2] = 0.95 \cdot 0.95^2 + 0.5 \cdot 0 = 0.95^3 \quad (29)$$

$$E[X_4] = 0.95 \cdot E[X_3] + 0.5 \cdot E[W_3] = 0.95 \cdot 0.95^3 + 0.5 \cdot 0 = 0.95^4 \quad (30)$$

Opakovanou aplikací dostáváme:

$$E[X_k] = 0.95 \cdot E[X_{k-1}] = 0.95^k \quad (31)$$

Pro proces Z_k :

$$E[Z_0] = 5 \cdot E[X_0] + E[V_0] = 5 \cdot 1 + 0 = 5 \quad (32)$$

$$E[Z_1] = 5 \cdot E[X_1] + E[V_1] = 5 \cdot 0.95 + 0 = 5 \cdot 0.95 \quad (33)$$

$$E[Z_2] = 5 \cdot E[X_2] + E[V_2] = 5 \cdot 0.95^2 + 0 = 5 \cdot 0.95^2 \quad (34)$$

$$E[Z_k] = 5 \cdot E[X_k] + E[V_k] = 5 \cdot 0.95^k \quad (35)$$

4.2 Teoretická variance

Pro výpočet variance procesů X_k , Z_k postupujeme následovně:

$$\text{VAR}[X_0] = 5 \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X_1] &= \text{VAR}[0.95 \cdot X_0 + 0.5 \cdot W_0] \\ &= \text{VAR}[0.95 \cdot X_0] + \text{VAR}[0.5 \cdot W_0] \\ &= 0.95^2 \text{VAR}[X_0] + 0.5^2 \text{VAR}[W_0] \\ &= 0.95^2 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X_2] &= \text{VAR}[0.95 \cdot X_1 + 0.5 \cdot W_1] \\ &= \text{VAR}[0.95 \cdot X_1] + \text{VAR}[0.5 \cdot W_1] \\ &= 0.95^2 \text{VAR}[X_1] + 0.5^2 \text{VAR}[W_1] \\ &= 0.95^2 \cdot (0.95^2 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3) + 0.5^2 \cdot 3 \\ &= 0.95^4 \cdot 5 + 0.95^2 \cdot 0.5^2 \cdot 3 + 0.5^2 \cdot 3 \\ &= 0.95^4 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot (0.95^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X_3] &= 0.95^2 \cdot \text{VAR}[X_2] + 0.5^2 \text{VAR}[W_2] \\ &= 0.95^2 \cdot (0.95^4 \cdot 5 + 0.95^2 \cdot 0.5^2 \cdot 3 + \\ &\quad + 0.5^2 \cdot 3) + 0.5^2 \cdot 3 \\ &= 0.95^6 \cdot 5 + 0.95^4 \cdot 0.5^2 \cdot 3 + 0.95^2 \cdot 0.5^2 \cdot 3 + 0.5^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X_k] &= 0.95^{2 \cdot k} \cdot 5 + 0.95^{2 \cdot k - 2} \cdot 0.5^2 \cdot 3 + \dots + 0.5^2 \cdot 3 \\ &= 0.95^{2 \cdot k} \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \sum_{n=0}^{k-1} 0.95^{2n} \end{aligned}$$

Při znalosti variance X můžeme spočítat variance Z :

$$\begin{aligned} \text{VAR}[Z_0] &= \text{VAR}[5 \cdot X_0 + V_0] \\ &= \text{VAR}[5 \cdot X_0] + \text{VAR}[V_0] \\ &= 5^2 \cdot \text{VAR}[X_0] + 2 \\ &= 5^3 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}[Z_1] &= \text{VAR}[5 \cdot X_1 + V_1] \\ &= 5^2 \cdot (0.95^2 \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3) + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{VAR}[Z_k] &= \text{VAR}[5 \cdot X_k + V_k] \\ &= 5^2 \cdot (0.95^{2 \cdot k} \cdot 5 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n}) + 2\end{aligned}$$

4.3 Výpočet limitních hodnot

Limita pro střední hodnotu X:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[X_k] = \lim_{k \rightarrow \infty} 0.95^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{95^k}{100^k} = 0 \quad (37)$$

