

Západočeská univerzita v Plzni  
Fakulta aplikovaných věd  
Katedra kybernetiky



ODHAD KONSTANTNÍ VELIČINY  
KKY/TOD

Yauheni Petrachenka  
11. října 2025

# 1 Model

Model a charakteristiky stochastických veličin jsou dány zadáním (1, 2). Pro zjednodušení označení bude matice přechodu stavů dále označována jako matice F a matice pozorování jako matice H.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + w_k, w_k \sim \mathcal{N} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, q \begin{bmatrix} \frac{T^3}{2} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), x_0 = \begin{bmatrix} \bar{x}_0^{poloha} \\ \bar{x}_0^{rychlost} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$z_k = [1 \quad 0] x_k + v_k, v_k \sim \mathcal{N}(0, R) \quad (2)$$

Hlavním cílem této semestrální práce je nalezení optimálního odhadu vektoru  $x_0$  pomocí metody vážených nejmenších čtverců.

## 2 Teoretické úkoly

### 2.1 (i)

Sestavíme rovnice  $z_n = Jx_0 + e$  pro  $[z_0, z_1, z_2, z_3]^T$  pomocí rozepsání jednotlivých prvků  $z_n$ . Ve výsledku byl získán vztah, který obsahuje matici J a matici chyb 3.

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Hx_0 + v_0 \\ HFx_0 + Hw_0 + v_1 \\ HF^2x_0 + HFw_0 + Hw_1 + v_2 \\ HF^3x_0 + HF^2w_0 + HFw_1 + Hw_2 + v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix} x_0 + \begin{bmatrix} v_0 \\ Hw_0 + v_1 \\ HFw_0 + Hw_1 + v_2 \\ HF^2w_0 + HFw_1 + Hw_2 + v_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Dále bylo cílem nalézt kovarianční matici chyb  $\Sigma = E(\mathbf{e}\mathbf{e}^T)$ . Při rozepisování bylo uvažováno, že střední hodnota šumů je nulová a jednotlivé šumy jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny, což vyplývá z použitého modelu. Tím pádem byl získán výraz 4. Po dosazení matic H a F a jejich vynásobení získáme matici 5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{N}[ee^T] = & \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Hq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} H^T + R & 0 & 0 \\ 0 & HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} H^T & HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T + Hq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} H^T + R & 0 \\ 0 & HF^2q \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} H^T & HF^2q \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T + HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} H^T & HF^2q \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T + HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} H^T + R \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Hq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^{2T} H^T & HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^{2T} H^T + Hq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T & 0 \\ 0 & HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^{2T} H^T + HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T + Hq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T & HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^{2T} H^T + HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T + Hq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T \\ 0 & HF^2q \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^{2T} H^T + HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T + Hq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T & HF^2q \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^{2T} H^T + HFq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T + Hq \begin{bmatrix} \frac{\tau^3}{2} & \frac{\tau^2}{2} & T \end{bmatrix} F^T H^T + R \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[ee^T] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q\frac{T^3}{3} + R & q\frac{5T^3}{6} & q\frac{4T^3}{3} \\ 0 & q\frac{5T^3}{6} & q\frac{8T^3}{3} + R & q\frac{14T^3}{3} \\ 0 & q\frac{4T^3}{3} & q\frac{14T^3}{3} & q14T^3 + R \end{bmatrix} \quad (5)$$

## 2.2 (ii)

V tomto bodě bude určen vektor  $x_0$  pomocí metody vážených nejmenších čtverců. Pro dosažení co nejmenší kovarianční matice bude matice vah zvolena jako  $cov(e)^{-1}$ .

Pro získání modelu, který zohledňuje pouze měření  $z_n$ , stačí vynechat ostatní prvky z modelu i z kovarianční matice chyb. Každý odhad byl proveden podle vztahu  $(J^T W J)^{-1} J^T W z_n$ . Teoreticky by větší počet měření měl snížit kovarianci chyby odhadu.

