# 自适应网格(Adaptive Meshes)

在当前的计算机模拟中，网格经常使用关于要解决的问题的先验信息或在最初尝试求解后经过后验来适应求解。 在许多重要情况下，生成的网格往往具有很强的渐变性，不再简单地建模为准均匀模型。 在这里，我们提供一些基本估计，这些估计表明此类网格可以有效地逼近难题。

首先，有限元方法确实为强梯度网格提供了适当的近似值。 对逼近理论结果进行了足够的局部化，以保证与非退化网格的良好逼近。 一旦我们知道渐变网格可以提供局部优势，我们就转向预测哪里需要网格细分的问题。 误差估计器提供了这样的指导。 我们在一个简单的案例中简要介绍了一些关键思想，并证明了自适应算法的收敛性。

最后，如果生成的线性方程式条件不好，则局部近似值将丢失。 我们证明，在温和的限制下，这不会发生。在整个过程中，我们假设Ω是IR n中的有界多面体域，n≥2。 为简单起见，我们考虑发现u∈V = H 1（Ω）的变分问题，使得



其中



对于 α(x) 在 例如  对所有的 ，但是系数不必是光滑的。

# 先验估计

我们将注意力集中在单纯形网格的一个非退化族上。 假设h（x）是测量点x附近的局部网格大小的函数。 特别地，我们将假设h是满足以下条件的分段线性函数：

 (1.1)

对于每个向量x, 其中star（x）表示单纯形的并集, 对于所有的

 (1.2)

因为这适用于K的每个顶点，而h在它们之间是线性的。 此外，

 (1.3)

因为非退化网格在二维或更高维度上是局部准均匀的。 相应地，我们假设α在每个元素上都有可比的值，即

 (1.4)

注意，上式并不排除中的大跳跃，它只是暗示已选择了网格来匹配此类跳跃。 例如，有可能具有分段常数，并且（1.4）中的常数C = 1，而与的不同常数值的大小无关。

s假设V h是度数小于k的分段多项式函数的空间，并且让I h是对应的插值。 根据定理4.4.4和（9.1.1），得出



通过定义自然的“能量”（半）范数



从（2.5.10）和（9.1.4）可以得出



接下来，我们得出L 2估计。 如定理5.4.8的证明那样选择w，我们可以开发一个标准的对偶论证。 关键的新成分是乘以除以h，例如



其中λ是满足0≤λ≤2的任意参数。 4.4我们有



其中C取决于α。

这表示L 2误差可以根据平方导数误差的加权积分来估算，其中权重由网格函数（9.1.1）给出。 也可以估计“加权能量”规范，例如（9.1.9）的右侧。 由于估计值类似于Sect。 0.9和第8章，我们仅总结一个典型结果。

* 1. 误差估计器

一个成功的误差估计器是基于残差的。 我们将在一个非常简单的情况下考虑这种估计器。 为简单起见，我们假定我们的变分问题为（9.0.2）形式，其分段光滑，但不一定是连续的。 我们将考虑在n维的多面域Ω上的Dirichlet问题，以使V = H 1（Ω）。 此外，我们假设变分问题的右侧f也是分段平滑函数。

  令V h为网格T h上度数小于或等于k的分段多项式函数的空间，并假定α和f的不连续性落在T h的网格面（二维边）上。 也就是说，α和f在每个T∈T h上都是光滑的。 但是，否则，我们将仅假定T h是非简并的，因为我们要允许显着的局部网格细化。

（9.2.1）引理。 令u h∈V h为标准Galerkin逼近，令e h：= u − u h。 然后e h满足残差方程



其中R∈V'是可以通过以下公式计算的残差



一种解释这种引理的方法是说R可以由（9.2.2）或（9.2.3）等效地定义，另一种是定义的结果。 即，（9.2.2）和（9.2.3）是等价的。 尽管（9.2.3）可以看作只是对（9.2.2）的重写，但它以右侧R∈V'表示误差。

  关键是R有两个部分。 一个是绝对连续部分R A，它是在每个元素T上定义的L 1（Ω）函数，由



R定义中的另一个术语是“跳跃”术语



其中[φ] n表示φ的跳变（穿过所讨论的脸部）。 更确切地说，



因此（9.2.5）中的表达式与每个面上法线n的选择无关。证明。 关系（9.2.2）-（9.2.3）可以通过将每个T上的各个部分简单积分而得出，并将所得边界项收集在项R J中。 如果A是形式与形式（9.0.2）正式相关的微分算子，即Av：= −∇·（α∇v），那么我们看到每个T上的RA = A（u-uh）= Aeh。 我们利用∇uh是每个T的多项式的事实，以及关于α和f的假设。

