Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

# Optimální odhad náhodné proměnné

KKY/TOD

Yauheni Petrachenka
11. listopadu 2025

# 1 Zadání



## Optimální odhad náhodné proměnné

*Zadání semestrální práce č. 2*

Termín odevzdání: 12. listopadu 2025

Uvažujme objekt, který se pohybuje po přímce s náhodným zrychlením, zatímco je s konstantní periodou $T$ měřena jeho poloha. Cílem je na základě měření a modelu systému odhadnout neznámou počáteční polohu a rychlost objektu, se známou apriorní informací ve formě náhodné veličiny. V diskrétním případě můžeme uvažovat lineární dynamický systém s popisem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N}\left( \begin{bmatrix} \bar{x}_0^{\text{poloha}} \\ \bar{x}_0^{\text{rychlost}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right),$$

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k, \qquad v_k \sim \mathcal{N}(0, R),$$

kde vzorkovací perioda je $T = 1$, procesy $[\mathbf{w}_k]_{k=1}^{+\infty}$ a $[v_k]_{k=1}^{+\infty}$ jsou vzájemně nezávislé bílé šumy, nezávislé na počátečním stavu $\mathbf{x}_0$, a $R = 1$. Střední hodnotu počátečního stavu $\mathbf{x}_0$ zvolte libovolně.

**Teoretické úkoly:** Odhad ve smyslu ML a LMSE z prvních několika měření.

(i) Pro porovnání nejprve apriorní informaci ignorujte a navrhněte odhad $\hat{\mathbf{x}}_0$ počátečního stavu $\mathbf{x}_0$ ve smyslu maximální věrohodnosti při použití měření $\mathbf{z} = [z_0, z_1]^{\mathrm{T}}$. Dále apriorní informaci v potaz vezměte, a určete nejlepší lineární odhad ve smyslu střední kvadratické chyby při použití měření A) $z_0$ B) $z_1$ a C) $\mathbf{z}$. Následně vyjádřete kovarianční matice chyb odhadů pro všechny případy.

(ii) Pozorujte, co se může stát, když estimátor bude navržen za špatné znalosti parametrů systému. Pro jednoduchost uvažujte jen LMSE případ C). Sestrojte odhady, kde při návrhu uvažujete hodnoty parametrů Ca) $R = \frac{1}{4}$, Cb) $R = 4$ a Cc) $\bar{x}_0^{\text{poloha}} := \bar{x}_0^{\text{poloha}} - 5$, ale ve skutečnosti jsou všechny parametry stejné jako v předchozím bodě. Dopočtěte kovarianční matice chyb poskytované algoritmem odhadu, tj. založené na nesprávných hodnotách parametrů, a skutečné kovarianční matice chyb odhadů. Diskutujte strannost těchto odhadů.

(iii) Pro všechny odhady vykreslete 3-$\sigma$ elipsy odpovídající chybám odhadů. Pro odhad s kovarianční maticí chyby odhadu $\mathbf{P}$ uvažujte křivku $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (\mathbf{x} - \mathbf{b})^{\mathrm{T}} \mathbf{P}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 9\}$, kde $\mathbf{b} = E(\mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0)$. Pro odhady Ca), Cb), Cc) dále vykreslete elipsy pro matice poskytované algoritmem odhadu a diskutujte vztahy mezi skutečnými a poskytovanými kovariačními maticemi chyb odhadů.

**Simulační úkoly:** Simulační ověření teoretických výsledků.
Vygenerujte 1000 simulací vektoru $[\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}, \mathbf{z}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ a pro každý nasimulovaný vektor dopočtěte realizace odhadů $\hat{\mathbf{x}}_0$ a chyb odhadů $\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 - \hat{\mathbf{x}}_0$.

(i) Odhadněte hustoty *chyb* jednotlivých odhadů *rychlosti* pomocí normalizovaných histogramů a porovnejte je mezi sebou. Dále pomocí techniky přiřazení momentů proložte normalizované histogramy gaussovskými hustotami. Proložené hustoty porovnejte s teoretickými.

# 2 Model

Model a charakteristiky stochastických veličin jsou dány zadáním (1, 2). Pro zjednodušení označení bude matice přechodu stavů dále označována jako matice F a matice pozorování jako matice H.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + w_k, w_k \sim \mathcal{N}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{10} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), x_0 \sim \mathcal{N}\left( \begin{bmatrix} \bar{x}_0^{poloha} \\ \bar{x}_0^{rychlost} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right), \tag{1}$$

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k, v_k \sim \mathcal{N}(0, R) \tag{2}$$

Hlavním cílem této semestrální práce je nalezení optimálního odhadu vektoru $x_0$ pomocí metod LMSE a ML, přičemž hodnoty parametrů budou nastaveny jako R=1 a T=1. Vyjádření měření ve vztahu k počátečnímu stavu $x_0$ bylo odvozeno již v předchozí semestrální práci 3.

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Hx_0 + v_0 \\ HFx_0 + Hw_0 + v_1 \\ HF^2x_0 + HFw_0 + Hw_1 + v_2 \\ HF^3x_0 + HF^2w_0 + HFw_1 + Hw_2 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} v_0 \\ Hw_0 + v_1 \\ HFw_0 + Hw_1 + v_2 \\ HF^2w_0 + HFw_1 + Hw_2 + v_3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

# 3 Teoretické úkoly

## 3.1 i

Provedeme výpočet ML odhadu daného systému, přičemž budou zanedbány apriorní informace o odhadované veličině. Odhad bude realizován na základě měření $z_0$ a $z_1$ , proto bude původní rovnice upravena do následujícího tvaru 4.