Pro výpočet bude uvažováno, že  $q=0.1$ ,  $R=1$ ,  $T=1$ .

Dále jsou popsány výsledky pro jednotlivé body.

### 2.2.1 F

Tento bod zahrnuje všechna čtyři měření, proto matice  $J$  a kovarianční matice chyby odhadu zůstanou stejné. Matice vah bude zvolena jako inverzní matice ke kovarianční matici chyb 7. Po aplikaci vztahu 6 byl získán odhad počátečního stavu 8.

$$\hat{X}_0 = \left( \begin{bmatrix} H & HF & HF^2 & HF^3 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H & HF & HF^2 & HF^3 \end{bmatrix} W Z \quad (6)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9774 & -0.0477 & -0.045 \\ 0 & -0.0477 & 0.8527 & -0.1632 \\ 0 & -0.045 & -0.1632 & 0.4509 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} \frac{4177}{5753} z_0 + \frac{2196}{5753} z_1 + \frac{336}{5753} z_2 - \frac{956}{5753} z_3 \\ \frac{4768}{28765} z_2 - \frac{1712}{28765} z_1 - \frac{30109}{86295} z_0 + \frac{20941}{86295} z_3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

### 2.2.2 A

V tomto případě bude využito pouze první a druhé měření. Matice  $J$  bude obsahovat pouze dva prvky a kovarianční matice chyby odhadu bude mít rozměr  $2 \times 2$ . Matice vah bude zvolena jako inverzní matice ke kovarianční matici chyb 10. Po aplikaci vztahu 9 byl získán odhad počátečního stavu 11.

$$\hat{X}_0 = \left( \begin{bmatrix} H & HF \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H & HF \end{bmatrix} W Z \quad (9)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.9677 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

### 2.2.3 B

V tomto případě bude využito pouze první a třetí měření. Matice J bude obsahovat pouze dva prvky a kovarianční matice chyby odhadu bude mít rozměr  $2 \times 2$ . Matice vah bude zvolena jako inverzní matice ke kovarianční matici chyb 13. Po aplikaci vztahu 12 byl získán odhad počátečního stavu 14.

$$\hat{X}_0 = \left( \begin{bmatrix} H & HF^2 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} H \\ HF^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H & HF^2 \end{bmatrix} W Z \quad (12)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.7895 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} z_0 \\ 0.5z_1 - 0.5z_0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

### 2.2.4 C

V tomto případě bude využito pouze druhé a třetí měření. Matice J bude obsahovat pouze dva prvky a kovarianční matice chyby odhadu bude mít rozměr  $2 \times 2$ . Matice vah bude zvolena jako inverzní matice ke kovarianční matici chyb 16. Po aplikaci vztahu 15 byl získán odhad počátečního stavu 17.

$$\hat{X}_0 = \left( \begin{bmatrix} HF & HF^2 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} HF \\ HF^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} HF & HF^2 \end{bmatrix} W Z \quad (15)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.9729 & -0.0640 \\ -0.0640 & 0.7937 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 2z_1 - z_2 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

### 2.2.5 D

V tomto případě bude využito pouze první, druhé a třetí měření. Matice J bude obsahovat pouze tři prvky a kovarianční matice chyby odhadu bude mít rozměr  $3 \times 3$ . Matice vah bude zvolena jako inverzní matice ke kovarianční matici chyb 19. Po aplikaci vztahu 18 byl získán odhad počátečního stavu 20.

$$\hat{X}_0 = \left( \begin{bmatrix} H & HF & HF^2 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} H & HF & HF^2 \end{bmatrix} W Z \quad (18)$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9729 & -0.064 \\ 0 & -0.064 & 0.7937 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.8352z_0 + 0.3297z_1 - 0.1648z_2 \\ 0.01648z_1 - 0.5082z_0 + 0.4918z_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

