

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky



ODHAD STAVU LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
KKY/TOD

Yauheni Petrachenka
3. prosince 2025

Odhad stavu lineárního systému*Zadání semestrální práce č. 3*

Termín odevzdání: 3. prosince 2025

Uvažujme objekt, který se pohybuje po přímce s náhodným zrychlením, zatímco je s konstantní periodou T měřena jeho poloha. Cílem je na základě měření a modelu systému rekursivně odhadovat náhodný stav systému, v našem případě polohu a rychlost objektu. V diskretním případě můžeme uvažovat lineární dynamický systém s popisem

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{40} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{x}_0 \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, 10),$$

kde vzorkovací perioda je $T = 1$ a procesy $[\mathbf{w}_k]_{k=1}^{+\infty}$ a $[v_k]_{k=1}^{+\infty}$ jsou vzájemně nezávislé bílé šумы, nezávislé na počátečním stavu \mathbf{x}_0 .

Úkoly: Rekonstruktor v porovnání s odhadem náhodného stavu Kalmanovým filtrem.

Vygenerujte 1000 trajektorií stavu a měření pro $k = 0, \dots, 25$.

- (i) Pro porovnání nejprve ignorujte, že systém je stochastický, a navrhnete pro něj optimální rekonstruktor – navrhnete zisk \mathbf{K} pro filtr ve tvaru $\hat{\mathbf{x}}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}\mathbf{H})\mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}\mathbf{z}_k$ přiřazením polů do nuly. Následně stochastický charakter systému vezměte v potaz a formulujte problém odhadu náhodného stavu pomocí Kalmanova filtru. Nakonec určete ustálenou hodnotu Kalmanova zisku \mathbf{K}_∞ . Pro každou trajektorii měření odhadněte stav pomocí:
 - (a) optimálního deterministického rekonstruktoru stavu,
 - (b) ustáleného Kalmanova filtru, tj. filtru s konstantním ziskem \mathbf{K}_∞ ,
 - (c) Kalmanova filtru.
 - (ii) Vykreslete první trajektorii stavu a porovnejte ji s příslušnými filtračními odhady a měřením. Pro první trajektorii dále vykreslete chyby filtračních odhadů a komentujte výsledky.
 - (iii) V případě (b) a (c) lze analyzovat inovační posloupnost, která musí splňovat určité vlastnosti. Ty lze monitorovat a brát jako nutnou podmínku správného chodu filtru. Pro oba filtry proto porovnejte následující ukazatele a zamyslete se, jestli vše funguje, jak má;
 - průběh inovací pro první trajektorii — v grafu,
 - odhady středních hodnot inovací ve všech časech — v grafu,
 - odhady variancí inovací i kovariancí mezi časy — v tabulce pro $k = 0, 1, 5, 25$ a v grafech $\hat{\mathbf{C}}(k, k+l)$ pro tři pevné časy $k = 0, 1, 5$ a proměnné $l = 0, \dots, (25 - k)$.
 - (iv) Když provádíte simulaci, máte přístup ke skutečnému stavu. Proto můžete vyhodnotit kvalitu odhadů přímo z pohledu střední kvadratické chyby. Odhadněte tedy střední hodnoty kvadratických chyb všech filtračních odhadů v závislosti na čase a získané křivky porovnejte s teoretickými hodnotami. Lze algoritmy (a), (b) a (c) uspořádat od nejlepšího po nejhorší?
- Nápověda: Pro porovnání simulace s teorií budete potřebovat kovarianční matice chyby: vývoj stopy filtrační kovarianční matice. Můžete využít Josephovu formu.

2 Model

Model a charakteristiky stochastických veličin jsou dány zadáním ((1), (2)). Pro zjednodušení označení bude matice přechodu stavů dále označována jako matice F a matice pozorování jako matice H .

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + w_k, w_k \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{40} \begin{bmatrix} \frac{T^3}{2} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \right), x_0 \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right), \quad (1)$$

$$z_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k, v_k \sim \mathcal{N}(0, 10) \quad (2)$$

Hlavním cílem této práce je aplikace Kalmanova filtru, Kalmanova filtru s ustáleným (stacionárním) Kalmánovým ziskem a rekonstruktora stavu. Dále budou prozkoumány a ověřeny vlastnosti filtrů i modelovaného systému na základě numerických simulací.

3 Simulace filtrů

Pro provedení experimentu bude uvažován rekonstruktor stavu, který je definován následujícím předpisem (3).

$$\hat{x}_k = (I - KH)F\hat{x}_{k-1} + Kz_k \quad (3)$$

Pro optimální rekonstruktor navrhne zesílení K tak, aby póly systému ležely v nule. Postup návrhu je uveden v následujících rovnicích (4), (5), (6), (7), (8), (9).