在（9.2.2）中插入v = e h，我们看到



因此



因此，我们发现可以仅通过计算残差的H -1（simply）范数来估计误差，并且我们注意到，残差仅涉及问题数据（f和α）和u h。 尽管所有这些都是明确可用的，但是有两个并发症。 首先，很难明确地计算出一个负范数。 相反，我们将对其进行估计。 此外，由于R具有两个截然不同的部分，一个是可积分函数，另一个是“界面Delta函数”，所以估计这两项的组合是有挑战性的。

残留物具有特殊的性质。 特别是，基本正交性意味着



假设我们有一个Sect中定义的插值I h。 4.8满足



对于所有T∈T h和



对于某些常数γ0和T h中的所有面e，其中T（respont T）表示接触T的元素的邻域（res T. e）。 对于每个内部面e，让T e表示共享该面的两个元素的并集。 从现在开始，当指代标准n到e时，我们将删除下标“ e”。 然后





其中，h e（rest。h T）是e（resp。T）大小的度量。 因此，我们通过以下方式定义本地错误指示器E e



其中h K的自然选择（K = T或e）是将K提升为幂1 / dim（K）的度量。 有了这个定义，以前的不等式可以总结为



鉴于（9.2.6），这意味着



其中γ是仅与插值误差有关的常数。

  请注意，我们已选择根据“边缘”（或“面部”）角度定义局部误差估计量。 事实证明，这在描述下限估计时更为方便（请参见第9.3节）。 但是，也可以采取一种“元素”的观点，即



这将提供相似的结果。

  返回（9.2.13），我们取γ= c 0γ0，其中c 0仅取决于（9.1.3）中的常数和元素T中元素K的最大邻居数。 因此，c 0仅取决于网格T h的非简并性。

  总结这些论点，我们证明了以下内容。

**（9.2.15）定理。** 假设（9.0.2）中的系数α和右侧f在非退化网格族T h上都是分段光滑的。 在（9.2.9）和（9.2.10）的假设下，上限（9.2.13）成立，其中γ仅取决于网格T h的非简并性，而α0是on上α的下限 。

* 1. 局部误差估计

在上一节中，我们确定了全局误差| e h | H 1（Ω）以局部定义的误差估计量（9.2.11）表示。 询问局部估计量（9.2.11）与局部误差之间的相关性是合理的。 在相当普遍的条件下，有可能在一个方向上建立不平等。 首先，请注意，对于任何T∈T h，（9.2.2）暗示



因此



我们需要某种方法来控制α和f的信息含量，以便得出严格的估计。 因此，我们假设α和f分别是度分别为r-k + 2和r的分段多项式（不一定是连续的）。 因此，RA是一个至多r的分段多项式。 可以由同质性参数证明（有关证明，请参见练习9.x.5），对于度为r的多项式P



其中c r仅取决于度r和网格的块状性。 将其应用于P = R A证明



我们可以获得涉及跳转项的相似边界。 再次，使之前的假设暗示R A最多为r的分段多项式。 请注意，对于T h中的任何面e，（9.2.2）暗示



其中T e表示两个元素T e +和T e-的并集，共享e，并且



那么





由于[αn·∇uh] n是e上至多r + 1的度的多项式，因此可以看出（参见练习9.x.7）



其中c r'> 0仅取决于r和T h的非简并常数。 结合这些估计值可以证明



其中c> 0仅取决于T h的非简并常数。收集这些论点，我们证明了以下内容。

（9.3.6）定理。 假设α和f是在非退化网格T h上分别分别为r-k + 2和r的次数的分段多项式（不一定是连续的）。 然后，T h中所有面e的下界（9.3.5）成立，其中c仅取决于r和网格Th的非简并性，而α1是α上α的上限。

该定理的一个推论是（9.2.13）的逆不等式，即全局下界。 对下限（9.3.5）进行平方并对所有元素求和得出以下结果。

（9.3.7）定理。 假设α和f与定理9.3.6相同。 然后α1 | e h | H 1（Ω）≥c ∑ E e（u h）2（）1/2 e∈T h其中c> 0和α1符合定理9.3.6。