### 2.2.6 E

V tomto případě bude využito pouze druhé, třetí a čtvrté měření. Matice J bude obsahovat pouze tři prvky a kovarianční matice chyby odhadu bude mít rozměr  $3 \times 3$ . Matice vah bude zvolena jako inverzní matice ke kovarianční matici chyb 22. Po aplikaci vztahu 21 byl získán odhad počátečního stavu 23.

$$\hat{X}_0 = \left( \begin{bmatrix} HF & HF^2 & HF^3 \end{bmatrix} W \begin{bmatrix} HF \\ HF^2 \\ HF^3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} HF & HF^2 & HF^3 \end{bmatrix} W Z \quad (21)$$

$$W = \begin{bmatrix} 0.9774 & -0.0477 & -0.045 \\ -0.0477 & 0.8527 & -0.1632 \\ -0.045 & -0.1632 & 0.4509 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\hat{X}_0 = \begin{bmatrix} 0.8477z_1 + 0.3046z_2 - 0.1523z_3 \\ 0.09137z_2 - 0.5457z_1 + 0.4543z_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

### 2.2.7 G

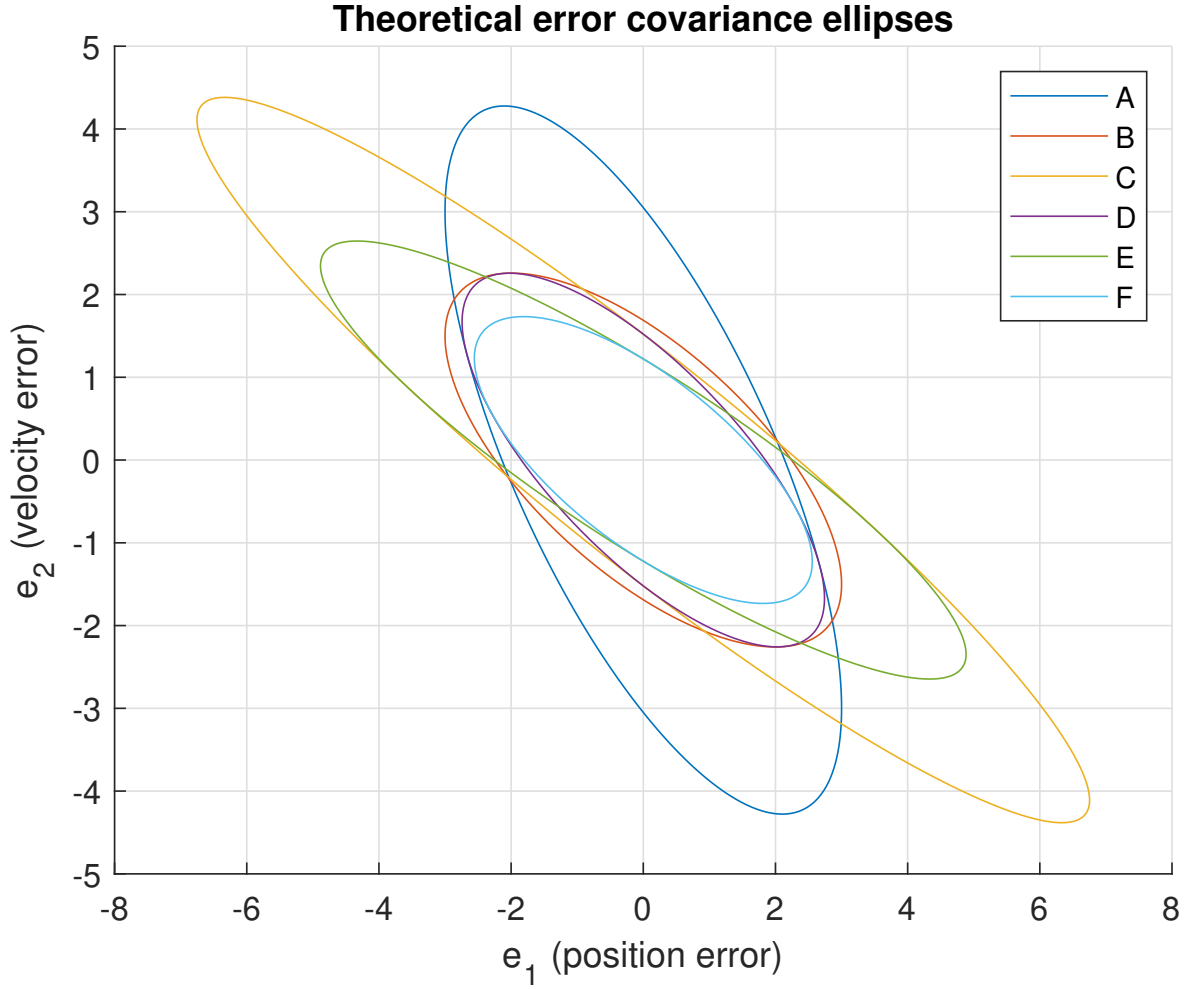
Je nám dáno pouze jedno měření  $z_0$ , avšak na základě jediného měření nelze aplikovat metodu vážených nejmenších čtverců.