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Hx_0 + v_0 \\ HFx_0 + Hw_0 + v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} v_0 \\ Hw_0 + v_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Pro výpočet odhadu je nutné znát kovarianční matici chyby, která již byla vypočtena v předchozí semestrální práci 5. Dále vyjádříme hustotu pravděpodobnosti měřené veličiny 6, přičemž $Gx_0$ představuje její střední hodnotu a odpovídající kovarianční matice určuje rozptyl tohoto rozložení.

$$cov(e) = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & Hq \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} H^T + R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1.0333 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$p_z(z; x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^1 det(cov(e))}} e^{-\frac{1}{2}(z - Gx_0)^T cov(e)^{-1} (z - Gx_0)} \tag{6}$$

Dále uvedené rozložení zlogaritmujeme 7.

$$\ln(p) = -\frac{1}{2}ln(2\pi) - \frac{1}{2}ln(det(cov(e))) - \frac{1}{2}(z - Gx_0)cov(e)^{-1}(z - Gx_0) \tag{7}$$

Zderivujeme tento výraz podle hledané proměnné $x_0$ 8. Tímto postupem budeme hledat maximum dané funkce. Po jeho nalezení lze vyjádřit odpovídající odhad 11.

$$\frac{dp}{dx_0} = G^T cov(e)^{-1}(z - Gx_0) \tag{8}$$

$$0 = G^T cov(e)^{-1}(z - Gx_0) \tag{9}$$

$$\hat{x_0} = (G^T cov(e)^{-1}G)^{-1}G^T cov(e)^{-1}Z \tag{10}$$

$$\hat{x_0} = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Je patrné, že výsledný odhad získaný metodou maximální věrohodnosti je ekvivalentní odhadu podle metody vážených nejmenších čtverců. Důvodem je, že při odvozování ML odhadu dochází k minimalizaci kvadratické formy $(z - Gx)^T cov(e)^{-1}(z - Gx)$, což je totožné s kritériem metody vážených nejmenších čtverců.

Dále provedeme LMSE odhad, který je definován následujícím vztahem 12. Kovarianční matice chyby odhadu je poté určena vztahem 13.

$$\hat{X}_{LMSE} = m_x + P_{xz}P_z^{-1}(z - m_z) \tag{12}$$

$$cov[\tilde{X}_{LMSE}(Z)] = P_x - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} \tag{13}$$

Dolní mez rozlišitelnosti s uvažením apriorní informace lze vypočítat pomocí Van Treesovy Cramér–Raoovy dolní meze (Van Trees CRLB). Pro náš případ pak platí následující vztahy 14, 15, 16.

$$cov[\tilde{x}] \geq \frac{1}{J_{prior} + E_x[J_F]} \tag{14}$$

$$E_x[J_F] = E_x\left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p_{\mathbf{Z}|\mathbf{X}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})\right)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p_{\mathbf{Z}|\mathbf{X}}(\mathbf{z}; \mathbf{x})\right)^\top\right] = G^T\Sigma^{-1}G \tag{15}$$

$$\mathbf{J}_{\text{prior}} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{x})\right)\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \ln p(\mathbf{x})\right)^\top\right] = \Sigma_0^{-1} \tag{16}$$

#### 3.1.1 A

V tomto bodě budeme predikovat počáteční stav na základě prvního měření $z_0$. Pro tuto predikci je nutné určit kovarianční matici mezi měřením $z_0$

a počátečním stavem, kterou lze vypočítat podle vztahu 9. Dále je třeba stanovit kovarianční matici měření 10 (v našem případě jde o skalární hodnotu) a střední hodnotu měření 18.

$$z_0 = Hx_0 + v_0 \tag{17}$$

$$\begin{aligned} P_{x_0 z_0} &= E\big([x_0 - E(x_0)][z - E(z)]\big) \\ &= \mathrm{var}(x_0)H^T + E\big[(x_0 - E[x])(v - E[v])\big] \\ &= \mathrm{var}(x_0)H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} P_{z_0} &= \mathrm{var}(Hx_0 + v_0) \\ &= \mathrm{var}(Hx_0) + \mathrm{var}(v_0) \\ &= H\mathrm{var}(x_0)H^T + \mathrm{var}(v_0) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + R = 2 \end{aligned} \tag{10}$$

$$m_{z_0} = \mathbb{E}(Hx_0 + v_0) = H\mathbb{E}(x_0) + \mathbb{E}(v_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{0poloha} \\ x_{0rychlost} \end{bmatrix} = x_{0poloha} \tag{18}$$

Výsledný LMSE odhad získaný z prvního měření lze vyjádřit následovně 19, odpovídající kovarianční matici chyby lze stanovit podle vztahu 20.

$$\hat{X}_{LMSE} = \begin{bmatrix} x_{0poloha} \\ x_{0rychlost} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}(z - x_{0poloha}) \tag{19}$$

$$cov[\tilde{X}_{LMSE}(Z)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 3.5 \end{bmatrix} \tag{20}$$

Spočítáme dolní mez ve smyslu Van Treesovy nerovnosti (CRLB)21.

$$J_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 3.5 \end{bmatrix} \tag{21}$$

To se rovná kovarianční matici chyby odhadu, a proto můžeme tvrdit, že odhad je efektivní ve smyslu Van Treesovy nerovnosti.

### 3.1.2 B

V tomto bodě budeme predikovat počáteční stav na základě druhého měření $z_1$. Pro tuto predikci je nutné určit kovarianční matici mezi měřením $z_1$

a počátečním stavem, kterou lze vypočítat podle vztahu 23. Dále je třeba stanovit kovarianční matici měření 24 (v našem případě jde o skalární hodnotu) a střední hodnotu měření 25.

$$z_1 = HFx_0 + Hw_0 + v_1 \tag{22}$$

$$P_{x_0 z_1} = cov(x_0)F^T H^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{23}$$

$$P_{z_1} = HFvar(x_0)F^T H^T + Hvar(w_0)H^T + var(v_1) = 8.03 \tag{24}$$

$$m_{z_1} = HF \begin{bmatrix} x_{0poloha} \\ x_{0rychlost} \end{bmatrix} = x_{0poloha} + x_{0rychlost} \tag{25}$$

Výsledný LMSE odhad získaný z druhého měření lze vyjádřit následovně 26, odpovídající kovarianční matici chyby lze stanovit podle vztahu 27.

$$\hat{X}_{LMSE} = \begin{bmatrix} x_{0poloha} \\ x_{0rychlost} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{30}{241} (z_1 - (x_{0poloha} + x_{0rychlost})) \tag{26}$$

$$cov(\tilde{X}_{LMSE}(Z)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \frac{30}{241} \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5021 & -0.2448 \\ -0.2448 & 0.888 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Spočítáme dolní mez ve smyslu Van Treesovy nerovnosti (CRLB)28.

$$J_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5021 & -0.2448 \\ -0.2448 & 0.8880 \end{bmatrix} \tag{28}$$

To se rovná kovarianční matici chyby odhadu, a proto můžeme tvrdit, že odhad je efektivní ve smyslu Van Treesovy nerovnosti.

