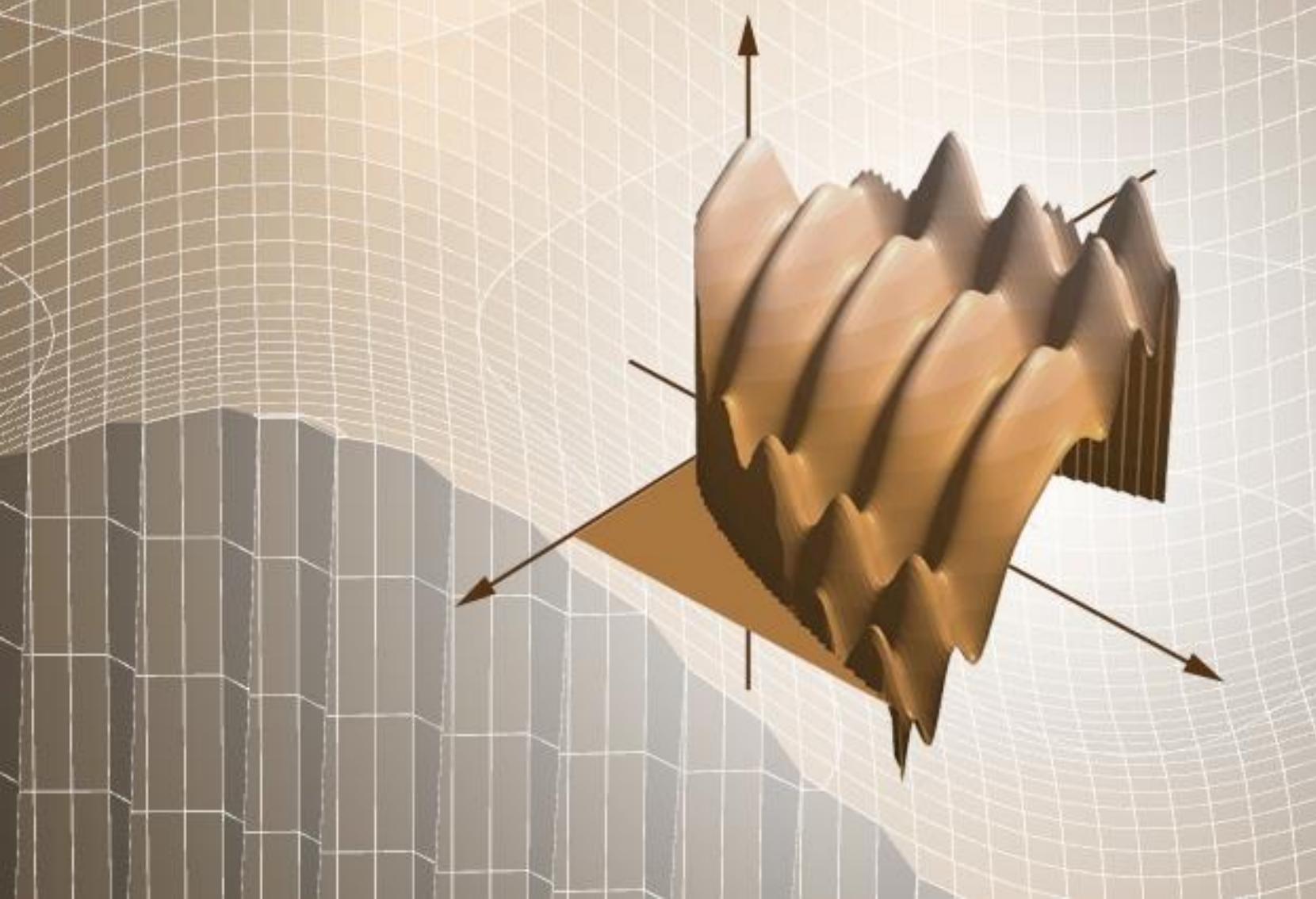


**М. А. Ляшко
Е. А. Бекетова**

ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ
Excel



Балашовский институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского»

М. А. Ляшко, Е. А. Бекетова

Численные методы в *Excel*

*Учебно-методическое пособие
для студентов вузов*

Балашов
2012

**УДК 519.6
ББК 32.97+я73
Л97**

*Рецензенты:
кандидат технических наук,
начальник отдела организации учебного процесса Балашовского филиала
ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный аграрный университет им. Н. И. Вавилова»,
доцент кафедры естественнонаучных и гуманитарных дисциплин БФ СГАУ
доцент Т. А. Хвалько;*

*кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры физики и информационных технологий БИ СГУ
доцент О. А. Кузнецов.*

*Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
Балашовского института (филиала) ФГБОУ ВПО «Саратовский
государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»*

Ляшко, М. А.

Л97 Численные методы в Excel: учеб.-методич. пособие для студентов вузов / М. А. Ляшко, Е. А. Бекетова; под общ. ред. М.А.Ляшко. — Балашов : Николаев, 2012. — 240 с.
ISBN 978-5-94035-477-2

Пособие состоит из шестнадцати лабораторных работ, охватывающих основные численные методы алгебры, математического анализа, обработки результатов эксперимента и приложения этих методов. Каждая работа содержит необходимый теоретический материал, программы рассмотренных численных методов в *Excel*, примеры, приложения, задания для самостоятельной работы.

Пособие рассчитано, прежде всего, на студентов специальностей и направлений, в учебные планы которых входит дисциплина «Численные методы». Оно может быть полезно также при самостоятельном изучении рассмотренных разделов математики.

**УДК 519.6
ББК 32.97+я73**

ISBN 978-5-94035-477-2

© М. А. Ляшко, Е. А. Бекетова, 2012

Содержание

Предисловие.....	4
Лабораторная работа № 1. Решение уравнений с одной переменной. Метод половинного деления	5
Лабораторная работа № 2. Решение уравнений с одной переменной. Метод касательных (метод Ньютона)	14
Лабораторная работа № 3. Решение уравнений с одной переменной. Метод итераций.....	26
Лабораторная работа № 4. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений: метод Гаусса, метод Крамера, метод обратной матрицы.....	40
Лабораторная работа № 5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом простой итерации и методом Зейделя	58
Лабораторная работа № 6. Приложения систем линейных алгебраических уравнений: линейная модель многоотраслевой экономики (модель Леонтьева)	68
Лабораторная работа № 7. Интерполяирование функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа	81
Лабораторная работа № 8. Интерполяирование функций. Интерполяционный многочлен Ньютона	93
Лабораторная работа № 9. Численное дифференцирование.....	104
Лабораторная работа № 10. Численное интегрирование	117
Лабораторная работа № 11. Численное интегрирование. Метод двойного счета	135
Лабораторная работа № 12. Численное решение задачи Коши 1-го порядка	143
Лабораторная работа № 13. Численное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений	167
Лабораторная работа № 14. Метод наименьших квадратов обработки экспериментальных данных. Линейная модель. Полиномиальная модель	185
Лабораторная работа № 15. Метод наименьших квадратов. Нелинейная модель. Числовые характеристики адекватности математической модели	202
Лабораторная работа № 16. Поиск экстремума функции нескольких переменных. Метод градиентного спуска	218
Список литературы	239

Лабораторная работа № 1

Решение уравнений с одной переменной. Метод половинного деления

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

и точное значение корня ξ принадлежит отрезку $[a; b]$, причем отрезок $[a; b]$ содержит единственный корень уравнения (1.1). В этом случае говорят, что корень уравнения (1.1) *отделен* на отрезке $[a; b]$. Требуется вычислить ξ приближенно с точностью ε , то есть получить такое значение x , для которого гарантированно выполняется неравенство

$$|x - \xi| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

Для реализации метода половинного деления непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ должна удовлетворять следующим двум условиям:

- 1) на концах отрезка $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает значение разных знаков, то есть

$$f(a) \cdot f(b) < 0, \quad (1.3)$$

что гарантирует существование внутри $[a; b]$ хотя бы одного корня (рис. 1.1);

- 2) функция $f(x)$ монотонна на отрезке $x \in [a; b]$, что при выполнении условия 1 гарантирует единственность корня (рис. 1.2).

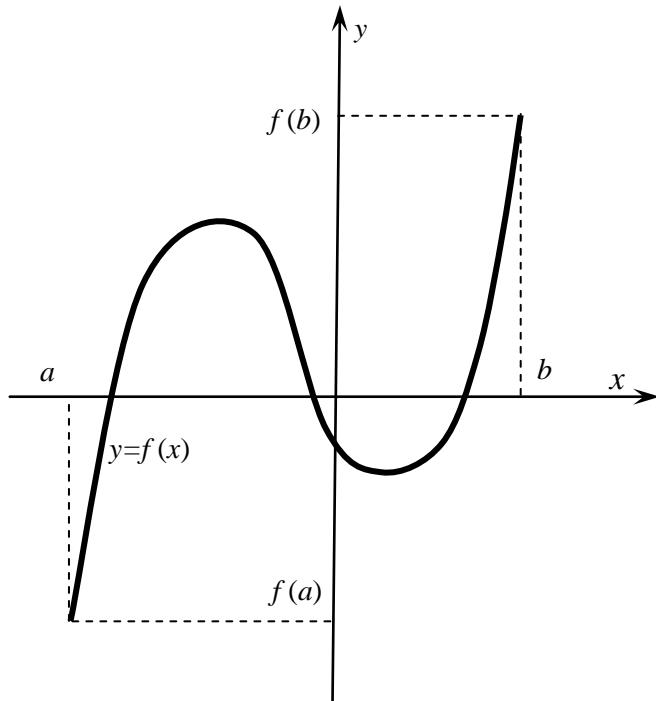


Рис. 1.1. Существование корня функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$

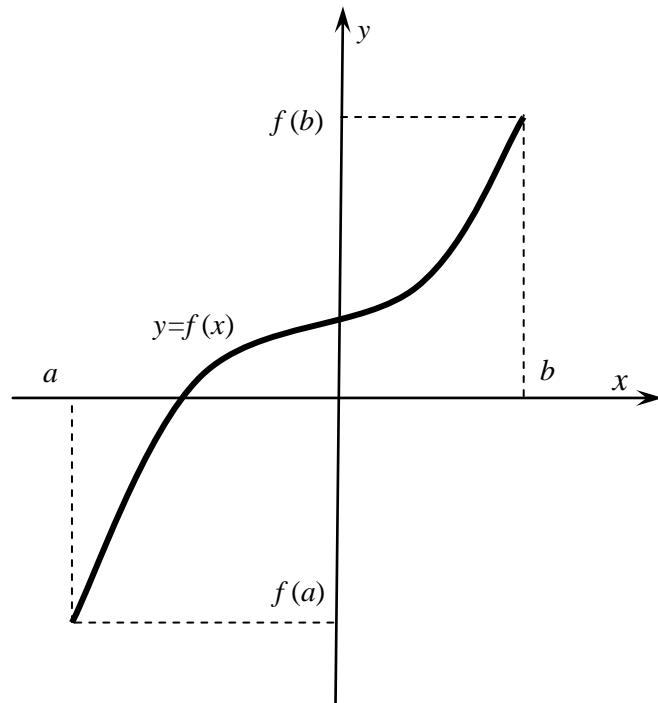


Рис. 1.2. Единственность корня на отрезке $[a; b]$
при условии монотонности $f(x)$

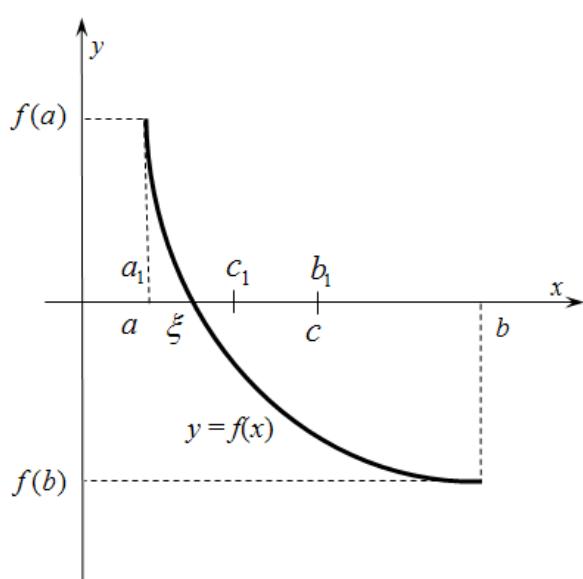


Рис. 1.3. Метод половинного деления

Метод половинного деления состоит в построении стягивающейся последовательности вложенных отрезков

$$[a; b] = [a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots \quad (1.4),$$

концы которых удовлетворяют условию (1.3):
 $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0, n = 0, 1, 2, \dots$

Алгоритм метода состоит в следующем.
 За начальное приближение корня c принимаем середину отрезка $[a; b]$: $c = \frac{a+b}{2}$. Далее исследуем значение функции $f(x)$ на концах отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$, то есть в точках a, c, b . Тот отрезок, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, принимаем за новый отрезок $[a_1; b_1]$, содержащий искомый корень. Вторую половину исходного отрезка, где знак функции не меняется, отбрасываем.

Случай $f(c) = 0$ рассматривать не будем. За первое приближение принимаем теперь середину нового отрезка $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, и снова из двух половин выбираем ту, на которой функция меняет знак и так далее (рис. 1.3). Таким образом, n -е приближение c_n вычисляется как $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Длина отрезка $[a_n; b_n]$ равна $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ и за счет увеличения n может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, система вложенных отрезков (1.4) являет-

ся стягивающейся и по теореме Кантора имеет единственную общую точку, а по выбору отрезков это и есть точка ξ — точное значение корня.

Погрешность метода — расстояние между приближенным значением корня c_n и его точным значением ξ , то есть $|c_n - \xi|$. Деление отрезка пополам надо продолжать до тех пор, пока расстояние $|c_n - \xi|$ не станет меньше заданного ε . Из геометрических соображений ясно, что $|c_n - \xi| \leq \frac{b_n - a_n}{2}$. Значит, если $\frac{b_n - a_n}{2}$ станет меньше ε , то и погрешность станет меньше ε . Иными словами, процесс деления отрезка пополам стоит продолжать до тех пор, пока половина длины очередного отрезка не станет меньше заданного ε , тогда и $|c_n - \xi|$ будет точно меньше ε . Значит, с помощью последовательности $\{c_n\}$ можно вычислить значение корня ξ с любой точностью ε .

Найдем количество шагов, необходимое для достижения заданной точности ε :

$$\begin{aligned} |c_n - \xi| &\leq \frac{b_n - a_n}{2} < \varepsilon, \\ \frac{b_n - a_n}{2} &= \frac{b - a}{2^n \cdot 2} = \frac{b - a}{2^{n+1}} < \varepsilon, \\ \frac{2^{n+1}}{b - a} &> \frac{1}{\varepsilon}, \\ 2^{n+1} &> \frac{b - a}{\varepsilon} = 2^{\log_2 \frac{b - a}{\varepsilon}}, \\ n &> \log_2 \frac{b - a}{\varepsilon} - 1. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Иными словами, на шаге (половинном делении), номер которого больше $\log_2 \frac{b - a}{\varepsilon} - 1$, получим заданную точность.

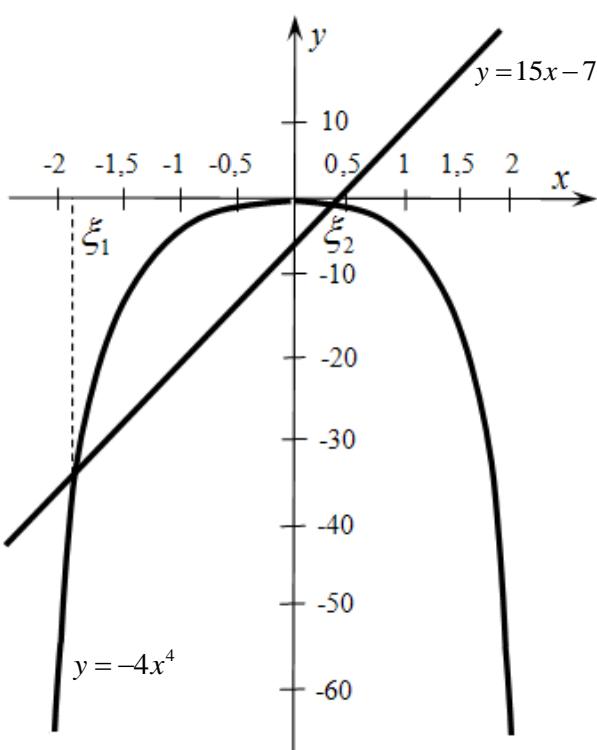


Рис. 1.4. Эскизы графиков функций

Пример 1. Отделить все корни уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ на отрезке $[-3; 3]$ и уточнить каждый корень методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Отделим корни уравнения. Для этого найдем точки пересечения графиков $y = -4x^4$ и $y = 15x - 7$. Нарисуем примерные эскизы графиков функций и приблизительно определим отрезки, которым принадлежат точные значения корней исходного уравнения (рис. 1.4). Из рисунка видим, что $\xi_1 \in [-2; -1.5]$ и $\xi_2 \in [0; 0.5]$. Действительно, $f(-2) = -4 \cdot (-2)^4 - 15 \cdot (-2) + 7 = -27 < 0$, $f(-1.5) = -4 \cdot (-1.5)^4 - 15 \cdot (-1.5) + 7 = 9,25 > 0$, $f(0) = -4 \cdot 0^4 - 15 \cdot 0 + 7 = 7 > 0$, $f(0.5) = -4 \cdot (0.5)^4 - 15 \cdot 0.5 + 7 = -0,75 < 0$.

По графикам видно, что корня два, но в более сложных случаях надо проводить дополнительное исследование, выясняя знак производной и устанавливая промежутки монотонности.

Найдем промежутки монотонности функции $f(x) = -4x^4 - 15x + 7$:

$f'(x) = -16x^3 - 15$, $-16x^3 - 15 = 0$ при $x = \sqrt[3]{15/16} = \sqrt[3]{0,9375}$, и $f'(x) > 0$ при $x < \sqrt[3]{0,9375}$, $f'(x) < 0$ при $x > \sqrt[3]{0,9375}$. Значит, на отрезке $[-2; -1,5]$ функция $f(x)$ монотонно возрастает, а на отрезке $[0; 0,5]$ — монотонно убывает, и каждый из этих отрезков содержит единственный корень уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$. Поскольку производная функции меняет знак только один раз, других корней нет.

По-другому отделить все корни уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ на отрезке $[-3; 3]$ можно, построив таблицу значений функции $f(x) = -4x^4 - 15x + 7$ в Microsoft Excel. Приведем алгоритм построения таблицы.

1. В строке 1 выполним подписи столбцов таблицы (рис. 1.5).
2. В ячейку A2 внесем начальное значение $x = -3$, а в ячейку B2 введем формулу зависимости функции f от аргумента x , значение которого находится в ячейке A2: «= -4*A2^4 - 15*A2 + 7» (рис. 1.5).
3. В ячейке E1 будет храниться шаг таблицы h , в D1 — подпись «h=» (рис. 1.6).
4. Внесем в A3 формулу вычисления текущего значения аргумента x как суммы предыдущего значения x и шага h , зафиксировав перед копированием вниз адрес ячейки со значением шага: «=A2+\$E\$1» (рис. 1.6).

	A	B	C
1	x	$f(x)$	
2	-3	= -4*A2^4 - 15*A2 + 7	
3			

Рис. 1.5. Вычисление значения $f(x)$

	A	B	C	D	E
1	x	$f(x)$			
2	-3	-272			
3	=A2+\$E\$1				
4					

Рис. 1.6. Формула значения аргумента

5. Копируем формулу из A3 вниз, пока не получим в одной из ячеек число 3. В случае $h = 0,5$ значение $x = 3$ находится в A14 (рис. 1.7).
6. Аналогично копируем формулу из ячейки B2 вниз. В итоге получим таблицу значений функции $f(x)$ от x на отрезке $[-3; 3]$ (рис. 1.8).

В пунктах 1–6, рассмотренных выше, реализована **программа** построения таблицы заданной функции $y = f(x)$ на заданном отрезке с заданным шагом в среде табличного процессора Microsoft Excel.

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-3	-272
3	-2,5	
4	-2	
5	-1,5	
6	-1	
7	-0,5	
8	0	
9	0,5	
10	1	
11	1,5	
12	2	
13	2,5	
14	3	
15		
16		

Рис. 1.7. Столбец аргумента

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-3	-272
3	-2,5	-111,75
4	-2	-27
5	-1,5	9,25
6	-1	18
7	-0,5	14,25
8	0	7
9	0,5	-0,75
10	1	-12
11	1,5	-35,75
12	2	-87
13	2,5	-186,75
14	3	-362
15		
16		

Рис. 1.8. Столбец функции

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-3	-272
3	-2,5	-111,75
4	-2	-27
5	-1,5	9,25
6	-1	18
7	-0,5	14,25
8	0	7
9	0,5	-0,75
10	1	-12
11	1,5	-35,75
12	2	-87
13	2,5	-186,75
14	3	-362
15		
16		

Рис. 1.9. Отрезки с корнями

Изменяя начальное значение x и шаг h в ячейках A2 и E1, можно получать различные части таблицы рассматриваемой функции. На основе имеющейся таблицы с помощью меню **Вставка — Диаграмма** можно построить график функции.

Замечаем из таблицы, что непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезков $[-2; -1,5]$ и $[0; 0,5]$ (рис. 1.9). По теореме о существовании корня непрерывной функции имеем, что внутри полученных отрезков существует хотя бы один корень уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$.

После того, как отделены корни (то есть выявлены все отрезки, содержащие ровно по одному корню), можно приступать к реализации алгоритма метода половинного деления.

Рассмотрим $\xi_1 \in [-2; -1,5]$. Найдем несколько приближений к корню, оценим погрешность последнего и составим программу вычисления приближенного значения корня с заданной точностью в *Excel*.

Следуя алгоритму метода половинного деления, в качестве начального приближения к корню выбираем середину отрезка: $c = \frac{-2 - 1,5}{2} = -1,75$. Находим значения функции $f(x) = -4x^4 - 15x + 7$ на концах полученных отрезков $[-2; -1,75]$ и $[-1,75; -1,5]$:

$$f(-2) = -4 \cdot (-2)^4 - 15 \cdot (-2) + 7 = -27 < 0,$$

$$f(-1,75) = -4 \cdot (-1,75)^4 - 15 \cdot (-1,75) + 7 \approx -4,26 < 0,$$

$$f(-1,5) = -4 \cdot (-1,5)^4 - 15 \cdot (-1,5) + 7 = 9,25 > 0.$$

Получаем, что надо отбросить отрезок $[-2; -1,75]$, так как на его концах функция принимает значения одного знака. Таким образом, $\xi_1 \in [-1,75; -1,5]$. Снова делим отрезок пополам:

$$c_1 = \frac{-1,75 - 1,5}{2} = -1,625$$

и находим значения функции $f(x)$ на концах полученных отрезков $[-1,75; -1,625]$ и $[-1,625; -1,5]$: $f(-1,75) \approx -4,26 < 0$, $f(-1,625) \approx 3,48 > 0$, $f(-1,5) = 9,25 > 0$. Следуя методу, отбрасываем отрезок $[-1,625; -1,5]$. Теперь $\xi_1 \in [-1,75; -1,625]$. Погрешность

$c_2 = \frac{-1,75 - 1,625}{2} = -1,6875$ не превосходит $\frac{-1,625 - (-1,75)}{2} = 0,0625$, но гарантировать, что

она меньше $\varepsilon = 10^{-3}$ нельзя. Вычисления необходимо продолжить.

Используем формулу (1.5) для расчета количества шагов, необходимых для достижения точности $\varepsilon = 10^{-3}$, и увидим, сколько вообще делений пополам предстоит сделать:

$$n > \log_2 \frac{|-2 - (-1,5)|}{10^{-3}} - 1 = \log_2 500 - 1 \approx 8,966 - 1, n \geq 8.$$

Это результат говорит о том, что середина 8-го отрезка будет иметь заданную точность $\varepsilon = 10^{-3}$.

Реализуем метод половинного деления в *Excel*. Укажем последовательность шагов, приводящих к получению работоспособной программы.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи: в столбце А будет храниться левый конец каждого отрезка из системы вложенных отрезков $[a; b] = [a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$, в столбце В — его правый конец, а в С — середина, в столбцах D, E, F — соответствующие значения функции, в столбце G — погрешность (рис. 1.11—1.18).

2. В ячейки A2 и B2 введем соответственно значения концов отрезка $[a; b] = [-2; -1,5]$ (рис. 1.10).

3. В ячейку C2 вводим формулу «=(A2+B2)/2» и нажимаем **Enter** (рис. 1.10). Получаем значение $-1,75$, что соответствует середине отрезка.

	A	B	C	
1	a	b	c	
2	-2	-1,5	= $(A2+B2)/2$	
3				

Рис. 1.10. Значения концов отрезка

	A	B	C	D	E
1	a	b	c	f(a)	f(b)
2	-2	-1,5	-1,75	= $4*A2^4-15*A2+7$	
3					

Рис. 1.11. Формула вычисления значения функции

4. Далее необходимо найти значение функции $f(x)$ на концах отрезков $[a; c] = [-2; -1,75]$ и $[c; b] = [-1,75; -1,5]$. В ячейку D2 внесем формулу вычисления $f(a)$: «= $4*A2^4-15*A2+7$ » (рис. 1.11) и скопируем эту формулу вправо на два столбца E и F для получения $f(b)$ и $f(c)$ (рис. 1.12).

	A	B	C	D	E	F	
1	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	
2	-2	-1,5	-1,75	-27	9,25	-4,26563	
3							

Рис. 1.12. Вычисление значений функции на концах и в середине отрезка

5. Теперь нужно определить, на концах какого из двух отрезков — $[a; c]$ или $[c; b]$ — функция $f(x)$ принимает значения разных знаков, то есть соответственно $f(a)f(c) < 0$ или $f(c)f(b) < 0$. Выбранный отрезок принимаем за новый отрезок $[a_1; b_1]$, в котором содержится искомый корень и концы которого помещаем в ячейки A3 и B3 соответственно. Логические рассуждения здесь таковы: если $f(a)f(c) < 0$ (рис. 1.13), то в ячейку A3 в качестве a_1 надо поместить левый конец предыдущего отрезка a , то есть значение из A2, иначе (рис. 1.14) в ячейку A3 в качестве a_1 надо поместить середину c , то есть значение из C2.

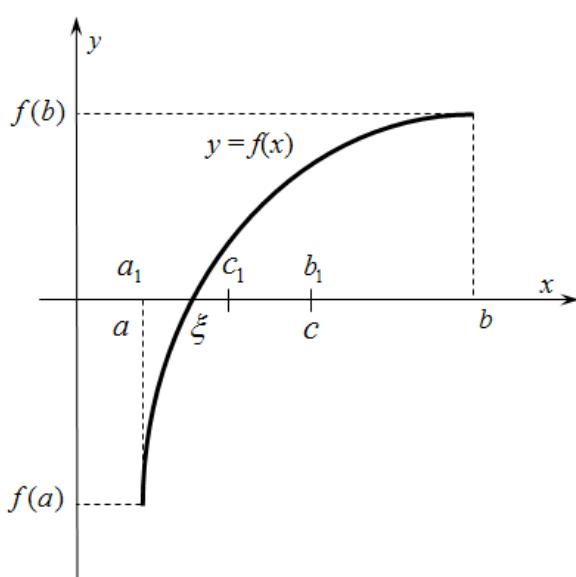


Рис. 1.13. Смена знака на левой половине

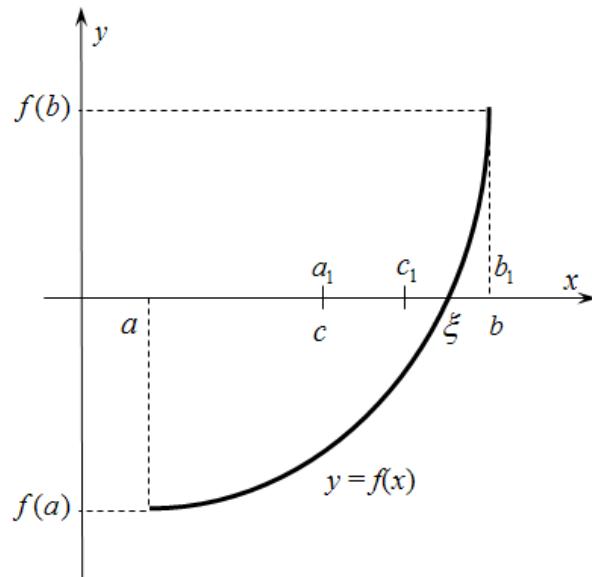


Рис. 1.14. Смена знака на правой половине

В Excel имеется встроенная логическая функция ЕСЛИ:

ЕСЛИ(Лог_выражение;Значение_если_истина;Значение_если_ложь).

В ячейку A3 вводим формулу «=ЕСЛИ(D2*F2<0;A2;C2» (рис. 1.15). Результат функции ЕСЛИ объясняется так: если функция $f(x)$ принимает на отрезке $[a; c]$ значения разных знаков ($D2*F2 < 0$ — логическое выражение), тогда a_1 — левый конец нового отрезка $[a_1; b_1]$ — будет равно a (значение из ячейки A2, если истина), иначе $a_1 = c$ (значение из ячейки C2, если ложь).

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	
2	-2	-1,5	-1,75	-27	9,25	-4,26563	
3	=ЕСЛИ(D2*F2<0;A2;C2)						
4				ЕСЛИ(лог_выражение; [значение_если_истина]; [значение_если_ложь])			
5							

Рис. 1.15. Использование функции ЕСЛИ для выбора левого конца отрезка

Аналогично, для ячейки В3, отвечающей за b_1 — правый конец нового отрезка $[a_1; b_1]$, логические рассуждения таковы: если $f(a)f(c) < 0$ (рис. 1.13), то в ячейку В3 в качестве b_1 надо поместить середину предыдущего отрезка c , то есть значение из С2, иначе (рис. 1.14) в ячейку В3 в качестве b_1 надо поместить правый конец предыдущего отрезка b , то есть значение из В2. В ячейку В3 вводим формулу «=ЕСЛИ(D2*F2<0;С2;В2» (рис. 1.16). В итоге в А3:В3 получаем что отрезок, содержащий корень $[a_1; b_1] = [c; b] = [-1,75; -1,5]$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	
2	-2	-1,5	-1,75	-27	9,25	-4,26563	
3	-1,75	=ЕСЛИ(D2*F2<0;С2;В2)					
4				ЕСЛИ(лог_выражение; [значение_если_истина]; [значение_если_ложь])			
5							

Рис. 1.16. Использование функции ЕСЛИ для выбора правого конца отрезка

6. Расчеты в С3:Е3 (c_1 — середина полученного отрезка, а также значения функции $f(x)$ на концах отрезков $[a_1; c_1]$ и $[c_1; b_1]$) аналогичны расчетам в предыдущей строке в С2:Е2, поэтому выделяем диапазон С2:Е2 и копируем его вниз на одну строку (рис. 1.17).

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	f(a)	f(b)	f(c)	
2	-2	-1,5	-1,75	-27	9,25	-4,26563	
3	-1,75	-1,5	-1,625	-4,26563	9,25	3,483398	
4							
5							

Рис. 1.17. Копирование формул из начальной строки таблицы

7. Для вычисления погрешности в ячейку G2 введем формулу «=(B2-A2)/2» (рис. 1.19). Скопируем формулу вниз на одну строку, чтобы «подровнять» перед копированием строку 3. Далее в строке 4 все рассуждения и расчеты аналогичны рассуждениям и расчетам в строке 3, поэтому формулы строки 3 можно копировать вниз.

E	F	G
f(b)	f(c)	погрешность
9,25	-4,26563	=(B2-A2)/2
9,25	3,483398	

Рис. 1.19. Погрешность

8. Теперь осталось лишь вычислить корень ξ_1 с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$: выделяем диапазон А3:G3 и копируем вниз. Искомое значение корня будет в той строке, где в столбце G значение погрешности будет меньше 10^{-3} . Получаем в столбце С, что $\xi_1 \approx -1,685$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ (рис. 1.20) в строке 10, что соответствует 8-му отрезку. Заметим, что выше уже найдено количество шагов, необходимое для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$, и ре-

зультаты вычислений совпали. Видим также, что значения функции на концах и в середине отрезка уменьшаются по модулю. Значение функции $f(-1,685) \approx 0,0566$ и близко к нулю.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	погрешность
2	-2	-1,5	-1,75	-27	9,25	-4,26563	0,25
3	-1,75	-1,5	-1,625	-4,26563	9,25	3,483398	0,125
4	-1,75	-1,625	-1,6875	-4,26563	3,483398	-0,12408	0,0625
5	-1,6875	-1,625	-1,65625	-0,12408	3,483398	1,743954	0,03125
6	-1,6875	-1,65625	-1,67188	-0,12408	1,743954	0,826313	0,015625
7	-1,6875	-1,67188	-1,67969	-0,12408	0,826313	0,355247	0,0078125
8	-1,6875	-1,67969	-1,68359	-0,12408	0,355247	0,116619	0,00390625
9	-1,6875	-1,68359	-1,68555	-0,12408	0,116619	-0,00347	0,001953125
10	-1,68555	-1,68359	-1,68457	-0,00347	0,116619	0,056638	0,000976563
11							

Рис. 1.20. Нахождение первого корня уравнения

В пунктах 1–8, рассмотренных выше, реализована *программа* вычисления корня уравнения $f(x)=0$ с заданной точностью в среде табличного процессора *Microsoft Excel*.

Аналогично вычислим $\xi_2 \in [0; 0,5]$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ по имеющейся программе.

Предварительно подсчитаем количество шагов по формуле (1.5):

$$n > \log_2 \frac{|0 - 0,5|}{10^{-3}} - 1 = \log_2 500 - 1 \approx 8,966 - 1, n \geq 8.$$

То есть нужное значение ξ_2 получено как середина 8-го отрезка. Убедимся в этом, изменив начальные данные в таблице (рис. 1.21): введем в A2 значение левого конца отрезка 0, а в B2 — значение правого 0,5.

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	c	$f(a)$	$f(b)$	$f(c)$	погрешность
2	0	0,5	0,25	7	-0,75	3,234375	0,25
3	0,25	0,5	0,375	3,234375	-0,75	1,295898	0,125
4	0,375	0,5	0,4375	1,295898	-0,75	0,290955	0,0625
5	0,4375	0,5	0,46875	0,290955	-0,75	-0,22437	0,03125
6	0,4375	0,46875	0,453125	0,290955	-0,22437	0,034496	0,015625
7	0,453125	0,46875	0,460938	0,034496	-0,22437	-0,09463	0,0078125
8	0,453125	0,460938	0,457031	0,034496	-0,09463	-0,02999	0,00390625
9	0,453125	0,457031	0,455078	0,034496	-0,02999	0,002273	0,001953125
10	0,455078	0,457031	0,456055	0,002273	-0,02999	-0,01385	0,000976563
11							

Рис. 1.21. Нахождение другого корня уравнения

Действительно, на 8-м шаге получаем в столбце C, что $\xi_2 \approx 0,456$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ (рис. 1.21).

Замечание 1. На листе книги *Excel* можно увидеть формулы во всех ячейках сразу: **Сервис** — **Зависимости формул** — **Режим проверки формул** (*Microsoft Office Excel 2003*) или **Формулы** — **Показать формулы** (*Microsoft Office Excel 2007*). Для более быстрого просмотра формул можно установить меню **Зависимости формул**: в меню **Сервис** ищем диалоговое окно **Настройка...**, открываем и выбираем вкладку **Команды, Категории** — **Встроенные меню**, находим **Зависимости формул** (рис. 1.22) и, удерживая левую кнопку мыши, перетаскиваем **Зависимости формул** на панель инструментов. Далее в меню **Зависимости формул** выбираем **Режим проверки формул** (рис. 1.23). Кнопку **Режим проверки формул** можно установить отдельно: **Сервис** — **Настройка...** — **Команды** — **Сервис** — **Режим**

проверки формул. Последнюю команду в виде кнопки надо перетащить на панель инструментов.



Рис. 1.22. Вставка меню Зависимости формул

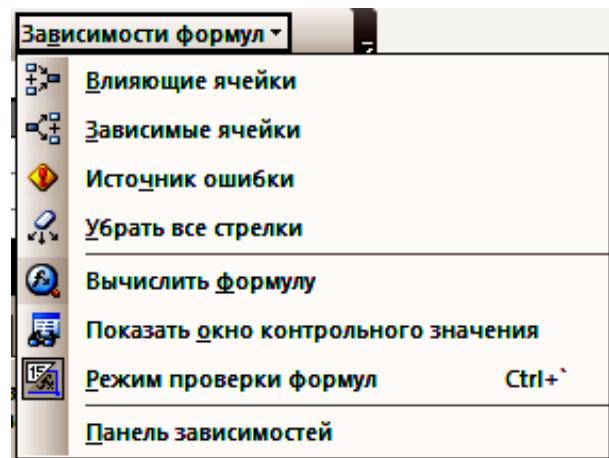


Рис. 1.23. Режим проверки формул

Убедимся с помощью кнопки **Режим просмотра формул**, например, заканчивая пункт 6 программы метода половинного деления, что полученные значения в диапазоне C3:F3 подсчитаны по нужной нам формуле: $y = -4x^4 - 15x + 7$ (рис. 1.24).

C	D	E	F
c	f(a)	f(b)	f(c)
= $(A2+B2)/2$	= $-4*A2^4-15*A2+7$	= $-4*B2^4-15*B2+7$	= $-4*C2^4-15*C2+7$

C	D	E	F
I= $(A3+B3)/2$	= $-4*A3^4-15*A3+7$	= $-4*B3^4-15*B3+7$	= $-4*C3^4-15*C3+7$

Рис. 1.24. Режим просмотра формул

Замечание 2. Обратите внимание, что правильно работающая программа метода половинного деления обеспечивает «удержание» корня внутри меняющегося отрезка $[a_n; b_n]$: в таблицах на рис. 1.20, 1.21 значения функции в правом и левом конце отрезка (в столбцах $f(a)$ и $f(b)$) сохраняют знак, приближаясь к нулю, имеют разные знаки, а значение функции в середине отрезка может иметь любой знак.

Задание для самостоятельной работы

В среде табличного процессора *Excel* постройте таблицу и график функции $y = f(x)$. Отделите все корни уравнения $f(x) = 0$ и вычислите методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Определите число шагов метода для достижения заданной точности.

Вариант 1. $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 5,1 = 0$.

Вариант 2. $x^4 + 4x^3 + 0,9x^2 - 10,2 = 0$.

Вариант 3. $x^4 - 3x^3 - 6x^2 - 10,3 = 0$.

Вариант 4. $x^4 + 5x^3 - x^2 - 0,5 = 0$.

Вариант 5. $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 6,1 = 0$.

Вариант 6. $x^4 + 4x^3 + 0,2x^2 - 12,1 = 0$.

Вариант 7. $x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 1,6 = 0$.

Вариант 8. $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 2,1 = 0$.

Вариант 9. $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 12 = 0$.

Вариант 10. $x^4 - 2x^3 - 15x^2 - 6,1 = 0$.

Вариант 11. $x^4 - 4x^3 - 9x^2 - 1 = 0$.

Вариант 12. $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 0,1 = 0$.

Вариант 13. $x^4 + 2x^3 - 5,9x^2 - 4,1 = 0$.

Вариант 14. $x^4 - 4x^3 - 5,2x^2 - 3 = 0$.

Вариант 15. $x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 0,2 = 0$.

Вариант 16. $x^4 - 42x^3 + 0,8x^2 - 4,1 = 0$.

Вариант 17. $x^4 - 14x^3 - 5x^2 - 0,11 = 0$.

Вариант 18. $x^4 + 4x^3 - 8,2x^2 - 15 = 0$.

Вариант 19. $x^4 - 4x^3 - 7,9x^2 - 0,1 = 0$.

Вариант 20. $x^4 + 4x^3 - 5,8x^2 - 0,51 = 0$.

Лабораторная работа № 2

Решение уравнений с одной переменной. Метод касательных (метод Ньютона)

Пусть дано уравнение $f(x)=0$, и точное значение корня ξ дифференцируемой функции $f(x)$ отделено на отрезке $[a; b]$: корень ξ принадлежит отрезку $[a; b]$ и единственный (см. лабораторную работу № 1). Требуется вычислить ξ приближенно с точностью ε , то есть получить такое значение x , для которого гарантированно выполняется неравенство $|x - \xi| < \varepsilon$.

Основная идея метода Ньютона состоит в замене на отрезке $[a; b]$ участка кривой $y = f(x)$, которая удовлетворяет определенным требованиям, на участок касательной (прямой) L_f к графику этой функции, построенной в одной из точек отрезка $[a; b]$, например, в одном из концов. Зная уравнение касательной, легко найти точку пересечения этой прямой с осью Ox . Эта точка, вероятно, будет располагаться недалеко от искомого корня и может служить приближением к нему. Затем процедуру уточнения корня таким же образом можно повторить в найденной точке и повторять до тех пор, пока точка пересечения очередной касательной с осью Ox не окажется достаточно близко к точке ξ .

Построим касательную к графику функции $y = f(x)$ в одном из концов отрезка $[a; b]$ так, чтобы точка пересечения касательной с осью Ox принадлежала отрезку $[a; b]$, то есть чтобы касательная, также как и функция, имела корень на отрезке $[a; b]$. На рис. 2.1 показано, что касательная L_{f1} , построенная к графику функции $y = f(x)$ в точке a , пересекает ось Ox за пределами отрезка $[a; b]$, а касательная L_{f2} , построенная к графику функции $y = f(x)$ в точке b , пересекает ось Ox внутри отрезка $[a; b]$. Следовательно, для уточнения корня в данном случае надо строить касательную в точке b .

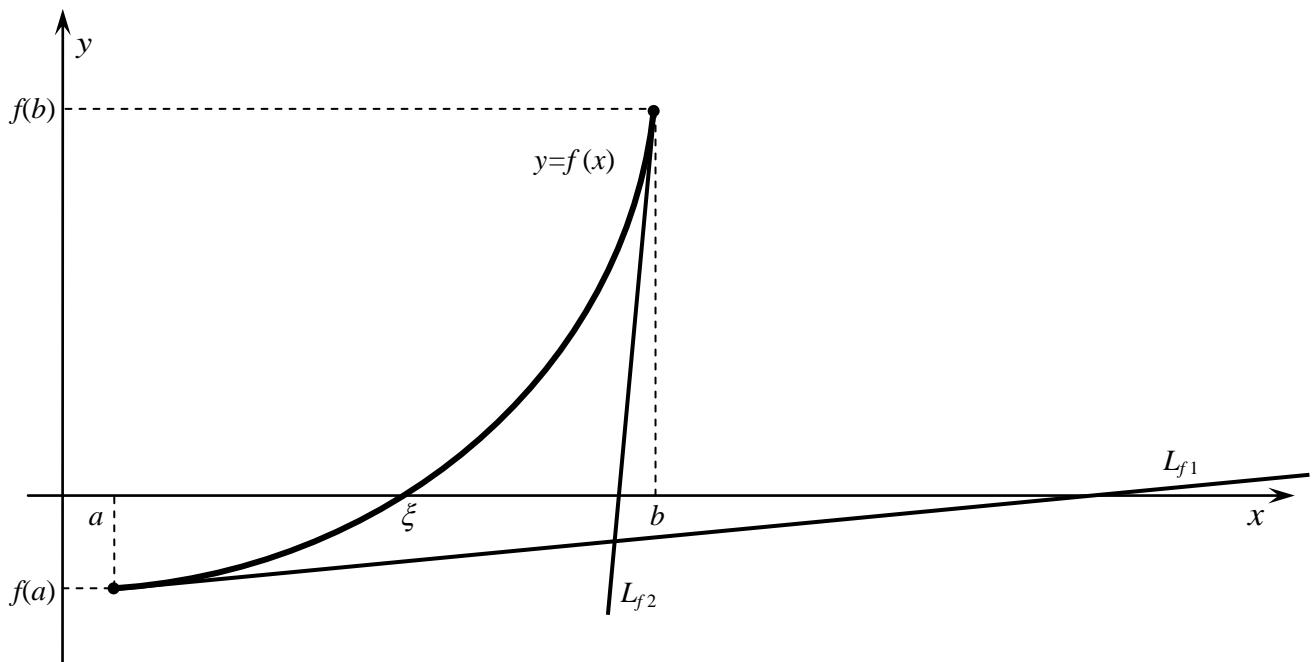


Рис. 2.1. Касательные к графику функции $y = f(x)$ на концах отрезка

Выбрав начальное приближение $x_0 = \frac{[a; b]}{b}$ к корню уравнения $f(x) = 0$, построим касательную в этой точке. Уравнение касательной

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (2.1)$$

Касательная пересекает ось Ox в точке x_1 , вторая координата которой y равна нулю (рис. 2.2).

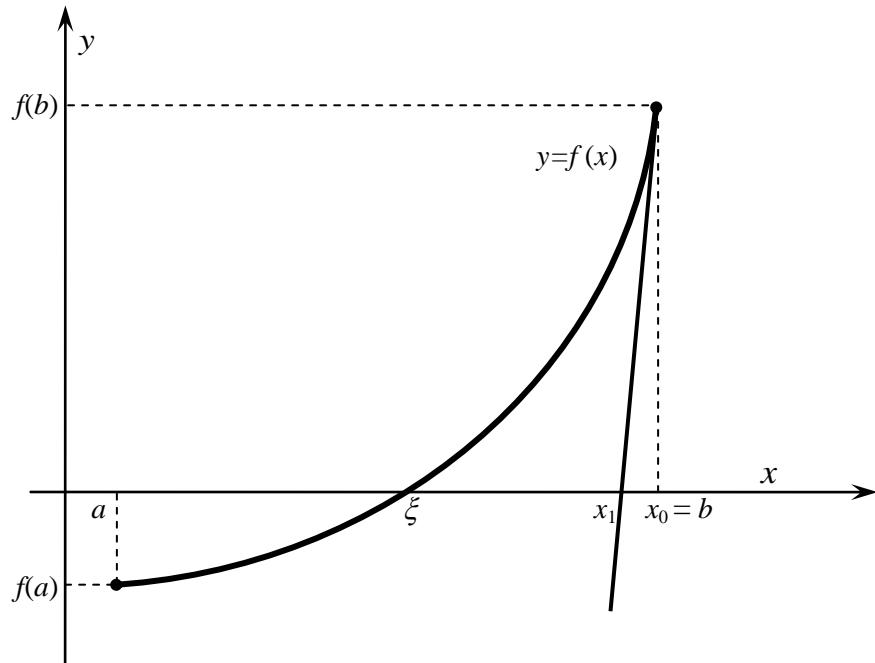


Рис. 2.2. Точка x_1 — точка пересечения касательной в точке x_0 с осью Ox

Подставим в уравнение (2.1) вместо координат текущей точки прямой $(x; y)$ координаты $(x_1; 0)$:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0). \quad (2.2)$$

Из равенства (2.2) выразим значение x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (2.3)$$

Получили первое приближение к корню x_1 . Продолжим процедуру уточнения корня, построив касательную в точке x_1 и найдя точку x_2 пересечения этой касательной с осью Ox (рис. 2.3).

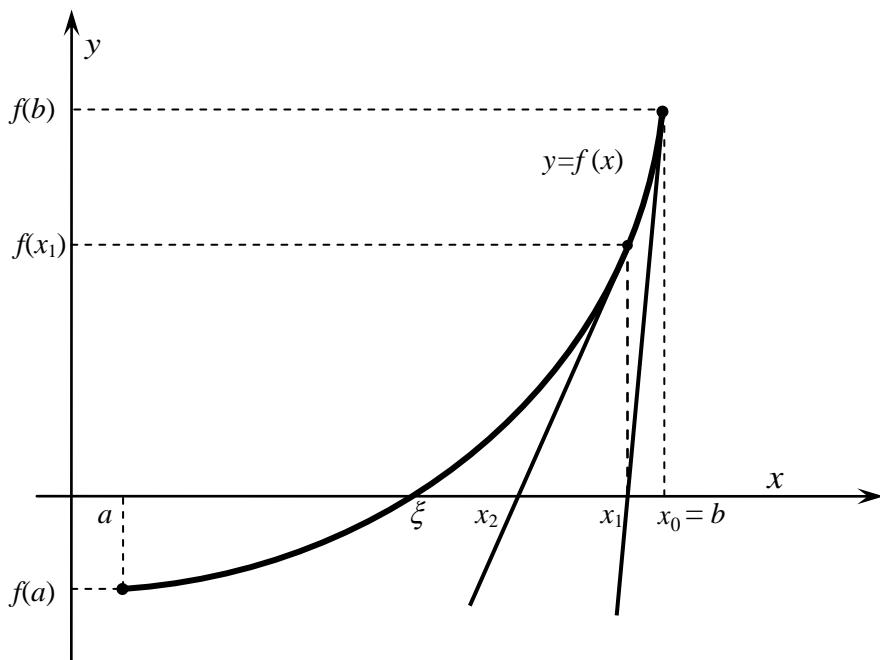


Рис. 2.3. Точка x_2 — точка пересечения касательной в точке x_1 с осью Ox

Поскольку получение x_2 абсолютно аналогично получению x_1 , то и формула будет аналогична:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (2.4)$$

Процесс построения касательных и уточнения корня можно продолжить (рис. 2.4). Обобщая формулы (2.3) и (2.4), получаем формулу метода касательных для получения очередного n -го приближения к корню x_n через предыдущее приближение x_{n-1} (рекуррентную формулу):

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_0 \in [a; b]. \quad (2.5)$$

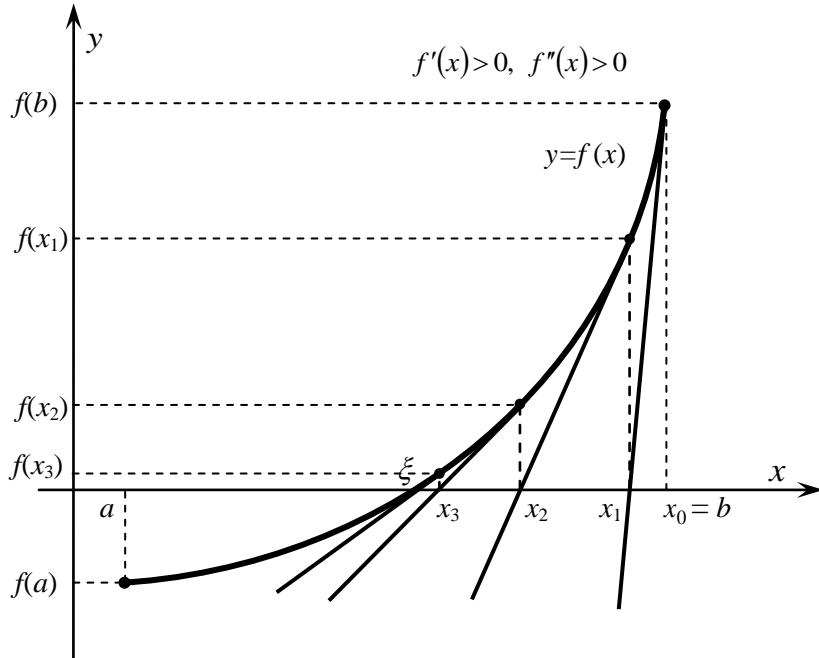


Рис. 2.4. Построение последовательных приближений к корню методом касательных (Ньютона)

По рис. 2.4 видно, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке ξ . Сходимость обеспечивается монотонностью $f(x)$ (знакопостоянством производной) и сохранением выпуклости (знакопостоянством второй производной), и каждое новое приближение оказывается ближе к корню, чем предыдущее.

В общем случае достаточные условия сходимости последовательности (2.5) к корню уравнения $f(x)=0$ дает следующее утверждение.

Теорема (теорема сходимости метода Ньютона). Пусть

- 1) $f(a) \cdot f(b) < 0$;
- 2) $f(x)$ дважды дифференцируемая функция на $[a; b]$, и $f'(x), f''(x)$ не меняют знака на $[a; b]$ и не равны нулю;
- 3) $x_0 \in [a; b]$ и выбрано так, что $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Тогда существует конечный предел последовательности $\{x_n\}$, заданной формулой (2.5), и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, где ξ — корень уравнения $f(x)=0$.

Заметим, что знакопостоянство производной (усл. 2), смена знака $f(x)$ на концах $[a; b]$ (усл. 1) гарантируют существование и единственность корня непрерывной функции $f(x)$ внутри отрезка $[a; b]$. Знакопостоянство второй производной (усл. 2) гарантирует постоянство выпуклости на $[a; b]$. На рис. 2.1—2.4 изображен график функции $y = f(x)$, для которой $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ на $[a; b]$, поэтому и в качестве начального приближения $x_0 \in [a; b]$ выбран конец отрезка b , так как $f(b) \cdot f''(b) > 0$ (то есть тот из концов отрезка, в котором знаки функции и ее второй производной совпадают). На рис. 2.5—2.7 проиллюстрируем другие варианты сочетания знаков $f'(x)$ и $f''(x)$ и выбор начального приближения x_0 .

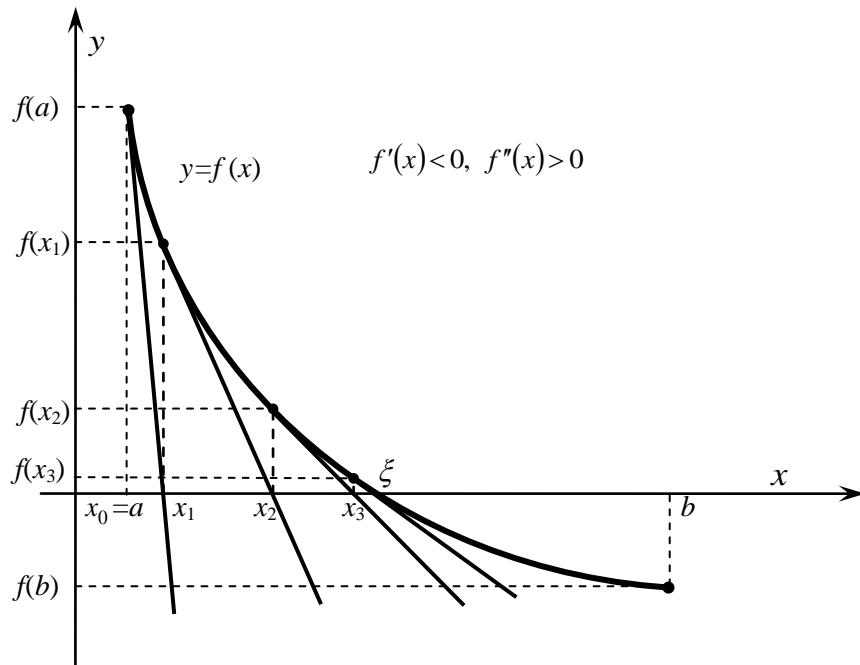


Рис. 2.5. Выбор начального приближения при $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$: $x_0 = a$

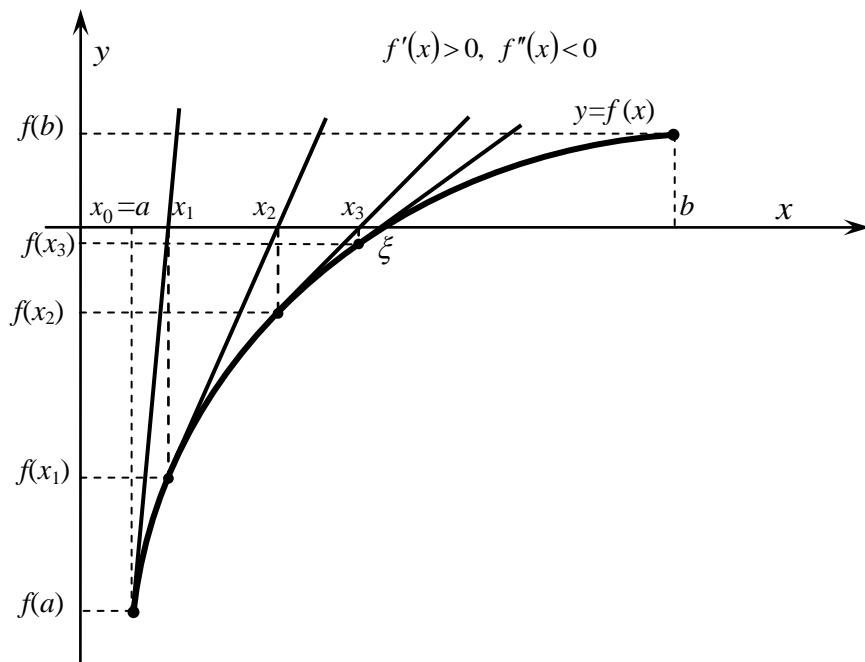


Рис. 2.6. Выбор начального приближения при $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$: $x_0 = a$

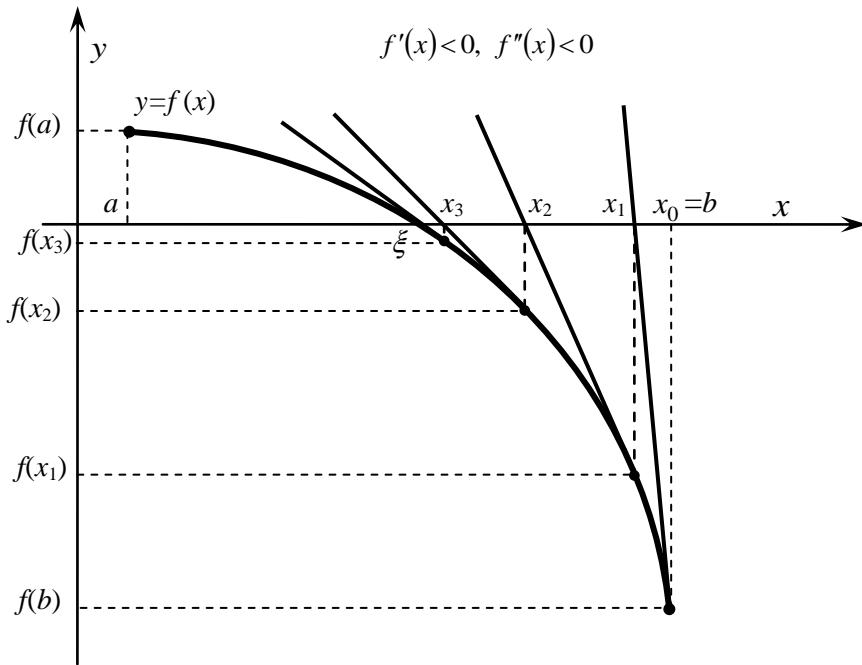


Рис. 2.7. Выбор начального приближения при $f'(x)<0, f''(x)<0$: $x_0=b$

Погрешность метода Ньютона определяется формулой:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \text{ где } m_1 = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)|. \quad (2.6)$$

Если выполняются условия теоремы сходимости, то $f'(x)$ существует на $[a; b]$ и непрерывна, и, следовательно, достигает на $[a; b]$ своего наименьшего по модулю значения $m_1 > 0$. Для точного нахождения или оценки m_1 можно использовать как аналитические, так и численные методы (см. лабораторную работу № 9). Значит, процедуру уточнения корня надо продолжать до тех пор, пока для заданной точности ε не будет выполняться неравенство

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon, \quad (2.7)$$

тогда в силу неравенства (2.6) и $|x_n - \xi| < \varepsilon$.

Существует и еще один признак окончания вычислений по формуле (2.5): если

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}, \text{ где } M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|, \quad (2.8)$$

то $|x_n - \xi| < \varepsilon$.

Пример 1. Вычислим каждый корень уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ на отрезке $[-3; 3]$ методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Корни этого уравнения были уже отделены (см. лабораторную работу № 1): $\xi_1 \in [-2; -1,5]$ и $\xi_2 \in [0; 0,5]$. Для проверки условий теоремы сходимости метода Ньютона, реализации формулы (2.5), проверки условия достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-3}$ по формулам (2.7) или (2.8) найдем производную и вторую производную:

$$f'(x) = -16x^3 - 15,$$

$$f''(x) = -48x^2.$$

Имеем:

$$f(-2) = -27 < 0,$$

$$f(-1,5) = 9,25 > 0,$$

$$f(0) = 7 > 0,$$

$$f(0,5) = -0,75 < 0,$$

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in [-2; -1,5],$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } x \in [0; 0,5].$$

Ясно, что $f''(x) < 0$ при $x \in [-2; -1,5]$ и $f''(x) < 0$ при $x \in [0; 0,5]$. Тогда для уточнения корня на отрезке $[-2; -1,5]$ в качестве x_0 надо выбрать -2 , так как $f(-2) \cdot f''(-2) > 0$, а на отрезке $[0; 0,5]$ в качестве x_0 надо выбрать $0,5$, так как $f(0,5) \cdot f''(0,5) > 0$.

$$\text{На отрезке } [-2; -1,5] \quad m_1 = \min_{x \in [-2; -1,5]} |-16x^3 - 15| = f'(-1,5) = -16 \cdot (-1,5)^3 - 15 = 39,$$

$$\text{на отрезке } [0; 0,5] \quad m_1 = \min_{x \in [0; 0,5]} |-16x^3 - 15| = |f'(0)| = 15.$$

$$\text{На отрезке } [-2; -1,5] \quad M_2 = \max_{x \in [-2; -1,5]} |-48x^2| = |f''(-2)| = 192, \quad \text{на отрезке } [0; 0,5]$$

$$M_2 = \max_{x \in [0; 0,5]} |-48x^2| = |f''(0,5)| = 12.$$

Продолжать уточнение корня на отрезке $[-2; -1,5]$ надо до тех пор, пока для x_n не выполнится неравенство (2.7) $\frac{|f(x_n)|}{39} < 10^{-3}$ или (2.8) $|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2 \cdot 39 \cdot 10^{-3}}{192}}$,

$$\text{а на отрезке } [0; 0,5] \quad \frac{|f(x_n)|}{15} < 10^{-3} \text{ или } |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-3}}{12}}.$$

Укажем последовательность шагов для вычисления корня $\xi_1 \in [-2; -1,5]$ с заданной точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ в Excel.

1. Оформим необходимые подписи столбцов таблицы и найденных на подготовительном этапе величин, введем начальное приближение x_0 на отрезке $[-2; -1,5]$ в ячейку A2, значения ε , m_1 , M_2 соответственно в ячейки G1, G2 и G3 (рис. 2.8). Для удобства вычислим отдельно величину $\sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$, обозначив ее, например, D . Таким образом, в ячейку, содержащую значение D , надо ввести формулу «=КОРЕНЬ(2*G2*G1/G3)». В столбце В будем вычислять значения функции, в столбце С — производной, в столбце D — значения величины $\frac{|f(x_n)|}{m_1}$, которую будем сравнивать с ε , в столбце Е — значения величины $|x_n - x_{n-1}|$, которую будем сравнивать с D . При заполнении таблицы формулы будем копировать вниз.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_n	f(x_n)	f'(x_n)	f(x) /m_1	x_n-x_(n-1)	eps=	0,001		
2		-2				m_1=	39		
3						M_2=	192		
4						D=	=КОРЕНЬ(2*G2*G1/G3)		
5									

Рис. 2.8. Подписи и выбор начального приближения на отрезке $[-2; -1,5]$

2. Введем формулы вычисления значений функции $f(x) = -4x^4 - 15x + 7$, производной $f'(x) = -16x^3 - 15$ и величины $\frac{|f(x_n)|}{m_1}$ соответственно в ячейки B2, C2 и D2 (для вычисления $|x_n - x_{n-1}|$ нужны два последовательных приближения к корню, а пока известно только x_0):

B2: «=-4*A2^4-15*A2+7»;

C2: «=-16*A2^3-15»;

D2: «=ABS(B2)/\$G\$2» (рис. 2.9).

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_n	f(x_n)	f'(x_n)	f(x) /m_1	x_n-x_(n-1)	eps= 0,001	
2	-2	=-4*A2^4-15*A2+7	=-16*A2^3-15	=ABS(B2)/\$G\$2		m_1= 39	
3						M_2= 192	
4						D= =КОРЕНЬ(2*G2*G1/G3)	
5							

Рис. 2.9. Ввод формул (режим отображения формул)

В этих формулах зафиксирован только адрес D, так как в дальнейшем они будут копироваться вниз, и ссылки на текущее значение аргумента x_n и $f(x_n)$ должны соответственно меняться.

3. В ячейке A3 организуем вычисление x_1 по формуле (2.3): введем формулу «=A2-B2/C2» (рис. 2.10).

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_n	f(x_n)	f'(x_n)	f(x) /m_1	x_n-x_(n-1)	eps= 0,001	
2		-2	-27	113	0,692307692	m_1= 39	
3	=A2-B2/C2					M_2= 192	
4						D= 0,02015564	
5							

Рис. 2.10. Ввод формулы (2.3)

4. Скопируем формулы из B2:D2 в B3:D3 и в ячейку E3 введем формулу вычисления величины $|x_n - x_{n-1}|$: «=ABS(A3-A2)». После этого все формулы в строке 3 готовы к копированию вниз.

5. Будем копировать A3:E3 вниз до выполнения хотя бы одного из условий: величина в столбце D станет меньше числа в G1, или величина в столбце E станет меньше числа в G4. В нашем случае оба условия выполнились одновременно в строке 5 (рис. 2.11). В ячейке A5 считываем приближенное значение корня: $\xi_1 \approx -1,686$. В ячейке B5 соответствующее значение функции близко к нулю. По таблице на рис. 2.11 видно также, что, например, x_2 приближает корень с точностьюю 10^{-2} , так как $\frac{|f(x_2)|}{m_1} < 10^{-2}$.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_n	f(x_n)	f'(x_n)	f(x) /m_1	x_n-x_(n-1)	eps= 0,001	
2	-2	-27	113	0,692307692		m_1= 39	
3	-1,761061947	-5,057289655	72,38640665	0,129674094	0,238938053	M_2= 192	
4	-1,691196762	-0,353800323	62,39312772	0,009071803	0,069865184	D= 0,02015564	
5	-1,685526261	-0,002202274	61,61724872	5,64686E-05	0,005670501		
6							

Рис. 2.11. Окончание процесса вычислений для $\xi_1 \in [-2; -1,5]$

Изменив начальные данные для вычисления $\xi_2 \in [0; 0,5]$ ($x_0 = 0,5, m_1 = 15, M_2 = 12$), уже в строке 3 в ячейке A3 получим $\xi_2 \approx 0,456$ (рис. 2.12). Оба условия окончания вычислительного процесса опять выполняются одновременно. Видим, что в данном примере метод Ньютона сходится значительно быстрее метода половинного деления к тем же самым значениям корней, но подготовительный этап вычислений потребовал больших усилий.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$ f(x) /m_1$	$ x_n - x_{(n-1)} $	$eps= 0,001$	
2	0,5	-0,75	-17	0,05		$m_1= 15$	
3	0,455882353	-0,011006401	-16,51592713	0,00073376	0,044117647	$M_2= 12$	
4	0,455215942	-2,21298E-06	-16,50928887	1,47532E-07	0,000666411	$D= 0,05$	
5	0,455215808	-8,9706E-14	-16,50928754	5,9804E-15	1,34045E-07		
6							

Рис. 2.12. Окончание процесса вычислений для $\xi_2 \in [0; 0,5]$

Аналогично организуются и ручные вычисления (с помощью калькулятора), результаты которых удобно оформлять в такой же таблице.

	A	B
1	x_n	
2	0,5	
3	0,455882352941176	
4	0,455215941604003	
5	0,455215807559224	
6	0,455215807559219	
7	0,455215807559219	
8		
9		

Рис. 2.13. Машинное решение

Замечание 1. Метод Ньютона позволяет вычислять корень с максимально возможной точностью, используя всего лишь одну формулу. Например, введем в A3 формулу (2.3) вычисления x_1 без предварительного вычисления значений функции и производной: «=A2-(-4*A2^4-15*A2+7)/(-16*A2^3-15)». Установим в ячейке A3 самую высокую разрядность (15 знаков после запятой) и будем копировать эту формулу вниз до тех пор, пока числа в соседних ячейках не начнут повторяться (рис. 2.13). В ячейке A6 получено так называемое машинное решение (машинный корень) данного уравнения: более точно в рамках существующей вычислительной системы решения найти не удастся, и $\xi_2 \approx 0,455215807559219$.

Замечание 2. Проведем эксперимент: введем в A2 в качестве начального приближения x_0 другой конец отрезка — число 0. Получим то же самое машинное решение. Но последовательность в отличие от предыдущего случая получилась немонотонной. Достаточные условия сходимости метода Ньютона, сформулированные в теореме сходимости, гарантируют монотонность последовательности (рис. 2.4—7). Нарушение достаточных условий может и не вызывать разрушение вычислительного процесса. В нашем случае ничего страшного не произошло, получили то же самое машинное решение. Возможное поведение начальных членов последовательности $\{x_n\}$ последовательных приближений к корню x_0, x_1, x_2 показано на рис. 2.15.

	A	B
1	x_n	
2	0	
3	0,466666666666667	
4	0,455256357706770	
5	0,455215808054604	
6	0,455215807559219	
7	0,455215807559219	
8		
9		

Рис. 2.14. Нарушение достаточных условий

И хотя x_0 выбрано с нарушением достаточных условий сходимости метода Ньютона, первое приближение x_1 удовлетворяет этим условиям в качестве начального, с него начинается монотонная последовательность. Любое приближение в рассматриваемой последовательности может быть принято за начальное, и если это приближение

удовлетворяет всем условиям теоремы сходимости, то с него начинается монотонная последовательность.

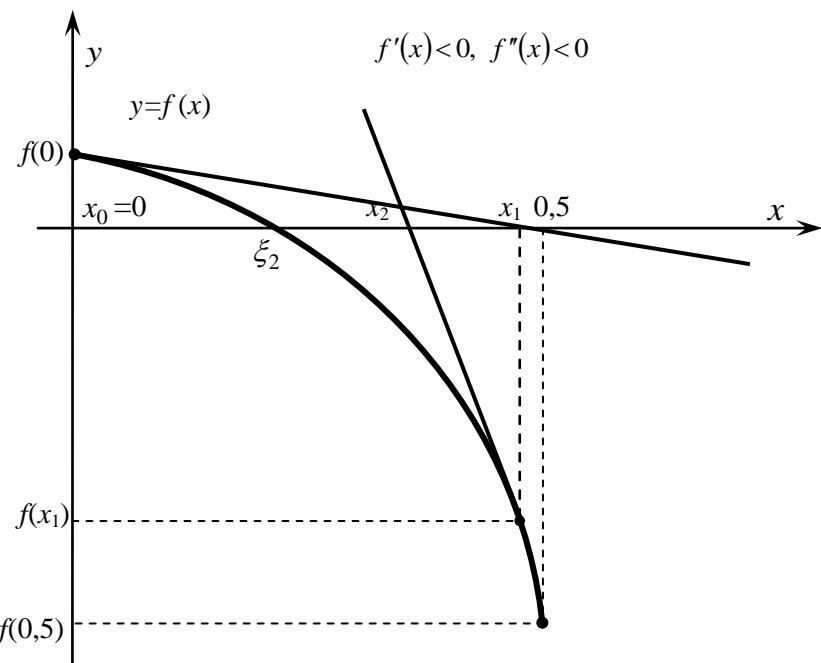


Рис. 2.15. Пример получения x_0, x_1, x_2 для $\xi_2 \in [0; 0,5]$

A	
1	x_n
2	-1
3	-19,0000000000000000
4	-14,2520117744625000
5	-10,6926227572203000
6	-8,0259797756033100
7	-6,0312677377880600
8	-4,5448657004543100
9	-3,4477400303670100
10	-2,6572660768048700
11	-2,1223077397253000
12	-1,8155532830664500
13	-1,7012855273123100
14	-1,6857605326369300
15	-1,6854905989815400
16	-1,6854905183318600
17	-1,6854905183318500
18	-1,6854905183318500

A	
1	x_n
2	10
3	7,4934124258507700
4	5,6086026328182200
5	4,1866844504695900
6	3,1062921472411300
7	2,2732132433965200
8	1,6133912290823800
9	1,0743830134790400
10	0,6597930784633840
11	0,4732750739000710
12	0,4553181698508390
13	0,4552158107164110
14	0,4552158075592190
15	0,4552158075592190
16	0,4552158075592190
17	0,4552158075592190
18	0,4552158075592190

A	
1	x_n
2	-0,979
3	-1384,2974993958200000
4	-1038,2231249139500000
5	-778,6673443381600000
6	-584,0005094142010000
7	-438,0003841244550000
8	-328,5002917636290000
9	-246,3752253507630000
10	-184,7814306257910000
11	-138,5860936315130000
12	-103,9396069974690000
13	-77,9547707211953000
14	-58,4661946683273000
15	-43,8498538859070000
16	-32,8877612832492000
17	-24,6664833547221000
18	-18,5010473692730000

Рис. 2.16. Примеры экспериментов с начальным приближением x_0

Эксперименты с начальным приближением x_0 можно продолжить. Вводя в A2 различные числа, можно наблюдать сходимость последовательности $\{x_n\}$ к одному из обнаруженных корней, причем начальное приближение x_0 может находиться далеко за пределами отрезков, на которых ранее отдалили корни (рис. 2.16). Опытным путем можно

подобрать такое x_0 , что x_1 оказывается достаточно далеко от искомого корня. Тем не менее последовательность $\{x_n\}$ остается сходящейся. Поэкспериментируйте самостоятельно в окрестности, например, числа $-0,98$.

Замечание 3. При реализации метода Ньютона для вычислений с заданной точностью удобно использовать *условное форматирование ячеек*, в которых хранятся величины $\frac{|f(x_n)|}{m_1}$ и $|x_n - x_{n-1}|$. Оно состоит в заливке ячейки выбранным цветом в случае выполнения указываемого при форматировании условия. Самостоятельно отформатируйте ячейки с указанными величинами на выполнение условий (2.7) и (2.8): **Главная — Стили — Условное форматирование — Правила выбора ячеек** или **Формат — Условное форматирование**.

Пример 2. Покажем, насколько эффективен метод Ньютона при вычислении алгебраических корней натуральной степени. Найдем, например, машинное значение $\sqrt[7]{35}$. Сначала решим эту задачу в общем виде. Пусть требуется вычислить

$$\sqrt[k]{a}, \text{ где } a > 0, \quad a \neq 1, \quad k \in N, \quad k \geq 2. \quad (2.9)$$

Решение. Переформулируем задачу:

$$\sqrt[k]{a} = x, \quad x > 0. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.10) равносильно уравнению

$$x^k - a = 0. \quad (2.11)$$

Здесь $f(x) = x^k - a$, $f'(x) = kx^{k-1}$, $f''(x) = k(k-1)x^{k-2}$. В силу условий (2.9) $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ для всех $x > 0$ и для решения уравнения (2.11) можно применять метод Ньютона. Покажем, что корень уравнения (2.11) всегда находится между единицей и числом a .

1. Пусть $0 < a < 1$. Тогда $f(a) = a^k - a < 0$, $f(1) = 1^k - a = 1 - a > 0$, $\xi \in [a; 1]$.
2. Пусть $a > 1$. Тогда $f(1) = 1^k - a = 1 - a < 0$, $f(a) = a^k - a > 0$, $\xi \in [1; a]$.

По теореме сходимости в качестве начального приближения x_0 в любом случае надо выбирать большее из чисел 1 и a , а последовательность $\{x_n\}$ — убывающая (рис. 2.4), ограниченная снизу числом $\xi = \sqrt[k]{a}$. Преобразуем формулу (2.5) для нашего случая:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^k - a}{kx_{n-1}^{k-1}} = \frac{kx_{n-1}^k - x_{n-1}^k + a}{kx_{n-1}^{k-1}} = \frac{(k-1)x_{n-1}^k + a}{kx_{n-1}^{k-1}} = \frac{k-1}{k} \cdot x_{n-1} + \frac{a}{kx_{n-1}^{k-1}}, \quad (2.12)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad x_0 = \max\{1, a\}.$$

Для оценки погрешности по формуле (2.7) найдем m_1 :

$$m_1 = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)| = \min_{x \in [a; 1]} |kx^{k-1}| = \begin{cases} k, & \text{если } a > 1, \\ ka^{k-1}, & \text{если } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Таким образом, получили следующий алгоритм вычисления $\sqrt[k]{a}$ с точностью ε .

1. Выбираем x_0 : если $0 < a < 1$, то $x_0 = 1$, иначе $x_0 = a$.
2. Вычисляем m_1 : если $0 < a < 1$, то $m_1 = ka^{k-1}$, иначе $m_1 = k$.

3. Вычисляем x_n по рекуррентной формуле (2.12) до тех пор, пока не будет

$$\text{выполняться неравенство } \frac{x_n^k - a}{m_1} < \varepsilon.$$

Реализуем этот алгоритм в *Excel* для нахождения $\sqrt[7]{35}$ сначала с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ (рис. 2.17), а затем и машинного решения (рис. 2.18). Реализация алгоритма (с вводом x_0 и m_1 вручную и применением условного форматирования для определения последнего шага) ясна из рис. 2.17—2.18. На рис. 2.18 для краткости сгруппированы строки с 5 по 21 (**Данные — Структура — Группировать**). В строке 25 считываем значение $\sqrt[7]{35}$ с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$: $\sqrt[7]{35} \approx 1,66181$, а в строке 27 — машинное решение: $\sqrt[7]{35} \approx 1,66180916265588$. Реализуйте этот же алгоритм самостоятельно с использованием в ячейках A2 и D3 функции выбора ЕСЛИ для реализации пунктов 1 и 2. Проведите эксперименты с выбором начального приближения, проанализируйте за монотонность последовательности. Убедитесь на нескольких примерах, что $x_0 = 1$ годится в каждом случае. Дайте геометрическую интерпретацию полученному результату, доказывающую, что при $x_0 = 1$ последовательность $\{x_n\}$, полученная по формуле (2.12), будет сходящейся.

	A	B	C	D
1	x_n	$ f(x_n) /m_1$	a= 35	
2	35	$=(A2^D$2-D1)/D3$	k= 7	
3	$=($D$2-1)/$D$2*A2+$D$1/($D$2*A2^($D$2-1))$	$=(A3^D$2-D1)/D3$	m_1= =D2	
4	$=($D$2-1)/$D$2*A3+$D$1/($D$2*A3^($D$2-1))$	$=(A4^D$2-D1)/D3$	eps= 0,00001	
5	$=($D$2-1)/$D$2*A4+$D$1/($D$2*A4^($D$2-1))$	$=(A5^D$2-D1)/D3$		

Рис. 2.17. Реализация в *Excel* алгоритма вычисления $\sqrt[k]{a}$ (режим отображения формул)

	A	B	C	D
1	x_n	$ f(x_n) /m_1$	a= 35	
2		35	9191328120	k= 7
3		30	3124285711	m_1= 7
4	25,71428572347580	1061996816	eps= 0	
22	1,75510675721408	2,328696349		
23	1,67543734139648	0,294187204		
24	1,66213724970167	0,006914061		
25	1,66180935687397	4,0905E-06		
26	1,66180916265595	1,42819E-12		
27	1,66180916265588	-2,03012E-15		
28	1,66180916265588	-2,03012E-15		

Рис. 2.18. Использование условного форматирования

Замечание 4. Из формулы (2.12) можно получить частные формулы для вычисления квадратных и кубических корней, то есть при $k = 2$ и $k = 3$.

Величина \sqrt{a} равна пределу последовательности

$$x_n = \frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_0 = 1. \quad (2.13)$$

Величина $\sqrt[3]{a}$ равна пределу последовательности

$$x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} + \frac{a}{3x_{n-1}^2} = \frac{1}{3}\left(2x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^2}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x_0 = 1. \quad (2.14)$$

Самостоятельно реализуйте алгоритмы нахождения машинного предела последовательностей (2.13) и (2.14) и протестируйте полученные программы.

Задание для самостоятельной работы

В среде табличного процессора *Excel* продемонстрируйте один из графических способов отделения корней: от уравнения $f(x) = 0$ перейдите к равносильному уравнению $f_1(x) = f_2(x)$, где $f_1(x), f_2(x)$ — достаточно «простые» функции, графики которых довольно легко построить. Постройте графики функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$. Точки пересечения этих графиков будут корнями исходного уравнения. Отделите и вычислите все корни уравнения $f(x) = 0$ методом Ньютона с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ в среде табличного процессора *Excel*. Определите число шагов метода для достижения заданной точности.

Вариант 1. $x^4 + 10x^3 - 1 = 0$.

Вариант 2. $x^3 + \sin x - 12x + 1 = 0$.

Вариант 3. $x^5 - x - 0,2 = 0$.

Вариант 4. $x - 0,2 \operatorname{tg} x = 0, \quad x \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Вариант 5. $x - \sin x - 0,25 = 0$.

Вариант 6. $x^5 + 2x - 1 = 0$.

Вариант 7. $3x - 2 \cos x + 1,5 = 0$.

Вариант 8. $x^2 + 4 \sin x - 1 = 0$.

Вариант 9. $0,5x - \ln x - 5 = 0$.

Вариант 10. $x^5 + 3x - 1 = 0$.

Вариант 11. $2,5x^2 - \sin x - 3 = 0$.

Вариант 12. $e^{2x} - 4x - 6 = 0$.

Вариант 13. $3x - \cos x + 1 = 0$.

Вариант 14. $2^x - 4x - 5 = 0$.

Вариант 15. $e^x - 6x - 3 = 0$.

Вариант 16. $x^5 + 4x - 1 = 0$.

Вариант 17. $2,5x - \ln x - 5 = 0$.

Вариант 18. $x^3 + 4 \sin x = 0$.

Вариант 19. $3,5x^2 - \sin x - 3 = 0$.

Вариант 20. $3,8x - \ln x - 5 = 0$.

Лабораторная работа № 3

Решение уравнений с одной переменной. Метод итераций

Пример 1. Проведем эксперимент на калькуляторе, обладающем возможностью вычисления значений тригонометрических функций. Будем нажимать на кнопку «cos» до тех пор, пока числа на индикаторе не начнут повторяться. Начальный аргумент при этом должен быть задан в радианной мере. В зависимости от длины разрядной сетки калькулятора может потребоваться от 20 до 50 и более нажатий. Число, которое будет повторяться, с девятью знаками после запятой равно 0,739085133. Что же это за число?

Полученное число в рамках разрядной сетки калькулятора удовлетворяет равенству:

$$\cos 0,739085133 = 0,739085133,$$

а следовательно, является корнем уравнения $\cos x = x$ или равносильного ему уравнения $x - \cos x = 0$. Вот так с затратой минимальных усилий приближенно, но с максимальной машинной точностью, было решено уравнение, для которого невозможно найти точное решение. Рассмотрим геометрическую интерпретацию полученного результата: отметим несколько первых членов получившейся числовой последовательности на оси Ox и проанализируем ее сходимость.

Полученное число является записью с девятью знаками после запятой абсциссы ξ точки пересечения графиков функций $y = x$ и $y = \cos x$ (рис. 3.1).

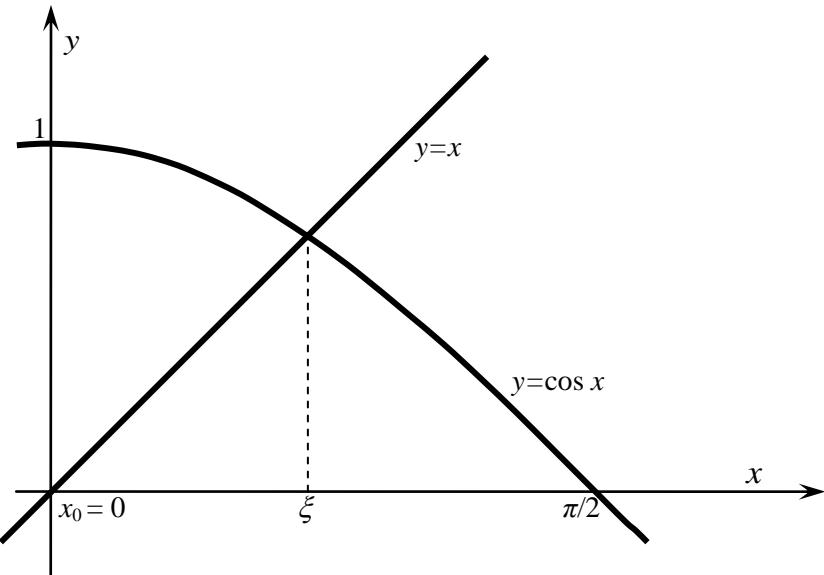


Рис. 3.1. Геометрическая интерпретация корня уравнения $x = \cos x$

Пусть в начале «вычислений» на индикаторе калькулятора находилось, например, число ноль — начальный член последовательности $\{x_n\}$: $x_0 = 0$. Нажав кнопку «cos», получаем на индикаторе число $\cos 0$, то есть 1 или $x_1 = 1 = \cos 0 = \cos x_0$. Чтобы отметить $x_1 = 1$ на оси Ox , найдем точку с ординатой $\cos 0$ на графике $y = \cos x$ и спроектируем ее горизонтально на прямую $y = x$, а оттуда — вертикально на ось Ox (рис. 3.2). У всех точек прямой $y = x$ ординаты равны абсциссам, поэтому проекция на оси Ox равна $\cos 0$. Направление проектирования показано стрелками. Следующий член последовательности получается после нажатия кнопки «cos»: $x_2 = \cos x_1 = \cos 1$. Для получения x_2 на оси Ox найдем точку с ординатой $\cos 1$ на графике $y = \cos x$ и спроектируем ее горизонтально на прямую $y = x$, а оттуда — на ось Ox (рис. 3.3). Аналогично получим на оси Ox точку x_3 с абсциссой $\cos x_2$: $x_3 = \cos x_2$ (рис. 3.4). Процесс получения членов последовательности $\{x_n\}$ по формуле $x_{n+1} = \cos x_n$, $n = 3, 4, 5, \dots$ можно продолжить.

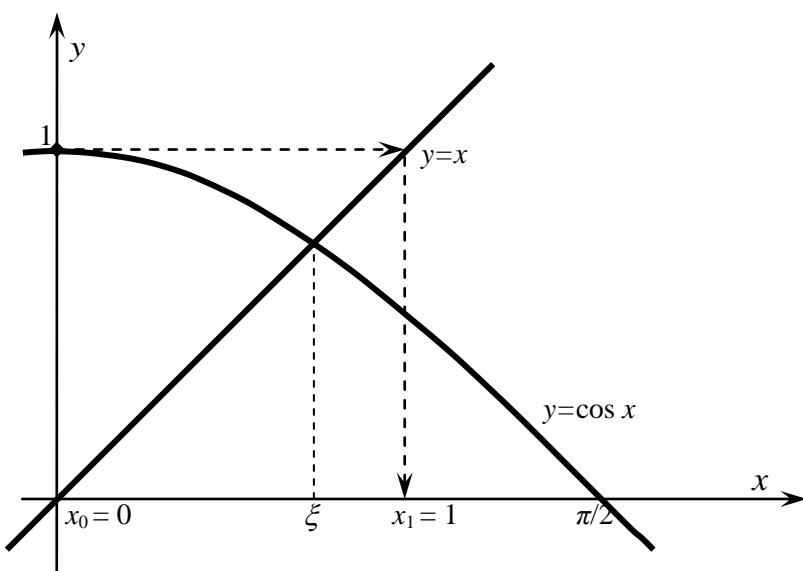


Рис. 3.2. Получение x_1 по формуле $x_1 = \cos x_0$, где $x_0 = 0$

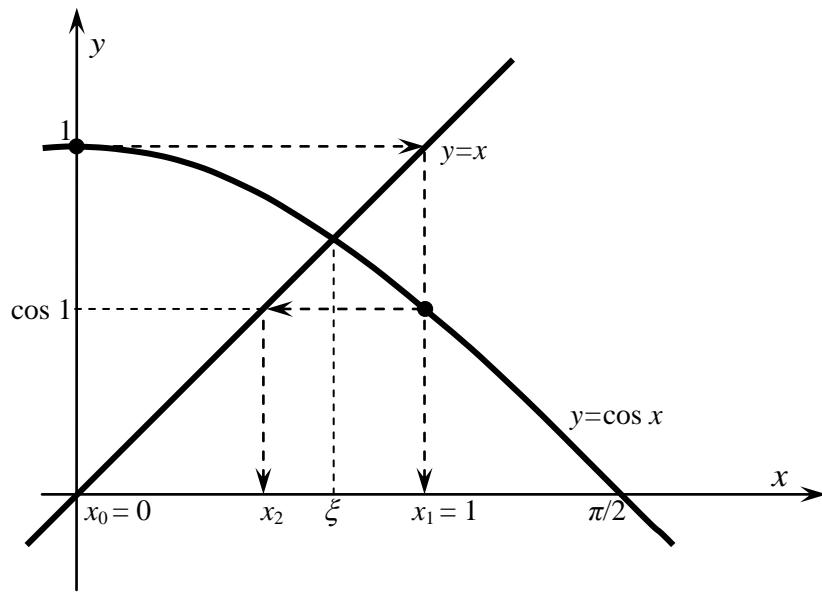


Рис. 3.3. Получение x_2 по формуле $x_2 = \cos x_1$, где $x_1 = \cos x_0$

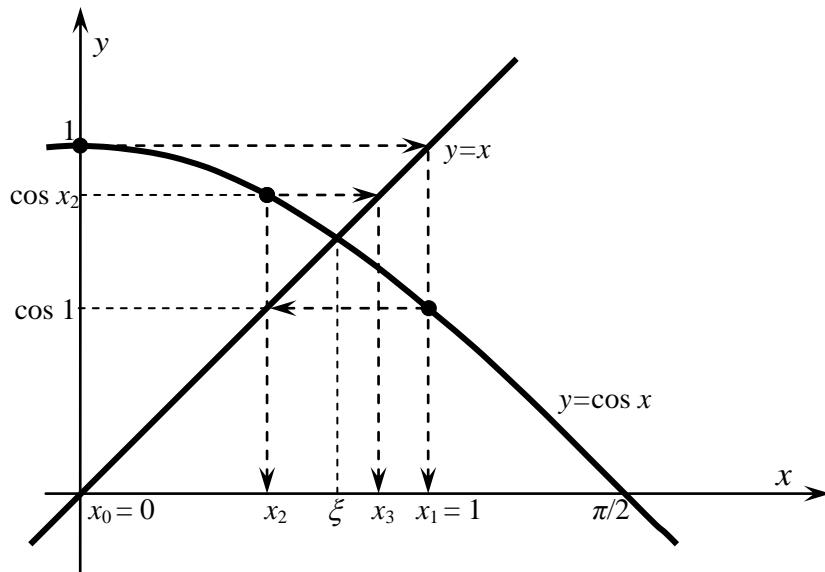


Рис. 3.4. Получение x_3 по формуле $x_3 = \cos x_2$, где $x_2 = \cos x_1$

Уберем с чертежа «все лишнее», отразив только процесс проектирования точек графика $y = \cos x$ на прямую $y = x$, абсциссы которых являются членами последовательности $\{x_n\}$ (рис. 3.5). По рис. 3.2—3.5 видим, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к корню уравнения $\cos x = x$. Она так и называется — *последовательность последовательных приближений* (к корню) или *итерационная последовательность*, а метод, которым она получена — *метод последовательных приближений* или *метод итераций*.