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$A = (I - KH)F = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 1 - k_1 \\ -k_2 & 1 - k_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\det(A) = \lambda^2 - \lambda(2 - k_1 - k_2) + (1 - k_1) \quad (6)$$

$$\lambda^2 = \lambda^2 - \lambda(2 - k_1 - k_2) + (1 - k_1) \quad (7)$$

$$2 - k_1 - k_2 = 0 \quad (8)$$

$$1 - k_1 = 0 \quad (9)$$

Po vyřešení výše uvedených rovnic bylo získáno zesílení $K = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dále pro provedení experimentu budeme uvažovat Kalmanův filtr, který obsahuje filtrační (10), (11), (12) a predikční složku (13), (14). Pro zajištění numerické stability budeme uvažovat Josephův tvar výpočtu filtračního odhadu kovarianční matice.

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1}) \quad (10)$$

$$P_{k|k} = (I - K_k H)P_{k|k-1}(I - K_k H)^T + K_k R K_k^T \quad (11)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H^T (H P_{k|k-1} H^T + R)^{-1} \quad (12)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = F \hat{x}_{k|k} \quad (13)$$

$$P_{k+1|k} = F P_{k|k} F^T + G Q G^T \quad (14)$$

Dále bude použit Kalmanův filtr s ustáleným zesílením, které bude získáno řešením následujících rovnic (15), (16).

$$P_p = F P_p F^T - F P_p H^T (H P_p H^T + R)^{-1} H P_p F^T + G Q G^T \quad (15)$$

$$K_\infty = P_p H^T (H P_p H^T + R)^{-1} \quad (16)$$

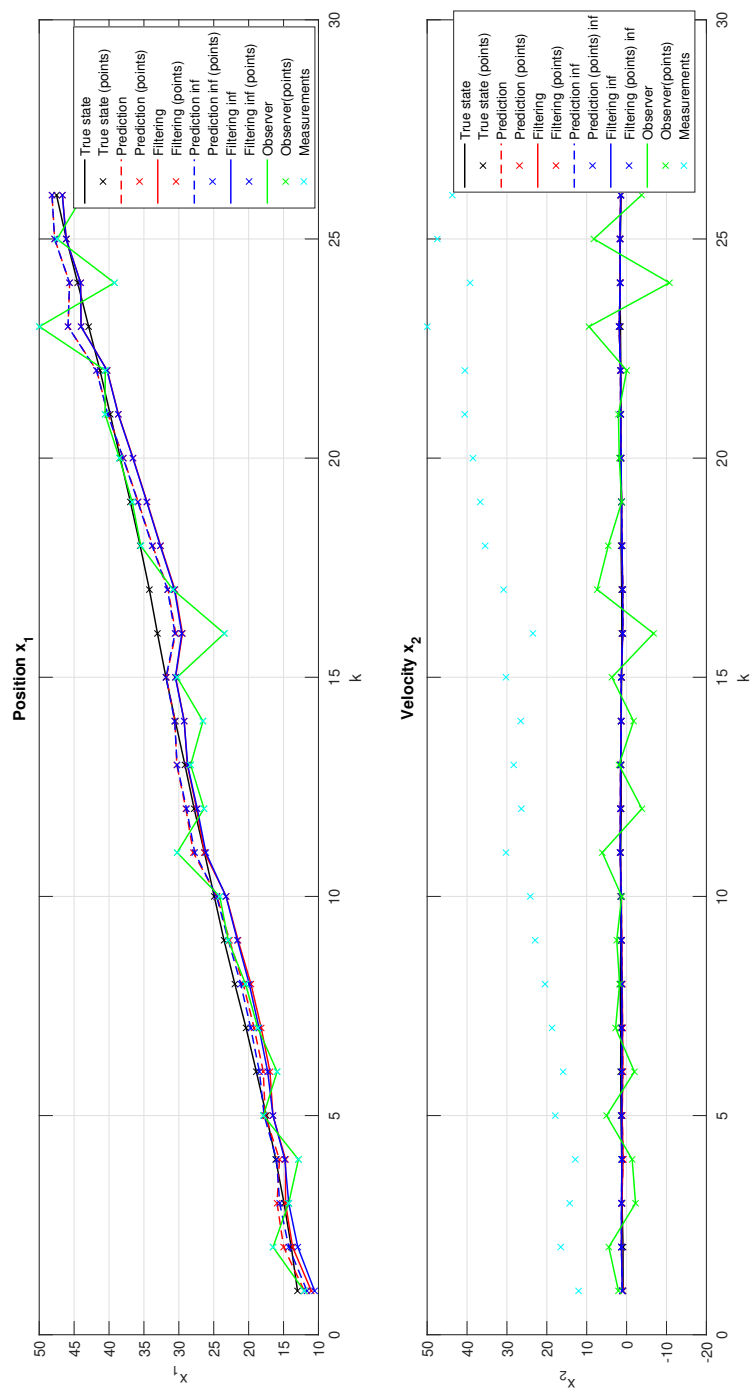
Na obrázku číslo 1 je znázorněna první trajektorie simulace. Můžeme si všimnout, že rekonstruktor přesně sleduje měření polohové složky. To je očekávané, neboť matice H má tvar, který v deterministickém systému umožňuje přímé ztotožnění měření s polohou. Tento výsledek je tedy logický vzhledem k tomu, že rekonstruktor neuvažuje šum měření.