## 2.3 iii

Zobrazíme 3-sigma elipsy pro případy A–F v prostředí MATLAB pomocí příslušného vztahu 24.

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^T P^{-1} (x - x_0) = 9\} \quad (24)$$

Vzhledem k tomu, že odhad je nestranný, střední hodnota chyby odhadu je nulová. Výsledkem jsou elipsy znázorněné na grafu 1.



Obrázek 1: Teoretické 3-sigma elipsy kovariančních matic chyb pro případy A–F

Podívejme se podrobněji na jednotlivé elipsy v každé souřadnici zvlášť. Nejprve se zaměříme na osu  $e_2$ . Největší varianci odhadu podle této osy vykazuje elipsa C, následuje elipsa A. Výrazně menší varianci lze pozorovat u elipsy E, přičemž elipsy D a B vykazují téměř shodné hodnoty. Nejmenší varianci podle osy  $e_2$  má elipsa F.

Dále prozkoumáme elipsy podle osy  $e_1$ . Největší varianci opět vykazuje elipsa C, následovaná elipsou E. Poté následují elipsy A, B a D, zatímco nejmenší varianci podle osy  $e_1$  vykazuje elipsa F.

Z uvedeného lze usoudit, že elipsa C má největší varianci v obou osách, zatímco elipsa F vykazuje nejmenší varianci ve všech směrech. V případě, že chceme porovnat elipsy s ohledem na obě osy současně, můžeme zvolit *kriterium kvality* například na základě *plochy elipsy*. Podle tohoto kritéria (od největší po nejmenší varianci) vychází pořadí následovně:

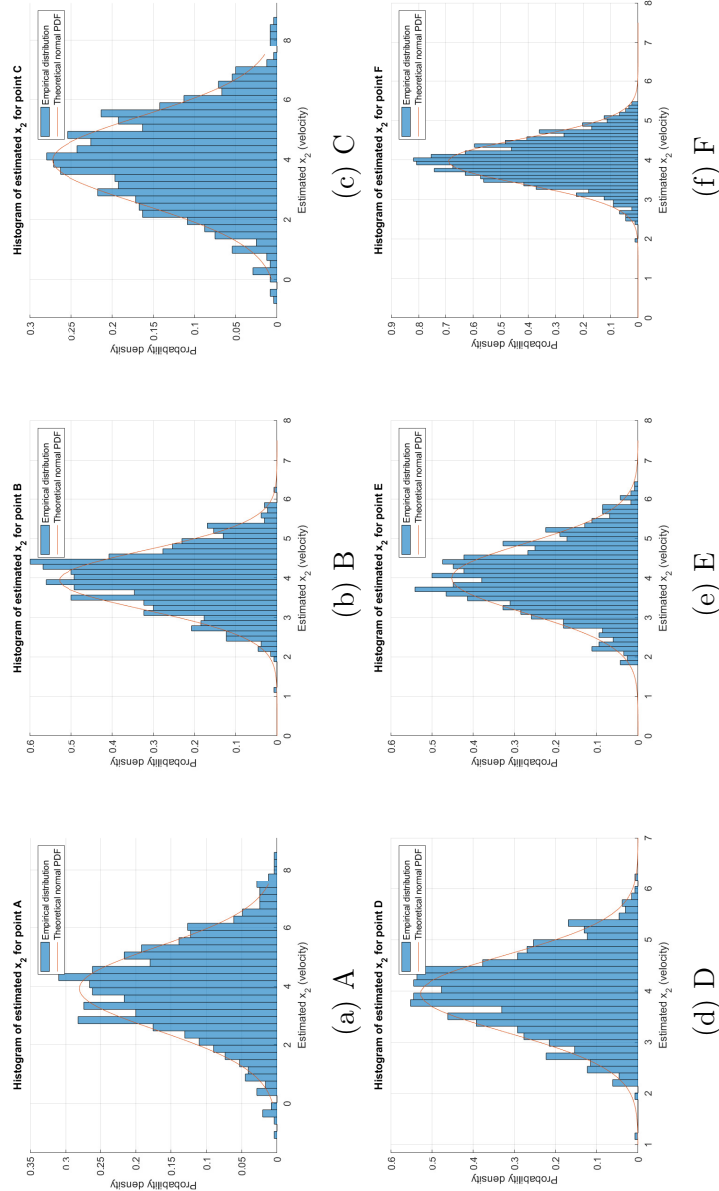
$$C (32), \quad A (28), \quad E (18), \quad B (15), \quad D (13), \quad F (9).$$

Menší plocha elipsy odpovídá menší nejistotě odhadu počátečního stavu, a tedy vyšší přesnosti metody.

## 3 Simulační úkoly

### 3.1 i

Byla provedena simulace s 1000 realizacemi měření, na jejímž základě byl odhadnut počáteční stav  $x_0$ . Histogramy odhadů jeho rychlostní složky jsou zobrazeny na obrázku 2.



Obrázek 2: Normalizované histogramy odhadů rychlostní složky počátečního stavu A–F

Z normalizovaných histogramů na obrázku 2 lze pozorovat, že rozdělení jednotlivých odhadů rychlosti odpovídají svým teoretickým pravděpodobnostním hustotám.