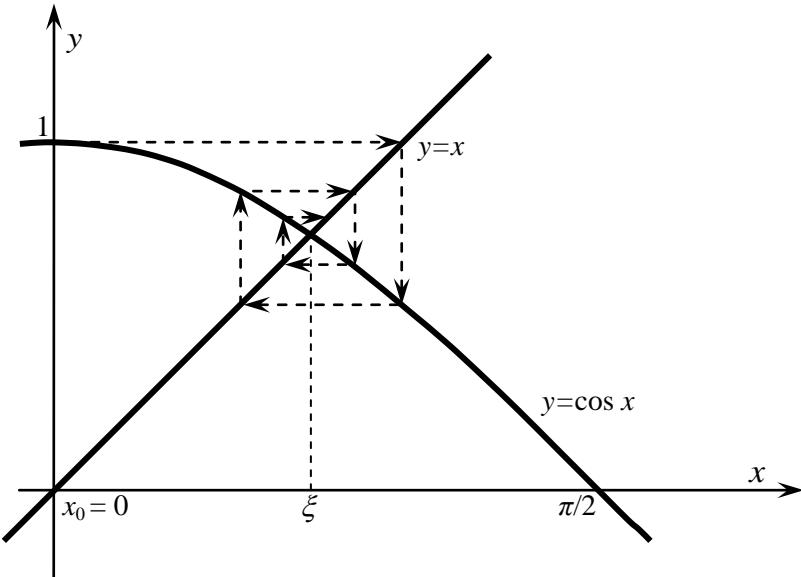


Рис. 3.5. Геометрическая интерпретация получения итерационной последовательности

Реализуем пошагово рассмотренный способ решения уравнения $\cos x = x$ в Excel.

1. Введем в A1 значение $x_0 = 0$, а в A2 — формулу вычисления следующего члена последовательности x_1 : «=COS(A1)» (рис. 3.6).
2. Будем копировать формулу из A2 вниз до тех пор, пока числа не начнут повторяться. Увеличив разрядность в столбце А до максимальной, в 92—93-ей строках получим корень уравнения $\cos x = x$ с 15-ю верными знаками после запятой: $\xi \approx 0,739085133215161$ (рис. 3.6). На рис. 3.6 для наглядности строки с 6-й по 88-ю свернуты.

1	A	0
2	A	=COS(A1)
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
1	A	0,000000000000000
2	A	1,000000000000000
3	A	0,540302305868140
4	A	0,857553215846393
5	A	0,654289790497779
89	A	0,739085133215160
90	A	0,739085133215161
91	A	0,739085133215160
92	A	0,739085133215161
93	A	0,739085133215161
94	A	

Рис. 3.6. Получение итерационной последовательности в Excel

Рассмотрим постановку и решение задачи в общем виде.

Пусть дано уравнение

$$f(x) = 0, \quad (3.1)$$

и точное значение корня ξ дифференцируемой функции $f(x)$ отделено на отрезке $[a; b]$: корень ξ принадлежит отрезку $[a; b]$ и единственный. Требуется вычислить ξ приближенно с точностью ε , то есть получить такое значение x , для которого гарантированно выполняется неравенство $|x - \xi| < \varepsilon$.

Перейдем от уравнения (3.1) к равносильному уравнению

$$x = \varphi(x) \quad (3.2)$$

и построим последовательность $\{x_n\}$ по рекуррентной формуле

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_0 \in [a; b], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Как уже было сказано, последовательность, построенная по формуле (3.3), называется *последовательностью последовательных приближений* или *итерационной последовательностью* (от лат. *iteratio* — повторение). Если существует предел последовательности (3.3) и функция $\varphi(x)$ непрерывна, то этот предел равен корню уравнения (3.2). Действительно, пусть $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Тогда $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = \varphi(\xi)$. Поскольку члены итерационной последовательности можно получать только после того, как уравнение (3.1) приведено к виду (3.2), то (3.2) часто называют *видом, удобным для итераций*.

Теорема (теорема сходимости метода итераций). *Пусть уравнение $x = \varphi(x)$ имеет единственный корень на отрезке $[a; b]$, и выполнены условия:*

- 1) $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на $[a; b]$;
- 2) $\varphi(x) \in [a; b]$ для всех x из отрезка $[a; b]$;
- 3) существует такое действительное число $0 < \alpha < 1$, что все значения производной функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$ ограничены по модулю сверху этим числом: $|\varphi'(x)| \leq \alpha$ для всех $x \in [a; b]$.

Тогда итерационная последовательность (3.3) сходится к корню уравнения (3.2) при любом начальном приближении $x_0 \in [a; b]$.

Погрешность метода итераций оценивается сверху по формуле

$$|x_n - \xi| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} |x_0 - x_{n-1}| \quad (3.4)$$

или по формуле

$$|x_n - \xi| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} |x_0 - x_1|. \quad (3.5)$$

Результат примера 1 можно интерпретировать так: от уравнения в виде (3.1) ($x - \cos x = 0$) перешли к уравнению, записанному в виде, удобном для итераций (3.2) ($x = \cos x$), и построили сходящуюся к корню уравнения (3.1) итерационную последовательность (3.3). Убедимся в выполнении условий теоремы сходимости метода итераций.

1. По рис. 3.1 видим, что уравнение $x = \cos x$ имеет единственный корень на отрезке $[0; 1,5]$ (графики убывающей и возрастающей функций пересекаются только один раз).
2. $\varphi(x) = \cos x$ определена и дифференцируема на отрезке $[0; 1,5]$.
3. $\varphi(x) = \cos x$ монотонно убывает на $[0; 1,5]$, поэтому для проверки условия 2 теоремы достаточно установить выполнение этого условия на концах отрезка: $\varphi(0) = \cos 0 = 1 \in [0; 1,5]$, $\varphi(1,5) = \cos 1,5 \in [0; 1,5]$.

4. $|\varphi'(x)| = |\sin x|$ — монотонно возрастающая на $[0; 1,5]$ неотрицательная функция, поэтому $\max_{x \in [0; 1,5]} |\varphi'(x)| = \sin 1,5 < \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Поэтому в качестве числа α , где $0 < \alpha < 1$, можно взять $\sin 1,5$.

Таким образом, в примере 1 выполнены все условия теоремы сходимости метода итераций, и сходящаяся итерационная последовательность была получена не случайно.

Пример 2. Вычислим каждый корень уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ на отрезке $[-3; 3]$ методом итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

Решение. Ранее корни этого уравнения были отделены (см. лабораторную работу № 1): $\xi_1 \in [-2; -1,5]$ и $\xi_2 \in [0; 0,5]$. Приведем данное уравнение к равносильному, записанному в виде (3.2), например, так: $x = \frac{-4x^4 + 7}{15}$. Проверим выполнение условий теоремы сходимости на первом и втором отрезках.

1. $x \in [-2; -1,5]$, $\varphi(x) = \frac{-4x^4 + 7}{15}$, функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[-2; -1,5]$ и $\varphi'(x) = -\frac{16}{15}x^3 > 0$ при $x \in [-2; -1,5]$. По знаку производной видим, что $\varphi(x)$ монотонно возрастает на $[-2; -1,5]$, поэтому проверим условие 2 теоремы только на концах отрезка:

$$\varphi(-2) = \frac{-4(-2)^4 + 7}{15} = -3,8 \notin [-2; -1,5],$$

$$\varphi(-1,5) = \frac{-4(-1,5)^4 + 7}{15} = -0,88(3) \notin [-2; -1,5].$$

Таким образом, условие 2 теоремы не выполняется. Но формулировка теоремы сходимости такова, что ее условия в совокупности являются достаточными (но не необходимыми), поэтому невыполнение какого-либо из них может и не повлиять на сходимость последовательности (3.3). Продолжим проверку. Условие 3 теоремы также не выполняется:

$$|\varphi'(x)| = |\varphi'(x)| = -\frac{16}{15}x^3 = \left| \frac{16}{15}x^3 \right| > 1, \text{ так как все множители под знаком модуля по модулю}$$

больше 1. Тем не менее, попробуем получить несколько первых членов последовательности (3.3) для различных начальных приближений $x_0 \in [-2; -1,5]$.

$$\text{a)} \quad x_0 = -2, \quad x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(-2) = \frac{-4(-2)^4 + 7}{15} = -3,8,$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(-3,8) = \frac{-4(-3,8)^4 + 7}{15} \approx -55,14 \text{ и так далее.}$$

Ясно, что дальнейшие члены итерационной последовательности будут только удаляться от отрезка, содержащего корень. Попробуем дать геометрическую интерпретацию полученному результату (рис. 3.7). Условие $|\varphi'(x)| > 1$ означает, что во всех точках отрезка $[-2; -1,5]$ график функции $y = \varphi(x)$ имеет больший коэффициент наклона касательной, чем график $y = x$ с угловым коэффициентом 1. То есть можно сказать, что график $y = \varphi(x)$ «круче» графика $y = x$ в окрестности корня ξ_1 . На рис. 3.7 схематично (не точно) изображены некоторые первые члены итерационной последовательности (3.3), полученные по тому же принципу, что и на рис. 3.4. Видим, что в этом случае итерационная последовательность (3.3) не сходится к ξ_1 , как бы близко к корню ни было выбрано начальное приближение x_0 .

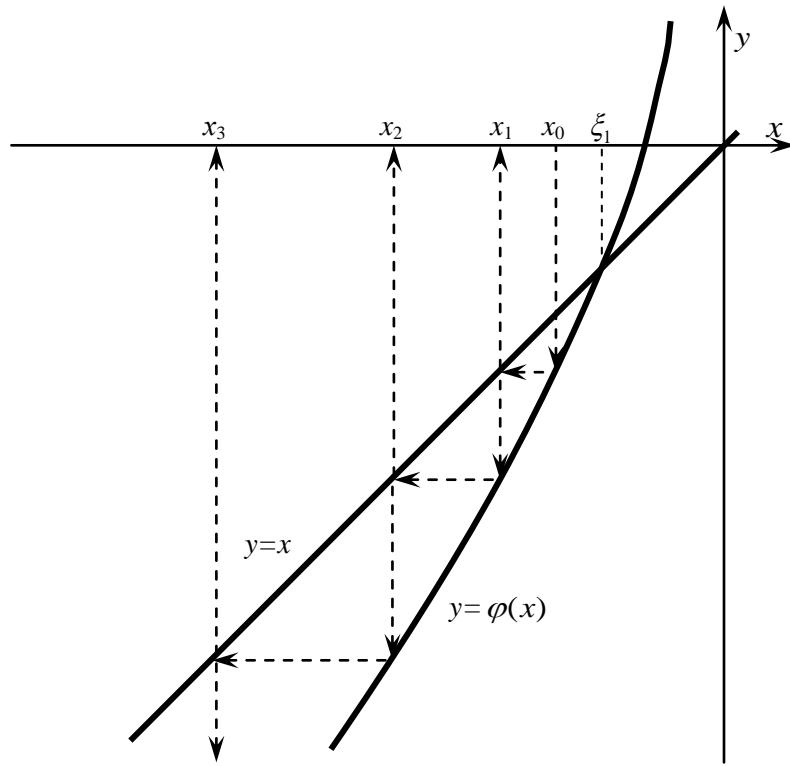


Рис. 3.7. Геометрическая интерпретация расходящейся итерационной последовательности

$$6) \quad x_0 = -1,5, \quad x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(-1,5) = \frac{-4(-1,5)^4 + 7}{15} = -0,88(3), \\ x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(-0,88(3)) = \frac{-4(-0,88(3))^4 + 7}{15} \approx 0,3043 \text{ и так далее.}$$

Возможное поведение последовательности (3.3) в этой ситуации представлено на рис. 3.8.

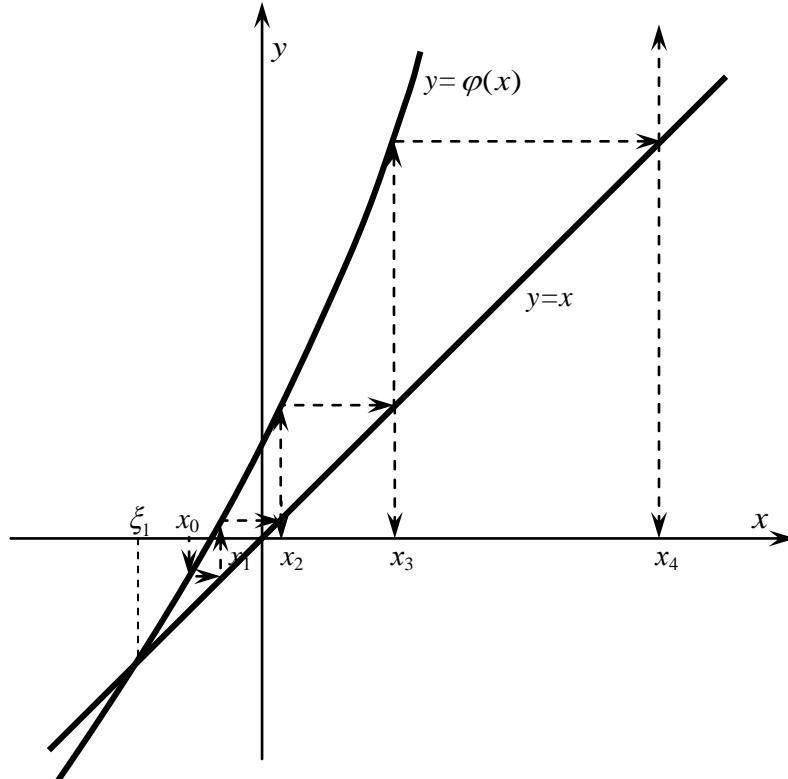


Рис. 3.8. Итерационная последовательность не сходится к корню ξ_1

Вывод, который следует из попытки уточнить корень $\xi_1 \in [-2; -1,5]$ методом итераций, таков: переход к виду, удобному для итераций, может быть неудачным. В этом случае надо попытаться перейти к виду (3.2) другим способом (см. далее).

2. $x \in [0; 0,5]$, $\varphi(x) = \frac{-4x^4 + 7}{15}$, функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[0; 0,5]$, и $\varphi'(x) = -\frac{16}{15}x^3 \leq 0$ при $x \in [0; 0,5]$, обращаясь в ноль только в одной точке. Поэтому $\varphi(x)$ монотонно убывает на отрезке $[0; 0,5]$. Проверим условие 2 теоремы только на концах отрезка:

$$\varphi(0) = \frac{-4(0)^4 + 7}{15} = \frac{7}{15} \in [0; 0,5],$$

$$\varphi(0,5) = \frac{-4(0,5)^4 + 7}{15} = \frac{6,75}{15} \in [0; 0,5].$$

Значит, и все промежуточные значения функции $\varphi(x)$ попадают в отрезок $[0; 0,5]$. Далее,

$$\max_{x \in [0; 0,5]} |\varphi'(x)| = \max_{x \in [0; 0,5]} \left| -\frac{16}{15}x^3 \right| = |\varphi'(0,5)| = \frac{16}{15} \cdot 0,5^3 = \frac{2}{15} < 1. \text{ Поэтому в качестве числа } \alpha, \text{ где}$$

$0 < \alpha < 1$, можно взять $\frac{2}{15}$ или любое другое число, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{2}{15} \leq \alpha < 1, \text{ например, } \alpha = 0,15.$$

Таким образом, все условия теоремы сходимости метода итераций на отрезке $[0; 0,5]$ выполнены, и можно строить итерационную последовательность для любого начального приближения $x_0 \in [0; 0,5]$:

$$x_0 = 0,$$

$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(0) = \frac{-4(0)^4 + 7}{15} = 0,4(6),$$

$x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(0,4(6)) = \frac{-4(0,4(6))^4 + 7}{15} \approx 0,45402$ и так далее. Здесь оставлено 5 знаков после запятой, так как требуемая точность — 10^{-3} .

Оценим погрешность x_2 :

$$\text{по формуле (3.4)} |x_2 - \xi| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_2 - x_1| \approx \frac{0,15}{1-0,15} \cdot |0,45402 - 0,46667| = 0,00253,$$

$$\text{по формуле (3.5)} |x_2 - \xi| \leq \frac{0,15^2}{1-0,15} \cdot \left| \frac{7}{15} - 0 \right| = 0,014.$$

В любом случае погрешность больше заданной точности, итерации надо продолжить:

$$x_3 = \varphi(x_2) \approx 0,45534 \text{ и } |x_3 - \xi| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_3 - x_2| \approx \frac{0,15}{1-0,15} \cdot |0,45534 - 0,45402| = 0,000264 < 10^{-3}.$$

Таким образом, приближенное значение корня ξ_2 , найденное методом итераций и записанное с тремя знаками после запятой, равно 0,455.

Реализация в *Excel* уточнения корня ξ_2 с точностью 10^{-3} и оценкой погрешности по формуле (3.4) показана на рис. 3.9. Последовательность действий и содержание формул ясны из рисунка. Проведите эксперимент по выбору начального приближения: изменяя начальное приближение x_0 из отрезка $[0; 0,5]$ в ячейке A2, проследите за сходимостью итерационной последовательности и номером приближения, для которого достигается заданная точность. В данном примере получается интересный факт: если условия теоремы сходимости

для отрезка $[0; 0,5]$ выполняются, то в пункте 1 б) $x_2 \approx 0,3043$ можно рассматривать как начальное при уточнении ξ_2 . Значит, последовательность из 1 б) все-таки сходится, но не к ξ_1 , а к ξ_2 .

	A	B	C
1	x_n	погр-ть	alpha
2	0,00000		0,15
3	$=(-4*A2^4+7)/15$		
4			
5			
6			

	A	B	C	D	E
1	x_n	погр-ть	alpha		
2	0,00000		0,15		
3	0,46667	$=\$C\$2/(1-\$C\$2)*ABS(A3-A2)$			
4					
5					
6					

	A	B	C
1	x_n	погр-ть	alpha
2	0,00000		0,15
3	0,46667	0,08235	
4	0,45402	0,00223	
5	0,45534	0,00023	
6			

Рис. 3.9. Организация вычислений в *Excel* для уточнения корня ξ_2 с точностью 10^{-3}

При уточнении ξ_2 в *Excel* можно получить машинное решение с 15-ю знаками после запятой (рис. 3.10): $\xi_2 \approx 0,455215807559219$. Приближенные значения корня начинают повторяться с 17-й строки, то есть x_{15} — машинное решение. В примере 1 машинное решение было получено на 91-м шаге. В таких случаях говорят, что рассматриваемая итерационная последовательность *сходится быстрее*, чем итерационная последовательность в примере 1, или что у данной последовательности *скорость сходимости выше*.

	A	B	C	D
1	x_n	погрешность		alpha= 0,15
2	0,000000000000000			
3	0,466666666666667	0,082352941176470600		
4	0,454019423868313	0,002231866376180110		
5	0,455335712958454	0,000232286310024957		
6	0,455203738009853	0,000023289696811904		
7	0,455217021938952	0,000002344222782166		
8	0,455215685368850	0,000000235865312213		
9	0,455215819853907	0,000000023732657202		
10	0,455215806322137	0,000000002387959389		
11	0,455215807683693	0,000000000240274506		
12	0,455215807546694	0,0000000000024176230		
13	0,455215807560479	0,0000000000002432593		
14	0,455215807559092	0,000000000000244755		
15	0,455215807559232	0,00000000000024618		
16	0,455215807559217	0,0000000000002478		
17	0,455215807559219	0,000000000000245		
18	0,455215807559219	0,000000000000020		
19	0,455215807559219	0,000000000000000		
20				

Рис. 3.10. Максимально возможная точность при получении ξ_2

В данном случае $\varphi(x) = \frac{-4x^4 + 7}{15}$ — убывающая на отрезке $[0; 0,5]$ функция, поэтому геометрическая интерпретация получения итерационной последовательности (3.3) напоми-

нает пример 1 (рис. 3.4, 3.5). Поскольку в рассматриваемом случае $0 \leq |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{15}$, а в примере 1 $0 \leq |\varphi'(x)| \leq \sin 1,5 \approx 0,9975$, то на отрезке, содержащем точку пересечения графиков $y = x$ и $y = \varphi(x)$, график $y = \frac{-4x^4 + 7}{15}$ значительно положе, чем график $y = \cos x$. Схематически процесс получения начальных членов итерационной последовательности $x_{n+1} = \frac{-4x_n^4 + 7}{15}$ для $x_0 = 0, n = 0, 1$ показан на рис. 3.11. Видим, что x_1 и x_2 располагаются к корню значительно ближе, чем члены с теми же номерами в примере 1.

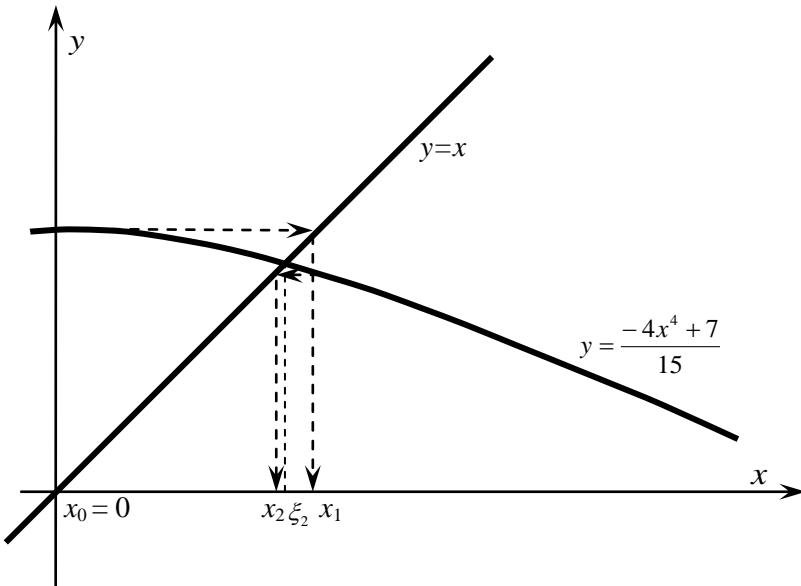


Рис. 3.11. Быстрая сходимость итерационной последовательности

Можно сделать вывод: чем меньше число α , ограничивающее сверху модуль функции $\varphi(x)$ на отрезке, содержащем корень уравнения $x = \varphi(x)$, тем быстрее сходится итерационная последовательность.

Вернемся к случаю 1 данного примера, в котором так еще и не удалось найти корень ξ_1 методом итераций. Перейдем от уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ к виду, удобному для итераций на отрезке $[-2; -1,5]$, например, следующим образом:

$$-4x^4 - 15x + 7 = 0,$$

$$4x^4 = 7 - 15x,$$

$$x = -\sqrt[4]{\frac{7 - 15x}{4}}.$$

Поскольку вычисляется отрицательный корень, перед корнем четвертой степени поставлен знак «-». Здесь хотелось бы отметить еще одну замечательную особенность метода итераций: можно не проверять выполнение условий теоремы сходимости, а написать программу и посмотреть, что получится. Необходимые действия по уточнению ξ_1 с максимальной машинной точностью ясны из рис. 3.12. Строки с 4-й по 18-ю свернуты.

A	B
1	-2
2	=((7-15*A1)/4)^0,25
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

1	2	A	B
1		-2	
2		-1,74395563737989	
3		-1,69682265427323	
19		-1,68549051833190	
20		-1,68549051833186	
21		-1,68549051833185	
22		-1,68549051833185	
23			
24			

Рис. 3.12. Максимально возможная точность при получении ξ_1

Значит, ξ_1 с точностью 10^{-3} приближенно равен $-1,685$. Проверьте самостоятельно выполнение условий теоремы сходимости метода итераций для полученного уравнения на отрезке $[-2; -1,5]$. Заметим, что здесь $\varphi'(x) = \frac{15}{16} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{4}{7-15x}\right)^3}$, поэтому

$$\frac{15}{16} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{4}{37}\right)^3} \leq \varphi'(x) \leq \frac{15}{16} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{4}{29,5}\right)^3} \approx 0,20949,$$

и в качестве числа α , где $|\varphi'(x)| \leq \alpha$ и $0 < \alpha < 1$, можно взять, например, 0,21 или 0,3. Значит, угловые коэффициенты касательных к графику функции $y = \varphi(x)$ в точках отрезка $[-2; -1,5]$ лежат в диапазоне от 0,17 до 0,21, и график $y = \varphi(x)$ значительно положе графика $y = x$. Геометрическая интерпретация сходящегося итерационного процесса в рассматриваемом случае представлена на рис. 3.13. Здесь для наглядности отмечены начальные члены x_0, x_1, x_2 двух итерационных последовательностей: с начальным приближением левее ξ_1 и правее ξ_1 .

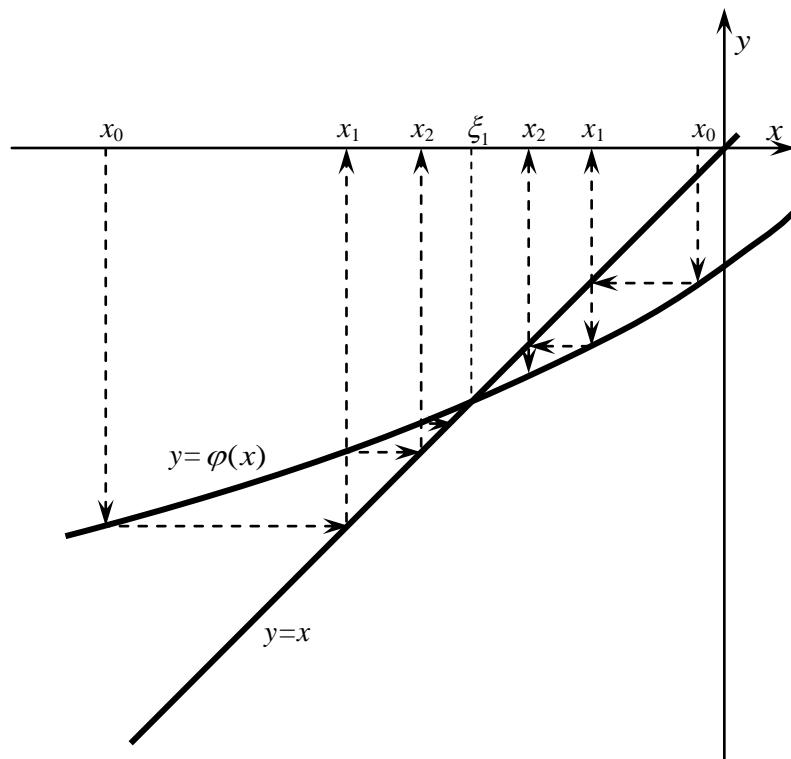


Рис. 3.13. Геометрическая интерпретация сходящейся итерационной последовательности

Проведите самостоятельно эксперименты с выбором начального приближения: изменения число в ячейке A1, убедитесь, что x_0 можно выбирать за пределами отрезка $[-2; -1,5]$.

Рассмотрим еще одну геометрическую интерпретацию получения итерационной последовательности (3.3): пусть $\varphi'(x) < 0$ и $|\varphi'(x)| > 1$ на отрезке, содержащем корень ξ уравнения $x = \varphi(x)$ (рис. 3.14). При указанных условиях касательные к графику функции $y = \varphi(x)$ будут более крутыми, чем прямая с угловым коэффициентом -1 , то есть $y = -x$, или параллельная ей. На рис. 3.14 одна из таких прямых проведена пунктиром. Начальное приближение x_0 выбрано достаточно близко к ξ , но последовательность (3.3) получается расходящейся.

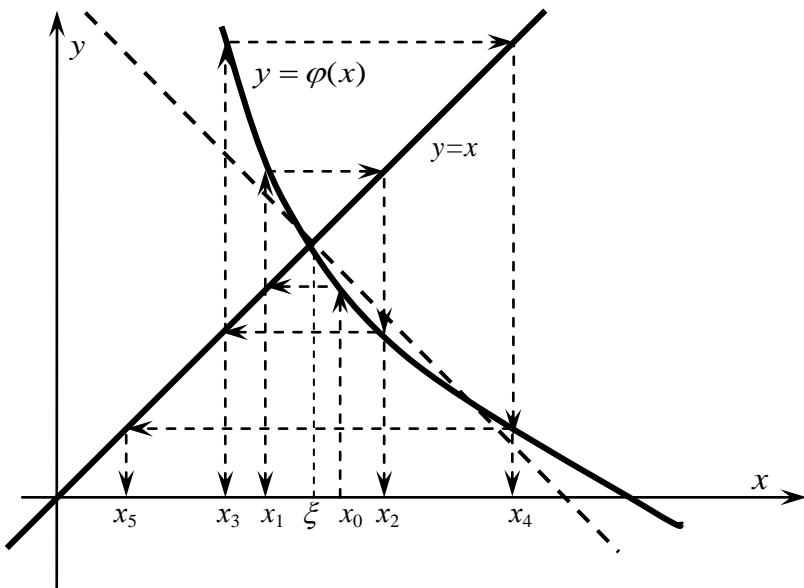


Рис. 3.14. Геометрическая интерпретация расходящейся итерационной последовательности

В примере 2 продемонстрирована возможностью неудачного перехода к виду, удобному для итераций: уравнение $f(x) = 0$ было приведено к виду $x = \varphi(x)$, но итерационная последовательность оказалась расходящейся. Хотелось бы иметь гарантию перехода к виду $x = \varphi(x)$ с выполнением всех условий теоремы сходимости. Решим эту задачу в общем виде. Покажем, что для непрерывно дифференцируемой монотонной функции $f(x)$, у которой производная $f'(x)$ сохраняет знак на $[a; b]$, такой переход возможен всегда.

Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке $[a; b]$, $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая на $[a; b]$ функция, $f'(x)$ сохраняет знак на $[a; b]$. Уравнение $f(x) = 0$ равносильно уравнению

$$x = x + c \cdot f(x), \quad (3.6)$$

где c — некоторая константа. Выясним, каким условиям должна удовлетворять константа c , чтобы для функции $\varphi(x) = x + c \cdot f(x)$ выполнялись все условия теоремы сходимости.

1. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, значит, и функция $\varphi(x) = x + c \cdot f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Поскольку $f(x)$ — дифференцируемая на $[a; b]$ функция и $\varphi'(x) = 1 + c \cdot f'(x)$, то и $\varphi(x)$ — дифференцируемая на $[a; b]$ функция. Для выполнения условия $|\varphi'(x)| < 1$ для всех x из отрезка $[a; b]$ необходимо, чтобы $1 + c \cdot f'(x) < 1$ или $c \cdot f'(x) < 0$, а значит, константа c имеет на $[a; b]$ знак, противоположный знаку $f'(x)$:

$$\operatorname{sign} c = -\operatorname{sign} f'(x), \quad (3.7)$$

где $\operatorname{sign} x$ — функция знака. Напомним, $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$ Тогда

$$c = \operatorname{sign} c \cdot |c|. \quad (3.8)$$

Поскольку $f'(x)$ сохраняет знак на $[a; b]$, тогда знак c определим из равенства (3.7).

2. Оценим $|c|$. Выясним, при каких значениях $|c|$ выполняется условие $|\varphi'(x)| \leq \alpha < 1$ для некоторого пока еще неизвестного числа α , где $0 < \alpha < 1$:

$$\begin{aligned} |1 + c \cdot f'(x)| &\leq \alpha, \\ -\alpha &\leq 1 + c \cdot f'(x) \leq \alpha, \\ -\alpha - 1 &\leq c \cdot f'(x) \leq \alpha - 1. \end{aligned}$$

Все три части этого двойного неравенства отрицательные. Возьмем входящие в них величины по модулю:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &\leq |c| \cdot |f'(x)| \leq \alpha + 1, \\ \frac{1 - \alpha}{|f'(x)|} &\leq |c| \leq \frac{1 + \alpha}{|f'(x)|}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Найдем самую узкую «вилку» возможных значений $|c|$. Наибольшего значения положительная дробь $\frac{1 - \alpha}{|f'(x)|}$ достигает при наименьшем значении знаменателя $|f'(x)|$. Найдем $m = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)|$. Наименьшего значения положительная дробь $\frac{1 + \alpha}{|f'(x)|}$ достигает при наибольшем значении знаменателя $|f'(x)|$. Найдем $M = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)|$. Обе величины — m и M — достигаются на $[a; b]$, так как $|f'(x)|$ — непрерывная положительная функция. Значит,

$$\frac{1 - \alpha}{m} \leq |c| \leq \frac{1 + \alpha}{M}. \quad (3.10)$$

Решим неравенство (3.10) сначала относительно α , а затем определим вилку для $|c|$:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \alpha}{m} &\leq \frac{1 + \alpha}{M}, \\ M \cdot (1 - \alpha) &\leq m \cdot (1 + \alpha), \\ M - \alpha M &\leq m + \alpha m, \\ M - m &\leq \alpha M + \alpha m, \\ \frac{M - m}{M + m} &\leq \alpha. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Поскольку числитель этой дроби меньше знаменателя, то дробь меньше 1. Поэтому удастся подобрать α такое, что

$$\frac{M - m}{M + m} \leq \alpha < 1. \quad (3.12)$$

Зная α , подставим его в неравенство (3.10) и определим величину $|c|$, подходящую для выполнения условия 3 теоремы сходимости.

Итак, алгоритм перехода от уравнения (3.1) к уравнению (3.6) следующий.

1. Находим $f'(x)$ и определяем знак $f'(x)$ на $[a; b]$.
2. Используя равенство (3.7), находим знак c .
3. Находим $m = \min_{x \in [a; b]} |f'(x)|$ и $M = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)|$.
4. Определяем α из неравенства (3.12).
5. Находим $|c|$ из неравенства (3.10).
6. Находим c из равенства (3.8).
7. Переходим от вида $f(x) = 0$ к виду $x = x + c \cdot f(x)$.

Пример 3. Продемонстрируем работу этого алгоритма на примере перехода от уравнения $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ к уравнению $x = x + c \cdot (-4x^4 - 15x + 7)$, для которого выполняются все условия теоремы сходимости на отрезке, например, $[-2; -1,5]$.

1. $f'(x) = -16x^3 - 15$. Производная меняет знак в точке, в которой она обращается в ноль: $-16x^3 - 15 = 0$. Отсюда $x = \sqrt[3]{-15/16}$, $f'(x) > 0$ при $x < \sqrt[3]{-15/16}$ и $f'(x) < 0$ при $x > \sqrt[3]{-15/16}$. Видим, что отрезок $[-2; -1,5]$ целиком входит в решение неравенства $x < \sqrt[3]{-15/16}$, поэтому $f'(x) > 0$ на $[-2; -1,5]$.
2. $\text{sign } c = -\text{sign } f'(x) = -1$.
3. $m = \min_{x \in [-2; -1,5]} |-16x^3 - 15| = f'(-1,5) = 39$, так как $f'(x) = -16x^3 - 15$ — монотонно убывающая положительная на $[-2; -1,5]$ функция. $M = \max_{x \in [-2; -1,5]} |-16x^3 - 15| = f'(-2) = 113$.
4. $\frac{113 - 39}{113 + 39} \leq \alpha < 1$ или $\frac{74}{152} \leq \alpha < 1$. Выберем $\alpha = 0,5$.
5. $\frac{1 - \alpha}{m} \leq |c| \leq \frac{1 + \alpha}{M}$ или $\frac{1 - 0,5}{39} \leq |c| \leq \frac{1 + 0,5}{113}$. Получили $0,0128205... \leq |c| \leq 0,0132743...$. Выберем $|c| = 0,013$.
6. $c = \text{sign } c \cdot |c| = -1 \cdot 0,013 = -0,013$.
7. Уравнение $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ равносильно уравнению $x = x - 0,013 \cdot (-4x^4 - 15x + 7)$.

Реализация метода итераций для последнего уравнения приведена на рис. 3.15. Необходимые действия по уточнению ξ_1 с максимальной машинной точностью ясны из рисунка. Строки с 4-й по 18-ю свернуты.

	A	B
1	-2	
2	=A1-0,013*(-4*A1^4-15*A1+7)	
3		
4		
5		
6		
7		
19		
20		
21		
22		

Рис. 3.15. Уточнение корня $x = x - 0,013 \cdot (-4x^4 - 15x + 7)$ из отрезка $[-2; -1,5]$

Самостоятельно приведите уравнение $-4x^4 - 15x + 7 = 0$ к виду $x = x + c \cdot (-4x^4 - 15x + 7)$, для которого выполняются все условия теоремы сходимости на отрезке $[0; 0,5]$.

Замечание 1. Можно доказать, что при выполнении всех условий теоремы сходимости, кроме условия 2, оно выполняется автоматически.

Замечание 2. При $\alpha \leq 0,5$ выполняется неравенство $\frac{\alpha}{1-\alpha} \leq \frac{0,5}{1-0,5} = 1$, и из оценки погрешности (3.4) можно получить простой признак достижения заданной точности:

$$|x_n - \xi| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} |x_n - x_{n-1}| \leq |x_n - x_{n-1}|,$$

и если $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, то заданная точность достигнута. Например, при $\varepsilon = 10^{-k}$, где k — натуральное число, выполнение неравенства $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-k}$ означает, что k знаков после запятой в записи x_n и x_{n-1} совпадают. Таким образом, процесс уточнения корня надо проводить до тех пор, пока k знаков после запятой в записи членов итерационной последовательности не начнут повторяться.

Замечание 3. Метод итераций сходится для любого начального приближения из рассматриваемого отрезка. Поэтому незначительная возможная ошибка при расчете вручную может не повлиять на уточнение корня: полученное с ошибкой число может рассматриваться как начальное приближение.

Замечание 4. Совершенно очевидно, что итерационная последовательность может либо сходиться к искомому корню, либо не сходиться к нему. Значит, можно не тратить время на проверку выполнения условий теоремы сходимости, а сразу по виду (3.2) составлять программу и строить итерационную последовательность. Опасность в том, что можно не распознать сходимость при низкой скорости сходимости.

Задание для самостоятельной работы

Отделите и вычислите все корни уравнения методом итераций с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$. Для этого приведите уравнение к виду, удобному для итерации $x = \varphi(x)$; выясните выполнение условий теоремы сходимости метода итераций на отрезке, содержащем корень; определите число a .

Вариант 1. $x^4 + 10x^3 - 1 = 0$.

Вариант 2. $x^3 + \sin x - 12x + 1 = 0$.

Вариант 3. $x^5 - x - 0,2 = 0$.

Вариант 4. $x - 0,2 \operatorname{tg} x = 0$, $x \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Вариант 5. $x - \sin x - 0,25 = 0$.

Вариант 6. $x^5 + 2x - 1 = 0$.

Вариант 7. $3x - 2 \cos x + 1,5 = 0$.

Вариант 8. $x^2 + 4 \sin x - 1 = 0$.

Вариант 9. $0,5x - \ln x - 5 = 0$.

Вариант 10. $x^5 + 3x - 1 = 0$.

Вариант 11. $2,5x^2 - \sin x - 3 = 0$.

Вариант 12. $e^{2x} - 4x - 6 = 0$.

Вариант 13. $3x - \cos x + 1 = 0$.

Вариант 14. $2^x - 4x - 5 = 0$.

Вариант 15. $e^x - 6x - 3 = 0$.

Вариант 16. $x^5 + 4x - 1 = 0$.

Вариант 17. $2,5x - \ln x - 5 = 0$.

Вариант 18. $x^3 + 4 \sin x = 0$.

Вариант 19. $3,5x^2 - \sin x - 3 = 0$.

Вариант 20. $3,8x - \ln x - 5 = 0$.

Лабораторная работа № 4
Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений:
метод Гаусса, метод Крамера, метод обратной матрицы

Метод Гаусса

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4.1)$$

В матричной форме эту систему можно записать

$$Ax = b, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса систему (4.1) необходимо привести к равносильной системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 + \dots + m_{1n}x_n = r_1, \\ x_2 + m_{23}x_3 + \dots + m_{2n}x_n = r_2, \\ x_3 + \dots + m_{3n}x_n = r_3, \\ \dots \\ x_{n-1} + m_{n-1,n}x_n = r_{n-1}, \\ x_n = r_n, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

или в матричной форме

$$Mx = r, \text{ где } M = \begin{pmatrix} 1 & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Элементы матрицы M , стоящие на главной диагонали, равны 1, а под главной диагональю — нулю. Таким образом, из последнего уравнения системы (4.3) известно значение переменной x_n , равное r_n , зная которое из предпоследнего уравнения системы (4.3) можно найти x_{n-1} . Зная x_n и x_{n-1} , из третьего снизу уравнения можно найти x_{n-2} и так далее до x_1 . Приведение системы (4.1) к виду (4.3) называется **прямым ходом метода Гаусса**. Тождественные преобразования проводятся при этом над расширенной матрицей системы (4.1) по определенному алгоритму, который напомним при решении конкретного примера. Последовательное нахождение $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$ из системы (4.3) называется **обратным ходом метода Гаусса**.

Пример 1. Решим методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2+7x_3+8x_4-5x_5=32, \\ -7x_1+5x_2+6x_3-x_4=17, \\ 3x_1+5x_2-4x_3+7x_5=36, \\ 2x_1-5x_2+8x_3-9x_4+15x_5=55, \\ -6x_1+4x_2+7x_3+x_4+x_5=32. \end{cases} \quad (4.5)$$

Прямой ход метода Гаусса

Алгоритм метода Гаусса реализуется с помощью элементарных преобразований (ЭП) строк расширенной матрицы системы (4.1):

ЭП I типа: перестановка строк местами;

ЭП II типа: умножение всех элементов строки на число, отличное от нуля;

ЭП III типа: прибавление к элементам строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;

ЭП IV типа: исключение нулевой строки.

Здесь будет рассмотрен алгоритм без ЭП I типа. Возможность применения ЭП IV типа обсудим позже.

Запишем расширенную матрицу данной системы и реализуем алгоритм прямого хода:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & 3 & 7 & 8 & -5 & 32 \\ -7 & 5 & 6 & -1 & 0 & 17 \\ 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 36 \\ 2 & -5 & 8 & -9 & 15 & 55 \\ -6 & 4 & 7 & 1 & 1 & 32 \end{array} \right). \quad (4.6)$$

Шаг 1. Получим на главной диагонали в 1-й строке единицу. Поделим 1-ю строку матрицы на диагональный элемент, то есть на -2 , (таким образом, применим ЭП II типа, умножив 1-ю строку на $-0,5$):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1,5 & -3,5 & -4 & 2,5 & -16 \\ -7 & 5 & 6 & -1 & 0 & 17 \\ 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 36 \\ 2 & -5 & 8 & -9 & 15 & 55 \\ -6 & 4 & 7 & 1 & 1 & 32 \end{array} \right). \quad (4.7)$$

Шаг 2. С помощью единицы на главной диагонали в 1-й строке получим нули в первом столбце во всех строках, лежащих ниже: умножим 1-ю строку на 7 и сложим со 2-й (ЭП III типа); умножим 1-ю строку на -3 и сложим с 3-й; умножим 1-ю строку на -2 и сложим с 4-й; умножим 1-ю строку на 6 и сложим с 5-й. Получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1,5 & -3,5 & -4 & 2,5 & -16 \\ 0 & -5,5 & -18,5 & -29 & 17,5 & -95 \\ 0 & 9,5 & 6,5 & 12 & -0,5 & 84 \\ 0 & -2 & 15 & -1 & 10 & 87 \\ 0 & -5 & -14 & -23 & 16 & -64 \end{array} \right). \quad (4.8)$$

Шаг 3. Повторим шаг 1 для 2-й строки: поделим 2-ю строку матрицы на диагональный элемент, то есть на $-5,5$, получим на главной диагонали во 2-й строке единицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1,5 & -3,5 & -4 & 2,5 & -16 \\ 0 & 1 & \frac{185}{55} & \frac{290}{55} & -\frac{175}{55} & \frac{950}{55} \\ 0 & 9,5 & 6,5 & 12 & -0,5 & 84 \\ 0 & -2 & 15 & -1 & 10 & 87 \\ 0 & -5 & -14 & -23 & 16 & -64 \end{array} \right) \quad (4.9)$$

Оставляем обыкновенные дроби, не производя деление, так как в случае перехода к десятичным дробям неизбежно возникнут ошибки округления коэффициентов, изменение которых может вызвать и изменение решения.

Шаг 4. Повторим шаг 2 для 3, 4 и 5 строк: с помощью единицы на главной диагонали во 2-й строке получим нули во втором столбце во всех строках, лежащих ниже: умножим 2-ю строку на $-9,5$ и сложим с 3-й; умножим 2-ю строку на 2 и сложим с 4-й; умножим 2-ю строку на 5 и сложим с 5-й. Выполнив сокращение дробей, получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1,5 & -3,5 & -4 & 2,5 & -16 \\ 0 & 1 & \frac{37}{11} & \frac{58}{11} & -\frac{35}{11} & \frac{190}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{280}{11} & -\frac{419}{11} & \frac{327}{11} & -\frac{881}{11} \\ 0 & 0 & \frac{239}{11} & \frac{105}{11} & \frac{40}{11} & \frac{1337}{11} \\ 0 & 0 & \frac{31}{11} & \frac{37}{11} & \frac{1}{11} & \frac{246}{11} \end{array} \right) \quad (4.10)$$

Шаг 5. Повторим шаг 1 для 3-й строки.

Шаг 6. Повторим шаг 2 для 4-й и 5-й строк.

Шаг 7. Повторим шаг 1 для 4-й строки.

Шаг 8. Повторим шаг 2 для 5-й строки.

Шаг 9. Повторим шаг 1 для 5-й строки. Получим матрицу M (см. соотношение (4.4)) с единицами на главной диагонали:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1,5 & -3,5 & -4 & 2,5 & -16 \\ 0 & 1 & \frac{37}{11} & \frac{58}{11} & -\frac{35}{11} & \frac{190}{11} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{419}{280} & -\frac{327}{280} & \frac{881}{280} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{89353}{70741} & -\frac{163801}{70741} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \quad (4.11)$$

На этом прямой ход метода Гаусса завершен.

Обратный ход метода Гаусса

Шаг 1. Вспоминая, что (4.11) — расширенная матрица системы, равносильной исходной, из последнего пятого уравнения найдем $x_5 = 5$.

Шаг 2. Из четвертого уравнения $x_4 - \frac{89353}{70741}x_5 = -\frac{163801}{70741}$ найдем x_4 :

$$x_4 = -\frac{163801}{70741} + \frac{89353}{70741} x_5 = -\frac{163801}{70741} + \frac{89353}{70741} \cdot 5 = \frac{282964}{70741} = 4.$$

Шаг 3. Из третьего уравнения $x_3 + \frac{419}{280} x_4 - \frac{327}{280} x_5 = \frac{881}{280}$ найдем x_3 :

$$x_3 = \frac{881}{280} - \frac{419}{280} x_4 + \frac{327}{280} x_5 = \frac{881}{280} - \frac{419}{280} \cdot 4 + \frac{327}{280} \cdot 5 = \frac{840}{280} = 3.$$

Шаг 4. Аналогично из второго уравнения найдем $x_2 = 2$.

Шаг 5. Аналогично из первого уравнения найдем $x_1 = 1$.

Обратный ход метода Гаусса завершен, можно выполнить **проверку**:

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 - 5 \cdot 5 = 32, \\ -7 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 4 = 17, \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = 36, \\ 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + 8 \cdot 3 - 9 \cdot 4 + 15 \cdot 5 = 55, \\ -6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 4 + 5 = 32. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Замечание 1. Ясно, что перестановка строк не меняет решения, но ЭП I типа не проводились намеренно. Это преобразование применяется, если на главной диагонали перед очередным делением на диагональный элемент находится ноль или достаточно малое число, так как деление на малое число дает большую вычислительную погрешность, а на ноль делить нельзя. Тогда из всех строк, в которых еще не получены единицы на главной диагонали выбирается строка, например, с самым большим по модулю коэффициентом, который после перестановки с текущей строкой окажется на главной диагонали. В рассмотренном примере этого не потребовалось. ЭП I типа усложняет алгоритм метода Гаусса.

Замечание 2. Если при реализации прямого хода метода Гаусса возникает нулевая строка, то система имеет бесконечно много решений, так как хотя бы одна переменная в этом случае является свободной.

Достаточно большое для ручной обработки количество уравнений, возникновение обыкновенных дробей с громоздкими знаменателями делают метод Гаусса трудно реализуемым. Достаточно длинная разрядная сетка вычислительной системы *Excel* (15 знаков после запятой в мантиссе) позволяет хранить коэффициенты, являющиеся несократимыми обыкновенными дробями, в виде достаточно точно их приближающих конечных десятичных дробей. Поэтому метод Гаусса можно реализовать в *Excel*. Однотипные действия алгоритма выполняются с помощью копирования.

Воспроизведем в *Excel* шаги 1—9 алгоритма прямого хода метода Гаусса для решения системы (4.5).

1. В A1:F5 введем расширенную матрицу (4.6). Для наглядности будем отделять одну матрицу от другой сплошной нижней границей. Отделим также столбец правых частей (рис. 4.1). При копировании границы могут нарушаться, их надо поправлять.

	A	B	C	D	E	F
1	-2	3	7	8	-5	32
2	-7	5	6	-1	0	17
3	3	5	-4	0	7	36
4	2	-5	8	-9	15	55
5	-6	4	7	1	1	32

Рис. 4.1. Расширенная матрица (4.5)

2. Ниже в A6:F10 получим элементы матрицы (4.8), совместив шаг 1 и шаг 2. В *Excel* нельзя применять циклические ссылки, то есть в формуле, вводимой в какую-либо ячейку, нельзя использовать адрес этой же ячейки. Поэтому невозможно преобразовывать данные в ячейке с использованием числа, хранящегося в этой ячейке, и результат помещать в нее же. Значит,

одной преобразуемой матрицей не обойтись, будем последовательно воспроизводить все ранее полученные матрицы. В строке 6 получим элементы 1-й строки предыдущей матрицы, деленные на диагональный элемент: в A6 введем формулу «=A1/\$A\$1» и скопируем ее вправо в B6:F6 (рис. 4.2). Теперь в строках 7—10 реализуем шаг 2. Сначала в A7 введем формулу так, чтобы ее с нужным смыслом можно было копировать вправо и вниз: «=A\$6*(-\$A2)+A2» (рис. 4.3). Теперь при копировании вправо адреса столбцов ячеек преобразованной 1-й строки будут меняться от A\$6 до F\$6, а вниз — нет; адрес столбца элемента (-\$A2), на который умножается 1-я строка, при копировании вправо меняется не будет, а при копировании вниз — будет от (-\$A2) до (-\$A5). Таким образом, 1-я строка будет последовательно умножаться на один и тот же элемент — элемент, противоположный стоящему в 1-м столбце всех строк, лежащих ниже 1-й. Адрес текущей ячейки A2 будет меняться при копировании вправо и вниз.

	A	B	C	D	E	F
1	-2	3	7	8	-5	32
2	-7	5	6	-1	0	17
3	3	5	-4	0	7	36
4	2	-5	8	-9	15	55
5	-6	4	7	1	1	32
6	=A1/\$A\$1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
7						
8						
9						
10						

Рис. 4.2. Деление на диагональный элемент коэффициентов 1-й строки

	A	B	C	D	E	F
1	-2	3	7	8	-5	32
2	-7	5	6	-1	0	17
3	3	5	-4	0	7	36
4	2	-5	8	-9	15	55
5	-6	4	7	1	1	32
6	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
7	=A\$6*(-\$A2)+A2		-18,5	-29	17,5	-95
8						
9						
10						

Рис. 4.3. Сложение 2-й строки с преобразованной 1-й, умноженной на 7

	A	B	C	D	E	F
1	-2	3	7	8	-5	32
2	-7	5	6	-1	0	17
3	3	5	-4	0	7	36
4	2	-5	8	-9	15	55
5	-6	4	7	1	1	32
6	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
7	0	-5,5	-18,5	-29	17,5	-95
8	0	9,5	=C\$6*(-\$A3)+C3		-0,5	84
9						
10						

Рис. 4.4. Сложение 3-й строки с преобразованной 1-й, умноженной на -3

Формулу из A7 копируем вправо до F7, а затем A7:F7 вниз до A10:F10. При копировании можно убедиться в корректности получаемых формул (рис. 4.4). В итоге в A6:F10 получим матрицу (4.8) (рис. 4.5).

6	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
7	0	-5,5	-18,5	-29	17,5	-95
8	0	9,5	6,5	12	-0,5	84
9	0	-2	15	-1	10	87
10	0	-5	-14	-23	16	-64

Рис. 4.5. Матрица (8)

3. Получим матрицу (4.10) в A11:F15, выполнив шаги 3 и 4. Для этого строку 6 перенесем без изменений в строку 11: в A11 введем формулу «=A6» и скопируем вправо до F11 (рис. 4.6).

6	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
7	0	-5,5	-18,5	-29	17,5	-95
8	0	9,5	6,5	12	-0,5	84
9	0	-2	15	-1	10	87
10	0	-5	-14	-23	16	-64
11	=A6	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
12						
13						
14						
15						

Рис. 4.6. Перенос строки, не требующей изменения

Поделим 2-ю строку на диагональный элемент: в A12 введем формулу «=A7/\$B\$7» и скопируем ее вправо в B12:F12 (рис. 4.7).

6	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
7	0	-5,5	-18,5	-29	17,5	-95
8	0	9,5	6,5	12	-0,5	84
9	0	-2	15	-1	10	87
10	0	-5	-14	-23	16	-64
11	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
12	=A7/\$B\$7	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
13						
14						
15						

Рис. 4.7. Деление 2-й строки на диагональный элемент

Теперь в строках 13—15 реализуем шаг 4. Следуя логике алгоритма, в B13 введем формулу преобразования строк, лежащих ниже 2-й: «=B\$12*(-\$B8)+B8». Эта формула абсолютно аналогична формуле в A6. Скопируем ее во все еще не заполненные ячейки из A13:F15 (рис. 4.8). Заметим, что формулу можно было бы вводить сразу в A13, но в этом случае трудно проследить логику алгоритма — преобразование строк, лежащих ниже 2-й с помощью единицы, стоящей на главной диагонали во 2-й строке и 2-м столбце. В результате копирования получим матрицу (4.10) (рис. 4.9). В отличие от точных значений коэффициентов матрицы (4.10), выраженных обыкновенными дробями при реализации алгоритма Гаусса вручную

в A11:F15 получились конечные десятичные дроби, хотя и с большим количеством знаков после запятой. Эти знаки можно увидеть, увеличив разрядность.

6	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
7	0	-5,5	-18,5	-29	17,5	-95
8	0	9,5	6,5	12	-0,5	84
9	0	-2	15	-1	10	87
10	0	-5	-14	-23	16	-64
11	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
12	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
13	0	=B\$12*(-\$B8)+B8	-38,0909	29,72727	-80,0909	
14						
15						

Рис. 4.8. Преобразование строк, лежащих ниже 2-й строки

11	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
12	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
13	0	0	-25,4545	-38,0909	29,72727	-80,0909
14	0	0	21,72727	9,545455	3,636364	121,5455
15	0	0	2,818182	3,363636	0,090909	22,36364

Рис. 4.9. Матрица (4.10)

4. По аналогии с пунктами 2 и 3 выполним дальнейшие преобразования матрицы (шаги 5—9) в A16:F20, в A21:F25 и в A26:F30: сначала переносим строки, не требующие преобразования (прямым присваиванием и копированием в нужный диапазон; формулу можно скопировать из предыдущей матрицы); затем делим на диагональный элемент в очередной строке и преобразуем строки, лежащие ниже. В ячейках A26:F30 получим матрицу (4.11) (рис. 4.10). Прямой ход реализован.

16	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
17	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
18	0	0	1	1,496429	-1,16786	3,146429
19	0	0	0	-22,9679	29,01071	53,18214
20	0	0	0	-0,85357	3,382143	13,49643
21	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
22	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
23	0	0	1	1,496429	-1,16786	3,146429
24	0	0	0	1	-1,2631	-2,3155
25	0	0	0	0	2,303996	11,51998
26	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
27	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
28	0	0	1	1,496429	-1,16786	3,146429
29	0	0	0	1	-1,2631	-2,3155
30	0	0	0	0	1	5

Рис. 4.10. Матрица (4.11)

В обратном ходе метода Гаусса переменные вычисляются «снизу вверх» накоплением суммы из системы (4.3):

$$x_i = r_i - \sum_{j=i+1}^n m_{ij}x_j, \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

При этом начальное значение i -й суммы равно r_i — правой части i -го уравнения системы (4.3). При реализации алгоритма обратного хода в Excel будем вычислять переменные в прямом смысле снизу вверх в ячейках A31:E35.

1. В столбце Е (соответствующему x_5) выполним начальные присваивания суммам: в E35 введем формулу «=F30» и скопируем ее вверх в E34:E31 (рис. 4.11). При этом в E35 сразу появится значение $x_5 = 5$.

26	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
27	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
28	0	0	1	1,496429	-1,16786	3,146429
29	0	0	0	1	-1,2631	-2,3155
30	0	0	0	0	1	5
31						-16
32						17,27273
33						3,146429
34						-2,3155
35						=F30

Рис. 4.11. Начальные присваивания

2. Вычисления с использованием x_5 нужны будут во всех строках, лежащих выше 35-й. В D34 введем формулу накопления нового значения суммы через предыдущее «=E34-E29*E\$35», зафиксировав номер строки x_5 с целью копирования этой формулы вверх в D33: D31. В ячейке D34 сразу появится значение $x_4 = 4$ (рис. 4.12).

26	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
27	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
28	0	0	1	1,496429	-1,16786	3,146429
29	0	0	0	1	-1,2631	-2,3155
30	0	0	0	0	1	5
31						-16
32						17,27273
33						3,146429
34						=E34-E29*E\$35
35						5

Рис. 4.12. Организация накопления

3. Накопление в столбце С аналогично накоплению в столбце D, поэтому формулу из D33 можно скопировать в C33, но при этом некорректно будет работать ссылка на D\$35 (рис. 4.13) вместо D\$34. В режиме отображения ссылок рамку, указывающую на D\$35 надо перетащить на D\$34, и ссылка в формуле изменится и станет корректной.

26	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
27	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
28	0	0	1	1,496429	-1,16786	3,146429
29	0	0	0	1	-1,2631	-2,3155
30	0	0	0	0	1	5
31				-28,5		-16
32				33,18182	17,27273	
33			=D33-D28*D\$35		3,146429	
34				4	-2,3155	
35					5	

Рис. 4.13. Некорректная ссылка при фиксированном номере строки

После этого формулу можно копировать вверх в C32:C31. В ячейке C33 сразу появится значение $x_3 = 3$ (рис. 4.14).

26	1	-1,5	-3,5	-4	2,5	-16
27	0	1	3,363636	5,272727	-3,18182	17,27273
28	0	0	1	1,496429	-1,16786	3,146429
29	0	0	0	1	-1,2631	-2,3155
30	0	0	0	0	1	5
31			=D31-D26*D\$34		-16	
32			12,09091	33,18182	17,27273	
33			3	8,985714	3,146429	
34				4	-2,3155	
35					5	

Рис. 4.14. Формулы накопления в столбце С

4. Аналогично получаем $x_2 = 2$ в B32 и $x_1 = 1$ в A31. Обратный ход метода Гаусса реализован.

С помощью написанной программы можно решать совместные системы из пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными.

Пример 2. Решим систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+x_4-x_5=-2, \\ 3x_1+4x_2-2x_3-x_4-x_5=3, \\ -x_1+4x_2-6x_3+3x_4+2x_5=2, \\ 2x_1-x_2+x_3-8x_4+10x_5=4, \\ -3x_1+2x_2+4x_3+2x_4-x_5=4. \end{cases} \quad (4.12)$$

Для этого в ячейки A1:F5 надо ввести новую расширенную матрицу системы (4.12), и в A31, B32, C33, D34, E35 сразу же прочитать решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$.

Можно решать системы и меньшей размерности.

Пример 3. Решим систему

$$\begin{cases} x_1+2x_2-5x_3+x_4=-1, \\ 3x_1+4x_2-2x_3-x_4=4, \\ -x_1+4x_2-6x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-x_2+x_3-8x_4=-6. \end{cases} \quad (4.13)$$

Для этого преобразуем ее в систему из пяти линейных алгебраических уравнений с пятью неизвестными: введем в рассмотрение новую искусственную переменную $x_5 = 0$ и добавим пятое слагаемое, содержащее x_5 , в каждое из уравнений системы. В этом случае правые части не изменятся при любых числовых коэффициентах перед x_5 . Новое пятое уравнение может полностью повторять, например, четвертое, но иметь отличный коэффициент при x_5 для того, чтобы не получилась вырожденная матрица коэффициентов. Расширенная матрица новой системы приведена, например, на рис. 4.15.

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	-5	1	10	-1
2	3	4	-2	-1	5	4
3	-1	4	-6	3	3	0
4	2	-1	1	-8	8	-6
5	2	-1	1	-8	-3	-6

Рис. 4.15. Расширенная матрица СЛАУ с четырьмя неизвестными

Интересующее нас решение находится в A31, B32, C33, D34: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 1$ (рис. 4.16). В E35, как и ожидалось, находится $x_5 = 0$. Аналогично можно поступать и с системами меньшей размерности.

31	1	3	-2	-1	-1	
32		1	-5,5	-3,5	-3,5	
33			1	0,714286	0,714286	
34				1	1	
35					0	

Рис. 4.16. Решение СЛАУ с четырьмя неизвестными

Пример 4. И, наконец, проведем эксперимент с вырожденной матрицей: для этого в E5 заменим -3 на 8 . Расширенная матрица и матрица коэффициентов исходной системы имеют по две одинаковых строки. Следовательно, исходная система не имеет единственного решения. При реализации прямого хода метода Гаусса вручную возникает нулевая строка, которую, согласно ЭП IV типа, можно исключить. Но в данной программе такого не предусмотрено, и при очередном делении на диагональный элемент возникает ошибка — деление на ноль, о которой и сообщает табличный процессор (рис. 4.17).

26	1	2	-5	1	10	-1
27	0	1	-6,5	2	12,5	-3,5
28	0	0	1	-0,28571	-2,21429	0,714286
29	0	0	0	1	-0,47093	1
30	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!

Рис. 4.17. Сообщение об ошибке при делении на ноль

Метод Крамера

Для решения системы n линейных алгебраических уравнений с n переменными (4.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

применяются формулы Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.14)$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ — главный определитель системы, Δ_i — побочный определитель, полу-

ченный из главного заменой i -го столбца на столбец правых частей $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

По формулам Крамера легко решать СЛАУ в *Excel*, если научиться вычислять определители. В табличном процессоре имеется встроенная функция МОПРЕД, чьим аргументом является неразрывный квадратный диапазон ячеек, а значением — определитель матрицы, элементы которой хранятся в этих ячейках.

Пример 5. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \\ -3 & 3 & 6 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

в *Excel* по предложенному ниже ал-

горитму.

1. Подготовим данные на листе *Excel*: в ячейках B1:E4 запишем значения элементов матрицы из этого примера.
 2. В ячейке B6 запишем формулу вычисления определителя «=МОПРЕД(B1:E4)». При этом диапазон ячеек можно вводить, протаскивая мышь по этим ячейкам. Также для ввода функции используется кнопка  **Вставить функцию** и в открывшемся диалоговом окне в категории **Математические** выбрать функцию **МОПРЕД**, затем ввести диапазон ячеек (рис. 4.18). Поскольку значение определителя — число, то диалог заканчиваем обычно — нажатием **Enter**. В данном случае получим число **-403**.

	A	B	C	D	E
1		2	4	-3	1
2	A=	0	7	8	0
3		-3	3	6	-2
4		0	-5	7	4
5					
6	detA=	=МОПРЕД(B1:E4)			

Рис. 4.1. Вычисление определителя

Пример 6. Решим методом Крамера систему

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Для этого введем матрицу коэффициентов 3×3 , рядом — вектор правых частей и методом копирования вычислим побочные определители. Эти действия запишем в виде алгоритма.

- Подготовим данные на листе книги Excel. Запишем, например, в ячейках A1:C3 матрицу системы, а в ячейках D1:D3 — вектор правых частей (рис. 4.19).
- Скопируем данные из ячеек A1:C3 три раза для получения значений трех побочных определителей, выделив эти ячейки и перемещая рамку при нажатой правой кнопке мыши после того, как курсор принял вид четырехсторонней стрелки. В момент, когда перемещаемая рамка охватывает еще пустые нужные ячейки, правую кнопку надо отпустить и из контекстного меню выбрать пункт **Копировать** (рис. 4.19).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	2	-5	3	1							
2	-1	3	4	17							
3	5	3	-2	5							
4											
5											
6											
7											
8											
9											

Рис. 4.19. Копирование матрицы системы

После того, как трижды скопирована матрица системы, например, в ячейки E1:G3, H1:J3, K1:M3, скопируем столбец правых частей на место первого, второго и третьего столбцов в этих матрицах соответственно.

- В ячейках B5:B8 вычислим главный и три побочных определителя с помощью встроенной функции МОПРЕД (рис. 4.20). Для большей наглядности можно ввести подписи, например, в столбце А.
- Для вычисления значений переменных введем в ячейке D6 (напротив соответствующего побочного определителя) формулу «=B6/\$B\$5», зафиксировав для дальнейшего копирования адрес ячейки со значением главного определителя. Скопировав эту формулу вниз еще на две строки, получим в ячейках D6, D7 и D8 значения переменных $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ соответственно.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	-5	3	1	1	-5	3	2	1	3	2	-5	1
2	-1	3	4	17	17	3	4	-1	17	4	-1	3	17
3	5	3	-2	5	5	3	-2	5	5	-2	5	3	5
4													
5		=МОПРЕД(А1:С3)											
6		=МОПРЕД(Е1:Г3)		=B6/\$B\$5									
7		=МОПРЕД(Н1:Ј3)		=B7/\$B\$5									
8		=МОПРЕД(К1:М3)		=B8/\$B\$5									
9													

Рис. 4.20. Решение СЛАУ методом Крамера

Решите самостоятельно системы (4.5), (4.12) и (4.13) методом Крамера.

Метод обратной матрицы

Напомним, что матрицей, обратной к матрице A , называется матрица A^{-1} , обладающая свойством: $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$, где E — единичная матрица. Из этого определения следует, что об-

ратная матрица может существовать только у квадратной матрицы. Любая невырожденная матрица A , то есть такая, что $\det A \neq 0$, обладает обратной.

Матрица A^{-1} , обратная к A , вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} , $i=1, 2, \dots, n$, $j=1, 2, \dots, n$.

Из этой формулы вытекает алгоритм нахождения обратной матрицы:

1. Вычислить определитель A .
2. Если $\det A$ отличен от нуля, построить матрицу алгебраических дополнений элементов исходной матрицы, иначе обратная матрица не существует.
3. Транспонировать матрицу алгебраических дополнений.
4. Для получения обратной матрицы надо умножить величину, обратную определителю, на транспонированную матрицу алгебраических дополнений.

Пример 7. Найдем по этому алгоритму матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Находим определитель: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 8$.

2. Определитель матрицы отличен от нуля, значит, у нее существует обратная матрица A^{-1} . Строим матрицу алгебраических дополнений элементов исходной матрицы: $A_{11}=5$, $A_{12}=-1$, $A_{21}=-7$, $A_{22}=3$. Получилась матрица $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Транспонируем полученную матрицу. Такая матрица называется присоединенной к матрице A и часто обозначается A^* . Получили: $A^* = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Получаем обратную матрицу: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 & -0,875 \\ -0,125 & 0,375 \end{pmatrix}$.

5. Проверкой убеждаемся, что обратная матрица найдена верно:

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,625 & -0,875 \\ -0,125 & 0,375 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,625 & -0,875 \\ -0,125 & 0,375 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Продемонстрируем этапы нахождения обратной матрицы в среде табличного процессора *Excel* с использованием встроенных функций вычисления определителя МОПРЕД, транспонирования матрицы ТРАНСП и умножения матрицы на число.

Пример 8. По алгоритму найдем в *Excel* матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Подготовим данные на листе *Excel* и с помощью функции МОПРЕД найдем определитель: $\det A = -180$ (рис. 4.21).

	A	B	C	D	
1		2	-5	3	
2	A=	-1	3	4	
3		5	3	-2	
4					
5	detA=	-180			

Рис. 4.21. Шаг 1: вычисление определителя

2. Определитель матрицы отличен от нуля, значит, у нее существует обратная матрица A^{-1} . Строим матрицу алгебраических дополнений элементов исходной матрицы. Используем известный прием вычисления алгебраических дополнений матрицы нечетного порядка: припишем две первые строки матрицы снизу, а два первых столбца — справа (рис. 4.22). Нам придется вставить дополнительные строки, чтобы не потерять определитель. Нетрудно убедиться, что алгебраическое дополнение любого элемента исходной матрицы равно определителю матрицы 2×2 , верхний левый элемент которой расположен относительно рассматриваемого элемента на 1 строку ниже и на 1 столбец правее. Этот прием позволит ввести только одну формулу вычисления алгебраического дополнения A_{11} как определителя, а остальные получить копированием.

	A	B	C	D	E	F	
1		2	-5	3	2	-5	
2	A=	-1	3	4	-1	3	
3		5	3	-2	5	3	
4		2	-5	3	2	-5	
5		-1	3	4	-1	3	
6							
7	detA=	-180					

Рис. 4.22. Подготовка к вычислению алгебраических дополнений

Назовем матрицу алгебраических дополнений AD , а ее элементы вычислим в ячейках H1:J3: в ячейке H1 наберем формулу «=МОПРЕД(C2:D3)» для вычисления A_{11} и скопируем ее вправо на два столбца, а затем — вниз на две строки (рис. 4.23). В ячейках H1:J3 появятся алгебраические дополнения элементов из соответствующих ячеек B1:D3 (рис. 4.24).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		2	-5	3	2	-5		=МОПРЕД(C2:D3)			
2	A=	-1	3	4	-1	3	AD=				
3		5	3	-2	5	3					
4		2	-5	3	2	-5					
5		-1	3	4	-1	3					
6											
7	detA=	-180									

Рис. 4.23. Шаг 2: получение матрицы алгебраических дополнений

3. Транспонируем полученную матрицу с помощью встроенной функции ТРАНСП или вручную (прямым присваиванием), поместив результат транспонирования в ячейки L1:N3. Получили присоединенную к матрице A матрицу A (рис. 4.24). Для использования функции ТРАНСП

необходимо выделить диапазон, в который будет помещен результат (в нашем случае L1:N3), вызвать функцию ТРАНСП, провести в открывшемся диалоговом окне диалог (протащить мышь по ячейкам матрицы H1:J3), закончить диалог одновременным нажатием клавиш **Ctrl + Shift + Enter**, после чего в выделенных ячейках появится результат.

G	H	I	J	K	L	M	N
	-18	18	-18		=ТРАНСП(H1:J3)		
AD=	-1	-19	-31	A_pr=	18	-19	-11
	-29	-11	1		-18	-31	1

Рис. 4.24. Шаг 3: транспонирование матрицы AD

4. В ячейках H5:J7 получим элементы обратной матрицы A^{-1} : в ячейке H5 наберем формулу «=L1/\$B\$7», зафиксировав адрес определителя \$B\$7, и скопирируем ее вправо на два столбца, а затем — вниз на две строки (рис. 4.25).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		2	-5	3	2	-5		-18	18	-18		-18	-1	-29
2	A=	-1	3	4	-1	3	AD=	-1	-19	-31	A_pr=	18	-19	-11
3		5	3	-2	5	3		-29	-11	1		-18	-31	1
4		2	-5	3	2	-5								
5		-1	3	4	-1	3								
6														
7	detA=	-180												
8														
9														

Рис. 4.25. Шаг 4: вычисление элементов обратной матрицы

5. Проверкой убеждаемся, что обратная матрица найдена верно: в ячейках H9:J11 организуем перемножение матриц $A \times A^{-1}$ с помощью функции МУМНОЖ (рис. 4.26): выделим эти ячейки, вызовем встроенную функцию МУМНОЖ и в диалоговом окне этой функции в строке **Массив 1** введем диапазон B1:D3, а в строке **Массив 2** — H6:J8. В ячейках H9:J11 после нажатия **Ctrl + Shift + Enter** появится результат.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		2	-5	3	2	-5		-18	18	-18		-18	-1	-29
2	A=	-1	3	4	-1	3	AD=	-1	-19	-31	A_pr=	18	-19	-11
3		5	3	-2	5	3		-29	-11	1		-18	-31	1
4		2	-5	3	2	-5								
5		-1	3	4	-1	3								
6								0,1	0,006	0,161				
7	detA=	-180					A^(-1)=	-0,1	0,106	0,061				
8								0,1	0,172	-0,006				
9														
10														
11														
12														
13														

Рис. 4.26. Проверка $A \times A^{-1} = E$

На рис. 4.26 в некоторых ячейках матрицы $A \times A^{-1}$ вместо нулей находятся числа, близкие к нулю, записанные в форме с плавающей запятой. Это связано с тем, что разрядная сетка компьютера имеет конечную длину, и обыкновенные дроби, возникающие при делении, не могут быть записаны точно в виде конечных десятичных дробей. Из-за такой вычислительной погрешности и получились не точные нули, а приближенные. Можно выделить ячейки единичной матрицы и с помощью кнопок Увеличить разрядность и Уменьшить разрядность добиться отображения точных нулей.

Рассмотренный пример направлен на закрепление алгоритма вычисления обратной матрицы. Конечно же, этот алгоритм реализован и во встроенной функции — функции МОБР. Применение этой функции для вычисления обратной матрицы показано на рис. 4.27.

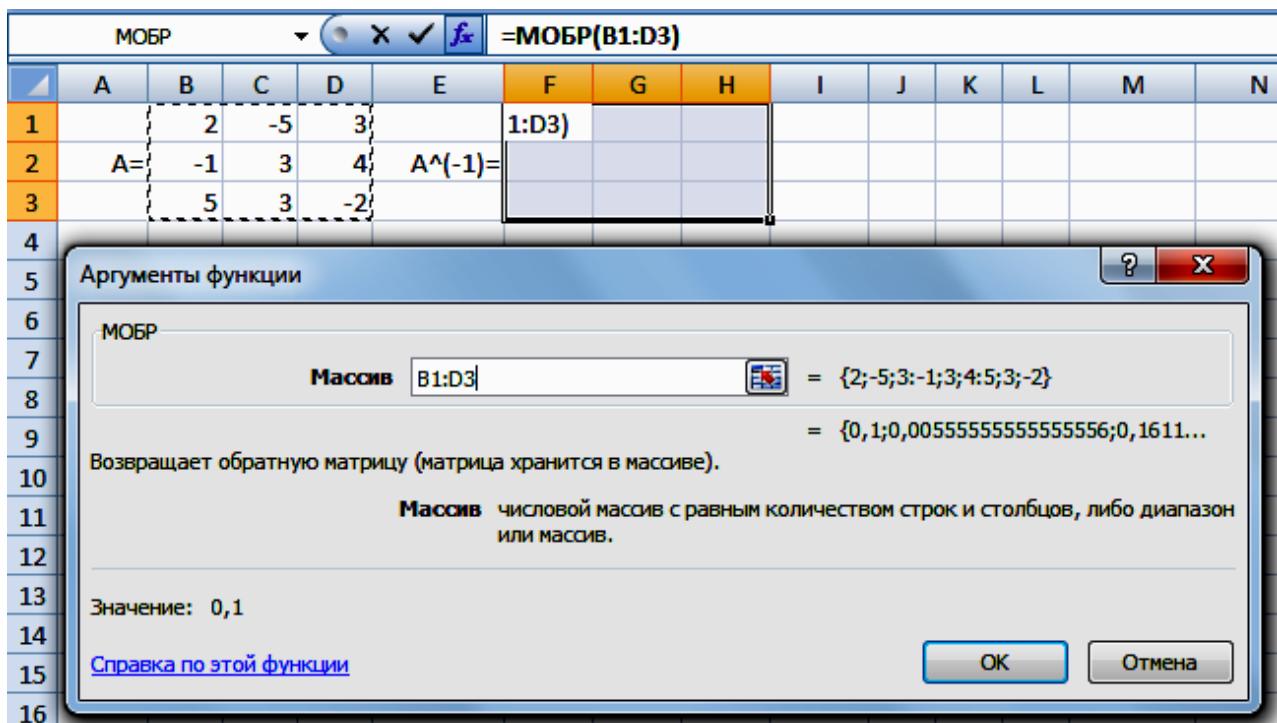


Рис. 4.27. Использование функции МОБР

Итог применения функции МОБР показан на рис. 4.28. Видим, что результаты использования функции МОБР и применения алгоритма вычисления обратной матрицы совпадают с точностью до тех знаков, которые отображаются при записи чисел.

	F1				f _x				{=МОБР(B1:D3)}	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1		2	-5	3		0,1	0,0056	0,1611		
2	A=	-1	3	4	A ⁽⁻¹⁾ =	-0,1	0,1056	0,0611		
3		5	3	-2		0,1	0,1722	-0,0056		
4										

Рис. 4.28. Элементы обратной матрицы

Вернемся к методу обратной матрицы. Запишем СЛАУ с квадратной матрицей коэффици-

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad \text{в матричной форме: } Ax = b. \quad \text{Здесь}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец правых частей,

стей, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — вектор-столбец неизвестных. Если главный определитель системы

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ не равен нулю, то существует обратная матрица A^{-1} . Умножим на нее

слева обе части матричного уравнения $Ax = b$:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b,$$

$$x = A^{-1}b.$$

Из этой формулы вытекает алгоритм решения СЛАУ методом обратной матрицы: находим матрицу, обратную матрице коэффициентов системы; умножаем на нее слева вектор правых частей, в результате получаем вектор неизвестных.

Пример 9. Решим в Excel методом обратной матрицы СЛАУ, рассмотренную в примере 6:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Все шаги по реализации алгоритма метода обратной матрицы ясны из рис. 4.29.

МУМНОЖ							
	A	B	C	D	E	F	G
1		2	-5	3		0,1	0,0056
2	A=	-1	3	4	A ⁻¹ =	-0,1	0,1056
3		5	3	-2		0,1	0,1722
4							-0,0056
5		1				=МУМНОЖ(F1:H3;B5:B7)	
6	b=	17			x=	2	
7		5					3
8							

Рис. 4.29. Решение СЛАУ методом обратной матрицы

Задание для самостоятельной работы

Решите указанную систему методом Гаусса, методом Крамера и методом обратной матрицы. Сделайте проверку.

Вариант 1. $\begin{cases} 3,5x_1 - 4,2x_2 + 5,1x_3 - 1,2x_4 = 5,6, \\ -5,2x_1 - 4x_2 + 2,3x_3 + 2,1x_4 = 2,1, \\ -6x_1 - 2,5x_2 - 4,1x_3 + 5x_4 = -3,3, \\ 3x_1 + 3,1x_2 + 5,2x_3 - 7x_4 = -3,2. \end{cases}$

Вариант 3. $\begin{cases} 2,9x_1 - 5,4x_2 + 4,1x_3 + 2,1x_4 = 23,8, \\ -1,8x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = 1,5, \\ -8x_1 - 8,4x_2 + 3,7x_3 - x_4 = -14,9, \\ -4x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 + 7x_4 = 9,4. \end{cases}$

Вариант 2. $\begin{cases} 6,9x_1 + 3,1x_2 + 6,4x_3 + 1,5x_4 = 35,5, \\ 6,4x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 + 2,1x_4 = -8,3, \\ -5x_1 + 3,4x_2 + 3,7x_3 + 5x_4 = 23,9, \\ 2x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 - 5x_4 = -6,7. \end{cases}$

Вариант 4. $\begin{cases} 1,3x_1 - 5,9x_2 - 2,1x_3 + 3,4x_4 = 28,5, \\ 5,6x_1 + 2,4x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = 13, \\ -2,6x_1 + 6,8x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -6,6, \\ 3,1x_1 - 3,5x_2 - 4,8x_3 + 6,7x_4 = 42,6. \end{cases}$

Вариант 5.
$$\begin{cases} 3,5x_1 - 4,2x_2 + 5,1x_3 - 1,2x_4 = 32, \\ -5,2x_1 - 4x_2 + 2,3x_3 + 2,1x_4 = 1,3, \\ -6x_1 - 2,5x_2 - 4,1x_3 + 5x_4 = -33,3, \\ 3x_1 + 3,1x_2 + 5,2x_3 - 7x_4 = 40,4. \end{cases}$$

Вариант 6.
$$\begin{cases} 6,9x_1 + 3,1x_2 + 6,4x_3 + 1,5x_4 = 4,9, \\ 6,4x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 + 2,1x_4 = 28,9, \\ -5x_1 + 3,4x_2 + 3,7x_3 + 5x_4 = -36,5, \\ 2x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 - 5x_4 = 17,1. \end{cases}$$

Вариант 7.
$$\begin{cases} 2,9x_1 - 5,4x_2 + 4,1x_3 + 2,1x_4 = -23,2, \\ -1,8x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = -55,7, \\ -8x_1 - 8,4x_2 + 3,7x_3 - x_4 = -18,3, \\ -4x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 + 7x_4 = 54,7. \end{cases}$$

Вариант 8.
$$\begin{cases} 1,3x_1 - 5,9x_2 - 2,1x_3 + 3,4x_4 = -9,4, \\ 5,6x_1 + 2,4x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = 15,1, \\ -2,6x_1 + 6,8x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -14,6, \\ 3,1x_1 - 3,5x_2 - 4,8x_3 + 6,7x_4 = -11,8. \end{cases}$$

Вариант 9.
$$\begin{cases} 3,5x_1 - 4,2x_2 + 5,1x_3 - 1,2x_4 = -15,2, \\ -5,2x_1 - 4x_2 + 2,3x_3 + 2,1x_4 = 14,7, \\ -6x_1 - 2,5x_2 - 4,1x_3 + 5x_4 = 43,3, \\ 3x_1 + 3,1x_2 + 5,2x_3 - 7x_4 = -52,8. \end{cases}$$

Вариант 10.
$$\begin{cases} 6,9x_1 + 3,1x_2 + 6,4x_3 + 1,5x_4 = 12,8, \\ 6,4x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 + 2,1x_4 = 53,1, \\ -5x_1 + 3,4x_2 + 3,7x_3 + 5x_4 = -58,9, \\ 2x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 - 5x_4 = 20,7. \end{cases}$$

Вариант 11.
$$\begin{cases} 2,9x_1 - 5,4x_2 + 4,1x_3 + 2,1x_4 = 30,7, \\ -1,8x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = 1,5, \\ -8x_1 - 8,4x_2 + 3,7x_3 - x_4 = -13,5, \\ -4x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 + 7x_4 = -6,2. \end{cases}$$

Вариант 12.
$$\begin{cases} 1,3x_1 - 5,9x_2 - 2,1x_3 + 3,4x_4 = 33,1, \\ 5,6x_1 + 2,4x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = 28,1, \\ -2,6x_1 + 6,8x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -18,8, \\ 3,1x_1 - 3,5x_2 - 4,8x_3 + 6,7x_4 = -27,7. \end{cases}$$

Вариант 13.
$$\begin{cases} 3,5x_1 - 4,2x_2 + 5,1x_3 - 1,2x_4 = 5,8, \\ -5,2x_1 - 4x_2 + 2,3x_3 + 2,1x_4 = -16,5, \\ -6x_1 - 2,5x_2 - 4,1x_3 + 5x_4 = 7,3, \\ 3x_1 + 3,1x_2 + 5,2x_3 - 7x_4 = -34,8. \end{cases}$$

Вариант 14.
$$\begin{cases} 6,9x_1 + 3,1x_2 + 6,4x_3 + 1,5x_4 = 51,8, \\ 6,4x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 + 2,1x_4 = -42,1, \\ -5x_1 + 3,4x_2 + 3,7x_3 + 5x_4 = 22,5, \\ 2x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 - 5x_4 = 16,1. \end{cases}$$

Вариант 15.
$$\begin{cases} 2,9x_1 - 5,4x_2 + 4,1x_3 + 2,1x_4 = -3,2, \\ -1,8x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = -53,8, \\ -8x_1 - 8,4x_2 + 3,7x_3 - x_4 = -100, \\ -4x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 + 7x_4 = 1,4. \end{cases}$$

Вариант 16.
$$\begin{cases} 1,3x_1 - 5,9x_2 - 2,1x_3 + 3,4x_4 = 19, \\ 5,6x_1 + 2,4x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = 10, \\ -2,6x_1 + 6,8x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -30,2, \\ 3,1x_1 - 3,5x_2 - 4,8x_3 + 6,7x_4 = -2,9. \end{cases}$$

Вариант 17.
$$\begin{cases} 3,5x_1 - 4,2x_2 + 5,1x_3 - 1,2x_4 = 5,2, \\ -5,2x_1 - 4x_2 + 2,3x_3 + 2,1x_4 = -27,3, \\ -6x_1 - 2,5x_2 - 4,1x_3 + 5x_4 = -21,6, \\ 3x_1 + 3,1x_2 + 5,2x_3 - 7x_4 = 1,5. \end{cases}$$

Вариант 18.
$$\begin{cases} 6,9x_1 + 3,1x_2 + 6,4x_3 + 1,5x_4 = 74,8, \\ 6,4x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 + 2,1x_4 = 56,9, \\ -5x_1 + 3,4x_2 + 3,7x_3 + 5x_4 = -26,9, \\ 2x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 - 5x_4 = 4,2. \end{cases}$$

Вариант 19.
$$\begin{cases} 2,9x_1 - 5,4x_2 + 4,1x_3 + 2,1x_4 = 21,7, \\ -1,8x_1 - 9x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = -11,6, \\ -8x_1 - 8,4x_2 + 3,7x_3 - x_4 = -12,6, \\ -4x_1 + 2,7x_2 + 1,2x_3 + 7x_4 = 24,3. \end{cases}$$

Вариант 20.
$$\begin{cases} 1,3x_1 - 5,9x_2 - 2,1x_3 + 3,4x_4 = -68,4, \\ 5,6x_1 + 2,4x_2 - 2,5x_3 - 3,4x_4 = 31,3, \\ -2,6x_1 + 6,8x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 32,4, \\ 3,1x_1 - 3,5x_2 - 4,8x_3 + 6,7x_4 = -88,8. \end{cases}$$

Лабораторная работа № 5
Решение систем линейных алгебраических уравнений
методом простой итерации и методом Зейделя

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (5.1)$$

В матричной форме эту систему можно записать:

$$Ax = b, \text{ где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Для решения системы линейных алгебраических уравнений методом простой итерации или методом Зейделя систему (5.1) необходимо привести к равносильной системе, записанной в виде, удобном для итераций:

$$\begin{cases} x_1 = m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + \dots + m_{1n}x_n + r_1, \\ x_2 = m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + \dots + m_{2n}x_n + r_2, \\ \dots \\ x_n = m_{n1}x_1 + m_{n2}x_2 + \dots + m_{nn}x_n + r_n, \end{cases} \quad (5.3)$$

или в матричной форме

$$x = Mx + r, \text{ где } M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Последовательность последовательных приближений (итерационная последовательность) векторов $x^0, x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$, где

$$x^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix},$$

в **методе простой итерации** получается по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = m_{11}x_1^k + m_{12}x_2^k + \dots + m_{1n}x_n^k + r_1, \\ x_2^{k+1} = m_{21}x_1^k + m_{22}x_2^k + \dots + m_{2n}x_n^k + r_2, \\ \dots \\ x_n^{k+1} = m_{n1}x_1^k + m_{n2}x_2^k + \dots + m_{nn}x_n^k + r_n, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

x^0 — произвольный вектор.

Как правило, выбирают $x^0 = (0; 0; \dots, 0)^\top$. Таким образом, в методе простой итерации надо выбрать произвольное начальное приближение x^0 , подставить его компоненты $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ в правые части системы (5.3) соответственно вместо x_1, x_2, \dots, x_n и получить слева в каждом уравнении компоненты $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$ первого приближения x^1 . Затем подставить компоненты $x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1$ первого приближения x^1 в правые части системы (5.3) соответственно вместо x_1, x_2, \dots, x_n и получить компоненты $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$ второго приближения x^2 и так далее. При этом должно выполняться хотя бы одно из легко проверяемых достаточных условий сходимости итерационной последовательности $x^0, x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$:

$$\sum_{i=1}^n |m_{ij}| < 1 \quad \text{для любого столбца } j = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

или

$$\sum_{j=1}^n |m_{ij}| < 1 \quad \text{для любой строки } i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.7)$$

То есть сумма модулей коэффициентов любого столбца матрицы M должна быть меньше единицы (условие (5.6)), или сумма модулей коэффициентов любой строки матрицы M должна быть меньше единицы (условие (5.7)).

В методе Зейделя итерационная последовательность векторов $x^0, x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$ получается по формулам:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = m_{11}x_1^k + m_{12}x_2^k + \dots + m_{1n}x_n^k + r_1, \\ x_2^{k+1} = m_{21}x_1^{k+1} + m_{22}x_2^k + \dots + m_{2n}x_n^k + r_2, \\ x_3^{k+1} = m_{31}x_1^{k+1} + m_{32}x_2^{k+1} + m_{33}x_3^k + \dots + m_{3n}x_n^k + r_3, \\ \dots \\ x_n^{k+1} = m_{n1}x_1^{k+1} + m_{n2}x_2^{k+1} + \dots + m_{n(n-1)}x_{n-1}^{k+1} + m_{nn}x_n^k + r_n, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}, \quad (5.5')$$

x^0 — произвольный вектор.

То есть в **методе Зейделя** надо выбрать произвольное начальное приближение x^0 , подставить все его компоненты $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ в правую часть первого уравнения системы (5.3) соответственно вместо x_1, x_2, \dots, x_n и получить слева компоненту x_1^1 первого приближения x^1 . Затем подставить только что вычисленную компоненту x_1^1 и остальные компоненты x_2^0, \dots, x_n^0 начального приближения в правую часть второго уравнения системы (5.3) соответственно вместо x_1, x_2, \dots, x_n и получить слева компоненту x_2^1 первого приближения x^1 . И далее в каждое следующее уравнение подставляются компоненты нового (первого) приближения, вычисленные выше и остальные компоненты текущего (начального) приближения. Вообще, при получении компонент $(k+1)$ -го приближения $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_n^{k+1}$ по методу Зейделя в правую часть i -го уравнения системы (5.3) вместо x_1, x_2, \dots, x_{i-1} подставляются соответственно вычисленные перед этим компоненты $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ нового $(k+1)$ -го приближения, а вместо x_i, x_{i+1}, \dots, x_n — компоненты $x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k$ текущего k -го приближения. Сходимость метода Зейделя обеспечивается теми же достаточными условиями (5.6), (5.7).