  与（9.3.5）的反向不等式，即局部上限通常是不正确的。 但是，局部下界（9.3.5）的信息是，无论局部误差指示器E e（u h）较大，都应定义网格。 不幸的是，我们不能确定误差很小的地方一定会很小。 即使错误指示符E e（u h）在附近很小，遥远的影响也会污染错误并使错误增大。

* 1. 收敛自适应算法

我们可以使用第9.2节中的误差估计器来定义针对变分问题（9.0.1）的自适应算法（Mekchay和Nochetto 2005），其中a（·，·）由（9.0.2）定义，而α（x）为 假设是Lipschitz在continuous上连续的。 该算法将从有限元空间V j中生成Ω的三角剖分的非简并序列{T j} j≥1以及相应的Galerkin近似u j至u，该有限元素空间V j由程度小于或等于k的分段多项式函数组成。 证明算法收敛的关键因素是网格连续两个连续级别上有限元解决方案之间的某些关系。

  令Tj和Tj + 1为{Tj} j≥1的两个连续的三角剖分，因此Tj + 1是Tj的精炼。 我们假设存在一个正常数0 <γ1 <1，使得



代替定理9.3.7（要求α和f是分段多项式函数），我们将使用涉及R A，j振荡的局部误差估计，其中包括下标j表示与u j相对应的误差估计。 令Q j是相对于三角剖分T j到（不连续）阶多项式k-1的分段多项式空间上的L 2正交投影。 我们定义



其中h T =直径T，并且





引理。 假设元素T∈T j在其内部包含一个T j + 1的节点。 那我们有



其中，正常数C仅取决于{T j} j≥1的形状规则，α（x）的上限α1和（9.5.1）中的常数γ1。

  证明。 设p是在T内部的T j + 1的一个节点，并且ζ是相对于T j + 1的分段线性函数，该线性函数在p处等于1，在所有其他节点处等于0。 则v =ζQ j R A，j属于V j + 1，并且在T的外部相同地消失。特别地，v在T j的所有面上消失。 它遵循（9.2.2）-（9.2.4）和练习9.x.18，



在此和下方，C是通用正常数，取决于{T j} j≥1的形状规则以及常数γ1和α1。 鉴于（9.5.1）和逆估计（4.5.4），



因此，鉴于（9.5.2），



（9.5.11）结论。 根据引理9.5.8的假设，我们有



其中正常数C仅取决于{T j} j≥1的形状规则，α（x）的上下边界α1和α0以及（9.5.1）中的常数γ1。请注意，我们可以使用Galerkin正交性来写



因此，∥u j + 1 − u j∥E衡量整体能量误差的减小。 由于osc j（T）对于足够光滑的数据很小，推论9.5.11表明，误差估计器E e（u j）提供了局部的估计，以减小Tj时的能量误差。 此外，下面的示例（Morin，Nochetto和Siebert 2000）显示，在Lemma 9.5.3和Lemma 9.5.7中需要新的内部节点的条件对于通过网格细化减少能量误差是必要的。

例。 考虑单位平方Ω=（0，1）×（0，1）且α= 1 = f的变分问题（9.0.1）。 令T 1为绘制两个对角线而获得的the的三角剖分（参见图9.1），并使用两个（1 / 9.1）从T 1的两个最新顶点对分中获得三角剖分T 2（参见图9.1）。 2，1/2）作为T 1的最新顶点。 那么，与T 1相关的分段线性有限元求解的u 1与与T 2相关的分段线性有限元求解的u 2相同。 涉及简单计算的证明保留为练习（请参阅练习9.x.19）。 请注意，在此示例中，osc 1（Ω）= 0 = u 2 − u 1∥E，这表明如果网格未正确定义，则引理9.5.3和引理9.5.7不成立。

令T 1是given的给定初始三角剖分，并且0 <θ1，θ2 <1。自适应算法，由以下形式的循环组成

求解-→估计-→标记-→重读，

定义如下。

对于j = 1，2，。 。 。 直到收敛

* 计算uj∈V j



计算T j的所有内表面e的E e（u j）和所有元素T∈T j的osc j（T）。

令F j为T j的内表面集合。 选择Fj的子集F



并选择T j的子集T j  


* 细化Tj以获得Tj + 1，以便（i）维持⌃j三角剖分的非简并性;（ii）F中的每个面在其内部都包含T j + 1的节点,,（iii）如果e∈ F j是T∈T j的一个面，则T在其内部包含一个T j + 1的节点，并且T re的细化满足条件（9.5.1），（iv）所有T∈T j的细化 满足γ2 <1的条件（9.5.15）。