Dále lze pozorovat, že filtrační odhad je v případě odhadu rychlosti totožný s odhadem prediktivním, jelikož měření neobsahuje žádnou informaci o rychlosti.

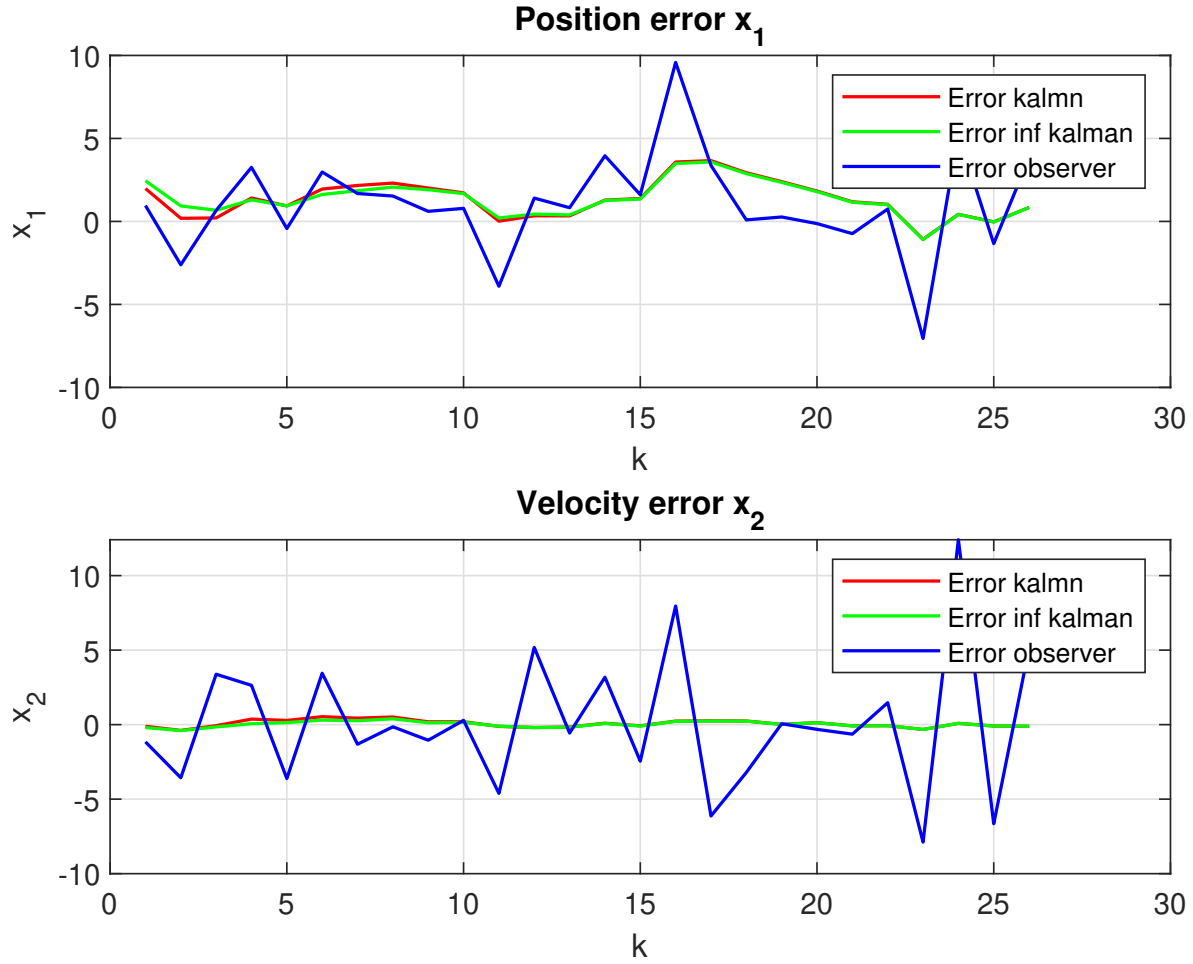
Také je patrné, že Kalmanův filtr s ustáleným zesílením konverguje ke klasickému Kalmanovu filtru.

Na obrázku číslo 2 je znázorněna chyba odhadu pro jednotlivé složky stavu zvlášť, pro první trajektorii. Z obrázku je patrné, že jak v případě polohy, tak v případě rychlosti vykazuje největší chybu rekonstruktor stavu, což je logické, protože nebere v úvahu náhodný šum.