### 3.1.3 C

V tomto bodě budeme predikovat počáteční stav na základě prvního a druhého měření $z_0$ a $z_1$ . Pro tuto predikci je nutné stanovit kovarianční matici mezi měřeními a počátečním stavem, kterou lze vypočítat podle vztahu 32. Dále je třeba určit kovarianční matici měření 31.

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} v_0 \\ Hw_0 + v_1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$
\begin{aligned}
P_{z_0 z_1} &= \mathbb{E}[z_0 z_1] - \mathbb{E}[z_0]\,\mathbb{E}[z_1] \\
&= \mathbb{E}[H x_0 x_1 H^{\mathrm{T}}] - \mathbb{E}[z_0]\,\mathbb{E}[z_1] \\
&= H\,\mathbb{E}[x_0 x_0^{\mathrm{T}}] F^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} - \mathbb{E}[z_0]\,\mathbb{E}[z_1] \\
&= H\big(P_{x_0} + m_x m_x^{\mathrm{T}}\big) F^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}} - \mathbb{E}[z_0]\,\mathbb{E}[z_1] \\
&= 2
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$
P_z = \begin{bmatrix} P_{z_0 z_0} & P_{z_0 z_1} \\ P_{z_1 z_0} & P_{z_1 z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8.03 \end{bmatrix} \tag{31}
$$

$$
P_{x_0 z} = \begin{bmatrix} P_{x_0 z_0} & P_{x_0 z_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{32}
$$

Výsledný LMSE odhad s využitím měření $z_0$
a $z_1$ lze vyjádřit následovně:

$$
\hat{X}_{LMSE} = \begin{bmatrix} x_{0poloha} \\ x_{0rychlost} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.666 & -0.166 \\ -0.166 & 0.166 \end{bmatrix} (Z - \begin{bmatrix} x_{0poloha} \\ x_{0poloha} + x_{0rychlost} \end{bmatrix}) \tag{33}
$$

Kovarianční matici chyby odhadu lze stanovit podle vztahu:

$$
cov(\tilde{X}_{LMSE}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3343 & -0.163 \\ -0.163 & 0.8481 \end{bmatrix} \tag{34}
$$

Spočítáme dolní mez ve smyslu Van Treesovy nerovnosti (CRLB)35.

$$
J_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3343 & -0.1630 \\ -0.1630 & 0.8481 \end{bmatrix} \tag{35}
$$

To se rovná kovarianční matici chyby odhadu, a proto můžeme tvrdit, že odhad je efektivní ve smyslu Van Treesovy nerovnosti.

## 3.2 ii

### 3.2.1 A

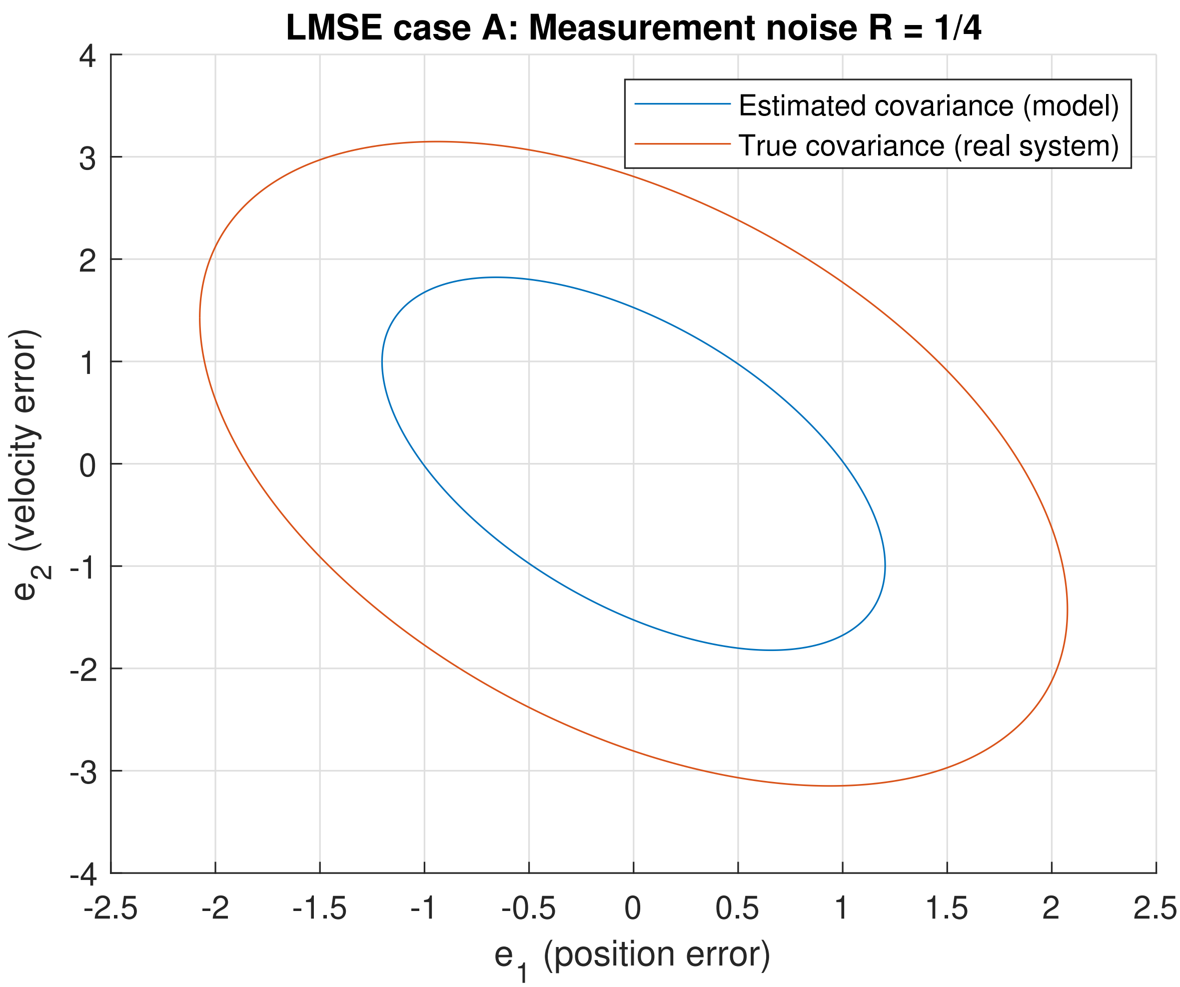
V tomto bodě budeme předpokládat, že model vychází z nesprávné znalosti kovariance šumu, a to $R = \frac{1}{4}$ (ve skutečnosti má šum kovarianci R=1). Kovariance šumu se uplatňuje pouze při výpočtu kovarianční matice měření, proto i při nesprávném odhadu této hodnoty zůstává výsledný odhad nestranný (Strannost odhadu ve smyslu LMSE je určena výhradně středními hodnotami veličin x a z (viz rovnice 36)).