Процесс построения итерационной последовательности в какой-либо вычислительной среде можно продолжать до тех пор, пока компоненты очередного приближения не будут совпадать во всех разрядах с компонентами предыдущего приближения: $x^{k+1} = x^k$. В этом случае будет получено так называемое машинное решение системы (5.3), и дальнейшее построение итерационной последовательности бессмысленно — никаких изменений в компонентах следующих приближений по сравнению с предыдущими не происходит, в рамках

имеющейся разрядной сетки получено решение матричного уравнения $x = Mx + r$ с максимально возможной точностью. Если же столь высокая точность не требуется, то момент окончания итераций зависит от того, какое из условий сходимости выполняется: (5.6) или (5.7).

Пусть x^* — точное решение системы (5.3) (то есть для вектора $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^\top$ выполняется равенство $x^* = Mx^* + r$), ε — заданная точность.

Допустим, выполнено условие (5.6). Находим наибольшую из сумм модулей коэффициентов столбцов матрицы M — число α :

$$\alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |m_{ij}| < 1. \quad (5.8)$$

Погрешность приближенного решения x^k в этом случае равна $\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^*|$ и оценивается сверху числом $\frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^{k-1}|$:

$$\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^{k-1}|. \quad (5.9)$$

Построение итерационной последовательности продолжается до тех пор, пока оценка сверху погрешности не станет меньше заданной точности:

$$\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^{k-1}| < \varepsilon,$$

то есть пока не выполнится неравенство

$$\sum_{i=1}^n |x_i^k - x_i^{k-1}| < \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \varepsilon. \quad (5.10)$$

Пусть выполнено условие (5.7). Находим число α , равное наибольшей сумме модулей коэффициентов строк матрицы M :

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| < 1. \quad (5.11)$$

Погрешность приближенного решения x^k в этом случае равна $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^*|$ и оценивается сверху числом $\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}|$:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}|. \quad (5.12)$$

Построение итерационной последовательности продолжается до тех пор, пока оценка сверху погрешности не станет меньше заданной точности:

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}| < \varepsilon,$$

то есть пока не выполнится неравенство

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i^k - x_i^{k-1}| < \frac{1-\alpha}{\alpha} \cdot \varepsilon. \quad (5.13)$$

Рекомендации по приведению системы (5.1) к удобному для итераций виду (5.3) с выполнением условий (5.6) или (5.7) дадим, решая конкретную задачу.

Пример. Решим методом итераций и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$ систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 0,3x_2 - 0,6x_3 = 1,2, \\ 0,35x_1 + 1,4x_2 - 0,7x_3 = 1,05, \\ -0,3x_1 + 0,3x_2 + 1,2x_3 = 1,2. \end{cases}$$

Приведем систему к виду (5.3). Для этого, например, из первого уравнения выразим x_1 , представив $1,5x_1 = x_1 + 0,5x_1$; из второго уравнения выразим x_2 , представив $1,4x_2 = x_2 + 0,4x_2$; из третьего уравнения выразим x_3 , представив $1,2x_3 = x_3 + 0,2x_3$:

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_1 + 0,3x_2 - 0,6x_3 = 1,2, \\ 0,35x_1 + x_2 + 0,4x_2 - 0,7x_3 = 1,05, \\ -0,3x_1 + 0,3x_2 + x_3 + 0,2x_3 = 1,2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -0,5x_1 - 0,3x_2 + 0,6x_3 + 1,2, \\ x_2 = -0,35x_1 - 0,4x_2 + 0,7x_3 + 1,05, \\ x_3 = 0,3x_1 - 0,3x_2 - 0,2x_3 + 1,2, \end{cases}$$

$$\text{то есть } x = Mx + r, \text{ где } M = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,3 & 0,6 \\ -0,35 & -0,4 & 0,7 \\ 0,3 & -0,3 & -0,2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,05 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Несмотря на то, что все коэффициенты матрицы M по модулю меньше единицы, ни одно из достаточных условий сходимости итерационной последовательности — ни (5.6), ни (5.7) — не выполняются: сумма модулей коэффициентов первой и второй строки и любого столбца матрицы M больше либо равна единице.

Приведем данную систему к виду (5.3) другим образом. Для этого, например, из первого уравнения выразим x_1 , оставив $1,5x_1$ в этом уравнении слева и поделив затем обе части первого уравнения на 1,5. Аналогично выразим из второго уравнения x_2 , а из третьего уравнения — x_3 :

$$\begin{cases} 1,5x_1 = -0,3x_2 + 0,6x_3 + 1,2, \\ 1,4x_2 = -0,35x_1 + 0,7x_3 + 1,05, \\ 1,2x_3 = 0,3x_1 - 0,3x_2 + 1,2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -0,2x_2 + 0,4x_3 + 0,8, \\ x_2 = -0,25x_1 + 0,5x_3 + 0,75, \\ x_3 = 0,25x_1 - 0,25x_2 + 1, \end{cases}$$

$$\text{то есть } x = Mx + r, \text{ где } M = \begin{pmatrix} 0 & -0,2 & 0,4 \\ -0,25 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & -0,25 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,75 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ и сумма модулей}$$

коэффициентов любой строки и любого столбца матрицы M меньше единицы. Находим число α , например, по формуле (5.11), то есть равное наибольшей сумме модулей коэффициентов строк матрицы M :

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |m_{ij}| = \max_{1 \leq i \leq n} \{0,6; 0,75; 0,5\} = 0,75 < 1.$$

Выбрав $x^0 = (0; 0; \dots, 0)^T$, найдем «вручную» методом простой итерации x^1, x^2 , оценим погрешность x^2 и составим программу решения задачи в Excel:

$$\begin{cases} x_1^1 = -0,2x_2^0 + 0,4x_3^0 + 0,8 = -0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0 + 0,8 = 0,8, \\ x_2^1 = -0,25x_1^0 + 0,5x_3^0 + 0,75 = -0,25 \cdot 0 + 0,5 \cdot 0 + 0,75 = 0,75, \\ x_3^1 = 0,25x_1^0 - 0,25x_2^0 + 1 = 0,25 \cdot 0 - 0,25 \cdot 0 + 1 = 1, \end{cases} \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,75 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1^2 = -0,2x_2^1 + 0,4x_3^1 + 0,8 = -0,2 \cdot 0,75 + 0,4 \cdot 1 + 0,8 = 1,05, \\ x_2^2 = -0,25x_1^1 + 0,5x_3^1 + 0,75 = -0,25 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 1 + 0,75 = 1,05, \\ x_3^2 = 0,25x_1^1 - 0,25x_2^1 + 1 = 0,25 \cdot 0,8 - 0,25 \cdot 0,75 + 1 = 1,0125, \end{cases} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1,05 \\ 1,05 \\ 1,0125 \end{pmatrix},$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^2 - x_i^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^2 - x_i^1| = \frac{0,75}{0,25} \cdot \max \{0,25; 0,3; 0,0125\} = 3 \cdot 0,3 = 0,9.$$

Согласно этому неравенству каждая компонента решения x^* гарантированно удалена от соответствующей компоненты x^2 на величину, не большую 0,9. К сожалению, это означает, что в записи компонент x^2 цифра целых является сомнительной, то есть при такой оценке погрешности в записи компонент x^2 нет ни одной верной цифры.

Если же для оценки погрешности использовать формулу (5.8), получим $\alpha = 0,9$ и по формуле (5.9) $\sum_{i=1}^3 |x_i^2 - x_i^*| \leq \frac{0,9}{1-0,9} \sum_{i=1}^2 |x_i^2 - x_i^1| = 9 \cdot (0,25 + 0,3 + 0,0125) = 5,0625$.

Таким образом, процесс построения итерационной последовательности для достижения заданной точности $\varepsilon = 10^{-7}$ необходимо продолжить. Составим программу метода простой итерации в *Excel*, выполнив последовательность шагов.

1. Оформим на листе входные данные (рис. 5.1): в ячейках B1:D3 запишем матрицу M , в ячейках G1:G3 — вектор r , в ячейке I2 — число α , в ячейках A5:A7 — вектор начального приближения x^0 .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		0	-0,2	0,4			0,8		
2	M=	-0,3	0	0,5		r=	0,75	alpha=	0,75
3		0,25	-0,3	0			1		
4	н.п.								
5	0								
6	0								
7	0								
8									

Рис. 5.1. Исходные данные задачи

2. В ячейках B5:B7 получим компоненты первого приближения x^1 , фиксируя адреса компонент матрицы M и вектора r с целью дальнейшего копирования диапазона B5:B7 вправо (рис. 5.2):

B5: «=\$B\$1*A5+\$C\$1*A6+\$D\$1*A7+\$G\$1»;

B6: «=\$B\$2*A5+\$C\$2*A6+\$D\$2*A7+\$G\$2»;

B7: «=\$B\$3*A5+\$C\$3*A6+\$D\$3*A7+\$G\$3».

В ячейках B5:B7 установим разрядность 7 знаков после запятой, так решение находим с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		0	-0,2	0,4			0,8			
2	M=	-0,25	0	0,5		r=	0,75	alpha=	0,75	
3		0,25	-0,3	0			1			
4	н.п.									
5	0	0,8000000								
6	0	0,7500000								
7	0	=B\$3*A5+\$C\$3*A6+\$D\$3*A7+\$G\$3								
8										

Рис. 5.2. Вычисление первого приближения

3. В ячейке B8 вычислим погрешность x^1 :

B8: «=I2/(1-I2)*МАКС(ABS(B5-A5);ABS(B6-A6);ABS(B7-A7))»

4. Копируем формулы B5:B8 вправо до тех пор, пока погрешность в 8 строке не станет меньше 10^{-7} . В рассматриваемом примере заданная точность достигается для x^{12} (рис. 5.3):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		0	-0,2	0,4			0,8						
2	M=	-0,25	0	0,5			r=	0,75	alpha=	0,75			
3		0,25	-0,25	0				1					
4	н.п.												
5	0	0,8000000	1,0500000	0,9950000	1,0012500	0,9998750	1,0000313	0,9999969	1,0000008	0,9999999	1,0000000	1,0000000	1,0000000
6	0	0,7500000	1,0500000	0,9937500	1,0012500	0,9998438	1,0000313	0,9999961	1,0000008	0,9999999	1,0000000	1,0000000	1,0000000
7	0	1,0000000	1,0125000	1,0000000	1,0003125	1,0000000	1,0000078	1,0000000	1,0000002	1,0000000	1,0000000	1,0000000	1,0000000
8	П.	3,0000000	0,9000000	0,1687500	0,0225000	0,0042187	0,0005625	0,0001055	0,0000141	0,0000026	0,0000004	0,0000001	0,0000000
9													
10													

Рис. 5.3. Нахождение решения с заданной точностью методом простой итерации

5. В M5:M7 получили решение: $x_1^* \approx 1,0000000$, $x_2^* \approx 1,0000000$, $x_3^* \approx 1,0000000$.

Выбрав $x^0 = (0; 0; \dots, 0)^T$, найдем «вручную» методом Зейделя x^1 , x^2 , оценим погрешность x^2 и скорректируем имеющуюся в Excel программу метода простой итерации для решения СЛАУ методом Зейделя:

$$\begin{cases} x_1^1 = -0,2x_2^0 + 0,4x_3^0 + 0,8 = -0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0 + 0,8 = 0,8, \\ x_2^1 = -0,25x_1^0 + 0,5x_3^0 + 0,75 = -0,25 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0 + 0,75 = 0,55, \\ x_3^1 = 0,25x_1^0 - 0,25x_2^0 + 1 = 0,25 \cdot 0,8 - 0,25 \cdot 0,55 + 1 = 1,0625, \end{cases} \quad x^1 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,55 \\ 1,0625 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1^2 = -0,2x_2^1 + 0,4x_3^1 + 0,8 = -0,2 \cdot 0,55 + 0,4 \cdot 1,0625 + 0,8 = 1,115, \\ x_2^2 = -0,25x_1^1 + 0,5x_3^1 + 0,75 = -0,25 \cdot 1,115 + 0,5 \cdot 1 + 0,75 = 1,0025, \\ x_3^2 = 0,25x_1^1 - 0,25x_2^1 + 1 = 0,25 \cdot 1,115 - 0,25 \cdot 1,0025 + 1 = 1,028125, \end{cases} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1,115 \\ 1,0025 \\ 1,028125 \end{pmatrix},$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^2 - x_i^*| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i^2 - x_i^1| = \frac{0,75}{0,25} \cdot \max \{0,315; 0,4525; 0,034375\} = 3 \cdot 0,4525 = 1,3575.$$

Согласно этому неравенству, каждая компонента решения x^* гарантированно удалена от соответствующей компоненты x^2 на величину, не большую 1,3575. Это означает, что в записи компонент x^2 цифра целых является сомнительной, то есть при такой оценке погрешности в записи компонент x^2 нет ни одной верной цифры. И более того, при такой верхней границе погрешности компоненты точного решения могут быть и отрицательными числами.

Программа метода Зейделя в Excel будет отличаться от соответствующей программы метода простой итерации только в пункте 2 набора формул первого приближения (рис. 5.4):

B5: «=\$B\$1*A5+\$C\$1*A6+\$D\$1*A7+\$G\$1»;
 B6: «=\$B\$2*B5+\$C\$2*A6+\$D\$2*A7+\$G\$2»;
 B7: «=\$B\$3*B5+\$C\$3*B6+\$D\$3*A7+\$G\$3».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		0	-0,2	0,4			0,8			
2	M=	-0,25	0	0,5		r=	0,75	alpha=	0,75	
3		0,25	-0,25	0			1			
4	н.п.									
5	0	0,8000000								
6	0	0,5500000								
7	0	=-\$B\$3*B5+\$C\$3*B6+\$D\$3*A7+\$G\$3								
8	П.	3,1875000								
9										

Рис. 5.4. Первое приближение в методе Зейделя

Приближенное решение с заданной точностью получается на том же шаге, что и в методе простой итерации (рис. 5.5), хотя итерационная последовательность другая. Можно сказать, что для данной системы оба метода сходятся с одинаковой скоростью.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		0	-0,2	0,4			0,8						
2	M=	-0,25	0	0,5		r=	0,75	alpha=	0,75				
3		0,25	-0,25	0			1						
4	н.п.												
5	0	0,8000000	1,1150000	1,0107500	0,9976625	0,9996144	1,0000392	1,0000116	0,9999996	0,9999997	1,0000000	1,0000000	
6	0	0,5500000	1,0025000	1,0113750	1,0005063	0,9997409	0,9999744	1,0000052	1,0000009	0,9999999	1,0000000	1,0000000	
7	0	1,0625000	1,0281250	0,9998438	0,9992891	0,9999684	1,0000162	1,0000016	0,9999997	0,9999999	1,0000000	1,0000000	
8	П.	3,1875000	1,3575000	0,3127500	0,0392625	0,0058556	0,0012743	0,0000924	0,0000360	0,0000030	0,0000009	0,0000001	0,0000000
9													

Рис. 5.5. Нахождение решения с заданной точностью методом Зейделя

Замечание 1. Для выполнения матричных операций $Mx^k + r$ в методе простой итерации можно использовать встроенную матричную функцию перемножения матриц МУМНОЖ и операцию сложения векторов (рис. 5.6).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		0	-0,2	0,4			0,8			
2	M=	-0,25	0	0,5		r=	0,75	alpha=	0,75	
3		0,25	-0,25	0			1			
4	н.п.									
5	0	0;3;A5:A7)								
6	0									
7	0									
8										
9										
10										
11										
12										
13										
14										
15										
16										
17										
18										

Аргументы функции

МУМНОЖ

Массив1	<input type="text" value="\$B\$1:\$D\$3"/>	<input type="button" value="?"/>	<input type="button" value="OK"/>	<input type="button" value="Отмена"/>
Массив2	<input type="text" value="A5:A7"/>	<input type="button" value="?"/>	<input type="button" value="OK"/>	<input type="button" value="Отмена"/>

Возвращает матричное произведение двух массивов; результат имеет то же число строк, что и первый массив, и то же число столбцов, что и второй массив.

Массив2 первый из перемножаемых массивов, число столбцов в нем должно равняться числу строк во втором массиве.

Значение: 0,0000000

[Справка по этой функции](#)

Рис. 5.6. Использование встроенной функции умножения матриц

В этом случае на шаге 2 выполнения программы в *Excel* надо выделить ячейки B5:B7 для размещения в них результата перемножения Mx^0 , вызвать встроенную функцию МУМНОЖ, в диалоговом окне **Массив1** определить как фиксированный диапазон \$B\$1:\$D\$3 (постоянные коэффициенты матрицы M), **Массив2** — A5:A7 (компоненты x^0), закончить диалог нажатием **Ctrl + Shift + Enter**. После этого в строке ввода надо выполнить матричное сложение: дописать «+\$G\$1:\$G\$3» (рис. 5.7).

Рис. 5.7. Использование матричных операций при нахождении первого приближения

Замечание 2. Получим машинное решение: копируем B5:B7 вправо до тех пор, пока компоненты очередного приближения не совпадут с компонентами предыдущего приближения. Отображаемое в ячейках количество разрядов после запятой зависит от настроек табличного процессора. В рассматриваемом примере машинное решение совпадает с x^{22} (рис. 5.8).

Рис. 5.8. Машинное решение

Замечание 3. Можно провести эксперимент: что будет, если строить итерационную последовательность $x^0, x^1, x^2, \dots, x^k, \dots$, не смотря на то, что достаточное условие сходимости не выполняется? Вернемся к системе со с. 61, приведенной к удобному для итераций виду и получим несколько приближений методом простой итерации:

$$\begin{cases} x_1^1 = -0,5x_1^0 - 0,3x_2^0 + 0,6x_3^0 + 1,2 = -0,5 \cdot 0 - 0,3 \cdot 0 + 0,6 \cdot 0 + 1,2 = 1,2, \\ x_2^1 = -0,35x_1^0 - 0,4x_2^0 + 0,7x_3^0 + 1,05 = -0,35 \cdot 0 - 0,4 \cdot 0 + 0,7 \cdot 0 + 1,05 = 1,05, \\ x_3^1 = 0,3x_1^0 - 0,3x_2^0 - 0,2x_3^0 + 1,2 = 0,3 \cdot 0 - 0,3 \cdot 0 - 0,2 \cdot 0 + 1,2 = 1,2, \end{cases} \quad x^1 = \begin{pmatrix} 1,2 \\ 1,05 \\ 1,2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} x_1^2 = -0,5x_1^1 - 0,3x_2^1 + 0,6x_3^1 + 1,2 = -0,5 \cdot 1,2 - 0,3 \cdot 1,05 + 0,6 \cdot 1,2 + 1,2 = 1,005, \\ x_2^2 = -0,35x_1^1 - 0,4x_2^1 + 0,7x_3^1 + 1,05 = -0,35 \cdot 1,2 - 0,4 \cdot 1,05 + 0,7 \cdot 1,2 + 1,05 = 1,05, \\ x_3^2 = 0,3x_1^1 - 0,3x_2^1 - 0,2x_3^1 + 1,2 = 0,3 \cdot 1,2 - 0,3 \cdot 1,05 - 0,2 \cdot 1,2 + 1,2 = 1,005, \end{cases} \quad x^2 = \begin{pmatrix} 1,005 \\ 1,05 \\ 1,005 \end{pmatrix},$$

и так далее. Решение уже известно, и поведение итерационной последовательности внушает оптимизм. Действительно, если изменить входные данные программы на листе *Excel* (кроме числа α), увидим, что она сходится. Получите машинное решение самостоятельно.

Замечание 4. Имеется достаточно широкий класс СЛАУ (5.1), которые приводятся к виду (5.3) с заведомым выполнением условия (5.7). Это СЛАУ с матрицами с диагональным преобладанием.

Определение. Квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей с *диагональным преобладанием*, если любой ее диагональный элемент по модулю больше суммы модулей остальных элементов соответствующей строки, то есть для любой строки i выполняется неравенство

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В случае СЛАУ с матрицей с диагональным преобладанием приведение к виду (5.3) осуществляется так же, как и во втором способе в рассмотренном выше примере: в i -ой строке выражается x_i после переноса слагаемых, содержащих остальные переменные, в правую часть и деления на a_{ii} . При таких преобразованиях коэффициенты матрицы M равны:

$$m_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ и для любой строки } \sum_{j=1}^n |m_{ij}| = \frac{\sum_{j=1}^n |a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1. \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

Задание для самостоятельной работы

Составьте программу решения СЛАУ методом простой итерации и методом Зейделя и проверки правильности найденного решения в среде табличного процессора *Excel*, отладьте и протестируйте ее на известном примере при $n = 3$. Решите указанную систему с максимальной машинной точностью.

Вариант 1.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 = -38, \\ 20x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 29, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = -8, \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 29. \end{cases}$$

Вариант 2.
$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 - 40x_3 + 15x_4 = 29, \\ -4x_1 - 2x_3 + 20x_4 = 70, \\ -5x_1 + 10x_2 + 3x_3 - x_4 = -41, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Вариант 3.
$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 32, \\ -16x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -74, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ -x_1 + 20x_2 + 12x_3 = -6. \end{cases}$$

Вариант 4.
$$\begin{cases} 16x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 55, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 28, \\ -2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 25x_4 = 144, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_4 = -14. \end{cases}$$

Вариант 5.
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 25x_3 - 2x_4 = 94, \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ -x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -5, \\ 3x_1 + 5x_3 - 16x_4 = 82. \end{cases}$$

Вариант 6.
$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -43, \\ 40x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 23x_4 = -44, \\ -5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 16x_4 = -46, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 68. \end{cases}$$

Вариант 7.
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 25x_3 - x_4 = -65, \\ -16x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 25, \\ 8x_1 - 40x_2 + 3x_3 = -267, \\ 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 42. \end{cases}$$

Вариант 8.
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 20x_4 = -4, \\ x_1 + 4x_2 - x_4 = 7, \\ -8x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -46, \\ 3x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 8. \end{cases}$$

Вариант 9.
$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 25, \\ -2x_1 - 4x_2 + 20x_3 + 3x_4 = 17, \\ -6x_1 - 25x_2 + x_3 + 5x_4 = 22, \\ 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 4. \end{cases}$$

Вариант 10.
$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 10x_4 = -51, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 16, \\ 2x_1 + 7x_2 + 16x_3 - 5x_4 = 47. \end{cases}$$

Вариант 11.
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 = -30, \\ 3x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 29, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = -8, \\ 10x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 19. \end{cases}$$

Вариант 12.
$$\begin{cases} -5x_1 + 10x_2 + 3x_3 - x_4 = 16, \\ -4x_1 - 2x_3 + 20x_4 = 98, \\ 6x_1 + x_2 - 40x_3 + 15x_4 = -185, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -40. \end{cases}$$

Вариант 13.
$$\begin{cases} -x_1 + 20x_2 + 12x_3 = -23, \\ -16x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -25, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 10x_4 = 57, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Вариант 14.
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_4 = -17, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 25, \\ -2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 25x_4 = 150, \\ 16x_1 - 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 7. \end{cases}$$

Вариант 15.
$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - 25x_3 - 2x_4 = -106, \\ 3x_1 + 5x_3 - 16x_4 = 92, \\ -x_1 - 10x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -13, \\ -5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Вариант 16.
$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -45, \\ 40x_1 - 9x_2 - 2x_3 + 23x_4 = 36, \\ -5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 16x_4 = -56, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 - 5x_4 = 72. \end{cases}$$

Вариант 17.
$$\begin{cases} 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 38, \\ -16x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -49, \\ 8x_1 - 40x_2 + 3x_3 = -88, \\ 2x_1 - 5x_2 + 25x_3 - x_4 = -11. \end{cases}$$

Вариант 18.
$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_4 = 7, \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 20x_4 = -10, \\ -8x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -46, \\ 3x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 2x_4 = 8. \end{cases}$$

Вариант 19.
$$\begin{cases} -6x_1 - 25x_2 + x_3 + 5x_4 = 22, \\ -2x_1 - 4x_2 + 20x_3 + 3x_4 = 17, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 25, \\ 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 4. \end{cases}$$

Вариант 20.
$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 16x_3 - 5x_4 = 37, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = -9, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11, \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 54. \end{cases}$$

Лабораторная работа № 6
Приложения систем линейных алгебраических уравнений:
линейная модель многоотраслевой экономики (модель Леонтьева)

Рассмотрим несколько отраслей промышленности, каждая из которых производит свою продукцию (материальные блага). При этом любая отрасль потребляет продукцию других отраслей и свою собственную. Например, энергетика потребляет продукцию машиностроения и других отраслей для производства энергии, но и энергия ей нужна для поддержания своего производства. И в то же время все отрасли производят часть продукции для потребления вне сферы материального производства — так называемого *конечного потребления*. Эта часть называется еще *конечный продукт*. Например, энергия расходуется для поддержания жизнедеятельности школ, больниц, учреждений управления, не производящих материальных благ, и так далее. Валовой (общий) выпуск продукции каждой отрасли складывается из объемов продукции этой отрасли, потребляемых ей самой и другими отраслями, и объема конечного потребления этой отрасли. Обычно данные о производстве и потреблении нескольких отраслей представляются в виде таблиц.

Пример 1. Рассмотрим упрощенную (учебную) ситуацию. Допустим, многоотраслевое хозяйство состоит из двух отраслей — энергетики и машиностроения. В табл. 1 приведены данные в условных денежных единицах о выпуске и потреблении продукции (затратах на приобретение продукции) этих двух отраслей за некоторый период.

Таблица 1. Данные о выпуске и потреблении продукции

Потребление (затраты) Выпуск	Энергетика	Машиностроение	Конечное потребление	Валовой выпуск
Энергетика	20	40	140	200
Машиностроение	10	30	60	100

Из табл. 1 видно, что валовой выпуск продукции каждой отрасли равен сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах:

$$200 = 20 + 40 + 140;$$

$$100 = 10 + 30 + 60.$$

Но экономика — живой организм. В ней меняются технологии производства, что влечет за собой изменения затрат отраслей на потребление продукции других отраслей относительно собственного валового выпуска, меняются потребности в непроизводственной сфере и так далее. В условиях многоотраслевого хозяйства возникает вопрос об эффективном планировании изменений его ведения: каким должен быть валовой выпуск каждой отрасли, чтобы обеспечивать рентабельное функционирование других отраслей и удовлетворять потребности в конечном продукте в непроизводственной сфере?

Пример 2. Допустим, для ситуации, рассмотренной в примере 1, планируется конечное потребление энергетической отрасли довести со 140 усл. ден. ед. до 190, а машиностроения — с 60 до 125. Но тогда возрастет валовой выпуск каждой отрасли, а значит, и потреблять из другой отрасли и из самой себя в усл. ден. ед. каждая отрасль будет больше, что в свою очередь также вызовет увеличение валового выпуска. Каким же должен быть валовой выпуск продукции каждой из отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли?

Решение. Поскольку валовой выпуск продукции каждой из отраслей в новых условиях нам не известен, обозначим соответственно x_1 — новый валовой выпуск (в усл. ден. ед.) энергетики и x_2 — новый валовой выпуск машиностроения. В силу постоянства технологий на протяжении относительно короткого промежутка времени пропорционально валовому выпуску изменятся и затраты отрасли на приобретение продукции связанных с ней отраслей (потребление). Если новый валовой выпуск энергетики будет, например, равен 400 усл. ден.

ед., то есть увеличится в два раза, то и потребление энергетикой объема продукции каждой из отраслей возрастет в два раза: энергетика будет потреблять 40 усл. ден. ед. продукции энергетики и 20 усл. ден. ед. продукции машиностроения. Если новый валовой выпуск машиностроения, например, увеличится в три раза, то и потребление машиностроением объема продукции каждой из отраслей возрастет в три раза: машиностроение будет потреблять 120 усл. ден. ед. продукции энергетики и 90 усл. ден. ед. продукции машиностроения. Таким образом, в новых условиях можно рассматривать пропорции:

Потребление энергетикой продукции энергетики	Валовой выпуск энергетики
20	200
?	x_1

и потребление энергетикой продукции энергетики в новых условиях составляет $\frac{20}{200} \cdot x_1$;

Потребление энергетикой продукции машиностроения	Валовой выпуск энергетики
10	200
?	x_1

и потребление энергетикой продукции машиностроения в новых условиях составляет $\frac{10}{200} \cdot x_1$;

Потребление машиностроением продукции энергетики	Валовой выпуск машиностроения
40	100
?	x_2

и потребление машиностроением продукции энергетики в новых условиях составляет $\frac{40}{100} \cdot x_2$;

Потребление машиностроением продукции машиностроения	Валовой выпуск машиностроения
30	100
?	x_2

и потребление машиностроением продукции машиностроения в новых условиях составляет $\frac{30}{100} \cdot x_2$.

Таким образом, валовой выпуск энергетики x_1 складывается из потребления энергетикой продукции энергетики $\frac{20}{200} \cdot x_1$, потребления машиностроением продукции энергетики $\frac{40}{100} \cdot x_2$ и конечного потребления 190:

$$x_1 = \frac{20}{200} \cdot x_1 + \frac{40}{100} \cdot x_2 + 190. \quad (6.1)$$

Валовой выпуск машиностроения x_2 складывается из потребления энергетикой продукции машиностроения $\frac{10}{200} \cdot x_1$, потребления машиностроением продукции машиностроения $\frac{30}{100} \cdot x_2$ и конечного потребления 125:

$$x_2 = \frac{10}{200} \cdot x_1 + \frac{30}{100} \cdot x_2 + 125. \quad (6.2)$$

Уравнения (6.1) и (6.2) выражают *стоимостной межотраслевой баланс* — состояние, когда экономическое хозяйство находится в равновесии и величины, входящие в уравнения, имеют стоимостное выражение. Отметим, что постоянство числовых коэффициентов при переменных возможно при постоянстве технологий, то есть на достаточно коротком промежутке времени с точки зрения экономики (например, в течение года). Поскольку уравнения (6.1) и (6.2) должны выполняться одновременно, получаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 0,1x_1 + 0,4x_2 + 190, \\ x_2 = 0,05x_1 + 0,3x_2 + 125. \end{cases} \quad (6.3)$$

Видим, что система записана в виде, удобном для итераций $x = Mx + r$.

Согласно принятой терминологии, уравнения системы (6.3) (или уравнения (6.1) и (6.2)) называются *соотношениями баланса*, матрица этой системы $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,05 & 0,3 \end{pmatrix}$ называется *матрицей прямых затрат (технологической или структурной матрицей)*, а ее коэффициенты — *коэффициентами прямых затрат*. Коэффициенты каждого столбца матрицы M равны коэффициентам столбца табл. 1 соответствующей потребляющей отрасли, деленным на валовой выпуск этой отрасли. Вектор $r = \begin{pmatrix} 190 \\ 125 \end{pmatrix}$ — *вектор конечного потребления*.

Для системы (6.3) выполняются достаточные условия сходимости (5.6) и (5.7):

$$0,1 + 0,05 = 0,15 < 1, \quad 0,4 + 0,3 = 0,7 < 1 \quad \text{для столбцов};$$

$$0,1 + 0,4 = 0,5 < 1, \quad 0,05 + 0,3 = 0,35 < 1 \quad \text{для строк.}$$

Выполнение условия (5.6) может быть истолковано в экономическом смысле: при рентабельном производстве суммарное потребление каждой отрасли (суммарные затраты на приобретение продукции других отраслей) меньше валового выпуска этой отрасли.

Получим в *Excel* машинное решение системы (6.3) методом простой итерации (рис. 6.1): $x_1 = 300$, $x_2 = 200$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
1		0,1	0,4			190													
2	M=	0,05	0,3			r=	125												
3	н.п.																		
4	0	190	259	284,7	294,29	297,869	299,2047	#	#	#	#	#	#	#	#	300	300	300	
5	0	125	172	189,55	196,1	198,5445	199,4568	#	#	#	#	#	#	#	#	200	200	200	
6																			

Рис. 6.1. Машинное решение системы (6.3) методом простой итерации

Здесь для наглядности уменьшена ширина столбцов Н-Р, и числа в них не видны.

Напомним, что конечное потребление энергетики необходимо было увеличить на 50 усл. ден. ед., а машиностроения — на 65. Но, сопоставив начальную ситуацию и полученное решение, видим, что в итоге валовой выпуск энергетики увеличился не на 50, а на 100 усл. ден. ед., а машиностроения — не на 65, а также на 100 усл. ден. ед.

Решить систему (6.3) можно, например, и методом Крамера. Для этого приведем ее к соответствующему виду:

$$\begin{cases} 0,9x_1 - 0,4x_2 = 190, \\ -0,05x_1 + 0,7x_2 = 125. \end{cases} \quad (6.4)$$

$$\text{Получаем: } \Delta = \begin{vmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,05 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,61, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 190 & -0,4 \\ 125 & 0,7 \end{vmatrix} = 183, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,9 & 190 \\ -0,05 & 125 \end{vmatrix} = 122,$$

$$x_1 = \frac{183}{0,61} = 300, \quad x_2 = \frac{122}{0,61} = 200.$$

Но особую роль в задачах такого типа играет метод обратной матрицы. Система (6.4) записана в виде $(E - M)x = r$. Если $\det(E - M) \neq 0$, то

$$x = (E - M)^{-1}r. \quad (6.5)$$

Матрица $S = (E - M)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*. Это название связано с экономическим смыслом коэффициентов матрицы S . Запишем $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ и рассмотрим векторы конечного потребления $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Вектор $r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует выпуску единицы конечного продукта энергетики, а вектор $r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — машиностроения. Рассмотрим соответствующие решения системы (6.5): $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} = x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = x^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$. Значит, s_{11} — валовой выпуск энергетики, необходимый для обеспечения выпуска единицы конечного продукта энергетики; s_{21} — валовой выпуск машиностроения, необходимый для обеспечения выпуска единицы конечного продукта энергетики; s_{12} — валовой выпуск энергетики, необходимый для обеспечения выпуска единицы конечного продукта машиностроения; s_{22} — валовой выпуск машиностроения, необходимый для обеспечения выпуска единицы конечного продукта машиностроения.

$$\text{В нашем случае } E - M = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,05 & 0,7 \end{pmatrix}, \quad \det(E - M) = \begin{vmatrix} 0,9 & -0,4 \\ -0,05 & 0,7 \end{vmatrix} = 0,61 \neq 0$$

$$\text{и } S = (E - M)^{-1} = \frac{1}{0,61} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,05 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{70}{61} & \frac{40}{61} \\ \frac{5}{61} & \frac{90}{61} \end{pmatrix}. \text{ Тогда } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{70}{61} & \frac{40}{61} \\ \frac{5}{61} & \frac{90}{61} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 190 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Ответ: Чтобы конечное потребление энергетической отрасли довести до 190 усл. ден. ед., а машиностроения — до 125, необходимо установить валовой выпуск энергетики 300 усл. ден. ед., а машиностроения — 200 усл. ден. ед.

В общем виде экономико-математическая модель межотраслевого баланса разработана в 1936 г. известным американским экономистом российского происхождения В. В. Леонтьевым. Толчком к построению модели функционирования многоотраслевого хозяйства послужил экономический кризис 1929—1932 годов, называвшийся в США «Великой депрессией». Метод прогнозирования экономического развития, разработанный В. В. Леонтьевым, носит название «затраты - выпуск».

Предположим, что экономическая система представляет собой n отраслей, каждая из которых производит однородную продукцию. Для обеспечения своего производства каждая отрасль потребляет продукцию других отраслей и себя самой (производственное потребление) и производит продукцию, потребляемую вне сферы материального производства

(конечное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени (период стабильности технологий). Обозначим:

x_i — общий (валовой) объем продукции i -ой отрасли, $i = 1, 2, \dots, n$ (в примере $1 \ n = 2$, $x_1 = 200$, $x_2 = 100$);

x_{ij} — объем продукции i -й отрасли, потребляемый j -ой отраслью при валовом выпуске ее продукции x_j , $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$ (в примере $1 \ x_{11} = 20$, $x_{12} = 40$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 30$);

r_i — объем продукции i -ой отрасли, предназначенный для реализации в непроизводственной сфере — конечное потребление (конечный продукт). Этот объем обычно составляет более 75 % всей производственной продукции (в примере $1 \ r_1 = 140$, $r_2 = 60$).

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовой выпуск i -ой отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах (см. равенства в примере 1):

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.6)$$

Уравнения вида (6.6) называют *соотношениями баланса*. Продукция разных отраслей имеет разные измерения, поэтому и в дальнейшем будем иметь в виду лишь стоимостный баланс.

В. В. Леонтьевым на основании анализа экономики США в период перед Второй мировой войной было установлено, что в результате длительного применения одних и тех же технологий очень слабо меняются отношения потребления какой-либо отраслью продукции другой отрасли к валовому выпуску первой отрасли, то есть величины

$$m_{ij} = x_{ij}/x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.7)$$

и в связи с этим они могут рассматриваться как некоторые технологические константы. То есть $x_{ij} = m_{ij}x_j$, где m_{ij} — постоянные числа, называемые *коэффициентами прямых затрат*. Тогда соотношения баланса (6.6) записываются как

$$x_i = m_{i1}x_1 + m_{i2}x_2 + \dots + m_{in}x_n + r_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.8)$$

Введем в рассмотрение вектор-столбцы валового выпуска, конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат (технологическую матрицу):

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда соотношения баланса (6.8) в матричной форме имеют вид:

$$x = Mx + r. \quad (6.9)$$

Соотношение (6.9) называют *моделью Леонтьева* или *уравнением линейного межотраслевого баланса*. Для примера 1 оно имеет вид: $\begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,05 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 140 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Задача планирования, рассмотренная в частном случае в примере 2, в общем виде принимает следующую формулировку: *для периода времени T известен вектор конечного потребления r , и требуется определить вектор валового выпуска x , удовлетворяющий условию (6.9).*

При этом, исходя из экономического смысла задачи, координаты векторов x и r , а также элементы матрицы M должны быть неотрицательны: $x \geq 0$, $r \geq 0$ и $M \geq 0$. Если задача планирования имеет решение, то искомый вектор валового выпуска x определяется формулой (6.5). Матрицу $S = (E - M)^{-1}$ называют *матрицей полных затрат*. Об экономическом смысле ее

коэффициентов в частном случае мы уже говорили. После этого нетрудно сформулировать экономический смысл s_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$), и в общем случае. Сделайте это самостоятельно.

Конечно, если известны конкретные данные баланса нескольких отраслей промышленности (см., например, табл. 1), планируемые показатели конечного потребления (см. пример 2), то задача планирования ставится в виде (6.9) и решается (см. систему (6.3)). В процессе решения выясняется, имеет она экономически обоснованное решение или нет. Но можно поставить вопрос до начала решения: будет ли задача (6.9) при неотрицательных матрице M и векторе r иметь неотрицательное решение x ? При каких неотрицательных r решение (6.9) будет неотрицательным? Желательно, чтобы при любых неотрицательных r решение x было бы неотрицательным. В этом случае можно проводить исследования, варьируя r и получая x . Ведущую роль в ответе на эти вопросы играют *продуктивные матрицы*.

Определение. Матрицу $M \geq 0$ называют *продуктивной*, если задача планирования разрешима для любого вектора $r \geq 0$, причем единственным образом. В таком случае и модель Леонтьева называется *продуктивной*.

Важно на самом раннем этапе выяснить, является ли технологическая матрица исследуемой экономической системы продуктивной. В этом может помочь следующая

Теорема 1. Пусть M — произвольная неотрицательная квадратная матрица. Матрица M продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - M)^{-1}$ существует и неотрицательна.

Пример 3. Выясним, является ли продуктивной матрица $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,05 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица M — технологическая матрица из примера 2. Уже найдено, что

$$(E - M)^{-1} = \begin{pmatrix} 70 & 40 \\ 61 & 61 \\ 5 & 90 \\ 61 & 61 \end{pmatrix}. \text{ Таким образом, } (E - M)^{-1} \text{ существует и неотрицательна. Значит, } M \text{ —}$$

продуктивна. Таким образом, каким бы ни был неотрицательный вектор конечного потребления r в примере 2, всегда можно найти неотрицательный вектор валового выпуска x , обеспечивающий такое конечное потребление.

Как видим, чтобы установить продуктивность модели Леонтьева, приходится фактически решить матричное уравнение (6.9). После нахождения $(E - M)^{-1}$ остается один шаг до решения — умножение $(E - M)^{-1}$ на вектор конечного потребления r . Более короткий путь к установлению продуктивности матрицы M дает *достаточное условие продуктивности* — теорема 2.

Теорема 2. Матрица M с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов любого ее столбца (строки) не превосходит единицы:

$$\sum_{i=1}^n m_{ij} \leq 1 \quad \text{для любого столбца } j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.10)$$

или

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \leq 1 \quad \text{для любой строки } i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.11)$$

причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Видим, что условия (6.10), (6.11) почти совпадают с условиями (5.6) и (5.7) из лабораторной работы № 5. По теореме 2 матрица $M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,05 & 0,3 \end{pmatrix}$ из примера 3 продуктивна.

Пример 4. Потоки товаров и услуг между пятью предприятиями г. Балашиха за январь 2001 г. представлены в таблице «затраты-выпуск» (табл. 3)¹. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции на перспективу при условии неизменности коэффициентов прямых затрат по сравнению с отчетными показателями, если конечное потребление на первых трех предприятиях увеличить соответственно до 720,5; 200; 427,5 тыс. руб., а на предприятиях «Городские электросети» и «Городские теплосети» оставить без изменения.

Таблица 3. Таблица «затраты - выпуск»

Предприятия	Потребление					Конечный продукт, тыс. руб.	Валовой выпуск, тыс. руб.
	АООТ «Прицеп»	«Горпищекомбинат»	МП ПУ «Водоканал»	«Городские электросети»	«Городские теплосети»		
АООТ «Прицеп»	11,1	0,9	34,3	17,6	29,4	711,3	804,6
«Горпищекомбинат»	0	1,2	3,4	21,7	17,9	190,0	234,2
МП ПУ «Водоканал»	22,8	0	4,1	9,3	8,4	407,8	452,4
«Городские электросети»	19,8	0,3	23,6	6,4	14,8	663,1	728
«Городские теплосети»	24,9	0	11,3	10,8	5,4	476,5	528,9

Напомним, что в матрице M компоненты m_{ij} — постоянные числа, называемые *коэффициентами прямых затрат*, определяются из соотношений (6.7): $m_{ij} = x_{ij}/x_j$. Ввиду этого можно указать примерный алгоритм решения модели Леонтьева в *Excel* методом простой итерации (или Зейделя):

1. Ввести данные по балансу между рассматриваемыми взаимодействующими отраслями промышленности и значения конечного продукта по каждой отрасли в ячейки листа *Excel*.
2. Рассчитать валовой выпуск каждой отрасли.
3. На основе построенной таблицы получить таблицу (матрицу) прямых затрат.
4. Ввести в ячейки *Excel* компоненты нового вектора конечного потребления по всем рассматриваемым отраслям промышленности.
5. Выбрать произвольное начальное приближение.
6. На основе начального приближения, таблицы (матрицы) прямых затрат и вектора новых значений конечного потребления ввести формулы компонент первого приближения.
7. Копировать получение очередного приближения до тех пор, пока значения компонент следующего и предыдущего приближений не начнут повторяться (то есть получить машинное решение).

Реализуем рассмотренный алгоритм.

1. В порядке выполнения шагов алгоритма оформим данные задачи на листе *Excel*, снабдив их необходимыми подписями (рис. 6.2).

¹ Данные получены в результате работы, которая проводилась доцентом Г. И. Горемыкиной совместно со студенткой физико-математического факультета БФ СГУ Е. В. Вильховченко.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Предприятия	1	2	3	4	5	Конечное потребление	
2	1. АООТ "Прицеп"	11,1	0,9	34,3	17,6	29,4	711,3	
3	2. Горпищекомбинат	0	1,2	3,4	21,7	17,9	190	
4	3. МП ПУ "Водоканал"	22,8	0	4,1	9,3	8,4	407,8	
5	4. Городские электросети	19,8	0,3	23,6	6,4	14,8	663,1	
6	5. Городские теплосети	24,9	0	11,3	10,8	5,4	476,5	
7								

Рис. 6.2. Оформление исходных данных задачи

2. Далее рассчитаем валовой выпуск продукции каждого предприятия, используя в ячейках H2:H6 формулу автосуммы или же можно в ячейке H2 ввести автосумму, а в остальные ячейки этого диапазона формулу скопировать вниз (рис. 6.3). В строках этой таблицы, пронумерованных в заголовочном столбце A с 1-й по 5-ю, в столбцах, пронумерованных в строке 1 с 1-го по 5-й, располагаются величины x_{ij} , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, в столбце G располагаются компоненты r_j вектора r конечного потребления, а в столбце H вычислены по формулам суммирования компоненты x_j вектора x текущего валового выпуска.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Предпри	1	2	3	4	5	Конечное потребление	Валовой выпуск
2	1. АООТ	11,1	0,9	34,3	17,6	29,4	711,3	=СУММ(B2:G2)
3	2. Горпи	0	1,2	3,4	21,7	17,9	190	=СУММ(B3:G3)
4	3. МП ПУ	22,8	0	4,1	9,3	8,4	407,8	=СУММ(B4:G4)
5	4. Город	19,8	0,3	23,6	6,4	14,8	663,1	=СУММ(B5:G5)
6	5. Город	24,9	0	11,3	10,8	5,4	476,5	=СУММ(B6:G6)
7								

Рис. 6.3. Расчет валового выпуска

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Предприя	1	2	3	4	5	Конечное потребление	Валовой выпуск
2	1. АООТ	11,1	0,9	34,3	17,6	29,4	711,3	804,6
3	2. Горпи	0	1,2	3,4	21,7	17,9	190	234,2
4	3. МП ПУ	22,8	0	4,1	9,3	8,4	407,8	452,4
5	4. Город	19,8	0,3	23,6	6,4	14,8	663,1	728
6	5. Город	24,9	0	11,3	10,8	5,4	476,5	528,9
7								
8		Матрица прямых затрат						
9		=B2/\$H\$2						
10								
11								

Рис. 6.4. Расчет коэффициентов матрицы прямых затрат

3. Используя формулу (6.7) $m_{ij} = x_{ij}/x_1$, найдем коэффициенты прямых затрат. Матрицу прямых затрат M расположим строго под имеющейся таблицей, подпишем ее (рис. 6.4). В ячейку B9, где будет располагаться коэффициент m_{11} , введем формулу «=B2/\$H\$2», то есть получим $m_{11} = x_{11}/x_1$. При этом адрес ячейки H2, в которой хранится значение x_1 , надо зафиксировать, так как в дальнейшем будем копировать эту формулу вниз, а числа из первого столбца исходной таблицы должны делиться на одно и то же число — x_1 . В остальных ячейках C9:F9 запишем соответ-

ствующие формулы (рис. 6.5). После того, как правильно введены формулы в ячейки B9:F9, выделим их и скопируем вниз формулы в следующие 4 строки (рис. 6.6). Получим матрицу прямых затрат M . Видим, что для нее выполняются достаточные условия продуктивности (6.10) и (6.11).

	B	C	D	E	F
7					
8	Матрица прямые				
9	=B2/\$H\$2	=C2/\$H\$3	=D2/\$H\$4	=E2/\$H\$5	=F2/\$H\$6
10					
11					

Рис. 6.5. Подготовка формул к копированию

	A	B	C	D	E	F
7						
8		Матрица прямых затрат				
9		0,013796	0,003843	0,075818	0,024176	0,055587
10		0,000000	0,005124	0,007515	0,029808	0,033844
11		0,028337	0,000000	0,009063	0,012775	0,015882
12		0,024609	0,001281	0,052166	0,008791	0,027983
13		0,030947	0,000000	0,024978	0,014835	0,010210
14						

Рис. 6. Матрица прямых затрат (с шестью знаками после запятой)

	B	C	D	E	F
7					
8	Матрица пр				
9	=B2/\$H\$2	=C2/\$H\$3	=D2/\$H\$4	=E2/\$H\$5	=F2/\$H\$6
10	=B3/\$H\$2	=C3/\$H\$3	=D3/\$H\$4	=E3/\$H\$5	=F3/\$H\$6
11	=B4/\$H\$2	=C4/\$H\$3	=D4/\$H\$4	=E4/\$H\$5	=F4/\$H\$6
12	=B5/\$H\$2	=C5/\$H\$3	=D5/\$H\$4	=E5/\$H\$5	=F5/\$H\$6
13	=B6/\$H\$2	=C6/\$H\$3	=D6/\$H\$4	=E6/\$H\$5	=F6/\$H\$6
14					

Рис. 6.7. Формулы расчета коэффициентов прямых затрат

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Предприятия	1	2	3	4	5	Конечное потребление	Валовой выпуск	Новое конечное потребление
2	1. АООТ "Пр	11,1	0,9	34,3	17,6	29,4	711,3	804,6	720,5
3	2. Горпищек	0	1,2	3,4	21,7	17,9	190	234,2	200
4	3. МП ПУ "Во	22,8	0	4,1	9,3	8,4	407,8	452,4	427,5
5	4. Городские	19,8	0,3	23,6	6,4	14,8	663,1	728	663,1
6	5. Городские	24,9	0	11,3	10,8	5,4	476,5	528,9	476,5
7									
8		Матрица прямых затрат							
9		0,013796	0,003843	0,075818	0,024176	0,055587			
10		0,000000	0,005124	0,007515	0,029808	0,033844			
11		0,028337	0,000000	0,009063	0,012775	0,015882			
12		0,024609	0,001281	0,052166	0,008791	0,027983			
13		0,030947	0,000000	0,024978	0,014835	0,010210			
14									

Рис. 6.8. Лист Excel, подготовленный к методу последовательных приближений

На рис. 6.7 показаны расчетные формулы матрицы прямых затрат. Формулы во всех ячейках листа становятся видимыми при нажатой кнопке **Показать формулы** вкладки **Формулы**.

4. Согласно условию задачи внесем компоненты нового вектора конечного потребления, например, в ячейки I2:I6 и подпишем этот столбик. Окончательный вид листа Excel, подготовленного к применению метода последовательных приближений, представлен на рис. 6.8.

	A	B	C	D	E	F
14						
15		Последовательные приближения				
16		0				
17		0				
18		0				
19		0				
20		0				
21						
22						

Рис. 6.9. Начальное приближение

5. Введем, например, в ячейки B16:B20 нули — вектор начального приближения (рис. 6.9).

6. В ячейках C16:C20 организуем вычисление компонент вектора первого приближения. В ячейке C16 вычисляем x_1^1 так, чтобы при копировании вниз этой формулы менялся номер строки в матрице прямых затрат, а при копировании вправо коэффициенты из M не менялись: «= \$B9*B\$16+\$C9*B\$17+\$D9*B\$18+\$E9*B\$19+\$F9*B\$20+\$I2» (рис. 6.10).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	Предприятия	1	2	3	4	5	Конечное потребление			
2	1. АООТ "Пр	11,1	0,9	34,3	17,6	29,4	711,3	Валовой выпуск	Новое конечное потребление	
3	2. Горпищек	0	1,2	3,4	21,7	17,9	190	804,6	720,5	
4	3. МП ПУ "Вс	22,8	0	4,1	9,3	8,4	407,8	234,2	200	
5	4. Городские	19,8	0,3	23,6	6,4	14,8	663,1	452,4	427,5	
6	5. Городские	24,9	0	11,3	10,8	5,4	476,5	728	663,1	
7								528,9	476,5	
8		Матрица прямых затрат								
9		0,013796	0,003843	0,075818	0,024176	0,055587				
10		0,000000	0,005124	0,007515	0,029808	0,033844				
11		0,028337	0,000000	0,009063	0,012775	0,015882				
12		0,024609	0,001281	0,052166	0,008791	0,027983				
13		0,030947	0,000000	0,024978	0,014835	0,010210				
14										
15		Последовательные приближения								
16		0	= \$B9*B\$16+\$C9*B\$17+\$D9*B\$18+\$E9*B\$19+\$F9*B\$20+\$I2							
17		0	200,0							
18		0	427,5							
19		0	663,1							
20		0	476,5							
21										

Рис. 6.10. Ввод формул первого приближения

Аналогичные формулы скалярного произведения всех остальных строк матрицы A на столбец начального приближения B16:B20 копируются из C16 в C17:C20. В ячейках C16:C20 после этого должны появиться компоненты первого приближения (рис. 6.11). Они в точности равны соответствующим компонентам вектора нового конечного потребления, так как начальное приближение имело нулевые компоненты.

	A	B	C	D	E
14					
15		Последовательные приближения			
16		0	720,5		
17		0	200		
18		0	427,5		
19		0	663,1		
20		0	476,5		
21					

Рис. 6.11. Начальное и первое приближение

7. Теперь надо выделить ячейки C16:C20 и скопировать формулы вправо, при этом относительные ссылки будут меняться, а абсолютные — нет. Таким образом, в ячейках D16:D20 в формулах будут ссылки на C16:C20, то есть на предыдущее приближение; в E16:E20 — на D16:D20 и так далее. Копирование надо продолжать до тех пор, пока последовательные приближения не начнут повторяться. Например, если выводить в ячейках по шесть знаков после запятой, повторения начнутся с 11-го приближения (рис. 6.12), а если по двенадцать, то — с 18-го.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14												
15	Последовательные приближения											
16	0	720,5	806,138720	814,619634	815,505639	815,596351	815,605712	815,606675	815,606775	815,606785	815,606786	815,606786
17	0	200,0	240,129694	244,024095	244,428952	244,470514	244,474798	244,475239	244,475285	244,475289	244,475290	244,475290
18	0	427,5	467,829892	472,138828	472,576207	472,621497	472,626150	472,626630	472,626679	472,626684	472,626685	472,626685
19	0	663,1	722,550839	728,670331	729,303251	729,368286	729,374988	729,375678	729,375749	729,375756	729,375757	729,375757
20	0	476,5	524,177604	529,203971	529,716161	529,769123	529,774568	529,775128	529,775186	529,775192	529,775193	529,775193
21												
22												

Рис. 6.121. Повторение последовательных приближений с 6-ю знаками

Решение модели Леонтьева x для рассматриваемой экономической системы, найденное с 12-ю знаками после запятой, таково:

$$\begin{aligned}x_1 &\approx 815,606786056101, \\x_2 &\approx 244,475289920588, \\x_3 &\approx 472,626684645803, \\x_4 &\approx 729,375757223807, \\x_5 &\approx 529,775192815697.\end{aligned}$$

Все компоненты решения неотрицательны. Анализ увеличения валового выпуска каждого предприятия показывает, что он вырос на величину, большую разности между планируемым (новым) и имеющимся (старым) конечным потреблением, что согласуется с экономическим смыслом задачи.

Набор формул в ячейках листа можно упростить, если использовать встроенные матричные операции умножения и сложения. На листе *Excel*, подготовленном к методу последовательных приближений и с указанным начальным приближением (рис. 6.8, 9), выделим ячейки C16:C20 и вызовем функцию умножения матриц МУМНОЖ. В открывшемся окне проведем диалог, указав в окне **Массив1** матрицу прямых затрат, то есть диапазон B9:F13, протащив мышь по нужным ячейкам, а в окне **Массив2** — диапазон B16:B20. Закрывая диалоговое окно, надо нажать **Ctrl+Shift+Enter**. Помня о том, что далее надо будет копировать формулы, зафиксируем адреса массива B9:F13 непосредственно в ячейке C16 и прибавим фиксированный массив, в котором хранятся значения нового конечного потребления I2:I6.

	B	C	D	E	F
14					
15	Последовательные приближения				
16	0	=МУМНОЖ(\$B\$9:\$F\$13;B16:B20)+\$I\$2:\$I\$6			
17	0	МУМНОЖ(массив1; массив2)			
18	0	427,5			
19	0	663,1			
20	0	476,5			
21					

Рис. 6.13. Матричное умножение и сложение при формировании приближения

Окончательная формула для диапазона C16:C20 изображена на рис. 6.13, а общий вид листа перед началом копирования для получения последовательных приближений — на рис. 6.14.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Предприятия	1	2	3	4	5	Конечное потребление	Валовой выпуск	Новое конечное потребление
2	1. АООТ "Пр	11,1	0,9	34,3	17,6	29,4	711,3	804,6	720,5
3	2. Горпищек	0	1,2	3,4	21,7	17,9	190	234,2	200
4	3. МП ПУ "Вс	22,8	0	4,1	9,3	8,4	407,8	452,4	427,5
5	4. Городские	19,8	0,3	23,6	6,4	14,8	663,1	728	663,1
6	5. Городские	24,9	0	11,3	10,8	5,4	476,5	528,9	476,5
7									
8		Матрица прямых затрат							
9		0,013796	0,003843	0,075818	0,024176	0,055587			
10		0,000000	0,005124	0,007515	0,029808	0,033844			
11		0,028337	0,000000	0,009063	0,012775	0,015882			
12		0,024609	0,001281	0,052166	0,008791	0,027983			
13		0,030947	0,000000	0,024978	0,014835	0,010210			
14									
15		Последовательные приближения							
16		0	=МУМНОЖ(\$B\$9:\$F\$13;B16:B20)+\$I\$2:\$I\$6						
17		0	МУМНОЖ(массив1; массив2)						
18		0	427,5						
19		0	663,1						
20		0	476,5						
21									

Рис. 6.14. Ячейки, используемые при матричном умножении и сложении

Для получения решения так же, как и в предыдущем случае, будем копировать формулы из ячеек C16:C20 вправо до тех пор, пока числа не начнут повторяться.

Задание для самостоятельной работы

- Найдите решение в примере 4 методом Крамера в среде табличного процессора Excel.
- Найдите решение в примере 4 методом обратной матрицы в среде табличного процессора Excel. Убедитесь в продуктивности технологической матрицы с помощью необходимого и достаточного условия продуктивности (по теореме 1).
- В таблице содержатся данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени (в усл. ден. ед.). Найдите объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечный продукт по отраслям увеличить соответственно на величину, указанную в последнем столбце.

1)

Отрасли	1	2	3	Конечный продукт	Валовой выпуск	Увеличение
1	30	15	40	65	150	25
2	15	45	20	70	150	25
3	30	15	20	135	200	30

2)

Отрасли	1	2	3	Конечный продукт	Валовой выпуск	Увеличение
1	30	60	30	180	300	40
2	60	40	30	70	200	40
3	90	20	60	130	300	120

3)

Отрасли	1	2	3	Конечный продукт	Валовой выпуск	Увеличение
1	20	5	60	15	100	55
2	10	10	30	0	50	20
3	30	15	15	90	150	0

4)

Отрасли	1	2	3	Конечный продукт	Валовой выпуск	Увеличение
1	24	10	15	31	80	4
2	8	10	30	52	100	33
3	32	20	45	53	150	17

Ответы на задание 3

- 1) $x = (200, 200, 250)^T$. 2) $x = (400, 300, 500)^T$. 3) $x = (200, 100, 200)^T$.
 4) $x = (100, 150, 200)^T$.

Лабораторная работа № 7

Интерполирование функций. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично:

Таблица 1. Таблица функции $y = f(x)$

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

где $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *узлами таблицы*. Необходимо вычислить значение данной функции $f(\bar{x})$ в некоторой промежуточной по отношению к узлам точке \bar{x} , не попавшей в таблицу: $\bar{x} \in [x_0; x_n], \bar{x} \neq x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Поставленную задачу называют *задачей интерполирования* функции (от латинского *interpolatio* — «чтение между строк»). Решение этой задачи сводится к получению специальной приближающей (интерполирующей) функции $F(x)$, совпадающей в узлах таблицы с данной функцией:

$$F(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7.1)$$

Если функция $F(x)$ известна, можно считать, что в промежуточной точке выполняется приближенное равенство: $f(\bar{x}) \approx F(\bar{x})$.

Процесс получения функции $F(x)$ (или значения $f(\bar{x}) \approx F(\bar{x})$) называется *интерполированием* или *интерполяцией*, а узлы таблицы при этом называются *узлами интерполяции*. Если функция $F(x)$ является многочленом, его называют *интерполяционным многочленом (полиномом)*. Как известно, существует единственный интерполяционный многочлен n -й степени $P_n(x)$

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad (7.2)$$

проходящий через $n + 1$ точку из табл. 1. Действительно, числовые коэффициенты многочлена (7.2) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ можно найти непосредственно, решая систему линейных алгебраических уравнений, получающуюся из условий (7.1):

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \dots + a_{n-1}x_0^{n-1} + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_nx_1^n = y_1, \\ a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + \dots + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_nx_2^n = y_2, \\ \dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} + a_nx_n^n = y_n. \end{cases} \quad (7.3)$$

Главный определитель этой системы есть определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (7.4)$$

и при несовпадающих узлах интерполяции отличен от нуля, а значит, система (7.3) имеет единственное решение, то есть коэффициенты многочлена (7.2) $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ находятся единственным образом.

Пример 1. Функция $y = f(x)$ задана таблично:

Таблица 2. Таблица функции $y = f(x)$

x	-3	-1	2
$f(x)$	-5	-7	5

Найти интерполяционный многочлен, проходящий через точки из таблицы.

Решение. В таблице три точки, значит, существует единственный многочлен 2-й степени $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, проходящий через эти точки. Здесь $x_0 = -3, y_0 = -5, x_1 = -1, y_1 = -7, x_2 = 2, y_2 = 5$. Для нахождения a_0, a_1, a_2 составим систему (7.3):

$$\begin{cases} a_0 - 3a_2 + 9a_2 = -5, \\ a_0 - a_2 + a_2 = -7, \\ a_0 + 2a_2 + 4a_2 = 5. \end{cases}$$

Решив эту систему, например, методом Гаусса (решите самостоятельно), получим $a_0 = -5, a_1 = 3, a_2 = 1$. Значит, искомый многочлен равен $P_2(x) = -5 + 3x + x^2$. Проверьте, что он проходит через точки из таблицы.

Теперь с помощью этого многочлена можно находить приближенно значение функции $f(x)$ в любой промежуточной по отношению к узлам точке, не попавшей в таблицу. Например, $f(0) \approx -5, f(1) \approx -1, f(1,5) \approx 1,75$ и так далее.

Разумеется, при больших n вычисление коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ с помощью системы (7.3) требует значительных усилий.

Лагранжем предложен способ получения интерполяционного многочлена $P_n(x)$ (или вычисления его значения в промежуточной точке) в виде суммы $(n+1)$ многочлена n -й степени, каждый из которых проходит только через одну точку из табл. 1 и принимает нулевое значение в остальных. Рассмотрим специальный многочлен с номером i ($0 \leq i \leq n$):

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}. \quad (7.5)$$

В числителе дроби — n множителей 1-й степени, а в знаменателе — только числа из таблицы, и ни одна из разностей не обращается в ноль. Следовательно, $l_i(x)$ — многочлен n -й степени. Очевидно, что в i -м узле $l_i(x_i) = 1$, так как числитель в этом случае равен знаменателю:

$$l_i(x_i) = \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} = 1, \quad (7.6)$$

а в j -м узле при $j \neq i$ этот многочлен равен нулю, так как в числителе обязательно встретится нулевая разность $(x_j - x_j)$:

$$l_i(x_j) = \frac{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\dots(x_j - x_j)(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} = 0. \quad (7.7)$$

В силу равенств (7.6) и (7.7) многочлен $y_i l_i(x)$ есть многочлен n -й степени и

$$y_i l_i(x) = \begin{cases} y_i & \text{при } x = x_i, \\ 0 & \text{при } x = x_j, i \neq j. \end{cases} \quad (7.8)$$

Построим теперь многочлен n -й степени как сумму многочленов $y_i l_i(x)$, который обозначен его в честь Лагранжа $L_n(x)$:

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \dots + y_i l_i(x) + \dots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(x). \quad (7.9)$$

В силу равенства (7.8) многочлен $L_n(x)$ обладает свойством (7.1):

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n,$$

а значит, является интерполяционным многочленом. В силу единственности интерполяционного многочлена $L_n(x)$ — тот самый многочлен, коэффициенты которого можно вычислить,

решив систему (7.3). Многочлен $L_n(x)$ называется *интерполяционным многочленом* (полиномом) *Лагранжа*.

Итак, с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа задача интерполирования решается следующим образом:

$$f(\bar{x}) \approx L_n(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n y_i l_i(\bar{x}) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) \dots (\bar{x} - x_{i-1})(\bar{x} - x_{i+1}) \dots (\bar{x} - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}. \quad (7.10)$$

Из формулы (7.10) ясно, что находить интерполяционный полином в явном виде (7.2) вовсе необязательно: для нахождения значения таблично заданной функции в промежуточной точке достаточно составить сумму однотипных слагаемых (7.10).

Из общей формулы (7.10) получаются частные формулы для конкретного n .

1. Пусть $n = 1$, тогда

$$L_1(x) = \sum_{i=0}^1 y_i l_i(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}, \quad (7.11)$$

и $L_1(x)$ — линейная функция, графиком которой является прямая, проходящая через точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$. Интерполирование с помощью $L_1(x)$ называется *линейной интерполяцией*. Обычно, когда необходимо выполнить прикидочный расчет в промежуточной точке таблицы, проводится линейная интерполяция: мысленно соединяются отрезком две соседние точки из таблицы, между которыми попала промежуточная точка, и прикидывается значение функции в промежуточной точке с помощью деления отрезка в нужном отношении.

2. Пусть $n = 2$, тогда

$$L_2(x) = \sum_{i=0}^2 y_i l_i(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \quad (7.12)$$

и $L_2(x)$ — квадратичная функция, графиком которой является парабола, проходящая через точки $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Интерполирование с помощью $L_2(x)$ называется *квадратичной интерполяцией*. И так далее.

Погрешность интерполяционного полинома $|R_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - L(\bar{x})|$ для $n + 1$ раз дифференцируемой функции $f(x)$ в точке \bar{x} оценивается сверху величиной:

$$|R_n(\bar{x})| = |f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot \left| \prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i) \right|, \text{ где } M_{n+1} = \max_{x \in [x_0; x_n]} |f^{(n+1)}(x)|. \quad (7.13)$$

Но воспользоваться этой формулой практически невозможно. Во-первых, исходя из постановки задачи, можно и не располагать аналитическим выражением (формулой) для $f(x)$, а значит, нельзя отыскать $f^{(n+1)}(x)$. Во-вторых, задача нахождения величины $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0; x_n]} |f^{(n+1)}(x)|$ как задача нахождения наибольшего значения функции сама по себе весьма сложна. Для приближенной оценки сверху величины $|R_n(\bar{x})|$ прибегают к методам численного дифференцирования (см. лабораторную работу № 9). Но все-таки формула (7.13) показывает, что, во-первых, с ростом степени n интерполяционного полинома оценка сверху погрешности может уменьшаться, так как знаменатель $(n+1)!$ растет очень быстро. Во-вторых, погрешность $|R_n(\bar{x})|$ в узлах интерполирования (то есть при $\bar{x} = x_i, i \in \{0..n\}$) рав-

на нулю, так как $\prod_{i=0}^n (\bar{x} - x_i) = 0$. Если же промежуточная точка \bar{x} не совпадает ни с одним из узлов, то при прочих равных условиях погрешность тем меньше, чем ближе \bar{x} к какому-

нибудь узлу, так как один из множителей $\bar{x} - x_i$ в произведении близок к нулю. Вообще, наилучшее положение \bar{x} — посередине отрезка узловых точек таблицы как можно ближе к одному из узлов. Это можно проверить, интерполируя известную функцию.

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана таблично с помощью табл. 2 (см. пример 1). С помощью интерполяционного полинома Лагранжа 1-й и 2-й степени $L_1(x)$ и $L_2(x)$ найти приближенно значения функции в точках -2 , и $1,5$, то есть $f(-2)$, $f(1,5)$.

Решение. Решим поставленную задачу вручную и составим в *Excel* программу для вычисления значения $L_2(x)$ в промежуточной точке.

Для получения $L_1(\bar{x})$ по формуле (7.11) из трех точек табл. 2 необходимо выбрать две: $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$ и такие что $x_0 < \bar{x} < x_1$.

1. $\bar{x} = -2$, $x_0 = -3$, $y_0 = -5$, $x_1 = -1$, $y_1 = -7$ (рис. 7.1):

$$L_1(-2) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x} - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x} - x_0)}{(x_1 - x_0)} = -5 \cdot \frac{(-2 - (-1))}{(-3 - (-1))} + (-7) \cdot \frac{(-2 - (-3))}{(-1 - (-3))} = -6.$$

2. $\bar{x} = -2$, $x_0 = -3$, $y_0 = -5$, $x_1 = 2$, $y_1 = 5$ (рис. 7.2):

$$L_1(-2) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x} - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x} - x_0)}{(x_1 - x_0)} = -5 \cdot \frac{(-2 - 2)}{(-3 - 2)} + 5 \cdot \frac{(-2 - (-3))}{(2 - (-3))} = -3.$$

3. $\bar{x} = 1,5$, $x_0 = -1$, $y_0 = -7$, $x_1 = 2$, $y_1 = 5$ (рис. 7.3):

$$L_1(-2) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x} - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x} - x_0)}{(x_1 - x_0)} = -7 \cdot \frac{(1,5 - 2)}{(-1 - 2)} + 5 \cdot \frac{(1,5 - (-1))}{(2 - (-1))} = 3.$$

4. $\bar{x} = 1,5$, $x_0 = -3$, $y_0 = -5$, $x_1 = 2$, $y_1 = 5$ (рис. 7.2):

$$L_1(1,5) = y_0 \cdot \frac{(\bar{x} - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \cdot \frac{(\bar{x} - x_0)}{(x_1 - x_0)} = -5 \cdot \frac{(1,5 - 2)}{(-3 - 2)} + 5 \cdot \frac{(1,5 - (-3))}{(2 - (-3))} = 4.$$

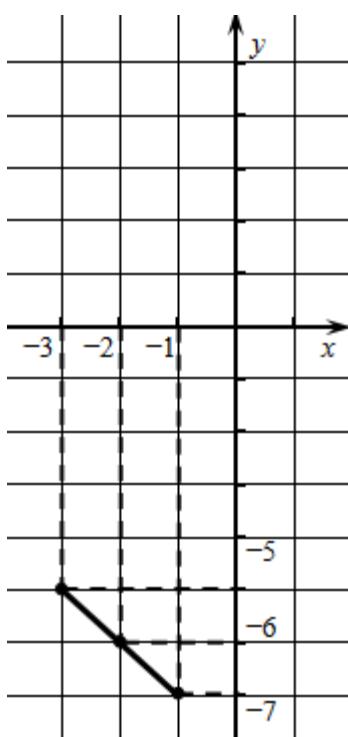


Рис. 7.1. $L_1(-2)$

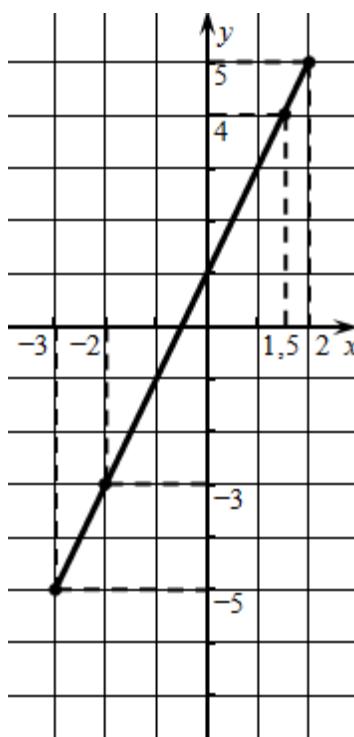


Рис. 7.2. $L_1(-2)$ и $L_1(1,5)$

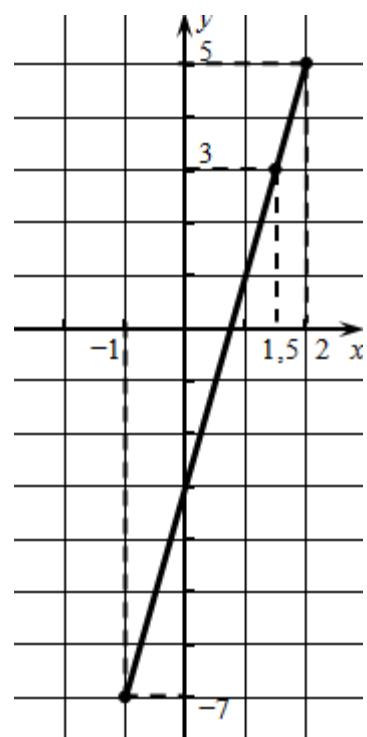


Рис. 7.3. $L_1(1,5)$

Видим, что находить явный вид многочлена $L_1(x)$ вовсе необязательно.

Для получения $L_2(\bar{x})$ по формуле (7.12) выбираются все три точки табл. 2:

$x_0 = -3, y_0 = -5, x_1 = -1, y_1 = -7, x_2 = 2, y_2 = 5$ (рис. 7.4).

1. $\bar{x} = -2$ (рис. 7.4):

$$L_2(-2) = y_0 \cdot \frac{(-2 - x_1)(-2 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(-2 - x_0)(-2 - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(-2 - x_0)(-2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \\ = -5 \cdot \frac{(-2 - (-1))(-2 - 2)}{(-3 - (-1))(-3 - 2)} + (-7) \cdot \frac{(-2 - (-3))(-2 - 2)}{(-1 - (-3))(-1 - 2)} + 5 \cdot \frac{(-2 - (-3))(-2 - (-1))}{(2 - (-3))(2 - (-1))} = -7.$$

2. $\bar{x} = 1,5$ (рис. 7.4):

$$L_2(1,5) = -5 \cdot \frac{(1,5 - (-1))(1,5 - 2)}{(-3 - (-1))(-3 - 2)} + (-7) \cdot \frac{(1,5 - (-3))(1,5 - 2)}{(-1 - (-3))(-1 - 2)} + 5 \cdot \frac{(1,5 - (-3))(1,5 - (-1))}{(2 - (-3))(2 - (-1))} = 1,75.$$

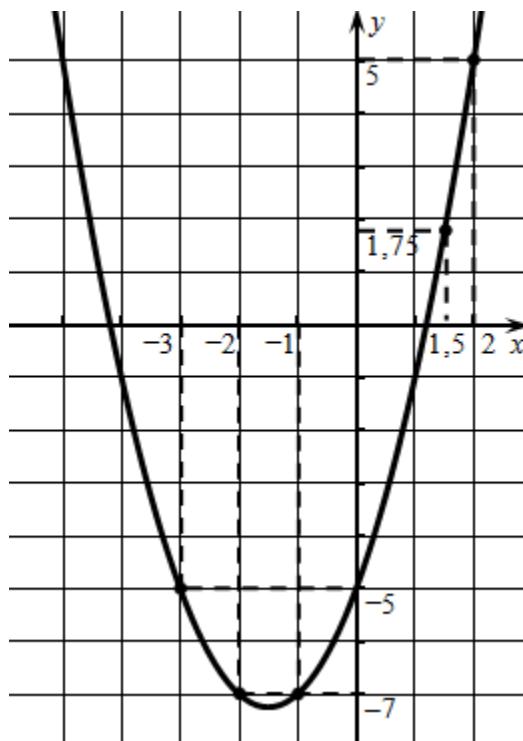


Рис. 7.4. $L_2(-2)$ и $L_2(1,5)$

При нахождении $L_1(\bar{x})$ и $L_2(\bar{x})$ в данной задаче не располагаем аналитическим выражением $f(x)$, а значит, по формуле (7.13) погрешность оценить не можем.

Составим программу в Excel для вычисления значения $L_2(\bar{x})$ по следующим шагам.

1. Оформим на листе входные данные: в A1:C2 введем данные из табл. 2. Вычислять $L_2(\bar{x})$ будем по формуле (7.9) как сумму:

$$L_2(\bar{x}) = y_0 l_0(\bar{x}) + y_1 l_1(\bar{x}) + y_2 l_2(\bar{x}),$$

поэтому в строке 3 подготовим подписи для промежуточной точки и слагаемых из данной формулы (рис. 7.5) и в A4 введем промежуточное значение -2 .

	A	B	C	D	E
1	-3	-1	2		
2	-5	-7	5		
3	x_pr	$y_0 * l_0$	$y_1 * l_1$	$y_2 * l_2$	L_2
4	-2				
5					

Рис. 7.5. Входные данные задачи

2. В ячейку B4 введем формулу $y_0 \cdot \frac{(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$, зафиксировав \bar{x} с целью дальнейшего копирования вправо (достаточно зафиксировать только столбец A):
 B4: «=A2*(\$A4-B1)*(\$A4-C1)/(A1-B1)/(A1-C1)» (рис. 7.6).

	A	B	C	D	E	F
1	-3	-1	2			
2	-5	-7	5			
3	x_pr	y_0*I_0	y_1*I_1	y_2*I_2	L_2	
4	-2	=A2*(\$A4-B1)*(\$A4-C1)/(A1-B1)/(A1-C1)				
5						
6						

Рис. 7.6. Формула вычисления $y_0 l_0$

3. Хотелось бы в дальнейшем использовать возможность копирования формул для вычисления $y_1 \cdot \frac{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$ и $y_2 \cdot \frac{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$. Но если копировать формулу из B4 вправо в C4, то соответственно изменятся и нефиксированные адреса (рис. 7.7) и будет захвачена пустая ячейка D1.

	A	B	C	D	E	F
1	-3	-1	2			
2	-5	-7	5			
3	x_pr	y_0*I_0	y_1*I_1	y_2*I_2	L_2	
4	-2	-2	=B2*(\$A4-C1)*(\$A4-D1)/(B1-C1)/(B1-D1)			
5						

Рис. 7.7. Копирование формулы из B4 вправо

Если в D1 будет находиться значение x_0 , то в этой формуле в C4 действительно будет вычисляться значение $y_1 \cdot \frac{(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$ (проанализируйте!). Поэтому скопируем в D1:E1 значения из A1:B1, а после этого скопируем формулу из B4 в C4:D4. Получим формулы (рис. 7.8):
 C4: «=B2*(\$A4-C1)*(\$A4-D1)/(B1-C1)/(B1-D1)»;
 D4: «=C2*(\$A4-D1)*(\$A4-E1)/(C1-D1)/(C1-E1)».

	A	B	C	D	E	F	G
1	-3	-1	2	-3	-1		
2	-5	-7	5				
3	x_pr	y_0*I_0	y_1*I_1	y_2*I_2	L_2		
4	-2	-2	-4,66667	=C2*(\$A4-D1)*(\$A4-E1)/(C1-D1)/(C1-E1)			
5							

Рис. 7.8. Вычисление слагаемых $y_1 l_1$ и $y_2 l_2$

5. В E4 введем формулу суммирования отдельных слагаемых, то есть формулу вычисления значения интерполяционного полинома: «=СУММ(B4:D4)». Если все сделано правильно, то в D4 должно получиться вычисленное выше значение: $L_2(-2) = -7$.

Полученную программу необходимо протестировать: если в A4 вводить по очереди значения узлов $-3, -1$ и 2 , то в E4 должны получить соответственно значения функции из таблицы $-5, -7, 5$. При этом в каждом случае только одно слагаемое B4:D4 будет отлично от нуля. После тестирования в A4 можно вводить любое промежуточное значение, а в E4 получать

соответствующее значение интерполяционного полинома. После успешного тестирования программы можно рассчитывать значение $f(x)$ в любой промежуточной точке отрезка интерполяции.

Построение графика интерполяционного многочлена

Интересно построить графики как самого интерполяционного многочлена $L_2(x)$, так и многочленов 2-й степени, являющихся отдельными его слагаемыми $y_0l_0(x)$, $y_1l_1(x)$, $y_2l_2(x)$. График функции в Excel строится на основе таблицы (см. лабораторную работу № 1), а таблица получается копированием вниз формул вычисления аргумента и функции. Введем формулы в B4:E4 вычисления отдельных слагаемых $y_0l_0(x)$, $y_1l_1(x)$, $y_2l_2(x)$ и $L_2(x)$ так, чтобы при копировании вниз в них менялся соответственно адрес аргумента из столбца A, а адреса координат узловых точек из таблицы не менялись. Поэтому в формулах в B4:D4 необходимо зафиксировать адрес строки у постоянных коэффициентов из таблицы A1:C2, и они не будут меняться при копировании вниз, то есть при изменении номеров строк. Фиксирование строки без фиксирования столбца можно сделать сразу при первом наборе формулы в B4: $\ll=A\$2*(\$A4-B\$1)*(\$A4-C\$1)/(A\$1-B\$1)/(A\$1-C\$1)$. После этого формулу можно скопировать, как и ранее, вправо в C4:D4: адреса строк меняться не будут, а адреса столбцов изменятся в нужном нам смысле. Введем в A4 начальное значение аргумента, например -5 , в A5 — формулу изменения аргумента, например, с шагом 0,1: $\ll=A4+0,1$. «Подровняем» строки 4 и 5 с формулами и будем копировать все формулы вниз, например, до значения $x = 3$. На основе полученной таблицы (вернее, четырех таблиц) построим графики $L_2(x)$, $y_0l_0(x)$, $y_1l_1(x)$, $y_2l_2(x)$ (рис. 7.9).

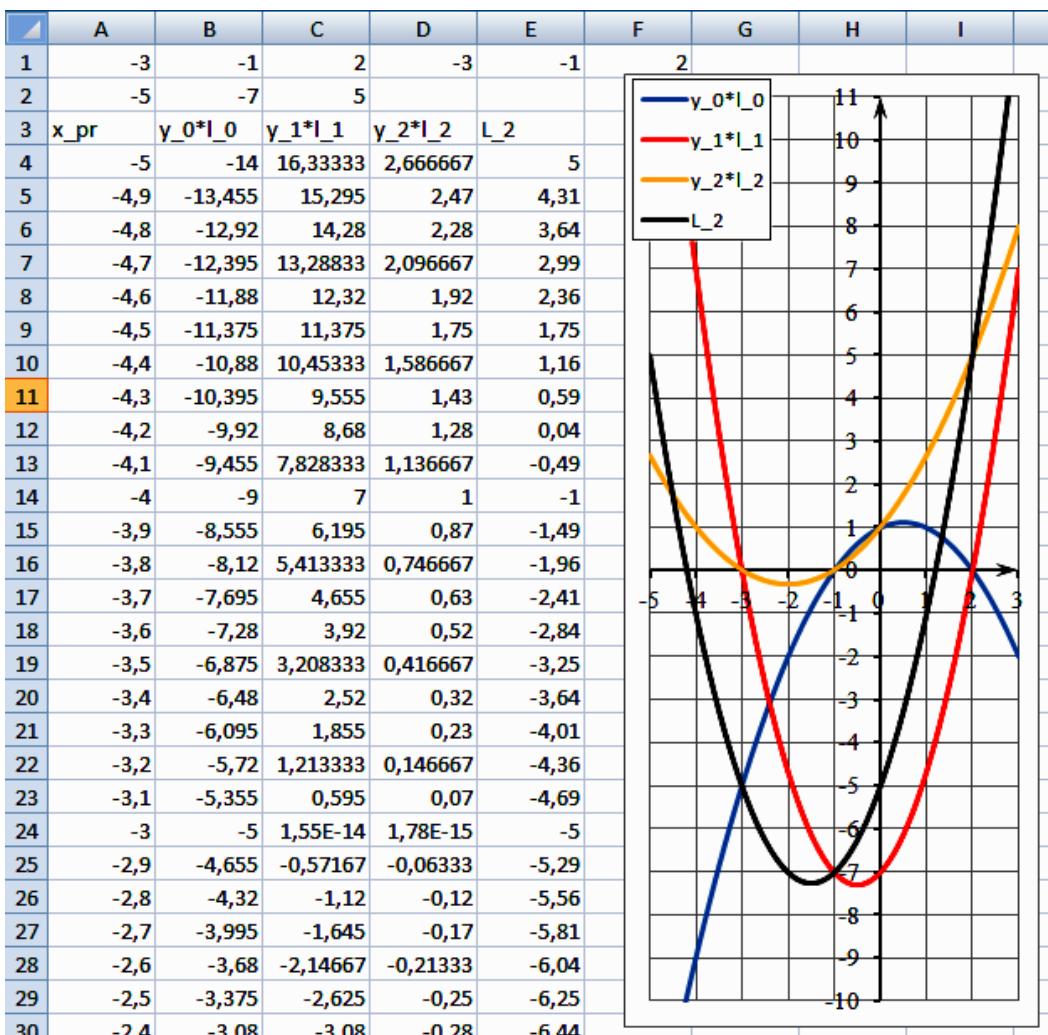


Рис. 7.9. Графики $L_2(x)$, y_0l_0 , y_1l_1 и y_2l_2 , построенные в Excel

Видим, что каждый из многочленов $y_0l_0(x)$, $y_1l_1(x)$, $y_2l_2(x)$ обязательно проходит через один узел интерполяции, в то время как остальные — через ноль, а многочлен $L_2(x)$ — через все три узла.

По умолчанию координатная сетка на диаграмме не строится. Надо вручную изменить формат элементов диаграммы, а при особо удачном внешнем виде сохранить как шаблон (**Конструктор — Сохранить как шаблон**).

Можно провести численные эксперименты по выявлению зависимости точности интерполяционного многочлена от степени многочлена на основе таблицы конкретной функции, дифференцируемой достаточно число раз. В этом случае удастся применить формулу (7.13) для оценки погрешности, сравнить оценку сверху с точным значением погрешности, а после построения графика интерполяционного многочлена эти опыты можно сделать наглядными. Исследовать будем две сильно отличающиеся функции: функцию, имеющую несколько максимумов и минимумов на отрезке интерполяирования, и монотонную функцию.

Пример 3. Пусть функция $y = 5 \sin \pi x + 1$ задана таблично в 8 узлах (табл. 3):

Таблица 3. Таблица функции $y = 5 \sin \pi x + 1$

x	-3	-2,5	-1	-0,5	0,5	1,5	2,5	4
$f(x)$	1	-4	1	-4	6	-4	6	1

Необходимо вычислить приближенно с помощью интерполяционного полинома Лагранжа 7-й степени $L_7(x)$ значения функции в точках $-0,75$ и 3 , то есть $f(-0,75)$, $f(3)$, оценить погрешность по формуле (7.13) и сравнить с точным значением погрешности, сделать вывод.

Решение. График функции $y = 5 \sin \pi x + 1$, построенный в Excel на отрезке $[-3,1; 4,1]$, и узлы интерполяирования изображены на рис. 7.10.

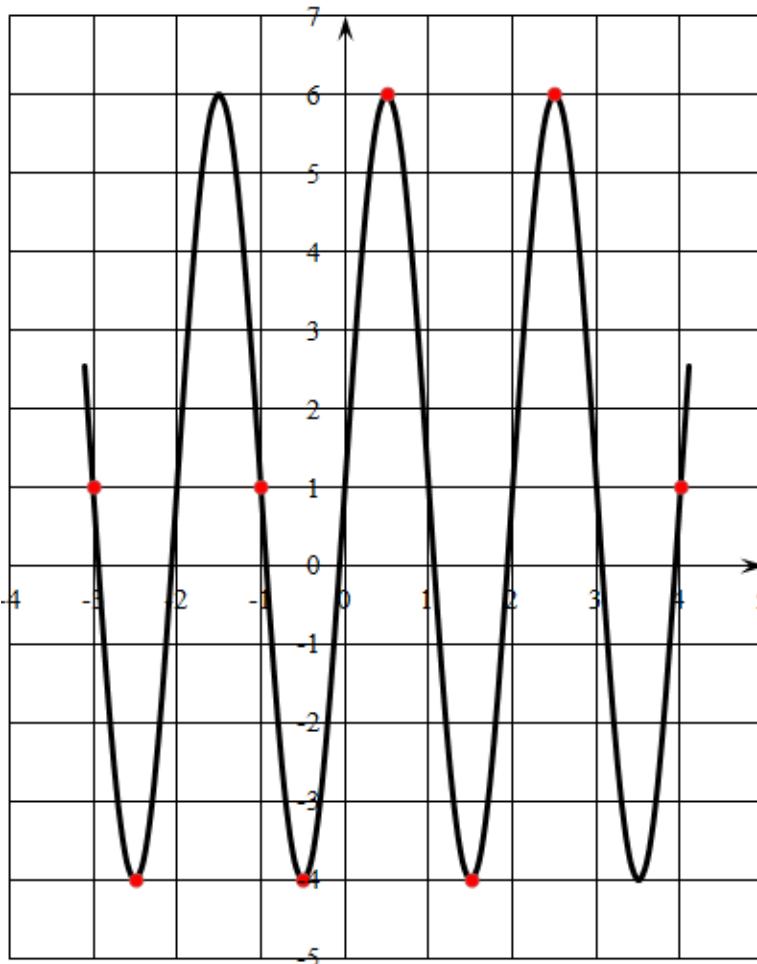


Рис. 7.10. График $y = 5 \sin \pi x + 1$ и узлы интерполяирования

Здесь изображение осей, цена деления, основные линии сетки и другие параметры настраиваются вручную путем выделения элемента диаграммы и вызова правой кнопкой мыши контекстного меню, в котором выбирается **Формат**.

По таблице и по графику видим, что интерполяционный многочлен 1-й степени, построенный, например, по узлам $(-3; 1)$ и $(4; 1)$ (прямая, параллельная оси Ox), мало похож на данную функцию. Многочлен 2-й степени, построенный, например, по узлам $(-3; 1)$, $(0,5; 6)$ и $(4; 1)$ (парабола ветвями вниз), также имеет мало общего с данной функцией даже на отрезке интерполирования. Построим сразу график $L_7(x)$ по описанному выше алгоритму и разместим его на одной диаграмме с графиком данной функции и узлами (рис. 7.11). Добавление еще одного графика на диаграмму можно выполнить так: выделить щелчком область построения, вызвать правой кнопкой мыши контекстное меню, в нем — **Выбрать данные...**. В открывшемся диалоговом окне нажать кнопку **Добавить**, далее провести диалог по выбору **Значений X** и **Значений Y**, протаскивая мышь по столбцу аргумента и столбцу $L_7(x)$ соответственно. Диаграмма из-за больших значений $L_7(x)$ будет иметь разные масштабы по осям координат. Выделяя оси на диаграмме и форматируя их из контекстного меню, можно добиться одинаковых единичных отрезков по осям координат (рис. 7.12).