Limita pro střední hodnotu Z:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[Z_k] = \lim_{k \rightarrow \infty} 5 \cdot 0.95^k = 5 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{95^k}{100^k} = 0 \quad (38)$$

Pro zjištění variace X musíme uvažovat že suma $\sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n}$ představuje sebou geometrickou řadu a proto musíme najít příslušné koeficienty geometrické řady:

$$q = \frac{a_1}{a_0} = \frac{0.95^{2 \cdot 1}}{0.95^{2 \cdot 0}} = 0.95^2 \quad (39)$$

Díky tomu že $q = 0.95^2 < 1$ naše řada konverguje a můžeme spočítat součet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{VAR}[X_k] = 0 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n} \quad (40)$$

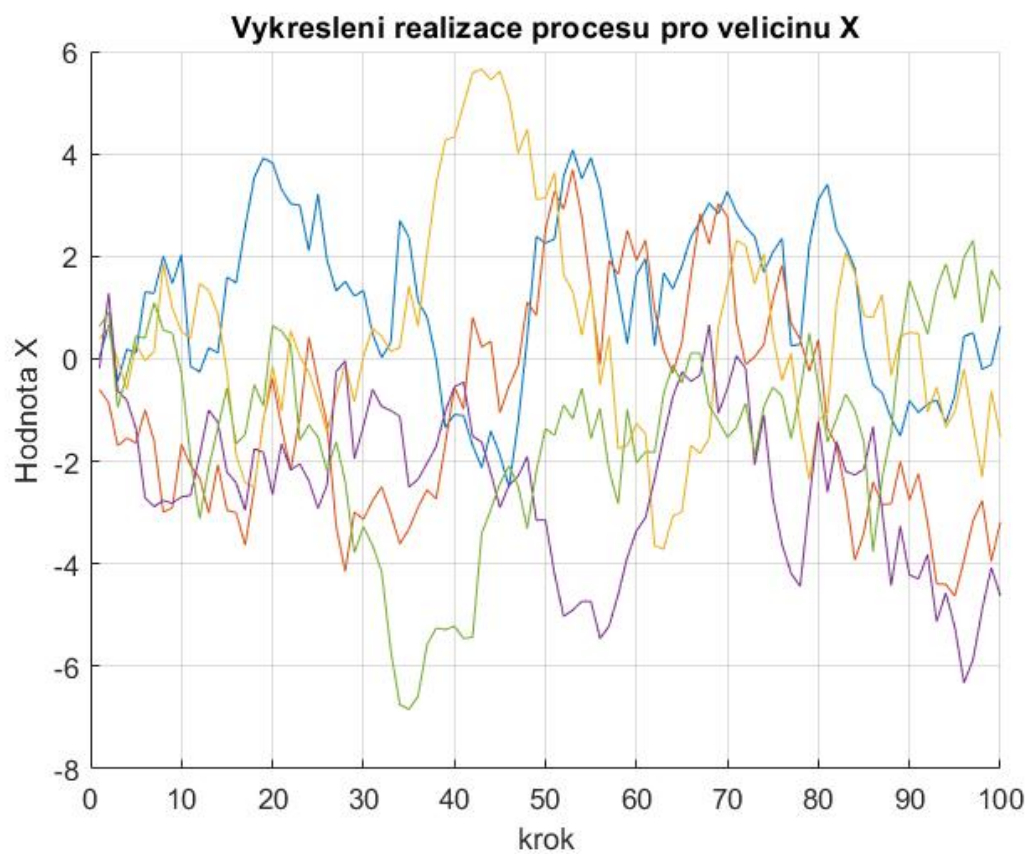
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{VAR}[X_k] = 0.5^2 \cdot 3 \cdot \frac{a_0}{1 - q} = 0.5^2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1 - 0.95^2} = 7.692 \quad (41)$$

Když známe variace X můžeme určit variance Z:

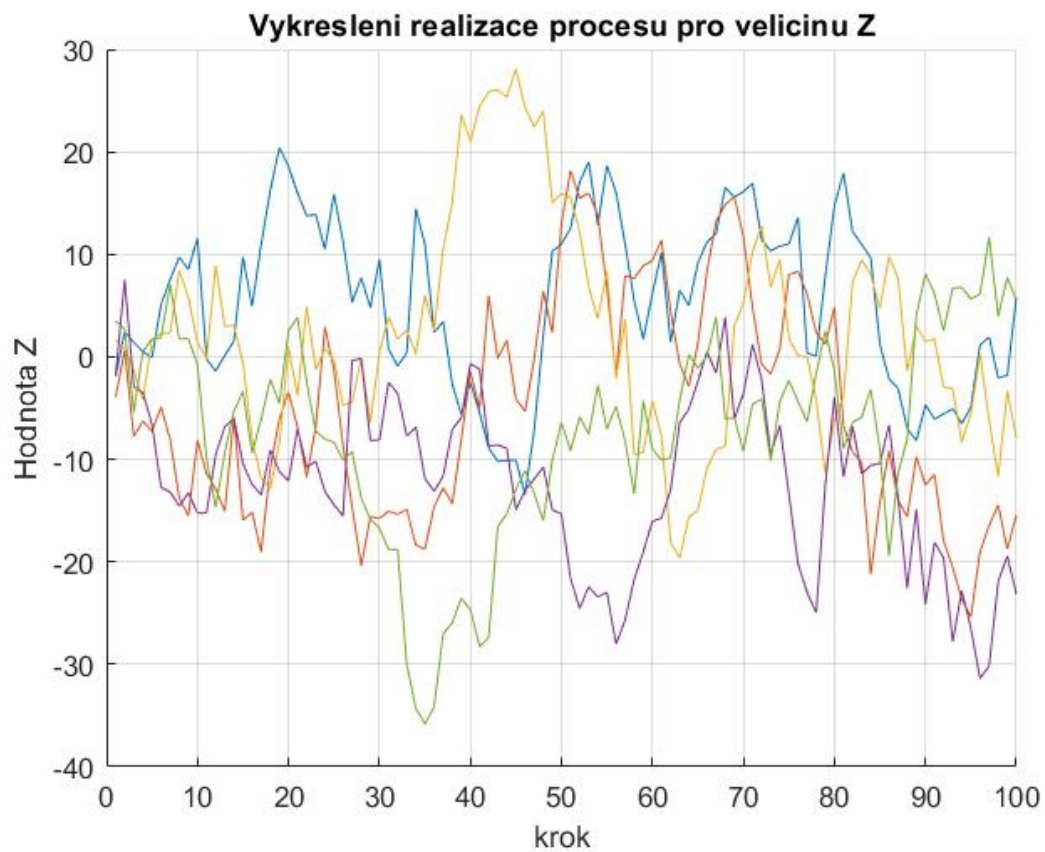
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{VAR}[Z_k] = 5^2 \cdot (0 + 0.5^2 \cdot 3 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{n=k-1} 0.95^{2n}) + 2 = 25 \cdot 7.692 + 2 = 194.3 \quad (42)$$

4.4 Porovnání teoretických a naměřených parametrů

Pro kvantifikaci naměřených parametrů byly generovány procesy pro náhodné proměnné X a Z. Vizualizace těchto procesů je zobrazena na obrázcích 5 a 6. Tato metodologie umožňuje přímé srovnání teoretických predikcí a empirických dat, což je klíčové pro ověření stacionarity a dalších charakteristik stochastických procesů v rámci zvoleného modelu.