$$
E[X - \hat{X}_{LMSE}] = E(x) - m_x - P_{xz} P_z^{-1} (E(z) - m_z) \tag{36}
$$

$$\hat{X}_{LMSE} = m_x + P_{xz}P_z^{-1}(z - m_z) = \begin{bmatrix} \frac{788}{1225}z_0 + \frac{24}{245}z_1 + \frac{221}{245} \\ \frac{204}{245}z_1 - \frac{652}{1225}z_0 - \frac{204}{245} \end{bmatrix} \tag{37}$$

Po úpravě se kovarianční matice chyby odhadu vyjádří ve tvaru uvedeném níže 38, přičemž $\tilde{P}_z$ označuje skutečnou kovarianční matici.

$$cov[\tilde{X}_{LMSE}] = P_x + P_{xz}P_z^{-1}\tilde{P}_zP_z^{-1}P_{zx} - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} = \begin{bmatrix} 0.4784 & -0.3287 \\ -0.3287 & 1.1014 \end{bmatrix} \tag{38}$$




Obrázek 1: Porovnání teoretických $3\sigma$ elips kovariančních matic chyb pro skutečný a teoretický systém.

Na obrázku 1 jsou znázorněny dvě $3\sigma$ elipsy. Z jejich porovnání je patrné, že model předpovídá menší chybu, než jaká se vyskytuje ve skutečnosti, a to ve všech směrech. Tento rozdíl je způsoben tím, že model vychází z podhodnocené kovariance šumu, a tedy předpokládá vyšší přesnost odhadu, než jaká ve skutečnosti je.

Dále můžeme prozkoumat, nakolik se liší reálná $3\sigma$ elipsa od chyby predikované modelem. Každá elipsa je popsána pomocí normálního dvourozměrného rozložení; pro výpočet vzdálenosti mezi těmito rozloženími bude použita Hellingerova vzdálenost39.

$$H^2 = 1 - \frac{det(\Sigma_1)^{\frac{1}{4}} det(\Sigma_2)^{\frac{1}{4}}}{det(\frac{\Sigma_1+\Sigma_2}{2})^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{8}(\mu_1-\mu_2)^T(\frac{\Sigma_1+\Sigma_2}{2})^{-1}(\mu_1-\mu_2)} \tag{39}$$

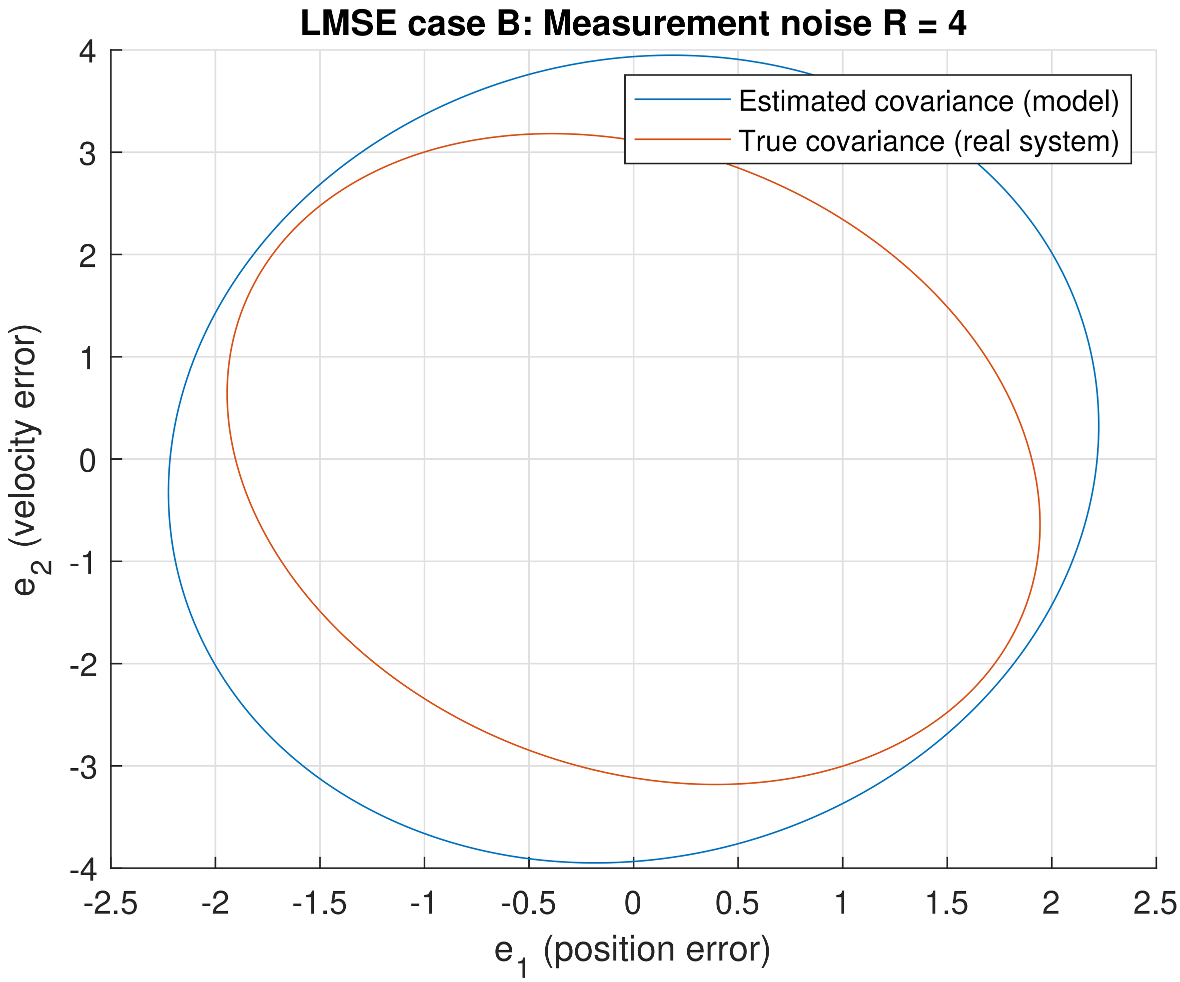
Pro tento případ má Hellingerova vzdálenost hodnotu $H = 0.38$