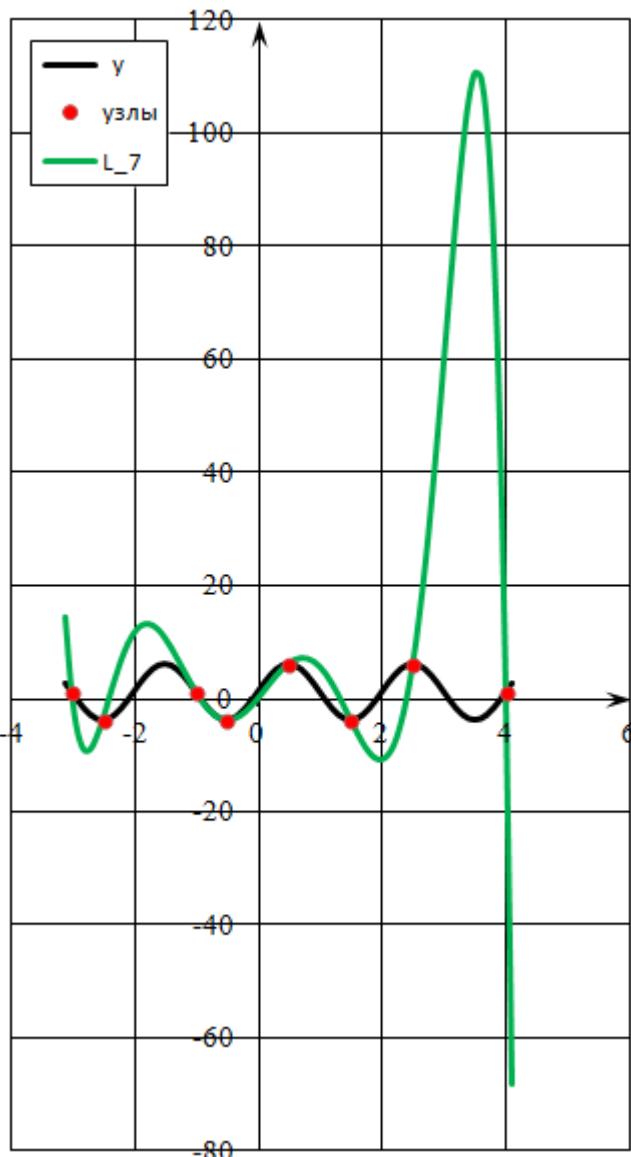


Рис. 7.11. График $y = 5\sin \pi x + 1$, узлы интерполяции и график $L_7(x)$ в Excel

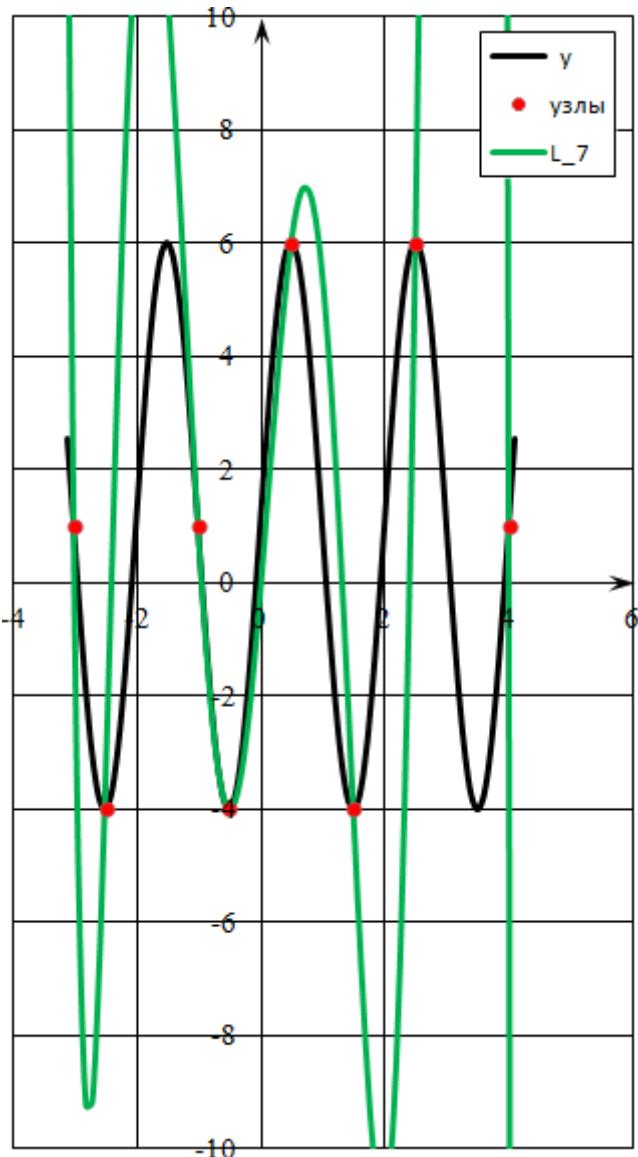


Рис. 7.12. Одинаковые единичные отрезки на осях

Видим, что погрешность интерполяционного полинома (расстояние между значением $y = 5 \sin \pi x + 1$ и $L_7(x)$) существенно зависит от положения промежуточной точки на отрезке: в целом она достаточно мала в середине отрезка и увеличивается к краям.

Найдем по формуле (7.13) погрешность в точках $-0,75$ и 3 :

$$|R_7(-0,75)| = |f(0,75) - L_7(-0,75)| \leq \frac{M_8}{8!} \cdot |(-0,75 - (-3)) \cdot (-0,75 - (-2,5)) \cdot (-0,75 - (-1)) \cdot (-0,75 - (-0,5)) \cdot (-0,75 - 0,5) \cdot (-0,75 - 1,5) \cdot (-0,75 - 2,5) \cdot (-0,75 - 4)| \leq \frac{5\pi^8}{40320} \cdot 10,69 \leq 12,6,$$

так как $M_8 = \max_{x \in [-3; 4]} |f^{(8)}(x)| = \max_{x \in [-3; 4]} |5\pi^8 \sin \pi x| = 5\pi^8$.

Реальная погрешность $|f(-0,75) - L_7(-0,75)| \approx |(-2,5355 - (-2,6258))| = 0,0903$ оказывается значительно ниже (на два порядка) оценки сверху, что видно и по графикам. Далее,

$$|R_7(3)| = |f(3) - L_7(3)| \leq \frac{M_8}{8!} \cdot (3 - (-3)) \cdot (3 - (-2,5)) \cdot (3 - (-1)) \cdot (3 - (-0,5)) \cdot (3 - 0,5) \cdot (3 - 1,5) \cdot (3 - 2,5) \cdot (3 - 4) = \frac{5\pi^8}{40320} \cdot 866,25 \leq 1019,3.$$

Реальная погрешность $|f(3) - L_7(3)| \approx |(1 - 59,2271)| = 58,2271$ оказывается значительно ниже (на порядок) оценки сверху, но все равно очень велика. Это видно и по графикам.

Таким образом, достаточно высокая степень интерполяционного многочлена не гарантирует высокой точности. Рассчитать значения $L_7(x)$ без вычислительной системы было бы очень трудно. Но высокие трудозатраты не окупаются. Для успешного интерполирования таких быстро меняющихся функций необходимо брать близко расположенные узлы. Например, для той же функции, заданной табл. 4, с достаточно близким расположением узлов

Таблица 4. Таблица функции $y = 5 \sin \pi x + 1$ на отрезке $[-1; 1,2]$

x	-1	$-0,9$	$-0,5$	$-0,2$	$0,2$	$0,8$	1	$1,2$
$f(x)$	1	-0,55	-4	-1,94	3,94	3,94	1	-1,94

картина резко изменилась: график $L_7(x)$ практически совпадает с графиком $y = 5 \sin \pi x + 1$ в пределах отрезка интерполирования (рис. 7.13), и $|R_7(-0,75)| = |f(0,75) - L_7(-0,75)| \leq 0,0305$.

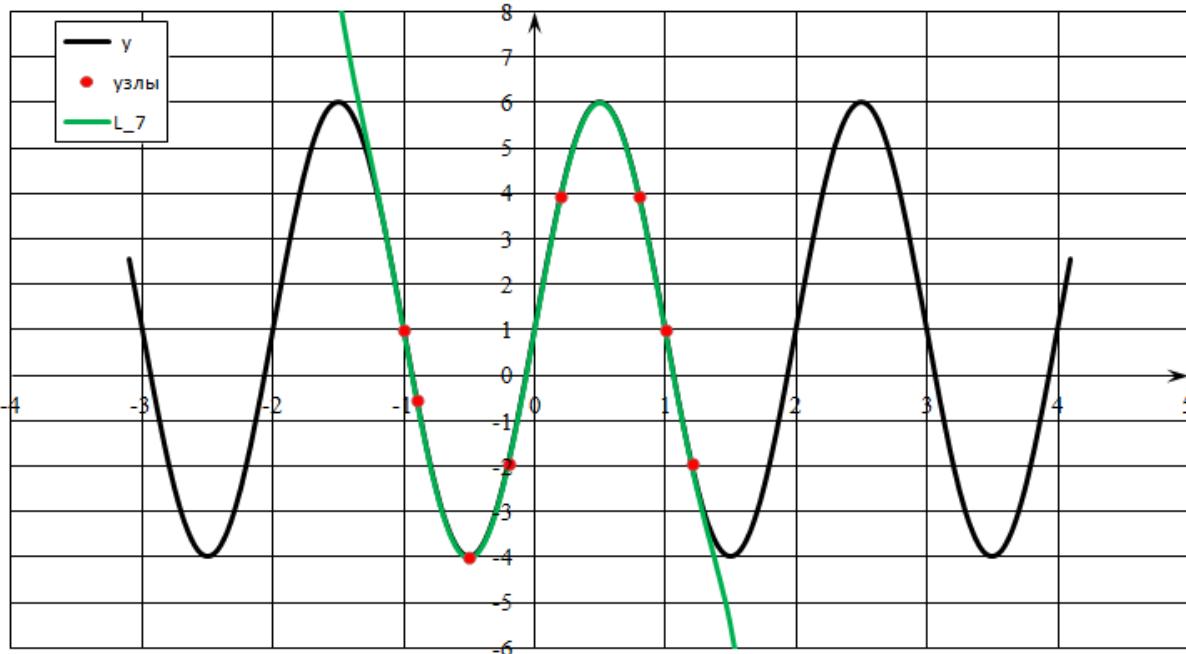


Рис. 7.13. Эффект уменьшения расстояния между узлами интерполирования

Пример 4. Проведем численные эксперименты, аналогичные примеру 3, с монотонной функцией $y = 2^x$, заданной табл. 5.

Таблица 5. Таблица функции $y = 2^x$ на отрезке $[-3; 2]$

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0,125	0,25	0,5	1	2	4

По узлам $(-3; 0,125)$ и $(2; 4)$ построим $L_1(x)$, по узлам $(-3; 0,125), (0; 1)$ и $(2; 4) — L_2(x)$, по узлам $(-3; 0,125), (-1; 0,5), (0; 1)$ и $(2; 4) — L_3(x)$, а по всей таблице — $L_5(x)$. Графики этих интерполяционных многочленов, а также график исходной функции построим в Excel (рис. 7.14).

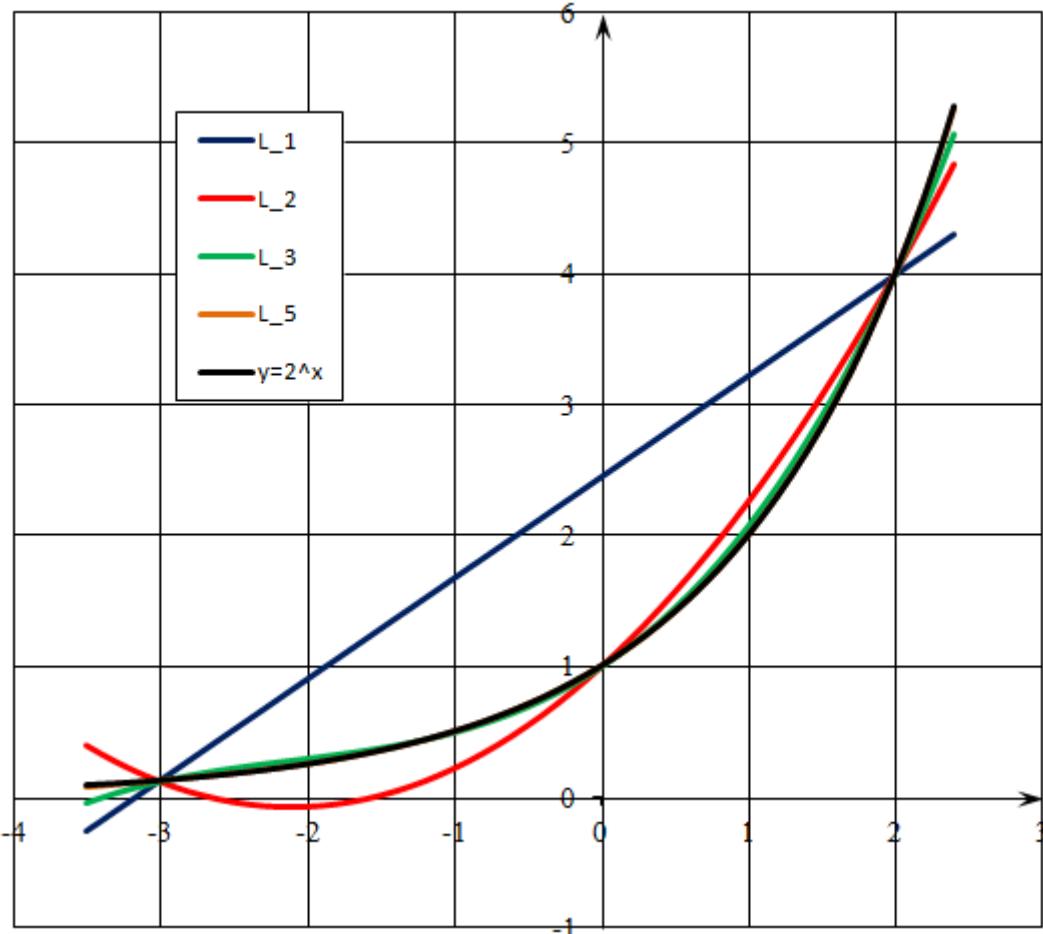


Рис. 7.14. Графики $L_1(x), L_2(x), L_3(x), L_5(x)$ и $y = 2^x$ в Excel

Видим, что графики $L_1(x)$ и $L_2(x)$ еще значительно отличаются от графика $y = 2^x$, а графики $y = 2^x$, $L_3(x)$ и $L_5(x)$ практически сливаются. Верхняя граница погрешности уменьшается с ростом степени интерполяционного многочлена: например, $|R_1(-1,5)| \leq 5,05$, $|R_2(-1,5)| \leq 1,75$, $|R_3(-1,5)| \leq 0,16$, $|R_5(-1,5)| \leq 0,00304$. Реальные же погрешности в точке $-1,5$ таковы: $|f(-1,5) - L_1(-1,5)| \approx |(0,3536 - 1,2875)| = 0,9339$,
 $|f(-1,5) - L_2(-1,5)| \approx |(0,3536 - 0,01875)| = 0,33485$,
 $|f(-1,5) - L_3(-1,5)| \approx |(0,353553 - 0,379688)| = 0,026135$,
 $|f(-1,5) - L_5(-1,5)| \approx |(0,353553 - 0,353027)| = 0,000526$.

Задание для самостоятельной работы

С помощью таблицы данной функции $f(x)$ приближенно вычислите в Excel значение этой функции в указанных точках, используя интерполяционные многочлены Лагранжа 1, 2 и 3-й степени. Рассчитайте верхнюю границу погрешности и сравните ее с точным значением. Постройте графики всех интерполяционных многочленов и данной функции.

Вариант 1. $f(x) = e^{0,5x} - 0,6$.

x	-1	1	2	4
$f(x)$	0,01	1,05	2,12	6,79

Найти $f(0), f(0,8), f(1,3)$.

Вариант 2. $f(x) = \ln 0,7x + 0,8$.

x	0,3	1	3	4
$f(x)$	-0,76	0,44	1,54	1,83

Найти $f(0,5), f(1,8), f(2,3)$.

Вариант 3. $f(x) = \sin 0,8x - 0,3$.

x	0	2	5	6
$f(x)$	-0,30	0,70	-1,06	-1,30

Найти $f(0,2), f(0,8), f(3,3)$.

Вариант 4. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

x	-1	1	1,5	2
$f(x)$	1,50	-0,50	-0,23	0,00

Найти $f(0), f(0,8), f(1,3)$.

Вариант 5. $f(x) = 3e^x - 0,4$.

x	-2	-1	1	1,5
$f(x)$	0,01	0,70	7,75	13,05

Найти $f(0), f(0,8), f(1,3)$.

Вариант 6. $f(x) = \ln(x+4) + 2,1$.

x	-2	-1	2	5
$f(x)$	2,79	3,20	3,89	4,30

Найти $f(-1,5), f(1,8), f(2,3)$.

Вариант 7. $f(x) = \cos 0,5x + 1,3$.

x	-2	-1	0	3
$f(x)$	1,84	2,18	2,30	1,37

Найти $f(-1,2), f(0,8), f(2,3)$.

Вариант 8. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

x	-2	-1	1,5	2
$f(x)$	1,60	1,50	-0,23	0,00

Найти $f(-0,5), f(0), f(1,3)$.

Вариант 9. $f(x) = e^{x-0,5} + 0,9$.

x	-1	0	2	2,5
$f(x)$	1,12	1,51	5,38	8,29

Найти $f(-0,5), f(0,8), f(1,3)$.

Вариант 10. $f(x) = 4 \ln(x+6) + 1,5$.

x	-5	-1	1	6
$f(x)$	1,50	7,94	9,28	11,44

Найти $f(-4), f(0), f(2,3)$.

Вариант 11. $f(x) = e^{0,5x} - 0,6$.

x	-1	1	2	4
$f(x)$	0,01	1,05	2,12	6,79

Найти $f(0), f(0,8), f(1,3)$.

Вариант 12. $f(x) = \ln 0,7x + 0,8$.

x	0,3	1	3	4
$f(x)$	-0,76	0,44	1,54	1,83

Найти $f(0,5), f(1,8), f(2,3)$.

Вариант 13. $f(x) = \sin 0,8x - 0,3$.

x	0	2	5	6
$f(x)$	-0,30	0,70	-1,06	-1,30

Найти $f(0,2), f(0,8), f(3,3)$.

Вариант 14. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

x	-1	1	1,5	2
$f(x)$	1,50	-0,50	-0,23	0,00

Найти $f(0), f(0,8), f(1,3)$.

Вариант 15. $f(x) = 3e^x - 0,4$.

x	-2	-1	1	1,5
$f(x)$	0,01	0,70	7,75	13,05

Найти $f(0), f(0,8), f(1,3)$.

Вариант 16. $f(x) = \ln(x+4) + 2,1$.

x	-2	-1	2	5
$f(x)$	2,79	3,20	3,89	4,30

Найти $f(-1,5), f(1,8), f(2,3)$.

Вариант 17. $f(x) = \cos 0,5x + 1,3$.

x	-2	-1	0	3
$f(x)$	1,84	2,18	2,30	1,37

Найти $f(-1,2), f(0,8), f(2,3)$.

Вариант 18. $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}$.

x	-2	-1	1,5	2
$f(x)$	1,60	1,50	-0,23	0,00

Найти $f(-0,5), f(0), f(1,3)$.

Вариант 19. $f(x) = e^{x-0,5} + 0,9$.

x	-1	0	2	2,5
$f(x)$	1,12	1,51	5,38	8,29

Найти $f(-0,5), f(0,8), f(1,3)$.

Вариант 20. $f(x) = 4 \ln(x+6) + 1,5$.

x	-5	-1	1	6
$f(x)$	1,50	7,94	9,28	11,44

Найти $f(-4), f(0), f(2,3)$.

Лабораторная работа № 8

Интерполяирование функций. Интерполяционный многочлен Ньютона

Пусть функция $y = f(x)$ задана таблично:

Таблица 1. Таблица функции $y = f(x)$

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	...	y_n

где $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Необходимо вычислить значение данной функции $f(\bar{x})$ в некоторой промежуточной по отношению к узлам точке \bar{x} , не попавшей в таблицу: $\bar{x} \in [x_0; x_n]$, $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Ньютоном предложен способ получения интерполяционного многочлена n -й степени $P_n(x)$ (или вычисления его значения в промежуточной точке), проходящего через $n + 1$ точку из табл. 1, в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (8.1)$$

Многочлен $P_n(x)$ в этом случае получается как сумма многочленов нулевой степени (a_0), 1-й степени ($a_1(x - x_0)$), 2-й степени ($a_2(x - x_0)(x - x_1)$), ..., n -й степени ($a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$). В результате получается многочлен n -й степени. Важно понимать: каким бы способом ни был получен интерполяционный полином — Лагранжа или Ньютона — это один и тот же полином, так как доказана единственность полинома n -й степени, проходящего через $n + 1$ точку. Неизвестные коэффициенты в интерполяционном полиноме Ньютона $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ вычисляются с помощью *разделенных разностей*.

Разделенные разности

В математической литературе встречаются различные обозначения разделенных разностей. Будем придерживаться следующих определений и обозначений.

Определение. Первой разделенной разностью функции $y = f(x)$, заданной таблично, в точках x_i, x_{i+1} называется величина $f(x_i, x_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Пример 1. Для функции $y = f(x)$, заданной таблично (табл. 2)

Таблица 2. Таблица функции $y = f(x)$

x_i	-3	-1	2
$y_i = f(x_i)$	-5	-7	5

построим таблицу первых разделенных разностей. Для удобства расположим эту таблицу вертикально. Сначала запишем формальные вычислительные действия (табл. 3), а затем получим фактическую таблицу (табл. 4):

Таблица 3. Формулы

x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$
x_0	y_0	$f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
x_1	y_1	$f(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
x_2	y_2	

Таблица 4. Первые разделенные разности

x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$
-3	-5	-1
-1	-7	4
2	5	

Видим, что в последней строке таблицы вычислить первую разделенную разность невозможно. На основе первых разделенных разностей можно определить вторые разделенные разности.

Определение. Второй разделенной разностью функции $y = f(x)$, заданной таблично, в точках x_i, x_{i+1}, x_{i+2} называется величина

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, i = 0, 1, \dots, n-2.$$

В рассмотренном примере 1 можно вычислить единственную вторую разделенную разность — в точках x_0, x_1, x_2 : $f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{4 - (-1)}{2 - (-3)} = 1$. Таким образом, получим полную таблицу разделенных разностей для функции из примера 1 (табл. 5):

Таблица 5. Полная таблица разделенных разностей

x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
-3	-5	-1	1
-1	-7	4	
2	5		

Нулевой разделенной разностью считается сама функция в точке x_i . Для функций, заданных таблично, с достаточно большим числом узлов можно получать третью, четвертые и так далее разделенные разности. Они определяются рекуррентно через предыдущие разделенные разности.

Определение. k -й разделенной разностью функции $y = f(x)$, заданной таблично, в точках $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}$ называется величина

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}, i = 0, 1, \dots, n-k.$$

Таблица 6. Полная таблица разделенных разностей

x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$...	$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$
x_0	y_0	$f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$...	$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})}{x_n - x_0}$
x_1	y_1	$f(x_1, x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}$...	
x_2	y_2	$f(x_2, x_3) = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$	$f(x_2, x_3, x_4) = \frac{f(x_3, x_4) - f(x_2, x_3)}{x_4 - x_2}$...	
				...	
x_{n-1}	y_{n-1}	$f(x_{n-1}, x_n) = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$...	
x_n	y_n			...	

Оказывается, коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ многочлена (8.1) равны соответственно $f(x_0), f(x_0, x_1), f(x_0, x_1, x_2), \dots, f(x_0, x_1, \dots, x_n)$, то есть числам в начальной строке полной таблицы разделенных разностей (табл. 6), построенной на основе табл. 1. Действительно, с одной стороны, по свойству интерполяционного многочлена

$$P_n(x_0) = f(x_0) = y_0,$$

а с другой стороны, по формуле (8.1)

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1(x_0 - x_0) + a_2(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) + \dots + a_n(x_0 - x_0)(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_{n-1}) = a_0.$$

Значит, $a_0 = f(x_0) = y_0$.

Далее, с одной стороны,

$$P_n(x_1) = f(x_1) = y_1,$$

а с другой,

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + a_2(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) + \dots + a_n(x_1 - x_0)(x_1 - x_1) \dots (x_1 - x_{n-1}) = a_0 + a_1(x_1 - x_0).$$

Значит, $a_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1$, откуда $a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1)$.

Последовательно можно получить и остальные равенства (или доказать по индукции):

$$a_k = f(x_0, x_1, \dots, x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (8.2)$$

Пример 2. Найдем интерполяционный многочлен 2-й степени, проходящий через узлы табл. 2 (см. пример 1 в лабораторной работе № 7). У нас уже построена полная таблица разделенных разностей (табл. 5), определим по ней с помощью равенств (8.2) коэффициенты многочлена (8.1): $a_0 = -5$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$. По формуле (8.1)

$$P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) = -5 + (-1) \cdot (x - (-3)) + 1 \cdot (x - (-3))(x - (-1)) = x^2 + 3x - 5.$$

Теперь по этой формуле можно находить приближенно значение функции в любой промежуточной точке таблицы. У нас получился тот же самый многочлен, что и в примере 1 лабораторной работы № 7.

Таблицу 5 можно использовать для получения интерполяционных многочленов 1-й степени (линейных функций).

Пример 3. На основе табл. 2 получим многочлен 1-й степени для интерполирования в отрезке $[-3; -1]$. В этом случае $x_0 = -3$, $x_1 = -1$ и нужный многочлен $P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, где $a_0 = -5$, $a_1 = -1$. То есть $P_1(x) = -5 + (-1) \cdot (x - (-3)) = -x - 8$ (см. рис. 7.1).

Пример 4. На основе табл. 2 получим многочлен 1-й степени для интерполирования в отрезке $[-1; 2]$. В этом случае $x_0 = -1$, $x_1 = 2$, и нужные коэффициенты a_0 , a_1 располагаются именно в строке начального значения аргумента (табл. 7):

Таблица 7. Выбор начальной строки

x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
-3	-5	-1	1
$x_0 = -1$	$a_0 = -7$	$a_1 = 4$	
2	5		

Получим многочлен $P_1(x) = -7 + 4 \cdot (x - (-1)) = 4x - 3$ (см. рис. 7.3).

Пример 5. На основе табл. 2 получим многочлен 1-й степени для интерполирования в отрезке $[-3; 2]$. В этом случае $x_0 = -3$, $x_1 = 2$ и для получения коэффициентов a_0 , a_1 нужно построить новую таблицу разделенных разностей (табл. 8):

Таблица 8. Интерполирование в отрезке $[-3; 2]$

x_i	y_i	$f(x_i, x_{i+1})$
-3	-5	2
2	5	

Получим многочлен $P_1(x) = -5 + 2 \cdot (x - (-3)) = 2x + 1$ (см. рис. 7.2).

Сравнивая многочлены в примерах 3 и 2, видим, что переход от линейной к квадратичной интерполяции в случае интерполяционного многочлена Ньютона значительно проще, чем для интерполяционного многочлена Лагранжа. Чтобы повысить степень многочлена Лагранжа (7.9)

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)},$$

необходимо добавить еще один узел и заново сконструировать многочлен. Способ Ньютона лишен этого недостатка: для повышения степени многочлена надо добавить еще одно слагаемое — многочлен нужной степени — к уже имеющимся, взяв очередной числовой коэффициент из той же таблицы разделенных разностей.

Пример 6. Пусть функция $y = 5\sin \pi x + 1$ задана таблично в 8 узлах (табл. 9):

Таблица 9. Таблица функции $y = 5\sin \pi x + 1$ на отрезке $[-1; 1,2]$

x	-1	-0,9	-0,5	-0,2	0,2	0,8	1	1,2
$f(x)$	1	-0,55	-4	-1,94	3,94	3,94	1	-1,94

Вычислим приближенно с помощью интерполяционного полинома Ньютона 1-й, 2-й, ..., 7-й степени значение функции $f(-0,95)$, сравним его с точным значением. Поставленную задачу решим в *Excel*, выполняя необходимые шаги.

Во-первых, необходимо получить полную таблицу разделенных разностей.

1. В строке 1 оформим подписи столбцов по аналогии с табл. 5 или 6, например, так, как на рис. 8.1.
2. Оформим на листе входные данные: в A2:B9 введем данные из табл. 9. При этом в столбце В можно копировать формулу вычисления данной функции, установив нужный формат отображения значений (рис. 8.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	f(x_i)	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
2	-1	=5*SIN(ПИ()*A2)+1							
3	-0,9	-0,55							
4	-0,5	-4							
5	-0,2	-1,94							
6	0,2	3,94							
7	0,8	3,94							
8	1	1							
9	1,2	-1,94							
10									

Рис. 8.1. Подписи и входные данные

3. В C2:C8 вычислим первые разделенные разности: в ячейке C2 введем формулу «=(B3-B2)/(\$A3-\$A2)», соответствующую вычислению $f(x_0, x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, в которой учтены дальнейшее копирование вниз и вправо (рис. 8.2). Столбец аргумента А зафиксирован, и он при копировании вправо меняться не будет. Скопируем формулу из C2 вниз до C8. Впрочем, можно адрес столбца и не фиксировать, а при получении очередных разделенных разностей в начальной ячейке столбца каждый раз заново набирать формулу.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	f(x_i)	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
2	-1	=5*SIN(ПИ()*A2)+1							
3	-0,9	-0,55	=-(B3-B2)/(\$A3-\$A2)						
4	-0,5	-4	6,870246						
5	-0,2	-1,94	14,69463						
6	0,2	3,94	7,4E-16						
7	0,8	3,94	-14,6946						
8	1	1	-14,6946						
9	1,2	-1,94							
10									

Рис. 8.2. Первые разделенные разности

4. В ячейках D2:D7 вычислим вторые разделенные разности: скопируем формулу из C2 в D2, активизируем ее, и переместим выделяющую рамку с A3 на A4 (рис. 8.3). Таким образом, в D2 окажется формула $\ll=(C3-C2)/(\$A4-\$A2)\gg$, что соответствует вычислению $f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$. После этого скопируем формулу из D2 вниз до D7.

	A	B	C	D	E	F
1	x_i	f(x_i)	f1	f2	f3	f4
2	-1	1	-15,4508	= $(C3-C2)/(\$A4-\$A2)$		
3	-0,9	-0,55	-8,63729			
4	-0,5	-4	6,870246			
5	-0,2	-1,94	14,69463			
6	0,2	3,94	7,4E-16			
7	0,8	3,94	-14,6946	0		

Рис. 8.3. Подготовка формулы второй разделенной разности к копированию

5. Аналогично получим остальные возможные разделенные разности, каждый раз перед копированием вниз «подправляем» нужное значение аргумента. Полная их таблица представлена на рис. 8.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	f(x_i)	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
2	-1	1	-15,4508	13,62712	10,65812	-17,1969	6,310781	1,33524	-2,03145
3	-0,9	-0,55	-8,63729	22,15362	-9,97811	-5,83746	8,98126	-3,13394	
4	-0,5	-4	6,870246	11,17769	-19,9018	11,22694	2,399982		
5	-0,2	-1,94	14,69463	-14,6946	-3,06138	15,30691			
6	0,2	3,94	7,4E-16	-18,3683	18,36829				
7	0,8	3,94	-14,6946	0					
8	1	1	-14,6946						
9	1,2	-1,94							
10									

Рис. 8.4. Полная таблица разделенных разностей

Во-вторых, составим программу в Excel для вычисления значения $P_7(\bar{x})$ и значений всех многочленов меньших степеней. Вычислять $P_7(\bar{x})$ будем по формуле (8.1) как сумму однотипных слагаемых:

$$P_7(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0) + a_2(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) + a_3(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) + \dots + a_7(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_6).$$

При этом

$$P_0(\bar{x}) = a_0,$$

$$P_1(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0),$$

$$P_2(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0) + a_2(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1),$$

$$P_3(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0) + a_2(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) + a_3(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2),$$

$$P_4(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0) + a_2(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) + a_3(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) + a_4(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)(\bar{x} - x_3),$$

$$P_5(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0) + a_2(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) + a_3(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) + \dots + a_5(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_4),$$

$$P_6(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0) + a_2(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) + a_3(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) + \dots + a_6(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_5),$$

$$P_7(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0) + a_2(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1) + a_3(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2) + \dots + a_7(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_6).$$

Таким образом, для повышения степени многочлена достаточно добавить еще одно слагаемое. Видим, что и сумму, и слагаемые можно **накапливать** по известным алгоритмам: «новое значение произведения равно старому, умноженному на очередной множитель», «очередное (новое) слагаемое равно значению произведения, умноженному на соответствующий числовой коэффициент», «новое значение суммы равно старому плюс очередное слагаемое». Заранее достаточно трудно определиться с расположением формул на листе *Excel*, но, исходя из расположения числовых коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$ многочлена (8.1) в строке 2, можно предварительно предположить, что накопление организуется копированием **вдоль строки**. При этом и узлы x_0, x_1, \dots, x_6 для накопления слагаемых удобно расположить в направлении копирования, то есть **в строке**. Их придется переписать вручную или использовать матричную функцию ТРАНСП транспонирования матрицы (вектора). Укажем дальнейшие шаги вычисления значения интерполяционного многочлена Ньютона.

1. Подготовим входные данные и подписи на листе *Excel* (рис. 8.5): в строку 11 в B11:I11 скопируем значения узлов с соответствующей подписью. В A13 поместим подпись «x_pr», а в A14 в дальнейшем будем хранить значение промежуточной точки \bar{x} . Введем в A14 число $-0,95$. В строке 14 будем накапливать произведения, а в 16 — суммы (значения многочленов). Поэтому в B13 поместим подпись «Proiz_0», чтобы под ней поместить начальное значение произведения. Скопируем B13 вправо до I13. В B15 введем подпись «P_0», под которой в B16 поместим значение P_0 . Скопируем B15 вправо до I15 (рис. 8.5).

10										
11	x	-1	-0,9	-0,5	-0,2	0,2	0,8	1	1,2	
12										
13	x_pr	Proiz_0	Proiz_1	Proiz_2	Proiz_3	Proiz_4	Proiz_5	Proiz_6	Proiz_7	
14	-0,95									
15	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
16										
17										

Рис. 8.5. Подготовка данных и подписей

2. Начальное значение произведения, как правило, равно 1. Поэтому в B14 введем формулу «=1». Так как $P_0(\bar{x}) = a_0$, в B16 введем формулу «=B2».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1	x_i	f(x_i)	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	
2	-1	1	-15,45085	13,627124	10,658118	-17,19686	6,3107806	1,3352395	-2,031446	
3	-0,9	-0,55	-8,637288	22,153619	-9,978114	-5,837455	8,9812597	-3,133942		
4	-0,5	-4	6,8702458	11,177694	-19,90179	11,226938	2,3999822			
5	-0,2	-1,94	14,694631	-14,69463	-3,061382	15,306908				
6	0,2	3,94	7,401E-16	-18,36829	18,368289					
7	0,8	3,94	-14,69463	0						
8	1	1	-14,69463							
9	1,2	-1,94								
10										
11	x	-1	-0,9	-0,5	-0,2	0,2	0,8	1	1,2	
12										
13	x_pr	Proiz_0	Proiz_1	Proiz_2	Proiz_3	Proiz_4	Proiz_5	Proiz_6	Proiz_7	
14	-0,95	1								
15	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
16	=B2									
17										

Рис. 8.6. Ввод начальных значений

3. Организуем накопление произведений: в C14 введем формулу «=B14*(\$A\$14-B11)» (рис. 8.7), соответствующую $(\bar{x} - x_0)$, с фиксированным адресом промежуточной точки \$A\$14. Скопируем формулу C14 в D14:I14, что будет соответствовать накоплению произведений $(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)$, $(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)(\bar{x} - x_2)$, ..., $(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)\dots(\bar{x} - x_6)$.

10											
11	x	-1	-0,9	-0,5	-0,2	0,2	0,8	1	1,2		
12											
13	x_pr	Proiz_0	Proiz_1	Proiz_2	Proiz_3	Proiz_4	Proiz_5	Proiz_6	Proiz_7		
14	-0,95	1	=B14*(\$A\$14-B11)								
15		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7		
16			1								
17											

Рис. 8.7. Накопление произведений

4. Организуем накопление сумм в C16:I16, выражающих значения $P_1(\bar{x})$, $P_2(\bar{x})$, $P_3(\bar{x})$, $P_4(\bar{x})$, $P_5(\bar{x})$, $P_6(\bar{x})$, $P_7(\bar{x})$: в ячейку C16 введем формулу «=B16+C2*C14», соответствующую $P_1(\bar{x}) = a_0 + a_1(\bar{x} - x_0)$, и скопируем ее вправо до I16 (рис. 8.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	f(x_i)	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7
2	-1		1 -15,4508	13,62712	10,65812	-17,1969	6,310781	1,33524	-2,03145
3	-0,9	-0,55	-8,6729	22,15362	-9,97811	-5,83746	8,98126	-3,13394	
4	-0,5	-4	6,870246	11,17769	-19,9018	11,22694	2,399982		
5	-0,2	-1,94	14,69463	-14,6946	-3,06138	15,30691			
6	0,2	3,94	7,4E-16	-18,3683	18,36829				
7	0,8	3,94	-14,6946		0				
8	1		-14,6946						
9	1,2	-1,94							
10									
11	x	-1	-0,9	-0,5	-0,2	0,2	0,8	1	1,2
12									
13	x_pr	Proiz_0	Proiz_1	Proiz_2	Proiz_3	Proiz_4	Proiz_5	Proiz_6	Proiz_7
14	-0,95	1	0,05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
15		P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
16			1	=B16+C2*C14		0,21	0,22	0,23	0,22
17									

Рис. 8.8. Накопление сумм — значений интерполяционных многочленов

5. Сравним точное значение $f(-0,95)$ со значениями $P_0(-0,95)$, $P_1(-0,95)$, $P_2(-0,95)$, $P_3(-0,95)$, $P_4(-0,95)$, $P_5(-0,95)$, $P_6(-0,95)$, $P_7(-0,95)$, расположеннымными в строке 16 соответственно в B16:I16 (рис 9). Для этого вычислим точное значение $5\sin(-0,95\pi)+1$, например, в A16, а в остальных числовых ячейках увеличим разрядность. Видим, что наиболее точные значения дают $P_4(-0,95)$, $P_7(-0,95)$.

12	x_pr	Proiz_0	Proiz_1	Proiz_2	Proiz_3	Proiz_4	Proiz_5	Proiz_6	Proiz_7
13	-0,95	1,00000000	0,05000000	-0,00250000	0,00112500	-0,00084375	0,00097031	-0,00169805	0,00331119
14	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	
15	0,2178277	1,00000000	0,22745751	0,19338970	0,20538009	0,21988994	0,22601337	0,22374607	0,21701956
16									
17									

Рис. 8.9. Сравнение точного и приближенных значений $f(-0,95)$

6. Видим, что приближенные значения функции, вычисленные с помощью многочленов, достаточно близки к точным, но все-таки созданную программу необходимо протестировать. Как и в случае многочлена Лагранжа можно вычислять значения полученных многочленов в узлах таблицы. Но надо понимать, что начальный узел x_0 при построении многочлена Ньютона любой степени с помощью этой программы равен -1 . В ячейку A14 будем последовательно вводить значения узлов. Если программа составлена правильно, при $\bar{x} = -1$ значения всех интерполяционных многочленов — с P_0 по P_7 — равны и равны значению функции: $f(-1) = 1$. Все эти интерполяционные многочлены проходят через точку $(-1; 1)$. При $\bar{x} = -0,9$ значения интерполяционных многочленов с P_1 по P_7 равны значению функции: $f(-0,9) = -0,54\dots$. Все эти интерполяционные многочлены проходят через точку $(-0,9; f(-0,9))$. И так далее. При $\bar{x} = 1,2$ только значение интерполяционного многочлена P_7 равно значению функции: $f(1,2) = -1,93\dots$. Только этот многочлен обязательно проходит через точку $(1,2; f(1,2))$.

Таким образом, с помощью составленной программы можно находить приближенные значения функции в любых промежуточных точках из отрезка интерполирования $[-1; 1,2]$, но для интерполирования надо выбирать многочлены, обязательно проходящие через узлы интерполирования, между которыми находится данная промежуточная точка. Например, при $\bar{x} = 0,5$ можно рассматривать значения интерполяционных многочленов с P_5 по P_7 , так как при $x_0 = -1$ только эти многочлены обязательно проходят через узел $(0,8; f(0,8))$.

Построим графики интерполяционных многочленов и данной функции на одной диаграмме, например, на отрезке $[-1,3; 1,5]$. Для этого надо построить таблицы многочленов и функции (рис. 8.10—8.15).

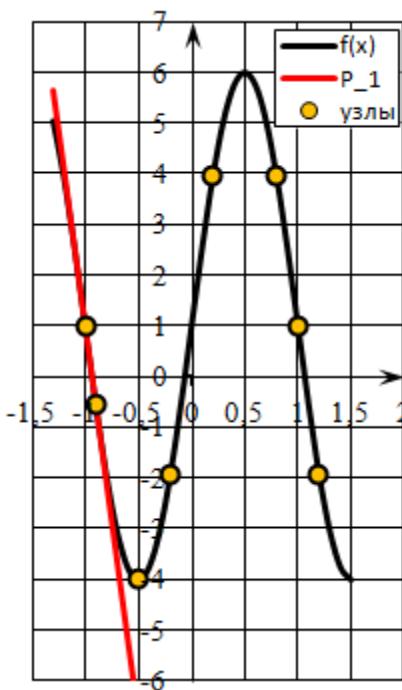


Рис. 8.10. $y = P_1(x)$ и $y = f(x)$

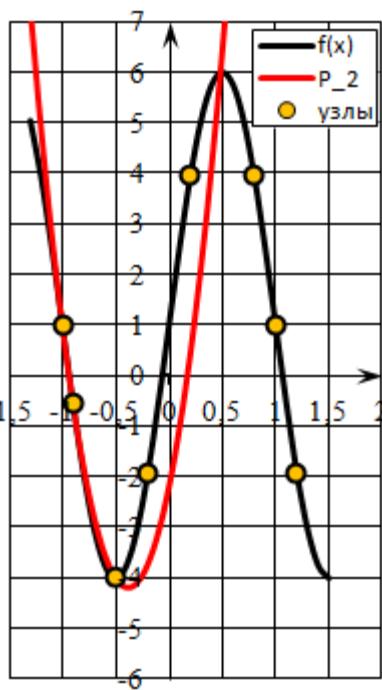


Рис. 8.11. $y = P_2(x)$ и $y = f(x)$

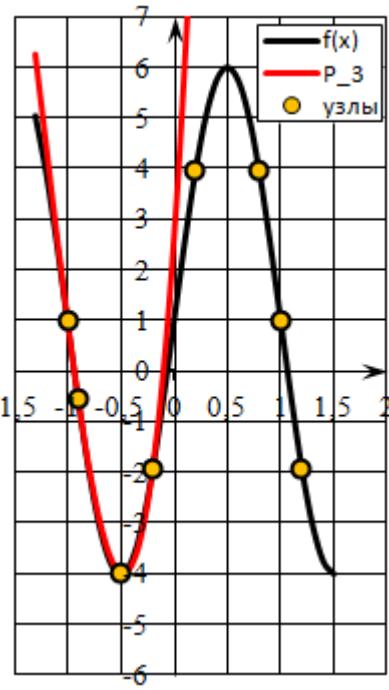
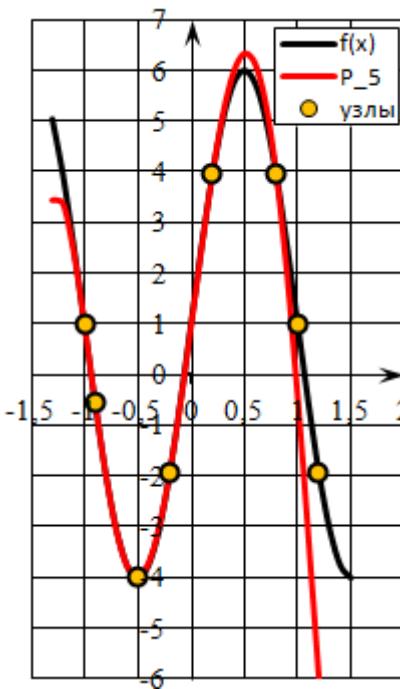
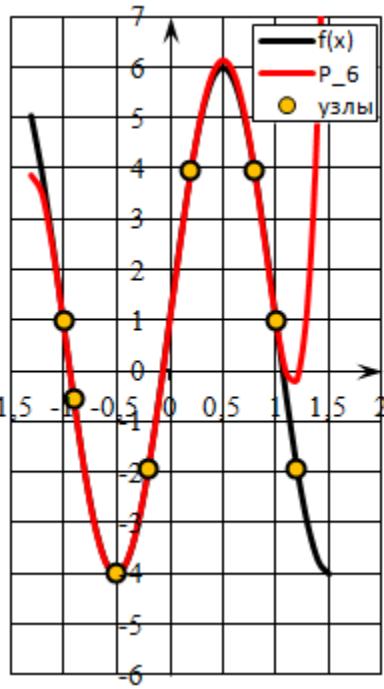
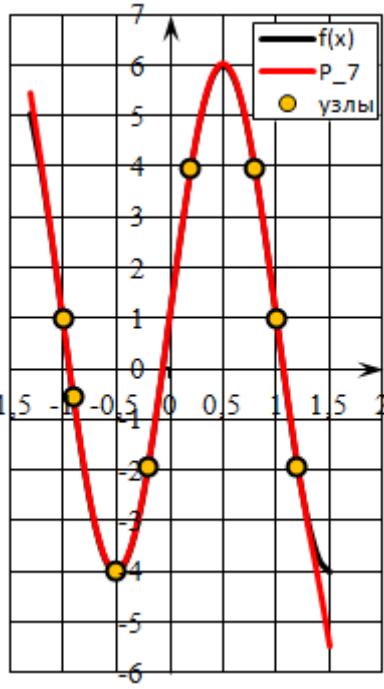


Рис. 8.12. $y = P_3(x)$ и $y = f(x)$

Рис. 8.13. $y = P_5(x)$ и $y = f(x)$ Рис. 8.14. $y = P_6(x)$ и $y = f(x)$ Рис. 8.15. $y = P_7(x)$ и $y = f(x)$

Можно предложить следующий подход к построению графиков. В предыдущей программе промежуточные выкладки располагались как можно компактнее на листе *Excel* (рис. 8.8—8.9). При построении таблиц интерполяционных многочленов копирование формул вниз при таком расположении невозможно. Надо «вытянуть» в одну строку вычисления произведений и сумм (рис. 8.16). Промежуточными значениями в этом случае будут значения аргумента таблицы в столбце А.

17	x	f(x)	Proiz_0	Proiz_1	Proiz_2	Proiz_3	Proiz_4	Proiz_5	Proiz_6	Proiz_7	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
18	-1,3	5,045085	1	-0,3	0,12	-0,096	0,1056	-0,1584	0,33264	-0,76507	1	5,635255	7,27051	6,24733	4,431342	3,431714	3,875868	5,430071
19	-1,2	3,938926	1	-0,2	0,06	-0,042	0,042	-0,0588	0,1176	-0,25872	1	4,09017	4,907797	4,460156	3,737888	3,366814	3,523839	4,049414
20	-1,1	2,545085	1	-0,1	0,02	-0,012	0,0108	-0,01404	0,026676	-0,05602	1	2,545085	2,817627	2,68973	2,504004	2,415401	2,451019	2,56482
21	-1	1,000000	1	1,11E-16	-1,1E-17	5,55E-18	-4,4E-18	5,33E-18	-9,6E-18	1,92E-17	1	1	1	1	1	1	1	
22	-0,9	-0,545085	1	0,1	1,11E-17	-4,4E-18	3,11E-18	-3,4E-18	5,81E-18	-1,1E-17	1	-0,54508	-0,54508	-0,54508	-0,54508	-0,54508	-0,54508	
23	-0,8	-1,938926	1	0,2	0,02	-0,006	0,0036	-0,0036	0,00576	-0,01037	1	-2,09017	-1,81763	-1,88158	-1,94348	-1,9662	-1,95851	-1,93745

Рис. 8.16. Таблицы функции и многочленов

Задание для самостоятельной работы

В среде табличного процессора *Excel* с помощью данной таблицы функции $f(x)$ вычислите приближенно значения функции в указанных точках, используя интерполяционные многочлены Ньютона 1, 3 и 5-й степени. Сравните значения интерполяционного многочлена с точными значениями функции. Сделайте вывод. Постройте в *Excel* на одной диаграмме графики всех интерполяционных многочленов и данной функции на отрезке интерполяции.

Вариант 1. Данна таблица функции $y = 2x^2 e^{-0.5x}$. Найти $f(-1)$, $f(0,2)$, $f(1,4)$.

x	-2	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
y	21,75	11,39	5,25	1,91	0,39	0,00	0,26	0,86	1,58	2,30	2,94

Вариант 2. Данна таблица функции $y = x^3 \cos 2x$. Найти $f(-0,1)$, $f(0,2)$, $f(3,4)$.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0,42	-0,07	0,00	0,07	-0,42	-3,34	-5,23	4,43	25,92	32,32	-9,31

Вариант 3. Данна таблица функции $y = 8 \sin x^2 \cos x$. Найти $f(0,1)$, $f(2,2)$, $f(4,4)$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0,00	1,74	3,64	0,44	2,52	0,21	-3,26	2,33	1,51	-1,66	-0,30

Вариант 4. Данна таблица функции $y = 5e^{\sin x}$. Найти $f(2,1)$, $f(3,7)$, $f(5,4)$.

x	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
y	12,41	9,82	6,99	4,72	3,21	2,35	1,93	1,85	2,07	2,66	3,78

Вариант 5. Данна таблица функции $y = \frac{7x+1}{x^2+2}$. Найти $f(-0,5)$, $f(0,1)$, $f(0,5)$.

x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	-2,00	-1,74	-1,36	-0,83	-0,20	0,50	1,18	1,76	2,20	2,50	2,67

Вариант 6. Данна таблица функции $y = 2x^2 e^{-0,5x}$. Найти $f(-1,5)$, $f(-0,2)$, $f(1,4)$.

x	-2	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2
y	21,75	11,39	5,25	1,91	0,39	0,00	0,26	0,86	1,58	2,30	2,94

Вариант 7. Данна таблица функции $y = x^3 \cos 2x$. Найти $f(-0,1)$, $f(1,2)$, $f(3,4)$.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0,42	-0,07	0,00	0,07	-0,42	-3,34	-5,23	4,43	25,92	32,32	-9,31

Вариант 8. Данна таблица функции $y = 8 \sin x^2 \cos x$. Найти $f(0,7)$, $f(2,2)$, $f(4,4)$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0,00	1,74	3,64	0,44	2,52	0,21	-3,26	2,33	1,51	-1,66	-0,30

Вариант 9. Данна таблица функции $y = 5e^{\sin x}$. Найти $f(2,6)$, $f(4,2)$, $f(5,4)$.

x	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
y	12,41	9,82	6,99	4,72	3,21	2,35	1,93	1,85	2,07	2,66	3,78

Вариант 10. Данна таблица функции $y = \frac{7x+1}{x^2+2}$. Найти $f(-0,7)$, $f(0,1)$, $f(0,7)$.

x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	-2,00	-1,74	-1,36	-0,83	-0,20	0,50	1,18	1,76	2,20	2,50	2,67

Вариант 11. Данна таблица функции $y = 2x^2 e^{-0,5x}$. Найти $f(2,2)$, $f(4,2)$, $f(5,4)$.

x	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
y	2,94	3,47	3,87	4,13	4,28	4,33	4,29	4,18	4,02	3,81	3,58

Вариант 12. Данна таблица функции $y = x^3 \cos 2x$. Найти $f(1,7)$, $f(3,2)$, $f(3,4)$.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
y	-0,42	-3,34	-5,23	4,43	25,92	32,32	-9,31	-83,03	-104,88	0,74	182,27

Вариант 13. Данна таблица функции $y = 8 \sin x^2 \cos x$. Найти $f(2,3)$, $f(3,1)$, $f(3,7)$.

x	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
y	2,52	4,67	2,95	-3,15	-7,54	-3,26	5,81	6,53	-2,75	-6,04	1,51

Вариант 14. Данна таблица функции $y = 5e^{\sin x}$. Найти $f(0,1)$, $f(2,2)$, $f(3,4)$.

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y	5,00	7,38	10,25	12,70	13,59	12,41	9,82	6,99	4,72	3,21	2,35

Вариант 15. Данна таблица функции $y = \frac{7x+1}{x^2+2}$. Найти $f(0,7)$, $f(2,2)$, $f(4,4)$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0,50	2,00	2,67	2,71	2,50	2,24	2,00	1,79	1,61	1,46	1,33

Вариант 16. Данна таблица функции $y = 2x^2 e^{-0.5x}$. Найти $f(2,5)$, $f(4,2)$, $f(5,4)$.

x	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
y	2,94	3,47	3,87	4,13	4,28	4,33	4,29	4,18	4,02	3,81	3,58

Вариант 17. Данна таблица функции $y = x^3 \cos 2x$. Найти $f(1,7)$, $f(3,2)$, $f(4,4)$.

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
y	-0,42	-3,34	-5,23	4,43	25,92	32,32	-9,31	-83,03	-104,88	0,74	182,27

Вариант 18. Данна таблица функции $y = 8 \sin x^2 \cos x$. Найти $f(2,3)$, $f(3,3)$, $f(3,7)$.

x	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
y	2,52	4,67	2,95	-3,15	-7,54	-3,26	5,81	6,53	-2,75	-6,04	1,51

Вариант 19. Данна таблица функции $y = 5e^{\sin x}$. Найти $f(0,6)$, $f(2,2)$, $f(3,4)$.

x	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	3,2	3,6	4
y	5,00	7,38	10,25	12,70	13,59	12,41	9,82	6,99	4,72	3,21	2,35

Вариант 20. Данна таблица функции $y = \frac{7x+1}{x^2+2}$. Найти $f(0,9)$, $f(2,8)$, $f(4,4)$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0,50	2,00	2,67	2,71	2,50	2,24	2,00	1,79	1,61	1,46	1,33

Лабораторная работа № 9

Численное дифференцирование

Пусть требуется найти в заданных точках числовое значение производной заданного порядка некоторой функции.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ называется конечный предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему это приращение приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \quad (9.1)$$

Нахождение производной называется *дифференцированием*.

Везде ниже будем считать, что заданная функция имеет производную нужного порядка.

Обычно для вычисления производных используют готовые формулы (таблицу производных) и правила вычисления производных. Однако использование этих формул не всегда удобно и возможно. Во-первых, функция $y = f(x)$ может быть задана аналитически достаточно громоздкой формулой, и нахождение первой производной и производных высших порядков требует значительных усилий (см., например, оценку погрешности численного интегрирования в дальнейшем). Во-вторых, функция $y = f(x)$ может быть задана в виде таблицы значений, полученных, например, в результате численного расчета или эксперимента, и аналитическое выражение $f(x)$ вообще не известно. В этих случаях используют приближенное или *численное дифференцирование*.

Один из способов решения задачи численного дифференцирования — использование интерполяционных многочленов.

Пусть $f(x)$ — функция, для которой нужно найти производную какого-либо порядка в заданной точке отрезка $[a; b]$, а $P_n(x)$ — интерполяционный многочлен для $f(x)$, построенный на отрезке $[a; b]$. Заменяя $f(x)$ интерполяционным многочленом $P_n(x)$, получим значение производной любого порядка $f^{(k)}(x)$ на отрезке $[a; b]$ как значение производной того же порядка $P_n^{(k)}(x)$ интерполяционного многочлена, то есть примем приближенно

$$f^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.2)$$

Пример 1. Для функции $y = f(x)$, заданной таблично (табл. 1), найдем формулы $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$.

Таблица 1. Таблица функции $y = f(x)$

x_i	-3	-1	2
$y_i = f(x_i)$	-5	-7	5

Ранее уже получено разными способами аналитическое выражение для интерполяционного полинома, приближающего эту функцию (см. лабораторные работы № 7 и 8): $P_2(x) = x^2 + 3x - 5$. Значит, по формуле (9.2), $f'(x) \approx 2x + 3$ для всех $x \in [-3; 2]$; $f''(x) \approx 2$. Производные более высоких порядков равны нулю.

В подобных случаях важно знать, что рассматриваемая функция достаточно гладко изменяется на указанном промежутке. Для лучшего совпадения функции и интерполяционного многочлена необходимо большее количество узлов, что повышает степень многочлена и трудность его нахождения в явном виде.

Заметим, что погрешность производной интерполяционного многочлена может существенно превышать погрешность самой интерполяции. Даже совпадение в узлах значений

$f(x)$ и $P_n(x)$ никак не гарантирует близости значений их производных $f'(x)$ и $P'_n(x)$. На рис. 9.1 изображено возможное расположение узлов интерполяирования, так что даже в узлах касательные L_f и L_{P_n} соответственно к кривым $y=f(x)$ (пунктирная линия) и $y=P_n(x)$ (сплошная линия) значительно отличаются, даже могут иметь разные знаки. Напомним, что угловой коэффициент касательной к функции в точке равен значению производной в этой точке.

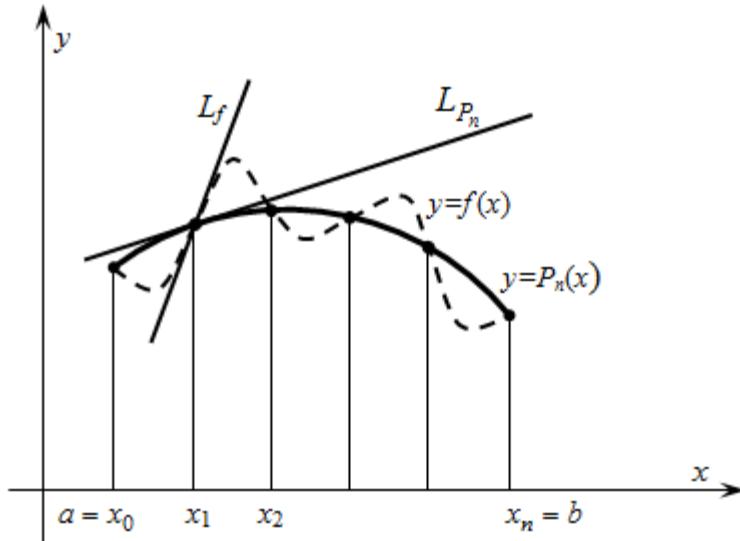


Рис. 9.1. Отличие производной функции
и производной интерполяционного многочлена

В случаях табличного задания функции $f(x)$ производную можно найти, опираясь на формулу (9.1):

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (9.3)$$

Это соотношение называется *аппроксимацией*¹ (приближением, от лат. approximo — приближаюсь) производной с помощью отношения конечных разностей или приращений (значения $\Delta y, \Delta x$ в формуле (9.3) конечные в отличие от их бесконечно малых значений в (9.1)).

Рассмотрим аппроксимацию первой производной для функции $y = f(x)$, заданной в табличном виде: $y = y_0, y_1, \dots$ в узлах $x = x_0, x_1, \dots$ (табл. 2). Пусть шаг — разность между соседними значениями аргумента — постоянен и равен h ($h > 0$).

Таблица 2. Таблица функции $y = f(x)$ с постоянным шагом

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_1 + h$	\dots
y	y_0	y_1	y_2	\dots

Запишем выражения для приближенного нахождения значения производной, например, y'_1 в узле $x = x_1$. Обозначим Δy_1 приращение функции в точке x_1 , вызванное приращением аргумента Δx в этой точке. В зависимости от способа вычисления конечных разностей получаем разные формулы для вычисления производной в одной и той же точке (в нашем случае в x_1):

¹ Аппроксимация — замена одних математических объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным. Она позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов (например, таких, характеристики которых легко вычисляются или свойства которых уже известны).

1) с помощью левых разностей:

$$\Delta x = x_0 - x_1 = -h, \quad \Delta y_1 = y_0 - y_1, \quad y'_1 \approx \frac{y_0 - y_1}{-h} = \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad (9.4)$$

2) с помощью правых разностей:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = h, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad y'_1 \approx \frac{y_2 - y_1}{h}; \quad (9.5)$$

3) с помощью центральных разностей (производная находится как среднее арифметическое приближенных значений производной, вычисленных с помощью формул (9.4) и (9.5)):

$$y'_1 \approx \frac{(y_1 - y_0)/h + (y_2 - y_1)/h}{2} = \frac{y_2 - y_0}{2h}, \quad \Delta y_1 = y_2 - y_0, \quad \Delta x = 2h. \quad (9.6)$$

Отношение (9.4) называют левой разностной производной, отношение (9.5) — правой разностной производной, отношение (9.6) — центральной разностной производной. Термин «центральная» указывает на то, что аргумент, для которого находится производная, расположена по центру относительно используемых узлов. Формулы (9.4)–(9.6) можно обобщить для вычисления y'_i в произвольном узле таблицы x_i .

Можно дать четкую геометрическую интерпретацию формулам (9.4)–(9.6) в случае дифференцируемой функции $y = f(x)$. Левая разностная производная в точке x_1 равна тангенсу угла наклона секущей, проходящей через точки $(x_0; y_0)$ и $(x_1; y_1)$ (рис. 9.2). На рис. 9.2 для сравнения изображена и касательная L_f к графику функции $y = f(x)$ в точке x_1 , тангенс угла наклона которой равен точному значению $f'(x_1)$.

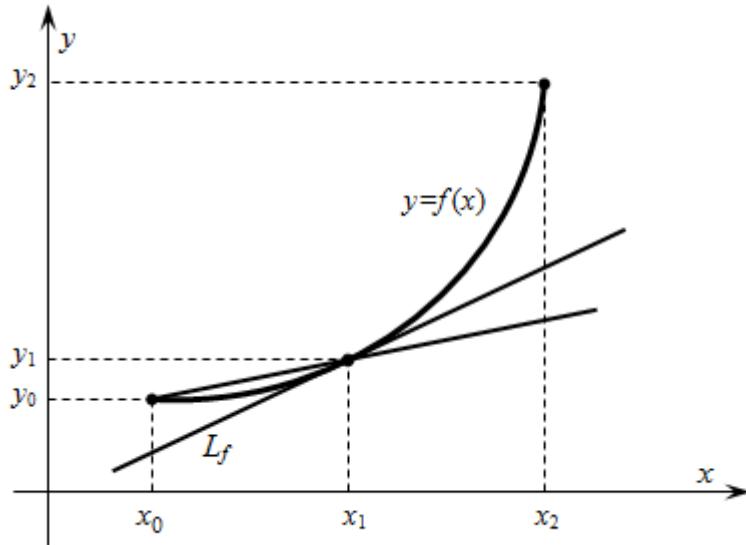


Рис. 9.2. Отличие левой разностной производной
и точного значения производной

Правая разностная производная в точке x_1 равна тангенсу угла наклона секущей, проходящей через точки $(x_2; y_2)$ и $(x_1; y_1)$ (рис. 9.3).

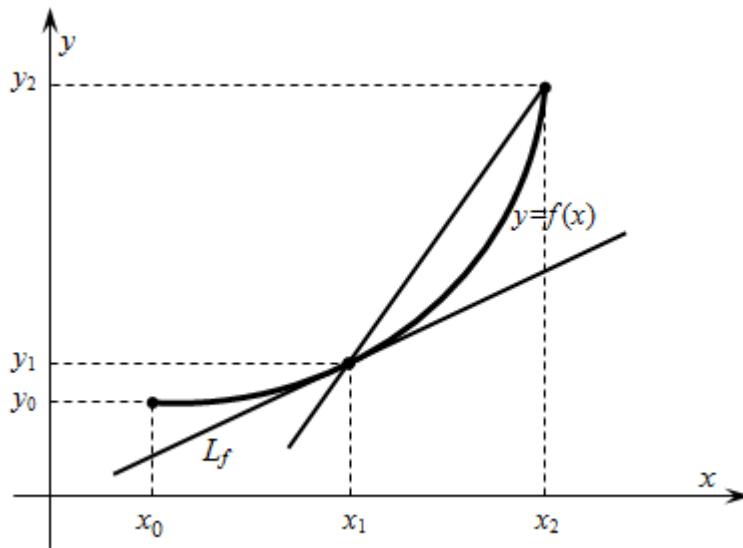


Рис. 9.3. Отличие правой разностной производной
и точного значения производной

Центральная разностная производная в точке x_1 равна тангенсу угла наклона секущей, проходящей через точки $(x_0; y_0)$ и $(x_2; y_2)$ (рис. 9.4). На рис. 9.4 прямая, параллельная этой секущей, для сравнения изображена вместе с касательной L_f к графику функции $y = f(x)$ в точке x_1 .

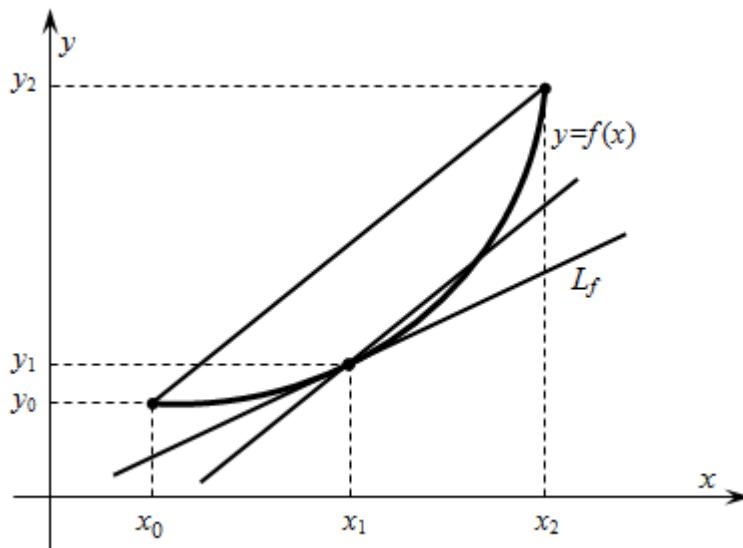


Рис. 9.4. Отличие центральной разностной производной
и точного значения производной

Пример 2. Вычислим приближенное значение производной функции $y = \cos 3x$ тремя методами в точке $x = 1$ и сравним его с точным при различных значениях шага таблицы.

Точное аналитическое решение:

$$y = \cos 3x, \quad y' = -3\sin 3x, \quad y'(1) = -3\sin 3 = -0,4233600241\dots$$

Для приближенного решения выберем шаг h и составим таблицу значений данной функции y от x с тремя знаками после запятой. Пусть $h = 0,1$. Начальный узел выбираем так, чтобы $x_1 = 1$, то есть $x_0 = 0,9$. Получаем таблицу 3.

Таблица 3. Таблица функции $y = \cos 3x$ с постоянным шагом 0,1

$x_0 = 0,9$	$x_1 = x_0 + h = 0,9 + 0,1 = 1$	$x_2 = x_1 + h = 1,1$
$y_0 = \cos(3 \cdot 0,9) \approx -0,904$	$y_1 = \cos(3 \cdot 1) \approx -0,990$	$y_2 = \cos(3 \cdot 1,1) \approx -0,987$

Вычислим значение производной функции $y = \cos 3x$, используя методы левых, правых и центральных разностей.

1) С помощью левых разностей получаем:

$$y'_1 \approx \frac{y_1 - y_0}{h} \equiv \frac{-0,990 + 0,904}{0,1} = -0,86;$$

2) с помощью правых разностей:

$$y'_1 \approx \frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{-0,987 + 0,990}{0,1} = 0,03;$$

3) с помощью центральных разностей:

$$y'_1 \approx \frac{y_2 - y_0}{2h} \equiv \frac{-0,987 + 0,904}{2 \cdot 0,1} = -0,415.$$

Видим, что наиболее близко к точному значению значение центральной разностной производной. Значения левой и правой разностных производных не содержат ни одного верного знака после запятой, а правая разностная производная даже имеет противоположный знак!

Уменьшим шаг, сделав его равным 0,00001, и найдем $y'(1)$, реализовав методы численного дифференцирования в Excel. Для начала составим таблицу значений функции $y = \cos 3x$, выполнив следующие шаги.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи. В ячейке G1 будет храниться шаг таблицы (рис. 9.5).

2. В ячейку A3 внесем значение $x_1 = 1$, а в ячейке A2 будет формула «=A3-G1» (рис. 9.5), отвечающая за начальное значение x_0 .

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	y' (левая)	y' (правая)	центральн	$h=$	0,00001
2	=A3-G1						
3		1					

Рис. 9.5. Подписи

3. Внесем в A4 формулу вычисления значения аргумента x_2 как суммы предыдущего значения x и шага h : «=A3+G1» (рис. 9.6).

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	y' (левая)	y' (правая)	центральн	$h=$	0,00001
2	0,99999						
3		1					
4	=A3+G1						

Рис. 9.6. Формулы узлов таблицы

4. В ячейку B2 введем формулу зависимости функции y от x «=COS(3*A2)» и скопируем ячейку B2 вниз на две строки. Получим таблицу значений функции $y = \cos 3x$ (рис. 9.7).

	A	B	C	
1	x	y	y' (левая)	y' (п
2	0,99999	-0,989988		
3	1	-0,989992		
4	1,00001	-0,989997		
5				

Рис. 9.7. Таблица данной функции

5. В ячейку C3 введем формулу, применяемую для расчета производной y' в точке $x_1 = 1$ при использовании метода левых разностей: «=(B3-B2)/G1» (рис. 9.8). При нажатии **Enter**, получаем значение производной y' (рис. 9.9).

	A	B	C	D
1	x	y	y' (левая)	y' (пра
2	0,99999	-0,989988		
3	1	-0,989992	=B3-B2)/G1	
4	1,00001	-0,989997		
5				

Рис. 9.8. Использование левой разности

	A	B	C	D
1	x	y	y' (левая)	y'
2	0,99999	-0,989988		
3	1	-0,989992	-0,423405	
4	1,00001	-0,989997		
5				

Рис. 9.9. Левая разностная производн

6. Аналогично вводим в ячейку D2 формулу нахождения значения $y'(1)$ при реализации метода правых разностей: «=(B4-B3)/G1» (рис. 9.10). Получаем $y' \approx -0,423315$ (рис. 9.11).

	A	B	C	D	E
1	x	y	y' (левая)	y' (правая)	цен
2	0,99999	-0,989988			
3	1	-0,989992	-0,423405	=B4-B3)/G1	
4	1,00001	-0,989997			
5					

Рис. 9.10. Использование правой разности

	A	B	C	D	E
1	x	y	y' (левая)	y' (правая)	це
2	0,99999	-0,989988			
3	1	-0,989992	-0,423405	-0,423315	
4	1,00001	-0,989997			
5					

Рис. 9.11. Правая разностная производн

8. В ячейке E3 найдем значение y' при использовании метода центральных разностей: введем формулу «=(B4-B2)/(2*G1)» (рис. 9.12).

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	y	y' (левая)	y' (правая)	центральн		
2	0,99999	-0,989988					
3	1	-0,989992	-0,423405	-0,423315	=B4-B2)/(2*G1)		
4	1,00001	-0,989997					
5							

Рис. 9.12. Использование центральной разности

Нажимаем **Enter** и получаем значение производной (рис. 9.13).

	A	B	C	D	E
1	x	y	y' (левая)	y' (правая)	y' (центральна)
2	0,99999	-0,989988			
3	1	-0,989992	-0,423405	-0,423315	-0,423360024
4	1,00001	-0,989997			
5					

Рис. 9.13. Центральная разностная производн

В итоге имеем три достаточно близких значения производной функции $y = \cos 3x$ в точке $x_1 = 1$. При этом левая разностная производная имеет три верных знака после запятой, правая — четыре, а центральная — девять.

Заметим, что чем меньше шаг h , тем точнее получается результат (см. однако рассуждения в конце лабораторной работы о вычислительной погрешности). Это легко проверить, сравнивая результаты для $h = 0,1$ и $h = 0,00001$.

Пример 3. Построим целую таблицу значений производной функции $y = \cos 3x$ с некоторым шагом h и таблицу приближенных значений производной, найденных по формулам (9.4)–(9.6), например, на отрезке $[0; 3]$. В Excel проведем эксперименты с шагом, отобразив результат на диаграмме. Будем анализировать погрешность, сравнивая приближенные и точные значения производной. Ясно, что в начальной строке таблицы невозможно вычислить приближенно производную по формулам (9.4) и (9.6), а в конечной — по формулам (9.5) и (9.6). Для этого выполним следующие шаги.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи и зададим шаг таблицы (рис. 9.14), который будем хранить в ячейке H1. Выберем сначала $h = 0,1$.
2. В строках 2—4 в столбце аргумента и функции зададим необходимые формулы для построения таблицы функции (рис. 9.14). Сначала подготовим только три строки таблицы, чтобы задать формулы разностных производных, как в примере 2, а затем их скопируем вниз одновременно с заполнением таблицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	y'(левая)	y'(правая)	y'(центральная)	y'		
2	0	1						
3	0,1	0,95534						
4	0,2	=COS(3*A4)						
5								
6								

Рис. 9.14. Исходная таблица и подписи

3. В строке 3 в C3:E3 введем формулы разностных производных так, чтобы их можно было скопировать вниз, а в F3 — формулу точного значения производной $y' = -3\sin 3x$ (рис. 9.15):

C3: «=(B3-B2)/\$H\$1»;
D3: «=(B4-B3)/\$H\$1»;
E3: «=(C3+D3)/2» или «=(B4-B2)/(2*\$H\$1)»;
F3: «=-3*SIN(3*A3)».

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	y'(левая)	y'(правая)	y'(центральная)	y'		
2	0	=COS(3*A2)						
3	=A2+\$H\$1	=COS(3*A3)	=(B3-B2)/\$H\$1	=(B4-B3)/\$H\$1	=(C3+D3)/2	=-3*SIN(3*A3)		
4	=A3+\$H\$1	=COS(3*A4)						
5								
6								

Рис. 9.15. Режим отображения формул

4. Скопирую A3:F3 вниз до $x = 3$ или до $x = 3,1$, так как в последней строке таблицы некоторые разностные производные вычислить невозможно, и если мы хотим получить их значения при $x = 3$, то надо иметь в таблице еще одну строку. В последней строке необходимо удалить несуществующие значения.

5. Построим диаграмму, отображающую значения разностных производных и точные значения производной на отрезке $[0,1; 3]$ (рис. 9.16).

Анализируя значения первой производной и первых разностных производных при одном и том же значении аргумента (нужно сравнивать кружки, ромбы, квадраты и треугольники, расположенные на одной вертикали), видим, что самую высокую точность дает метод на основе центральных разностей («точный» кружок почти совпадает с «приближенным» треугольником). В то же время левые и правые разностные производные дают очевидную значительную погрешность. На диаграмме ясно видно, что одна производная получается с из-

бытком, другая — с недостатком, и отстоят они от кружка в некоторых случаях на расстоянии примерно 0,5.

На рис. 9.17 изображена диаграмма, построенная для таблицы на том же отрезке, но с шагом 0,04. Видим, что погрешность в целом уменьшилась. Дальнейшие эксперименты с уменьшением шага при постоянном масштабе по осям практически бесполезны — трудно будет различать условные обозначения, относящиеся к разным значениям аргумента, то есть находящиеся на разных вертикальных прямых. В этом случае можно порекомендовать выполнять несколько шагов (10—15), установить автомасштабирование по осям и сильно растягивать диаграмму горизонтально. Проведите такие эксперименты самостоятельно.

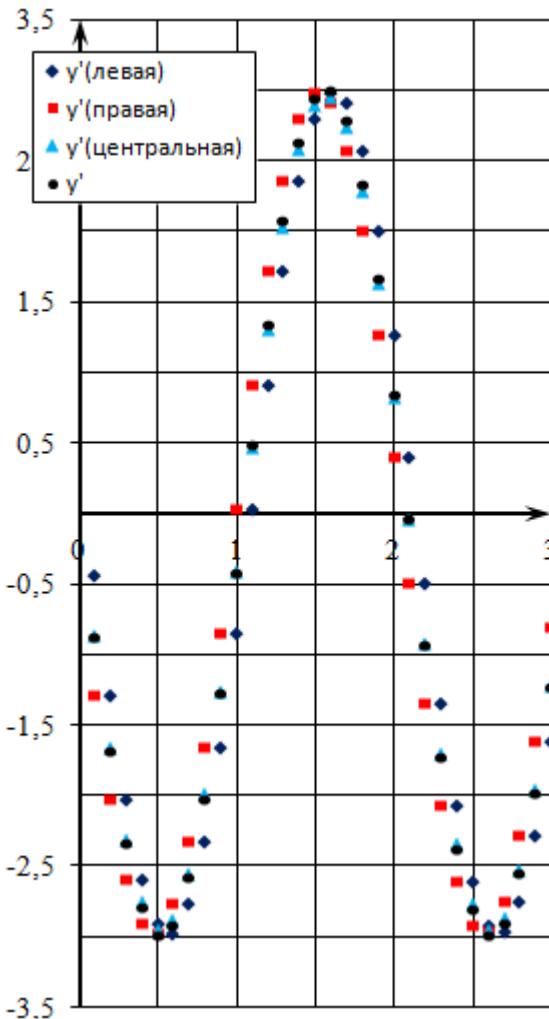


Рис. 9.16. $h = 0,1$

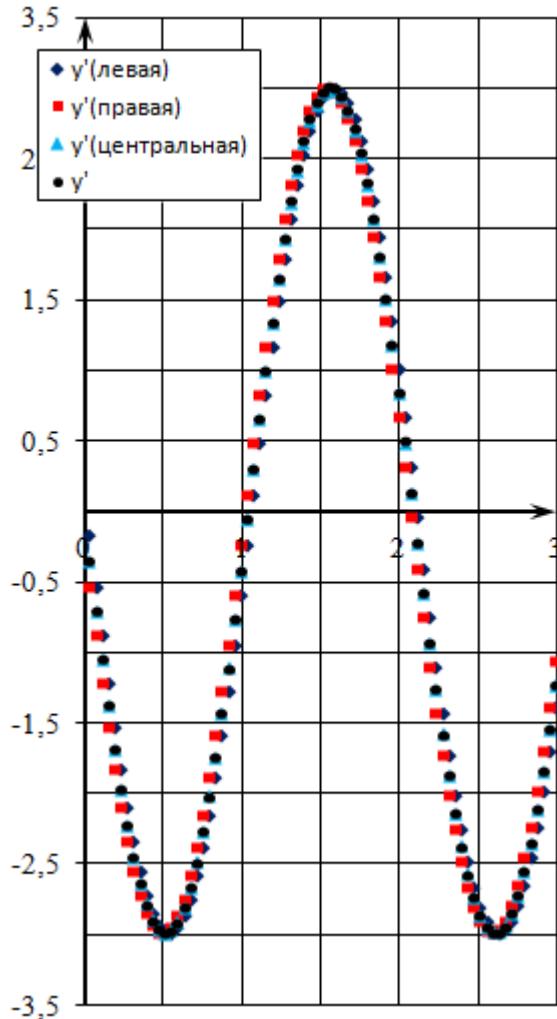


Рис. 9.17. $h = 0,04$

Чтобы отобразить все задействованные точки отрезка $[0; 3]$, таблицу надо начать с $x_0 = 0 - h$.

По аналогии с первой производной можно найти также выражение для старших производных. Например, с помощью правых разностей приближенное значение второй производной в точке x_1 находится по формуле

$$y''_1 \approx \frac{y'_2 - y'_1}{h}. \quad (9.7)$$

Поскольку y'_1 и y'_2 выражаются приближенно через значения функции в узлах таблицы, то y''_1 также можно выразить через них. Например, если y'_1 и y'_2 вычисляются с помощью левых разностей, то

$$y''_1 \approx \frac{y'_2 - y'_1}{h} \approx \frac{(y_2 - y_1)/h - (y_1 - y_0)/h}{h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}. \quad (9.8)$$

В случае, если y'_1 и y'_2 вычисляются с помощью правых разностей, то

$$y''_1 \approx \frac{y'_2 - y'_1}{h} \approx \frac{(y_3 - y_2)/h - (y_2 - y_1)/h}{h} = \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{h^2}. \quad (9.9)$$

Ясно, что можно получить большое разнообразие формул типа (9.8)–(9.9), варьируя методы вычисления производных более низкого порядка. Приведем еще формулу для вычисления y''_i в произвольном узле таблицы x_i , использующую только центральные разности (в предположении, что все необходимые величины существуют). Обобщая формулу (9.6), можно записать

$$y''_i \approx \frac{y'_{i+1} - y'_{i-1}}{2h} \approx \frac{(y_{i+2} - y_i)/2h - (y_i - y_{i-2})/2h}{2h} = \frac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i-2}}{4h^2}. \quad (9.10)$$

Таким образом, используя формулы типа (9.7)–(9.10), можно найти приближенные значения производных любого порядка.

Пример 4. Построим таблицу приближенных значений второй и третьей производных y'' и y''' функции $y = \cos 3x$ на отрезке $[0; 3]$ с шагами 0,1 и 0,01 (для этого шага для наглядности придется взять более узкий отрезок и увеличить масштаб) и сравним с точными значениями этих производных. Расчеты сделаем в *Excel*, используя в одном случае только центральные разности, а в другом — только правые.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи и зададим шаг таблицы (рис. 9.18), который будем хранить в ячейке L1. Выберем сначала $h = 0,1$. Если хотим рассчитать y'' в точке $x = 0$, используя центральные разностные производные, то предусмотрительно надо начать таблицу за три шага до $x = 0$, поэтому в A2 надо ввести соответствующее число.
2. В строках 2—4 в столбце аргумента и функции зададим необходимые формулы для построения таблицы функции как в предыдущем примере (рис. 9.18).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	y	$y'(\text{пр})$	$y''(\text{пр})$	$y'''(\text{пр})$	$y'(\text{ц})$	$y''(\text{ц})$	$y'''(\text{ц})$	y''	y'''	$h=$	0,1
2	-0,3	0,62181										
3	-0,2	0,82534										
4	-0,1	=COS(3*A4)										
5												
6												

Рис. 9.18. Подписи, шаг и начало таблицы

3. В ячейку C2 введем формулу (9.5) «=(B3-B2)/\$L\$1» и скопируем ее в D2:E2, так как вторая и третья производные будут вычисляться по той же формуле со ссылкой на производную предыдущего порядка.
4. Центральную разностную производную можно вычислять, начиная с узла x_1 , поэтому в F3 введем формулу (9.6): «=(B4-B2)/(2*\$L\$1)». В G4 введем формулу (9.10), используя первые центральные разностные производные из предыдущего столбца F: «=(F5-F3)/(2*\$L\$1)» (ссылка идет на еще не заполненные ячейки). Аналогично вычислим и третью центральную разностную производную: в H5 введем формулу «=(G6-G4)/(2*\$L\$1)».
5. В столбцах I и J в начальной строке таблицы зададим формулы вычисления точных значений второй и третьей производной: $y'' = -9\cos 3x$, $y''' = 27\sin 3x$ (рис. 9.19).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	y	$y'(\text{пр})$	$y''(\text{пр})$	$y'''(\text{пр})$	$y'(\text{ц})$	$y''(\text{ц})$	$y'''(\text{ц})$	y''	y'''	$h=$	0,1
2	-0,3	=COS(3*A2)	==(B3-B2)/\$L\$1	=((C3-C2)/\$L\$1	=((D3-D2)/\$L\$1							
3	=A2+\$L\$1	=COS(3*A3)										
4	=A3+\$L\$1	=COS(3*A4)										
5												
6												

Рис. 9.19. Подготовка формул к копированию

6. «Подровняем» формулы во всех столбцах, скопировав их до строки 5, затем скопируем A5:J5 вниз на нужное число строк (так, чтобы превысить на несколько строк значение $x = 3$).
 7. Построим диаграммы значений вторых (рис. 9.20) и третьих производных (рис. 9.21).

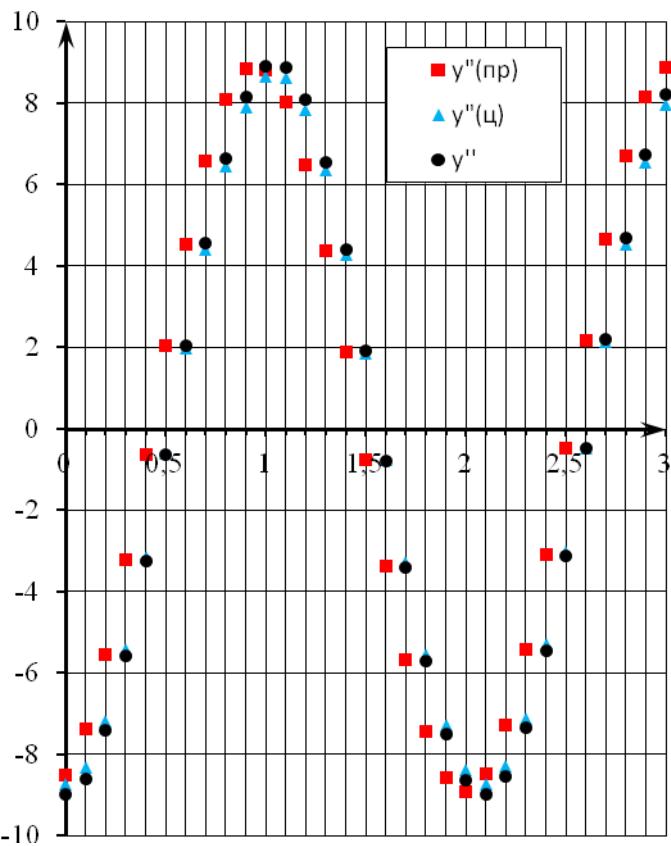


Рис. 9.20. Вторые производные при $h = 0,1$

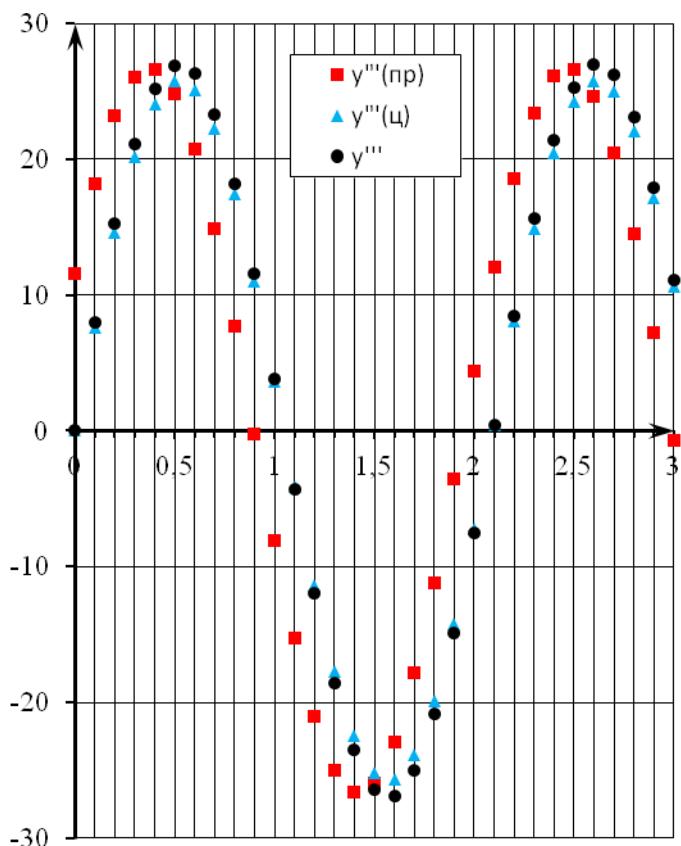


Рис. 9.21. Трети производные при $h = 0,1$

Диаграммы значений вторых и третьих производных на отрезке $[0; 0,7]$ для $h = 0,01$ показаны соответственно на рис. 9.22 и 9.23.