Dále si můžeme všimnout, že větší chyba vzniká u odhadu polohy. Je to dáno tím, že poloha je získávána z předchozí polohy a rychlosti a dochází u ní k akumulaci šumu, zatímco odhad rychlosti je na šum méně citlivý.



Obrázek 1: První trajektorie stavu, měření a odhadu.



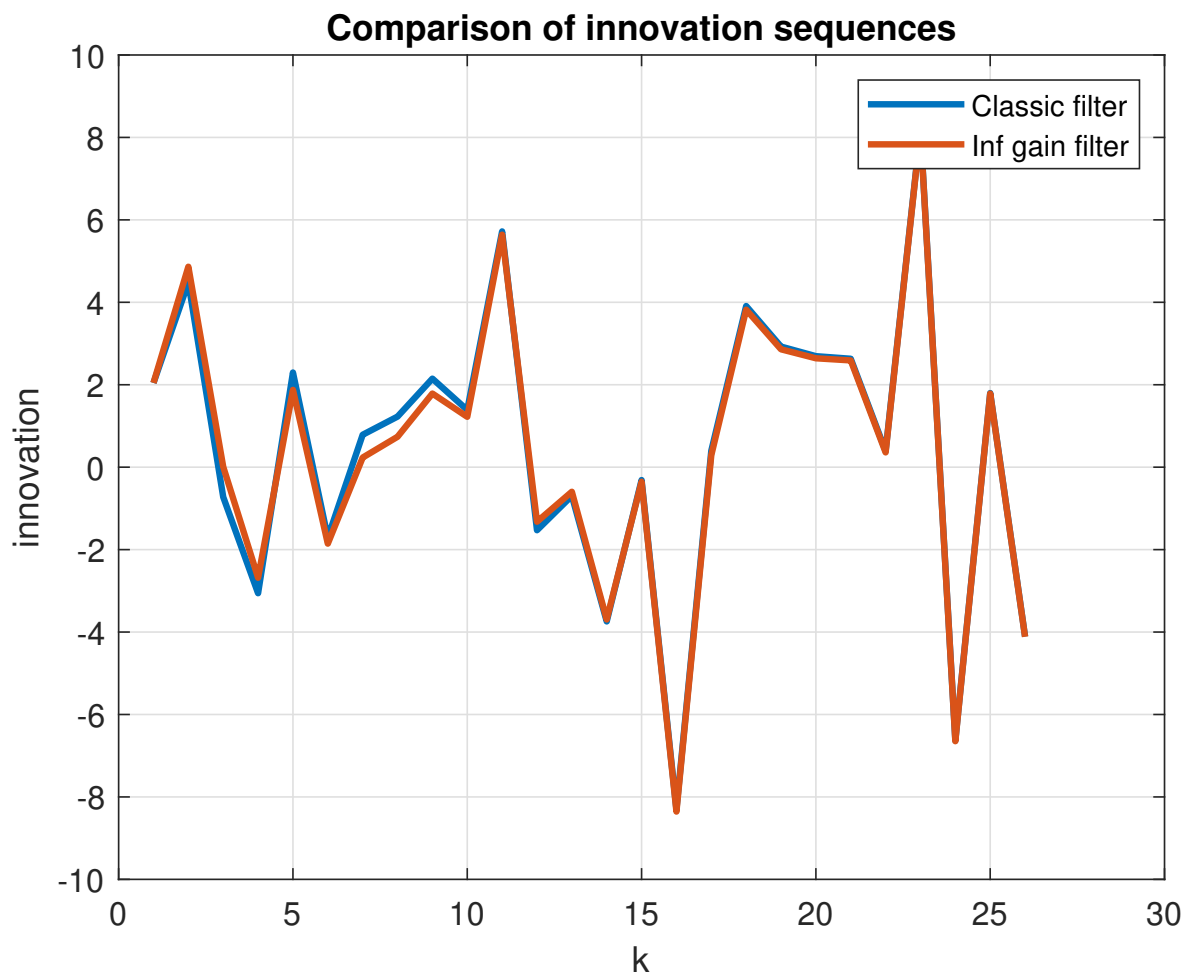
Obrázek 2: Chyby odhadu složek stavu

4 Analýza inovační posloupnosti

Pro další analýzu budeme uvažovat inovační posloupnost, která je definována následujícím vztahem (17).

