Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

KKY/STP

Markovské řetězce

Yauheni Petrachenka

10. června 2024

1 Zadání

Markovské řetězce

Zadání semestrální práce č. 1

Zvolte si grafy prezentující Markovské řetězce, jehož uzly značí stavy a hrany určují pravděpodobnosti přechodu $p_{i,j}$ z uzlu i do uzlu j, tak aby měl 6 uzlů a aby platilo že

Příklad č. 1

Markovský řetězec je homogenní a regulární. Pro tento řetězec určete:

- M – střední počet kroků, které jsou třeba k (prvnímu) dosažení stavu j za předpokladu, že se vycházelo ze stavu i,
- a – finální pravděpodobnosti.

Příklad č. 2

Markovský řetězec je homogenní a absorpční se dvěma absorpčními stavy. Pro tento řetězec určete:

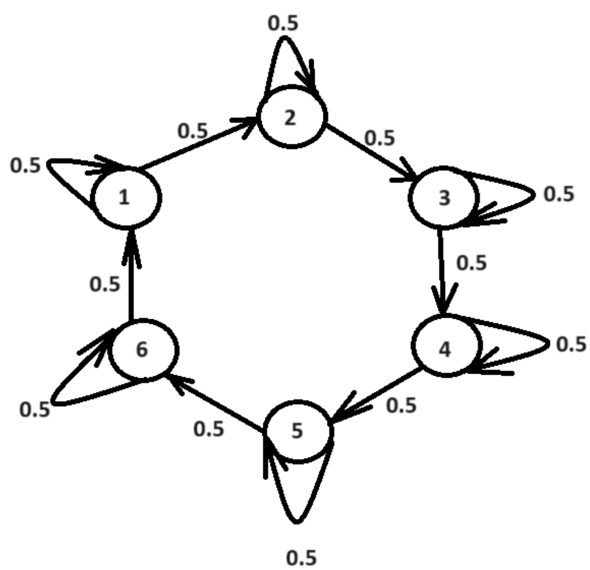
- T – střední počet průchodů stavem j, pokud se vychází ze stavu i, do té doby, než dojde k pohlcení (pokud $j = i$, výchozí stav se započítává za první průchod),
- t – dobu pobytu v tranzientním stavu,
- d – pravděpodobnost, že Markovský řetězec vycházející ze stavu i skončí v daném absorpčním stavu.

2 První příklad

Ať v prvním příkladu markovov řetězec bude reprezentován pomocí následující matice:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A této matici odpovídá následující obrázek(1):



Obrázek 1: Markovský řetězec

2.1 střední počet kroků prvního přechodu ze stavu i do stavu j

Označme střední počet přechodů ze stavu i do stavu j jako , m_{ij}. Střední počet kroků budeme počítat rekurzivně, přičemž předpokládáme, že existuje stav s, který se nachází mezi stavy i a j. V takovém případě střední počet kroků získáme násobením pravděpodobností přechodu ze stavu i do stavu s a středním počtu kroků m_{sj}. Po určení tohoto vztahu pro všechny možné s a následném sečtení, včetně přičtení jedničky (zvýšení počtu kroků o jeden), dostaneme následující vztah (přičemž s nesmí být roven konečnému stavu):

$$m_{i,j} = (\sum_{s=1, s\neq j}^{\infty} p_{is} m_{sj} + 1), i, j = 1, 2, ... \quad (2)$$

Tento vztah nám umožňuje vyjádřit střední počet kroků pro přechod ze stavu i do stavu j jako součet středních počtů kroků z mezistavů s do stavu j, vynásobených pravděpodobnostmi přechodu p_{is}, a jedné přidané jednotky za každý krok. Tento postup je klíčový pro analýzu a pochopení dynamiky Markovských řetězců a jejich přechodových procesů.

Po rozepsání vztahu dostaneme následující výrazy (jako příklad určíme střední počet kroků pro dosažení stavu 1):

$$m_{11} = p_{11} \cdot m_{11} + p_{12} \cdot m_{21} + p_{13} \cdot m_{31} + p_{14} \cdot m_{41} + p_{15} \cdot m_{51} + p_{16} \cdot m_{61} + 1 \tag{3}$$

$$m_{21} = p_{21} \cdot m_{11} + p_{22} \cdot m_{21} + p_{23} \cdot m_{31} + p_{24} \cdot m_{41} + p_{25} \cdot m_{51} + p_{26} \cdot m_{61} + 1 \tag{4}$$

$$m_{31} = p_{31} \cdot m_{11} + p_{32} \cdot m_{21} + p_{33} \cdot m_{31} + p_{34} \cdot m_{41} + p_{35} \cdot m_{51} + p_{36} \cdot m_{61} + 1 \tag{5}$$

$$m_{41} = p_{41} \cdot m_{11} + p_{42} \cdot m_{21} + p_{43} \cdot m_{31} + p_{44} \cdot m_{41} + p_{45} \cdot m_{51} + p_{46} \cdot m_{61} + 1 \tag{6}$$

$$m_{51} = p_{51} \cdot m_{11} + p_{52} \cdot m_{21} + p_{53} \cdot m_{31} + p_{54} \cdot m_{41} + p_{55} \cdot m_{51} + p_{56} \cdot m_{61} + 1 \tag{7}$$

$$m_{61} = p_{61} \cdot m_{11} + p_{62} \cdot m_{21} + p_{63} \cdot m_{31} + p_{64} \cdot m_{41} + p_{65} \cdot m_{51} + p_{66} \cdot m_{61} + 1 \tag{8}$$