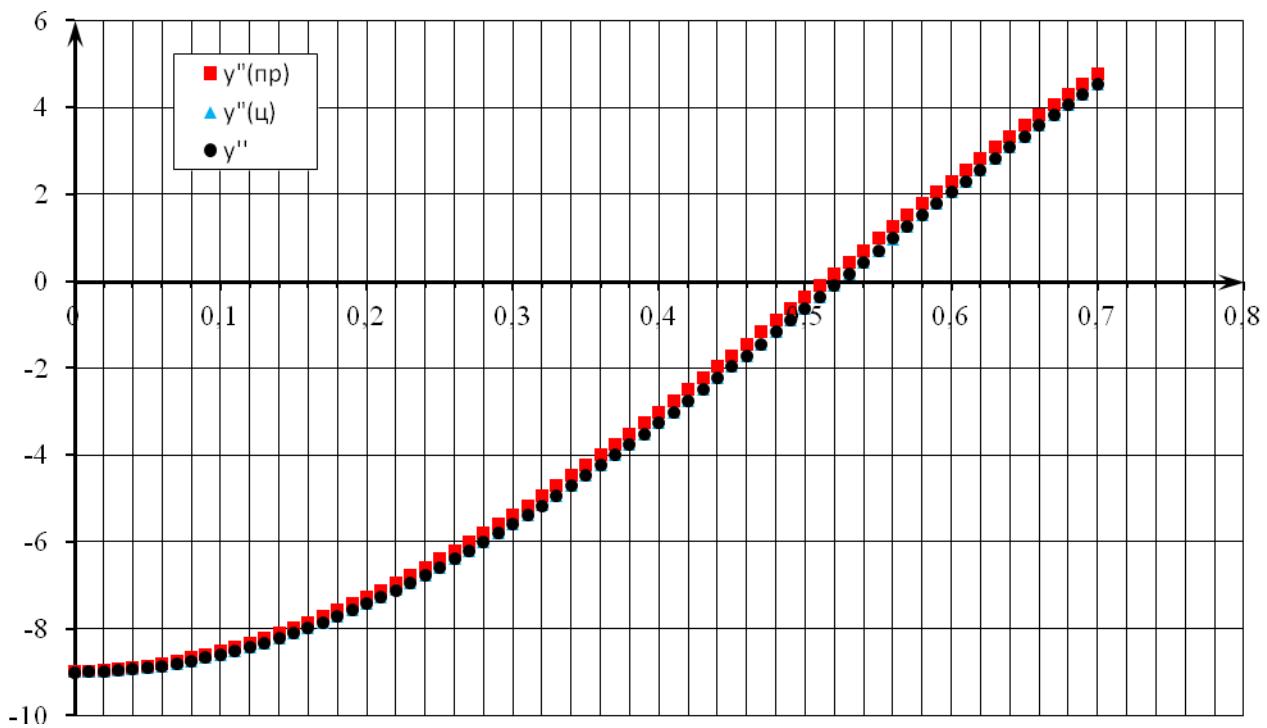


Рис. 9.22. Вторые производные при $h = 0,01$

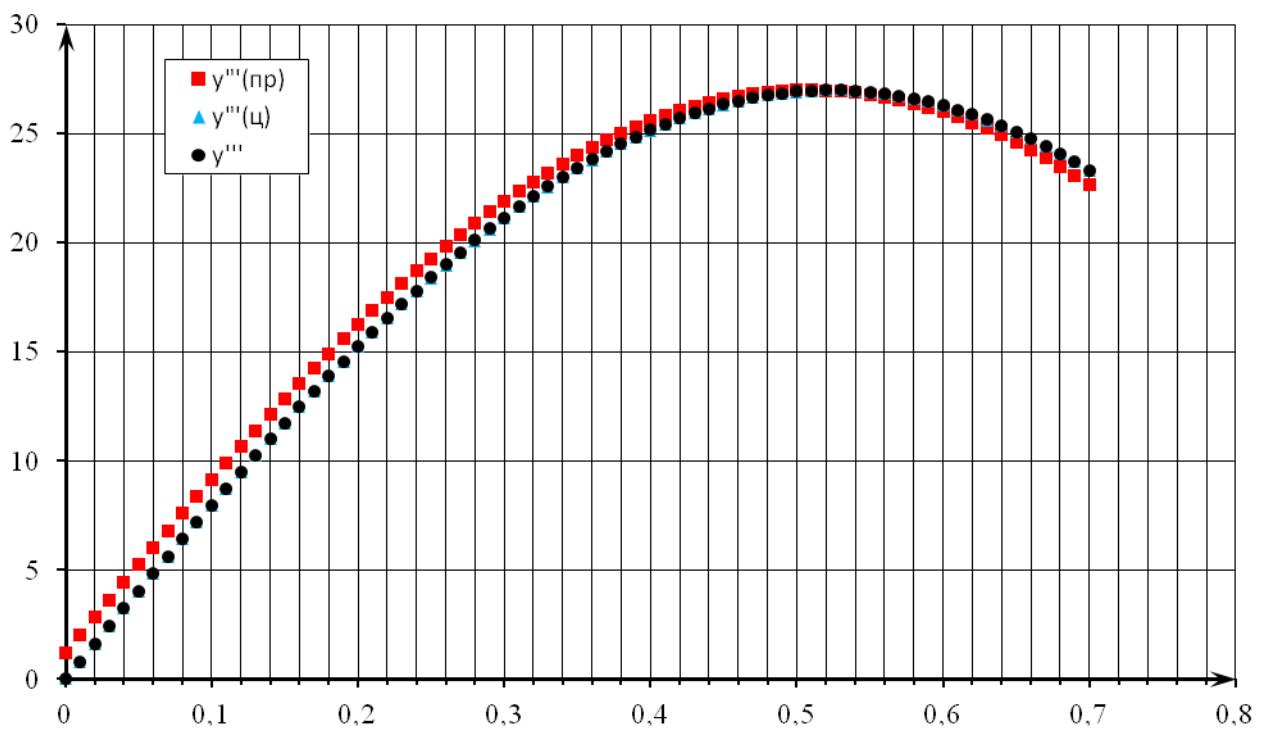


Рис. 9.23. Третьи производные при $h = 0,01$

Все проведенные эксперименты с шагом таблицы говорят об уменьшении погрешности с уменьшением шага. Действительно, определение производной (9.1) основано на предельном переходе, и чем меньше Δx , тем точнее приближенное равенство (9.3). Существуют формулы для оценки погрешности при численном дифференцировании, которые говорят о том, что при уменьшении шага таблицы уменьшается и погрешность. Но дальнейшее уменьшение шага приводит к вычитанию в числителе близких величин и делению на малую величину, что может вызвать большие вычислительные ошибки. На рис. 9.24 приведена диаграмма значений третьих производных на отрезке $[0; 0,0007]$ для $h = 0,00001$.

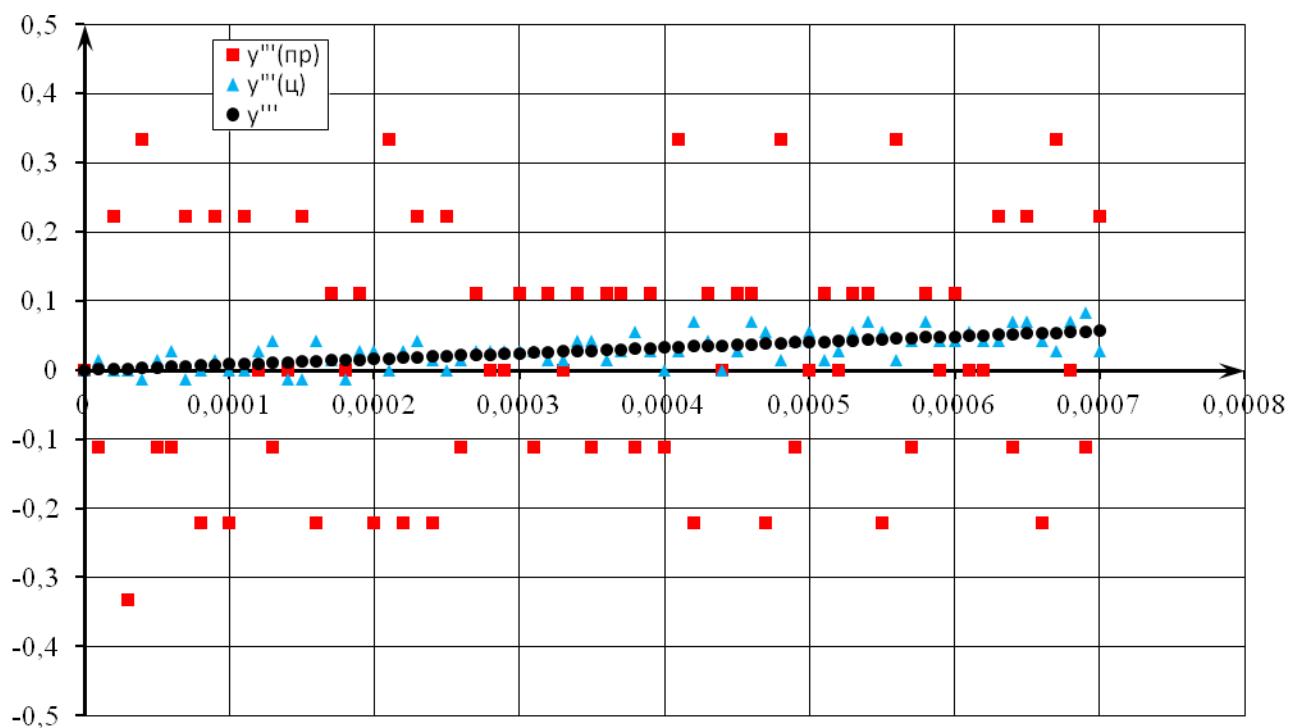


Рис. 9.24. Влияние вычислительной погрешности на значения третьих правых разностных производных при $h = 0,00001$

По рисунку видно, что центральные разностные производные еще «держатся» (при их вычислении деление идет на $2h$), а вот правые значительно отличаются от точных и удаляются от центральных, а не сближаются с ними. Дальнейшее уменьшение шага в 10 раз приводит к решающему влиянию вычислительной погрешности уже и на значения центральных разностных производных (рис. 9.25).

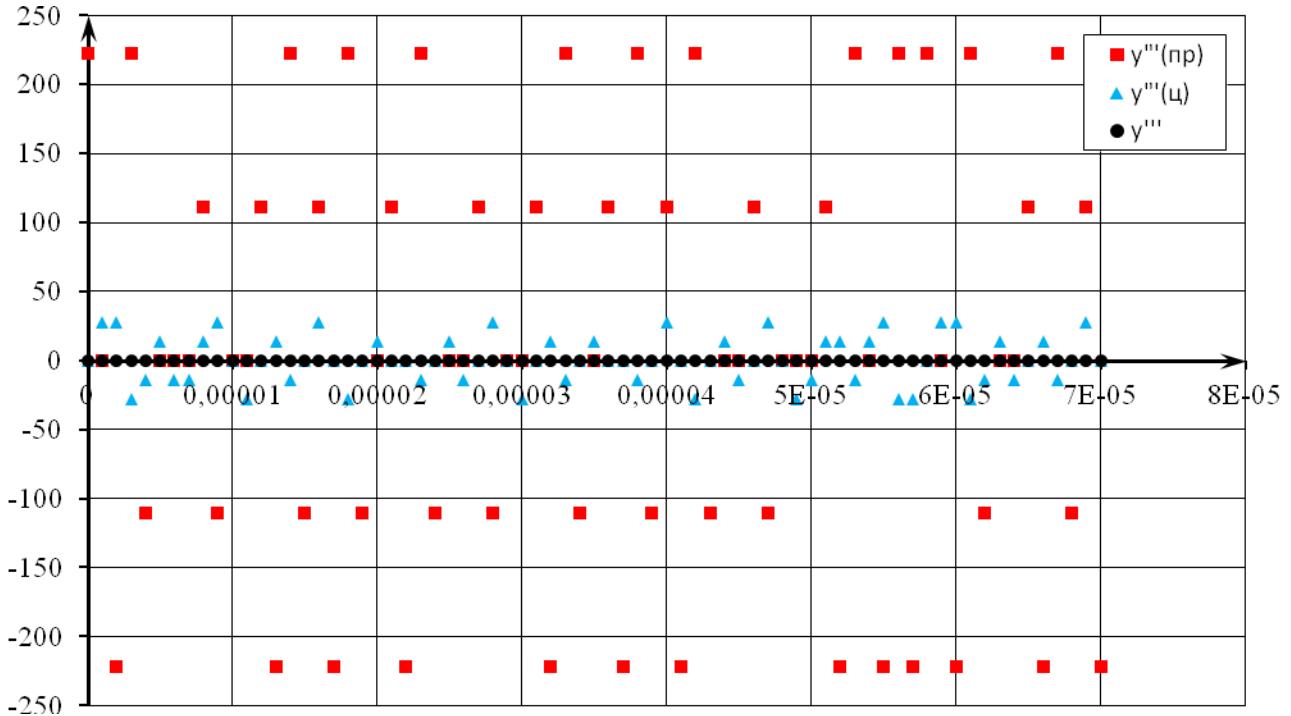


Рис. 9.25. Влияние вычислительной погрешности на значения третьих разностных производных при $h = 0,000001$

Значит, уменьшение шага следует проводить в разумных пределах до момента «разрушения» целостной картины сближения приближенных значений разностных производных одного и того же порядка, вычисленных по различным формулам (более точным и более грубым).

Задание для самостоятельной работы

- Постройте таблицу данной функции $f(x)$ и таблицы разностных производных 1, 2 и 3-го порядков на всем заданном отрезке $[a;b]$ с заданным шагом h . Сравните значения разностных производных с точными значениями производных соответствующих порядков. Сделайте вывод и запишите его. Программу оформите в *Excel*.
- Подберите экспериментально шаг таблицы так, чтобы погрешность приближенного вычисления производных была близкой к минимальной. Программу оформите в *Excel*.

Вариант 1. $f(x) = 1,2e^{0,4x} - 0,6$, $[a;b] = [0;2]$, $h = 0,1$.

Вариант 2. $f(x) = \ln 0,7x + 0,8$, $[a;b] = [0,5;2,5]$, $h = 0,1$.

Вариант 3. $f(x) = 5 \sin 0,8x - 0,3$, $[a;b] = [0;4]$, $h = 0,2$.

Вариант 4. $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, $[a;b] = [0;2]$, $h = 0,1$.

Вариант 5. $f(x) = 3e^x - 0,4$, $[a;b] = [-2;0]$, $h = 0,1$.

Вариант 6. $f(x) = \ln(x+4) + 2,1$, $[a;b] = [-3,5;0,5]$, $h = 0,2$.

Вариант 7. $f(x) = 3 \cos 5x + 1,3$, $[a; b] = [-1; 1]$, $h = 0,1$.

Вариант 8. $f(x) = \frac{x-4}{x^2+1}$, $[a; b] = [0; 4]$, $h = 0,2$.

Вариант 9. $f(x) = e^{x-0,5} + 0,9$, $[a; b] = [0; 2]$, $h = 0,1$.

Вариант 10. $f(x) = 4 \ln(x+6) + 1,5$, $[a; b] = [-2; 2]$, $h = 0,2$.

Вариант 11. $f(x) = 2,2e^{0,7x} - 0,9$, $[a; b] = [0; 4]$, $h = 0,2$.

Вариант 12. $f(x) = \ln 0,8x + 0,5$, $[a; b] = [0,5; 2,5]$, $h = 0,1$.

Вариант 13. $f(x) = 6 \sin 0,5x - 0,4$, $[a; b] = [0; 4]$, $h = 0,2$.

Вариант 14. $f(x) = \frac{x-2}{x^2+1}$, $[a; b] = [1; 3]$, $h = 0,1$.

Вариант 15. $f(x) = 2e^x - 0,6$, $[a; b] = [-2; 0]$, $h = 0,1$.

Вариант 16. $f(x) = \ln(x+4) + 2,7$, $[a; b] = [-3,5; 0,5]$, $h = 0,2$.

Вариант 17. $f(x) = 3 \cos 4x + 4,3$, $[a; b] = [-1; 1]$, $h = 0,1$.

Вариант 18. $f(x) = \frac{x-4}{x^2+1}$, $[a; b] = [2; 6]$, $h = 0,2$.

Вариант 19. $f(x) = e^{2x-0,8} + 0,9$, $[a; b] = [0; 2]$, $h = 0,1$.

Вариант 20. $f(x) = 4 \ln(x+6) + 1,5$, $[a; b] = [-3; 1]$, $h = 0,2$.

Лабораторная работа № 10

Численное интегрирование

Пусть необходимо вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ — непрерывная (а значит, и интегрируемая) на отрезке $[a; b]$ функция. Применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (10.1)$$

где $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$ для любого x из отрезка $[a; b]$. Первообразная $F(x)$ находится с помощью специальных приемов интегрирования: заменой, по частям и так далее Но часто не удается найти $F(x)$ в явном виде, следовательно, не всегда можно получить точное значение определенного интеграла. Например, не существует элементарной функции $F(x)$, для которой бы $F'(x) = \sin x^2$. Значит, $\int_a^b \sin x^2 dx$ по формуле (10.1) вычислить нельзя.

В подобных случаях применяют различные методы приближенного интегрирования, суть которых заключается в замене подынтегральной функции $f(x)$ на некотором отрезке $[p; q]$ интерполяционным многочленом $P_k(x)$ степени k , интерполирующим $f(x)$ на $[p; q]$, а определенный интеграл от многочлена $\int_p^q P_k(x)dx$ легко вычислить. При такой замене получаем

$$\int_p^q f(x)dx \approx \int_p^q P_k(x)dx. \quad (10.2)$$

Варьируя k и узлы интерполяции при построении $P_k(x)$, будем получать различные методы численного интегрирования.

Методы прямоугольников

Пусть $k = 0$. Тогда в формуле (10.2) $\int_p^q f(x)dx \approx \int_p^q P_0(x)dx$, а многочлен нулевой степени — это число: $P_0(x) = C$. Графиком его является прямая $y = C$, параллельная оси Ox , и

$$\int_p^q f(x)dx \approx \int_p^q Cdx = C \int_p^q dx = C \cdot x \Big|_p^q = C \cdot (q - p). \quad (10.3)$$

Если $C > 0$, это произведение равно площади прямоугольника, одна сторона которого — отрезок $[p; q]$, а длина другой равна C . Приравнивая $P_0(x)$ к различным «удобным» числам C , получим различные методы прямоугольников.

1. Пусть $P_0(x) = f(p)$ (интерполяционный полином проходит через точку $(p; f(p))$).

Применим формулу (10.3) сначала к отрезку $[a; b]$ ($p = a$, $q = b$):

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a) \cdot (b - a). \quad (10.4)$$

В случае неотрицательной на $[a; b]$ функции $y = f(x)$ определенный интеграл от нее равен площади S криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной осью Ox , прямыми $x = a$, $x = b$ и графиком подынтегральной функции $y = f(x)$ (рис. 10.1).

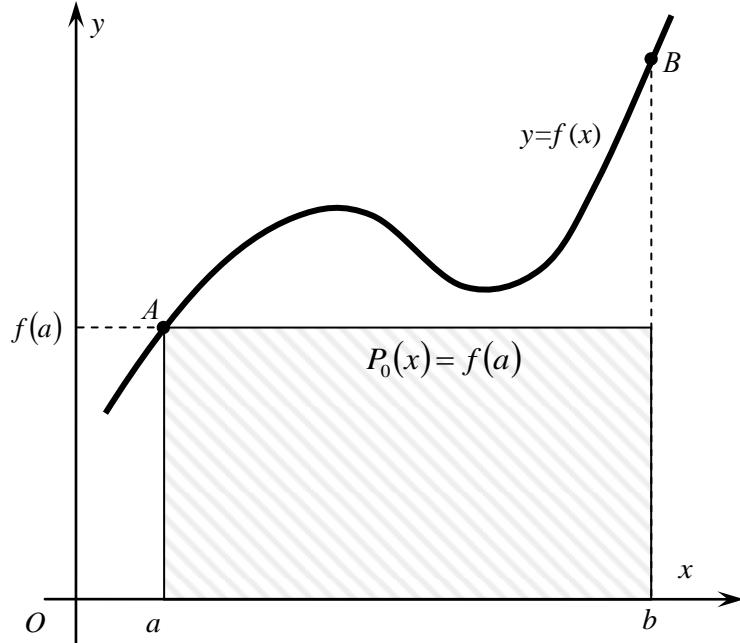


Рис. 10.1. Замена криволинейной трапеции левым прямоугольником

Формула (10.4) означает, что вычисление площади криволинейной трапеции заменено на вычисление площади прямоугольника с основанием $[a; b]$ и высотой $f(a)$ — значением подынтегральной функции в левом конце отрезка интегрирования (рис. 10.1). Поэтому формула (10.4) называется *формулой левых прямоугольников*.

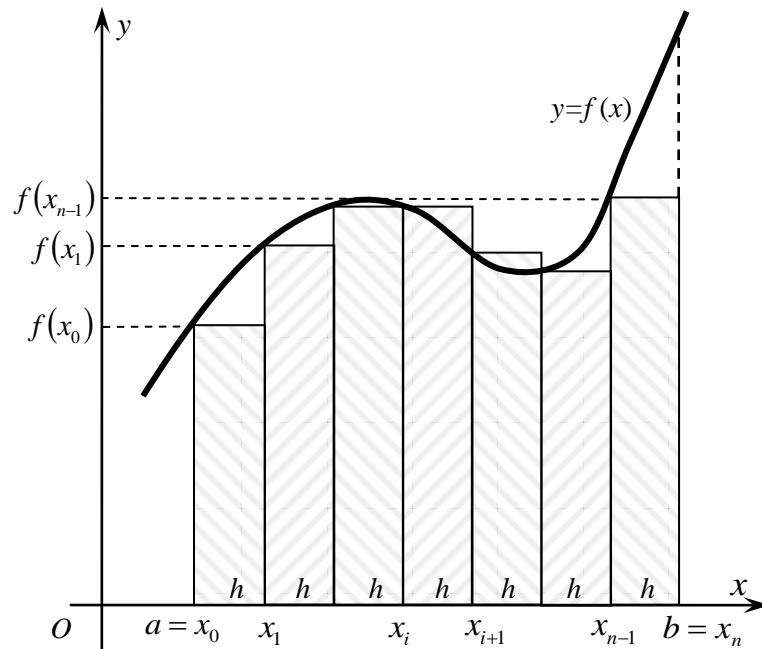


Рис. 10.2. Геометрическая интерпретация общей формулы левых прямоугольников

Однако видим, что этот метод имеет большую погрешность. Уменьшим погрешность, разбив отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, и на каждом частичном отрезке $[x_i; x_{i+1}]$ применим формулу (10.3), полагая $p = x_i$, $q = x_{i+1}$, $C = f(x_i)$,

$i = 0, 1, \dots, n-1$. Геометрически это означает, что каждая маленькая криволинейная трапеция заменяется соответствующим левым прямоугольником (рис. 10.2). Величина $h = \frac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ называется *шагом интегрирования*. Получаем приближенное значение интеграла как сумму приближенных значений интеграла на каждом частичном отрезке, а геометрически — как сумму площадей всех маленьких прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx f(x_0)(x_1 - x_0) + \dots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i).$$

Получили *общую формулу метода левых прямоугольников*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i). \quad (10.5)$$

2. Пусть $P_0(x) = f(q)$ (интерполяционный полином проходит через точку $(q; f(q))$).

Применим формулу (10.3) сначала к отрезку $[a; b]$ ($p = a$, $q = b$):

$$\int_a^b f(x)dx \approx f(b) \cdot (b-a). \quad (10.6)$$

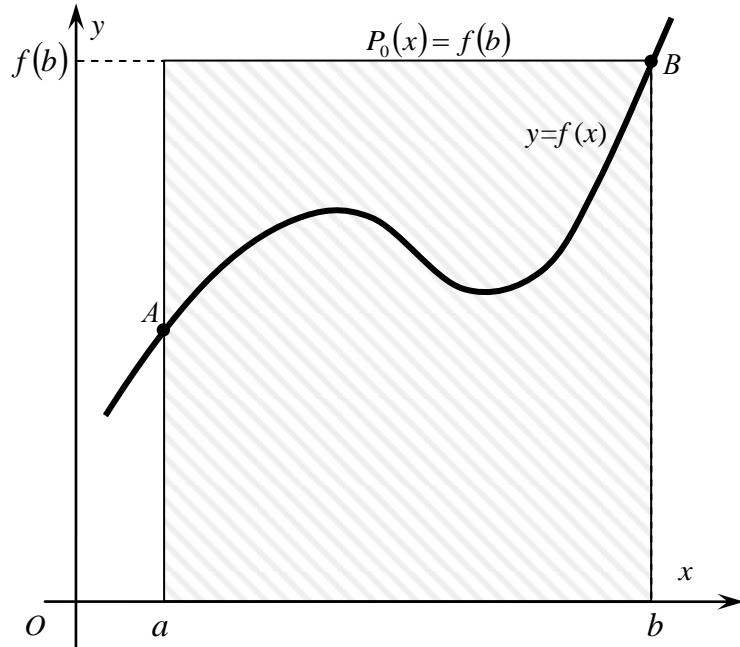


Рис. 10.3. Замена криволинейной трапеции правым прямоугольником

Формула (10.6) означает, что вычисление площади криволинейной трапеции $aABb$ заменено на вычисление площади прямоугольника с основанием $[a; b]$ и высотой $f(b)$, — значением подынтегральной функции в правом конце отрезка интегрирования (рис. 10.3). Поэтому формула (10.6) называется *формулой правых прямоугольников*.

Для получения общей формулы метода разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных частей (рис. 10.4) и на каждом частичном отрезке применим формулу (10.3), полагая $p = x_i$, $q = x_{i+1}$, $C = f(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Имеем:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx f(x_1) \cdot h + \dots + f(x_n) \cdot h = h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Получили общую формулу метода правых прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=1}^n f(x_i). \quad (10.7)$$

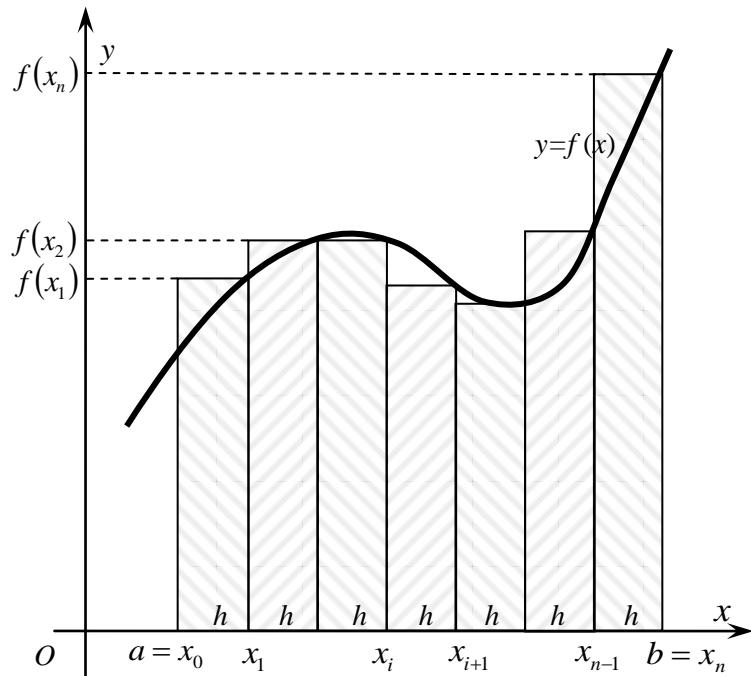


Рис. 10.4. Геометрическая интерпретация общего формулы правых прямоугольников

3. Пусть $P_0(x) = f\left(\frac{p+q}{2}\right)$ (полином проходит через точку $\left(\frac{p+q}{2}; f\left(\frac{p+q}{2}\right)\right)$).

Применим формулу (10.3) сначала к отрезку $[a; b]$ ($p = a$, $q = b$):

$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a). \quad (10.8)$$

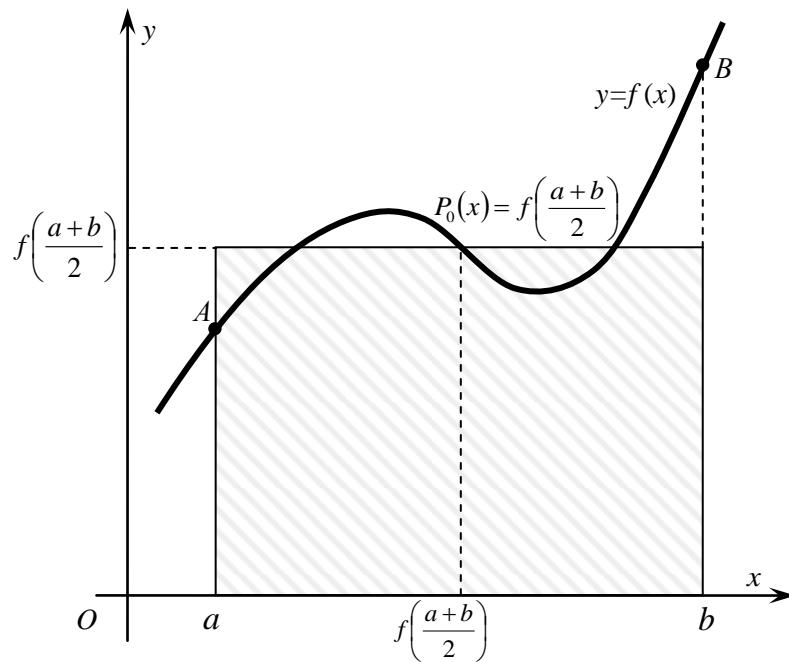


Рис. 10.5. Замена криволинейной трапеции средним прямоугольником

Исходя из геометрической интерпретации формул (10.4) и (10.6), стоит рассчитывать на более высокую точность приближенного вычисления интеграла, если в качестве высоты прямоугольника брать значение функции $f(x)$ в середине отрезка интегрирования. Формула (10.8) означает, что вычисление площади криволинейной трапеции $aABb$ заменено на вычисление площади прямоугольника с основанием $[a; b]$ и высотой $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ (рис. 10.5). Поэтому формула (10.8) называется *формулой средних прямоугольников*.

Аналогично формулам (10.5) и (10.7) получим *общую формулу метода средних прямоугольников* (рис. 10.6):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \approx f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) \cdot h + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \cdot h$$

или

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right). \quad (10.9)$$

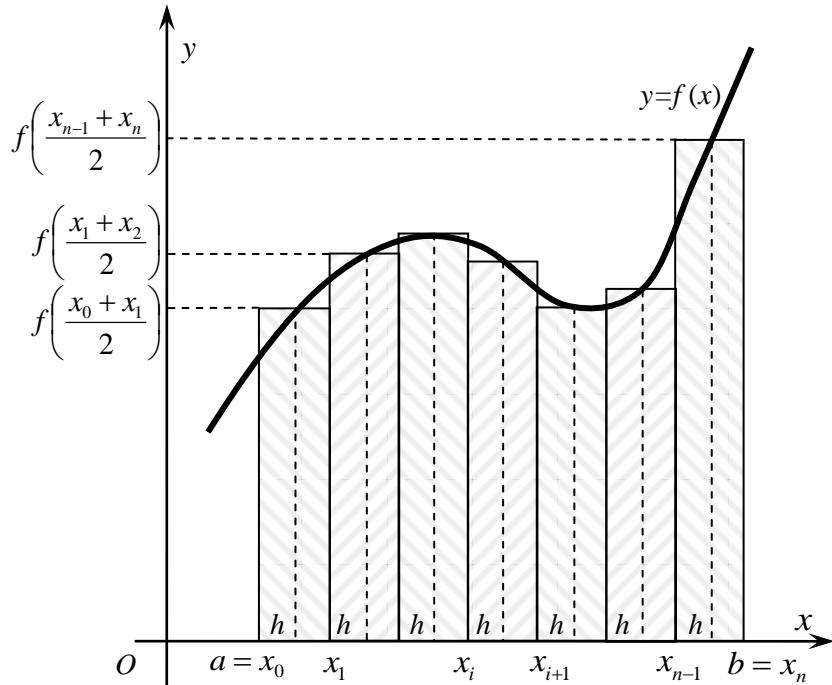


Рис. 10.6. Геометрическая интерпретация общей формулы средних прямоугольников

Приведем оценку погрешности формул методов прямоугольников.

Пусть I — точное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$, а I_{np} — приближенное его значение, то-

гда погрешность $|I - I_{np}|$ не превосходит числа $\frac{M_1 \cdot h \cdot (b-a)}{2}$ для методов правых и левых прямоугольников, то есть

$$|I - I_{np}| \leq \frac{M_1 \cdot h \cdot (b-a)}{2}, \quad (10.10)$$

где $M_1 = \max_{x \in [a; b]} |f'(x)|$ — наибольшее по модулю значение производной функции $f(x)$ в отрезке $[a; b]$.

Для метода средних прямоугольников имеем следующую оценку погрешности:

$$|I - I_{np}| \leq \frac{M_2 \cdot h^2 \cdot (b-a)}{24}, \text{ где } M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|. \quad (10.11)$$

Метод трапеций

Пусть в формуле (10.2) $k = 1$, $p = a$, $q = b$. Заменим подынтегральную функцию в интегrale $\int_a^b f(x)dx$ на многочлен первой степени $P_1(x)$, проходящий через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$. Геометрически это означает, что криволинейную трапецию заменяем на обычную трапецию с основаниями $f(a)$ и $f(b)$ и высотой $(b-a)$ (рис. 10.7). Тогда, используя формулу площади трапеции, получим формулу для приближенного вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a). \quad (10.12)$$

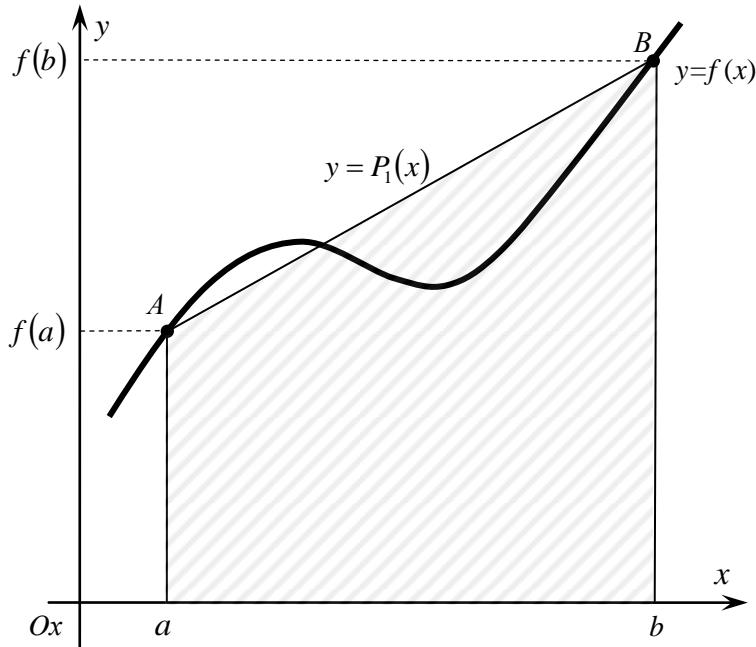


Рис. 10.7. Замена криволинейной трапеции
прямоугольной трапецией

Формулу (10.12), называющуюся *формулой трапеций*, получим и другим способом, находя интеграл на отрезке $[a; b]$ от интерполяционного многочлена Лагранжа первой степени:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx,$$

где $P_1(x)$ проходит через два узла интерполяции x_0 и x_1 , при этом $f(a) = f(x_0) = y_0$ и $f(b) = f(x_1) = y_1$:

$$P_1(x) = y_0 \cdot \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = f(a) \cdot \frac{x - b}{a - b} + f(b) \cdot \frac{x - a}{b - a}.$$

Вынесем общий множитель $\frac{1}{b-a}$ за скобки и сгруппируем слагаемые в скобках:

$$P_1(x) = \frac{1}{b-a} ((f(b)-f(a)) \cdot x + f(a) \cdot b - f(b) \cdot a).$$

Проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int_a^b P_1(x) dx &= \frac{1}{b-a} \int_a^b (((f(b)-f(a)) \cdot x + f(a) \cdot b - f(b) \cdot a)) dx = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \cdot (f(b)-f(a)) + (f(a) \cdot b - f(b) \cdot a) \cdot x \right) \Big|_a^b = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \left(\frac{f(b)-f(a)}{2} \cdot (b^2 - a^2) + (f(a) \cdot b - f(b) \cdot a) \cdot (b-a) \right). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. В итоге получим

$$\int_a^b P_1(x) dx = \frac{b-a}{2} \cdot (f(a) + f(b)),$$

откуда снова получаем формулу (10.12).

Выведем общую формулу метода трапеций, разбив отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Для каждого частичного отрезка $[x_i; x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, так же, как и для всего отрезка $[a; b]$, получаем формулу

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} h + \dots + \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} h = h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

Получили общую формулу метода трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right). \quad (10.13)$$

Геометрически для неотрицательной на $[a; b]$ функции $f(x)$ эта формула означает, что значение интеграла равно сумме площадей всех маленьких обычных трапеций (рис. 10.8).

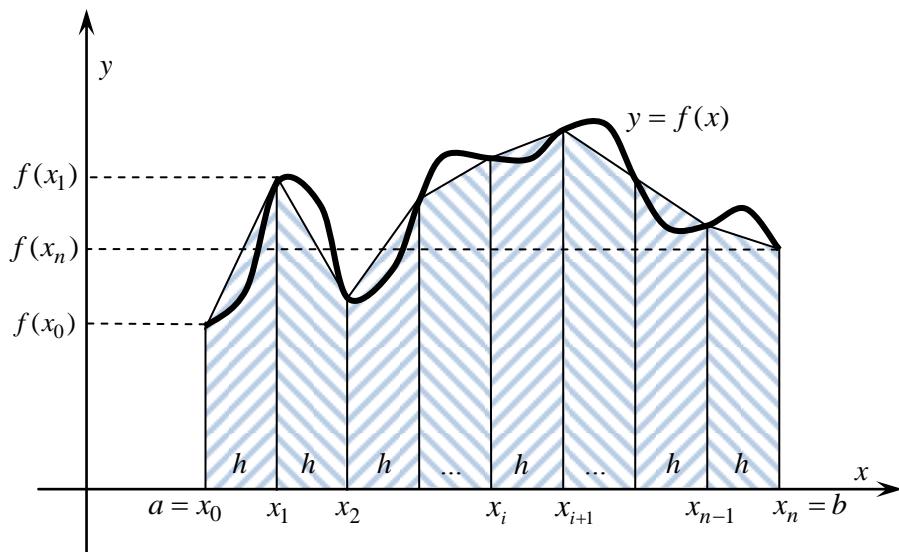


Рис. 10.8. Геометрическая интерпретация общей формулы трапеций

Погрешность метода трапеций определяется формулой:

$$|I - I_{np}| \leq \frac{M_2 \cdot h^2 \cdot (b-a)}{12}, \text{ где } M_2 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)|. \quad (10.14)$$

Метод парабол (метод Симпсона)

Пусть в формуле (10.2) $k=2$, $p=a$, $q=b$. Заменим подынтегральную функцию $f(x)$ многочленом второй степени $P_2(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx,$$

проходящим через точки $(a; f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}; f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, $(b; f(b))$ (рис. 10.9). Графиком функции $y = P_2(x)$ является парабола, то есть заменяем участок графика $f(x)$ на $[a; b]$ участком параболы. Обозначим $h = \frac{b-a}{2}$ — половину длины отрезка $[a; b]$ и $c = \frac{a+b}{2}$ — середину отрезка $[a; b]$. Используя то, что $P_2(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа второй степени, получаем:

$$P_2(x) = f(a) \cdot \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} + f(c) \cdot \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + f(b) \cdot \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}.$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{h}{3}(f(a) + 4f(c) + f(b)) \text{ (формула Симпсона).} \quad (10.15)$$

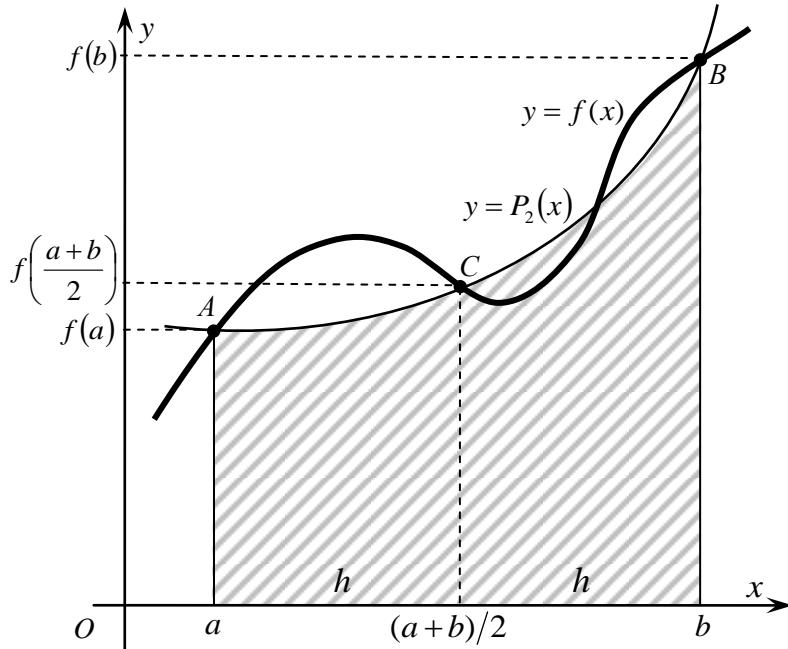


Рис. 10.9. Замена криволинейной трапеции трапецией, ограниченной параболой

Чтобы получить общую формулу метода парабол (метода Симпсона), необходимо разбить отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Для каждой пары частичных отрезков $[x_i; x_{i+1}]$ и $[x_{i+1}; x_{i+2}]$, $i = 0, 1, \dots, n-2$, как и для всего отрезка $[a; b]$, имеем:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})), \quad i = 0, 1, \dots, n-2.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + \dots + \frac{h}{3} (f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

В итоге получаем общую формулу метода Симпсона (парабол):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \bmod 2=1}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \bmod 2=0}}^{n-2} f(x_i) \right). \quad (10.16)$$

Заметим, что n должно быть четным, так как в формуле (10.16) используются пары отрезков длины h .

Погрешность метода Симпсона определяется формулой:

$$|I - I_{np}| \leq \frac{M_4 \cdot h^4 \cdot (b-a)}{180}, \text{ где } M_4 = \max_{x \in [a; b]} |f''''(x)|. \quad (10.17)$$

Пример 1. Вычислим приближенно значение определенного интеграла $\int_0^2 x^2 dx$ различными методами по формулам (10.5), (10.7), (10.9) и (10.16) при $n = 4$ и оценим погрешность. Заметим, что этот интеграл легко вычислить точно:

$$I = \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3} = 2, (6).$$

Отрезок интегрирования $[0; 2]$ разбиваем на 4 равные части, так как $n = 4$, и получаем шаг интегрирования $h = \frac{2-0}{4} = 0,5$. Строим таблицу значений подынтегральной функции с шагом 0,5 (табл. 1):

Таблица 1. Таблица функции $f(x) = x^2$

x_i	0	0,5	1	1,5	2
$f(x_i)$	0	0,25	1	2,25	4

Используя рассмотренные выше методы, находим приближенное значение I_{np} исходного интеграла.

1) Метод левых прямоугольников (10.5):

$$I_{np} = h \cdot (f(0) + f(0,5) + f(1) + f(1,5)) = 0,5 \cdot (0 + 0,25 + 1 + 2,25) = 1,75.$$

Для оценки погрешности используем формулу (10.10):

$$f'(x) = 2x, \quad M_1 = \max_{x \in [0; 2]} |f'(x)| = \max_{x \in [0; 2]} |2x| = 2 \cdot 2 = 4, \quad h = 0,5, \quad b-a = 2-0 = 2,$$

$$|I - I_{np}| \leq \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 2}{2} = 2.$$

Таким образом, точное значение интеграла I отличается от приближенного значения I_{np} не более чем на 2. Иными словами $I \in [1,75 - 2; 1,75 + 2] = [-0,25; 3,75]$.

2) Метод правых прямоугольников (10.7):

$$I_{np} = h \cdot (f(0,5) + f(1) + f(1,5) + f(2)) = 0,5 \cdot (0,25 + 1 + 2,25 + 4) = 3,75.$$

Так как оценка погрешности этого метода происходит также по формуле (10.10), точное значение интеграла принадлежит отрезку $I \in [3,75 - 2; 3,75 + 2] = [1,75; 5,75]$.

3) В методе средних прямоугольников нам потребуются середины отрезков разбиения. Поэтому составим новую таблицу значений функции $f(x) = x^2$, в которой начальное значение аргумента $x = x_0 + \frac{h}{2} = 0,25$, а шаг остается прежним: $h = 0,5$ (табл. 2).

Таблица 2. Таблица функции $f(x) = x^2$

x	0,25	0,75	1,25	1,75
$f(x)$	0,0625	0,5625	1,5625	3,0625

Найдем приближенное значение интеграла:

$$I_{np} = h \cdot (f(0,25) + f(0,75) + f(1,25) + f(1,75)) = 0,5 \cdot (0,0625 + 0,5625 + 1,5625 + 3,0625) = 2,625.$$

Оценим погрешность метода по формуле (10.11):

$$f''(x) = 2, \quad M_2 = 2, \quad |I - I_{np}| \leq \frac{2 \cdot 0,5^2 \cdot 2}{24} = 0,041(6) \leq 0,042.$$

Видим, что точное значение лежит на отрезке

$$I \in [2,625 - 0,042; 2,625 + 0,042] = [2,583; 2,667].$$

4) Для реализации метода трапеций (10.13) можно воспользоваться данными из таблицы 1. Получаем приближенное значение интеграла:

$$I_{np} = h \cdot \left(\frac{f(0) + f(2)}{2} + f(0,5) + f(1) + f(1,5) \right) = 0,5 \cdot \left(\frac{0 + 4}{2} + 0,25 + 1 + 2,25 \right) = 2,75.$$

Оценим погрешность метода по формуле (10.14):

$$|I - I_{np}| \leq \frac{2 \cdot 0,5^2 \cdot 2}{12} = 0,08(3) \leq 0,084.$$

Таким образом, точное значение определенного интеграла лежит в отрезке

$$I \in [2,75 - 0,084; 2,75 + 0,084] = [2,666; 2,834].$$

5) Для метода Симпсона используем табл. 1 и по формуле (10.16) находим:

$$\begin{aligned} I_{np} &= \frac{h}{3} \cdot (f(0) + f(2) + 4 \cdot (f(0,5) + f(1,5)) + 2 \cdot f(1)) = \\ &= \frac{0,5}{3} \cdot (0 + 4 + 4 \cdot (0,25 + 2,25) + 2 \cdot 1) = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

При реализации метода Симпсона приближенное значение интеграла оказалось равным его точному значению. Этого и следовало ожидать, так как в нашей учебной задаче подынтегральная функция $f(x) = x^2$ заменялась на многочлен 2-й степени $P_2(x)$, проходящий через

те же точки, что и $f(x)$. В силу единственности интерполяционного многочлена $P_2(x) = x^2$ получили точное значение интеграла. С другой стороны, в формуле (10.17) оценки погрешности метода Симпсона величина $M_4 = 0$ и погрешность — нулевая.

Замечание 1. У многочленов 3-й степени четвертая производная равна нулю, поэтому значения интегралов, найденные методом Симпсона, будут точными и в случаях, если подынтегральная функция — многочлен 3-й степени. Получается интересный факт: площади криволинейных трапеций под параболой и под графиком многочлена 3-й степени, проходящих через три точки, абсциссы которых равны концам и середине одного и того же отрезка, равны.

Замечание 2. Напомним, что число, ограничивающее погрешность сверху, всегда округляется с избытком, какая бы цифра ни стояла после той, до которой проводится округление. Ведь если в рассматриваемом примере оценку сверху погрешности метода средних прямоугольников округлить, например, до одной значащей цифры по правилу пятерки, то получим:

$$|I - I_{np}| \leq \frac{2 \cdot 0,5^2 \cdot 2}{24} = 0,041(6) \approx 0,04,$$

и точное значение 2,(6) не попадает в отрезок $[2,625 - 0,04; 2,625 + 0,04] = [2,585; 2,665]$. Округление же с избытком приводит к корректному результату:

$$|I - I_{np}| \leq \frac{2 \cdot 0,5^2 \cdot 2}{24} = 0,041(6) \leq 0,05, \quad I \in [2,625 - 0,05; 2,625 + 0,05] = [2,573; 2,675].$$

Это произошло потому, что в данном примере число 0,041(6), ограничивающее сверху погрешность, является точным значением погрешности. Можно получить промежуток возможных значений интеграла, не округляя это число:

$$I \in [2,625 - 0,041(6); 2,625 + 0,041(6)] = [2,583(3); 2,666(6)].$$

Видим, что точное значение интеграла совпадает с правым концом отрезка, и уменьшение слагаемого 0,041(6) при округлении до одной значащей цифры приводит к потере точного значения.

Аналогичные рассуждения можно провести с данным примером и для метода трапеций. Проведите их самостоятельно.

Видим, что при реализации численных методов нахождения определенного интеграла в данном случае метод Симпсона оказался точным, оценка сверху погрешности методов трапеций и средних прямоугольников совпала с погрешностью, а в методах левых и правых прямоугольников оценка погрешности и реальная погрешность оказались достаточно большими (в методе левых прямоугольников даже нельзя ручаться за знак интеграла).

Пример 2. Вычислим приближенно определенный интеграл $\int_0^2 0,5x^4 dx$ и оценим погрешность в среде *Excel*, реализовав для каждого метода необходимые шаги.

Пусть $n = 4$, тогда шаг интегрирования $h = \frac{2-0}{4} = 0,5$.

1) Метод левых прямоугольников

1. Сначала построим таблицу значений подынтегральной функции $f(x) = 0,5x^4$ на отрезке интегрирования $[0; 2]$ с выбранным шагом $h = 0,5$ (рис. 10.10), значение которого поместим в ячейку F1 (рис. 10.11).

	A	B
1	x	f(x)
2	0	0
3	0,5	0,03125
4	1	0,5
5	1,5	2,53125
6	2	8

Рис. 10.10. Таблица значений
функции $f(x) = 0,5x^4$

2. В ячейку D2 введем формулу «=F1*(СУММ(B2:B5))» (рис. 10.11) вычисления приближенного значения интеграла по методу левых прямоугольников (10.5). Получаем $I_{np} = 1,53125$ (рис. 10.12).

	A	B	C	D	E	F
1	x	f(x)	f'(x)	I пр (лев)	h=	0,5
2	0	0		=F1*(СУММ(B2:B5))		
3	0,5	0,03125				
4	1	0,5				
5	1,5	2,53125				
6	2	8				

Рис. 10.11. Ввод формулы вычисления интеграла

D	E
I пр (лев)	
1,53125	

Рис. 10.12. Значение

3. Для того чтобы оценить погрешность метода в *Excel* по формуле (10.10), сначала найдем аналитически первую производную подынтегральной функции:

$$f(x) = 0,5x^4, \quad f'(x) = 2x^3.$$

Если подынтегральная функция представлена более сложная, то значения ее производной можно найти, реализуя один из методов численного дифференцирования в *Excel* (см. лабораторную работу № 9).

Теперь нужно найти максимальное значение модуля первой производной подынтегральной функции на отрезке интегрирования $[0; 2]$. В данном примере это легко сделать аналитически: $M_1 = \max_{x \in [0; 2]} |f'(x)| = \max_{x \in [0; 2]} |2x^3| = 2 \cdot 2^3 = 16$. В более сложных для исследования случаях можно предложить приближенный (прикидочный) способ: построить достаточно грубую таблицу значений первой производной подынтегральной функции $f'(x)$ на отрезке $[0; 2]$ (рис. 10.13) и определить M_1 . Причем для грубой прикидки можно воспользоваться имеющейся таблицей изменения аргумента.

	A	B	C	D
1	x	f(x)	f'(x)	I п
2	0	0	=2*A2^3	1
3	0,5	0,03125	0,25	
4	1	0,5	2	
5	1,5	2,53125	6,75	
6	2	8	16	

Рис. 10.13. Таблица первой производной

Видим, что наибольшее значение модуля производной расположено в ячейке C6. Пусть в ячейке B10 (рис. 10.14) будет вычисляться оценка погрешности $|I - I_{np}|$. Введем в B10 формулу «=C6*F1*(A6-A2)/2». Получаем $|I - I_{np}| \leq 8$. Это говорит о том, что точное значение определенного интеграла $I \in [1,531225 - 8; 1,531225 + 8] = [-6,468775; 9,531225]$.

	A	B	C	D	E	F
1	x	f(x)	f'(x)	I_пр (лев)	h=	0,5
2	0	0	0	1,53125		
3	0,5	0,03125	0,25			
4	1	0,5	2			
5	1,5	2,53125	6,75			
6	2	8	16			
7						
8						
9						
10	I - I_пр	=C6*F1*(A6-A2)/2				

Рис. 10.14. Вычисление погрешности

Замечание 3. Функцию СУММ(число1;число2;...) можно ввести при помощи клавиатуры, или при помощи кнопки **Сумма** , или используя кнопку на панели **Вставка – Функция...** (рис. 10.15). Выбрав категорию **Математические**, можно легко найти данную функцию (рис. 10.16).

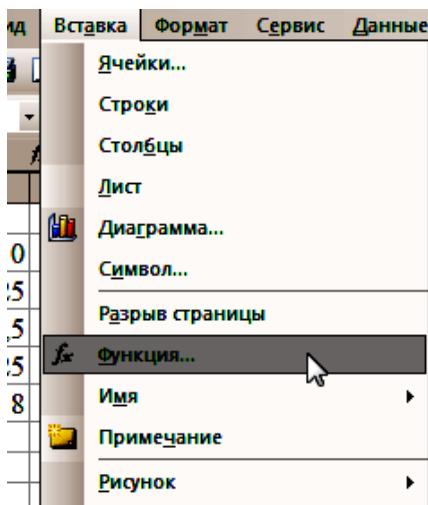


Рис. 10.15. Меню Вставка

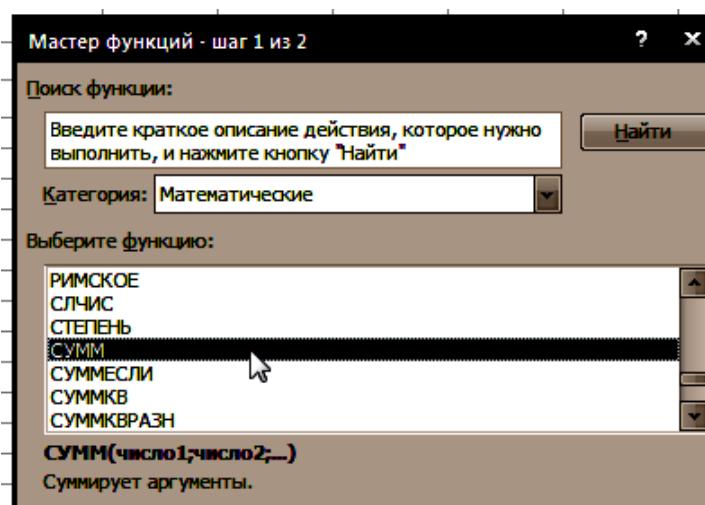


Рис. 10.16. Функция СУММ

2) Метод правых прямоугольников

- Для реализации этого метода воспользуемся имеющейся таблицей значений подынтегральной функции $f(x)=0,5x^4$ (рис. 10.10).
- Для хранения нового приближенного значения интеграла рядом с вычисленным в столбце D по методу левых прямоугольников вставим новый столбец, кликнув правой кнопкой мыши на заголовке столбца E. В открывшемся окне выберем пункт **Добавить ячейки** (рис. 10.17).

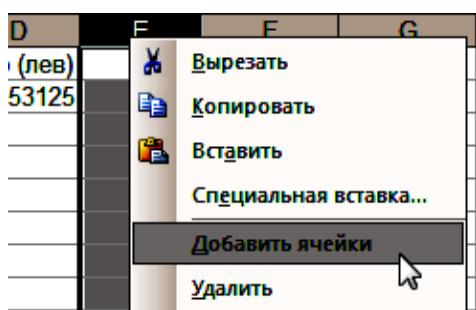


Рис. 10.17. Меню Добавить ячейки

	A	B	C
1	x	f(x)	f'(x)
2	0	0	0
3	0,5	0,03125	0,25
4	1	0,5	2
5	1,5	2,53125	6,75
6	=A5+\$G\$1		16
7			

Рис. 10.18. Автоматическая смена адреса

При появлении нового столбца ячейка F1, в которой хранится шаг, автоматически перейдет в ячейку G1, при этом во всех формулах, где используется шаг, аналогично произойдет ав-

томатическая замена F1 на G1. В этом легко убедится, например, кликнув левой кнопкой мыши на ячейке A6 (рис. 10.18). В ячейке E1 сделаем подпись «I_{пр} (прав)». Найдем приближенное значение интеграла, введя в ячейку E2 формулу «=G1*(СУММ(В3:В6))», реализующую формулу (10.7) (рис. 10.19). Нажимаем Enter и получаем $I_{np} = 5,53125$ (рис. 10.20).

B	C	D	E	F	G
f(x)	f'(x)	I _{пр} (лев)	I _{пр} (прав)	h=	
0	0	1,53125	=G1*(СУММ(В3:В6))	0,5	
0,03125	0,25				
0,5	2				
2,53125	6,75				
8	16				

Рис. 10.19. Формула метода правых прямоугольников

D	E
I _{пр} (лев)	I _{пр} (прав)
1,53125	5,53125

Рис. 10.20. Значение

3. Оценка погрешности метода происходит по той же формуле (10.10). Поэтому в методе правых прямоугольников имеем: $I \in [5,53125 - 8; 5,53125 + 8] = [-2,48675; 13,51325]$.

Так как точное значение интеграла принадлежит обоим отрезкам, то оно принадлежит и их пересечению. По методу левых прямоугольников выше уже получили: $I \in [-6,468775; 9,531225]$. Поэтому: $I \in [-2,48675; 9,531225]$. Очень большая погрешность, и даже знак интеграла не определен.

3) Метод средних прямоугольников

- Для реализации метода необходимо составить новую таблицу значений подынтегральной функции $f(x) = 0,5x^4$ из расчета, что начальное значение аргумента теперь $x_0 + \frac{h}{2} = 0,25$, а шаг остается тем же: $h = 0,5$. Проделаем необходимые действия на Листе 2 книги Excel (рис. 10.21).
- Для расчета приближенного значения интеграла в ячейку D1 вводим формулу «=F1*(СУММ(В2:В5))» (рис. 10.22). При нажатии Enter получаем: $I_{np} = 3,03515625$.

A	B
1	x
2	0,25
3	0,75
4	1,25
5	1,75

Рис. 10.21. Таблица

A	B	C	D	E	F
1	x	f(x)	f'(x)	I _{пр} (сред)	h=
2	0,25	0,00195		=F1*(СУММ(В2:В5))	0,5
3	0,75	0,1582			
4	1,25	1,2207			
5	1,75	4,68945			

Рис. 10.22. Общая формула метода средних прямоугольников

3. Оценим погрешность. Для оценки потребуется вычислить вторую производную подынтегральной функции $f(x) = 0,5x^4$ и найти ее наибольшее значение на отрезке $[0; 2]$. Найдя $f''(x) = 6x^2$, рассчитаем M_2 , например так, как это показано на рис. 10.23—10.24.

A	B	C
1	x	f(x)
2	0,25	0,00195
3	0,75	0,1582
4	1,25	1,2207
5	1,75	4,68945
6		

Рис. 10.23. Формула $f''(x)$

A	B	C
1	x	f(x)
2	0,25	0,00195
3	0,75	0,1582
4	1,25	1,2207
5	1,75	4,68945
6	2	24

Рис. 10.24. Прикидочная таблица $f''(x)$

Видим, что наибольшее значение расположено в С6. В ячейку В8 вводим формулу для оценки погрешности: «=С6*F1^2*2/24». Множитель 2 — длина отрезка интегрирования (рис. 10.25).

	A	B	C	D	E	F
1	x	f(x)	f'(x)	I_пр (сред)	h=	0,5
2	0,25	0,00195	0,375	3,0351563		
3	0,75	0,1582	3,375			
4	1,25	1,2207	9,375			
5	1,75	4,68945	18,375			
6	2		24			
7						
8	I - I_пр	=C6*F1^2*2/24				

Рис. 10.25. Формула оценки погрешности

	A	B
1	x	f(x)
2	0,25	0,00195
3	0,75	0,1582
4	1,25	1,2207
5	1,75	4,68945
6	2	
7		
8	I - I_пр	0,5

Рис. 10.26. Погрешность

В результате $|I - I_{np}| \leq 0,5$ (рис. 10.26), поэтому точное значение интеграла $I \in [3,0351563 - 0,5; 3,0351563 + 0,5] \subset [2,5; 3,6]$.

4) Метод трапеций

1. Можно использовать ту же самую таблицу, что и в методах левых и правых прямоугольников. Поэтому вернемся к Листу 1 книги *Excel*. Добавим новый столбец после столбца Е, в который в дальнейшем поместим приближенное значение интеграла, вычисленного по методу трапеций.

2. В ячейку F2 введем формулу «=H1*((B2+B6)/+СУММ(В3:В5))» (рис. 10.27).

B	C	D	E	F	G	H
f(x)	f'(x)	I_пр (лев)	I_пр (прав)	I_пр (трап)	h=	0,5
0	0	1,53125	5,53125	=H1*((B2+B6)/+СУММ(В3:В5))		
0,03125	0,25					
0,5	2					
2,53125	6,75					
8	16					

Рис. 10.27. Реализация общей формулы метода трапеций

По методу трапеций: $I_{np} = 3,53125$.

3. В ячейке В11 оценим погрешность (рис. 10.28). Здесь число 24 — значение M_2 . В ячейке H1 к данному моменту находится шаг интегрирования, а множитель 2 — длина отрезка интегрирования.

9			
10	I - I_пр	8	
11	I - I_пр	=24*H1^2*2/12	

Рис. 10.28. Оценка погрешности метода трапеций

F	G
I_пр (трап)	I_пр (Симпс)
3,53125	3,2083333

Рис. 10.29. Метод Симпсона

Получаем, что $|I - I_{np}| \leq 1$. Откуда следует: $I \in [3,53125 - 1; 3,53125 + 1] \subset [2,5; 4,6]$.

5) Метод Симпсона

1. Потребуется та же таблица значений функции $f(x) = 0,5x^4$, которая использовалась для реализации метода трапеций.

2. Дополним таблицу листа *Excel* новым столбцом, следующим за F. В ячейку G2 введем формулу «=I1/3*(B2+4*B3+B4+4*B5+B6)» и получим результат, изображенный на рис. 10.29: $I_{np} = 3,208(3)$.

3. Перед тем, как оценивать погрешность, находим $f''(x)$: $f''(x)=12$. Поэтому и $M_4=12$ — наибольшее значение модуля $f''(x)$ на отрезке $[0; 2]$. В ячейку B12 вводим формулу «=12*J1^4*2/180» и видим, что $|I - I_{np}| \leq 0,00834$ (рис. 10.30).

10	$\boxed{ - I_{\text{пр}} }$	8 (лев, прав)
11	$\boxed{ - I_{\text{пр}} }$	1 (трап)
12	$\boxed{ - I_{\text{пр}} }$	0,008333 (Симпс)
13		

Рис. 10.30. Погрешность метода Симпсона

Итак, точное значение интеграла $I \in [3,208(3) - 0,008(3); 3,208(3) + 0,008(3)] = [3,2; 3,21(6)]$. Таким образом, можно записать результат с одной верной цифрой после запятой: $I \approx 3,2$.

Продолжим численные эксперименты в *Excel*, увеличивая количество отрезков разбиения.

Пример 3. Вычислим определенный интеграл $\int_0^2 0,5x^4 dx$ в *Excel* при $n = 20$.

Найдем шаг интегрирования: $h = \frac{2-0}{20} = 0,1$. При реализации методов прямоугольников

и трапеций никаких принципиальных отличий от предыдущего примера нет, кроме длины таблицы, поэтому приведем только результаты со всеми знаками после запятой и необходимые иллюстрации.

1) Метод левых прямоугольников: $I_{np} = 2,81333$, $|I - I_{np}| \leq 1,6$,
 $I \in [2,81333 - 1,6; 2,81333 + 1,6] = [1,21333; 4,41333]$. Этот результат значительно лучше по сравнению с аналогичным в примере 2.

2) Метод правых прямоугольников: $I_{np} = 3,61333$, $|I - I_{np}| \leq 1,6$,
 $I \in [3,61333 - 1,6; 3,61333 + 1,6] = [2,01333; 5,21333]$.

Сузим промежуток, содержащий точное значение интеграла, пересечением полученных отрезков: $I \in [2,01333; 4,41333]$.

3) Метод средних прямоугольников: $I_{np} = 3,19333625$, $|I - I_{np}| \leq 0,02$,
 $I \in [3,19333625 - 0,02; 3,19333625 + 0,02] = [3,17333625; 3,21333625]$.

4) Метод трапеций: $I_{np} = 3,21333$, $|I - I_{np}| \leq 0,04$,
 $I \in [3,21333 - 0,04; 3,21333 + 0,04] = [3,17333; 3,25333]$.

5) При реализации метода Симпсона введем еще один дополнительный столбец для промежуточного расчета сумм на каждой паре частичных отрезков по формуле (10.15). Обозначим столбец С с такими суммами «f1(x)» (рис. 10.31). В ячейку C3 введем формулу «=B2+4*B3+B4». Далее выделим диапазон C2:C3 (пустую ячейку и ячейку с формулой) и скопируем его вниз до 22 строки (рис. 10.31). Получим таблицу, изображенную на рис. 10.32. Для расчета приближенного значения интеграла, например, в ячейку H2 вводим формулу «=J1/3*(СУММ(C3:C21))» (в J1 хранится шаг). Действительно, такой расчет соответствует формуле метода Симпсона, так как каждое значение, представленное в ячейке столбца С в строке аргумента x_i , есть сумма вида $f(x_{i-1}) + 4f(x_i) + f(x_{i+1})$, $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$.

Получаем: $I_{np} = 3,20001(3)$, $|I - I_{np}| \leq 0,00001(3)$.

Заметим, что точное значение данного интеграла равно 3,2.

	A	B	C
1	x	f(x)	f1(x)
2	0	0	
3	0,1	0,00005	0,001
4	0,2	0,0008	
5	0,3	0,00405	
6	0,4	0,0128	
7	0,5	0,03125	
8	0,6	0,0648	
9	0,7	0,12005	
10	0,8	0,2048	
11	0,9	0,32805	
12	1	0,5	
13	1,1	0,73205	
14	1,2	1,0368	
15	1,3	1,42805	
16	1,4	1,9208	
17	1,5	2,53125	
18	1,6	3,2768	
19	1,7	4,17605	
20	1,8	5,2488	
21	1,9	6,51605	
22	2	8	
23			

Рис. 10.31. Копирование двух ячеек

	A	B	C
1	x	f(x)	f1(x)
2	0	0	
3	0,1	0,00005	0,001
4	0,2	0,0008	
5	0,3	0,00405	0,0298
6	0,4	0,0128	
7	0,5	0,03125	0,2026
8	0,6	0,0648	
9	0,7	0,12005	0,7498
10	0,8	0,2048	
11	0,9	0,32805	2,017
12	1	0,5	
13	1,1	0,73205	4,465
14	1,2	1,0368	
15	1,3	1,42805	8,6698
16	1,4	1,9208	
17	1,5	2,53125	15,3226
18	1,6	3,2768	
19	1,7	4,17605	25,2298
20	1,8	5,2488	
21	1,9	6,51605	39,313
22	2	8	
23			

Рис. 10.32. Значения промежуточных сумм

Задание для самостоятельной работы

Вычислите указанный интеграл приближенно методом левых прямоугольников, методом правых прямоугольников, методом средних прямоугольников, методом трапеций и методом Симпсона в *Excel* при $n=10, 20, 40$. Ответ запишите в форме $I = I_{np} \pm \Delta$, где Δ — погрешность метода, или в виде отрезка возможных значений. Для вычисления значений M_1 , M_2 и M_4 можно использовать методы численного дифференцирования.

Вариант 1. $\int\limits_1^2 \sin 0,5x \cdot \ln 4x dx$.

Вариант 2. $\int\limits_0^2 \cos 0,2x \cdot e^{x^2} dx$.

Вариант 3. $\int\limits_0^4 \sin 0,2x \cdot \sqrt{x+1} dx$.

Вариант 4. $\int\limits_0^{\pi} \sin 2x \cdot (x + \sqrt{x}) dx$.

Вариант 5. $\int\limits_1^2 \ln(4 + 2x + x^2) \cdot \sqrt{x} dx$.

Вариант 6. $\int\limits_1^2 \sqrt{\sin 0,5x \cdot \ln 4x} dx$.

Вариант 7. $\int\limits_1^2 e^{2x} \cdot \ln 0,5x dx$.

$$\text{Вариант 8. } \int_1^4 \sin^2 x \cdot \ln 5x dx .$$

$$\text{Вариант 9. } \int_0^2 \ln(6 - x + x^2) \cdot x^3 dx .$$

$$\text{Вариант 10. } \int_1^6 \sin 0,2x \cdot \ln(x+3) dx .$$

$$\text{Вариант 11. } \int_1^2 \sin 0,5x \cdot \ln 4x dx .$$

$$\text{Вариант 12. } \int_0^2 \cos 0,2x \cdot e^{x^2} dx .$$

$$\text{Вариант 13. } \int_0^4 \sin 0,2x \cdot \sqrt{x+1} dx .$$

$$\text{Вариант 14. } \int_0^\pi \sin 2x \cdot (x + \sqrt{x}) dx .$$

$$\text{Вариант 15. } \int_1^3 \ln(4 + 2x + x^2) \cdot \sqrt{x} dx .$$

$$\text{Вариант 16. } \int_1^3 \sqrt{\sin 0,5x \cdot \ln 4x} dx .$$

$$\text{Вариант 17. } \int_1^2 e^{2x} \cdot \ln 0,5x dx .$$

$$\text{Вариант 18. } \int_1^4 \sin^2 x \cdot \ln 5x dx .$$

$$\text{Вариант 19. } \int_0^2 \ln(6 + x + x^2) \cdot x^3 dx .$$

$$\text{Вариант 20. } \int_1^6 \sin 0,2x \cdot \ln(x+3) dx .$$

Лабораторная работа № 11

Численное интегрирование. Метод двойного счета

В лабораторной работе № 10 были рассмотрены методы численного интегрирования: прямоугольников (левых, правых, средних), трапеций и Симпсона. Применяя любой из этих методов для получения приближенного значения определенного интеграла, необходимо оценить погрешность результата. А погрешности методов зависят от M_1 , M_2 или M_4 — наибольших по модулю значений первой, второй или четвертой производной подынтегральной функции соответственно. Нахождение этих величин может быть достаточно сложной задачей. Оказывается, можно обойтись и без оценки производных. Проведем нестрогие рассуждения.

Вычислим приближенное значение интеграла каким-либо методом дважды: с шагом h и с шагом в два раза меньшим, то есть $\frac{h}{2}$. Ясно, что второй расчет — более точный. Точное значение интеграла отличается от приближенного на величину погрешности. Дополнительную погрешность вносят вычисления значений подынтегральной функции и арифметические операции над приближенными числами (эти погрешности зависят от длины разрядной сетки вычислительной системы и, как правило, не превышают единицы последнего разряда в десятичной записи числа). Представим точное значение интеграла как сумму вида

$$I = I_h + \Delta_m + \Delta_e, \quad (11.1)$$

или

$$I = I_{\frac{h}{2}} + \Delta_m + \Delta_e, \quad (11.2)$$

где I — точное значение интеграла, I_h — приближенное значение интеграла с шагом h , $I_{\frac{h}{2}}$ — приближенное значение интеграла с шагом $\frac{h}{2}$, Δ_m — погрешность метода, Δ_e — погрешность вычислений подынтегральной функции и арифметических операций. Если интеграл находится с точностью, значительно уступающей длине разрядной сетки вычислительной системы, то погрешностью вычислений Δ_e можно пренебречь, так как она на несколько порядков меньше погрешности метода.

Для метода трапеций при выбранном шаге h сумма (11.1) имеет вид:

$$I = I_h + \frac{M_2 \cdot h^2 \cdot (b-a)}{12}, \quad (11.3)$$

где второе слагаемое есть погрешность метода (на самом деле — верхняя оценка этой погрешности). Соответственно для меньшего шага $\frac{h}{2}$ точное значение интеграла (11.2) будет представлено в виде:

$$I = I_{\frac{h}{2}} + \frac{M_2 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot (b-a)}{12}. \quad (11.4)$$

Из (11.3) вычтем (11.4):

$$I - I = I_h + \frac{M_2 \cdot h^2 \cdot (b-a)}{12} - \left(I_{\frac{h}{2}} + \frac{M_2 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot (b-a)}{12} \right);$$

$$0 = I_h - I_{\frac{h}{2}} + \frac{M_2 \cdot (b-a)}{12} \left(h^2 - \frac{h^2}{4} \right);$$

$$0 = I_h - I_{\frac{h}{2}} + 3 \cdot \frac{M_2 \cdot \frac{h^2}{4} \cdot (b-a)}{12}.$$

$$M_2 \cdot \frac{h^2}{4} \cdot (b-a)$$

Замечаем, что третье слагаемое здесь содержит множитель $\frac{h^2}{12}$ — погрешность

метода с шагом $\frac{h}{2}$. Обозначим данную погрешность $\Delta_{\frac{h}{2}}$. В результате получаем, что

$$\left| I_h - I_{\frac{h}{2}} \right| = 3 \cdot \Delta_{\frac{h}{2}}, \text{ или}$$

$$\Delta_{\frac{h}{2}} = \frac{\left| I_h - I_{\frac{h}{2}} \right|}{3}. \quad (11.5)$$

Формула (11.5) называется формулой оценки погрешности метода трапеций по *методу двойного счета* (или двойного пересчета).

Получили следующий алгоритм вычисления значения интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ и оценки

погрешности методом трапеций с использованием двойного счета:

1. Находим приближенное значение интеграла по формуле (10.13) с шагом h :

$$I_h \approx h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right).$$

2. Находим приближенное значение интеграла по формуле (10.13) с шагом $\frac{h}{2}$ (значит, количество частей, на которые разбит отрезок интегрирования $[a; b]$, удваивается):

$$I_{\frac{h}{2}} \approx \frac{h}{2} \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_{2n})}{2} + \sum_{i=1}^{2n-1} f(x_i) \right).$$

3. Вычисляем погрешность второго приближенного значения интеграла по формуле (11.5):

$$\Delta_{\frac{h}{2}} = \frac{\left| I_h - I_{\frac{h}{2}} \right|}{3}.$$

Аналогично показывается, что для метода Симпсона с шагом $\frac{h}{2}$ оценка погрешности может быть рассчитана по формуле:

$$\Delta_{\frac{h}{2}} = \frac{\left| I_h - I_{\frac{h}{2}} \right|}{15}, \quad (11.6)$$

где $\Delta_{\frac{h}{2}}$ — погрешность метода Симпсона с шагом $\frac{h}{2}$, I_h — приближенное значение

интеграла I с шагом h , $I_{\frac{h}{2}}$ — приближенное значение интеграла I с шагом $\frac{h}{2}$. Формула (11.6)

называется формулой оценки погрешности метода Симпсона по *методу двойного счета* (или двойного пересчета).

Получили следующий порядок вычисления значения интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ методом Симпсона (исходное количество n частей отрезка $[a; b]$ — четное):

1. Находим приближенное значение интеграла по формуле (10.16) с шагом h :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_n) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \bmod 2=1}}^{n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \bmod 2=0}}^{n-2} f(x_i) \right).$$

2. Находим приближенное значение интеграла по формуле (10.16) с шагом $\frac{h}{2}$ (значит, количество частей, на которые разбит отрезок интегрирования $[a; b]$ удваивается):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6} \left(f(x_0) + f(x_{2n}) + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \bmod 2=1}}^{2n-1} f(x_i) + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \bmod 2=0}}^{2n-2} f(x_i) \right).$$

3. Вычисляем погрешность второго приближенного значения интеграла по формуле (11.6):

$$\Delta_{\frac{h}{2}} = \frac{\left| I_h - I_{\frac{h}{2}} \right|}{15}.$$

Пример 1. Вычислим приближенно интеграл $I = \int_0^2 x^2 dx$ с шагом $h = 0,5$ и оценим погрешность.

Напомним, что точное значение интеграла равно $\int_0^2 x^2 dx = 2, (6)$.

Составляем таблицы значений подынтегральной функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[0; 2]$ с шагом $h = 1$ (табл. 1) и с шагом $\frac{h}{2} = 0,5$ (табл. 2).

Таблица 1. $h = 1$

x	0	1	2
$f(x)$	0	1	4

Таблица 2. $h/2 = 0,5$

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	0	0,25	1	2,25	4

1. Вычисляем приближенное значение интеграла с шагом $h = 1$: $I_h = 1 \cdot \left(\frac{0+4}{2} + 1 \right) = 3$.

2. Вычисляем приближенное значение интеграла с шагом $\frac{h}{2} = 0,5$:

$$I_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{0+4}{2} + 0,25 + 1 + 2,25 \right) = 2,75.$$

3. Вычисляем погрешность второго значения: $\Delta_{\frac{h}{2}} = \frac{|3 - 2,75|}{3} = 0,08(3) \leq 0,09$.

Таким образом, точное значение интеграла $I \in [2,75 - 0,09; 2,75 + 0,09] = [2,66; 2,84]$.

Теперь вычислим значение данного интеграла методом Симпсона. Воспользуемся теми же таблицами значений подынтегральной функции $f(x) = x^2$ (табл. 1, 2).

1. Вычисляем приближенное значение интеграла с шагом $h=1$: $I_h = \frac{1}{3} \cdot (0 + 4 \cdot 1 + 4) = \frac{8}{3}$.

2. Вычисляем приближенное значение интеграла с шагом $\frac{h}{2} = 0,5$:

$$I_{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} \cdot (0 + 4 \cdot 0,25 + 1 + 1 + 4 \cdot 2,25 + 4) = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$$

3. Вычисляем погрешность: $\Delta_{\frac{h}{2}} = 0$.

В этом примере метод Симпсона дает точное значение интеграла.

Пример 2. Вычислим с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$ интеграл $\int_0^2 2 \cdot e^{\cos 2x} dx$.

В отличие от предыдущих примеров в этой задаче задана точность. В начале вычислений методом трапеций или методом Симпсона разобьем отрезок интегрирования, например, на две части и вычислим интеграл (в методе трапеций можно вообще не разбивать). Затем разобьем отрезок интегрирования на четыре части, снова вычислим интеграл и оценим его погрешность по методу двойного счета. Если погрешность последнего вычисленного приближенного значения интеграла меньше заданной точности, то задача решена, иначе необходимо еще раз удвоить количество отрезков разбиения (уменьшить шаг вдвое), вычислить новый интеграл, оценить его погрешность, используя значения последнего и предпоследнего интегралов. Снова сравнить погрешность с заданной точностью. И так далее. Значит, уменьшать шаг в два раза и оценивать погрешность последнего из вычисленных интегралов надо до тех пор, пока погрешность не станет меньше заданной точности. Реализуем эту идею в среде Excel.

1) Метод трапеций

1. Выберем шаг $h=2$ и получим таблицу значений подынтегральной функции $f(x) = 2 \cdot e^{\cos 2x}$ на отрезке $[0; 2]$ (рис. 11.1).

B5		f(x)	=2*EXP(COS(2*A5))
A	B	C	D
1	h=	2	
2			
3	x	f(x)	
4	0	5,436564	
5	2	1,040294	
6			

Рис. 11.1. Исходная таблица в методе трапеций

A	B
h=	2
x	f(x)
0	5,436564
2	1,040294
I h	6,476858

Рис. 11.2. Значение интеграла

Рассчитаем приближенное значение интеграла I_h с выбранным шагом. В ячейку B7 введем формулу $\ll=2*(B4+B5)/2\rr$, соответствующую формуле метода трапеций. Получим: $I_h = 6,476858$ (рис. 11.2).

2. Теперь выбранный шаг делим пополам: $\frac{h}{2} = 1$, составляем еще одну таблицу значений функции $f(x)$ (рис. 11.3). В E8 вычисляем $I_{\frac{h}{2}}$: $\ll=E1*((E4+E6)/2+E5)\rr$ (рис. 11.4).

<i>f(x)</i>	=2*EXP(COS(2*D6))
D	E
<i>h</i> =	1
x	<i>f(x)</i>
0	5,436564
1	1,319167
2	1,040294

Рис. 11.3. Новая таблица

D	E
<i>h</i> =	1
x	<i>f(x)</i>
0	5,436564
1	1,319167
2	1,040294
<i>I h/2</i>	4,557596

Рис. 11.4. Новое значение

3. Осталось вычислить погрешность последнего приближенного значения. В C10 вводим формулу «=ABS(E8-B7)/3», получаем результат: $\Delta_{\frac{h}{2}} = 0,639754$ (рис. 11.5).

<i>I h</i>	6,476858	<i>I h/2</i>	4,557596
погр.	0,639754		

Рис. 11.5. Погрешность больше заданной точности

Полученная погрешность слишком велика: $0,639754 > \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-2}$. Следовательно, надо уменьшить шаг h . Примем за h последнее значение шага: $h = 1$, откуда $\frac{h}{2} = 0,5$ и повторим действия 1—3.

1. Для шага $h = 1$ у нас уже построена таблица значений подынтегральной функции, а также найдено приближенное значение интеграла $I_h = 4,557596$ (рис. 11.4), которое теперь является значением I_h .

2. Построим таблицу значений функции $f(x) = 2 \cdot e^{\cos 2x}$ на отрезке $[0; 2]$ с шагом $\frac{h}{2} = 0,5$ и найдем приближенное значение интеграла $I_{\frac{h}{2}}$ (рис. 11.6).

G	H
<i>h</i> =	0,5
x	<i>f(x)</i>
0	5,436564
0,5	3,433051
1	1,319167
1,5	0,743159
2	1,040294
<i>I h/2</i>	4,366903

Рис. 11.6. Новое значение интеграла

D	E	F	G	H
<i>h</i> =	1		<i>h</i> =	0,5
x	<i>f(x)</i>		x	<i>f(x)</i>
0	5,436564		0	5,436564
1	1,319167		0,5	3,433051
2	1,040294		1	1,319167
<i>I h/2</i>	4,557596		1,5	0,743159
			2	1,040294
			<i>I h/2</i>	4,366903
			погр.	0,063564

Рис. 11.7. Погрешность больше заданной точности

3. Рассчитаем полученную погрешность $\Delta_{\frac{h}{2}}$ в ячейке F12 (рис. 11.7). Опять получили, что $\Delta_{\frac{h}{2}} > \varepsilon$. Снова повторим действия 1—3.

- Примем за шаг $h = 0,5$, откуда $\frac{h}{2} = 0,25$. Аналогично, таблица значений функции для шага $h = 0,5$ уже построена (рис. 11.6), и известно приближенное значение интеграла $I_h = 4,366903$, которое расположено в ячейке H10 (рис. 11.7).
- Построим таблицу значений функции для шага $\frac{h}{2} = 0,25$ и найдем значение $I_{\frac{h}{2}}$ (рис. 11.8).
- Вычислим погрешность метода трапеций при $\frac{h}{2} = 0,25$ (рис. 11.8).

G	H	I	J	K
h=	0,5		h=	0,25
x	f(x)		x	f(x)
0	5,436564		0	5,436564
0,5	3,433051		0,25	4,810157
1	1,319167		0,5	3,433051
1,5	0,743159		0,75	2,146598
2	1,040294		1	1,319167
			1,25	0,897631
			1,5	0,743159
			1,75	0,784029
			2	1,040294
			I_h/2	4,343055
		погр.	0,007949	

Рис. 11.8. Заданная точность в методе трапеций достигнута

Получили: $\Delta_{\frac{h}{2}} < \varepsilon$, $\varepsilon = 10^{-2}$. Поэтому приближенное значение интеграла $I \approx 4,34$, где первая цифра после запятой является точной, а вторая — запасной.

2) Метод Симпсона

1—3. Воспользуемся имеющимися таблицами значений функции $f(x) = 2 \cdot e^{\cos 2x}$ на отрезке $[0; 2]$. Выберем шаг $h = 1$, тогда $\frac{h}{2} = 0,5$. Вычислим приближенные значения интегралов I_h и $I_{\frac{h}{2}}$, реализовав метод Симпсона в Excel (см. лабораторную работу № 10) (рис. 11.9).

Выделенные в рамку ячейки соответственно равны значениям I_h и $I_{\frac{h}{2}}$, а в ячейке F13 хранится погрешность метода $\Delta_{\frac{h}{2}}$. Получили: $\Delta_{\frac{h}{2}} > 10^{-2}$.

D	E	F	G	H	I
	h=	1		h=	0,5
x	f(x)		x	f(x)	
0	5,436563657		0	5,436563657	
1	1,319166825		0,5	3,433051399	20,48794
2	1,040294202		1	1,319166825	
			1,5	0,743158958	5,332097
I_h/2 (трап)	4,557595754		2	1,040294202	
I_h (симпс)	3,917841719				
			I_h/2 (трап)	4,366903056	
			I_h/2 (симпс)	4,303338823	
погр. (трап)	0,063564				
погр. (симпс)	0,0257				

Рис. 11.9. Оценка погрешности метода Симпсона по методу двойного счета

1—3. Проделаем еще раз аналогичные вычисления по нахождению интеграла по методу Симпсона для шагов $h = 0,5$ и $\frac{h}{2} = 0,25$ (рис. 11.10). Получаем значение погрешности в ячейке I17: $\Delta_{\frac{h}{2}} < 10^{-2}$. Следовательно, приближенное значение интеграла $I \approx 4,35$, где первая цифра после запятой является точной, а вторая — запасной, округленной по правилу пятерки.

G	H	I	J	K	L
	h=	0,5		h=	0,25
x	f(x)		x	f(x)	
0	5,436563657		0	5,436564	
0,5	3,433051399	20,48794	0,25	4,810157	28,11024
1	1,319166825		0,5	3,433051	
1,5	0,743158958	5,332097	0,75	2,146598	13,33861
2	1,040294202		1	1,319167	
			1,25	0,897631	5,652849
I_h/2 (трап)	4,366903056		1,5	0,743159	
I_h/2 (симпс)	4,303338823		1,75	0,784029	4,919568
			2	1,040294	
			I_h/2 (трап)	4,343055	
			I_h/2 (симпс)	4,335106	
погр. (трап)	0,007949				
погр. (симпс)	0,002118				

Рис. 11.10. Заданная точность в методе Симпсона достигнута

Подчеркнем еще раз, что верхние оценки абсолютных погрешностей методов трапеций и Симпсона (11.5) и (11.6) получены в результате нестрогих рассуждений. Оценки (11.5) и (11.6) являются асимптотическими: они стремятся к соответствующим верхним оценкам погрешностей при стремлении шага h к нулю. То есть они тем ближе к истинным верхним оценкам, чем меньше h . Таким образом, при достаточно большом значении шага h можно получить неверную верхнюю оценку.

Пример 3. Найдем приближенное значение интеграла $\int_0^2 (x^4 - 3x + 1)dx$ методом трапеций

и оценим погрешность по формуле (11.5) при $h = 1$.

При оценке погрешности по методу двойного счета с $h = 1$ потребуется и приближенное значение интеграла, для которого данный шаг является уже уменьшенным в два раза, то есть надо вычислить данный интеграл по формуле трапеций на всем отрезке интегрирования $[0; 2]$. Построим таблицу, использующуюся для обоих расчетов (табл. 3).

Таблица 3. $h = 2, h/2 = 1$

x	0	1	2
$f(x)$	1	-1	11

$$I_{h=2} = 2 \cdot \frac{1+11}{2} = 12, \quad I_{\frac{h}{2}=1} = 1 \cdot \left(\frac{1+11}{2} + (-1) \right) = 5, \quad \Delta_h = \frac{|12-5|}{3} = \frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}.$$

Казалось бы, точное значение интеграла должно принадлежать отрезку $\left[5 - 2 \frac{1}{3}; 5 + 2 \frac{1}{3}\right] = \left[2 \frac{2}{3}; 7 \frac{1}{3}\right]$. Но $\int_0^2 (x^4 - 3x + 1) dx = 2,4$, и это значение не попадает в полученный отрезок. Оценка погрешности по методу двойного счета в данном примере оказалась некорректной.

Определенные интегралы имеют огромное практическое значение: с их помощью рассчитываются площади плоских фигур, объемы, длины дуг, работа переменной силы и многие, многие другие величины. Покажем, как методы численного интегрирования можно использовать при вычислении логарифмов.

Пример 4. Вычислим приближенно $\ln 9$ с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$, то есть получим 7 верных знаков после запятой.

$\ln x = \int_0^{x-1} \frac{1}{t+1} dt$. Действительно, $\int_0^{x-1} \frac{1}{t+1} dt = \ln(t+1)|_0^{x-1} = \ln x - \ln 1 = \ln x$. Найдем $\ln 9$ как

$\int_0^8 \frac{1}{x+1} dx$ приближенно с точностью $\varepsilon = 10^{-8}$. Будем использовать метод Симпсона, как

наиболее точный из рассмотренных. Можно оценивать погрешность по методу двойного счета, но подынтегральная функция достаточно простая, поэтому оценим погрешность

с помощью формулы (10.17): $M_4 = \max_{x \in [a; b]} |f''(x)| = \max_{x \in [0; 8]} \frac{24}{(x+1)^5} = 24$,

$\frac{M_4 \cdot h^4 \cdot (b-a)}{180} = \frac{24 \cdot h^4 \cdot 8}{180} = \frac{16}{15} \cdot h^4$. Вывясним, при каком шаге интегрирования погрешность

будет меньше заданной точности:

$$\frac{16}{15} \cdot h^4 < 10^{-8}, \quad h^4 < \frac{15}{16} \cdot 10^{-8}, \quad h < \frac{\sqrt[4]{15}}{200}.$$

Поскольку $h = 1/200$ удовлетворяет последнему неравенству, то вычислим интеграл приближенно методом Симпсона с шагом $h = 1/200 = 0,005$. Получим: $I \approx 2,19722458$. Результат записан со всеми верными цифрами и одной запасной. Значит, $\ln 9 \approx 2,19722458$. Как известно, в записи десятичной дроби в *Excel* хранится 14 знаков после запятой, поэтому в данном примере вычислительной погрешностью можно пренебречь.

Задание для самостоятельной работы

Вычислите в *Excel* указанный интеграл приближенно методом трапеций и методом Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$. Для каждого метода оцените количество отрезков разбиения, при котором достигается заданная точность. Результат запишите с верными цифрами и одной запасной. Используйте варианты лабораторной работы № 10.

Лабораторная работа № 12

Численное решение задачи Коши 1-го порядка

Пусть требуется решить дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y) \quad (12.1)$$

при условии, что искомая функция $y = y(x)$ удовлетворяет требованию

$$y(x_0) = y_0. \quad (12.2)$$

Задача нахождения функции $y = y(x)$, удовлетворяющей уравнению (12.1) и начальному условию (12.2) называется *задачей Коши 1-го порядка*. Геометрически решение задачи Коши означает выделение из целого семейства интегральных кривых $y = y(x, C)$, удовлетворяющих (12.1), кривой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ (рис. 12.1).

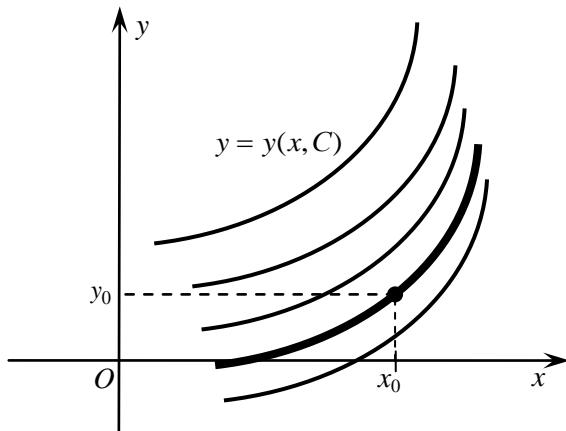


Рис. 12.1. Геометрическая интерпретация решения задачи Коши 1-го порядка

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши 1-го порядка дает следующее утверждение.

Теорема (теорема Коши). *Если функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области D плоскости xOy и имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках этой области, то какова бы ни была точка $(x_0; y_0)$, принадлежащая D , всегда существует и при том единственная функция $y = \varphi(x)$, которая определена и непрерывна в некотором интервале, содержащем точку x_0 , является решением уравнения $y' = f(x, y)$ и принимает при $x = x_0$ значение y_0 .*

Некоторые дифференциальные уравнения (12.1) удается решить аналитически, то есть получить формулу $y = y(x, C)$. Основной прием при этом — сведение уравнений к уравнениям с разделяющимися переменными с последующим интегрированием. Однако, как известно, неопределенный интеграл, выраженный в элементарных функциях, удается получить не всегда, и не всегда удается свести (12.1) к уравнению с разделяющимися переменными. В таких случаях необходимо использовать численные методы. Решить задачу Коши 1-го порядка численно значит найти приближенное решение в виде таблицы (табл. 1), в которой начальная точка $(x_0; y_0)$ — начальное условие (12.2).