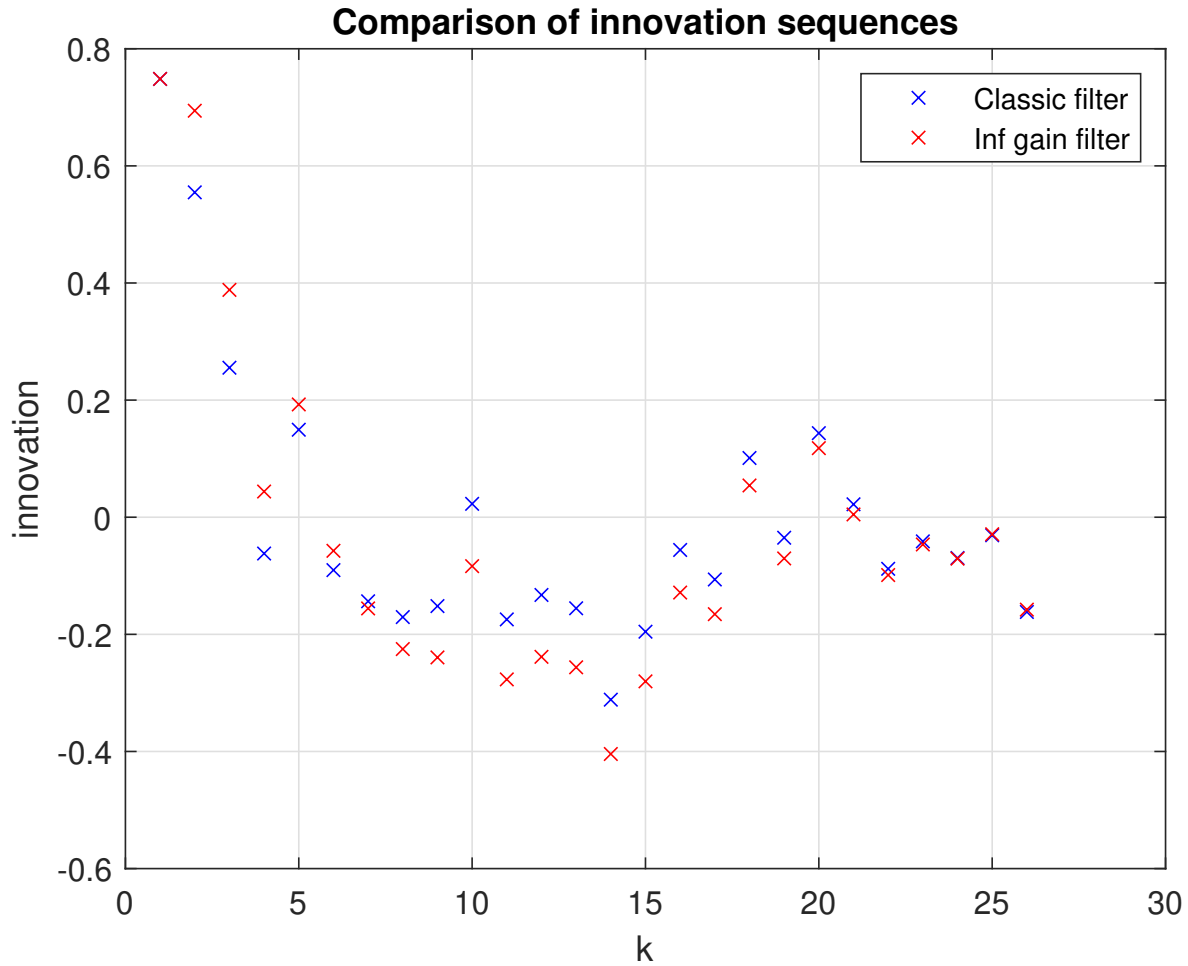
$$i_k = Z_k - H\hat{X}_{k|k-1}(Z_{0:k-1}) \quad (17)$$

Příklad inovační posloupnosti pro klasický Kalmanův filtr a Kalmanův filtr s ustáleným zesílením je znázorněn na grafu číslo 3. Je patrné, že inovační posloupnosti obou filtrů jsou téměř totožné a že inovace osciluje kolem nuly.



Obrázek 3: Inovační posloupnost pro první trajektorii

Na grafu číslo 4 jsou znázorněny střední hodnoty inovační posloupnosti v jednotlivých krocích. Je patrné, že pro střední a větší hodnoty k se střední hodnota pohybuje kolem nuly. U malých hodnot k však střední hodnota dosahuje relativně vysokých odchylek. Tento jev souvisí s tím, že filtr na počátku nezná přesný stav systému a potřebuje určitý čas na konvergenci k optimálním hodnotám zesílení K .