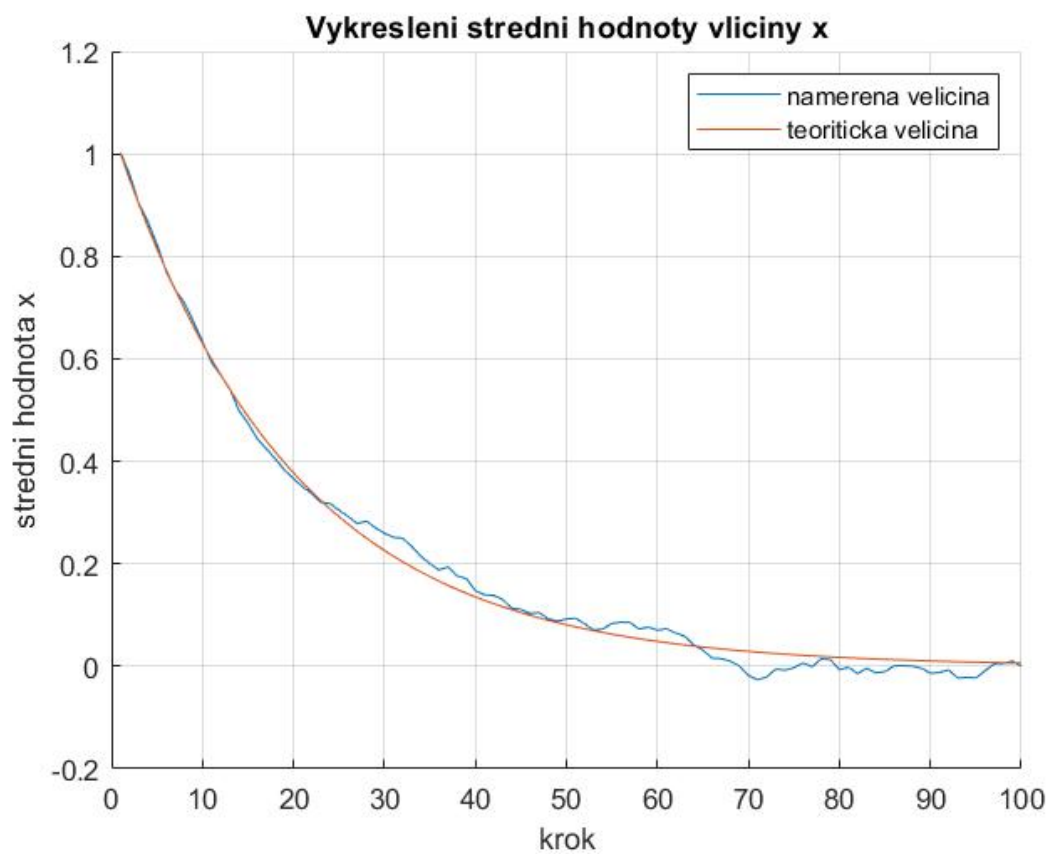
Obrázek 5: Proces pro náhodnou veličinu X



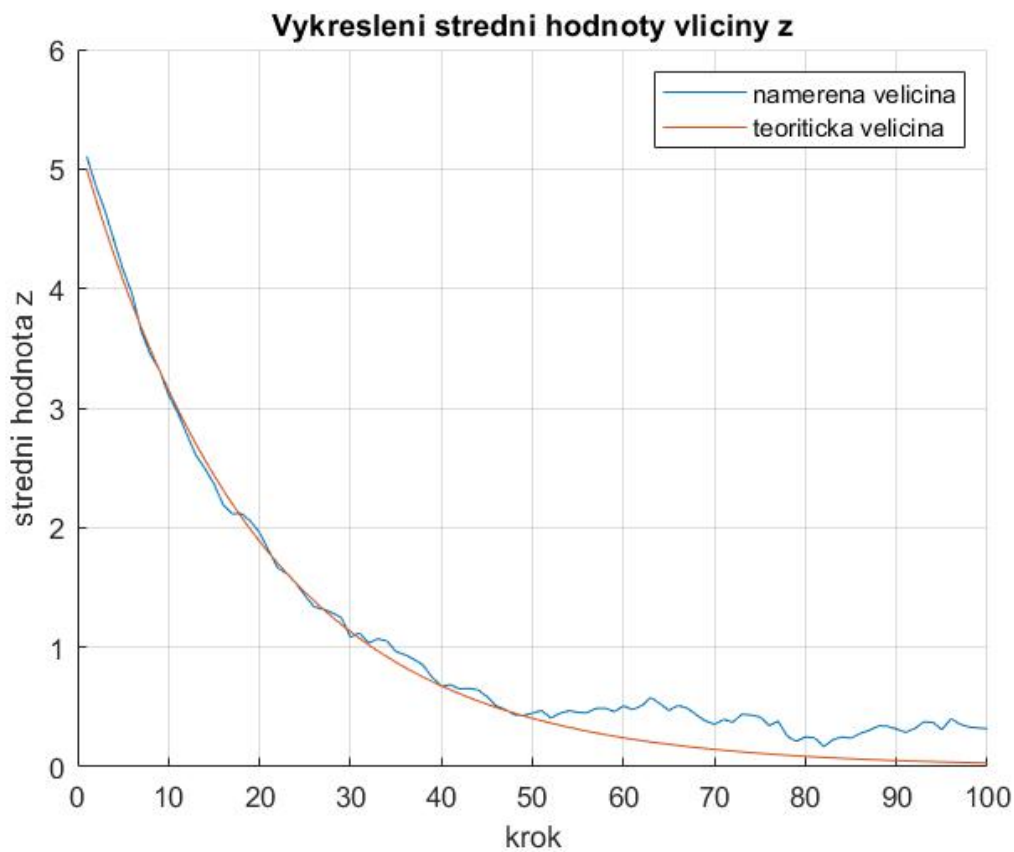
Obrázek 6: Proces pro náhodnou veličinu Z