Таблица 1. Таблица приближенных значений функции $y = y(x)$

x_i	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y_i	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

Метод Эйлера

Будем строить табл. 1 с некоторым шагом $h > 0$. Тогда $x_1 = x_0 + h$. Пусть решение задачи Коши (12.1)–(12.2) существует и единственno в некоторой окрестности точки x_0 , и точка $x_1 = x_0 + h$ принадлежит этой окрестности. Вычислим y_1 для таблицы, заменив участок искомой интегральной кривой $y = y(x)$ на участок касательной к графику $y = y(x)$, построенной в точке x_0 (рис. 12.2). Найдем $y(x_1)$ приближенно как ординату y_1 построенной касательной, вычисленную в точке x_1 (рис. 12.2).

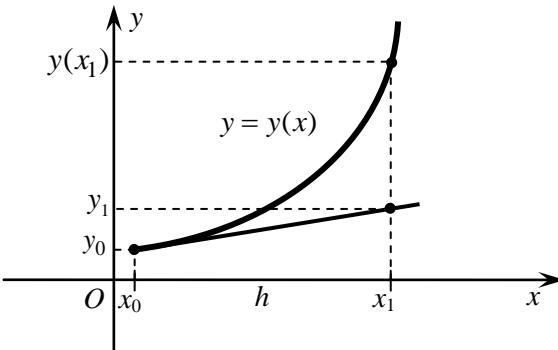


Рис. 12.2. Замена участка интегральной кривой участком касательной

Уравнение касательной к графику $y = y(x)$, построенной в точке x_0 , имеет вид

$$y = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0). \quad (12.3)$$

Здесь из (12.2) получаем $y(x_0) = y_0$, а из (12.1) — $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Тогда уравнение (12.3) имеет вид

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \quad (12.4)$$

откуда при $x = x_1$ вычисляем $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. Получили формулы перехода от точки $(x_0; y_0)$ из табл. 1 к точке $(x_1; y_1)$:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h, \\ y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0). \end{cases} \quad (12.5)$$

По рис. 12.2 видим, что точное значение искомой функции $y(x_1)$ существенно отличается от вычисленного y_1 . Таким образом, предложенная замена $y(x_1)$ на y_1 повлекла возникновение существенной погрешности.

Если решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_1) = y_1$$

существует и единственno в некоторой окрестности точки x_1 , то через точку $(x_1; y_1)$ проходит единственная кривая из семейства интегральных кривых $y = y(x, C)$ уравнения $y' = f(x, y)$ (рис. 12.3). Пусть точка $x_2 = x_1 + h$ принадлежит указанной окрестности точки x_1 . Построим касательную к новой интегральной кривой в точке x_1 . Найдем $y(x_2)$ приближенно как ординату y_2 этой касательной, вычисленную в точке x_2 (рис. 12.3). По аналогии с формулами (12.5) получим формулы перехода от точки $(x_1; y_1)$ к точке $(x_2; y_2)$ табл. 1:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + h, \\ y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1). \end{cases} \quad (12.6)$$

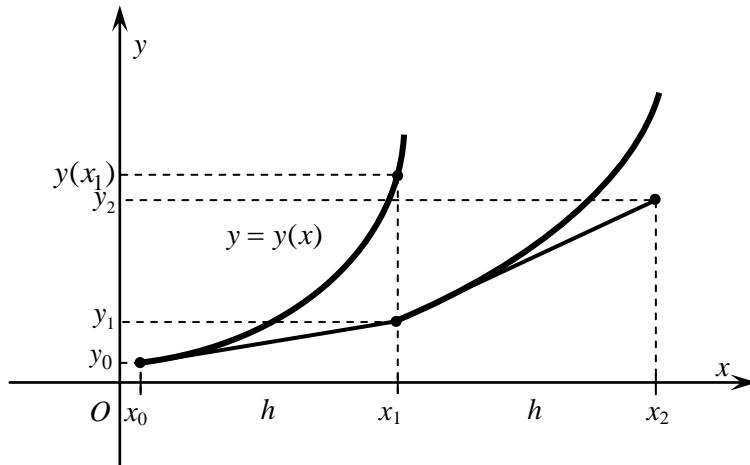


Рис. 12.3. Геометрическая интерпретация получения точки $(x_2; y_2)$

Рассуждая аналогично, можно получить общие формулы перехода от точки $(x_i; y_i)$ к точке $(x_{i+1}; y_{i+1})$ табл. 1:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (12.7)$$

Метод нахождения точек табл. 1 по формулам (12.7) называется *методом Эйлера*. Если точки из табл. 1, полученные методом Эйлера, соединить отрезками, получим ломаную, называемую *ломаной Эйлера*. На рис. 12.4 показано возможное расположение искомой интегральной кривой и ломаной Эйлера.

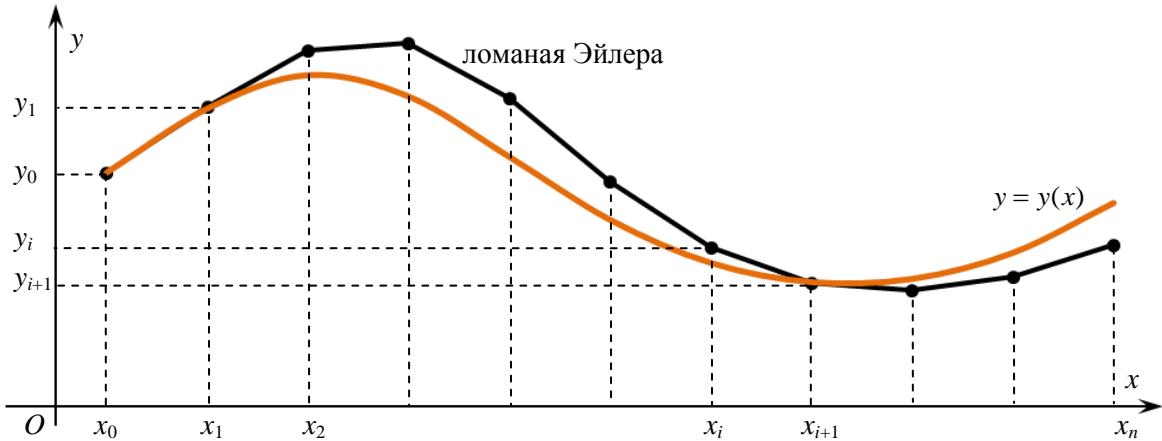


Рис. 12.4. Интегральная кривая и ломаная Эйлера

Пример 1. Найдем методом Эйлера решение задачи Коши $y' = 3x^2 - 16x + 19$, $y(1) = 0$ на отрезке $[1; 4]$ с различными значениями шага и сравним полученные результаты с точным решением.

Сначала получим точное решение данной задачи (в данном примере это легко сделать). Решением уравнения $y' = 3x^2 - 16x + 19$ является семейство интегральных кривых $y = x^3 - 8x^2 + 19x + C$, из которого согласно начальному условию $y(1) = 0$ выделяется единственная: $y = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$, так как $y(1) = 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 19 \cdot 1 + C = 0$, откуда $C = -12$.

Найдем методом Эйлера приближенное решение данной задачи в виде таблицы искомой функции с шагом $h = 0,5$. Здесь $f(x, y) = 3x^2 - 16x + 19$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. По формулам (12.7) последовательно находим:

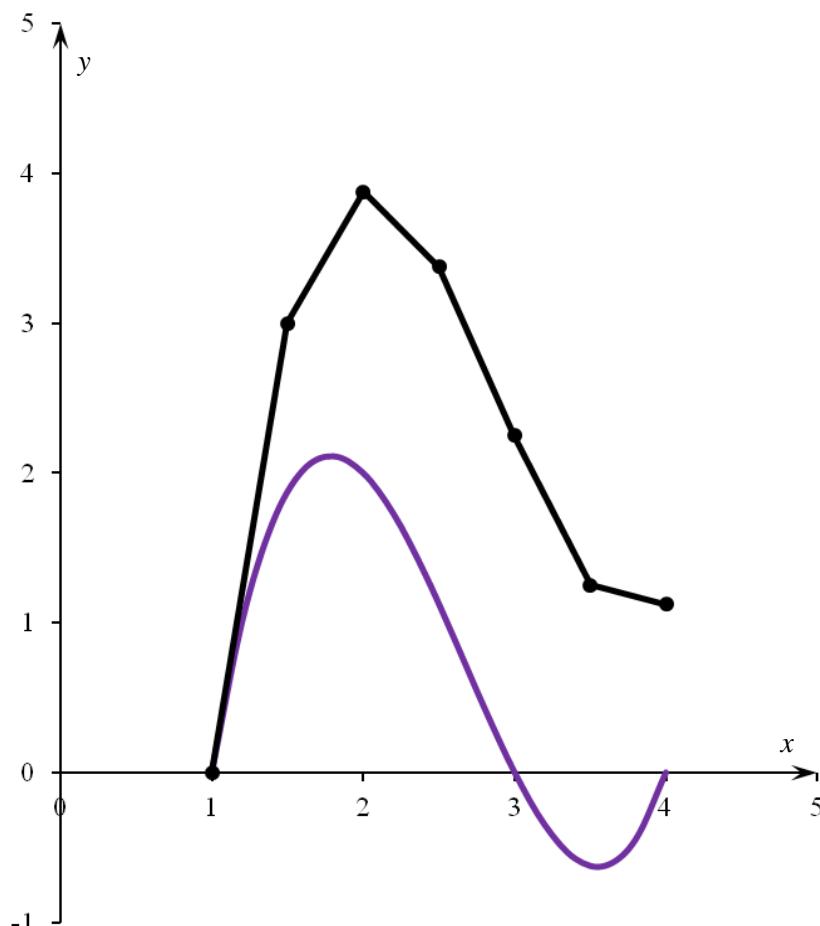
$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + 0,5 = 1,5, \\ y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0 + 0,5 \cdot (3 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 19) = 3, \end{cases} \\
 & \begin{cases} x_2 = x_1 + h = 1,5 + 0,5 = 2, \\ y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 3 + 0,5 \cdot (3 \cdot 1,5^2 - 16 \cdot 1,5 + 19) = 3,875, \end{cases} \\
 & \begin{cases} x_3 = x_2 + h = 2 + 0,5 = 2,5, \\ y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 3,875 + 0,5 \cdot (3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 19) = 3,375, \end{cases} \\
 & \begin{cases} x_4 = x_3 + h = 2,5 + 0,5 = 3, \\ y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 3,375 + 0,5 \cdot (3 \cdot 2,5^2 - 16 \cdot 2,5 + 19) = 2,25, \end{cases} \\
 & \begin{cases} x_5 = x_4 + h = 3 + 0,5 = 3,5, \\ y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 2,25 + 0,5 \cdot (3 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 19) = 1,25, \end{cases} \\
 & \begin{cases} x_6 = x_5 + h = 3,5 + 0,5 = 4, \\ y_6 = y_5 + h \cdot f(x_5, y_5) = 1,25 + 0,5 \cdot (3 \cdot 3,5^2 - 16 \cdot 3,5 + 19) = 1,125. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Полученные результаты вносим в таблицу (табл. 2):

Таблица 2. Таблица приближенного решения

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0	3	3,875	3,375	2,25	1,25	1,125

Построим ломаную Эйлера на одном чертеже с точным решением (рис. 12.5).



По рис. 12.5 хорошо видно, как из-за большого шага по касательной уже первая точка после начальной сильно отличается от соответствующей точки интегральной кривой.

Уменьшим шаг: $h = 0,2$. Вычисления проведем в Excel, выполнив для этого идущие ниже шаги. Таблицу расположим вертикально.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи аргумента, приближенного и точного значения функции (рис. 12.6). В ячейку E1 введем значение шага 0,2.

2. В строке 2 в A2 и B2 введем координаты начальной точки: 1 и 0. В ячейке C2 вычислим точное значение функции — введем формулу $\ll=A2^3-8*A2*A2+19*A2-12$.

3. В ячейке A3 набираем формулу расчета аргумента таблицы с учетом дальнейшего копирования вниз: $\ll=A2+\$E\1 . Это первая их формул (12.7) — $x_{i+1} = x_i + h$.

4. В ячейку B3 набираем вторую из формул (12.7) — $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$, в данном случае — $y_{i+1} = y_i + h \cdot (3x_i^2 - 16x_i + 19)$ с учетом дальнейшего копирования вниз: $\ll=B2+\$E\$1*(3*A2*A2-16*A2+19)$ (рис. 12.6).

	A	B	C	D	E	F
1	x_i	y_i	y(x)		h=0,2	
2	1	0	0			
3	1,2		=B2+\$E\$1*(3*A2*A2-16*A2+19)			
4						

Рис. 12.6. Подписи, начальные данные, шаг в задаче Коши $y' = 3x^2 - 16x + 19$, $y(1) = 0$

5. «Выравниваем» формулы в строке 3 (копируем C2 в C3), выделяем диапазон A3:C3 и копируем вниз до тех пор, пока в столбце А аргумента не появится число 4 (рис. 12.7).

	A	B	C	D	E	F
1	x_i	y_i	y(x)	h= 0,2		
2	1	0	0			
3	1,2	1,2	1,008			
4	1,4	2,024	1,664			
5	1,6	2,52	2,016			
6	1,8	2,736	2,112			
7	2	2,72	2			
8	2,2	2,52	1,728			
9	2,4	2,184	1,344			
10	2,6	1,76	0,896			
11	2,8	1,296	0,432			
12	3	0,84	0			
13	3,2	0,44	-0,352			
14	3,4	0,144	-0,576			
15	3,6	2,78E-15	-0,624			
16	3,8	0,056	-0,448			
17	4	0,36	0			
18						

Рис. 12.7. Построение таблицы приближенных и точных значений

6. Построим на одной диаграмме ломаную Эйлера и интегральную кривую (рис. 12.8).

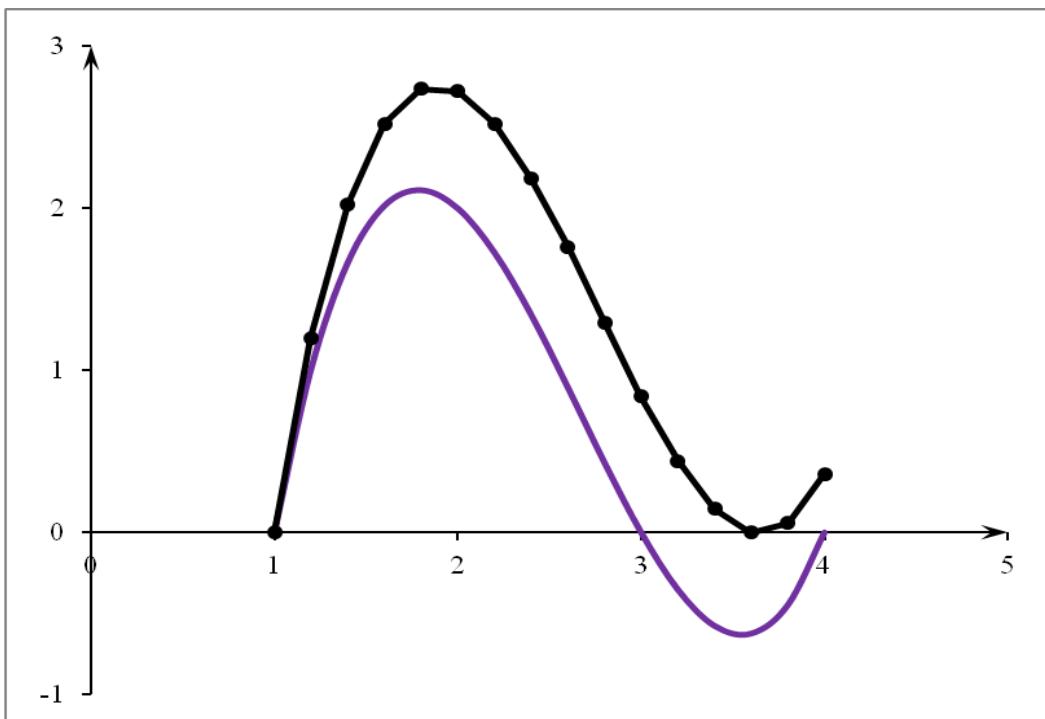


Рис. 12.8. Диаграмма ломаной Эйлера и интегральной кривой

Видим, что с уменьшением шага уменьшилась и погрешность.

Продолжим эксперименты с уменьшением шага. Получим приближенное решение данной задачи при $h=0,1$. В Excel это можно сделать очень быстро: выделим диапазон, содержащий только что построенную таблицу и шаг, то есть A1:E17, скопируем его и вставим, начиная с ячейки F1. В диапазоне F1:J17 появится копия A1:E17. В копиях формул останутся неизменными абсолютные (фиксированные) ссылки на адрес ячейки \$E\$1, в которой хранится шаг предыдущей таблицы, а относительные ссылки будут ссылаться на нужные ячейки. Поэтому надо, во-первых, изменить шаг в J1 с 0,2 на 0,1, а во-вторых, в F3 и G3 адрес \$E\$1 изменить на \$J\$1. После этого исправленные формулы надо скопировать вниз на всю имеющуюся длину таблицы и продолжить копирование, пока аргумент не станет равен 4. Добавим на имеющуюся диаграмму новый ряд данных — таблицу с шагом 0,1.

Добавление нового ряда данных состоит из описанных ниже шагов.

1. Выделяем область построения диаграммы и правой кнопкой мыши вызываем контекстное меню, выбираем **Выбрать данные...** (рис. 12.9).

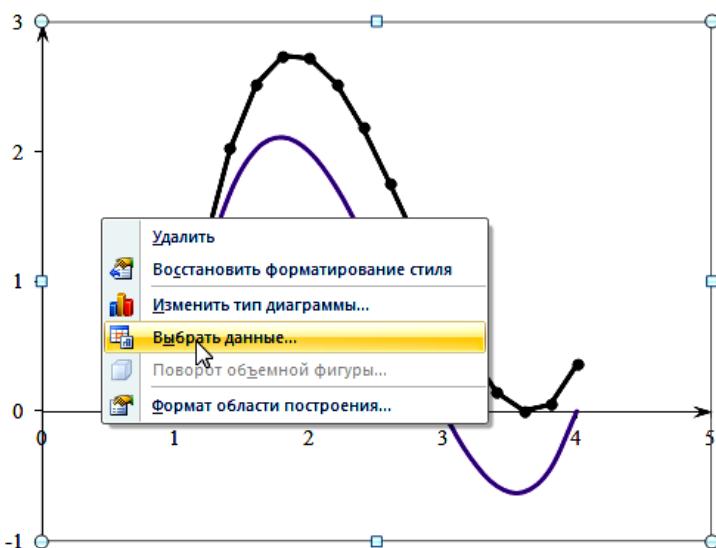


Рис. 12.9. Контекстное меню области построения диаграммы

2. В открывшемся диалоговом окне **Выбор источника данных** выбираем пункт **Добавить** (рис. 12.10).

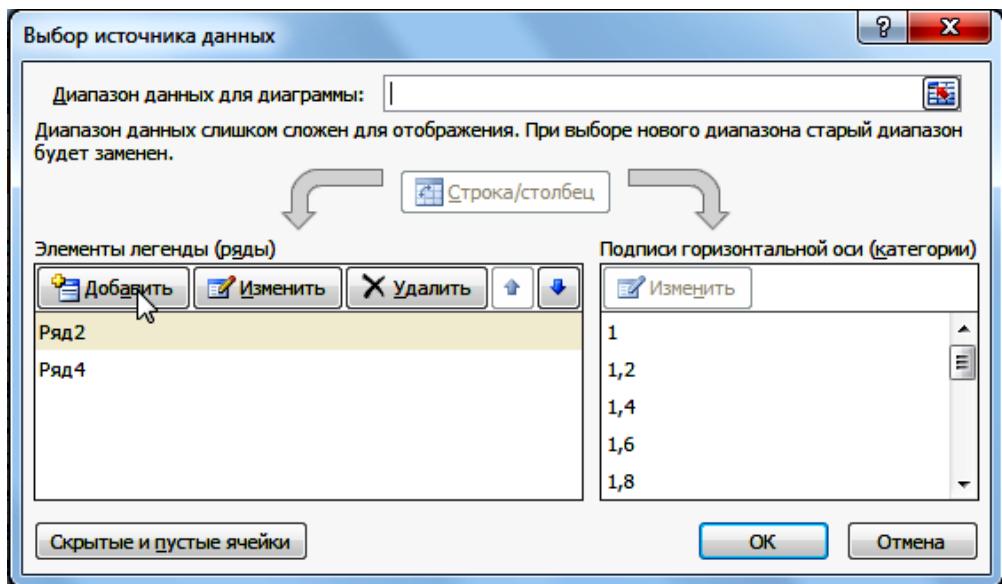


Рис. 12.10. Диалоговое окно **Выбор источника данных**

3. В диалоговом окне **Изменение ряда** дадим имя новому ряду, например, « $h = 0,1$ », в окне **Значения X** протащим мышь по ячейкам со значениями аргумента в столбце F, а в строке **Значения Y** — с приближенными значениями у в столбце G (рис. 12.11). После этого на диаграмме появится новая ломаная Эйлера (рис. 12.12). Она будет располагаться ближе к точному решению, чем предыдущая. В диаграмму на рис. 12.12 для наглядности добавлен еще один ряд данных — таблица 2 с шагом $h = 0,5$, рассчитанная ранее вручную.

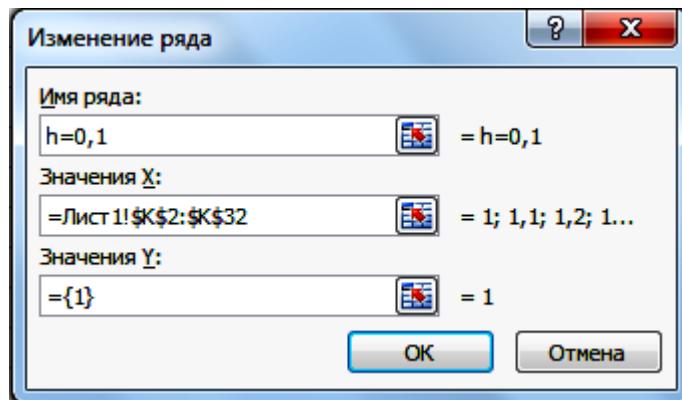


Рис. 12.11. Добавление нового ряда данных

Таким образом, видно, что погрешность метода Эйлера зависит от шага: чем меньше шаг, тем меньше и погрешность. Доказано, что погрешность метода Эйлера стремится к нулю с той же скоростью, что и шаг. То есть уменьшение шага, например, в 10 раз вызывает уменьшение погрешности примерно в 10 раз (это выполняется тем точнее, чем меньше шаг).

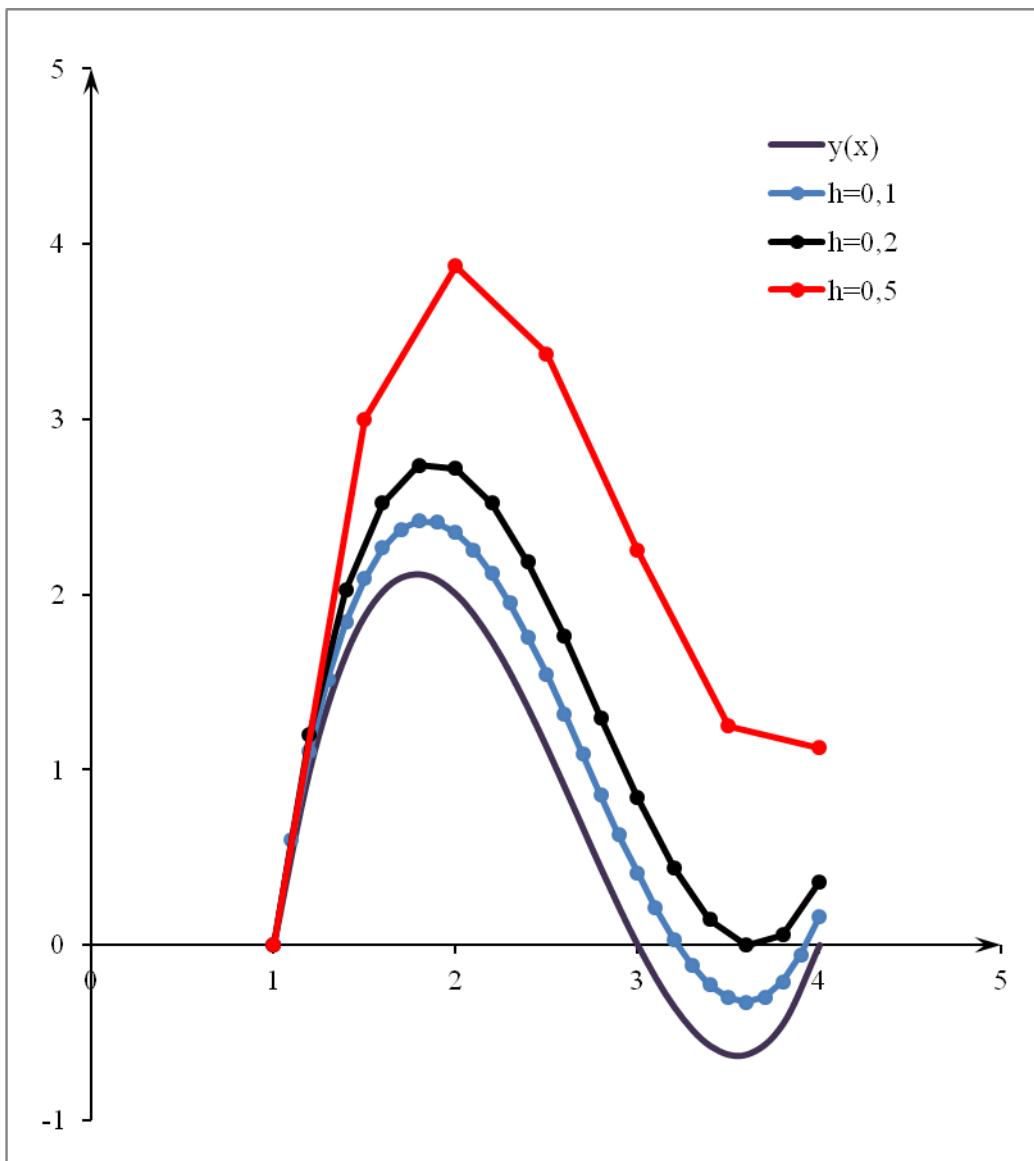


Рис. 12.12. Несколько рядов данных на одной диаграмме

Пример 2. Решим численно задачу Коши $y' = 3x\sqrt[3]{y}$, $y(-1) = -1$ на отрезке $[-1; 2]$ методом Эйлера с различными значениями шага: $h = 0,5$, $h = 0,2$, $h = 0,1$.

На рис. 12.13 показаны ломаные Эйлера, полученные в *Excel* и соответствующие различным значениям шага (получите их самостоятельно). Ломаные существенно отличаются друг от друга. Может быть, все дело в большом первом шаге $h = 0,5$, а при уменьшении шага такого существенно различного поведения ломаных не будет? На рис. 12.14 показаны две ломаные Эйлера при $h = 0,085$, $h = 0,086$. Значения этих шагов достаточно малы и близки друг к другу, но приближенные решения кардинально отличаются. Увеличим участок диаграммы в районе начала координат (рис. 12.15), уберем маркеры с ломаных. Видим, что в некоторой окрестности оси Ox (прямой $y = 0$) ломаные как будто «мечутся», перескакивая с одной стороны оси Ox на другую. И в результате удаляются друг от друга.

Проверим выполнение условий теоремы существования и единственности решения задачи Коши:

- функция $f(x, y) = 3x\sqrt[3]{y}$ определена и непрерывна всюду на плоскости xOy ;
- ее частная производная по y $\frac{\partial f}{\partial y} = \left(3x\sqrt[3]{y}\right)'_y = \frac{x}{\sqrt[3]{y^2}}$ не определена при $y = 0$, то есть в точках оси Ox .

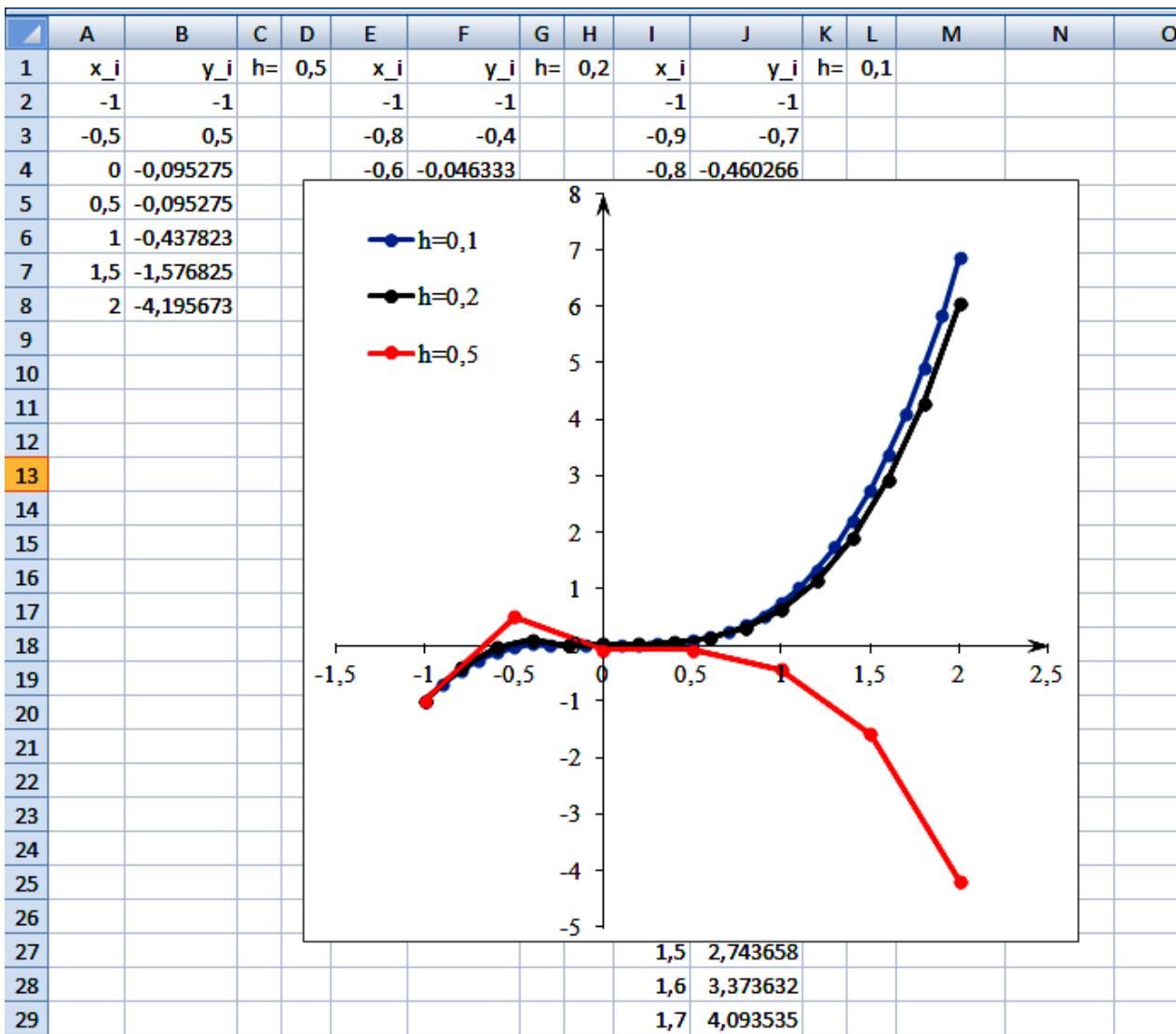


Рис. 12.13. Решение задачи Коши $y' = 3\sqrt[3]{y}$, $y(-1) = -1$ методом Эйлера при $h = 0,5$, $h = 0,2$, $h = 0,1$

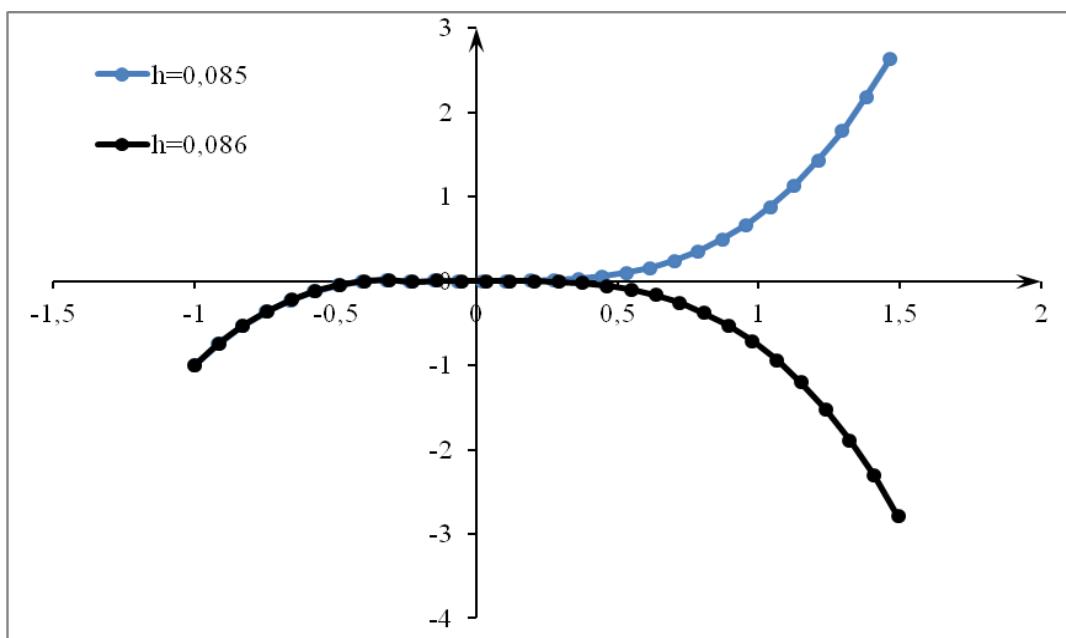


Рис. 12.14. Решение задачи Коши $y' = 3\sqrt[3]{y}$, $y(-1) = -1$ методом Эйлера при $h = 0,085$, $h = 0,086$

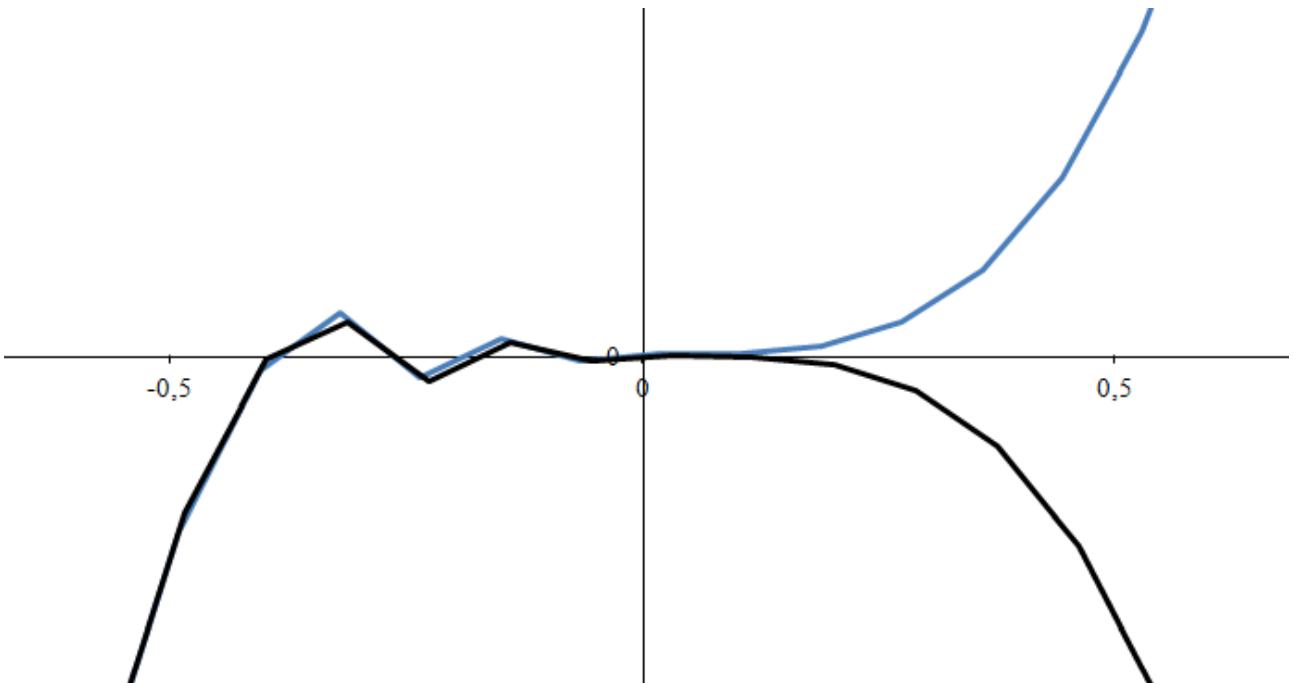


Рис. 12.15. Увеличенный фрагмент диаграммы с рис. 12.14

Таким образом, $\frac{\partial f}{\partial y}$ не является непрерывной в любой области, содержащей участок оси Ox . Условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши в такой области не выполняются. Поэтому существование и единственность этого решения не гарантируется. На рис. 12.15 наблюдаются резкие изменения в поведении ломаных Эйлера, приближающих искомую интегральную кривую, именно при пересечении оси Ox .

Данное дифференциальное уравнение $y' = 3x^3\sqrt[3]{y}$ — уравнение с разделяющимися переменными. Решим его точно.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^3\sqrt[3]{y}, \\ \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} &= 3x^3 dx, \text{ если } y \neq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $y = 0$ — решение данного дифференциального уравнения. Далее

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} &= \int 3x^3 dx, \\ \frac{\sqrt[3]{y^2}}{2/3} &= \frac{3x^2}{2} + C, \\ \sqrt[3]{y^2} &= x^2 + C_1 \quad \text{общее решение.} \end{aligned}$$

Выразив из последнего равенства y в явном виде, получаем:

$$y = \pm \sqrt{(x^2 + C_1)^3}.$$

На рис. 12.16 изображены интегральные кривые при различных значениях C_1 .

Решая данную задачу Коши, из начального условия $y(-1) = -1$ находим $C_1: -1 = \pm \sqrt[3]{((-1)^2 + C_1)^3}$, откуда $C_1 = 0$ и находим решение $y = x^3$. Видим, что решение задачи Коши $y' = 3x^3\sqrt[3]{y}$, $y(-1) = -1$ на отрезке $[-1; 2]$ существует, но не единственно: на отрезке $[-1; 0]$ интегральная кривая единственна ($y = x^3$), а на отрезке $[0; 2]$ ее продолжением может

быть любая из трех кривых $y = x^3$, $y = -x^3$, $y = 0$ (на рис. 12.16 изображены утолщенными линиями).

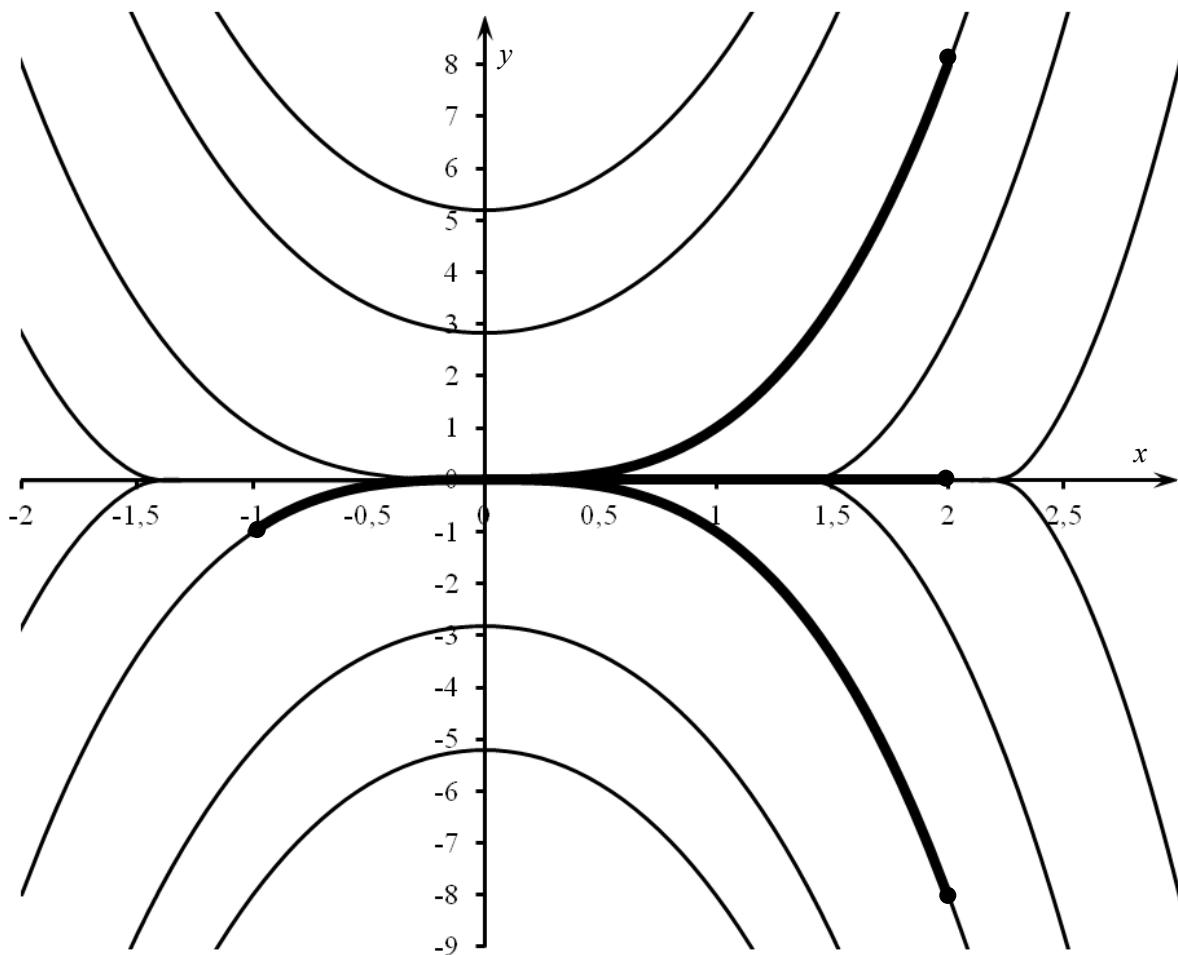


Рис. 12.16. Интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = 3x^3\sqrt{y}$

Теперь понятно поведение ломаных Эйлера на рис. 12.15 при отрицательных x : отрезок касательной к возрастающей траектории $y = -\sqrt{(x^2 + C_1)^3}$ пересекает ось Ox и заканчивается точкой, принадлежащей убывающей траектории $y = \sqrt{(x^2 + C_1)^3}$ (разумеется, при другом значении C_1) и так далее.

В примере 1 не вставал вопрос о существовании и единственности решения задачи Коши. Точное решение было найдено однозначно, следовательно, оно — единственno. В случаях, когда трудно или невозможно найти точное решение, вопрос существования и единственности решения задачи (12.1), (12.2) должен быть решен до начала применения численного метода.

Метод двойной аппроксимации (метод Эйлера — Коши)

При численном интегрировании и дифференцировании функций (см. лабораторные работы № 9 и 10) было замечено уменьшение погрешности при выборе в качестве приближенного значения искомой величины некоторого усредненного значения: дифференцирование на основе центральных разностей является более точным, чем при использовании односторонних приращений; метод трапеций численного интегрирования, использующий значения подынтегральной функции на обоих концах отрезка интегрирования, оказывается более точ-

ным, чем методы левых и правых прямоугольников, использующие только одно из этих значений. Поступим аналогично при численном решении задачи Коши.

В формуле $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$ приближенное приращение $h \cdot f(x_0, y_0)$ функции $y = y(x)$ в точке x_0 , вычисленное как приращение касательной к графику $y = y(x)$ в точке x_0 , заменим на среднее арифметическое приращений касательных в точках x_0 и $x_1 = x_0 + h$:

$$y_1 = y_0 + \frac{h \cdot f(x_0, y_0) + h \cdot f(x_1, y(x_1))}{2}. \quad (12.8)$$

Проблема в том, что в (12.8) точное значение $y(x_1)$ неизвестно, и практически применить формулу (12.8) нельзя. Поэтому найдем $y(x_1)$ приближенно методом Эйлера

$$y(x_1) \approx \tilde{y}_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

и подставим \tilde{y}_1 вместо $y(x_1)$ в формулу (12.8):

$$y_1 = y_0 + \frac{h \cdot f(x_0, y_0) + h \cdot f(x_1, \tilde{y}_1)}{2}. \quad (12.9)$$

Геометрическая интерпретация получения y_1 по формуле (12.9) дана на рис. 12.17.

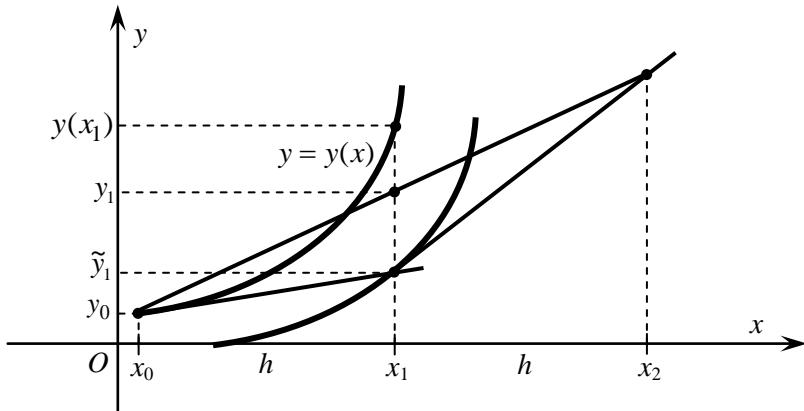


Рис. 12.17. Геометрическая интерпретация формулы (12.9)

Запишем формулу (12.9) по-другому:

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0) + \frac{h}{2} \cdot f(x_1, \tilde{y}_1). \quad (12.10)$$

Геометрическая интерпретация формулы (12.10) дана на рис. 12.18. По формуле (12.10) y_0 сначала получает приращение $\frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0)$ по касательной, построенной к интегральной кривой в точке x_0 , до середины отрезка $[x_0; x_1]$, а затем — приращение $\frac{h}{2} \cdot f(x_1, \tilde{y}_1)$ по касательной, построенной к интегральной кривой в точке x_1 , до конца отрезка $[x_0; x_1]$. Поэтому касательная перенесена из точки $(x_1; \tilde{y}_1)$ в точку $\left(x_0 + \frac{h}{2}; \frac{y_0 + \tilde{y}_1}{2}\right)$.

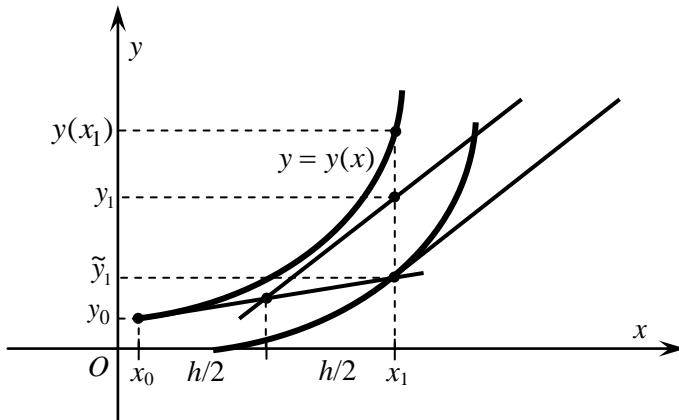


Рис. 12.18. Геометрическая интерпретация формулы (12.10)

По рис. 12.17 или 12.18 видим, что точка $(x_1; y_1)$, ордината y_1 которой вычислена по формуле (12.9) или (12.10), значительно ближе к точке $(x_1; y(x_1))$, чем точка $(x_1; \tilde{y}_1)$, ордината \tilde{y}_1 которой вычислена методом Эйлера, то есть по формуле (12.5) (это \tilde{y}_1 на рис. 12.17, 12.18).

Обобщая формулу (12.10), можно записать формулы перехода от точки $(x_i; y_i)$ к точке $(x_{i+1}; y_{i+1})$ табл. 1 (вычислительную схему метода):

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (12.11)$$

Метод получения точек табл. 1 по формулам (12.11) называется *методом Эйлера — Коши* или *методом двойной аппроксимации*.

Пример 3. Найдем методом двойной аппроксимации решение задачи Коши $y' = 3x^2 - 16x + 19$, $y(1) = 0$ на отрезке $[1; 4]$ с различными значениями шага и сравним полученные результаты с точным решением.

Так же, как и в примере 1, проведем расчеты с шагом $h = 0,5$ вручную, а с шагами $h = 0,2$ и $h = 0,1$ — в Excel. Здесь $f(x, y) = 3x^2 - 16x + 19$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$. По формулам (12.11) последовательно находим:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 1 + 0,5 = 1,5, \\ \tilde{y}_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 0 + 0,5 \cdot (3 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 19) = 3, \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)) = 0 + \frac{0,5}{2} \cdot ((3 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 19) + (3 \cdot 1,5^2 - 16 \cdot 1,5 + 19)) = 1,9375, \end{cases} \\ &\begin{cases} x_2 = x_1 + h = 1,5 + 0,5 = 2, \\ \tilde{y}_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,9375 + 0,5 \cdot (3 \cdot 1,5^2 - 16 \cdot 1,5 + 19) = 2,8125, \\ y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_1, y_1) + f(x_2, \tilde{y}_2)) = 1,9375 + \frac{0,5}{2} \cdot ((3 \cdot 1,5^2 - 16 \cdot 1,5 + 19) + (3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 19)) = 2,125, \end{cases} \\ &\begin{cases} x_3 = x_2 + h = 2 + 0,5 = 2,5, \\ \tilde{y}_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 2,125 + 0,5 \cdot (3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 19) = 1,625, \\ y_3 = y_2 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_2, y_2) + f(x_3, \tilde{y}_3)) = 2,125 + \frac{0,5}{2} \cdot ((3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 19) + (3 \cdot 2,5^2 - 16 \cdot 2,5 + 19)) = 1,3125, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_4 = x_3 + h = 2,5 + 0,5 = 3, \\ \tilde{y}_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1,3125 + 0,5 \cdot (3 \cdot 2,5^2 - 16 \cdot 2,5 + 19) = 0,1875, \\ y_4 = y_3 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_3, y_3) + f(x_4, \tilde{y}_4)) = 1,3125 + \frac{0,5}{2} \cdot ((3 \cdot 2,5^2 - 16 \cdot 2,5 + 19) + (3 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 19)) = 0,25, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = x_4 + h = 3 + 0,5 = 3,5, \\ \tilde{y}_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 0,25 + 0,5 \cdot (3 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 19) = -0,75, \\ y_5 = y_4 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_4, y_4) + f(x_5, \tilde{y}_5)) = 0,25 + \frac{0,5}{2} \cdot ((3 \cdot 3^2 - 16 \cdot 3 + 19) + (3 \cdot 3,5^2 - 16 \cdot 3,5 + 19)) = -0,3125, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_6 = x_5 + h = 3,5 + 0,5 = 4, \\ \tilde{y}_6 = y_5 + h \cdot f(x_5, y_5) = -0,3125 + 0,5 \cdot (3 \cdot 3,5^2 - 16 \cdot 3,5 + 19) = -0,4375, \\ y_6 = y_5 + \frac{h}{2} \cdot (f(x_5, y_5) + f(x_6, \tilde{y}_6)) = -0,3125 + \frac{0,5}{2} \cdot ((3 \cdot 3,5^2 - 16 \cdot 3,5 + 19) + (3 \cdot 4^2 - 16 \cdot 4 + 19)) = 0,375. \end{cases}$$

Полученные результаты вносим в таблицу (табл. 3):

Таблица 3. Таблица приближенного решения методом Эйлера — Коши

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y_i	0	1,9375	2,125	1,3125	0,25	-0,3125	0,375

Построим ломаную, соединяющую точки из табл. 3, на одном чертеже с точным решением (рис. 12.19).

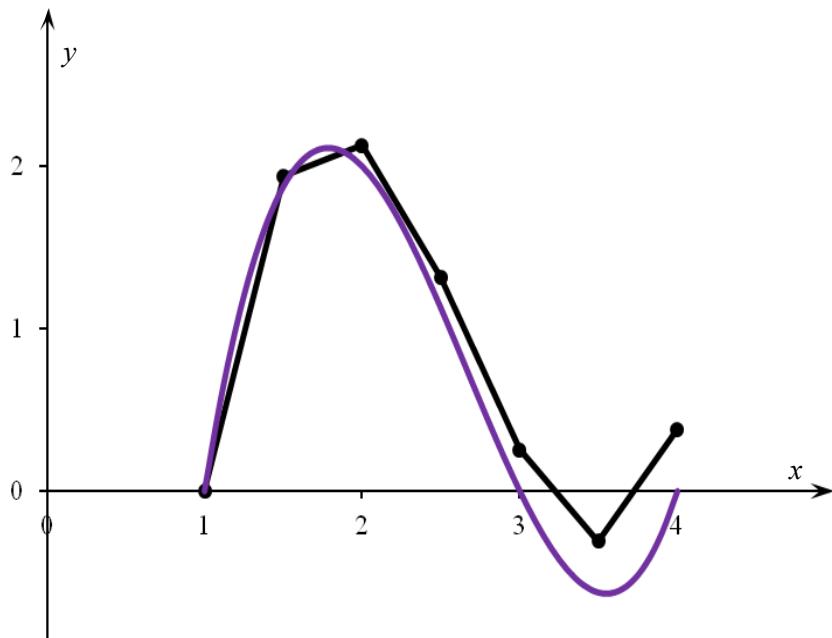


Рис. 12.19. Интегральная кривая и приближенное решение методом Эйлера — Коши

Видим, что метод двойной аппроксимации оказался гораздо точнее метода Эйлера (рис. 12.5).

В Excel в отдельных столбцах будем вычислять x_i , $f(x_i, y_i)$, \tilde{y}_{i+1} , $f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, y_i . Это позволит избежать повторений в формулах.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи x_i , $f(x_i, y_i)$, \tilde{y}_{i+1} , $f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, y_i (например, как на рис. 12.20). В ячейку G1 введем значение шага 0,2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	f(x_i, y_i)	y_i+1_pr	f(x_i+1, y_i+1_pr)	y_i	h=	0,2	
2	1				0			
3								
4								

Рис. 12.20. Подписи и начальное условие в методе Эйлера — Коши

2. В строке 2 в A2 и E2 введем координаты начальной точки: 1 и 0 (рис. 12.20).
3. В строке 3 набираем формулы (12.11) и формулы нахождения значений правой части данного дифференциального уравнения (рис. 12.21):

A3: «=A2+\$G\$1» ($x_{i+1} = x_i + h$);

B3: «=3*A2*A2-16*A2+19» ($f(x_i, y_i)$);

C3: «=D2+\$G\$1*B3» ($\tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$);

D3: «=3*A3*A3-16*A3+19» ($f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$);

E3: «=E2+\$G\$1/2*(B3+D3)» ($y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}))$).

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_i	f(x_i, y_i)	y_i+1_pr	f(x_i+1, y_i+1_pr)	y_i	h=	0,2
2	1				0		
3	=A2+\$G\$1	=3*A2*A2-16*A2+19	=D2+\$G\$1*B3	=3*A3*A3-16*A3+19	=E2+\$G\$1/2*(B3+D3)		
4							
5							

Рис. 12.21. Формулы в методе Эйлера — Коши

4. Выделяем диапазон A3:E3 и копируем вниз до тех пор, пока число в столбце А аргумента не станет равным 4 (рис. 12.22).

	A	B	C	D	E	F	G
1	x_i	f(x_i, y_i)	y_i+1_pr	f(x_i+1, y_i+1_pr)	y_i	h=	0,2
2	1				0		
3	1,2	6	1,2	4,12	1,012		
4	1,4	4,12	4,944	2,48	1,672		
5	1,6	2,48	2,976	1,08	2,028		
6	1,8	1,08	1,296	-0,08	2,128		
7	2	-0,08	-0,096	-1	2,02		
8	2,2	-1	-1,2	-1,68	1,752		
9	2,4	-1,68	-2,016	-2,12	1,372		
10	2,6	-2,12	-2,544	-2,32	0,928		
11	2,8	-2,32	-2,784	-2,28	0,468		
12	3	-2,28	-2,736	-2	0,04		
13	3,2	-2	-2,4	-1,48	-0,308		
14	3,4	-1,48	-1,776	-0,72	-0,528		
15	3,6	-0,72	-0,864	0,28	-0,572		
16	3,8	0,28	0,336	1,52	-0,392		
17	4	1,52	1,824	3	0,06		
18							
19							

Рис. 12.22. Приближенное решение задачи Коши $y' = 3x^2 - 16x + 19$, $y(1) = 0$ методом Эйлера — Коши

5. Построим на одной диаграмме ломаную по точкам из таблицы и интегральную кривую (рис. 12.23).

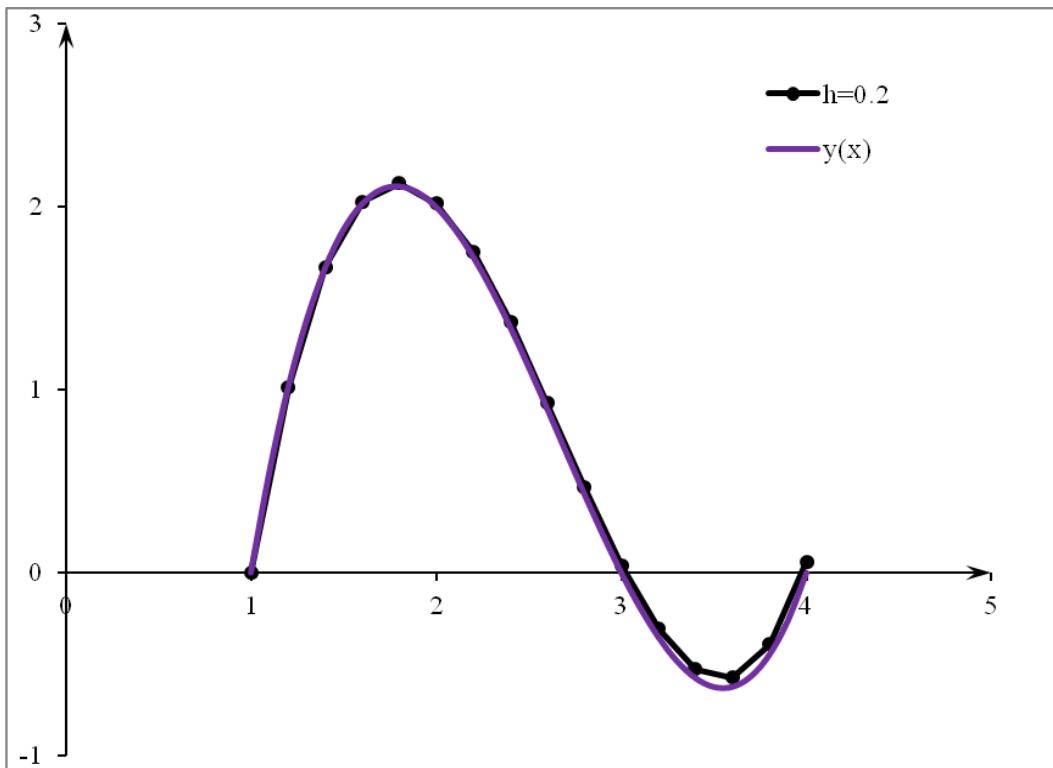


Рис. 12.23. Диаграмма интегральной кривой и приближенного решения при $h = 0,2$

При сравнении с рис. 12.8 снова видим, что метод двойной аппроксимации гораздо точнее, чем метод Эйлера. Поэтому для приближенного решения с шагом $h = 0,1$ не будем строить сравнительную диаграмму, а приведем таблицы точных и приближенных значений исходной функции (рис. 12.24). Для краткости строки 4—11, 14—21, 24—30 свернуты.

1	2	A	E	F	G	H
		x_i	y_i	$y(x)$	$h=$	0,1
		1	1	0	0	
		3	1,1	0,5515	0,551	
+		12	2	2,005	2	
+		13	2,1	1,8865	1,881	
+		22	3	0,01	0	
+		23	3,1	-0,1785	-0,189	
+		31	3,9	-0,2465	-0,261	
+		32	4	0,015	1,42E-14	
		22				

Рис. 12.24. Таблица значений приближенного решения при $h = 0,1$ и точного решения задачи Коши

По таблице видим, что приближенные значения отличаются от точных во втором-четвертом знаках после запятой, то есть погрешность составляет примерно 10^{-2} — 10^{-4} .

Доказано, что погрешность метода двойной аппроксимации стремится к нулю с той же скоростью, что и квадрат шага. То есть уменьшение шага в 10 раз вызовет уменьшение погрешности примерно в 100 раз.

Формулы (12.7) и (12.11) рассмотренных выше методов Эйлера и Эйлера — Коши можно получить и из других соображений.

Рассмотрим исходное дифференциальное уравнение (12.1)

$$y' = f(x, y),$$

перепишем его в виде

$$dy = f(x, y)dx$$

и найдем определенный интеграл от обеих частей на отрезке $[x_0; x_1]$:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} dy &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx, \\ y(x)|_{x_0}^{x_1} &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx, \\ y(x_1) &= y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx. \end{aligned} \tag{12.12}$$

Формула (12.12) — формула нахождения точного значения искомой функции $y = y(x)$ в точке x_1 . Если удается вычислить определенный интеграл в (12.12) точно, получаем точное значение $y(x_1)$, если же нет — приходится применять приближенные методы интегрирования. В зависимости от примененного к (12.12) метода численного интегрирования получим те или иные формулы численного решения задачи Коши.

1. Применим формулу **левых прямоугольников** (10.4) на отрезке $[x_0; x_1]$ для нахождения $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx$:

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx \approx y_0 + f(x_0, y_0) \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0),$$

то есть $y(x_1)$ вычисляется приближенно методом Эйлера. Обобщая формулы $x_1 = x_0 + h$, $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$ на всю табл. 1, получаем (12.7).

2. Применим формулу **трапеций** (10.12) на отрезке $[x_0; x_1]$ для нахождения $\int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx$:

$$y(x_1) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx \approx y_0 + \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))}{2} \cdot (x_1 - x_0) = y_0 + h \cdot \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y(x_1))}{2}.$$

Найдем $y(x_1)$ приближенно методом Эйлера: $y(x_1) \approx \tilde{y}_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$, и окончательно $y(x_1) \approx y_1 = y_0 + h \cdot \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)}{2}$. Обобщая формулы $x_1 = x_0 + h$, $\tilde{y}_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$, $y_1 = y_0 + h \cdot \frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)}{2}$ на всю табл. 1, получаем (12.11).

Аналогично можно применить другие формулы численного интегрирования для приближенного вычисления определенного интеграла в (12.12). Получим целый ряд методов численного решения задачи Коши.

Метод Рунге — Кутта 4-го порядка

Рассмотрим еще один метод численного решения задачи Коши 1-го порядка, обладающий высокой точностью. Приведем формулы перехода от точки $(x_i; y_i)$ к точке $(x_{i+1}; y_{i+1})$ табл. 1, то есть вычислительную схему этого метода, без обоснования:

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h, \\ k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \\ k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right), \\ k_4 = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + k_3), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (12.13)$$

Идея данного метода была разработана немецким математиком Карлом Рунге в 1895 году и развита другим немецким математиком Мартином Вильгельмом Кутта в 1901 году. Погрешность метода (12.13) соизмерима с 4-й степенью шага и стремится к нулю так же, как и h^4 . Поэтому метод получения точек табл. 1 по формулам (12.13) получил название метода Рунге — Кутта 4-го порядка. Вообще, Рунге и Кутта было разработано целое семейство методов приближенного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, в которое входят и рассмотренный выше метод Эйлера (метод Рунге — Кутта 1-го порядка), и метод двойной аппроксимации (метод Рунге — Кутта 2-го порядка).

Пример 4. Найдем методом Рунге — Кутта 4-го порядка решение задачи Коши $y' = 3x^2 - 16x + 19$, $y(1) = 0$ на отрезке $[1; 4]$ с различными значениями шага и сравним полученные результаты с точным решением.

Решение оформим сразу в Excel, выполняя необходимые шаги Для осуществления перехода от точки $(x_i; y_i)$ к точке $(x_{i+1}; y_{i+1})$ нам потребуются x_i , $x_i + \frac{h}{2}$, k_1, k_2, k_3, k_4 , y_i , h .

В данном примере правая часть уравнения (12.1) $f(x, y) = 3x^2 - 16x + 19$ не зависит от y , поэтому величины $y_i + \frac{k_1}{2}$, $y_i + \frac{k_2}{2}$, $y_i + k_3$ не потребуются. Рассмотрим $h = 0,5$.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи x_i , $x_i + \frac{h}{2}$, k_1, k_2, k_3, k_4 , y_i , h (например, как на рис. 12.25). В ячейку I1 введем значение шага 0,5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	x_i+h/2	k_1	k_2	k_3	k_4	y_i	h=	0,5
2		1						0	
3									

Рис. 12.25. Подписи и начальное условие в методе Рунге — Кутта 4-го порядка

2. В строке 2 в A2 и G2 введем координаты начальной точки: 1 и 0 (рис. 12.25).
3. В строке 3 набираем формулы (12.13) и формулы нахождения значений правой части данного дифференциального уравнения (рис. 12.26):

A3: «=A2+\$I\$1» ($x_{i+1} = x_i + h$);

B3: «=A2+\$I\$1/2» ($x_i + h/2$);

C3: «=\$I\$1*(3*A2*A2-16*A2+19)» ($k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$);

D3: «=\$I\$1*(3*B3*B3-16*B3+19)» ($k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$);

E3: «=\$I\$1*(3*B3*B3-16*B3+19)» ($k_3 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right)$);

F3: «=\$I\$1*(3*A3*A3-16*A3+19)» ($k_4 = h \cdot f(x_{i+1}, y_i + k_3)$);

$$G3: \ll=G2+(C3+2*D3+2*E3+F3)/6\gg \quad (y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)).$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	x_i+h/2	k_1	k_2	k_3	k_4	y_i		h= 0,5
2	1						0		
3	=A2+\$I\$1	=A2+\$I\$1/2	=\$I\$1*(3*A2*A2-16*)	=\$I\$1*(3*B3*B3-16*)	=\$I\$1*(3*B3*B3-16*)	=\$I\$1*(3*A3*A3-16*)	=G2+(C3+2*D3+2*E3)		
4									

Рис. 12.26. Формулы в методе Рунге — Кутта 4-го порядка

4. Выделяем диапазон A3:G3 и копируем вниз до тех пор, пока число в столбце А аргумента не станет равным 4 (рис. 12.27).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x_i	x_i+h/2	k_1	k_2	k_3	k_4	y_i	h=	0,5
2	1						0		
3	1,5	1,25	3	1,84375	1,84375	0,875	1,875		
4	2	1,75	0,875	0,09375	0,09375	-0,5	2		
5	2,5	2,25	-0,5	-0,90625	-0,90625	-1,125	1,125		
6	3	2,75	-1,125	-1,15625	-1,15625	-1	0		
7	3,5	3,25	-1	-0,65625	-0,65625	-0,125	-0,625		
8	4	3,75	-0,125	0,59375	0,59375	1,5	0		
9									
10									

Рис. 12.27. Приближенное решение задачи Коши $y' = 3x^2 - 16x + 19$, $y(1) = 0$ методом Рунге — Кутта 4-го порядка

5. Построим на одной диаграмме ломаную по точкам из таблицы и интегральную кривую (рис. 12.28).

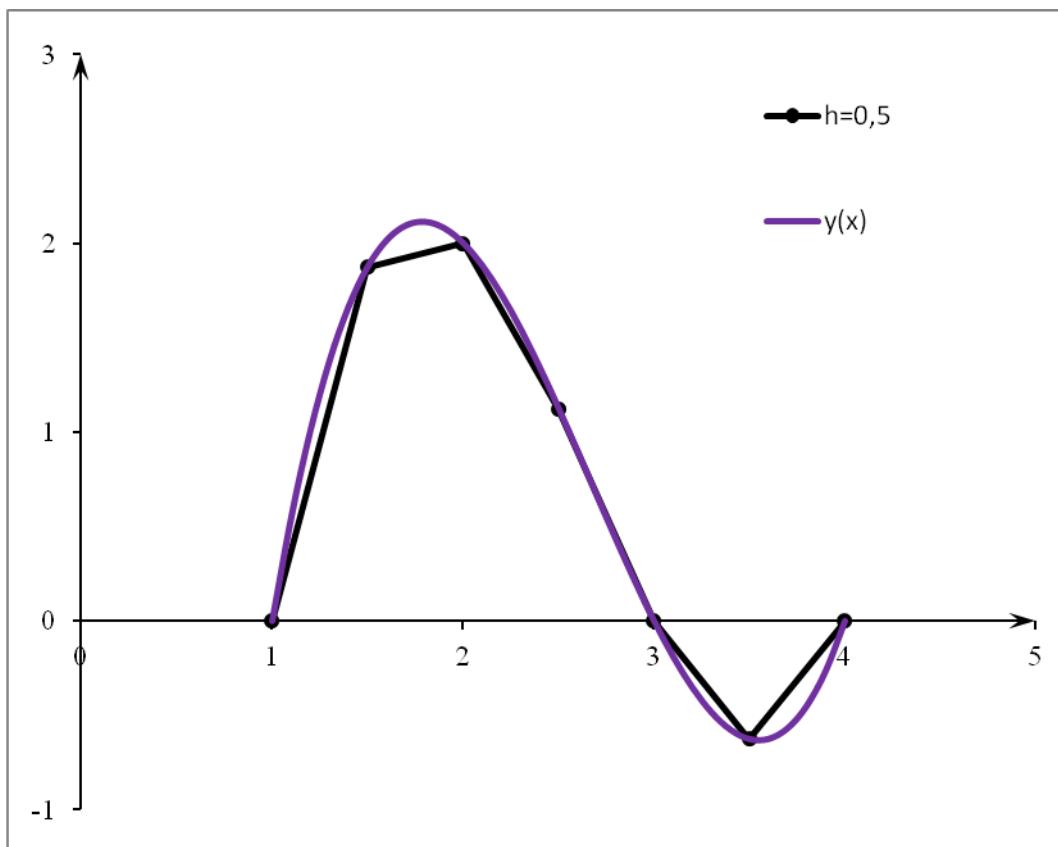


Рис. 12.28. Диаграмма интегральной кривой и приближенного решения при $h=0,5$

По диаграмме видим, что точки из таблицы лежат на интегральной кривой. Это подтверждает и сравнение приближенных (рис. 12.27) и точных (рис. 12.7) значений искомой функции. Дальнейшее уменьшение шага не изменит картину: в любом случае будем получать точные значения искомой функции. Такой удивительный результат в данной задаче не случаен: разработанный метод гарантирует получение точных значений искомой функции, если правая часть уравнения (12.1) является многочленом от x степени, не выше 4-ой.

Были рассмотрены три метода численного решения задачи Коши 1-го порядка. Оптимальным по соотношению трудозатраты/качество оказался метод двойной аппроксимации. Существуют и другие методы, их описание можно найти в учебниках по вычислительной математике. Дифференциальные уравнения являются одним из главных инструментов создания математических моделей процессов, протекающих в окружающем мире.

Пример 5. Парашютист массой m падает вниз. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату его скорости. Как меняется скорость парашютиста v в зависимости от времени t ?

Решение. Вниз на парашютиста действует сила тяжести mg , вверх — сила сопротивления воздуха kv^2 , где k — коэффициент сопротивления. По второму закону Ньютона равнодействующая всех сил равна ma , где a — ускорение:

$$ma = mg - kv^2.$$

Разделив обе части уравнения на m и учитывая, что ускорение является производной скорости по времени, получаем дифференциальное уравнение

$$v' = g - \frac{k}{m} v^2$$

с естественным начальным условием

$$v(0) = 0.$$

Полученная задача Коши имеет точное решение, но будем решать ее численно методом двойной аппроксимации в *Excel*. Сначала проверим существование и единственность решения:

- функция $f(t, v) = g - \frac{k}{m} v^2$ определена и непрерывна всюду на плоскости tOv ;
- ее частная производная по v $\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{2k}{m} v$ определена и непрерывна всюду на плоскости tOv .

Значит, решение данной задачи Коши существует и единствено. Решим ее, например, при $m = 80$ (кг), $k = 40$ (кг/м), $g = 9,81$ м/с² и построим диаграмму (рис. 12.29). По таблице и диаграмме видим, что скорость парашютиста сначала растет, но за 2—3 секунды полета стабилизируется в районе 4,43 м/с. Этот результат хорошо согласуется с практикой. Скорость комфортного приземления парашютиста равна 2—5 м/с, а груза — до 8 м/с. Из таблицы видно, что на 9-й секунде полета приращение скорости становится равным нулю (при мерно 88-я строка таблицы).

Далее с полученным численным решением и диаграммой можно проводить эксперименты: менять массу парашютиста, коэффициент сопротивления, начальную скорость и наблюдать за результатом.

1. Будем менять начальную скорость $v(0)$, оставляя неизменными остальные параметры: m , k , g и h . Параметры g и h не имеет смысла менять вообще, ведь ускорение свободного падения постоянно, а шаг интегрирования достаточно мал, чтобы считать численный эксперимент достаточно точным. Начальный момент времени $t = 0$ — момент раскрытия парашюта — тоже менять не имеет смысла. Таким образом, для нового начального условия вся вычислительная схема должна быть повторена. Для этого надо выделить столбцы, содержащие расчетные формулы, не захватывая столбцы с параметрами m , k , g и h (в начале эксперимента это пять столбцов А—Е). Затем выделить пять столбцов, начиная со столбца F, и нажать кнопку **Вставить** на панели **Главная**. Прежние столбцы F и G будут при этом отодвинуты на пять столбцов вправо, абсолютные ссылки на фиксированные параметры автома-

тически поменяются согласно новым адресам фиксированных параметров, а относительные изменят адреса согласно направлению копирования. Таким образом, в столбцах F—J повторится корректная расчетная схема. Сменим значение $v(0)$ в ячейке J2 с 0, например, на 2. Добавим новый ряд на диаграмму. Так можно проделать несколько раз. На рис. 12.30 приведена диаграмма для четырех экспериментов при значениях $v(0)$, равного 0, 2, 8, 10 м/с. В любом случае скорость с течением времени стремится к некоторой постоянной величине, в данном случае примерно к 4,43 м/с. Известно, что парашютисты прыгают с больших высот и не открывают парашют сразу, совершая так называемый затяжной прыжок. Поэтому к моменту раскрытия парашюта скорость велика, но она в течение нескольких секунд стабилизируется.

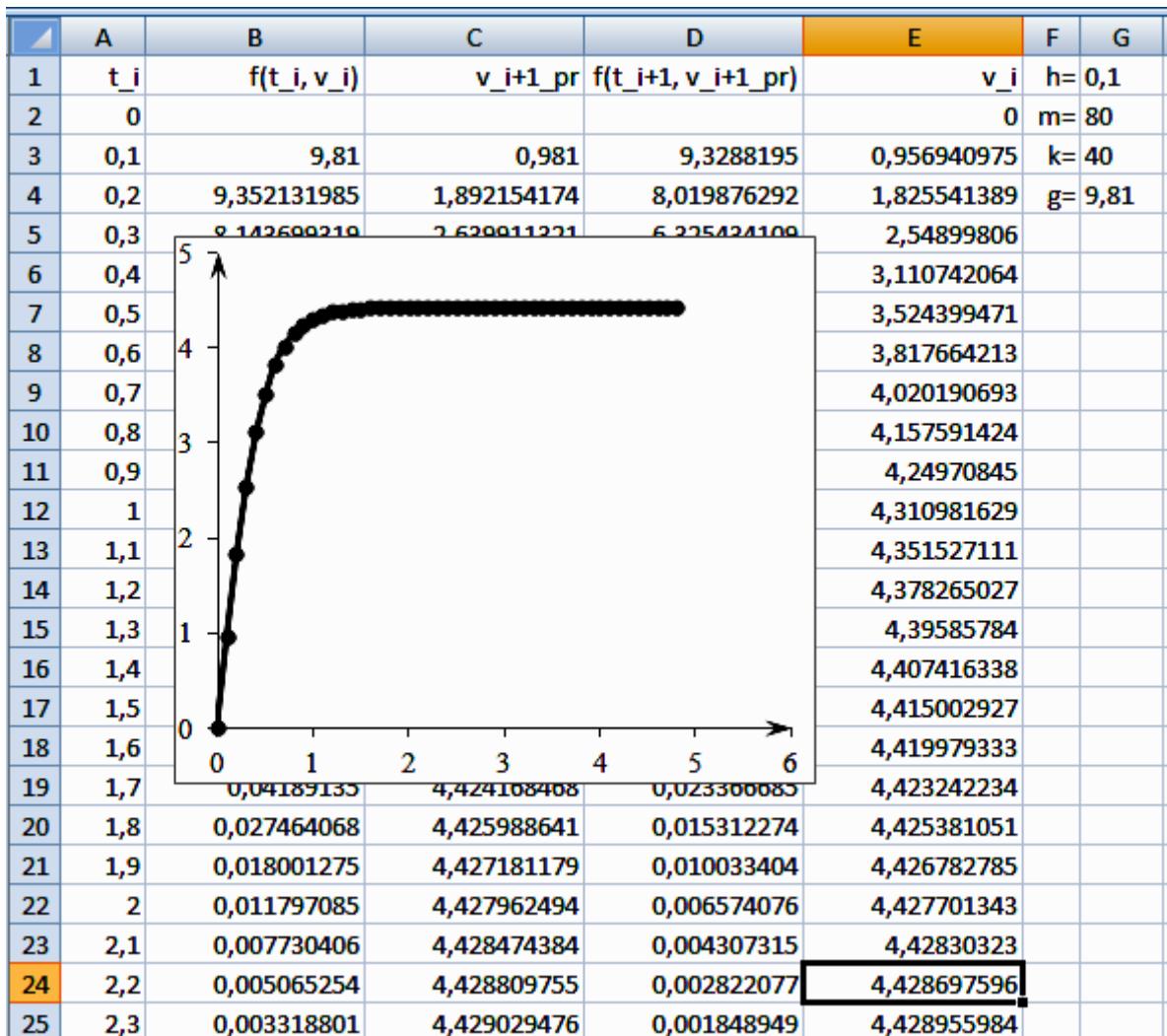


Рис. 12.29. Численное решение задачи Коши $v' = g - \frac{k}{m}v^2$, $v(0) = 0$ методом Эйлера — Коши

2. Будем менять массу m . Вернемся к исходной ситуации (вычислительная схема в столбцах А—Е). Теперь надо копировать все столбцы с А по G вместе с фиксированными параметрами, менять в каждом случае значение m и абсолютные ссылки в соответствующих формулах (можно менять только ссылки на m). Измененные формулы надо скопировать вниз на всю длину таблицы, внести новые ряды данных на диаграмму. На рис. 12.31 приведены диаграммы численных экспериментов с массой. Видим, что в любом случае скорость снижения стабилизируется и тем выше, чем больше масса груза на парашюте. При массе 100 кг скорость приземления превышает допустимую для человека, она больше 5 м/с.

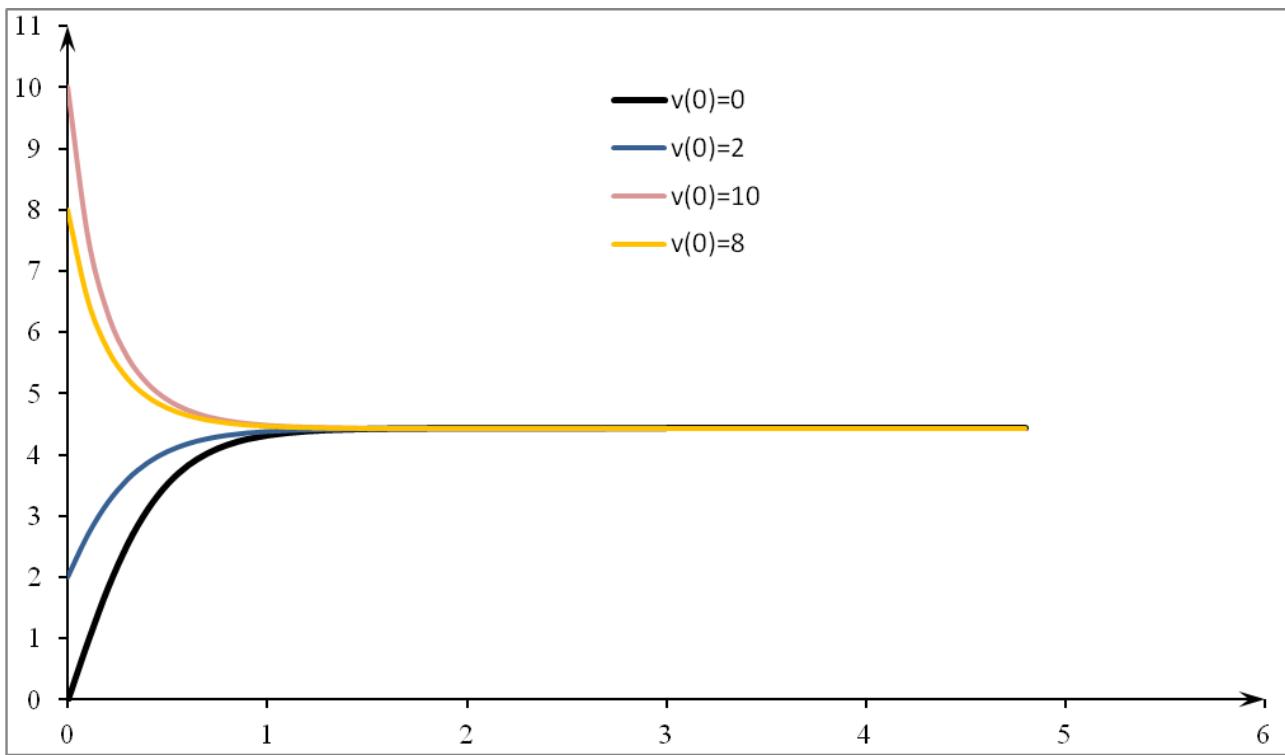


Рис. 12.30. Численные эксперименты с начальной скоростью

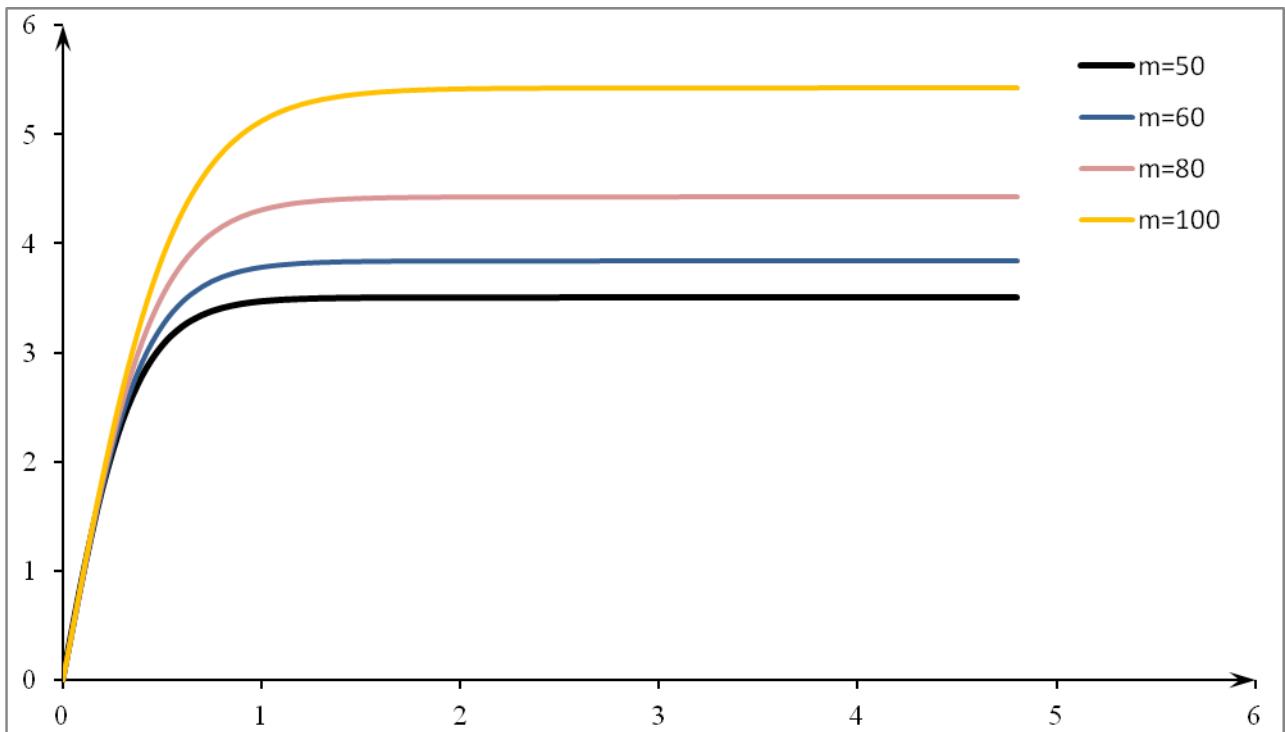


Рис. 12.31. Численные эксперименты с массой m

3. Будем менять коэффициент сопротивления k . Действуем по аналогии с предыдущим пунктом. На рис. 12.32 приведена диаграмма, показывающая, как уменьшается скорость приземления с ростом коэффициента сопротивления.

Таким образом, можно проводить эксперименты, меняя и несколько параметров сразу.

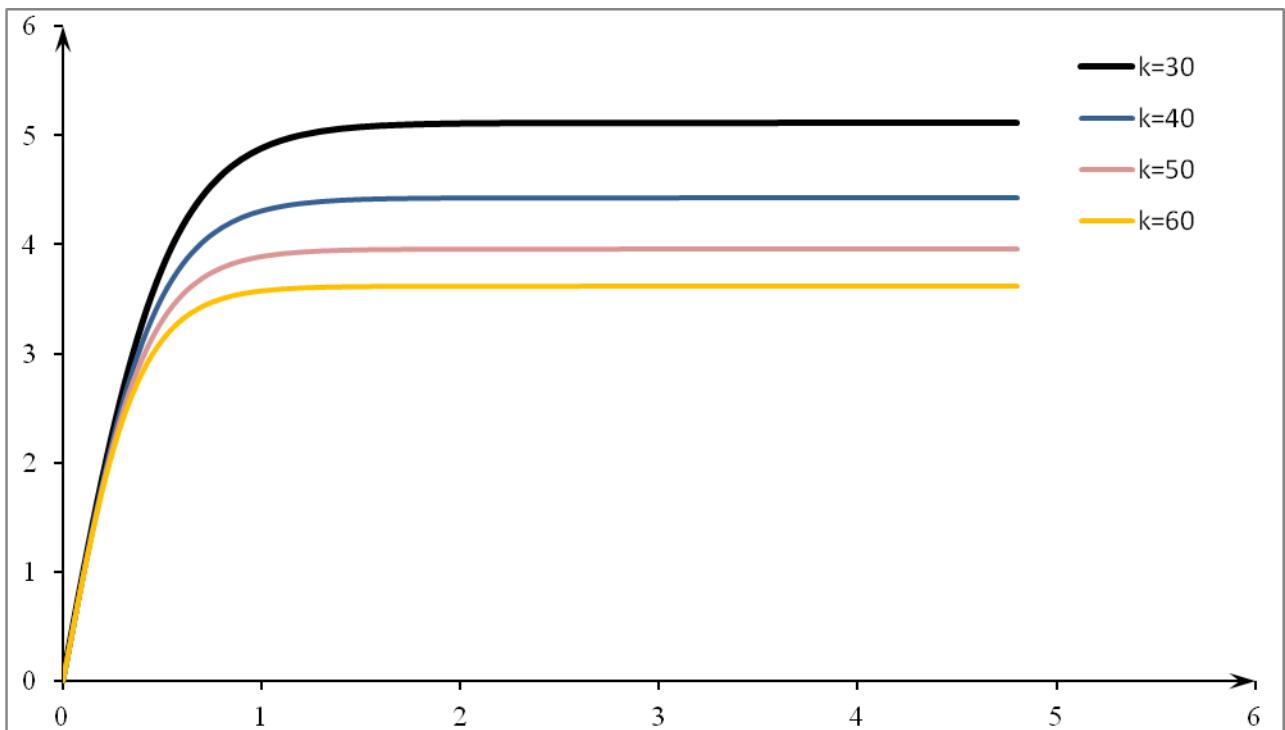


Рис. 12.32. Численные эксперименты с коэффициентом сопротивления k

Задание для самостоятельной работы

Получите приближенные решения задачи Коши для указанных ОДУ первого порядка методом Эйлера, методом двойной аппроксимации, методом Рунге — Кутта 4-го порядка на указанных отрезках с указанными значениями шага. В среде табличного процессора *Excel* выполните построение приближенных интегральных кривых для каждого метода и каждого уравнения на отдельной диаграмме.