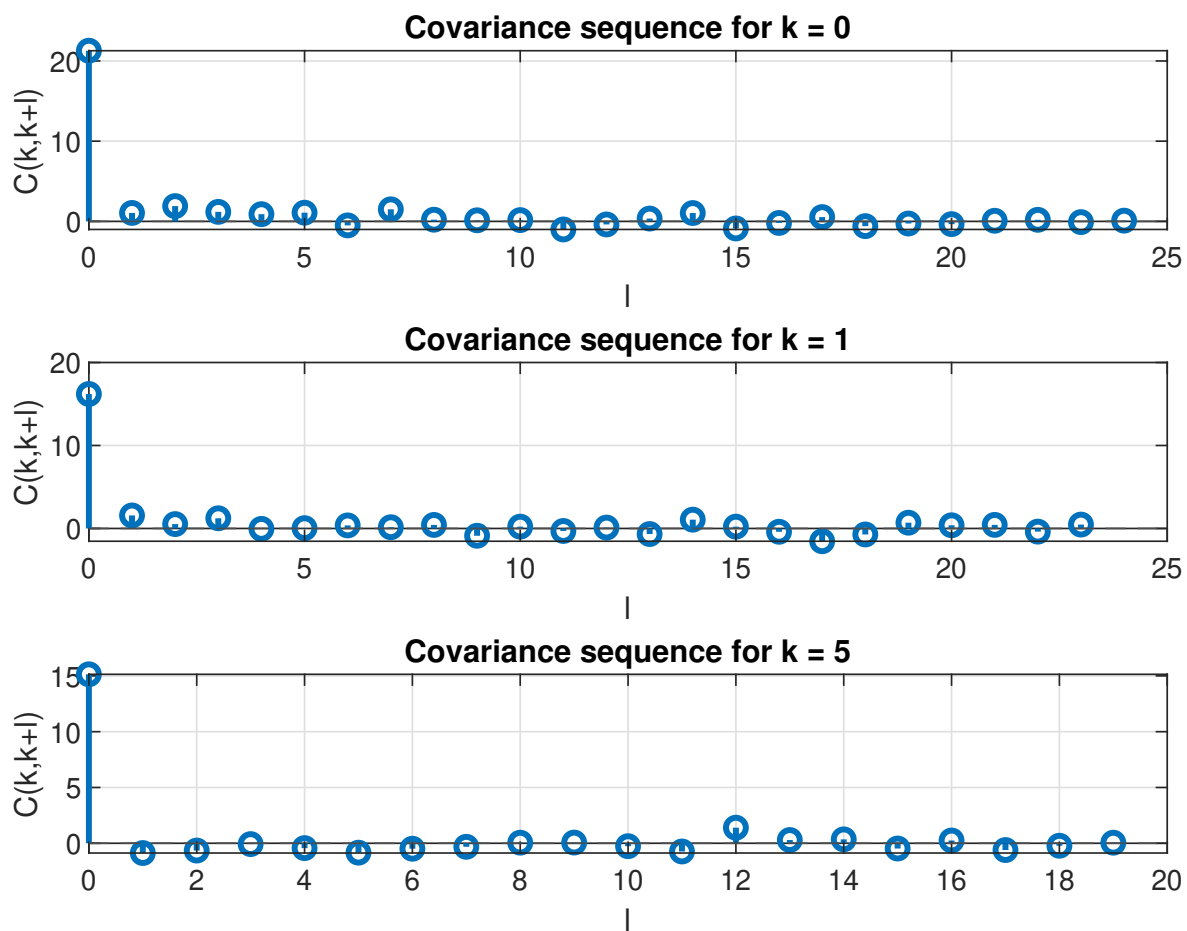


Obrázek 4: Střední hodnoty inovační posloupnosti

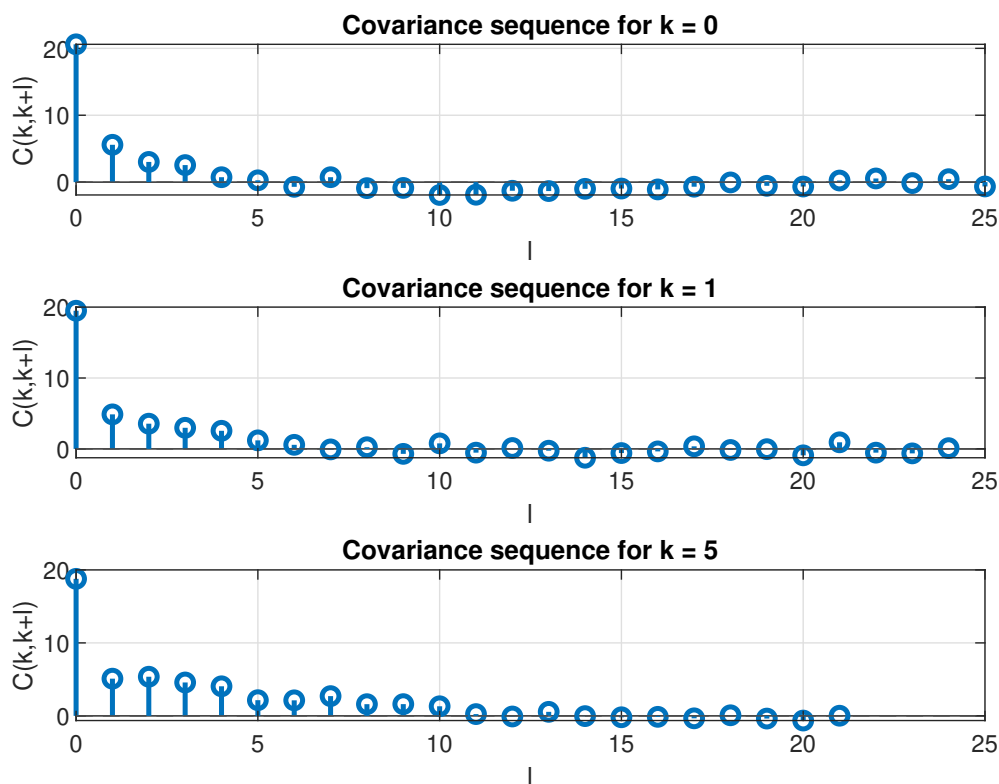
Na obrázcích 5 a 6 jsou zobrazeny odhady kovariance mezi prvky inovační posloupnosti i_k a i_{k+l} pro různé hodnoty posunu l . Grafy jsou uvedeny pro vybrané indexy $k=0,1$ a 5 , a to jak pro klasický Kalmanův filtr, tak i pro Kalmanův filtr s ustáleným ziskem.