4.5 Porovnání středních hodnot

Na grafech (7), (8) můžeme pozorovat malou odchylku naměřených středních hodnoty od teoretické to je způsobeno nepostačujícím počtem realizací.



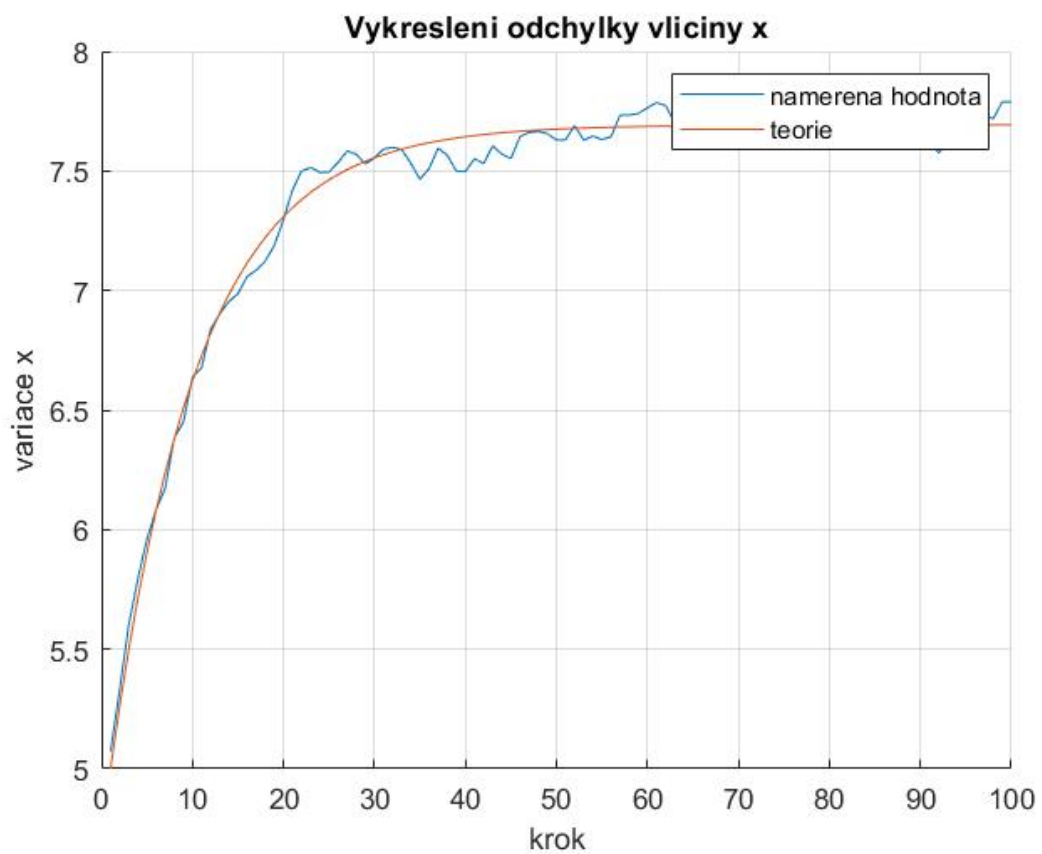
Obrázek 7: Střední hodnota X



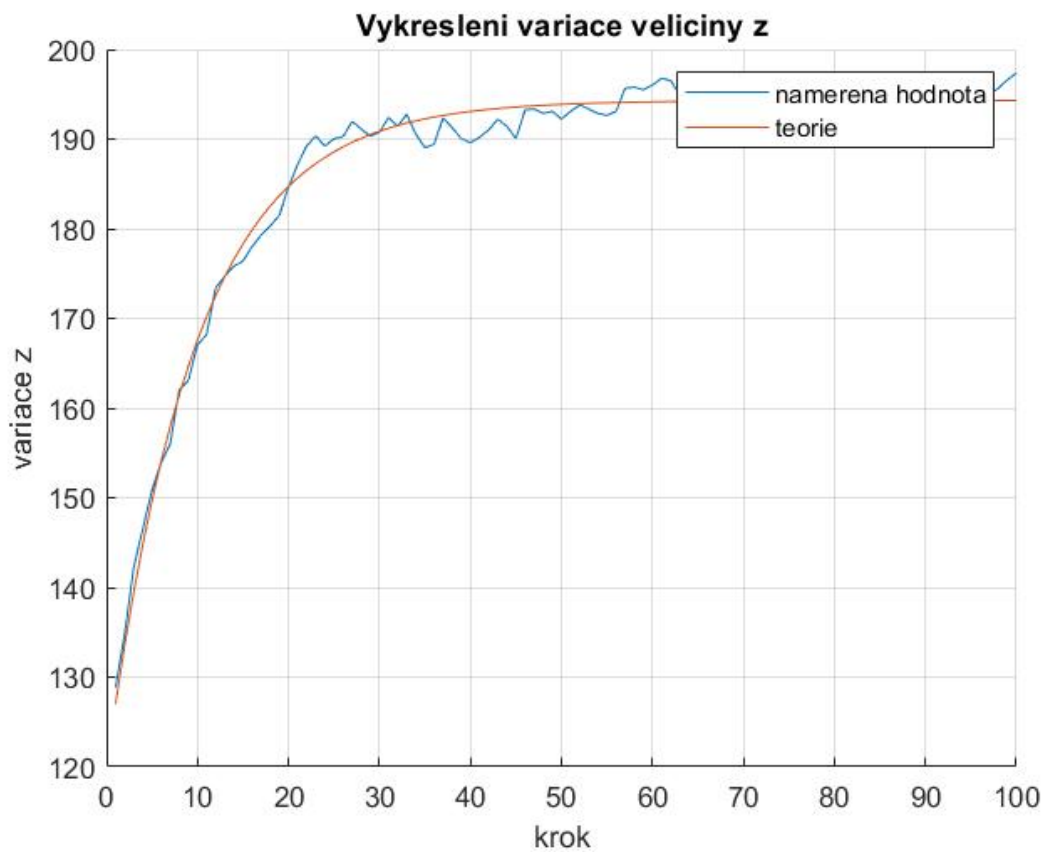
Obrázek 8: Střední hodnota Z

4.6 Porovnání variancí

Z grafů 8 a 9 je patrné, že hodnoty variance konvergují k teoretickým výpočtům. Nicméně, kvůli omezenému počtu realizací je možné pozorovat drobnou odchylku. Tato odchylka je očekávaná a zdůrazňuje potřebu dostatečného počtu vzorků pro přesnější odhad parametrů stochastických procesů.



Obrázek 9: Variance X



Obrázek 10: Variance Z

4.7 Závěr

Studium stochastických procesů zahrnuje analýzu vlastností, jako jsou kovariance a stacionarita, které jsou klíčové pro aplikace v různých oblastech. Teoretické výpočty a empirické simulace provedené v MATLABu potvrzují, že kovarianční funkce a stacionarita poskytují hlubší pochopení stochastických systémů. Gauss-Markovovy modely a Wienerovy procesy jsou zvláště důležité pro analýzu časových řad a zpracování signálů. Výsledky simulací ukazují, že teoretické modely jsou dobře aplikovatelné a empirické výsledky se těsně shodují s očekávanými hodnotami.