Вариант 1. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0,5$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = x\sqrt[5]{y}, \quad y(-1) = -0,15, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 2. $y' = 2x + y^2$, $y(0) = 0,3$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = 2x\sqrt[3]{5y}, \quad y(-1) = -0,27, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 3. $y' = 0,2x + y^2$, $y(0) = 0,1$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = 4x^3\sqrt[7]{12y}, \quad y(-1) = -0,9, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 4. $y' = 2x + 0,1y^2$, $y(0) = 0,2$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = \cos x\sqrt[5]{y}, \quad y(-1) = -0,12, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 5. $y' = x^2 + y$, $y(0) = 0,4$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = \sin x\sqrt[7]{y}, \quad y(-1) = -0,23, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 6. $y' = x^2 + xy$, $y(0) = 0,2$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = 2x^3\sqrt[5]{5y}, \quad y(-1) = -0,16, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 7. $y' = x^2 + 2y$, $y(0) = 0,1$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = 6x\sqrt[7]{10y}, \quad y(-1) = -0,8, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 8. $y' = xy + y^2$, $y(0) = 0,6$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = x\sqrt[3]{5y}, \quad y(-1) = -0,2, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 9. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0,7$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = \sin x\sqrt[5]{y}, \quad y(-1) = -0,1, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 10. $y' = x + y^2$, $y(0) = 0,5$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = x\sqrt[5]{3y}, \quad y(-1) = -0,14, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 11. $y' = x^2 + 0,2y^2$, $y(0) = 0,2$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = 3x\sqrt[5]{y}, \quad y(-1) = -0,1, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 12. $y' = 0,3x + y^2$, $y(0) = 0,4$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = x\sqrt[7]{9y}, \quad y(-1) = -0,19, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 13. $y' = 0,1x + 0,2y^2$, $y(0) = 0,3$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = \cos x\sqrt[5]{y}, \quad y(-1) = -0,15, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 14. $y' = 2x^2 + xy$, $y(0) = 0,5$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = e^x\sqrt[3]{y}, \quad y(-1) = -0,21, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 15. $y' = 0,1x^2 + 2xy$, $y(0) = 0,8$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = \sin 2x\sqrt[5]{y}, \quad y(-1) = -0,12, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 16. $y' = x^2 + 0,2xy$, $y(0) = 0,6$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = -x^2\sqrt[5]{y}, \quad y(-1) = 0,2, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 17. $y' = 3x^2 + 0,1xy$, $y(0) = 0,2$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = x\sqrt[3]{5y}, \quad y(-1) = -0,18, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 18. $y' = x^2 + 3xy$, $y(0) = 0,3$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = 6x\sqrt[3]{10y}, \quad y(-1) = -0,15, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 19. $y' = x^2 + 0,1y^2$, $y(0) = 0,2$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = -3x^2\sqrt[5]{y}, \quad y(-1) = 0,1, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Вариант 20. $y' = 2x^2 + 3y^2$, $y(0) = 0,1$, $x \in [0; 1]$, $h = 0,1; 0,01; 0,05$.

$$y' = 7x\sqrt[3]{y}, \quad y(-1) = -0,17, \quad x \in [-1; 1], \quad h = 0,1; 0,01; 0,05.$$

Лабораторная работа № 13
Численное решение задачи Коши
для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть требуется решить нормальную систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) 1-го порядка

$$\begin{cases} x'_t = f_1(t, x, y, z), \\ y'_t = f_2(t, x, y, z), \\ z'_t = f_3(t, x, y, z), \end{cases} \quad (13.1)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — три искомые функции аргумента t , для которых должны выполняться требования

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0, \\ z(t_0) = z_0. \end{cases} \quad (13.2)$$

Задача нахождения функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, удовлетворяющих системе уравнений (13.1) и начальным условиям (13.2), называется *задачей Коши 1-го порядка для системы обыкновенных дифференциальных уравнений*.

Достаточные условия существования и единственности решения этой задачи дает следующее утверждение.

Теорема. Если функции $f_k(t, x, y, z)$, $k = 1, 2, 3$ определены и непрерывны в некоторой области D пространства R^4 и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f_k}{\partial x}$, $\frac{\partial f_k}{\partial y}$, $\frac{\partial f_k}{\partial z}$ во всех точках этой области, то решение задачи Коши (13.1)–(13.2) в области D существует и единствено.

Численные методы решения задачи Коши 1-го порядка для одного уравнения (см. лабораторную работу № 12) естественным образом переносятся на системы ОДУ. Так же как и для одного уравнения, решение задачи (13.1)–(13.2) ищется в виде трех таблиц для $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ на одном и том же отрезке $[t_0, T]$ с одним и тем же шагом h . То есть

отрезок $[t_0, T]$ разбивается на n равных частей точками $t_0, t_1, \dots, t_n = T$ ($h = \frac{T - t_0}{n}$ — шаг).

Приведем вычислительные схемы методов Эйлера и Эйлера — Коши. Аналогично можно разработать и вычислительную схему метода Рунге — Кутта 4-го порядка.

Вычислительная схема метода Эйлера для системы ОДУ определяется формулами

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ x_{i+1} = x_i + h \cdot f_1(t_i, x_i, y_i, z_i), \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot f_2(t_i, x_i, y_i, z_i), \\ z_{i+1} = z_i + h \cdot f_3(t_i, x_i, y_i, z_i), \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (13.3)$$

Вычислительная схема метода Эйлера — Коши (метода двойной аппроксимации) для системы ОДУ определяется формулами

$$\begin{cases} t_{i+1} = t_i + h, \\ \tilde{x}_{i+1} = x_i + h \cdot f_1(t_i, x_i, y_i, z_i), \\ \tilde{y}_{i+1} = y_i + h \cdot f_2(t_i, x_i, y_i, z_i), \\ \tilde{z}_{i+1} = z_i + h \cdot f_3(t_i, x_i, y_i, z_i), \\ x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2} \cdot (f_1(t_i, x_i, y_i, z_i) + f_1(t_{i+1}, \tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1})), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f_2(t_i, x_i, y_i, z_i) + f_2(t_{i+1}, \tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1})), \\ z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2} \cdot (f_3(t_i, x_i, y_i, z_i) + f_3(t_{i+1}, \tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}, \tilde{z}_{i+1})), \end{cases} \quad (13.4)$$

Формулы (13.3) и (13.4) определяют вычислительные схемы для системы из трех уравнений, но они могут быть применены к системам из любого числа уравнений. Например, в случае системы из двух уравнений для двух функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ функцию $z = z(t)$ надо удалить из схемы. С другой стороны, правые части уравнений (13.1) могут не зависеть от t . Такие системы называются *автономными*. В этом случае из схемы можно удалить правило изменения аргумента $t_{i+1} = t_i + h$ и аргумент t из правых частей формул (13.3) и (13.4).

Пример 1. Найдем численное решение задачи Коши для системы двух ОДУ

$$\begin{cases} x'_t = -y, & x(0) = 1, \\ y'_t = x, & y(0) = 0 \end{cases} \quad (13.5)$$

методом Эйлера с шагом $h = 0,5$ на отрезке $[0; 4]$ и сравним с точным решением.

Точное решение задачи Коши (13.5) — $x = \cos t$, $y = \sin t$ (проверьте это самостоятельно). Интегральная кривая задается параметрическими уравнениями в трехмерном пространстве точек с координатами (t, x, y)

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \quad t \in [0; 4] \end{cases} \quad (13.6)$$

и является участком спирали. При этом t считаем возрастающим параметром (t удобно считать временем). На рис. 13.1 изображена часть кривой $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ при $t \in [-14; 16,6]$ (отрезок $[-14; 16,6]$ выбран из соображений наглядности). Участок, соответствующий заданному отрезку $[0; 4]$, изображен на рис. 13.1 утолщенным. Для большей наглядности выделены точки пересечения с координатными плоскостями, и указаны проекции этих точек на ось Ot .

Можно построить проекции этой интегральной кривой на координатные плоскости tOx , tOy , xOy , так как часто в конкретных задачах нужно знать поведение не всех переменных, а только некоторых из них. Например, в задаче (13.5) — только x или только y . На рис. 13.2 изображена проекция кривой $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ при $t \in [-7; 7]$ на плоскость tOx , а на рис. 13.3 — на плоскость tOy , а соответствующие $t \in [0; 4]$ участки выделены.

Если необходимо знать изменение переменной y в зависимости от изменения x (или наоборот), надо строить проекцию на плоскость xOy (рис. 13.4). В рассматриваемом примере возможно исключить t : $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t$, $x^2 + y^2 = 1$. Получили уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 1. Эта окружность — проекция интегральной кривой (13.6) на плоскость xOy (на плоскость $t = 0$). Стрелка указывает на направление изменения x и y с ростом t .

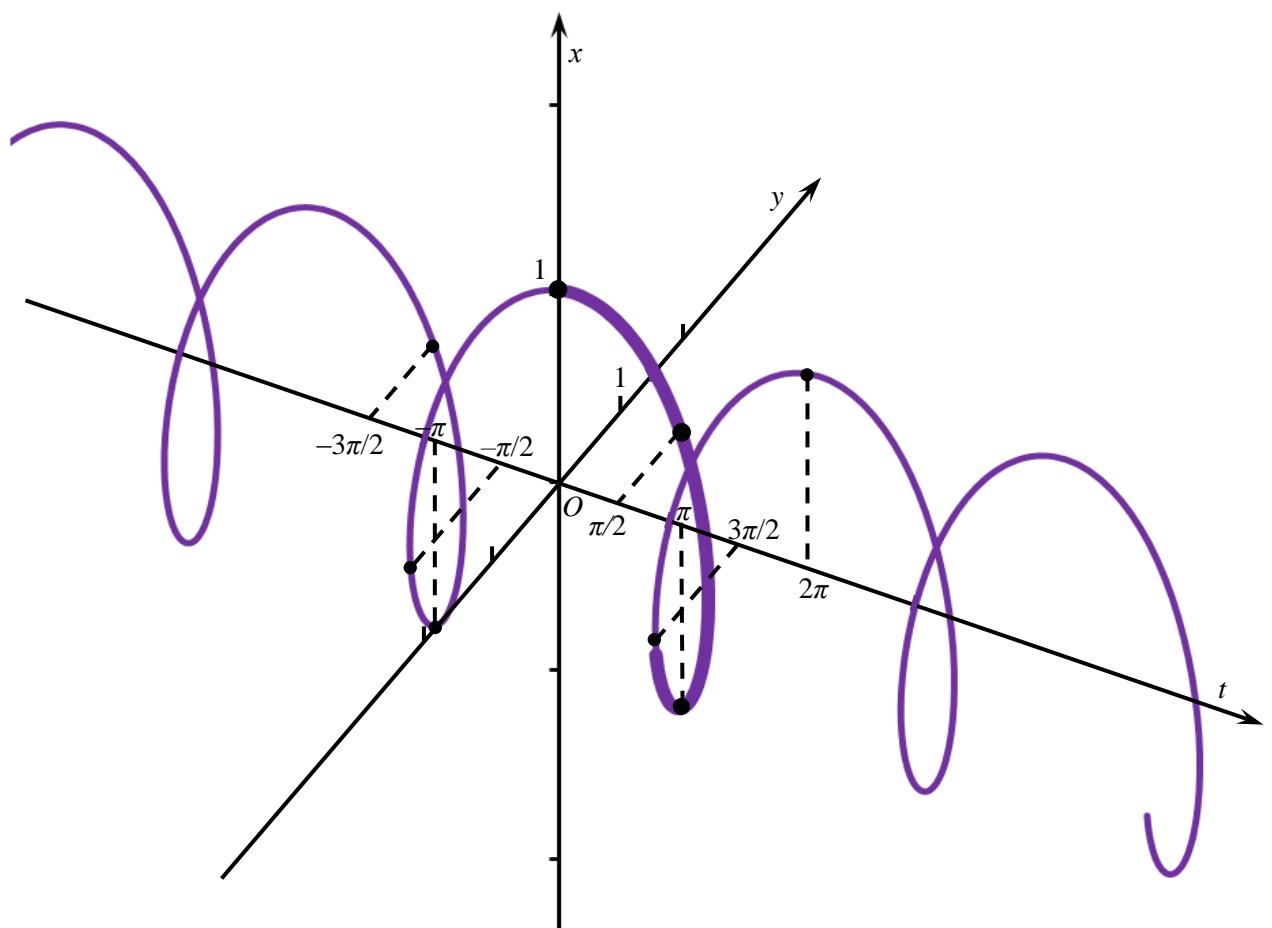


Рис. 13.1. Интегральная кривая задачи (13.5)

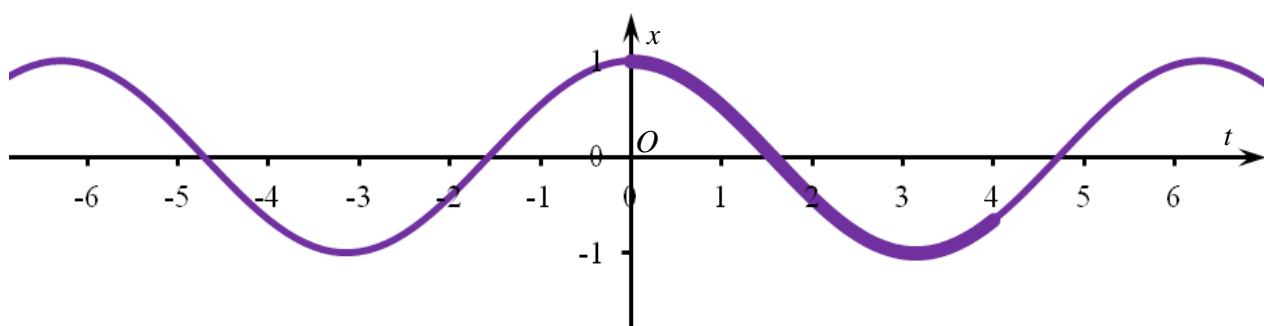


Рис. 13.2. Проекция интегральной кривой задачи (13.5) на плоскость tOx

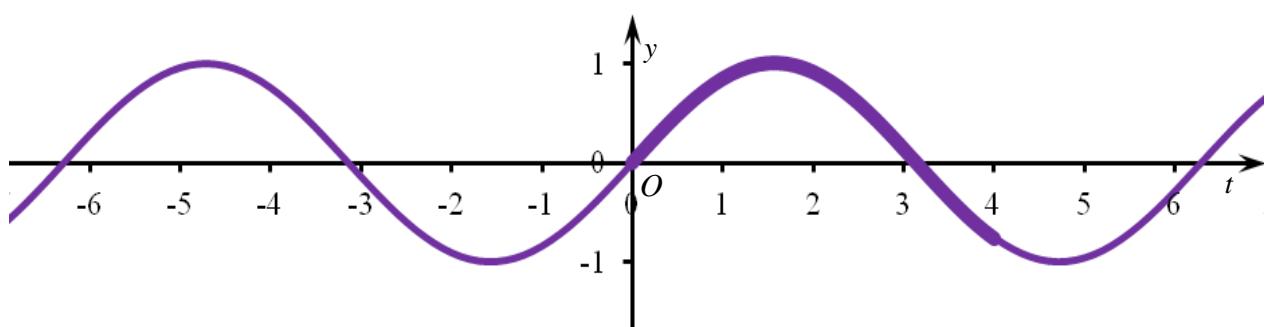


Рис. 13.3. Проекция интегральной кривой задачи (13.5) на плоскость tOy

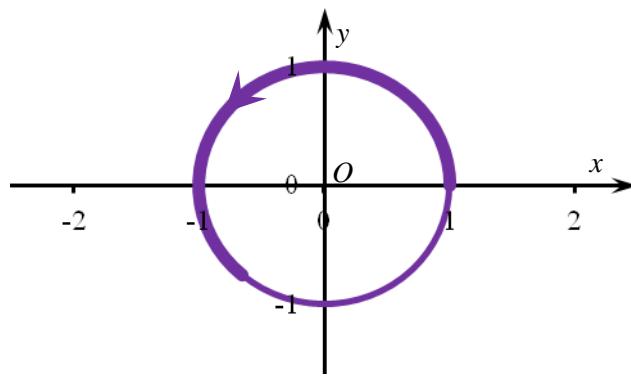


Рис. 13.4. Проекция интегральной кривой задачи (13.5) на плоскость xOy (фазовая траектория)

Проекцию интегральной кривой на подпространство $t = 0$ называют *фазовой траекторией*. С фазовыми траекториями особенно удобно работать в случае, когда в правые части системы (13.1) явно не входит t :

$$\begin{cases} x'_t = f_1(x, y, z), \\ y'_t = f_2(x, y, z), \\ z'_t = f_3(x, y, z). \end{cases} \quad (13.7)$$

Такие системы называются *автономными*. Доказано, что если для автономной системы выполнены условия приведенной в начале параграфа теоремы, то через любую точку подпространства $t = 0$ (*фазового пространства*) проходит одна и только одна фазовая траектория этой системы.

Система (13.7) в каждой точке (x_0, y_0, z_0) фазового пространства (трехмерного пространства точек с координатами (x, y, z)) задает вектор $(f_1(x_0, y_0, z_0), f_2(x_0, y_0, z_0), f_3(x_0, y_0, z_0))$, который направлен по касательной к траектории, проходящей через эту точку. Поэтому определить направление движения фазовой траектории можно, вычислив значения правых частей системы (13.7) — компоненты направляющего вектора в любой точке траектории. Например, для системы (13.5) направляющий вектор в точке $(1; 0)$ равен $(0; 1)$, так как $\begin{cases} x'_t = -y, \\ y'_t = x, \end{cases}$ и координаты направляющего вектора равны $(-y; x)$. Направляющий вектор в точке $(0; 1)$ равен $(-1; 0)$ (рис. 13.5).

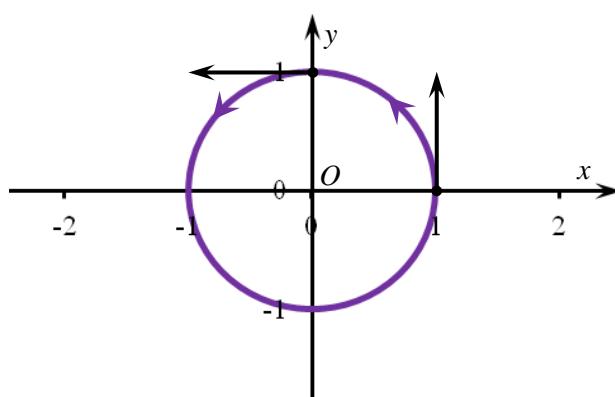


Рис. 13.5. Определение направления движения фазовой траектории по направляющему вектору

Теперь найдем численное решение задачи (13.5) методом Эйлера. Проверим условия теоремы существования и единственности решения этой задачи:

- $f_1(t, x, y) = -y$, $f_2(t, x, y) = x$ определены и непрерывны всюду в пространстве размерности 3, то есть на множестве точек с координатами (t, x, y) ;
- $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f_1}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f_2}{\partial y} = 0$ — непрерывные функции во множестве точек с координатами (t, x, y) .

Значит, решение данной задачи Коши существует и единствено на любом отрезке $[t_0, T]$, где $t_0 = 0$. По формулам (13.3) последовательно находим:

$$\begin{cases} t_1 = t_0 + h = 0 + 0,5 = 0,5, \\ x_1 = x_0 + h \cdot f_1(t_0, x_0, y_0) = 1 + 0,5 \cdot (-0) = 1, \\ y_1 = y_0 + h \cdot f_2(t_0, x_0, y_0) = 0 + 0,5 \cdot 1 = 0,5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = t_1 + h = 0,5 + 0,5 = 1, \\ x_2 = x_1 + h \cdot f_1(t_1, x_1, y_1) = 1 + 0,5 \cdot (-0,5) = 0,75 \\ y_2 = y_1 + h \cdot f_2(t_1, x_1, y_1) = 0,5 + 0,5 \cdot 1 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_3 = t_2 + h = 1 + 0,5 = 1,5, \\ x_3 = x_2 + h \cdot f_1(t_2, x_2, y_2) = 0,75 + 0,5 \cdot (-1) = 0,25 \\ y_3 = y_2 + h \cdot f_2(t_2, x_2, y_2) = 1 + 0,5 \cdot 0,75 = 1,375, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_4 = t_3 + h = 1,5 + 0,5 = 2, \\ x_4 = x_3 + h \cdot f_1(t_3, x_3, y_3) = 0,25 + 0,5 \cdot (-1,375) = -0,4375 \\ y_4 = y_3 + h \cdot f_2(t_3, x_3, y_3) = 1,375 + 0,5 \cdot 0,25 = 1,5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_5 = t_4 + h = 2 + 0,5 = 2,5, \\ x_5 = x_4 + h \cdot f_1(t_4, x_4, y_4) = -0,4375 + 0,5 \cdot (-1,5) = -1,1875 \\ y_5 = y_4 + h \cdot f_2(t_4, x_4, y_4) = 1,5 + 0,5 \cdot (-0,4375) = 1,28125, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_6 = t_5 + h = 2,5 + 0,5 = 3, \\ x_6 = x_5 + h \cdot f_1(t_5, x_5, y_5) = -1,1875 + 0,5 \cdot (-1,28125) = -1,828125, \\ y_6 = y_5 + h \cdot f_2(t_5, x_5, y_5) = 1,28125 + 0,5 \cdot (-1,1875) = 0,6875, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_7 = t_6 + h = 3 + 0,5 = 3,5, \\ x_7 = x_6 + h \cdot f_1(t_6, x_6, y_6) = -1,828125 + 0,5 \cdot (-0,6875) = -2,171875, \\ y_7 = y_6 + h \cdot f_2(t_6, x_6, y_6) = 0,6875 + 0,5 \cdot (-1,828125) = -0,2265625, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_8 = t_7 + h = 3,5 + 0,5 = 4, \\ x_8 = x_7 + h \cdot f_1(t_7, x_7, y_7) = -2,171875 + 0,5 \cdot 0,2265625 = -2,05859375, \\ y_8 = y_7 + h \cdot f_2(t_7, x_7, y_7) = -0,2265625 + 0,5 \cdot (-2,171875) = -1,3125. \end{cases}$$

Построим таблицы приближенных значений искомых функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Можно обе этих таблицы объединить в одну, так как аргумент в них меняется одинаково (табл. 1).

Таблица 1. Решение задачи Коши (13.5) методом Эйлера

t_i	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
x_i	1	1	0,75	0,25	-0,4375	-1,1875	-1,828125	-2,171875	-2,05859375
y_i	0	0,5	1	1,375	1,5	1,28125	0,6875	-0,2265625	-1,3125

Ломаная Эйлера в данном случае — ломаная в трехмерном пространстве точек с координатами (t, x, y) . Построим проекцию ломаной Эйлера на фазовое пространство (рис. 13.6), проекцию на плоскость tOx (рис. 13.7) и проекцию на плоскость tOy (рис. 13.8). Для сравнения изобразим и точные графики фазовой траектории и соответствующих проекций интегральной кривой. На рис. 13.7 и 13.8 наблюдается интересный эффект: проекция ломаной Эйлера пересекает проекцию интегральной кривой не по касательной или близко к касательной, а под достаточно большим углом. Это происходит из-за взаимного расположения инте-

трапециальной кривой и ломаной Эйлера в трехмерном пространстве при достаточно большом шаге h . При стремлении h к нулю этот эффект исчезает. Пересечение проекций на плоскости не означает, что их прообразы пересекаются в трехмерном пространстве.

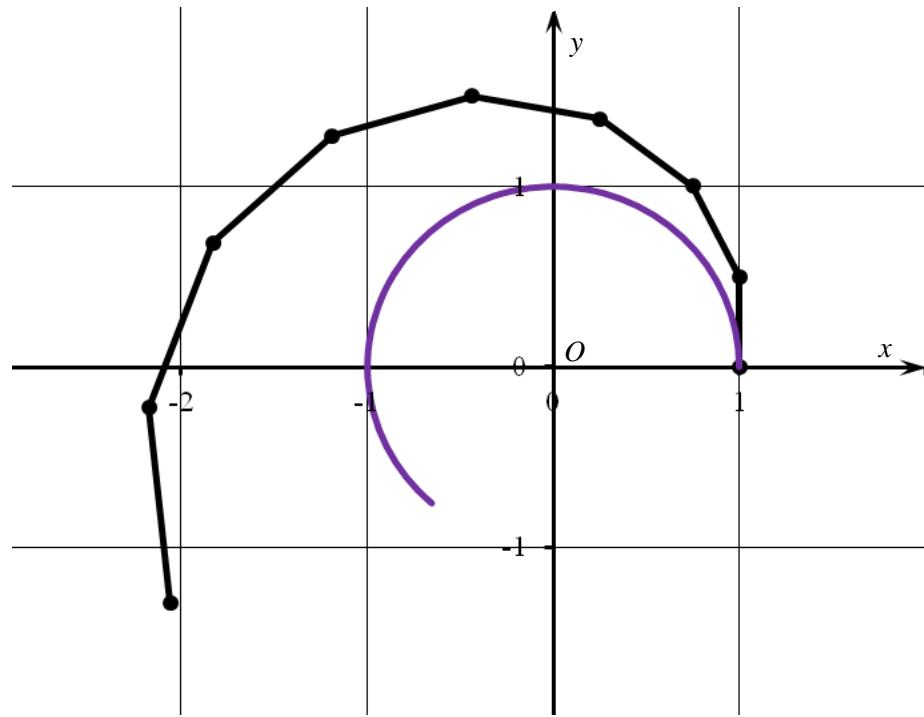


Рис. 13.6. Проекция ломаной Эйлера на фазовое пространство (плоскость xOy)

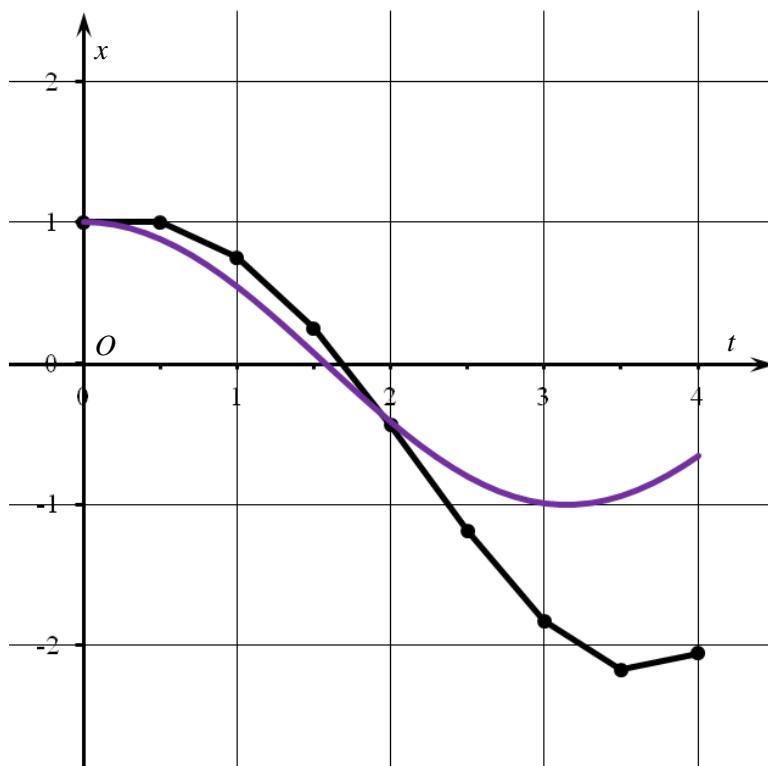


Рис. 13.7. Проекция ломаной Эйлера на плоскость tOx

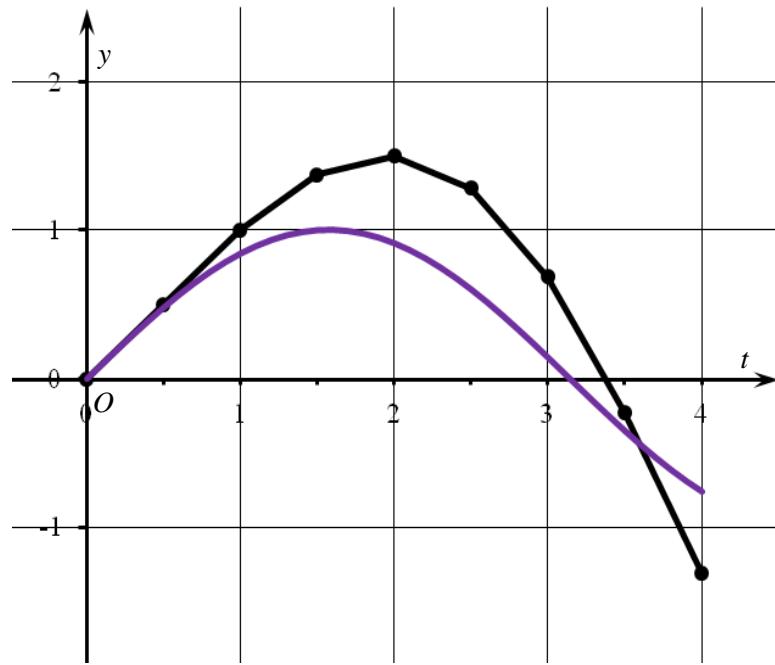


Рис. 13.8. Проекция ломаной Эйлера на плоскость tOy

Решим задачу (13.5) численно в *Excel*, выполнив необходимые действия по созданию программы, и проведем эксперименты с шагом. Пусть $h = 0,1$.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи (рис. 13.9), в ячейку E1 введем шаг $h = 0,1$.
2. В строке 2 введем начальные условия: $t_0 = 0, x_0 = 1, y_0 = 0$ (рис. 13.9).

	A	B	C	D	E	F
1	t_i	x_i	y_i		$h=$	0,1
2		0	1			0
3						

Рис. 13.9. Подписи и начальные условия в задаче (13.5)

3. В строке 3 введем формулы (13.3) для дальнейшего копирования вниз (рис. 13.10):

A3: «=A2+\$E\$1» ($t_1 = t_0 + h$);
B3: «=B2+\$E\$1*(-C2)» ($x_1 = x_0 + h \cdot f_1(t_0, x_0, y_0)$);
C3: «=C2+\$E\$1*B2» ($y_1 = y_0 + h \cdot f_2(t_0, x_0, y_0)$).

	A	B	C	D	E
1	t_i	x_i	y_i		$h=$
2	0	1	0		0,1
3	=A2+\$E\$1	=B2+\$E\$1*(-C2)	=C2+\$E\$1*B2		
4					
5					

Рис. 13.10. Метод Эйлера численного решения задачи (13.5)

4. Выделяем диапазон A3:C3 и копируем вниз до тех пор, пока значение аргумента t в столбце А не станет равным 4.
5. Строим диаграммы проекций ломаной Эйлера и интегральной кривой при $t \in [0; 4]$ на плоскости xOy , tOx , tOy (рис. 13.11—13.13).

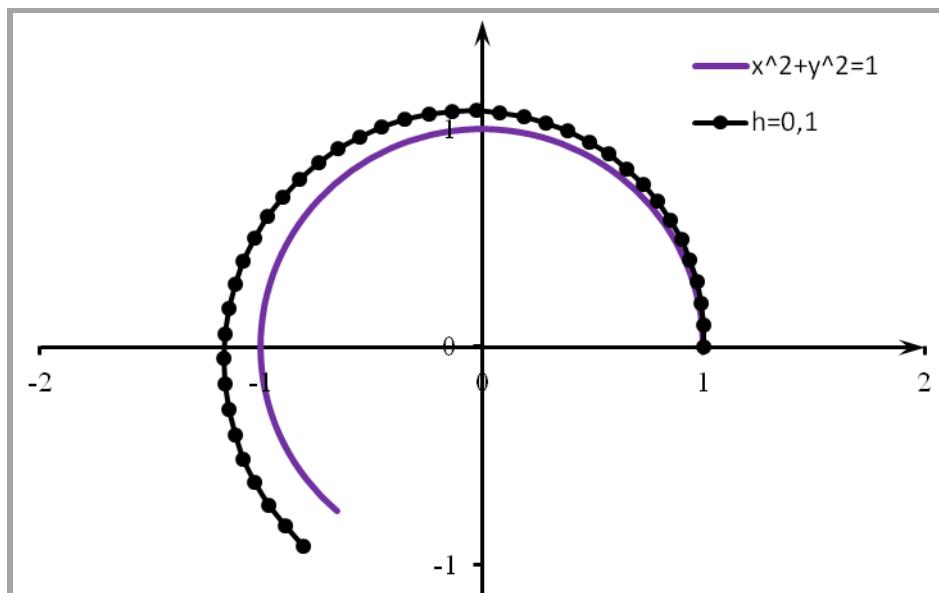


Рис. 13.11. Проекция ломаной Эйлера на фазовое пространство при $h = 0,1$

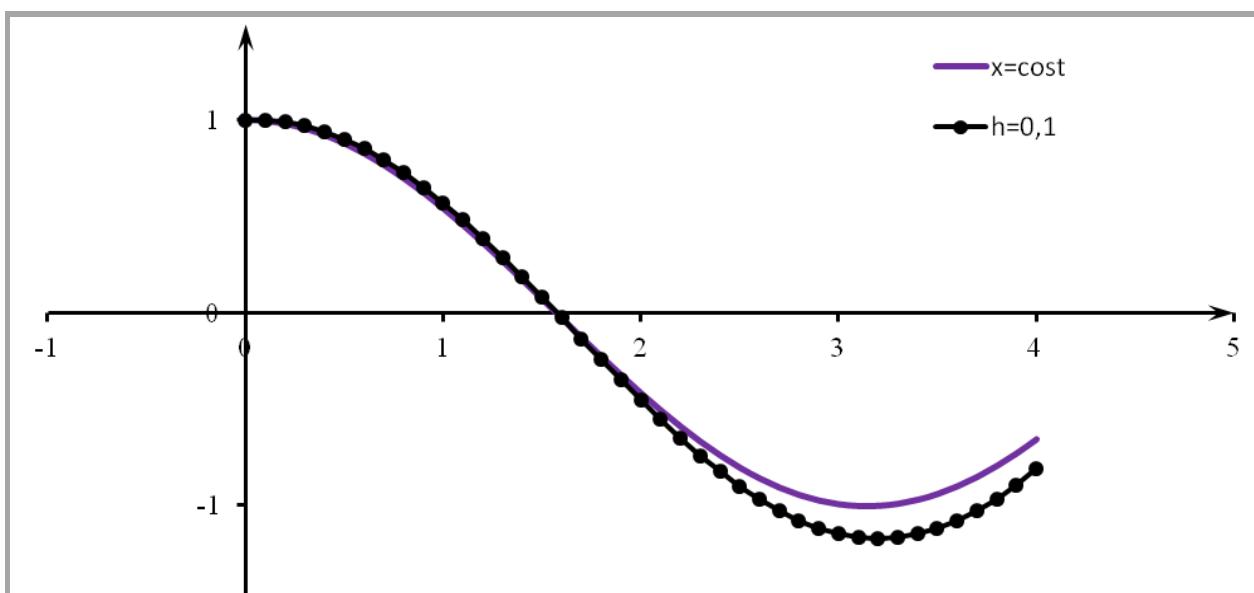


Рис. 13.12. Проекция ломаной Эйлера на плоскость tOx при $h = 0,1$

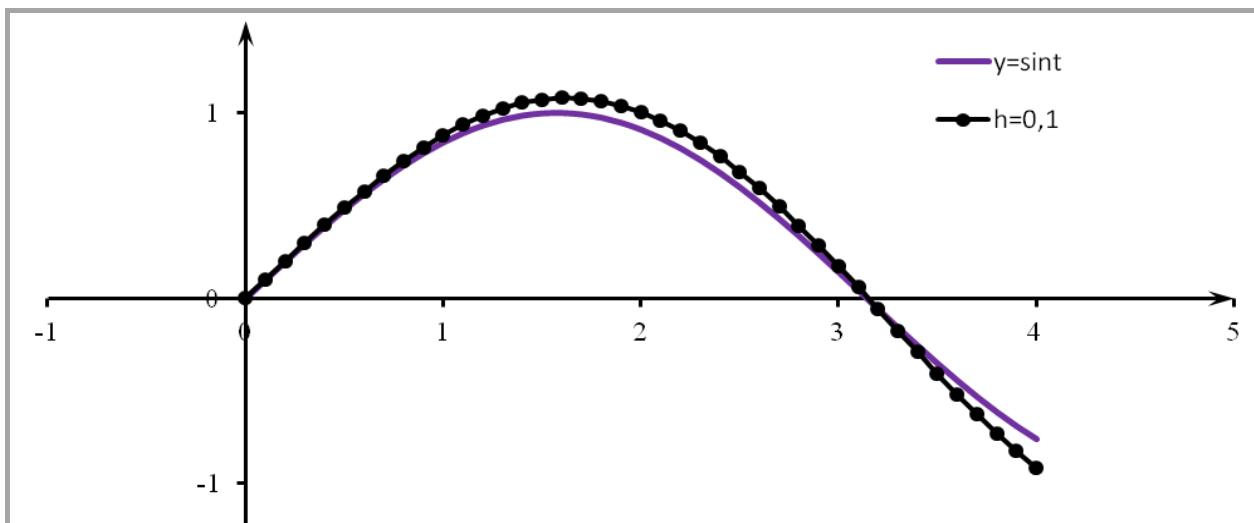


Рис. 13.13. Проекция ломаной Эйлера на плоскость tOy при $h = 0,1$

Самостоятельно проведите расчеты и постройте диаграммы при $h = 0,01$.

Пример 2. Покажем, что задача Коши 2-го порядка сводится к задаче Коши 1-го порядка для системы ОДУ, и решим полученную систему численно методом Эйлера — Коши в *Excel*. Аналогично сводятся к системам дифференциальные уравнения более высоких порядков.

Рассмотрим модель рынка с ценой на некоторый товар, зависящей от времени. Установим эту зависимость, исходя из эмпирических законов рынка. Как известно, цена на товар формируется в связи с меняющимися спросом и предложением. Обозначим t — время, $x(t)$ — цена на некоторый товар, $D(t)$ — спрос на этот же товар, $S(t)$ — предложение товара, $x'(t)$ — скорость изменения цены, $x''(t)$ — темпы изменения цены. Тогда зависимости $D(t)$ и $S(t)$ можно получить из следующих соображений.

1. Спрос $D(t)$ «подогревается» темпом изменения цены: если скорость изменения цены растет ($x''(t) > 0$), то рынок увеличивает интерес к товару, и наоборот. Собственно рост цены ($x'(t) > 0$) и высокая цена ($x(t) > 0$) отпугивают покупателя, спрос падает. Поэтому функцию спроса $D(t)$ можно записать в зависимости от $x''(t)$, $x'(t)$, $x(t)$:

$$D(t) = Ax''(t) - Bx'(t) - Cx(t) + K, \quad (13.7)$$

где числовые коэффициенты $A, B, C, K > 0$ определяются опытным путем.

2. Предложение $S(t)$ в еще большей мере «подогревается» темпом изменения цены, рост цены и высокая цена по законам рынка увеличивают предложение. Поэтому функцию предложения $S(t)$ можно записать в зависимости от $x''(t)$, $x'(t)$, $x(t)$:

$$S(t) = Mx''(t) + Px'(t) + Qx(t) + R, \quad (13.8)$$

где числовые коэффициенты $M, P, Q, R > 0$ определяются опытным путем, и $M > A$.

Равновесное состояние рынка характеризуется равенством $D(t) = S(t)$, поэтому, приравнивая правые части уравнений (13.7) и (13.8), получаем:

$$(M - A)x''(t) + (P + B)x'(t) + (Q + C)x(t) = K - R,$$

или, переобозначая числовые коэффициенты $M - A = F$, $P + B = G$, $Q + C = H$, $K - R = W$,

$$Fx''(t) + Gx'(t) + Hx(t) = W, \quad (13.9)$$

где $F, G, H > 0$. Получили (13.9) — обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Оно всегда имеет точное решение $x = x(t, C_1, C_2)$, которое находится по известному алгоритму. Решим это уравнение численно методом двойной аппроксимации, например, на отрезке $[0; 6]$ с шагом $h = 0,01$, при конкретных значениях коэффициентов и начальных условиях:

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = 15, \quad x(0) = 4, \quad x'(0) = 1. \quad (13.10)$$

Сведем задачу Коши 2-го порядка (13.10) к системе ОДУ заменой $x'(t) = y(t)$. Тогда $x''(t) = y'(t)$, $x''(t) = -2x'(t) - 5x(t) + 15$, и получаем автономную систему

$$\begin{cases} x'(t) = y, \\ y'(t) = -2y - 5x + 15 \end{cases} \quad (13.11)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = 4, \\ y(0) = 1. \end{cases} \quad (13.12)$$

Проверим условия теоремы существования и единственности решения этой задачи:

- функции $f_1(t, x, y) = y$, $f_2(t, x, y) = -2y - 5x + 15$ определены и непрерывны всюду в пространстве размерности 3, то есть на множестве точек с координатами (t, x, y) ;

- $\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1, \frac{\partial f_2}{\partial x} = -5, \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2$ — непрерывные функции во множестве точек с координатами (t, x, y) .

Значит, решение данной задачи Коши существует и единственно на любом отрезке $[t_0, T]$.

При реализации формул (13.4) в Excel будем вычислять t_i, x_i, y_i . Для удобства отдельно будем вычислять $f_1(x_i, y_i), f_2(x_i, y_i)$, затем $\tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}$ и $f_1(\tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}), f_2(\tilde{x}_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$. Шаг h будем хранить в отдельной ячейке.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи (рис. 13.14), шаг h введем в ячейку K1, в A2, B2 и C2 зададим начальные условия $t_0 = 0, x_0 = 4, y_0 = 1$ соответственно.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t_i	x_i	y_i	f_1(x_i,y_i)	f_2(x_i,y_i)	x_i+1_pr	y_i+1_pr	f_1(x_i+1_pr,y_i+1_pr)	f_2(x_i+1_pr,y_i+1_pr)	h=	0,01
2	0	4	1								
3											

Рис. 13.14. Подписи и начальные условия в задаче (13.11)—(13.12)

2. В строке 2 с учетом дальнейшего копирования вниз реализуем формулы (13.4), вычисляя в ячейках D2:I2 последовательно $f_1(x_0, y_0), f_2(x_0, y_0), \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, f_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), f_2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$, а в строке 3 в ячейках A3, B3, C3 — t_1, x_1, y_1 (рис. 13.15):

$$D2: \ll=C2\gg (f_1(x_0, y_0));$$

$$E2: \ll=-2*C2-5*B2+15\gg (f_2(x_0, y_0));$$

$$F2: \ll=B2+K1*D2\gg (\tilde{x}_1 = x_0 + h \cdot f_1(x_0, y_0));$$

$$G2: \ll=C2+K1*E2\gg (\tilde{y}_1 = y_0 + h \cdot f_2(x_0, y_0));$$

$$H2: \ll=G2\gg (f_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1));$$

$$I2: \ll=-2*G2-5*F2+15\gg (f_2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1));$$

$$A3: \ll=A2+K1\gg (t_1 = t_0 + h);$$

$$B3: \ll=B2+K1/2*(D2+H2)\gg (x_1 = x_0 + \frac{h}{2} \cdot (f_1(x_0, y_0) + f_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)));$$

$$C3: \ll=C2+K1/2*(E2+I2)\gg (y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot (f_2(x_0, y_0) + f_2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1))).$$

Причем формулы в ячейки H2:I2 при таком расположении данных можно скопировать из ячеек D2:E2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	t_i	x_i	y_i	f_1(x_i,y_i)	f_2(x_i,y_i)	x_i+1_pr	y_i+1_pr	f_1(x_i+1_pr,y_i+1_pr)	f_2(x_i+1_pr,y_i+1_pr)	h=	0,01
2	0	4	1	=C2	=-2*C2-5*B2+15	=B2+\$K\$1*D2	=C2+\$K\$1*E2	=G2	=-2*G2-5*F2+15		
3	=A2+\$K\$1	=B2+\$K\$1/2*(D2+H2)	=C2+\$K\$1/2*(E2+I2)								
4											

Рис. 13.15. Формулы метода Эйлера — Коши в задаче (13.11)—(13.12)

3. «Подровняем» строки 2 и 3, скопировав диапазон D2:I2 в D3:I3. После этого выделяем все «работающие» ячейки в строке 3, то есть A3:I3, и копируем вниз до тех пор, пока значение аргумента в столбце А не станет равным 6.

4. Построим график интересующей величины — цены $x = x(t)$ (рис. 13.16).

По графику видим, что при заданных начальных условиях цена сначала растет, затем падает, потом снова колеблется вокруг некоторого значения, с течением времени стремясь к нему. В данном случае — к 3. Метод двойной аппроксимации (метод Эйлера — Коши) — достаточно точный метод, шаг в данном примере достаточно мал, поэтому построенному графику $x = x(t)$ вполне можно доверять.

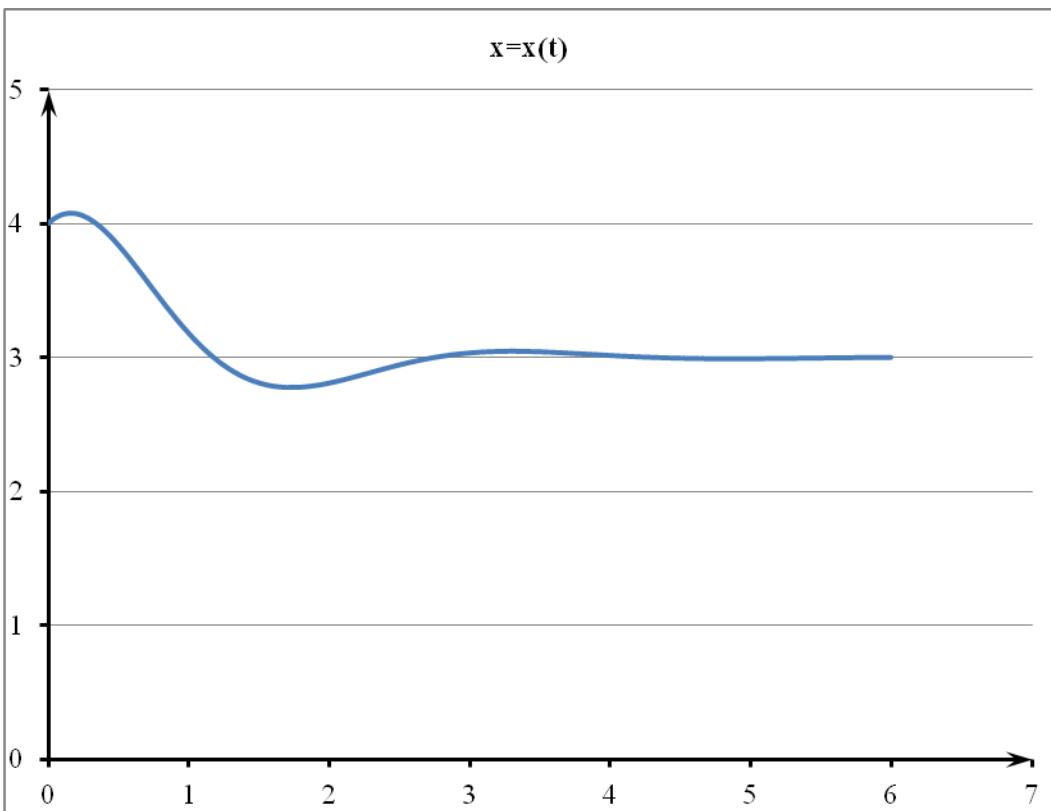


Рис. 13.16. Решение задачи Коши (13.11)–(13.12) методом Эйлера — Коши

Проведем эксперименты с выбором начальных условий (начальной цены $x(t_0)$ и скорости ее изменения $x'(t_0)$), изобразив несколько графиков на одной диаграмме (рис. 13.17).

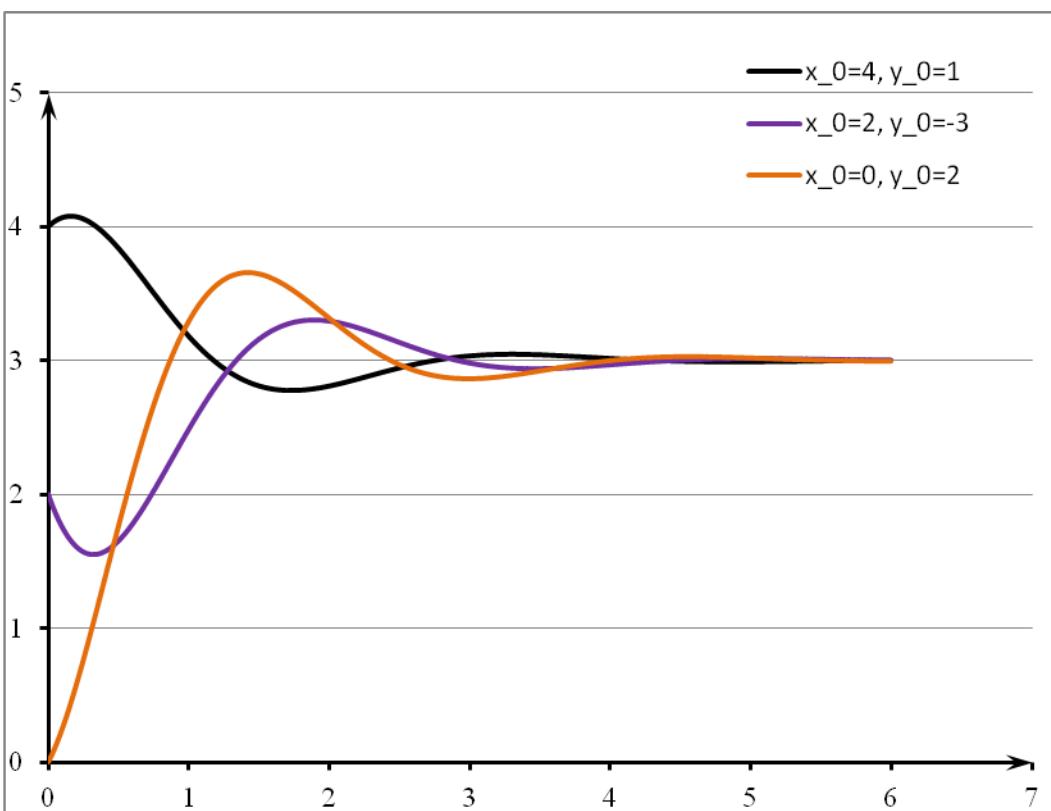


Рис. 13.17. Результат экспериментов с выбором начальных условий

Напомним, что для этого надо выделить, например, столбцы В—I, вставить такое же количество столбцов слева (**Вставить** в группе **Ячейки**), снова выделить столбцы В—I, скопировать выделенные столбцы (**Копировать** в группе **Буфер обмена**), щелкнуть по начальной ячейке для вставки (в нашем случае В1) и нажать **Вставить** в группе **Буфер обмена**. Вся вычислительная схема повторится в новых столбцах. После этого надо изменить начальные данные и добавить новый ряд данных на диаграмму (см. лабораторную работу № 12).

Эксперименты показывают (рис. 13.17), что равновесная цена, к которой стремится цена на товар с течением времени, не зависит от выбора начальных условий, а обусловлена постоянными коэффициентами уравнения (13.10).

Пример 3. Рассмотрим систему Лоренца:

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x), \\ y' = rx - y - xz, \\ z' = -bz + xy, \end{cases} \quad (13.13)$$

где σ, b, r — некоторые варьируемые положительные параметры. Эта модель носит имя исследователя, обнаружившего в 1963 году в численных расчетах хаотическое поведение ее траекторий. Система (13.13) возникает при изучении нескольких физических систем: конвекции жидкости в слое жидкости, одномодового лазера. Возьмем выбранные Лоренцем значения параметров $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ и, например, такие начальные условия:

$$\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 1, \\ z(0) = 1, \end{cases} \quad (13.14)$$

и методом двойной аппроксимации найдем численное решение на достаточно длинном отрезке, например, при $t \in [0; 70]$ с шагом $h = 0,01$. Фазовое пространство системы (13.13) $t = 0$ — обычное трехмерное пространство с координатными осями Ox, Oy, Oz . Получив решение, построим проекции интегральной кривой на плоскости tOx, tOy, tOz и проекции фазовых траекторий на координатные плоскости xOy, xOz, yOz . Чтобы удобно было проводить эксперименты с варьируемыми параметрами σ, b, r , будем хранить их в отдельных ячейках.

1. В строке 1 выполним необходимые подписи (рис. 13.18), шаг h введем в ячейку О1, σ, b, r — соответственно в О2, О3, О4, начальные условия $t_0 = 0, x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$ зададим соответственно в ячейках А2, В2, С2 и Д2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	t_i	x_i	y_i	z_i	f_1	f_2	f_3	x_i+1_pr	y_i+1_pr	z_i+1_pr	f_1_pr	f_2_pr	f_3_pr	h= 0,01	
2	0	1	1	1										sigma= 10	
3														b= 2,666667	
4														r= 28	
5															

Рис. 13.18. Подписи и начальные условия в задаче (13.13)—(13.14)

2. В строке 2 с учетом дальнейшего копирования вниз реализуем формулы (13.4), вычисляя в ячейках Е2:М2 последовательно $f_1(x_0, y_0, z_0)$, $f_2(x_0, y_0, z_0)$, $f_3(x_0, y_0, z_0)$, \tilde{x}_1 , \tilde{y}_1 , \tilde{z}_1 , $f_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$, $f_2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$, $f_3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$, а в строке 3 в ячейках А3, В3, С3, Д3 — t_1, x_1, y_1, z_1 :

E2: «=\$O\$2*(C2-B2)» ($f_1(x_0, y_0, z_0)$);

F2: «=\$O\$4*B2-C2-B2*D2» ($f_2(x_0, y_0, z_0)$);

G2: «=-\$O\$3*D2+B2*C2» ($f_3(x_0, y_0, z_0)$);

H2: «=B2+\$O\$1*E2» ($\tilde{x}_1 = x_0 + h \cdot f_1(x_0, y_0, z_0)$); копируем H2 в I2:J2;

I2: «=C2+\$O\$1*F2» ($\tilde{y}_1 = y_0 + h \cdot f_2(x_0, y_0, z_0)$);

J2: «=D2+\$O\$1*G2» ($\tilde{z}_1 = z_0 + h \cdot f_3(x_0, y_0, z_0)$);

копируем E2:G2 в K2:M2 через ячейки H2: J2 (выделим E2:G2 и курсором в виде четырехугольной стрелки правой кнопкой мыши переместим рамку на K2:M2; отпустив кнопку, выберем **Копировать**);

K2: «=\$O\$2*(I2-H2)» ($f_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$);

L2: «=\$O\$4*H2-I2-H2*I2» ($f_2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$);

M2: «=-\$O\$3*J2+H2*I2» ($f_3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$);

A3: «=A2+\$O\$1» ($t_1 = t_0 + h$);

B3: «=B2+\$O\$1/2*(E2+K2)» ($x_1 = x_0 + \frac{h}{2} \cdot (f_1(x_0, y_0, z_0) + f_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1))$); копируем B3 в C3:D3;

C3: «=C2+\$O\$1/2*(F2+L2)» ($y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot (f_2(x_0, y_0, z_0) + f_2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1))$);

D3: «=D2+\$O\$1/2*(G2+M2)» ($z_1 = z_0 + \frac{h}{2} \cdot (f_3(x_0, y_0, z_0) + f_3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1))$).

3. «Подровняем» строки 2 и 3, скопировав диапазон E2:M2 в E3:M3. После этого выделяем все ячейки с формулами в строке 3, то есть A3:M3, и копируем вниз до тех пор, пока значение аргумента в столбце А не станет равным 70 (потребуется более 7 000 строк).

4. Строим диаграммы — проекции интегральной кривой на плоскости tOx (рис. 13.19), tOy (рис. 13.20), tOz (рис. 13.21) и проекции фазовых траекторий на координатные плоскости xOy (рис. 13.22), xOz (рис. 13.23), yOz (рис. 13.24).

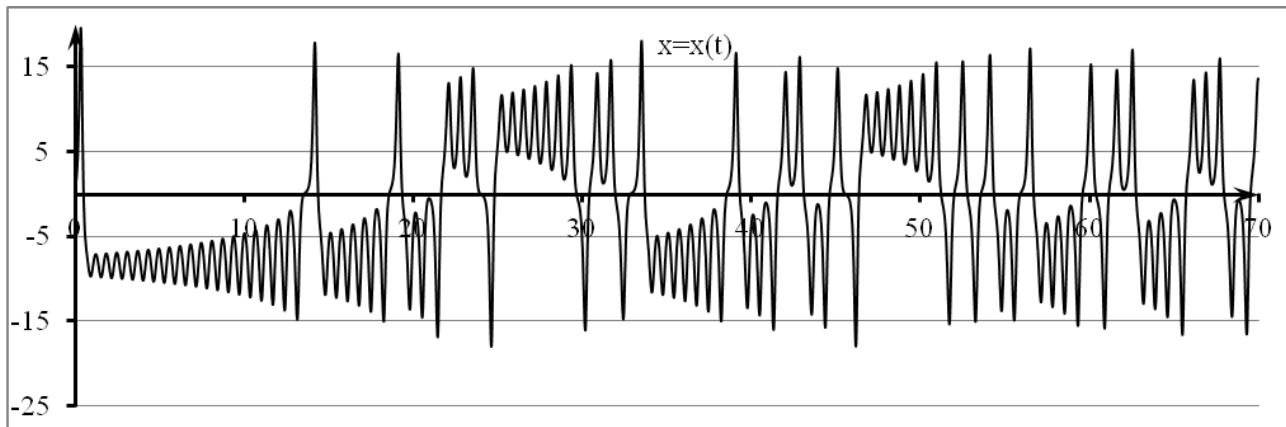


Рис. 13.19. Проекция интегральной кривой системы (13.13) на плоскость tOx

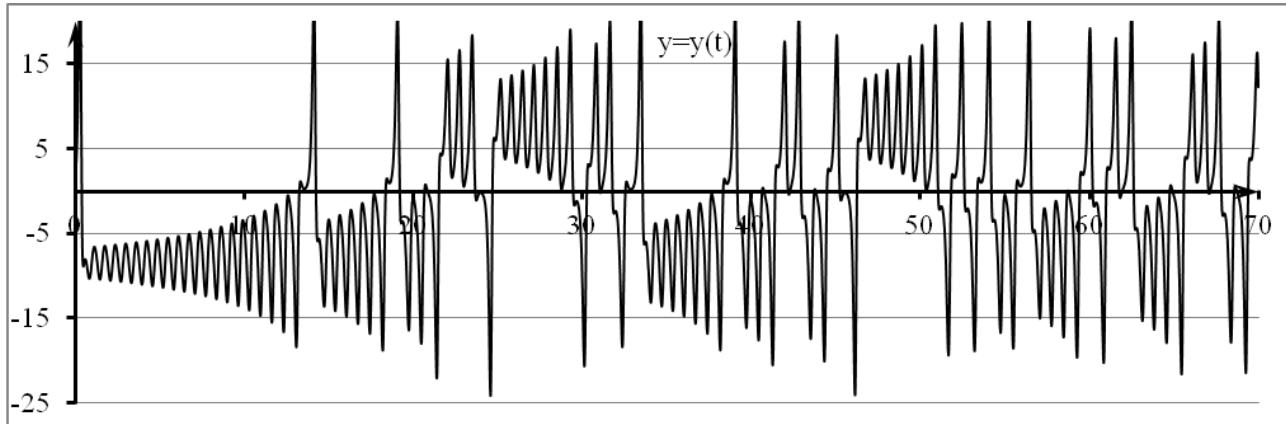


Рис. 13.20. Проекция интегральной кривой системы (13.13) на плоскость tOy

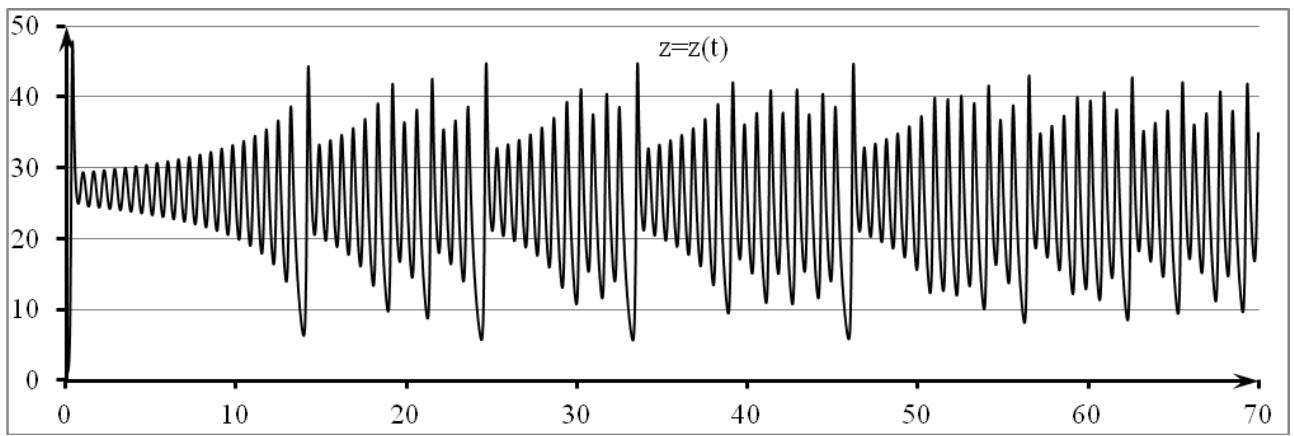


Рис. 13.21. Проекция интегральной кривой системы (13.13) на плоскость tOz

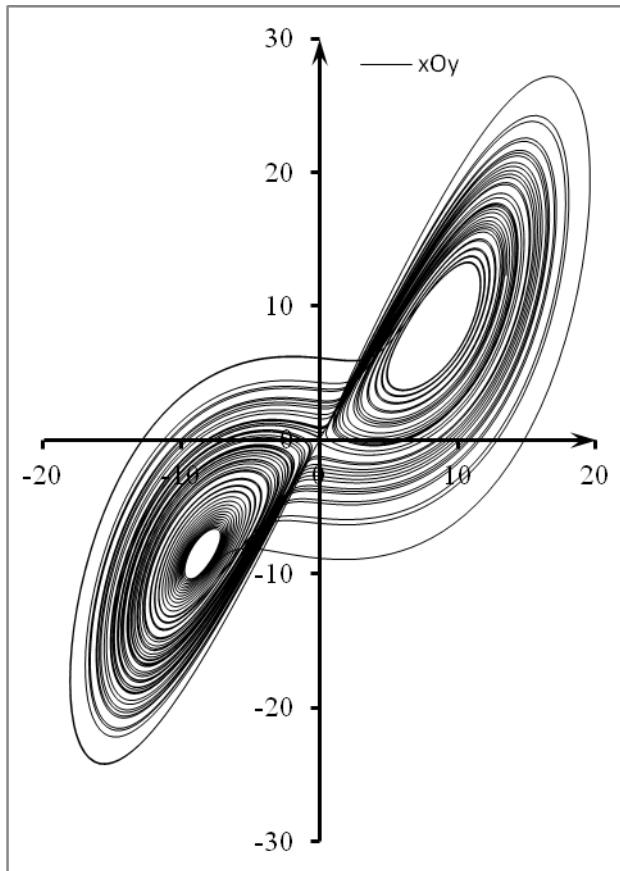


Рис. 13.22. Проекция фазовой траектории системы (13.13) на xOy

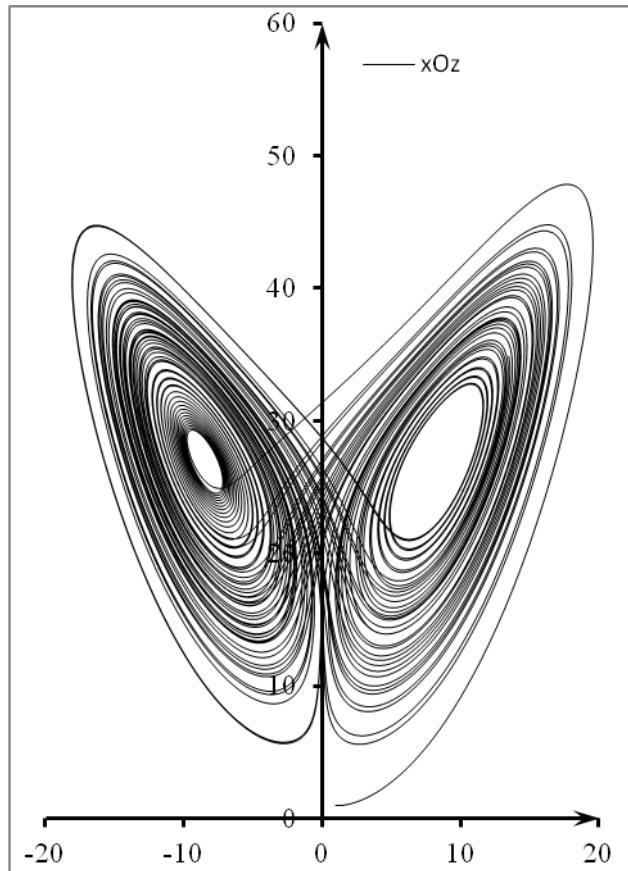


Рис. 13.23. Проекция фазовой траектории системы (13.13) на xOz

Траектория с течением времени стремится к чрезвычайно сложному ограниченному множеству фазового пространства — так называемому странному аттрактору.

Пронаблюдаем за взаимным расположением двух траекторий. Построим на одной диаграмме для $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ проекции двух интегральных кривых с близкими начальными условиями, например, $x_0 = -10$, $y_0 = 6$, $z_0 = 25$ и $x_0 = -10$, $y_0 = 6$, $z_0 = 25,1$ (рис. 13.25). Обе проекции построены для $t \in [0; 3,68]$. В начале черная и более светлая траектории практически сливаются на диаграмме. Затем некоторое время располагаются близко друг к другу и, наконец, быстро удаляются друг от друга на значительное расстояние. И как бы близко друг от друга не проходили траектории, с течением времени они достаточно быстро разойдутся. Поэтому если при решении реальной задачи возникают подобные ситуации, то предугадать решение этой задачи на достаточно большой промежуток времени невозможно, так

как всегда погрешность имеют начальные условия, численный метод интегрирования системы и машинное округление.

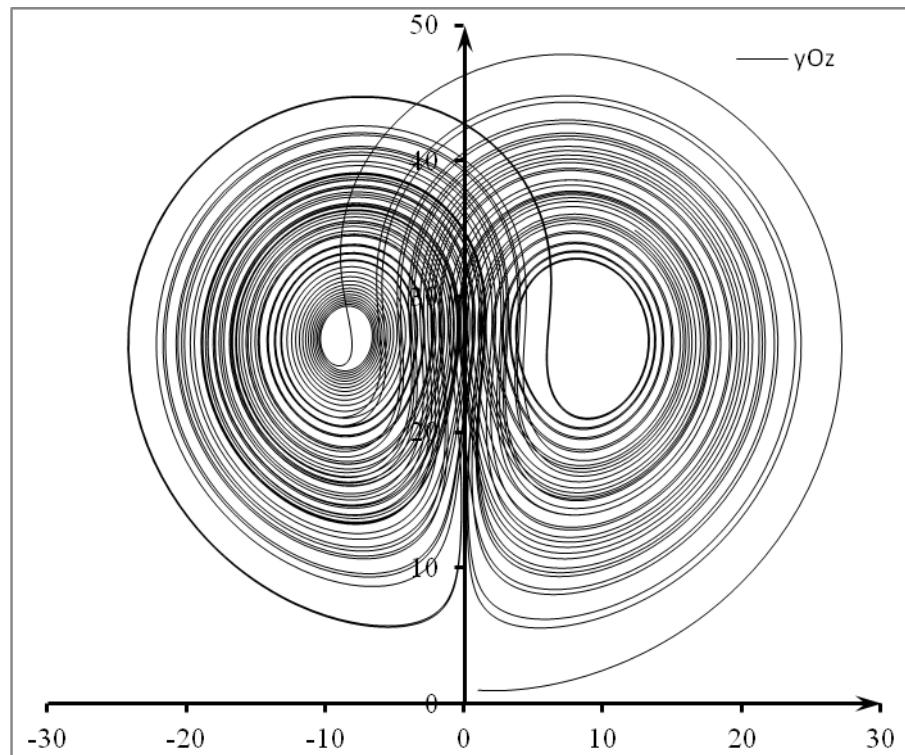


Рис. 13.24. Проекция фазовой траектории на yOz

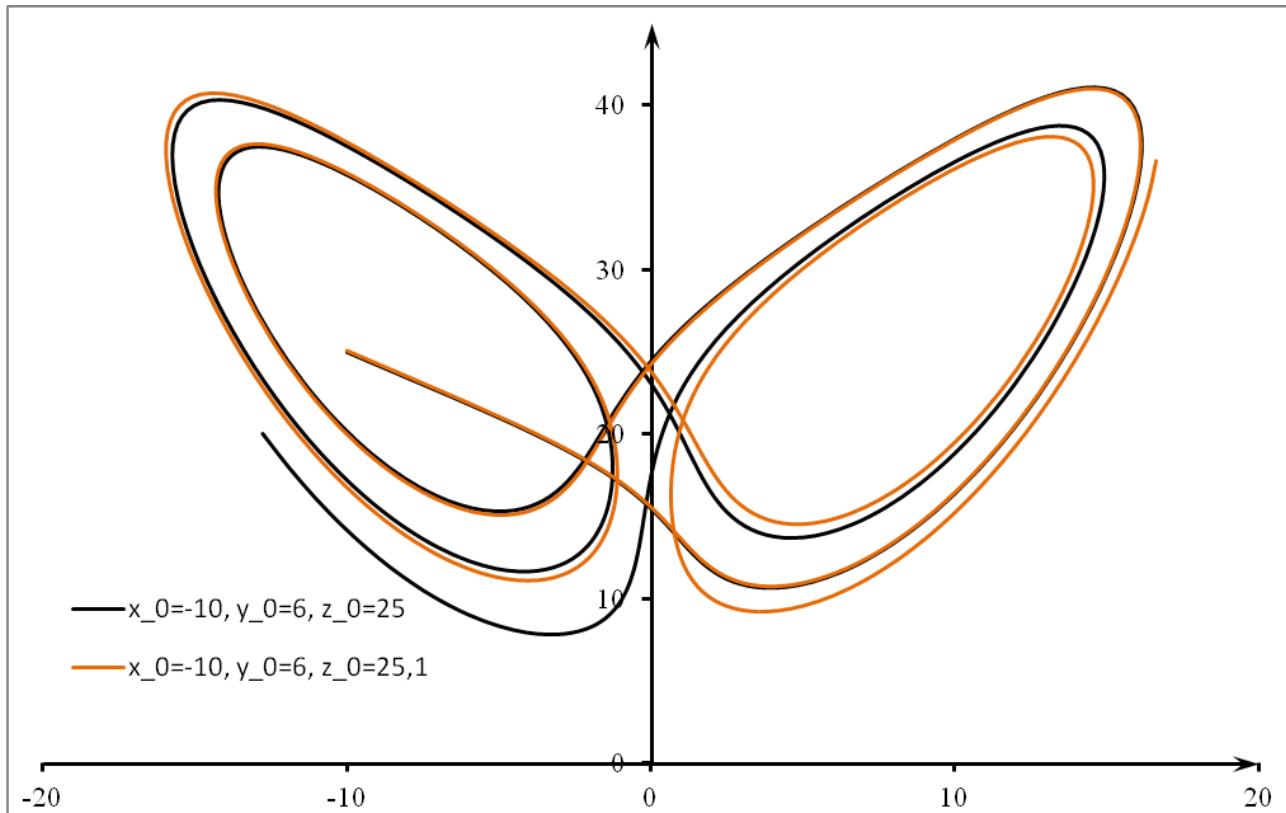


Рис. 13.25. Удаление траекторий друг от друга с течением времени

Проведем эксперименты с изменением параметров системы. Система Лоренца — знаменитая система, с ней проводились многочисленные эксперименты, ее поведение в зависимости от параметров хорошо исследовано. Поэтому приведем готовые примеры поведения си-

стемы Лоренца при характерных значениях параметров. Будем менять только один параметр, зафиксировав два других. Традиционно чаще изменяют параметр r , зафиксировав σ и b . В каждом случае будем строить только две диаграммы для одной начальной точки: одну проекцию интегральной кривой и одну проекцию фазовой траектории.

Пусть $\sigma = 10, b = 8/3, r = 0,9$. Доказано, что при $r < 1$ существует единственная притягивающая точка в фазовом пространстве — начало координат (рис. 13.26).

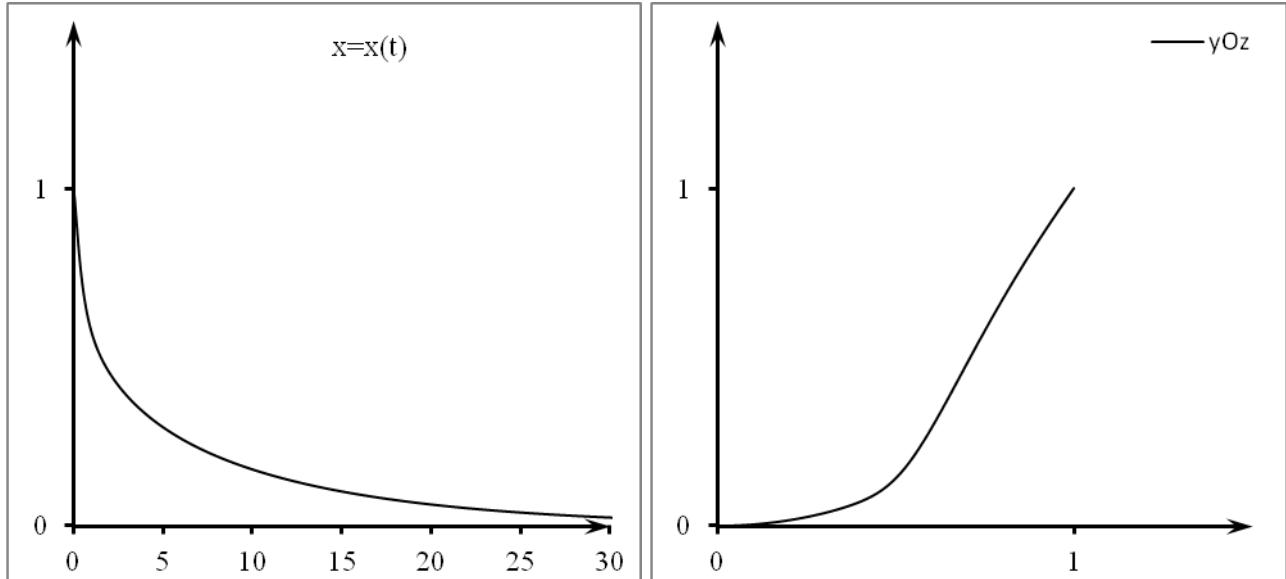


Рис. 13.26. Единственная притягивающая точка — начало координат — при $\sigma = 10, b = 8/3, r = 0,9$

Пусть $\sigma = 10, b = 8/3, r = 13$. При $1 < r < 13,926$ траектории стремятся к одной из неподвижных точек — точек фазового пространства, в которых все производные по времени равны нулю (правые части системы равны нулю). На рис. 13.27 изображена одна из таких траекторий. Неподвижными точками системы Лоренца являются точки $(0; 0; 0)$, $(\sqrt{b(r-1)}; \sqrt{b(r-1)}; r-1)$, $(-\sqrt{b(r-1)}; -\sqrt{b(r-1)}; r-1)$.

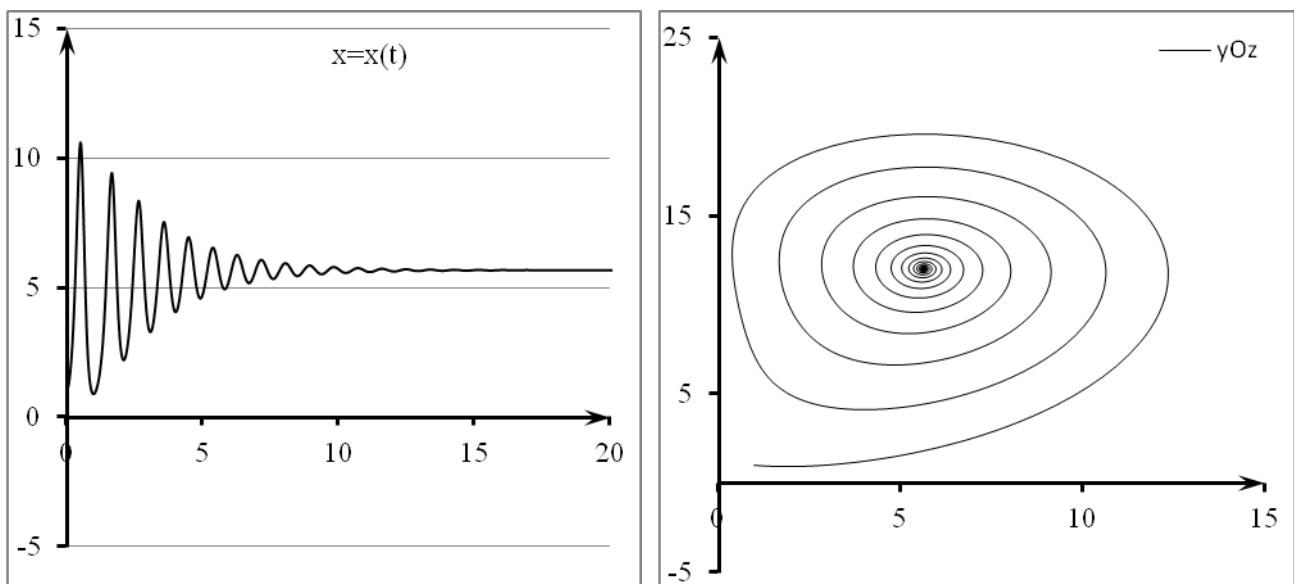


Рис. 13.27. Траектория с начальной точкой $(1; 1; 1)$ стремится к точке $(\sqrt{b(r-1)}; \sqrt{b(r-1)}; r-1)$

Пусть $\sigma = 10, b = 8/3, r = 17$. При $13,926 < r < 24,06$ существуют качественно различные траектории, но почти все траектории притягиваются к неподвижным точкам (рис. 13.28). При $r > 24,06$ траектории системы (13.13) с течением времени стремятся к странному аттрактору (рис. 13.19—13.24).

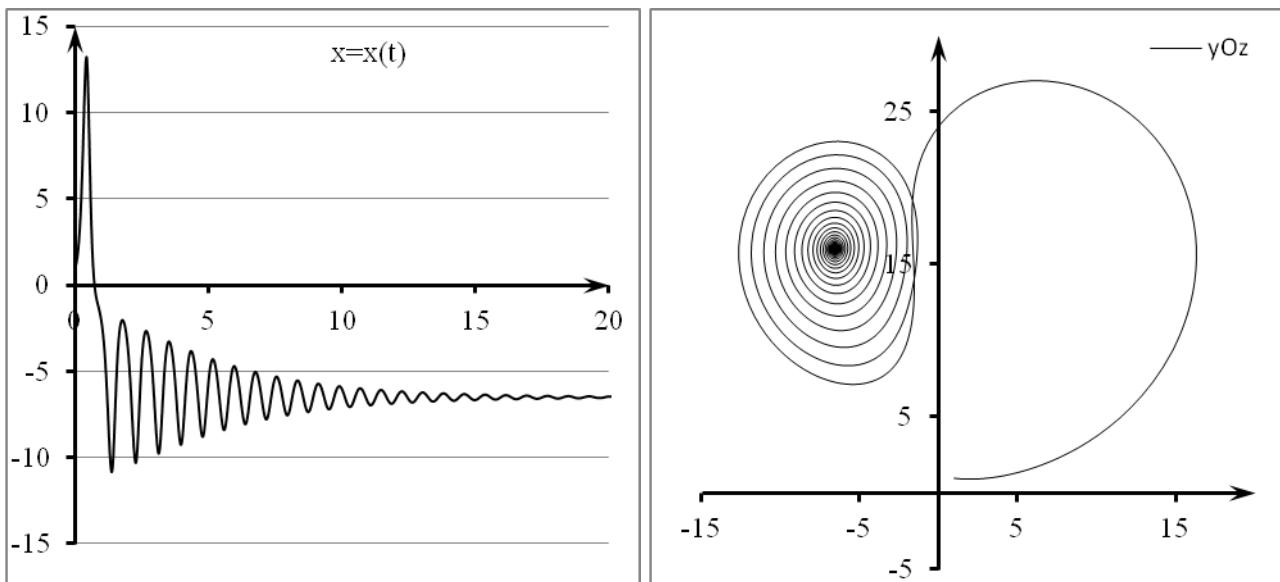


Рис. 13.28. Траектория с начальной точкой $(1; 1; 1)$ стремится к точке $(-\sqrt{b(r-1)}; -\sqrt{b(r-1)}; r-1)$

Существуют большие r , при которых траектории системы Лоренца стремятся к замкнутой кривой. Попытайтесь обнаружить такие r .

Самостоятельно постройте несколько проекций фазовых траекторий на одной диаграмме, задавая для них различные начальные условия, при различных значениях параметров: при $\sigma = 10, b = 8/3, r = 0,9$; при $\sigma = 10, b = 8/3, r = 13$; при $\sigma = 10, b = 8/3, r = 17$.

Задание для самостоятельной работы

Получите приближенные решения задачи Коши для указанной системы ОДУ методом Эйлера и методом двойной аппроксимации на отрезках различной длины с различными шагами. В среде табличного процессора *Excel* выполните графическое построение приближенного решения в системе координат xOy для всех данных начальных точек одновременно. Меняя значение параметра a в указанных пределах, пронаблюдайте изменение траекторий системы.

Вариант 1.

$$\begin{cases} x'(t) = ax^2 - y^2, \\ y'(t) = -4x + 2xy - 8, \end{cases} \quad a \in [3; 5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 0, y(0) = 2$;
2. $x(0) = 0, y(0) = -2$;
3. $x(0) = 2, y(0) = 3$;
4. $x(0) = 3, y(0) = 5$.

Вариант 2.

$$\begin{cases} x'(t) = -ax^2 + y^2, \\ y'(t) = 4x - 2xy + 8, \end{cases} \quad a \in [3; 5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 3, y(0) = -3$;
2. $x(0) = -1, y(0) = -3$;
3. $x(0) = -0,5, y(0) = 0$;
4. $x(0) = -2, y(0) = 0$.

Вариант 3.

$$\begin{cases} x'(t) = -y + x(a - x^2 - y^2), \\ y'(t) = x + y(a - x^2 - y^2), \end{cases} \quad a \in [0,5; 1,5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 2, y(0) = 0$;
2. $x(0) = 0, y(0) = 0,5$;
3. $x(0) = -2, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 0, y(0) = -0,8$.

Вариант 4.

$$\begin{cases} x'(t) = y - x(a - x^2 - y^2), \\ y'(t) = -x - y(a - x^2 - y^2), \end{cases} \quad a \in [0,5; 1,5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 0, y(0) = 1,1$;
2. $x(0) = 0,5, y(0) = 0$;
3. $x(0) = -2, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 0, y(0) = -0,8$.

Вариант 5.

$$\begin{cases} x'(t) = x - ay, \\ y'(t) = 2x - y, \end{cases} \quad a \in [2; 4].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 1, y(0) = 0$;
2. $x(0) = 2, y(0) = 0$;
3. $x(0) = 3, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 4, y(0) = 0$.

Вариант 6.

$$\begin{cases} x'(t) = -ay, \\ y'(t) = 2x - y, \end{cases} \quad a \in [2; 4].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 1, y(0) = 0$;
2. $x(0) = 2, y(0) = 0$;
3. $x(0) = 3, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 4, y(0) = 0$.

Вариант 7.

$$\begin{cases} x'(t) = -ax^2 - y^2, \\ y'(t) = 4x - 2xy - 8, \end{cases} \quad a \in [3; 5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 0, y(0) = 2$;
2. $x(0) = 0, y(0) = -2$;
3. $x(0) = -2, y(0) = 3$;
4. $x(0) = -3, y(0) = 5$.

Вариант 8.

$$\begin{cases} x'(t) = ax^2 - y^2, \\ y'(t) = -4x + 2xy + 8, \end{cases} \quad a \in [3; 5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = -3, y(0) = -3$;
2. $x(0) = 1, y(0) = -3$;
3. $x(0) = 0,5, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 2, y(0) = 0$.

Вариант 9.

$$\begin{cases} x'(t) = -y + x(a - x^2 - y^2), \\ y'(t) = -x + y(a - x^2 - y^2), \end{cases} \quad a \in [0,5; 1,5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = -2, y(0) = 0$;
2. $x(0) = 0, y(0) = 0,5$;
3. $x(0) = 2, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 0, y(0) = -0,8$.

Вариант 10.

$$\begin{cases} x'(t) = y - x(a - x^2 - y^2), \\ y'(t) = x - y(a - x^2 - y^2), \end{cases} \quad a \in [0,5; 1,5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 0, y(0) = 1,1$;
2. $x(0) = -0,5, y(0) = 0$;
3. $x(0) = 2, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 0, y(0) = -0,8$.

Вариант 11.

$$\begin{cases} x'(t) = x + ay, \\ y'(t) = -2x - y, \end{cases} \quad a \in [2; 4].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = -1, y(0) = 0$;
2. $x(0) = -2, y(0) = 0$;
3. $x(0) = -3, y(0) = 0$;
4. $x(0) = -4, y(0) = 0$.

Вариант 12.

$$\begin{cases} x'(t) = ay, \\ y'(t) = -2x - y, \end{cases} \quad a \in [2; 4].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = -1, y(0) = 0$;
2. $x(0) = -2, y(0) = 0$;
3. $x(0) = -3, y(0) = 0$;
4. $x(0) = -4, y(0) = 0$.

Вариант 13.

$$\begin{cases} x'(t) = ax^2 - y^2, \\ y'(t) = 4x + 2xy + 8, \end{cases} \quad a \in [3; 5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 0, y(0) = 2$;
2. $x(0) = 0, y(0) = -2$;
3. $x(0) = 2, y(0) = -3$;
4. $x(0) = 3, y(0) = -5$.

Вариант 14.

$$\begin{cases} x'(t) = -ax^2 + y^2, \\ y'(t) = -4x - 2xy - 8, \end{cases} \quad a \in [3; 5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 3, y(0) = 3$;
2. $x(0) = -1, y(0) = 3$;
3. $x(0) = -0,5, y(0) = 0$;
4. $x(0) = -2, y(0) = 0$.

Вариант 15.

$$\begin{cases} x'(t) = y + x(a - x^2 - y^2), \\ y'(t) = -x + y(a - x^2 - y^2), \end{cases} \quad a \in [0,5; 1,5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 2, y(0) = 0$;
2. $x(0) = 0, y(0) = -0,5$;
3. $x(0) = -2, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 0, y(0) = 0,8$.

Вариант 16.

$$\begin{cases} x'(t) = -y - x(a - x^2 - y^2), \\ y'(t) = x - y(a - x^2 - y^2), \end{cases} \quad a \in [0,5; 1,5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 0, y(0) = -1,1$;
2. $x(0) = 0,5, y(0) = 0$;
3. $x(0) = -2, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 0, y(0) = 0,8$.

Вариант 17.

$$\begin{cases} x'(t) = x + ay, \\ y'(t) = -2x - y, \end{cases} \quad a \in [2; 4].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 1, y(0) = 0$;
2. $x(0) = 2, y(0) = 0$;
3. $x(0) = 3, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 4, y(0) = 0$.

Вариант 18.

$$\begin{cases} x'(t) = ay, \\ y'(t) = -2x - y, \end{cases} \quad a \in [2; 4].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 1, y(0) = 0$;
2. $x(0) = 2, y(0) = 0$;
3. $x(0) = 3, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 4, y(0) = 0$.

Вариант 19.

$$\begin{cases} x'(t) = -ax^2 + y^2, \\ y'(t) = -4x - 2xy + 8, \end{cases} \quad a \in [3; 5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = 0, y(0) = 2$;
2. $x(0) = 0, y(0) = -2$;
3. $x(0) = -2, y(0) = -3$;
4. $x(0) = -3, y(0) = -5$.

Вариант 20.

$$\begin{cases} x'(t) = ax^2 - y^2, \\ y'(t) = 4x + 2xy - 8, \end{cases} \quad a \in [3; 5].$$

Начальные условия:

1. $x(0) = -3, y(0) = 3$;
2. $x(0) = 1, y(0) = 3$;
3. $x(0) = 0,5, y(0) = 0$;
4. $x(0) = 2, y(0) = 0$.

Лабораторная работа № 14
Метод наименьших квадратов обработки экспериментальных данных.
Линейная модель. Полиномиальная модель

Пусть проведен эксперимент по установлению зависимости значений некоторого параметра y от значений параметра x . Результаты эксперимента можно оформить в виде таблицы (табл. 1), где n — количество измерений.

Таблица 1. Результаты эксперимента

x_i	x_1	x_2	...	x_n
y_i	y_1	y_2	...	y_n

Измеренные величины y_i носят часто некоторый усредненный характер. Например, в результате многократного повторения эксперимента при одной и той же величине x_i получают разные значения y_i , немного отличающиеся друг от друга, а потом находят среднее арифметическое этих значений. Вот это среднее и вносят в таблицу. Точки из таблицы можно отметить на координатной плоскости (рис. 14.1). Полученную диаграмму называют *диаграммой рассеивания*. Если точки из таблицы располагаются близко к некоторой кривой, то возникает гипотеза о функциональной зависимости y от x : $y = y(x)$ (рис. 14.2). Исследователю, проводившему эксперимент, необходимо установить явный вид функции $y = y(x)$.

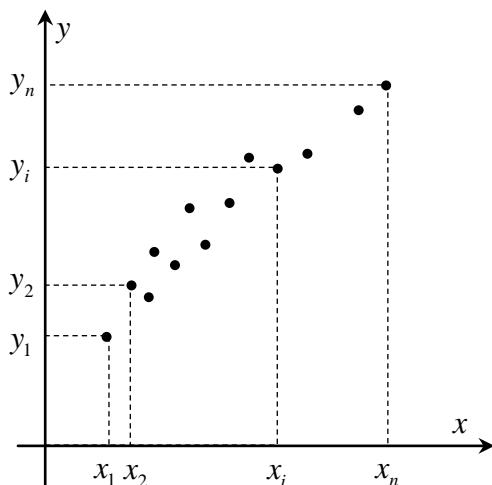


Рис. 14.1. Диаграмма рассеивания

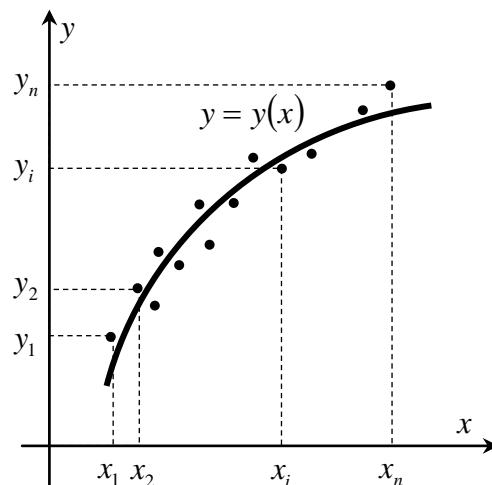


Рис. 14.2. Функциональная зависимость
 $y = y(x)$

Для нахождения явного вида $y = y(x)$ можно построить интерполяционный многочлен, который будет проходить через все точки из таблицы. Но значения y_i , полученные в результате эксперимента, носят приближенный характер, поэтому лучше получить достаточно простое уравнение кривой $y = y(x)$, которая проходит близко к точкам из таблицы, хотя точки могут и не принадлежать этой кривой. Функцию $y = y(x)$ называют в этом случае *приближающей функцией*. Если уравнение $y = y(x)$ получено, то можно делать расчеты и в промежуточных точках (интерполировать функцию, заданную таблично), и за пределами таблицы (экстраполировать функцию, делать прогноз).