其中h K的自然选择（K = T或e）是将K提升为幂1 / dim（K）的度量。 有了这个定义，以前的不等式可以总结为

**9.6有限元方程的条件**

到目前为止，我们仅解决了使用高度精炼的网格的近似质量问题。 但是，如果较大的网格变化导致相应的线性系统（参见第0.2节）在某种意义上退化，该怎么办？ 在本章的其余部分中，我们表明，只要满足对网格的某些限制并且使用基本函数的自然缩放比例，就可以在本地对网格进行细化时发生这种情况。 许多材料来自（Bank＆Scott 1989）。

  可以根据系统的条件数来估计用于求解此类线性系统的迭代方法（例如共轭梯度方法）的收敛性质（参见Luenberger 1973）。 可以使用条件数来估计解对右侧扰动的敏感度，而直接方法（例如高斯消除）的误差范围也暗示了病态系统的性能下降（参见Isaacson和Keller 1966） 。 因此，如果没有进一步的论据，仅对病态系统使用标准的直接方法将不是一种补救措施。 幸运的是，随着网格的细化，有限元方法线性系统的条件数不必降低到不可接受的程度。

  我们要考虑的一个特殊设置是网格的定义（可能是自适应的），以解决在域边界上的角点或微分方程系数的不连续点处出现的奇点。 天真地看起来，由于大的网格比率，线性系统的特征值比率会很大（这意味着条件数很大）。 但是，我们表明，如果使用有限元基础函数的自然缩放并且网格不退化，则情况并非如此（定义4.4.13）。

  在大小为h的规则网格上，使用反估计可以轻松地将二阶椭圆边值问题的有限元方程的条件数视为O（h -2）（请参见第4.6节）。 另外，在这种情况下的自由度数N为O（h -n）。 因此，条件数可以按照自由度的数量表示为O（N 2 / n）。 在n≥3的情况下，我们将证明对于非退化网格，条件数以O（N 2 / n）为边界。 在n = 2的情况下，条件数的估计值基本上根据最大和最小网格尺寸的比值，以对数因子略微增加。

我们考虑（9.0.2）中形式的变分问题。 现在我们写T h = T N来关注作为关键参数的元素数量，而不是网格尺寸。 令V N表示相应的有限元素空间。 让我们将变分方程（9.0.2）写为利用V N特定基础的矩阵方程。 具体来说，假设{ψi：i = 1，···，N}是V N的给定基础，并通过定义矩阵A和向量F



令u N表示标准变分问题（2.5.7）的解，其形式为V N（9.0.1）。 那么这个问题就等于解决了



其中且。 现在，我们基于VN给出条件，并基于{ψi：i = 1，···，N}来保证A的条件数表现良好。

* 1. 条件编号的界线

现在，我们给出矩阵A的条件数的界：（a（ψi，ψj）），其中{ψi：i = 1，···，N}是VN的（缩放）基础，由 我们的假设（并在前面的示例中进行了明确定义）。 这些结果在解决AX = F的共轭方法的收敛速度上的应用将在Sect中给出。 9.8。 我们从n≥3的一般情况开始。

两个引理

* 1. 共轭梯度法的应用

用于求解AU = F形式的线性系统的共轭梯度方法是一种迭代方法，其收敛性可以根据条件数A进行估算（参见Luenberger 1973）。 具体来说，定义



并让U（k）表示从U（0）= 0开始的通过共轭梯度方法生成的向量的序列。



其中U表示AU = F的解。这可以根据V上的范数轻松解释。 在V上定义能量范数



然后可以写出以上估计



该估计值表明，为了减小相对误差′a，假设对于某些q <∞我们仅要求= O（N -q）。 在n≥3维中，以上估计表明，仅O（N 1 / n log N）次迭代后即可达到此精度等级。 在二维上，以上估计变得稍微复杂一些。 在典型的应用中，即使有非常严格的改进，对于某些p <∞，我们也有h min = O（h max p）= O（N -p / 2），如下所述。 在这种情况下，以上估算表明，仅经过O（N 1/2（log N）2）次迭代即可实现O（）精度。

每个共轭梯度迭代都需要O（N）次操作。 因此，如前所述，对精制网格上的共轭梯度法的最终工作估计将是:



在n≥3维中。 多网格方法的工作估算为O（N）个操作。 因此，似乎随着n的增加，多重网格在共轭梯度迭代上的相对优势会降低。 但是，通常N也可能随n增加。 与直接方法的比较在（Bank＆Scott 1989）中给出。