### 3.2.2 B

V tomto bodě budeme předpokládat, že model vychází z nesprávné znalosti kovariance šumu, a to $R = 4$ (ve skutečnosti má šum kovarianci R=1). Kovariance šumu se uplatňuje pouze při výpočtu kovarianční matice měření, proto i při nesprávném odhadu této hodnoty zůstává výsledný odhad nestranný (Strannost odhadu ve smyslu LMSE je určena výhradně středními hodnotami veličin x a z (viz rovnice 36)).

$$\hat{X}_{LMSE} = m_x + P_{xz}P_z^{-1}(z - m_z) = \begin{bmatrix} \frac{211}{1535}z_0 + \frac{48}{307}z_1 + \frac{892}{307} \\ \frac{31}{1535}z_1 + \frac{138}{307}z_0 - \frac{45}{307} \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$cov[\tilde{X}_{LMSE}] = P_x + P_{xz}P_z^{-1}\tilde{P}_z P_z^{-1}P_{zx} - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} - P_{xz}P_z^{-1}P_{zx} = \begin{bmatrix} 0.2156 & -0.0391 \\ -0.0391 & 0.0977 \end{bmatrix} \tag{41}$$




Obrázek 2: Porovnání teoretických $3\sigma$ elips kovariančních matic chyb pro skutečný a teoretický systém.

Na obrázku č. 2 jsou znázorněny $3\sigma$ elipsy kovariančních matic chyb odhadu. Z jejich průběhu je patrné, že model předpovídá větší kovarianci, než jaká se vyskytuje ve skutečnosti. Tento rozdíl je způsoben tím, že model vychází z nadhodnocené kovariance šumu, a tedy očekává větší neurčitost měření, než jaká ve skutečnosti existuje.

Analogicky k předchozímu bodu lze vypočítat Hellingerovu vzdálenost, která v tomto případě dosahuje hodnoty $H = 0.16$.

#### 3.2.3 C

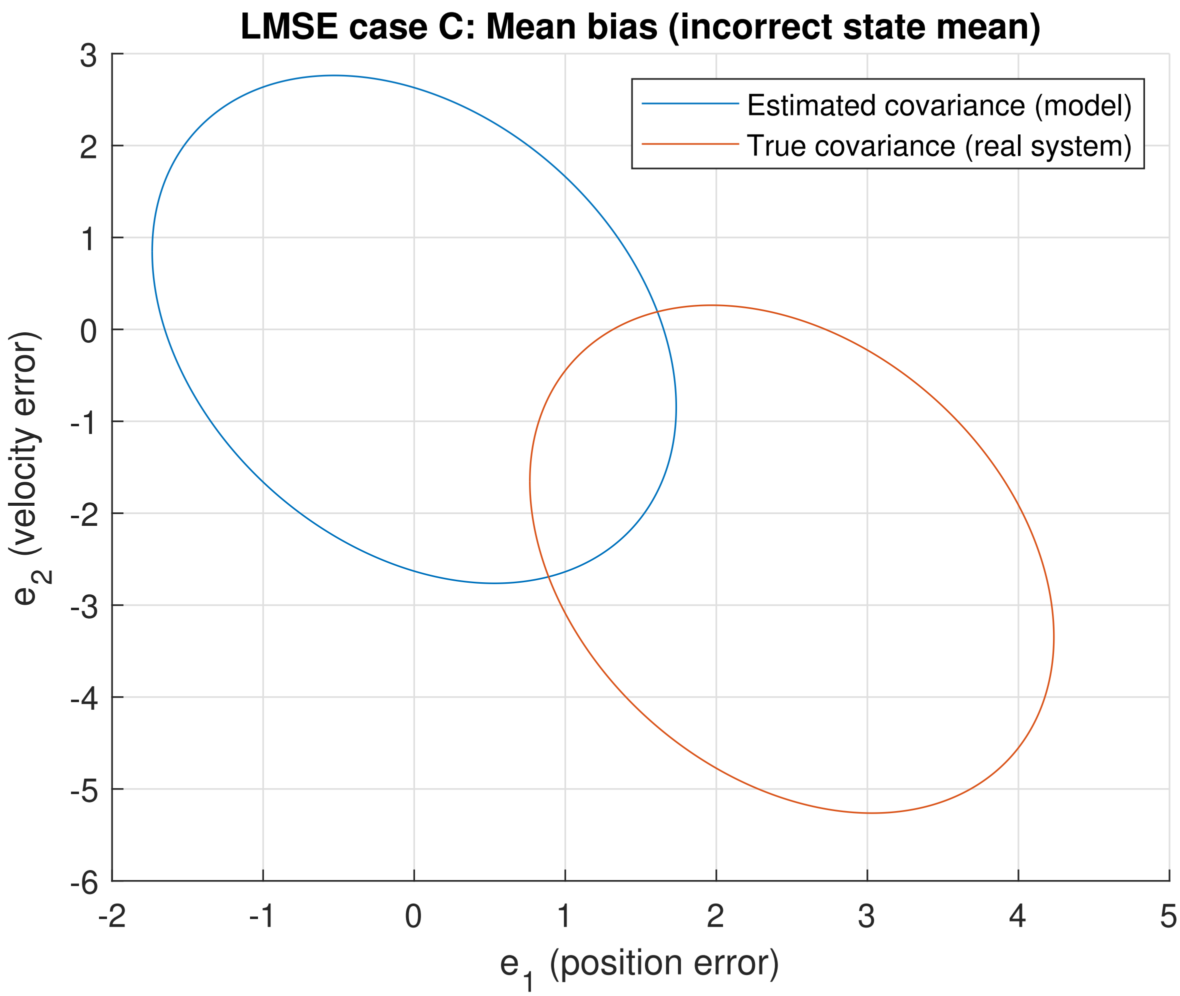
V tomto bodě budeme předpokládat nesprávnou znalost počátečního stavu systému – počáteční poloha bude posunuta o pět jednotek. Za těchto podmínek již nelze tvrdit, že odhad zůstává nestranný, neboť dochází ke změně střední hodnoty jak měření, tak i počátečního stavu modelu. Strannost odhadu lze následně určit podle vztahu 42.