Výše uvedené rovnice lze přepsat do maticového tvaru za předpokladu, že vynulujeme prvky p_{i1}.

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \\ m_{51} \\ m_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ 0 & p_{32} & p_{33} & p_{34} & p_{35} & p_{36} \\ 0 & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ 0 & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ 0 & p_{62} & p_{63} & p_{64} & p_{65} & p_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \\ m_{51} \\ m_{61} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Označíme vektor středních počtů kroků jako M_1, matici pravděpodobností jako P a vektor jedniček jako E. Pro další výpočty násobíme matici M_1 identickou maticí zleva a označíme identickou matici jako I:

$$I \cdot M_1 = P_1 \cdot M_1 + E \tag{10}$$

$$I \cdot M_1 - P_1 \cdot M_1 = E \tag{11}$$

$$(I - P_1) \cdot M_1 = E \tag{12}$$

Takovým způsobem byl obdržen vztah (12), který lze vypočítat v Matlabu a obdržet výsledek:

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \\ m_{51} \\ m_{61} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 8 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Analogickým způsobem vypočteme pro ostatní konečné stavy a zapíšeme výsledek do matice M:

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 6 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 6 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 8 & 10 & 6 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 8 & 10 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} \tag{14}$$

2.2 Finální pravděpodobnost

Finální pravděpodobnost lze počítat pomocí následujícího vztahu:

$$N = \lim_{k\to\infty} P^k \tag{15}$$

Tento vztah bude vypočítán pomocí iterativní metody v Matlabu a ve výsledku dostaneme matici:

$$N = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \\ 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Kvůli tomu, že finální pravděpodobnost nezávisí na počátečním stavu, matici N lze rozepsat jako:

$$N = \begin{bmatrix} M \\ M \\ M \\ M \\ M \\ M \end{bmatrix} \tag{17}$$

Kde každý prvek vektoru M odpovídá pravděpodobnosti, že skončíme v příslušném stavu:

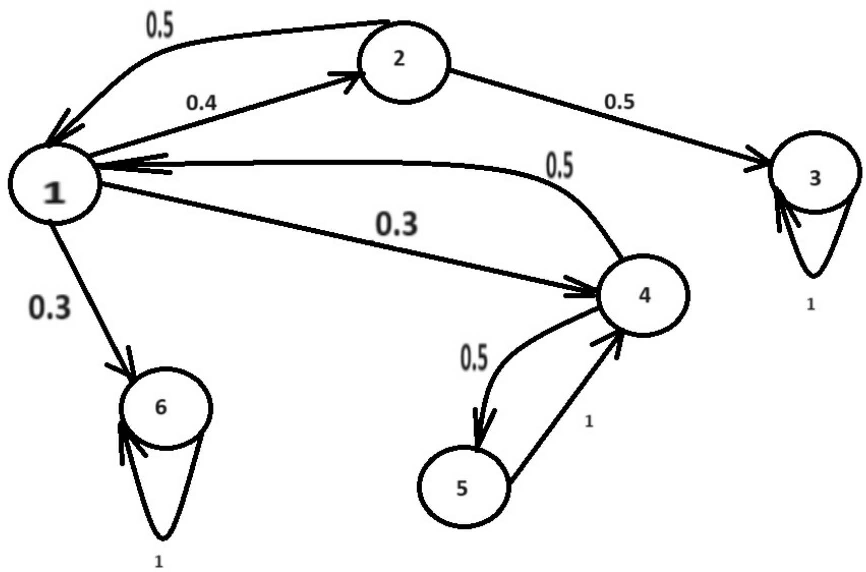
$$M = \begin{bmatrix} 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 & 0.1667 \end{bmatrix} \tag{18}$$

3 Druhý příklad

V tomto příkladu budeme mít dva absorpční stavy: stav 3 a stav 6.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0 & 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Na obrázku číslo 2 je znázorněn markovsky řetězec pro matici (19)



Obrázek 2: Markovský řetězec

3.1 střední počet průchodů stavem j, pokud se vychází ze stavu i, do té doby, než dojde k pohlcení