Je patrné, že pro oba typy filtrů se hodnota kovariance výrazně liší od nuly pouze v případě, kdy $l=0$, tedy pro korelaci prvku inovační posloupnosti se sebou samým. Pro kladné hodnoty posunu $l>0$ rychle dochází k poklesu kovariance k nulovým hodnotám. Tento jev odpovídá teoretickému předpokladu, že inovační posloupnost Kalmanova filtru je bílým šumem, tj. obsahuje nekorelované náhodné veličiny.

Z porovnání obou filtrů vyplývá, že chování kovarianční struktury inovací je obdobné, což dokládá, že zavedení ustáleného zisku nezpůsobuje ztrátu této klíčové vlastnosti filtru. V ustálené fázi vykazuje Kalmanův filtr s konstantním ziskem dokonce ještě rychlejší pokles kovariance vůči nule, což potvrzuje správnou konvergenci filtru do statistického ustálení.



Obrázek 5: Kovariance mezi prvky k a $k+l$ inovační posloupnosti u Kalmanova filtru.



Obrázek 6: Kovariance mezi prvky k a $k+l$ inovační posloupnosti u Kalmanova filtru s ustáleným ziskem.

Tabulka 1 a Tabulka 2 ukazují odhady kovariance mezi prvky inovační posloupnosti pro vybrané časové okamžiky $k, l \in 0, 1, 5, 25$. Diagonální prvky představují odhady variancí inovací a mají výrazně vyšší hodnoty než prvky mimo diagonálu. To potvrzuje teoretický předpoklad, že inovační posloupnost je nekorelovaná, a tedy kovariance mezi různými časovými okamžiky je prakticky nulová.

Zároveň lze pozorovat, že výsledky klasického Kalmanova filtru a filtru s ustáleným ziskem jsou podobné, což znamená, že i při použití konstantního zisku je zachována požadovaná statistická vlastnost inovací. To potvrzuje správnou funkci obou filtrů.

k	0	1	5	25
0	20.6039	1.7440	1.1766	-0.6661
1	1.7440	18.1243	0.7158	0.2992
5	1.1766	0.7158	16.3959	-0.0478
25	-0.6661	0.2992	-0.0478	12.4978