$$E(e) = (m_x - \tilde{m}_x) - P_{xz}P_z^{-1}(m_z - \tilde{m}_z) = \begin{bmatrix} 2.5 \\ -2.5 \end{bmatrix} \tag{42}$$

LMSE odhad lze vypočítat podle následujícího vztahu 43:

$$\hat{X}_{LMSE} = m_x + P_{xz}P_z^{-1}(z - m_z) = \begin{bmatrix} \frac{121}{362}z_0 + \frac{30}{181}z_1 - \frac{120}{181} \\ \frac{120}{181}z_1 - \frac{59}{362}z_0 + \frac{244}{181} \end{bmatrix} \tag{43}$$

Na obrázku č. 3 jsou znázorněny $3\sigma$ elipsy kovariančních chyb odhadu pro reálný systém a model. Je patrné, že rozměr elips zůstává stejný, avšak model předpokládá nestranný odhad, zatímco ve skutečnosti vykazuje systematickou odchylku. Tato stranost je zřejmá z posunu středů elips znázorněných v grafu. Analogicky k předchozím výpočtům určujeme Hellingerovu vzdálenost, která v tomto případě dosahuje hodnoty H = 0.96.



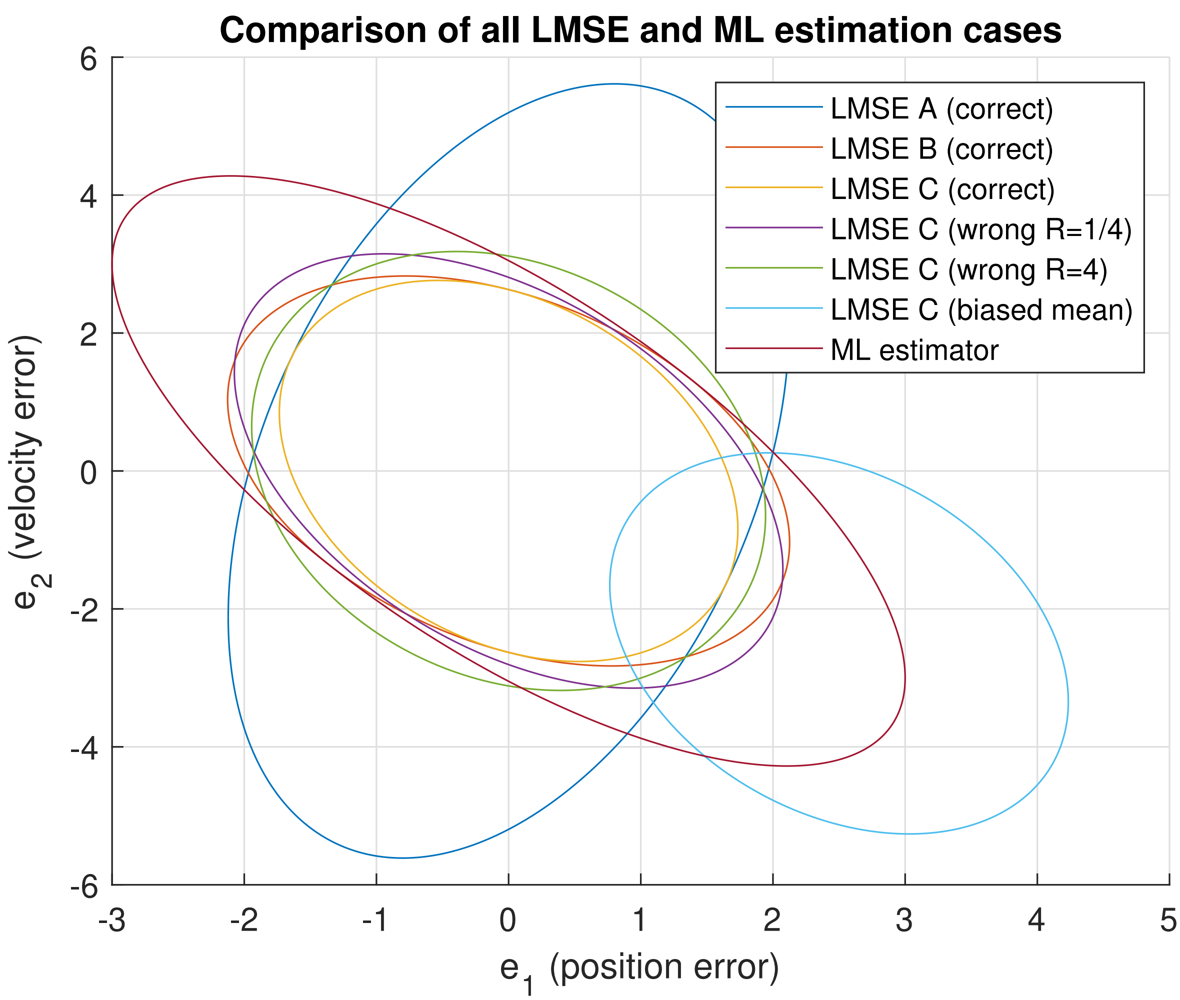

Obrázek 3: Porovnání teoretických $3\sigma$ elips kovariančních matic chyb pro skutečný a teoretický systém.