Pro tento příklad budeme hledat matici T, která reprezentuje střední počet průchodů stavem j, pokud se vychází ze stavu i, do té doby, než dojde k pohlcení. Každý prvek matice T bude označen jako t_{ij} , kde j je konečný stav a i je výchozí stav. Budeme počítat matici T pomocí následujících vzorců:

$$T = QT + I \tag{20}$$

$$T = (I - Q)^{-1} \tag{21}$$

kde I je jednotková matice a matice Q vznikne vynecháním řádků a sloupců odpovídajících absorpčním stavům 3 a 6. Každý prvek matici Q odpovídá pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j. Tak nám vznikne matice Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

a matice I:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Použitím Matlabu spočítáme matici T a obdržíme následující výsledky:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 0.8 & 1.2 & 0.6 \\ 1 & 1.4 & 0.6 & 0.3 \\ 2 & 0.8 & 3.2 & 1.6 \\ 2 & 0.8 & 3.2 & 2.6 \end{bmatrix} \tag{24}$$

3.2 Střední doba strávená v tranzientních stavech

Pokud se přechody uskutečňují ve stejných časových intervalech (jednotkových), pak t_{ij} udává střední dobu strávenou ve stavu j při startu ze stavu i. Pro určení středního počtu kroků do pohlcení při výchozu ze stavu i lze určit sčítáním horizontálních prvků matice. Pro střední dobu strávenou ve stavech platí:

$$t_i = \sum_{j=1}^{S-R} t_{ij} \tag{25}$$

A pro maticový zápis platí:

$$t = TE \tag{26}$$

, kde E je jednotkový vektor. Pro výpočet budeme používat matlab:

$$t = \begin{bmatrix} 2 & 0.8 & 1.2 & 0.6 \\ 1 & 1.4 & 0.6 & 0.3 \\ 2 & 0.8 & 3.2 & 1.6 \\ 2 & 0.8 & 3.2 & 2.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.6 \\ 3.3 \\ 7.6 \\ 8.6 \end{bmatrix} \tag{27}$$

3.3 Pravdepodobnost, že Markovský řetězec vycházející ze stavu i skončí v daném absorpčním stavu

V tomto příkladu máme dva absorpční stavy a musíme každý zkoumat zvlášť. Na začátku budeme zkoumat absorpční stav 3. Označíme symbolem d_i pravděpodobnost, že Markovský řetězec při startu ze stavu i skončí v jednom určitém absorpčním stavu a. Zvolíme vektor d tak, aby platilo $d_3 = 1$ a $d_6 = 0$. Dále vyřešíme systém algebraických rovnic:

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \\ d_4 \\ d_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & p_{15} & p_{16} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & p_{25} & p_{26} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} & p_{45} & p_{46} \\ p_{51} & p_{52} & p_{53} & p_{54} & p_{55} & p_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \\ d_4 \\ d_5 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Pro vyřešení této rovnice bude použito blokové násobení matic (29).

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{24} & p_{25} \\ p_{41} & p_{42} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p_{13} & p_{16} \\ p_{23} & p_{26} \\ p_{43} & p_{46} \\ p_{53} & p_{56} \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{matrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \right) \tag{29}$$

Po blokovém vynásobení matic dostaneme (30):

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{14} & p_{15} \\ p_{21} & p_{22} & p_{24} & p_{25} \\ p_{41} & p_{42} & p_{44} & p_{45} \\ p_{51} & p_{52} & p_{54} & p_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{13} & p_{16} \\ p_{23} & p_{26} \\ p_{43} & p_{46} \\ p_{53} & p_{56} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Označíme vektor prvků d za D, matice pravděpodobností přechodu do neabsorpčních stavu jako P_1^1 a matice pravděpodobností přechodu do absorpčních stavu P_1^2.

$$D = P_1^1 \cdot D + P_1^2 \tag{31}$$

$$I \cdot D = P_1^1 \cdot D + P_1^2 \tag{32}$$

$$I \cdot D - P_1^1 \cdot D = P_1^2 \tag{33}$$

$$(I - P_1^1) \cdot D = P_1^2 \tag{34}$$

Po matematických úpravách dostaneme výraz (34). Vyřešíme tuto rovnice pomocí matlabu a dostaneme výsledek pro absorpční stav 3 :

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \tag{35}$$

Analogicky výpočet provedeme pro absorpční stav 6 a dostaneme výsledek (36):

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} \tag{36}$$

Sčítáním prvků v absorpčním stavu 3 a absorpčním stavu 6 dostaneme 1, což znamená, že výpočty byly provedeny správně.

4 Závěr

Tato studie poskytuje komplexní analýzu homogenních pravidelných a absorbujících Markovových řetězců prostřednictvím konstrukce a výpočtu přechodových pravděpodobnostních matic. Na základě našich výpočtů a analýz jsme zjistili, že pravděpodobnosti v ustáleném stavu homogenního pravidelného Markovova řetězce nezávisí na počátečním stavu a jsou rovnoměrně rozděleny mezi všechny stavy. U absorbujících Markovových řetězců jsme určili pravděpodobnosti absorpce a očekávaný počet průchodů přechodnými stavy před absorpcí.