Tabulka 1: Kalmn

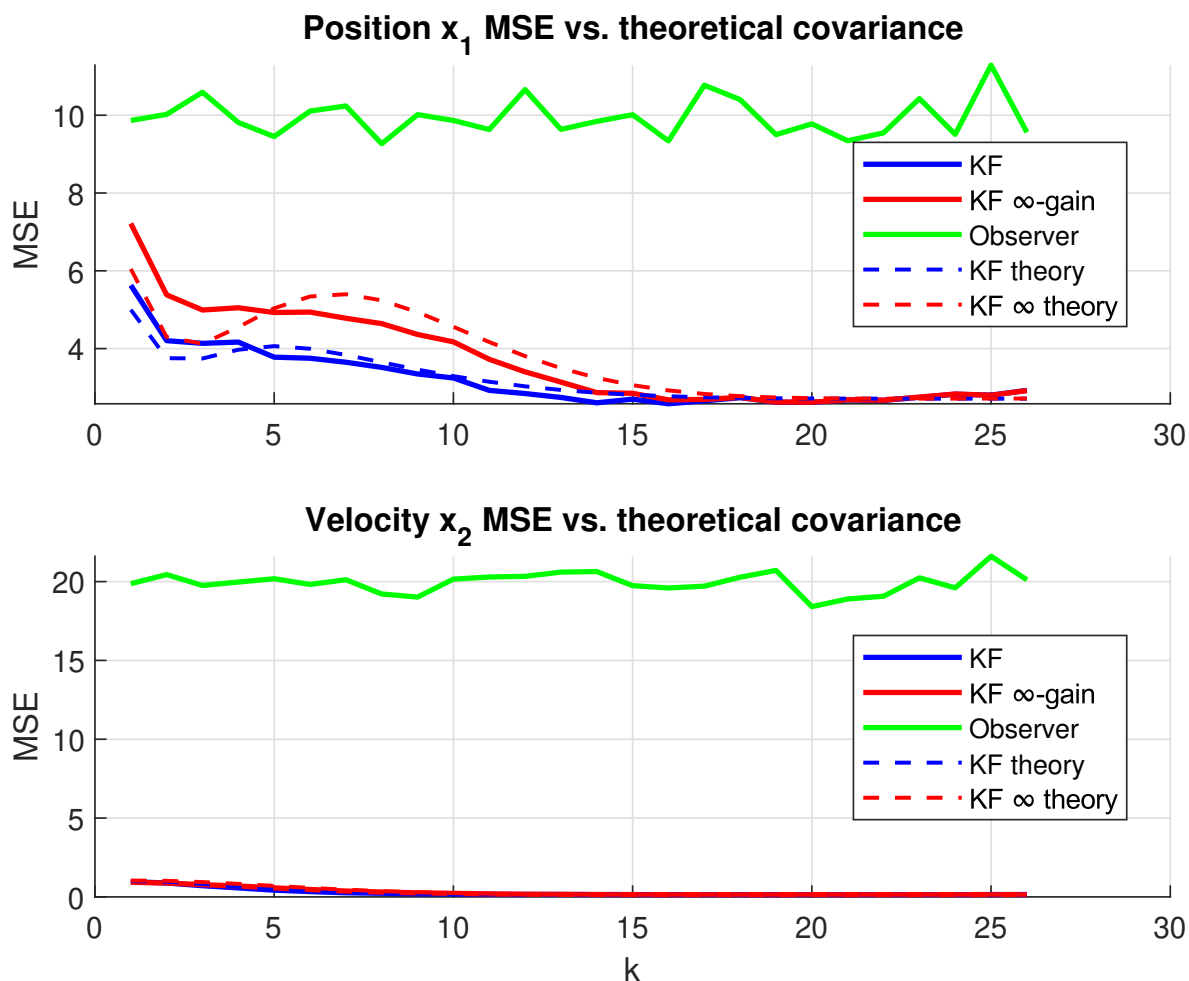
k	0	1	5	25
0	20.6039	5.5806	0.2693	-0.6498
1	5.5806	19.4882	2.5543	0.1079
5	0.2693	2.5543	18.5673	-0.0837
25	-0.6498	0.1079	-0.0837	12.5006

Tabulka 2: Kalmn inf

5 Evaluace filtru podle MSE

Na obrázku 7 je zobrazena střední kvadratická chyba (MSE) odhadu polohové a rychlostní složky stavu. Z grafů je patrné, že Kalmanův filtr vykazuje výrazně vyšší chybu u polohové složky. Tento jev byl již diskutován při analýze chyby první stavové trajektorie a souvisí s tím, že poloha je ovlivňována kumulací nepřesností v rychlostní složce.

Dále lze pozorovat, že rekonstruktor vykazuje vyšší MSE zejména u rychlostní složky, což je dáno absencí její měřicí informace. Nakonec lze konstatovat, že empiricky získané hodnoty MSE konvergují k teoreticky vypočtené chybě odhadu, což potvrzuje správnou konvergenci obou filtrů k očekávaným statistickým vlastnostem.



Obrázek 7: Střední kvadratická chyba (MSE) polohové a rychlostní složky

6 Závěr

V této práci byl analyzován lineární stochastický systém popisující pohyb objektu s náhodným zrychlením a měřenou polohou. Na tento systém byly aplikovány tři různé metody odhadu stavu: Kalmanův filtr, Kalmanův filtr s ustáleným ziskem a rekonstruktor stavu. Na základě provedených simulací a vyhodnocení bylo ukázáno, že Kalmanův filtr poskytuje nejpreciznější odhad stavu, a to zejména u rychlostní složky. Kalmanův filtr s ustáleným ziskem po přechodové fázi dosahuje obdobných vlastností, přičemž jeho výhoda spočívá v jednodušší implementaci ve stacionárním režimu.

Rekonstruktor stavu dosahoval výrazně horších výsledků. Analýza inovační posloupnosti potvrdila teoretické předpoklady – inovace jsou nekorelované a jejich empirické kovariance konvergují k teoretickým hodnotám. Stejně tak bylo doloženo sblížování empirické střední kvadratické chyby k teoretické chybě odhadu. Výsledky tedy potvrzují správnou implementaci i statistickou konzistenci použitých odhadovacích metod.