## 3.3 iii

Na obrázku č. X jsou znázorněny $3\sigma$ elipsy skutečných kovariančních chyb odhadu pro všechny výše uvedené případy. Jednotlivé elipsy lze hodnotit podle obou os zvlášť – od nejpřesnější po nejméně přesnou. Podle osy chyby polohy: LMSE C, LMSE C ( R=4), LMSE C ( R=1/4), LMSE B, LMSE A, ML. Podle osy chyby rychlosti: LMSE C, LMSE B, LMSE C ( R=1/4), LMSE C ( R=4), ML, LMSE A. Je třeba poznamenat, že odhad LMSE C (biased mean) má stejnou kovarianční elipsu jako LMSE C, liší se však posunem způsobeným systematickou chybou (biasem).

V případě, že chceme porovnat elipsy s ohledem na obě osy současně, můžeme zvolit *kriterium kvality* například na základě *plochy elipsy*. Podle tohoto kritéria (od nejmenší po největší varianci) vychází pořadí následovně:

$$LMSE\ C\ (14.33),\quad LMSE\ B\ (17.56),\quad LMSE\ C\ [R=1/4]\ (18.3),\quad LMSE\ C\ [R=4]\ (19.03),\quad ML\ (28.7),\quad LMSE\ A\ (34.7)$$

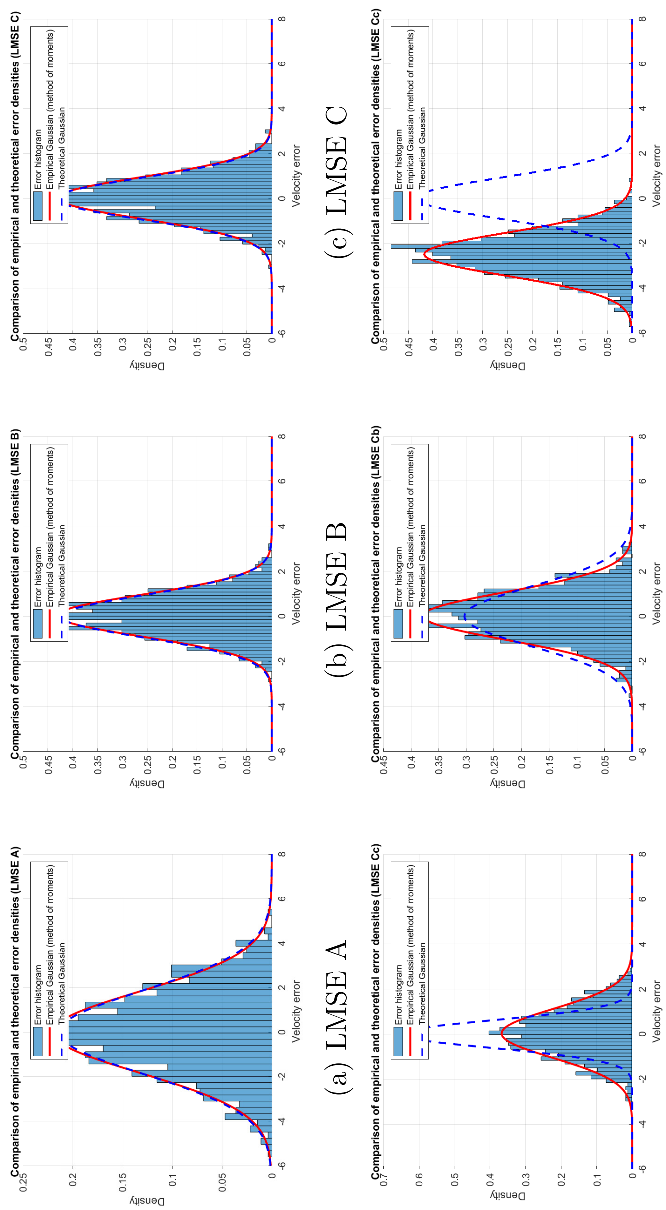



Obrázek 4: Teoretické 3-sigma elipsy kovariančních matic chyb pro všechny případy

# 4 Simulační ověření teoretických výsledků

Byla provedena simulace s 1000 realizacemi měření, na jejichž základě byl odhadnut počáteční stav $x_0$ pro jednotlivé metody odhadu. Z každé realizace byla určena chyba odhadu $\tilde{x} = x_0 - \hat{x}_0$ , ze které byly následně vytvořeny normalizované histogramy chyb složky rychlosti. Pomocí metody přiřazení momentů byly pro tyto histogramy odhadnuty teoretické hustoty pravděpodobnosti, které byly následně porovnány s empirickými rozděleními.