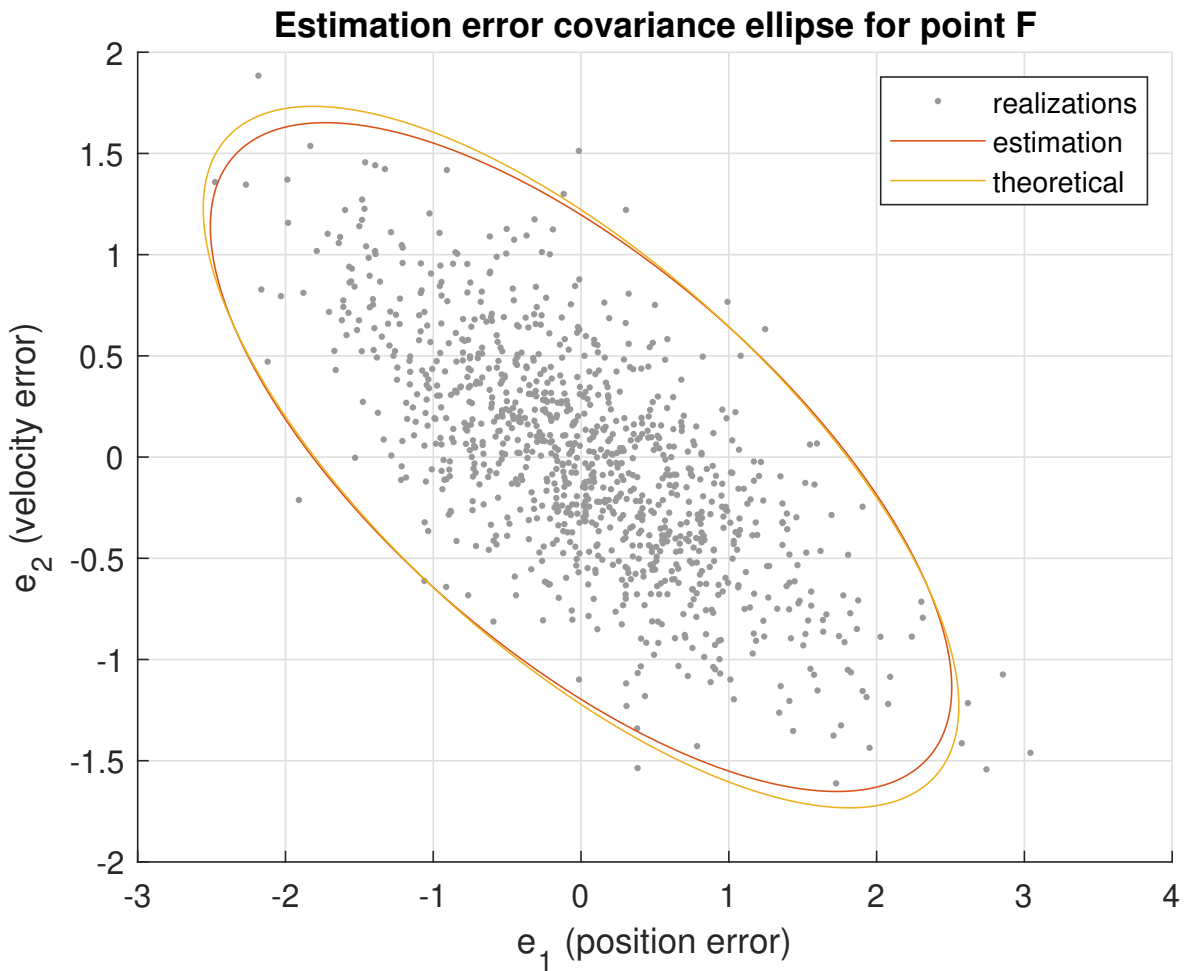


To potvrzuje správnost numerické simulace i implementace metody vážených nejmenších čtverců.

Lze si všimnout, že histogramy mají přibližně normální tvar, jak se očekává od lineárního modelu s aditivním šumem. Nejmenší rozptyl (tedy nejpřesnější odhady) vykazuje histogram odpovídající bodu F, zatímco největší rozptyl má histogram bodu C.

Tento výsledek je v souladu s teoretickou částí, kde elipsa F vykazovala nejmenší varianci chyb odhadu a elipsa C naopak největší. Shoda mezi empirickými histogramy a teoretickými hustotami tedy potvrzuje konzistenci celého modelu a správnost odvozených vztahů.

### 3.2 ii



Obrázek 3: Porovnání teoretické a empirické 3- $\sigma$  elipsy pro variantu F

Na obrázku 3 jsou znázorněny 3- $\sigma$  elipsy – teoretická elipsa odvozená z analytického modelu a elipsa získaná z experimentálních dat. Je patrné, že elipsa vypočtená z experimentálních dat dobře konverguje k teoretické elipse, což potvrzuje správnost teoretických výpočtů i implementace simulačního modelu.

Většina realizací měření se nachází uvnitř  $3\text{-}\sigma$  oblasti, jak lze očekávat při předpokladu normálního rozdělení chyb. Rozložení jednotlivých bodů navíc odpovídá tvaru elipsy, což potvrzuje správnost modelu i spolehlivost odhadu kovarianční matice.

Menší odchylky mezi teoretickou a empirickou elipsou lze přičíst konečnému počtu realizací (1000) a numerickým nepřesnostem při výpočtu kovarianční matice. Celkově lze konstatovat, že empirické výsledky velmi dobře potvrzují teoretické předpoklady o chování odhadu počátečního stavu.