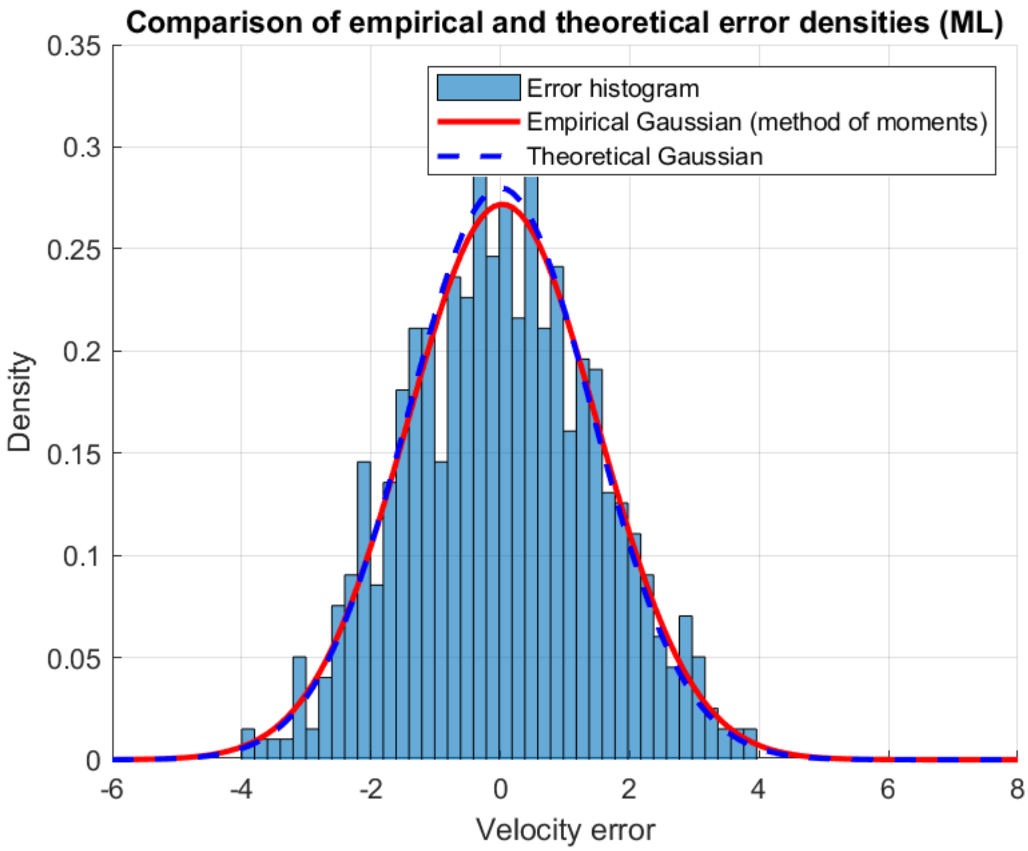
Získané výsledky ukazují, že rozložení chyb u většiny odhadů dobře odpovídá teoretickému gaussovskému tvaru.




(a) LMSE A (b) LMSE B (c) LMSE C

(d) LMSE Ca (e) LMSE Cb (f) LMSE Cc

Obrázek 5: Histogramy pro všechny odhady LMSE




Obrázek 6: Histogram pro odhad ML

Na grafech 5 a 6 jsou zobrazeny normalizované histogramy chyb odhadu rychlosti. Pro správně specifikované modely (ML a LMSE bez chyby v parametrech) se empirická hustota chyb velmi dobře překrývá s teoretickou Gaussovou hustotou, což potvrzuje správnost odvozených vztahů i implementace.

V případech LMSE se záměrně nesprávně zadanými parametry je patrná odchylka empirické hustoty od teoretické. Ta se projevuje změnou rozptylu a zejména stranností odhadu, tedy posunem střední hodnoty chyby od nuly. Tyto jevy odpovídají očekávanému chování odhadů při nesprávně specifikovaném modelu.

# 5 Závěr

V této semestrální práci byly odvozeny a porovnány odhady počátečního stavu systému pomocí metod ML a LMSE pro různé modelové podmínky. Teoretické i simulační výsledky ukázaly, že pro správně zadané parametry systému jsou oba odhady nestranné a vykazují velmi dobrou shodu mezi teoretickou a empirickou hustotou chyb, což potvrzuje správnost teoretických vztahů i implementace.

Pořadí přesnosti jednotlivých LMSE odhadů odpovídá množství dostupných informací a správnosti znalosti modelu. Nejpřesnější výsledky poskytuje případ LMSE C, kde jsou využita dvě měření a správné parametry modelu – tedy maximální množství informací o systému. Naopak případ LMSE A, který využívá pouze první měření $z_0$, je nejméně přesný, protože obsahuje informaci pouze o poloze a nikoli o rychlosti. Matematicky lze tento rozdíl vyjádřit z kovariančních matic odhadů:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 3.5 \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$P_B = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.2448 \\ -0.2448 & 0.888 \end{bmatrix} \tag{45}$$

Z determinantů $P_A = 1.5$ a $P_B = 0.402$ je zřejmé, že LMSE B je výrazně přesnější – měření $z_1$ (ve tvaru $[11]x_0 + v$) přináší přímou informaci o rychlosti, čímž významně snižuje její rozptyl.

U případů se záměrně nesprávně zadanou kovariancí měřicího šumu (R = $\frac{1}{4}$ a R = 4) se projevuje asymetrie jak v odhadovaných kovariancích, tak v Hellingerových vzdálenostech. I když by v jednorozměrném případě bylo očekávané, že Hellingerova vzdálenost je stejná pro R a $\frac{1}{R}$, v našem dvourozměrném systému tomu tak není, protože změna R neovlivňuje pouze velikost rozptylů, ale i vzájemnou korelaci chyby polohy a rychlosti, tedy tvar a orientaci elipsy kovariance. Pro R = $\frac{1}{4}$ model podhodnocuje měřicí šum a příliš věří měřením, což vede k větším korelacím a výraznějšímu rozdílu oproti reálnému rozložení (H = 0.38). Naopak při R = 4 je měření podváženo, kovariance je „kulatější“ a bližší skutečné, proto je Hellingerova vzdálenost menší (H = 0.16). Nejvyšší hodnota H = 0.96 vzniká u případu s posunutou střední hodnotou, kde se rozložení liší polohou.

Celkově lze konstatovat, že výsledky experimentu potvrzují teoretické předpoklady o chování metod ML a LMSE a správnost jejich implementace. Zároveň bylo ukázáno, že Hellingerova vzdálenost je vhodným kritériem pro kvantifikaci odchylky mezi modelem a reálným systémem, protože reaguje na nesprávné nastavení kovariancí i na systematickou strannost odhadu.