Пример 1. В «Основах химии» Д. И. Менделеев приводит данные растворимости y азотно-натриевой соли $NaNO_3$ на 100 г воды в зависимости от температуры x в виде таблицы (табл. 2) и указывает, что это — линейная зависимость, и ее можно выразить формулой $y = 0,87x + 67,51$. Докажем это.

Таблица 2. Зависимость растворимости $NaNO_3$ от температуры

x_i	0°	4°	10°	15°	21°	29°	36°	51°	68°
y_i	66,7	71,0	76,3	80,6	85,7	92,9	99,4	113,6	125,1

Для начала надо убедиться, что полученная экспериментально зависимость $y(x)$ — линейная. Построим диаграмму рассеивания, отметив точки из таблицы на координатной плоскости xOy (рис. 14.3).

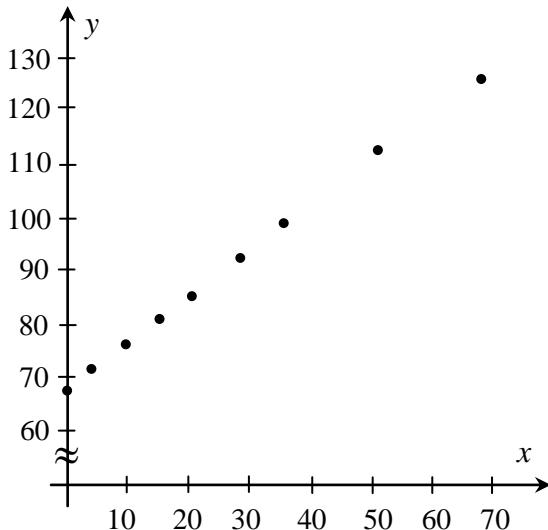


Рис. 14.3. Диаграмма рассеивания для примера 1

Видим, что точки расположены близко к некоторой прямой, хотя и не принадлежат ей все. Значит, искать зависимость $y = y(x)$ будем в виде линейной функции. Иными словами, построим линейную математическую модель зависимости y от x .

Уравнение прямой в общем виде записывается как

$$y = ax + b. \quad (14.1)$$

Нам нужно найти неизвестные коэффициенты a и b . Найдем их в общем виде на основе табл. 1.

Допустим, что задача решена, и коэффициенты a и b зависимости (14.1) найдены. Подставляя табличные значения аргумента x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, в формулу (14.1), получим, скорее всего, не точные значения y_i , а некоторые числа \bar{y}_i , близкие к y_i :

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= ax_1 + b \approx y_1, \\ &\dots \\ \bar{y}_n &= ax_n + b \approx y_n. \end{aligned} \quad (14.2)$$

Назовем \bar{y}_i значением функции по модели или модельным значением в точке x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Всю совокупность величин y_1, \dots, y_n или $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ можно интерпретировать как координаты двух точек n -мерного пространства. И в совокупности величины y_1, \dots, y_n должны как можно меньше отличаться от соответствующих $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$. То есть модель (14.1) должна быть такой, что расстояние между точками (y_1, \dots, y_n) и $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ n -мерного пространства должно быть как можно меньше:

$$\sqrt{(\bar{y}_1 - y_1)^2 + (\bar{y}_2 - y_2)^2 + \dots + (\bar{y}_n - y_n)^2} \rightarrow \min. \quad (14.3)$$

Так как функция $y = \sqrt{x}$ монотонно возрастает, и меньшему значению подкоренного выражения соответствует меньшее значение функции, то задачу (14.3) можно переформулировать:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2 \rightarrow \min. \quad (14.4)$$

Используя формулы (14.2) для выражения \bar{y}_i , перепишем левую часть условия (14.4) в виде:

$$\sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - y_i)^2 = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2.$$

Получили функцию $\Phi(a, b)$, зависящую от двух переменных:

$$\Phi(a, b) = (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2. \quad (14.5)$$

Необходимым условием экстремума функции двух переменных является одновременное обращение в ноль частных производных:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0. \quad (14.6)$$

Найдем $\frac{\partial \Phi}{\partial a}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) \cdot x_1 + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) \cdot x_2 + \dots + 2 \cdot (ax_n + b - y_n) \cdot x_n.$$

Приравняв полученное выражение к нулю, поделив обе части равенства на 2, раскрыв скобки, приведя подобные слагаемые, получаем уравнение:

$$a \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + b \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n. \quad (14.7)$$

Множители в скобках и правая часть равенства — числа. Значит, (14.7) — линейное уравнение относительно a и b .

Найдем $\frac{\partial \Phi}{\partial b}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = 2 \cdot (ax_1 + b - y_1) + 2 \cdot (ax_2 + b - y_2) + \dots + 2 \cdot (ax_n + b - y_n).$$

Аналогично уравнению (14.7) получаем еще одно линейное уравнение относительно a и b :

$$a \cdot (x_1 + x_2 + \dots + x_n) + b \cdot n = y_1 + y_2 + \dots + y_n. \quad (14.8)$$

В итоге получили систему линейных алгебраических уравнений (14.7) и (14.8) относительно искомых коэффициентов a и b :

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (14.9)$$

Решив систему (14.9), например, методом Крамера, найдем a и b . Это — координаты стационарной точки функции $\Phi(a, b)$. Из геометрических соображений ясно, что в этой точке $\Phi(a, b)$ принимает свое наименьшее значение.

Вернемся к рассмотренному примеру. Найдем необходимые числовые значения $\sum_{i=1}^n x_i$,

$$\sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ и } \sum_{i=1}^n y_i^2 \text{ системы (14.9), используя данные из таблицы 2:}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0^2 + 4^2 + 10^2 + 15^2 + 21^2 + 29^2 + 36^2 + 51^2 + 68^2 = 10144,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 + 4 + 10 + 15 + 21 + 29 + 36 + 51 + 68,$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = 0 \cdot 66,7 + 4 \cdot 71,0 + 10 \cdot 76,3 + 15 \cdot 80,6 + 21 \cdot 85,7 + 29 \cdot 92,9 + 36 \cdot 99,4 + 51 \cdot 113,6 + 68 \cdot 125,1 = 24628,6,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 66,7 + 71,0 + 76,3 + 80,6 + 85,7 + 92,9 + 99,4 + 113,6 + 125,1 = 811,3.$$

Подставим полученные данные в систему (14.9):

$$\begin{cases} 10144a + 234b = 24628,6, \\ 234a + 9b = 811,3. \end{cases} \quad (14.10)$$

Решим систему (14.10) методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10144 & 234 \\ 234 & 9 \end{vmatrix} = 10144 \cdot 9 - 234^2 = 36540, \quad \Delta_a = \begin{vmatrix} 24628,6 & 234 \\ 811,3 & 9 \end{vmatrix} = 31813,2,$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 10144 & 24628,6 \\ 234 & 811,3 \end{vmatrix} = 2466734,8,$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{31813,2}{36540} = 0,8706\dots \approx 0,87, \quad b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{2466734,8}{36540} = 67,507\dots \approx 67,51.$$

Получили: $a \approx 0,87$ и $b \approx 67,51$. Отсюда искомая зависимость выражается формулой $y(x) = 0,87x + 67,51$, что и было получено Д. И. Менделеевым.

Отметим, что метод нахождения коэффициентов a и b как решения системы (14.9) получился в результате решения задачи (14.4) минимизации суммы квадратов разностей модельных и измеренных значений y , поэтому он называется *методом наименьших квадратов*.

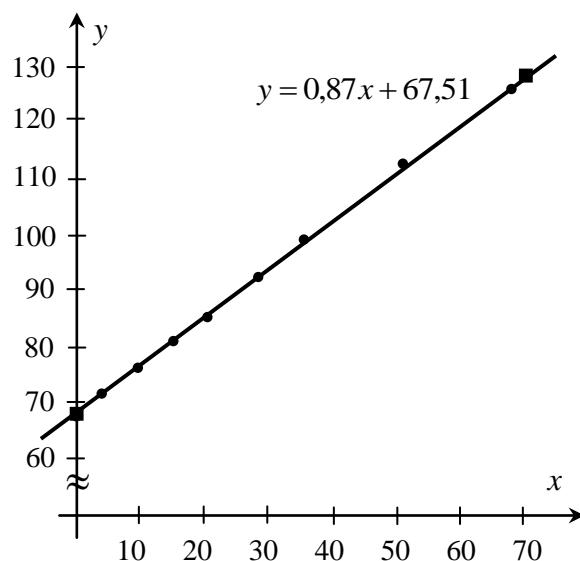


Рис. 14.4. Проверка адекватности модели

Проверим адекватность полученной математической модели $y = 0,87x + 67,51$, то есть соответствие модели условию задачи. Для этого на имеющейся диаграмме рассеивания (рис. 14.3) построим найденную прямую (рис. 14.4). Для построения прямой достаточно знать координаты двух ее точек, например, таких: $(0; 67,51)$ и $(70; 128,41)$.

Видим, что полученная математическая модель $y = 0,87x + 67,51$ адекватно отображает результаты эксперимента из табл. 2: полученные экспериментально точки располагаются достаточно близко к графику этой прямой.

Пример 2. Экономисты исследовали изменение спроса y в зависимости от параметра x . У них получилась следующая таблица (табл. 4):

Таблица 4. Зависимость спроса y от параметра x

x	0,2	0,3	0,6	0,8	0,9	1,4	1,6	1,9	2,3
y	5,7	5,4	4,7	4,4	4,2	3,1	2,7	2,1	1,1

Экономисты хотят получить конкретную формулу зависимости y от параметра x , чтобы сделать расчеты в промежуточных точках, например, при $x = 1,1$, $x = 2,1$, и сделать прогноз по модели, например, при $x = 2,8$.

Решение.

Реализуем вычисления, аналогичные вычислениям в примере 1, в среде *Excel*.

- Перенесем данные из таблицы на лист документа: значения x введем в ячейки B1:J1, значения y — в B2:J2.
- Нанесем точки из таблицы на диаграмму рассеивания (рис. 14.5). Видим, что y зависит от x линейно.

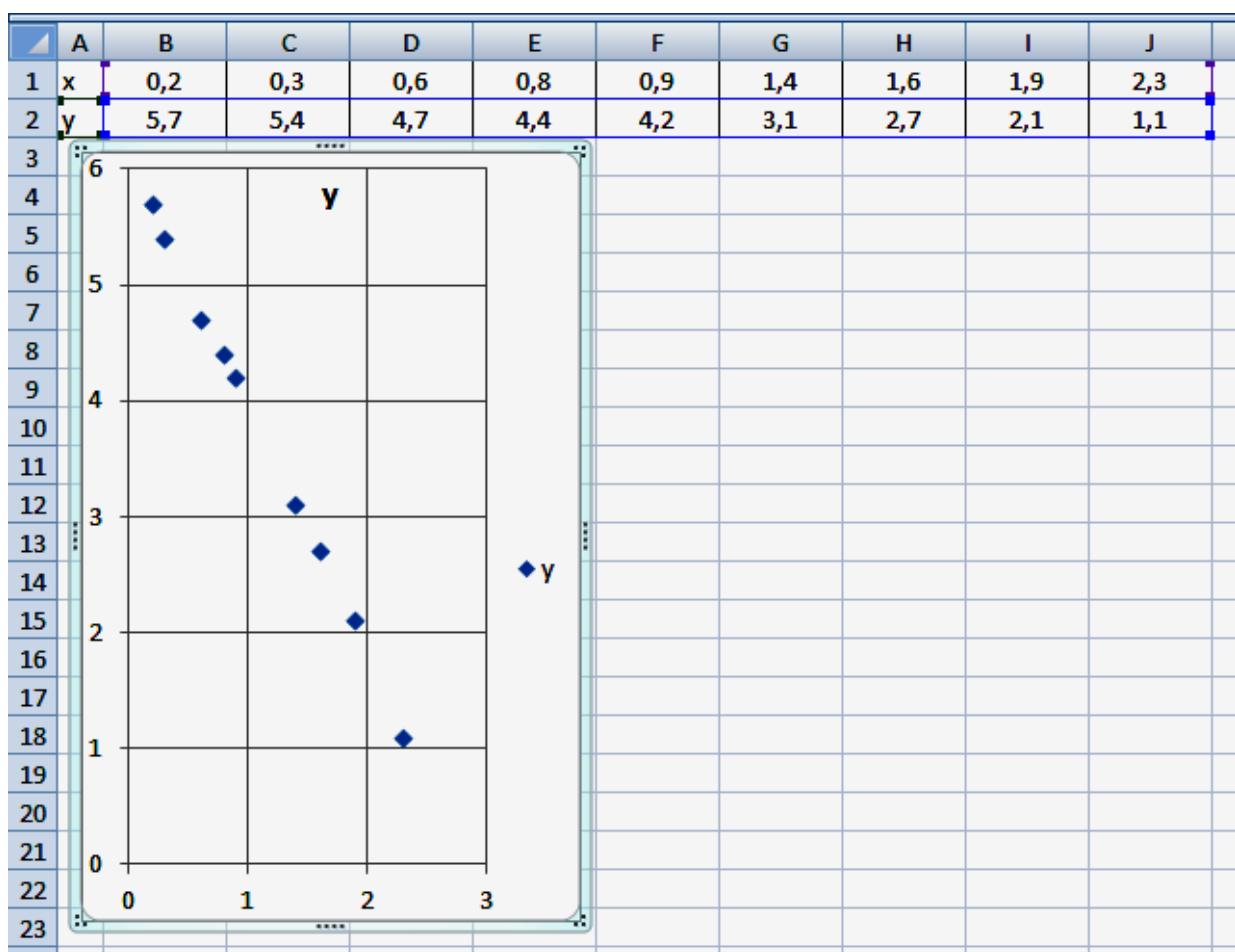


Рис. 14.5. Таблица и диаграмма рассеивания в *Excel*

3. Найдем необходимые для системы (14.9) значения сумм. При этом суммы $\sum_{i=1}^n x_i$ и $\sum_{i=1}^n y_i$ можно найти непосредственно на основе имеющейся таблицы, а для получения сумм $\sum_{i=1}^n x_i^2$ и $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ надо предварительно организовать вычисление отдельных слагаемых. Для этого введем формулы в ячейки (рис. 14.6):

B3: «=B1*B1» и скопирую B3 в C3:J3, получим отдельные слагаемые суммы $\sum_{i=1}^n x_i^2$;

B4: «=СУММ(B1:J1)» $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$;

B5: «=B1*B2» и скопирую B5 в C5:J5, получим отдельные слагаемые суммы $\sum_{i=1}^n x_i y_i$;

B6: «=СУММ(B2:J2)» $\left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$;

K3: «=СУММ(B3:J3)» $\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$;

K5: «=СУММ(B5:J5)» $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	0,2	0,3	0,6	0,8	0,9	1,4	1,6	1,9	2,3	
2	y	5,7	5,4	4,7	4,4	4,2	3,1	2,7	2,1	1,1	
3	S_x^2=	0,04	0,09	0,36	0,64	0,81	1,96	2,56	3,61	5,29	15,36
4	S_x=	10									
5	S_x*y=	1,14	1,62	2,82	3,52	3,78	4,34	4,32	3,99	2,53	28,06
6	S_y=	33,4									
7											

Рис. 14.6. Вычисление необходимых сумм

Известно, что число измерений $n = 9$. Следовательно, имеются все данные для построения системы (14.9): $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 15,36$, $\sum_{i=1}^n x_i = 10$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i = 28,06$ и $\sum_{i=1}^n y_i = 33,4$.

4. Решим систему $\begin{cases} 15,36a + 10b = 28,06, \\ 10a + 9b = 33,4. \end{cases}$ методом Крамера в Excel. Формулы для расчета

Δ , Δ_a , Δ_b , a , b ясны из рис. 14.7. Получили коэффициенты линейной зависимости $y = ax + b$: $a \approx -2,13023$ и $b \approx 6,078033$, то есть формулу $y = -2,13023x + 6,078033$.

	A	B
7	$n=$	9
8	$\delta=$	=K3*B7-B4*B4
9	$\delta_a=$	=K5*B7-B6*B4
10	$\delta_b=$	=K3*B6-B4*K5
11	$a=$	=B9/B8
12	$b=$	=B10/B8
13		

	A	B
7	$n=$	9
8	$\delta=$	38,24
9	$\delta_a=$	-81,46
10	$\delta_b=$	232,424
11	$a=$	-2,13023
12	$b=$	6,078033
13		

Рис. 14.7. Формулы для вычисления и значения Δ , Δ_a , Δ_b , a , b

5. Проверим адекватность этой модели. Достаточно составить таблицу значений полученной функции, состоящую из двух точек, например, $x=0$ и $x=3$, и на диаграмме рассеивания, полученной выше, построить прямую $y = -2,13023x + 6,078033$ по двум точкам. Но лучше рассчитаем значения y , полученные по модели, и на основе этих значений поместим еще один ряд данных на диаграмму рассеивания. Добавим еще одну строку после строки 2 (все результаты переместятся вниз) и в ячейку B3 введем формулу «=B\$12*B1+\$B\$13» (рис. 14.8). Скопируем B3 в C3:J3 и добавим модельный ряд данных на имеющуюся диаграмму. При этом можно оставить тип диаграммы **Точечная** (рис. 14.9) или представить модельный ряд данных в виде сплошной не сглаженной линии (рис. 14.10).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	x	0,2	0,3	0,6	0,8	0,9	1,4	1,6	1,9	2,3	
2	y	5,7	5,4	4,7	4,4	4,2	3,1	2,7	2,1	1,1	
3	model	=B\$12*B1+\$B\$13	5,438964	4,799895	4,373849	4,160826	3,095711	2,669665	2,030596	1,178504	
4	S_x^2=	SB\$13	0,09	0,36	0,64	0,81	1,96	2,56	3,61	5,29	15,36
5	S_x=	10									
6	S_x*y=	1,14	1,62	2,82	3,52	3,78	4,34	4,32	3,99	2,53	28,06
7	S_y=	33,4									
8	n=	9									
9	delta=	38,24									
10	delta_a=	-81,46									
11	delta_b=	232,424									
12	a=	-2,13023013									
13	b=	6,07803347									
14											

Рис. 14.8. Расчет модельных значений y

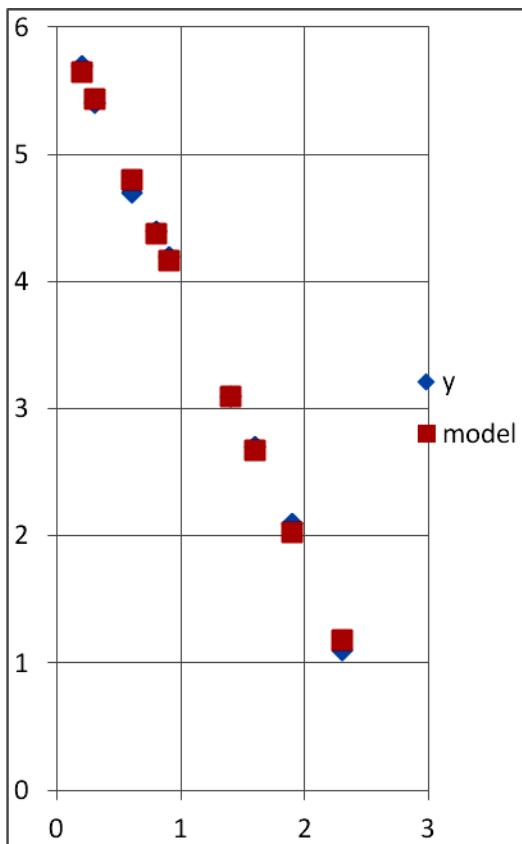


Рис. 14.9. Модель в виде точек

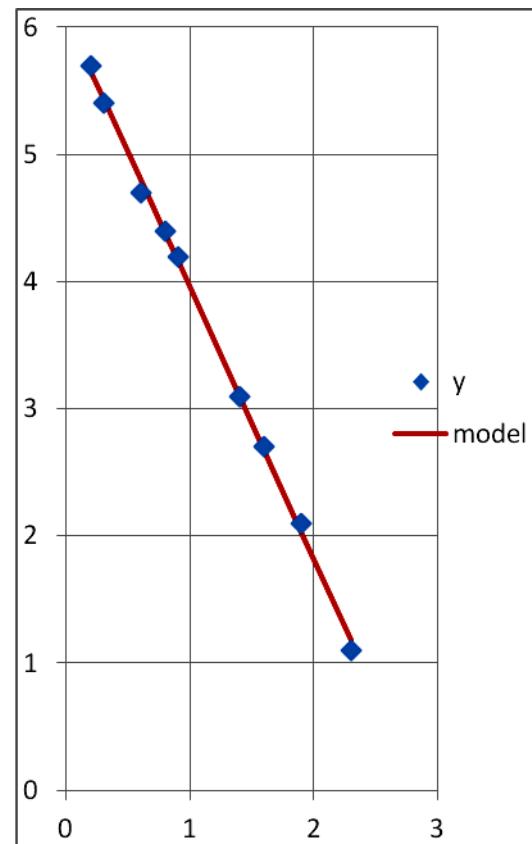


Рис. 14.10. Модель в виде сплошной линии

И по модельным числовым значениям в строке 3, и по расположению найденной прямой видим, что полученная модель адекватна.

Теперь можно легко найти значения y при $x = 1,1$, $x = 2,1$ и сделать прогноз при $x = 2,8$. Для этого в строке 1 добавим дополнительно значения аргумента 1,1, 2,1, и 2,8. Скопировав формулу в ячейке J3 вправо в K3:M3, получим необходимые значения: $y(1,1) = 3,779$, $y(2,1) = 1,769$, $y(2,8) = 0,362$.

Параметры a и b линейной модели можно найти с помощью встроенных функций НАКЛОН и ОТРЕЗОК соответственно, вызвав меню вставки функций и выбрав категорию Статистические. Далее в открывшемся диалоговом окне необходимо провести диалог (рис. 14.11), аналогичный для обеих функций. Например, в ячейку C12 рядом с вычисленным ранее в B12 значением a вставим функцию НАКЛОН, а в ячейку C13 — ОТРЕЗОК.

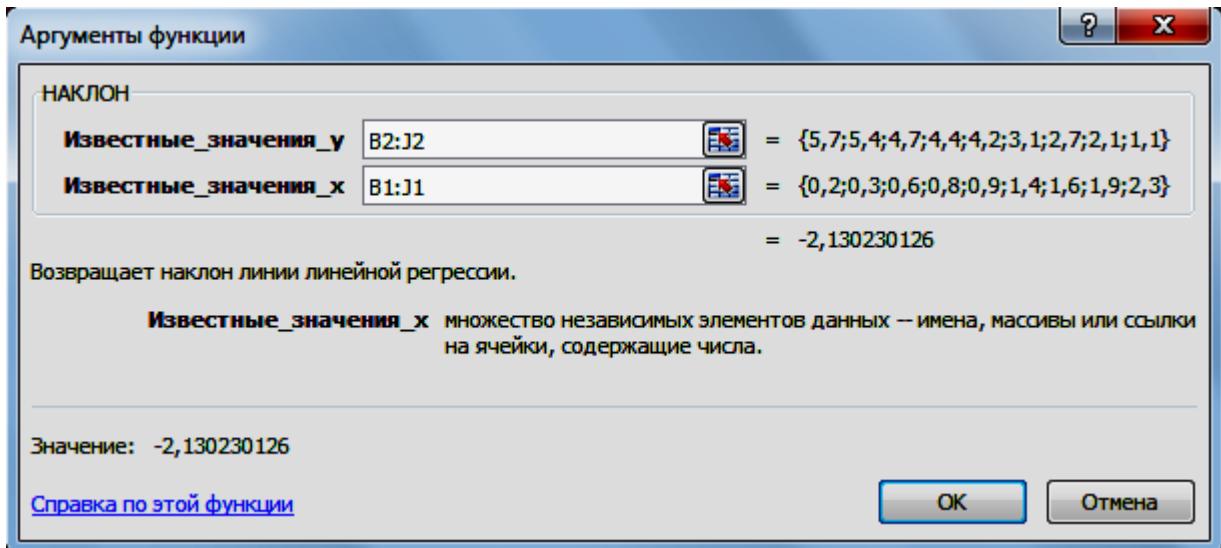


Рис. 14.11. Диалоговое окно функции НАКЛОН

В режиме проверки формул данные функции представлены в виде формул, изображенных в ячейках C12 и C13 (рис. 14.12). Здесь диапазон B2:J2 — известные значения y из табл. 4, диапазон B1:J1 — известные значения x . Данные формулы можно ввести и с помощью клавиатуры. При возвращении в обычный режим видим, что значения параметров a и b , полученные при решении системы методом Крамера и при использовании встроенных функций, совпадают (рис. 14.13).

	A	B	C
12	$a = B10/B9$	=NAKLON(B2:J2;B1:J1)	
13	$b = B11/B9$	=OTREZOK(B2:J2;B1:J1)	
14			

Рис. 14.12. Функции НАКЛОН и ОТРЕЗОК

	A	B	C
12	$a = -2,1302301$	-2,1302301	
13	$b = 6,0780335$	6,07803347	
14			

Рис. 14.13. Результаты

Также в Excel есть встроенная функция ЛИНЕЙН. Она возвращает сразу два параметра a и b линейного приближения по методу наименьших квадратов. Для того чтобы воспользоваться этой функцией в данном случае, необходимо выделить две горизонтальные ячейки, вызвать меню вставки функций и в категории Статистические найти функцию ЛИНЕЙН. Диалог в открывшемся окне аналогичен диалогу в окне функций НАКЛОН или ОТРЕЗОК. Поскольку результат этой функции помещается в диапазон ячеек (две ячейки), то закончить диалог надо, одновременно нажав **Ctrl, Shift** и **Enter**. После этого увидим, что в выделенных ячейках появятся те же самые значения параметров, что и ранее. Самостоятельно реализуйте вызов функции ЛИНЕЙН в этом примере.

Оказывается, по данным из табл. 1, полученным экспериментально, можно построить полином любой степени, проходящий ближе других полиномов такой же степени к точкам

из таблицы. Будем, например, искать приближающую функцию в виде полинома второй степени

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (14.11)$$

Так же как и в случае вычисления коэффициентов линейной зависимости (14.1) для нахождения коэффициентов a, b, c квадратичной зависимости (14.11) будем минимизировать сумму квадратов разностей модельных значений $\bar{y}_i = ax_i^2 + bx_i + c$ и соответствующих экспериментальных значений $y_i, i=1, 2, \dots, n$:

$$\Phi(a, b, c) = (ax_1^2 + bx_1 + c - y_1)^2 + (ax_2^2 + bx_2 + c - y_2)^2 + \dots + (ax_n^2 + bx_n + c - y_n)^2 \rightarrow \min. \quad (14.12)$$

Из необходимых условий экстремума функции трех переменных

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \quad (14.13)$$

по аналогии с системой (14.9) получим систему

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot c = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (14.14)$$

Решив систему (14.14), например, методом Крамера, найдем a, b, c . Это — координаты стационарной точки функции $\Phi(a, b, c)$. Из геометрических соображений ясно, что в этой точке $\Phi(a, b, c)$ принимает свое наименьшее значение.

Заметим, что при $a = 0$ зависимость (14.11) становится линейной, и ее неизвестные параметры b и c входят в систему (14.14) с теми же самыми числовыми коэффициентами, что параметры a и b линейной зависимости (14.1) в систему (14.9). Это наблюдение и способ получения систем (14.9), (14.14) позволяют сделать вывод, что коэффициенты многочлена степени k

$$y = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (14.15)$$

проходящего ближе других многочленов этой же степени к точкам из табл. 1, являются решением системы

$$\begin{cases} a_k \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{2k} + a_{k-1} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{2k-1} + \dots + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i, \\ a_k \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{2k-1} + a_{k-1} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{2k-2} + \dots + a_0 \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} = \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} y_i, \\ \dots \\ a_k \cdot \sum_{i=1}^n x_i^k + a_{k-1} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^{k-1} + \dots + a_0 \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (14.16)$$

Пример 3. Имеются данные о доходах в миллиардах долларов США фирмы Kodak с 1970 по 1992 гг. (табл. 5). Необходимо составить прогноз о росте доходов на 1993, 1994, 1995 и 1996 г. в предположении, что изменение доходов описывается квадратичной моделью.

Таблица 5. Изменение доходов фирмы Kodak с 1970 по 1992 г.

Год	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
Доход	2,8	3	3,5	4	4,6	5	5,4	6	7	8	9,7
1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
10,3	10,2	10,8	10,2	10,6	11,5	13,3	17	18,4	18,9	19,4	20,1

В этой задаче находится зависимость величины дохода от номера года. Обычно в задачах подобного рода преобразуют целочисленный аргумент (год в данном случае) так, чтобы его абсолютные значения были как можно меньше: за нулевой год принимается средний год из таблицы, а остальные отсчитываются от него в положительную и отрицательную сторону. Составляется новая таблица с перенумерованными годами и для нее подбирается та или иная зависимость (модель). Обозначим t — год, V — доход. В табл. 5 средним годом за время измерений является 1981. Следовательно, в новой таблице 1972 год будет иметь номер -11 , а 1992 будет 11 -м (табл. 6).

Таблица 6. Изменение доходов фирмы Kodak за 23 года

Год t	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
Доход V	2,8	3	3,5	4	4,6	5	5,4	6	7	8	9,7
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
10,3	10,2	10,8	10,2	10,6	11,5	13,3	17	18,4	18,9	19,4	20,1

Построим квадратичную модель зависимости V от t по формулам (14.14) в среде табличного процессора *Excel*, реализовав следующие шаги.

1. Перенесем табл. 6 в виде вертикальной таблицы на лист *Excel* в столбцы А и В (рис. 14.14). Предстоит сделать прогноз по модели, поэтому добавим к имеющимся годам еще 4 года: 12, 13, 14, 15. Построим диаграмму рассеивания.

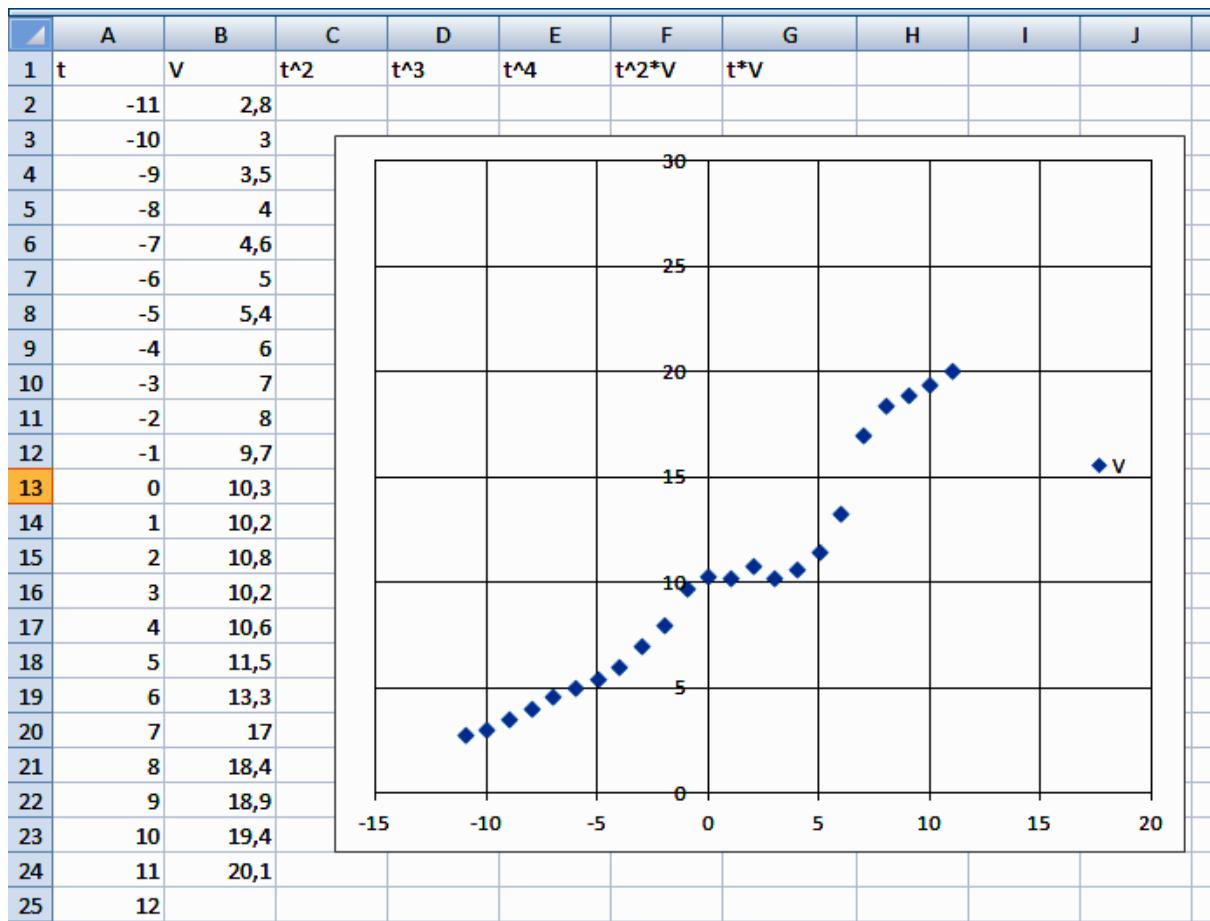


Рис. 14.14. Исходные данные, диаграмма рассеивания и подписи в примере 3

2. Выполним необходимые подписи столбцов для получения отдельных слагаемых сумм, входящих в уравнения системы (14.14) (рис. 14.14).
 3. В строке 2 в ячейки C2:G2 введем формулы для вычисления отдельных слагаемых накапливаемых сумм:

C2: «=A2*A2» (t_i^2);

D2: «=C2*A2» (t_i^3);

E2: «=D2*A2» (t_i^4);

F2: «=C2*B2» ($t_i^2 V_i$);

G2: «=A2*B2» ($t_i V_i$).

Скопируем формулы вниз на всю длину таблицы.

4. В строке 30 в соответствующих столбцах получим суммы для системы (14.14). В ячейку A30 введем формулу «=СУММ(A2:A24)» $\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)$ и скопируем ее в B30:G30 (рис. 14.15).

	A	B	C	D	E	F	G
29	Суммы						
30	0	229,7	1012	0	79948	10914,1	809,3

Рис. 14.15. Суммы для системы (14.14)

Получим формулы:

B30: «=СУММ(B2:B24)» $\left(\sum_{i=1}^n V_i\right)$;

C30: «=СУММ(C2:C24)» $\left(\sum_{i=1}^n t_i^2\right)$;

D30: «=СУММ(D2:D24)» $\left(\sum_{i=1}^n t_i^3\right)$;

E30: «=СУММ(E2:E24)» $\left(\sum_{i=1}^n t_i^4\right)$;

F30: «=СУММ(F2:F24)» $\left(\sum_{i=1}^n t_i^2 V_i\right)$;

G30: «=СУММ(G2:G24)» $\left(\sum_{i=1}^n t_i V_i\right)$.

5. В ячейках A32:D34 получим расширенную матрицу коэффициентов системы (14.14) (рис. 14.16) копированием в соответствующие ячейки значений только что полученных сумм. Во избежание ошибок лучше копировать присваиванием нужных значений. Например, в ячейке A32 находится формула «=E30» и так далее. На рис. 14.16 использован горизонтальный разделитель листа.

	A	B	C	D	E	F	G
1	t	V	t^2	t^3	t^4	$t^2 * V$	$t * V$
2	-11	2,8	121	-1331	14641	338,8	-30,8
3	-10	3	100	-1000	10000	300	-30
4	-9	3,5	81	-729	6561	283,5	-31,5
29	Суммы						
30	0	229,7	1012	0	79948	10914,1	809,3
31	Расширенная матрица коэффициентов						
32	79948	0	1012	=F30			
33	0	1012	0	809,3			
34	1012	0	23	229,7			
35							

Рис. 14.16. Составление расширенной матрицы коэффициентов системы (14.14)

6. Решим систему (14.14) методом Крамера, используя встроенную функцию МОПРЕД (рис. 14.17). Самостоятельно решите эту же систему методом обратной матрицы.

	A	B	C	D	E	F	G	H
31	Расширенная матрица коэффициентов							
32	79948	0	1012	10914,1		delta=	=МОПРЕД(A32:C34)	
33	0	1012	0	809,3			МОПРЕД(массив)	
34	1012	0	23	229,7				
35								
36	10914,1	0	1012			delta_a=	18790714,8	
37	809,3	1012	0			a=	0,02279221	
38	229,7	0	23					
39								
40	79948	10914,1	1012			delta_b=	659304338	
41	0	809,3	0			b=	0,79970356	
42	1012	229,7	23					
43								
44	79948	0	10914,1			delta_c=	7406814237	
45	0	1012	809,3			c=	8,98409938	
46	1012	0	229,7					
47								

Рис. 14.17. Решение системы (14.14) методом Крамера

Получили квадратичную зависимость V от t (коэффициенты взяты с четырьмя знаками после запятой): $V = 0,0228t^2 + 0,7997t + 8,9841$.

7. Получим модельные и прогнозируемые значения V (рис. 14.18). Добавим на диаграмму рассеивания модельный ряд данных. На рис. 14.18 для удобного отображения листа Excel использована группировка столбцов C:G и закрепление областей в строке 2: надо щелкнуть, например, на ячейке A2 так, чтобы строка 1 с подписями была видна, и на вкладке **Вид** в группе **Окно** нажать **Закрепить области**. После закрепления при прокрутке вниз строка 1 не будет перемещаться вверх. Видим, что модель достаточно хорошо приближает данные табл. 6.

Таким образом, прогнозируемые доходы Kodak должны составить на 1993 г. 21,86, на 1994 г. — 23,23, на 1995 г. — 24,65 и на 1996 г. — 26,11 миллиарда долларов. В действительности доход, полученный фирмой Kodak, вполне соответствовал этому прогнозу.

В Excel имеется встроенная возможность автоматически получать уравнение функциональной зависимости на основе таблицы экспериментально полученных данных. Для этого надо добавить линию этой зависимости с параметрами, рассчитанными автоматически, на диаграмму рассеивания.

1. Выделим исследуемый ряд данных на диаграмме рассеивания. При этом все точки ряда будут окружены габаритными рамками, а соответствующие данные в таблице окажутся выделенными.

2. Правой кнопкой мыши вызовем контекстное меню и выберем **Добавить линию тренда....**

3. В открывшемся окне (рис. 14.19) выберем нужные опции: **Полиномиальная, Степень 2, показывать уравнение на диаграмме**. После этого линия тренда (тенденции, зависимости) и уравнение зависимости появятся на диаграмме рассеивания. Параметры линии (цвет, толщину) можно обычным образом менять.

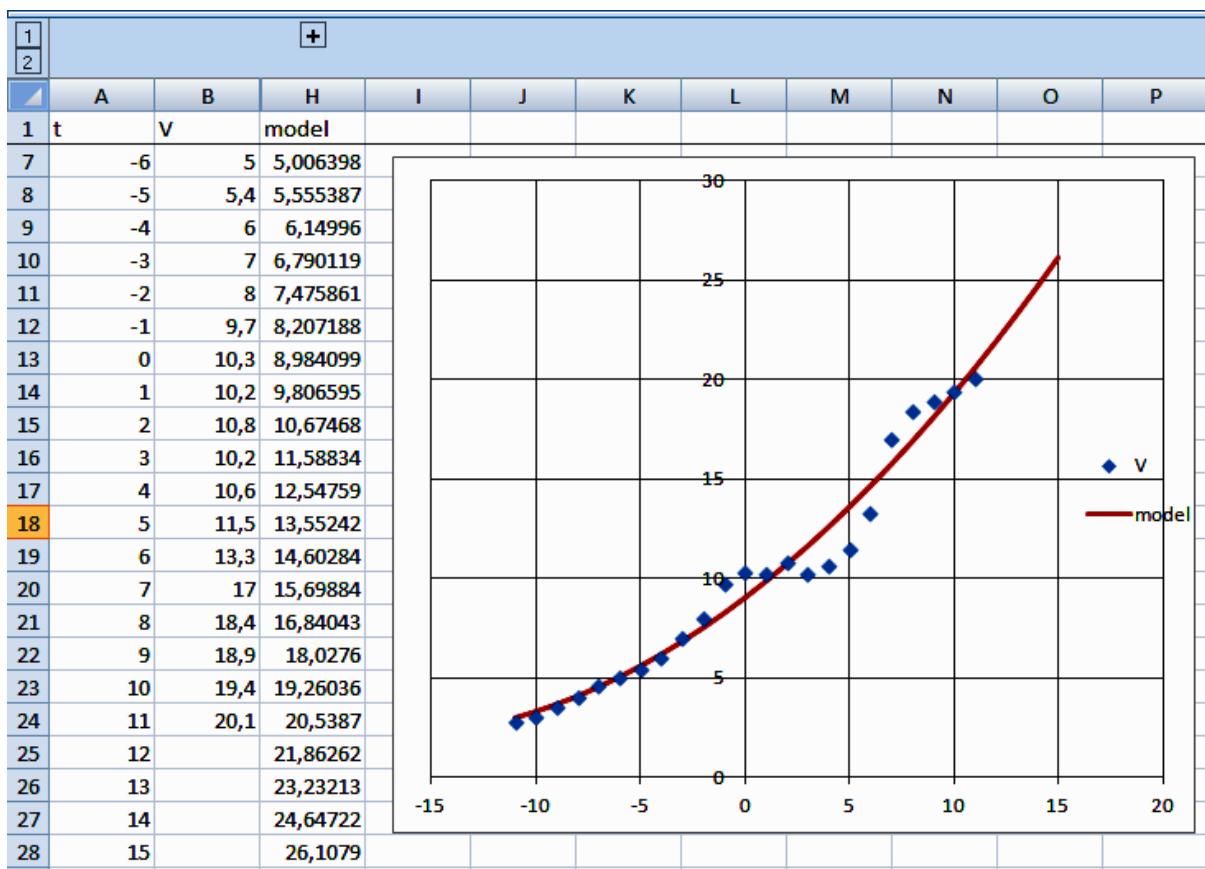


Рис. 14.18. Кривая полученной квадратичной зависимости на диаграмме рассеивания

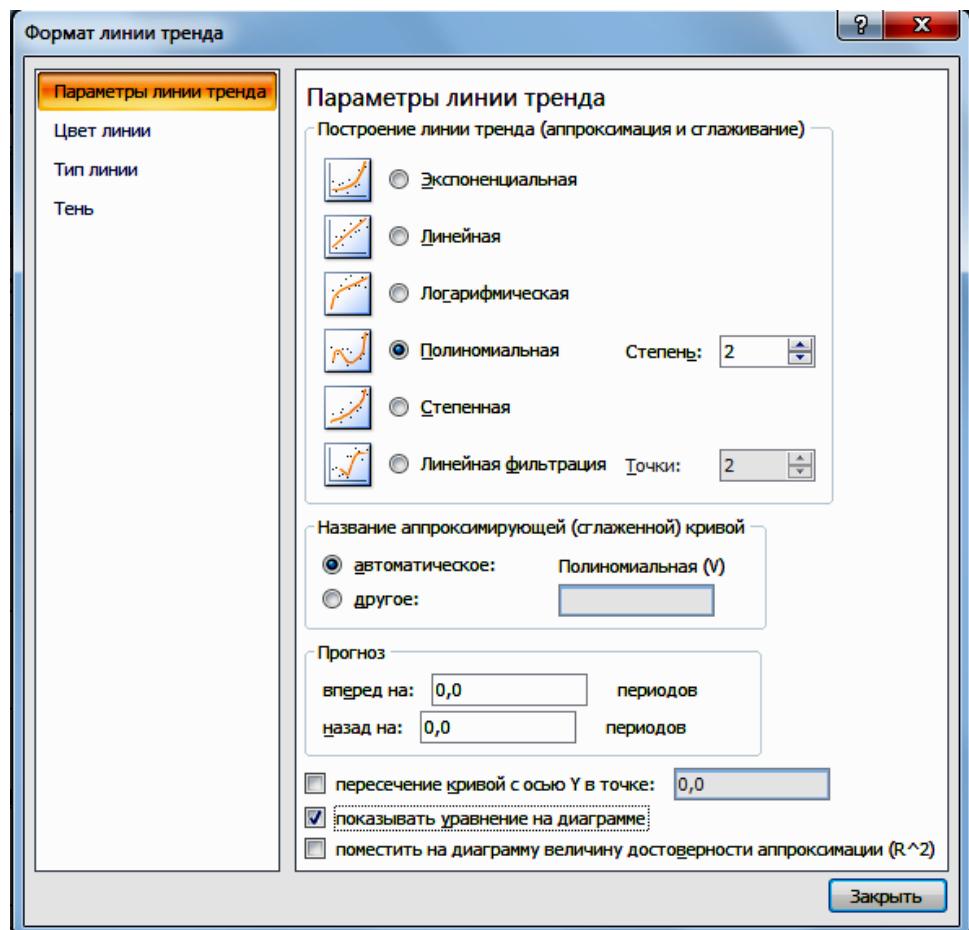


Рис. 14.19. Диалоговое окно **Формат линии тренда**

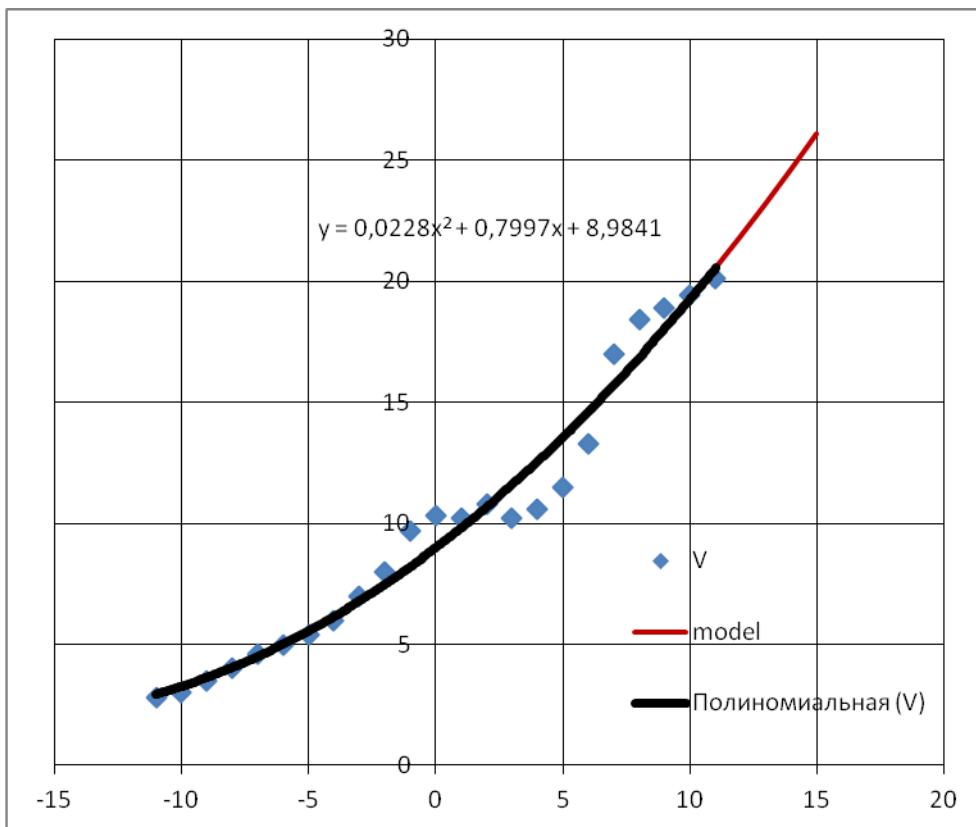


Рис. 14.20. Линия тренда и уравнение функциональной зависимости на диаграмме рассеивания

Задание для самостоятельной работы

- В результате эксперимента была получена таблица зависимости y от x (Табл. 1). С помощью метода наименьших квадратов найдите в *Excel* линейную функцию, выражающую эту зависимость. Проверьте адекватность полученной математической модели. Повторно рассчитайте коэффициенты линейной модели, используя функции НАКЛОН, ОТРЕЗОК, ЛИНЕЙН. Добавьте линию тренда на диаграмму рассеивания.
- В результате эксперимента была получена таблица зависимости y от x (Табл. 2). С помощью метода наименьших квадратов найдите в *Excel* квадратичную функцию, выражающую эту зависимость. Проверьте адекватность полученной математической модели. Повторно рассчитайте коэффициенты модели, добавив соответствующую линию тренда на диаграмму рассеивания.

Вариант 1.

Таблица 1

x_i	0,4	0,5	0,6	0,7	1,1	1,2	1,5	1,9	2,3	2,5
y_i	0,21	0,48	0,82	1,12	2,31	2,57	3,53	4,72	5,87	6,51

Таблица 2

x_i	0,1	0,3	0,4	0,7	1,2	1,4	1,7	1,8	2
y_i	-0,89	-0,21	-0,24	1,19	2,54	3,96	5,69	5,74	6,8

Вариант 2.

Таблица 1

x_i	0,1	0,4	0,6	0,8	1,4	1,6	1,9	2,2	2,3	2,4
y_i	9,56	8,43	7,58	6,84	4,35	3,58	2,44	1,23	0,81	0,43

Таблица 2

x_i	2,1	2,3	2,4	2,7	3,2	3,4	3,7	3,8	4
y_i	-0,89	-0,21	-0,24	1,19	2,54	3,96	5,69	5,74	6,8

Вариант 3.

Таблица 1

x_i	0,3	0,5	0,6	0,9	1,1	1,4	1,5	2,2	2,3	2,7
y_i	0,12	0,47	0,73	1,26	1,71	2,31	2,48	3,94	4,12	4,93

Таблица 2

x_i	1,5	1,7	1,8	2,1	2,6	2,8	3,1	3,2	3,4
y_i	2,15	2,59	2,44	3,51	4,26	5,44	6,81	6,74	7,56

Вариант 4.

Таблица 1

x_i	0,4	0,5	0,6	0,7	1,1	1,2	1,5	1,9	2,3	2,5
y_i	11,6	11,45	11,38	11,34	10,92	10,77	10,52	10,08	9,75	9,48

Таблица 2

x_i	0,6	0,8	0,9	1,2	1,7	1,9	2,2	2,3	2,5
y_i	2,06	2,14	1,81	2,34	2,19	3,01	3,84	3,59	4,05

Вариант 5.

Таблица 1

x_i	0,1	0,2	0,4	0,5	0,9	1,1	1,2	1,5	1,8	1,9
y_i	7,48	8,43	9,12	9,51	11,47	12,53	13,13	14,49	16,34	16,51

Таблица 2

x_i	-0,4	-0,2	-0,1	0,2	0,7	0,9	1,2	1,3	1,5
y_i	4,02	3,58	3,02	2,98	2,28	3,02	3,88	3,68	4,3

Вариант 6.

Таблица 1

x_i	0,1	0,3	0,4	0,6	0,9	1	1,2	1,3	1,4	1,8
y_i	12,33	10,87	10,21	8,76	6,69	6,01	5,97	3,92	3,23	0,41

Таблица 2

x_i	0,2	0,4	0,5	0,8	1,3	1,5	1,8	1,9	2,1
y_i	-4,42	-4,38	-4,7	-4,02	-3,52	-2,3	-0,72	-0,68	0,42

Вариант 7.

Таблица 1

x_i	0,1	0,2	0,4	0,6	0,9	1	1,2	1,3	1,4	1,6
y_i	9,38	8,81	7,63	6,37	4,59	4,02	2,77	2,21	1,64	0,37

Таблица 2

x_i	-0,1	0,1	0,2	0,5	1	1,2	1,5	1,6	1,8
y_i	3,32	2,72	2,08	1,8	0,7	1,28	1,9	1,62	2,08

Вариант 8.

Таблица 1

x_i	0,4	0,5	0,9	1	1,1	1,2	1,7	1,9	2,3	2,5
y_i	7,63	8,47	12,11	12,95	13,91	14,82	19,26	21,14	24,73	26,48

Таблица 2

x_i	0,5	0,7	0,8	1,1	1,6	1,8	2,1	2,2	2,4
y_i	1,4	1,28	0,88	1,32	1,42	2,48	3,82	3,78	4,72

Вариант 9.

Таблица 1

x_i	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1	1,2	1,3
y_i	10,23	9,38	7,82	6,97	6,24	4,61	3,78	3,01	1,42	0,62

Таблица 2

x_i	2,5	2,7	2,8	3,1	3,6	3,8	4,1	4,2	4,4
y_i	-3,85	-3,81	-4,16	-3,69	-3,94	-3,16	-2,39	-2,66	-2,24

Вариант 10.

Таблица 1

x_i	0,4	0,5	0,7	0,8	1,1	1,2	1,5	1,8	2,1	2,2
y_i	4,83	5,46	6,92	7,63	9,68	10,35	12,53	14,55	16,72	17,41

Таблица 2

x_i	-0,1	0,1	0,2	0,5	1	1,2	1,5	1,6	1,8
y_i	5,52	4,52	3,68	2,8	0,7	0,88	0,9	0,42	0,48

Вариант 11.

Таблица 1

x_i	0,4	0,5	0,6	0,7	1,1	1,2	1,5	1,9	2,3	2,5
y_i	0,23	0,45	0,81	1,13	2,35	2,52	3,55	4,72	5,82	6,54

Таблица 2

x_i	-0,7	-0,5	-0,4	-0,1	0,4	0,6	0,9	1	1,2
y_i	-2,01	-1,65	-1,84	-0,89	-0,34	0,76	2,01	1,9	2,64

Вариант 12.

Таблица 1

x_i	0,1	0,4	0,6	0,8	1,4	1,6	1,9	2,2	2,3	2,4
y_i	9,52	8,45	7,54	6,87	4,32	3,54	2,45	1,22	0,83	0,41

Таблица 2

x_i	1,3	1,5	1,6	1,9	2,4	2,6	2,9	3	3,2
y_i	-2,01	-1,65	-1,84	-0,89	-0,34	0,76	2,01	1,9	2,64

Вариант 13.

Таблица 1

x_i	0,3	0,5	0,6	0,9	1,1	1,4	1,5	2,2	2,3	2,7
y_i	0,13	0,45	0,73	1,28	1,74	2,33	2,45	3,92	4,11	4,92

Таблица 2

x_i	1,5	1,7	1,8	2,1	2,6	2,8	3,1	3,2	3,4
y_i	2,15	2,59	2,44	3,51	4,26	5,44	6,81	6,74	7,56

Вариант 14.

Таблица 1

x_i	0,4	0,5	0,6	0,7	1,1	1,2	1,5	1,9	2,3	2,5
y_i	11,62	11,43	11,35	11,33	10,91	10,74	10,56	10,09	9,72	9,44

Таблица 2

x_i	0,1	0,3	0,4	0,7	1,2	1,4	1,7	1,8	2
y_i	2,71	2,59	2,16	2,39	1,74	2,36	2,89	2,54	2,8

Вариант 15.

Таблица 1

x_i	0,1	0,2	0,4	0,5	0,9	1,1	1,2	1,5	1,8	1,9
y_i	7,44	8,42	9,12	9,53	11,45	12,51	13,13	14,44	16,36	16,52

Таблица 2

x_i	-0,1	0,1	0,2	0,5	1	1,2	1,5	1,6	1,8
y_i	3,12	2,92	2,48	2,8	2,7	3,68	4,9	4,82	5,68

Вариант 16.

Таблица 1

x_i	0,1	0,3	0,4	0,6	0,9	1	1,2	1,3	1,4	1,8
y_i	12,31	10,84	10,26	8,74	6,66	6,04	5,96	3,98	3,23	0,44

Таблица 2

x_i	1,3	1,5	1,6	1,9	2,4	2,6	2,9	3	3,2
y_i	-3,32	-2,4	-2,28	-0,28	2,42	4,52	7,42	7,9	9,88

Вариант 17.

Таблица 1

x_i	0,1	0,2	0,4	0,6	0,9	1	1,2	1,3	1,4	1,6
y_i	9,33	8,85	7,62	6,35	4,56	4,08	2,70	2,25	1,65	0,39

Таблица 2

x_i	0,1	0,3	0,4	0,7	1,2	1,4	1,7	1,8	2
y_i	2,52	2,08	1,52	1,48	0,78	1,52	2,38	2,18	2,8

Вариант 18.

Таблица 1

x_i	0,4	0,5	0,9	1	1,1	1,2	1,7	1,9	2,3	2,5
y_i	7,61	8,48	12,14	12,93	13,98	14,81	19,25	21,14	24,77	26,45

Таблица 2

x_i	-0,1	0,1	0,2	0,5	1	1,2	1,5	1,6	1,8
y_i	-0,68	-1,28	-1,92	-2,2	-3,3	-2,72	-2,1	-2,38	-1,92

Вариант 19.

Таблица 1

x_i	0,1	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	0,9	1	1,2	1,3
y_i	10,25	9,36	7,81	6,96	6,27	4,67	3,74	3,06	1,43	0,68

Таблица 2

x_i	1,6	1,8	1,9	2,2	2,7	2,9	3,2	3,3	3,5
y_i	-1,58	-1,22	-1,38	-0,22	1,08	2,62	4,68	4,88	6,3

Вариант 20.

Таблица 1

x_i	0,4	0,5	0,7	0,8	1,1	1,2	1,5	1,8	2,1	2,2
y_i	4,81	5,45	6,97	7,65	9,64	10,37	12,54	14,54	16,73	17,47

Таблица 2

x_i	1,3	1,5	1,6	1,9	2,4	2,6	2,9	3	3,2
y_i	0,48	0,6	0,32	1,12	1,82	3,12	4,82	4,9	6,08

Лабораторная работа № 15
Метод наименьших квадратов. Нелинейная модель.
Числовые характеристики адекватности математической модели

Пример 1. При обработке металла резаньем устанавливается зависимость скорости резания металла от различных характеристик резца и стружки. В табл. 1 приведены опытные данные, показывающие зависимость скорости резания v (м/мин) от площади поперечного сечения стружки s (мм^2) при обработке хромоникелевой стали. Необходимо построить математическую модель и проверить ее адекватность.

Таблица 1. Зависимость скорости резания от площади поперечного сечения

s_i	1,1	1,4	1,7	2,1	2,6	4,7	6,1	7,0	10,0	12,8	16,5	20,8	40,6
v_i	25,0	22,7	22,1	19,8	17,0	12,3	10,7	10,0	8,2	6,7	5,6	5,0	3,5

Решим эту задачу непосредственно в *Excel*. Построим диаграмму рассеивания (см. лабораторную работу № 14) (рис. 15.1).

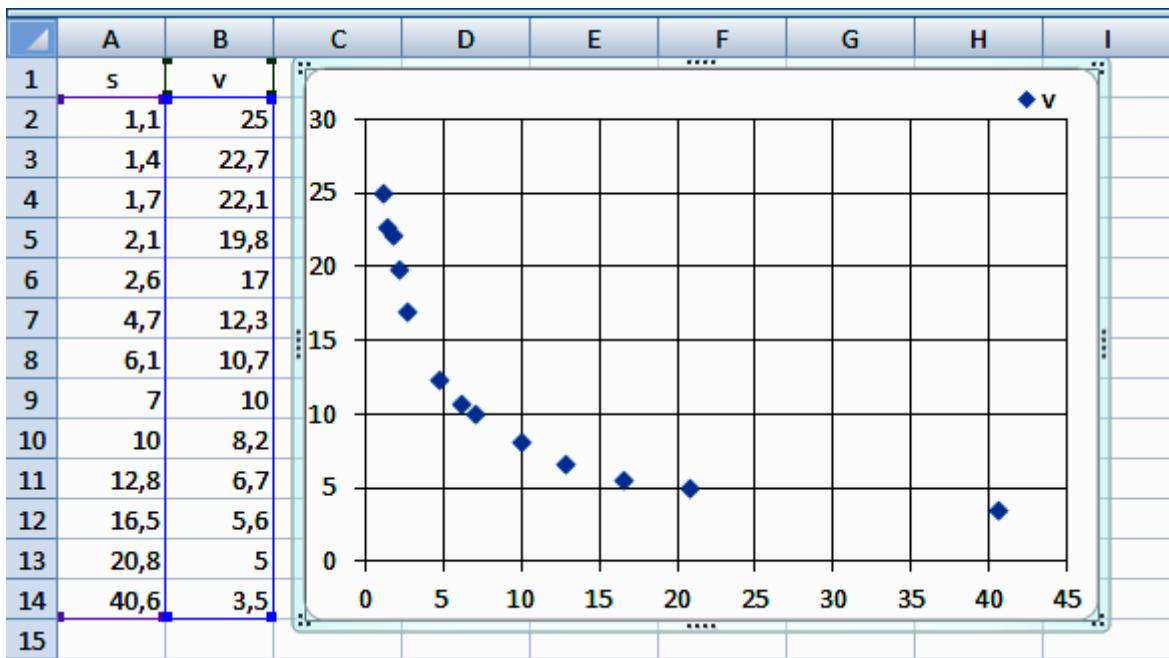


Рис. 15.1. Таблица и диаграмма рассеивания для примера 1

Видим, что точки располагаются близко не к прямой, а к некоторой кривой. Если провести плавную кривую как можно ближе к отмеченным точкам, она будет напоминать ветвь гиперболы, или график логарифмической убывающей функции, или показательной убывающей функции, или степенной функции и так далее. Будем последовательно выдвигать гипотезы о виде зависимости $v = v(s)$ и проверять их адекватность. Из смысла задачи ясно, что v стремится к нулю при неограниченном увеличении s : $\lim_{s \rightarrow +\infty} v = 0$.

1 гипотеза. Допустим, зависимость $v = v(s)$ является *гиперболической*:

$$v = \frac{As + B}{Cs + D}, \quad A, B, C, D \in R, C \neq 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$v = \frac{As + B}{Cs + D} = \frac{A}{C} + \frac{B - \frac{AD}{C}}{Cs + D} = \frac{A}{C} + \frac{1}{\frac{C}{B - \frac{AD}{C}} \cdot s + \frac{D}{B - \frac{AD}{C}}}.$$

Поскольку $\lim_{s \rightarrow +\infty} v = 0$, то $\frac{A}{C} = 0$. Обозначив $\frac{C}{B - \frac{AD}{C}} = a$, $\frac{D}{B - \frac{AD}{C}} = b$, получаем гиперболическую функцию с двумя параметрами:

$$v = \frac{1}{as + b}, \quad a, b \in R. \quad (15.1)$$

Переходя к обратным величинам, получаем

$$\frac{1}{v} = as + b.$$

Обозначим $\frac{1}{v} = V$, тогда $V = as + b$. Видим, что V зависит от s линейно. Значит, для проверки этой гипотезы необходимо отметить точки $\left(s_i; \frac{1}{v_i}\right)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = 13$, на координатной

плоскости. Если они будут располагаться близко к некоторой прямой, то гипотеза о гиперболическом виде (15.1) зависимости v от s может быть верной. Выполним в *Excel* следующие действия.

1. В ячейку C1 введем подпись « $1/v$ », в ячейку C2 внесем формулу « $=1/B2$ », скопируем ее вниз на необходимое количество строк.
2. Для проверки гипотезы построим диаграмму рассеивания, взяв за абсциссы точек числовые значения из столбца A, а за ординаты — из столбца C (рис. 15.2).

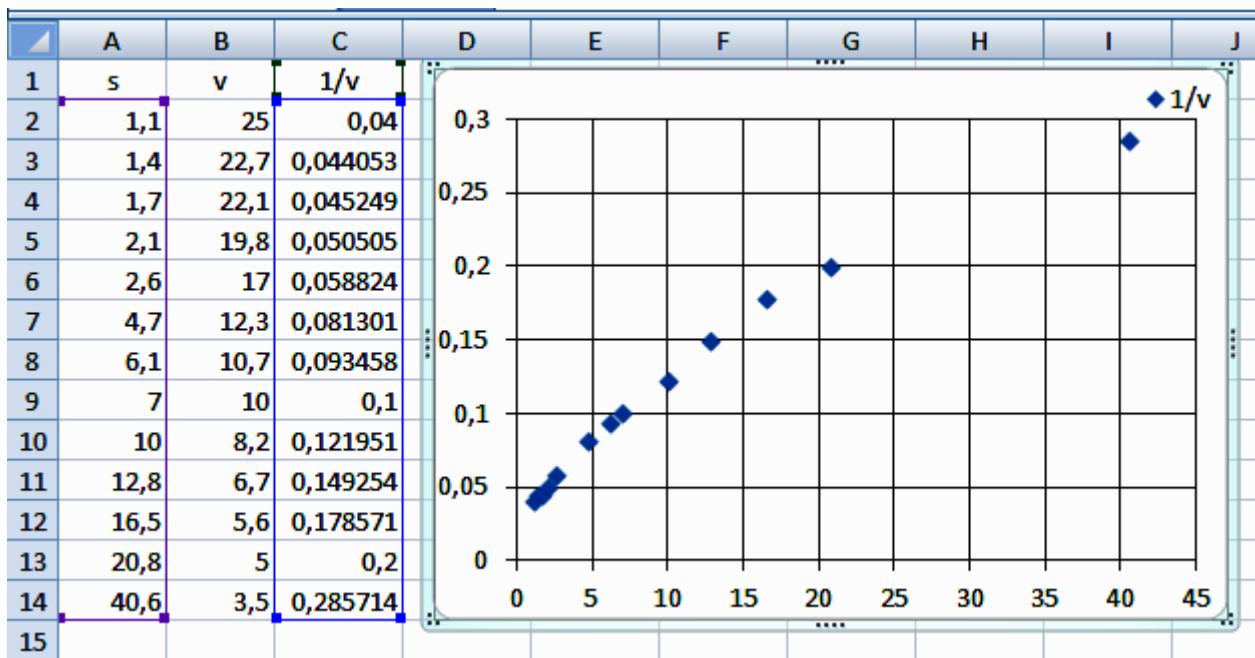


Рис. 15.2. Проверка гипотезы о гиперболическом виде зависимости

Видим, что точки располагаются достаточно близко к одной прямой. Остановимся на гипотезе о гиперболической зависимости v от s .

3. Найдем коэффициенты a и b для линейной модели $V = as + b$, используя встроенные функции НАКЛОН (например, в ячейке B17) и ОТРЕЗОК (например, в ячейке B18). В диалоговых окнах этих функций в качестве величины **Известные_значения_y** выбирается массив значений линейной функции V , то есть диапазон C2:C14, а в качестве величины **Известные_значения_x** — массив значений аргумента s этой же функции — диапазон A2:A14. Получаем: $a \approx 0,006513$ и $b \approx 0,047624$ (рис. 15.3). Отсюда $V = 0,006513s + 0,047624$,

$$v = \frac{1}{0,006513s + 0,047624}.$$

4. Проверим адекватность полученной модели, построив прямую $V = 0,006513s + 0,047624$ на диаграмме рассеивания из п. 2 (см. лабораторную работу № 14) (рис. 15.3). Аргумент функции при этом берется из столбца А. Видим, что точки располагаются достаточно близко к построенной прямой.

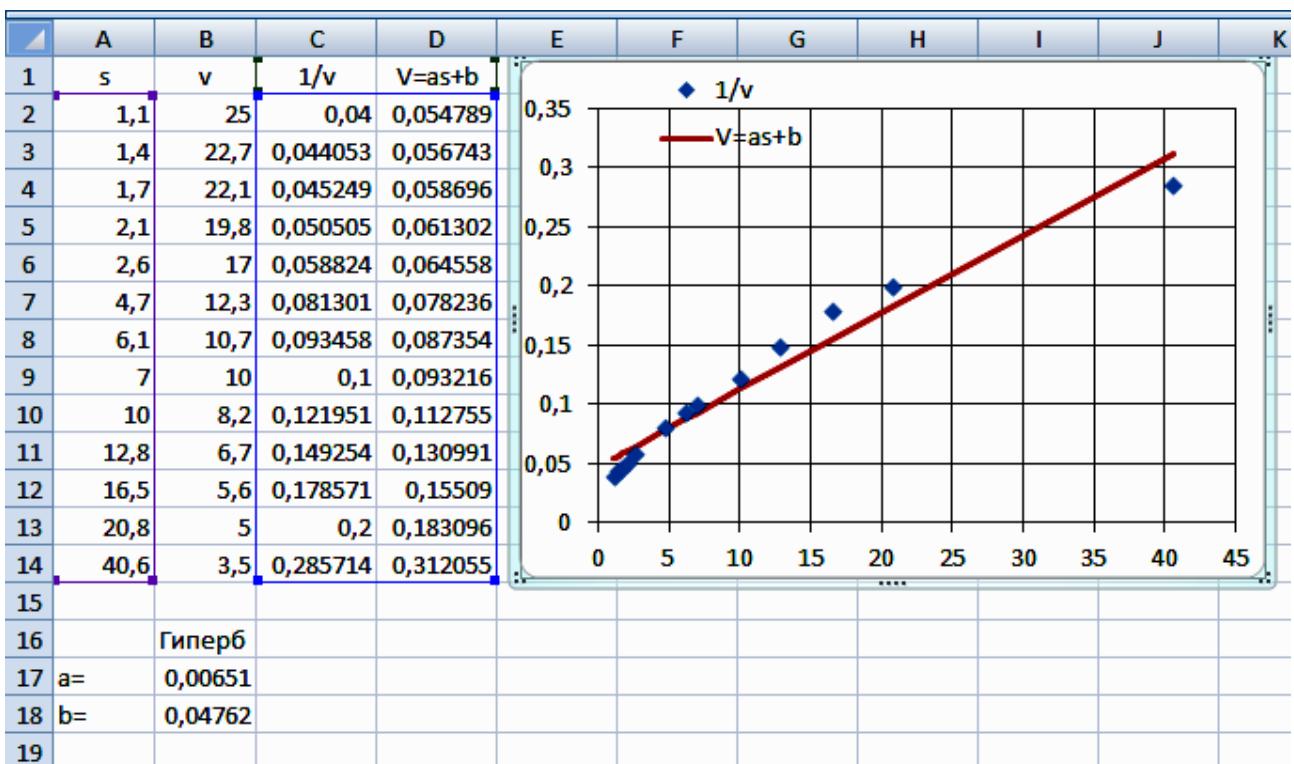


Рис. 15.3. Проверка адекватности гиперболической модели, сведенной к линейному виду

5. Проверим адекватность полученной модели другим способом, построив гиперболу $v = \frac{1}{0,006513s + 0,047624}$ на исходной диаграмме рассеивания (рис. 15.4). Для этого надо построить столбец модельных значений v в столбце Е и добавить новый ряд данных на диаграмму с точками из табл. 1. На рис. 15.4 для наглядности столбцы С, D сгруппированы. Видим, что график функции $v = \frac{1}{0,006513s + 0,047624}$ достаточно близко проходит к точкам из таблицы, то есть модель является адекватной.

В данном случае удалось легко свести гиперболическую модель к линейному виду, так как по смыслу задачи уравнение (15.1) содержит два параметра: a и b . И в дальнейшем в данной задаче будем выдвигать гипотезы о нелинейной зависимости именно с двумя параметрами и сводить их к линейному виду.

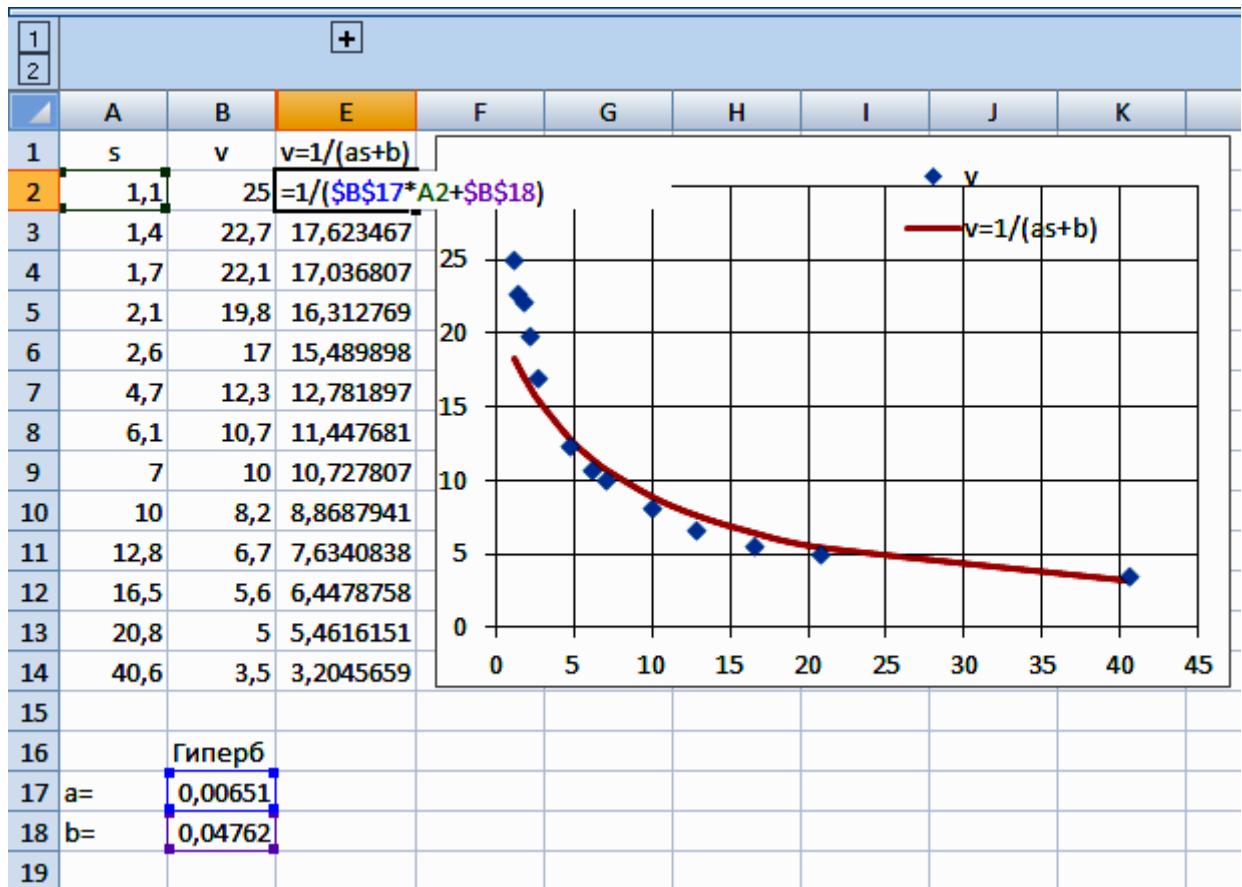


Рис. 15.4. Проверка адекватности нелинейной гиперболической модели

2 гипотеза. Допустим, зависимость $v = v(s)$ является *степенной*:

$$v = a \cdot s^b, \quad a, b \in R. \quad (15.2)$$

Прологарифмируем обе части уравнения (15.2). Получаем

$$\ln v = \ln(as^b),$$

$$\ln v = \ln a + b \ln s.$$

Обозначим $\ln v = V$, $\ln a = B$, $b = A$, $\ln s = S$, тогда $V = AS + B$. Видим, что зависимость V от S — линейная. Отметим точки $(\ln s_i; \ln v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = 13$, на координатной плоскости. Если они будут располагаться близко к некоторой прямой, то гипотеза о степенной зависимости (15.2) будет верной.

1. В ячейки F1 и G1 введем соответственно подписи « $\ln s$ » и « $\ln v$ », а в ячейки F2 и G2 — формулы «=LN(A2)» и «=LN(B2)». Скопируем эти две ячейки вниз на необходимое количество строк.

2. Для проверки гипотезы построим диаграмму рассеивания, взяв за абсциссы точек числовые значения из столбца F, а за ординаты — из столбца G (рис. 15.5). Видим, что точки располагаются достаточно близко к одной прямой. Рассмотрим гипотезу и о степенной зависимости v от s .

3. Найдем коэффициенты A и B для линейной модели $V = AS + B$ с помощью функций НА-КЛОН и ОТРЕЗОК, вычисленных, например, в ячейках C17 и C18. В диалоговых окнах этих функций в качестве величины **Известные_значения_y** выбирается массив значений линейной функции V , то есть диапазон G2:G14, а в качестве величины **Известные_значения_x** — массив значений аргумента S этой же функции, то есть диапазон F2:F14. Получаем: $A \approx -0,56515$, $B \approx 3,358745$ (рис. 15.6). Отсюда $V = -0,56515S + 3,358745$. Выполнив обрат-

ные преобразования $b = A$, $a = e^B$, получим, например, в ячейках D17, D18 искомые величины $a \approx 28,75307$, $b \approx -0,56515$ и математическую модель $v = 28,75307 \cdot s^{-0,56515}$.

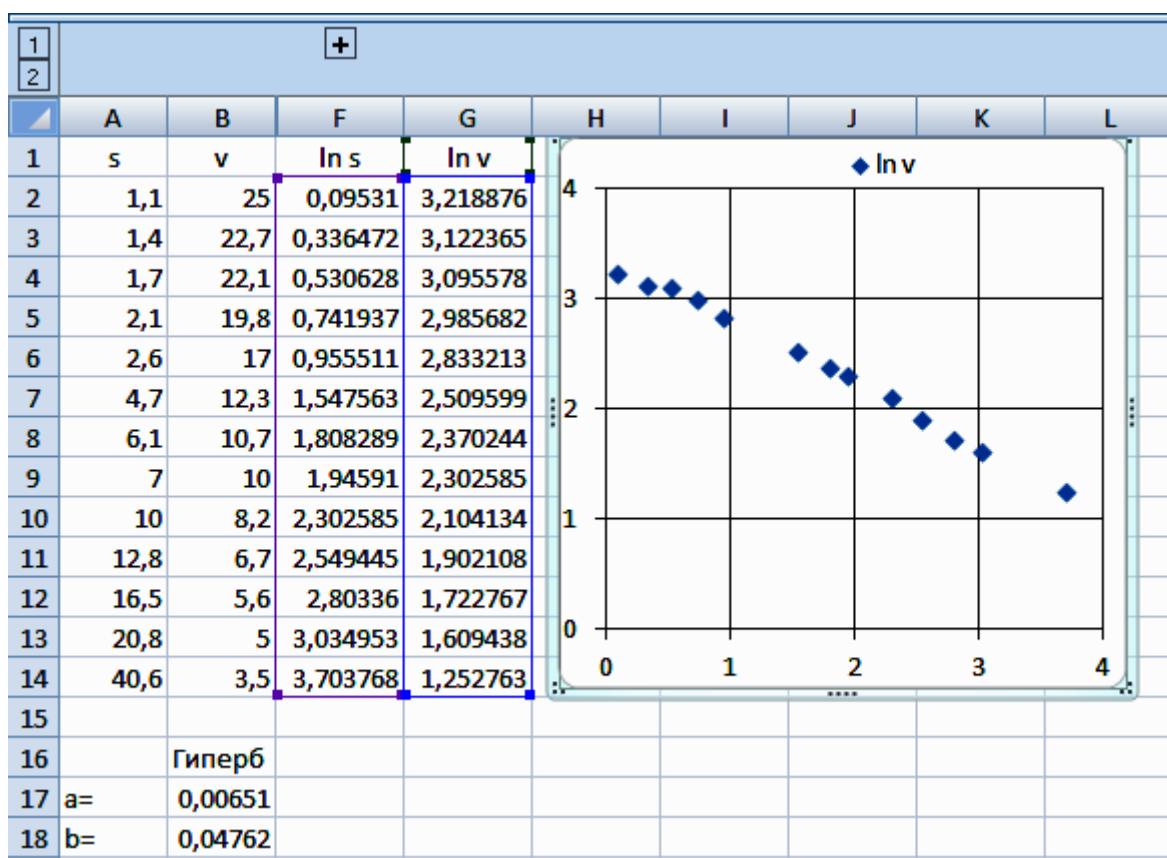


Рис. 15.5. Проверка гипотезы о степенном виде зависимости

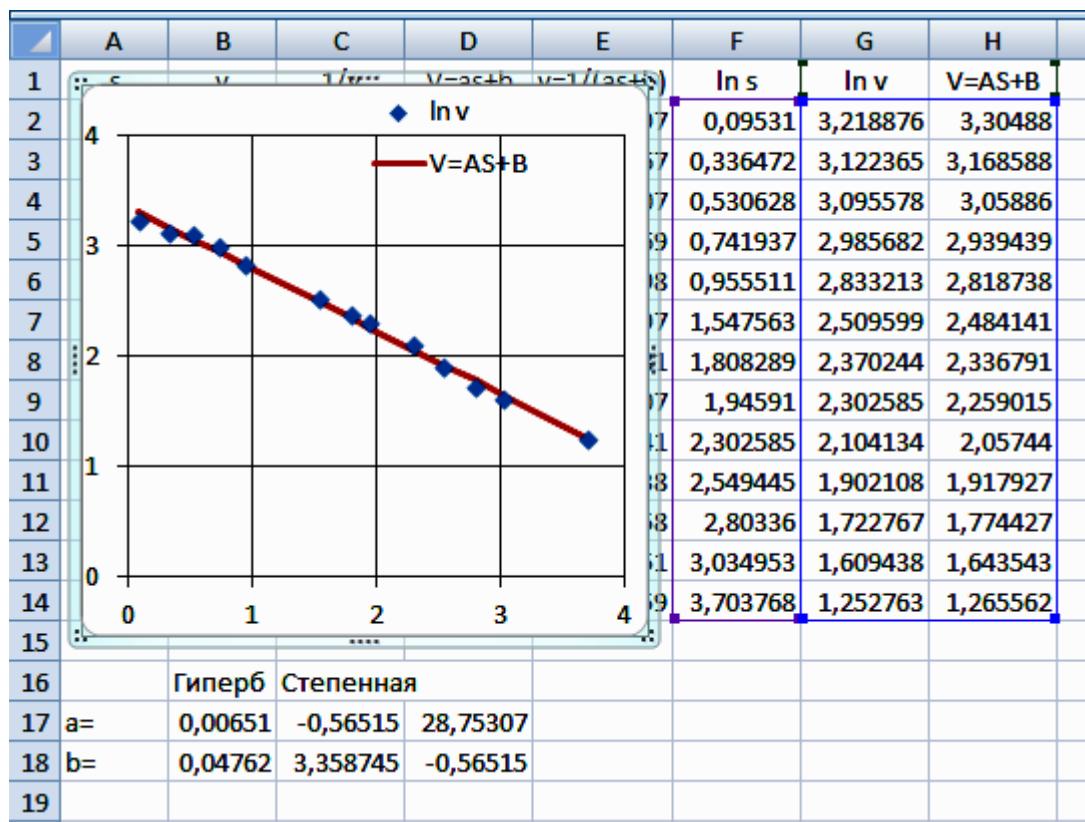


Рис. 15.6. Проверка адекватности степенной модели, сведенной к линейному виду

4. Проверим адекватность полученной модели, построив прямую $V = -0,56515S + 3,358745$ на диаграмме рассеивания из п. 2 (рис. 15.6). Аргумент функции при этом берется из столбца F. Видим, что точки располагаются очень близко к построенной прямой.

5. Проверим адекватность полученной модели, построив график $v = 28,75307 \cdot s^{-0,56515}$ на исходной диаграмме рассеивания (рис. 15.7). Для этого надо построить столбец модельных значений v в столбце I и добавить новый ряд данных на диаграмму с точками из табл. 1. На рис. 15.7 для наглядности столбцы C:H сгруппированы. Видим, что график функции $v = 28,75307 \cdot s^{-0,56515}$ очень хорошо согласуется с точками из таблицы, то есть модель является адекватной. Пожалуй, эта модель лучше предыдущей.

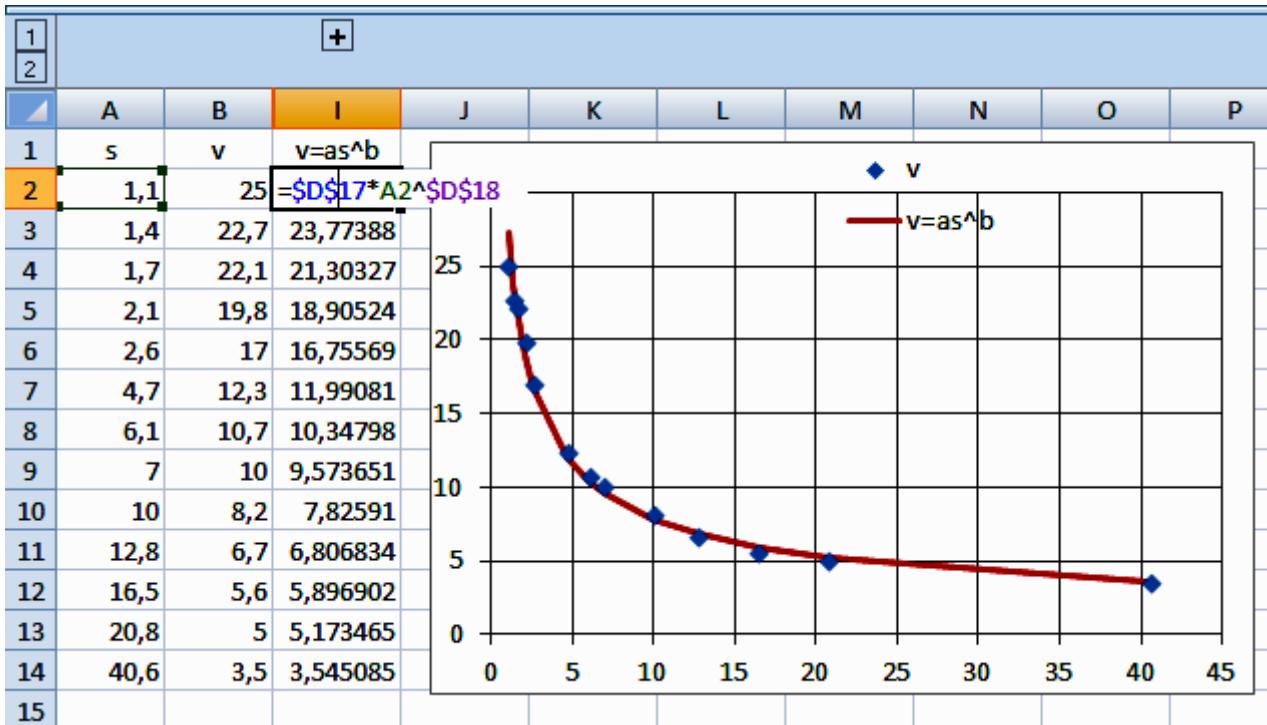


Рис. 15.7. Проверка адекватности нелинейной степенной модели

3 гипотеза. Допустим, зависимость $v = v(s)$ является **показательной**:

$$v = e^{as+b}, \quad a, b \in R. \quad (15.3)$$

Прологарифмируем обе части уравнения (15.3). Получаем

$$\ln v = \ln(e^{as+b}),$$

$$\ln v = as + b.$$

Обозначим $\ln v = V$. Получаем линейную зависимость $V = as + b$. Отметим точки $(s_i; \ln v_i), i = 1, 2, \dots, n, n = 13$ на координатной плоскости. Если они будут располагаться близко к некоторой прямой, то гипотеза о показательной зависимости (15.3) будет верной. Уже имеется столбец значений $\ln v_i$ — столбец G.

1. Для проверки гипотезы построим диаграмму рассеивания, взяв за абсциссы точки числовые значения из столбца A, а за ординаты — из столбца G (рис. 15.8). Замечаем, что точки не располагаются близко к одной прямой, значит, гипотеза о показательном виде зависимости не верна. Тем не менее, выполним вычисления, аналогичные проведенным выше при проверке других гипотез. Это поможет еще раз убедиться в том, что гипотеза о показательном виде зависимости должна быть отвергнута.

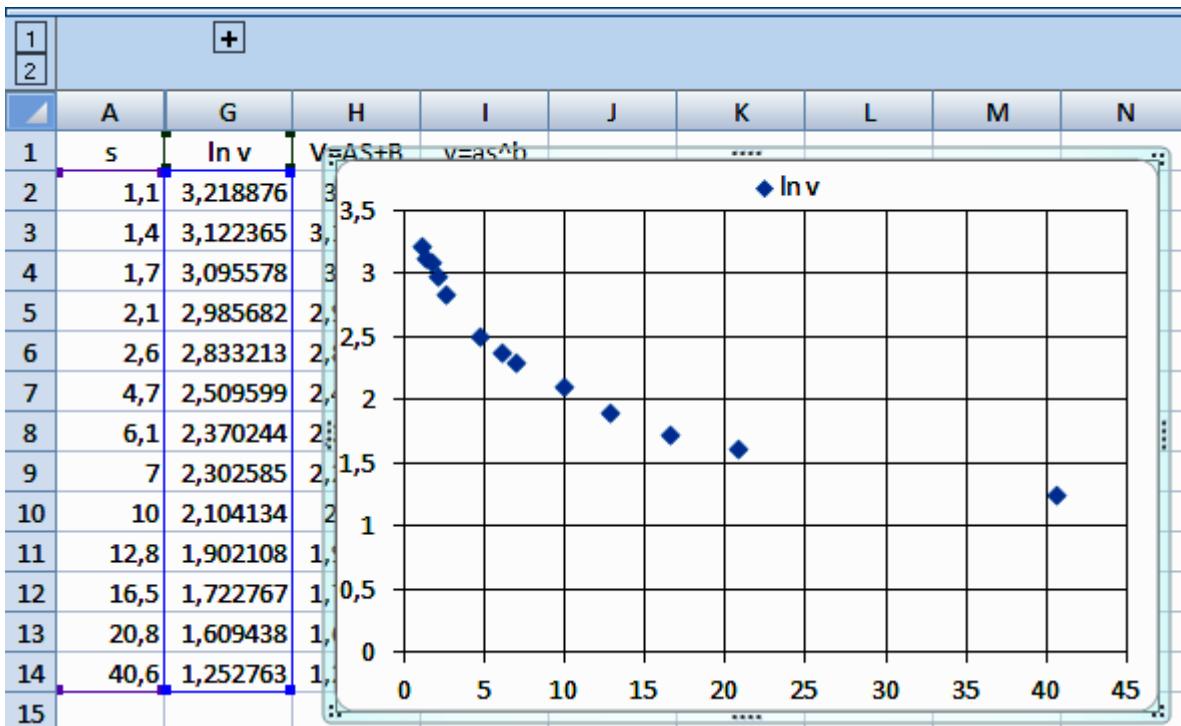


Рис. 15.8. Проверка гипотезы о показательном виде зависимости

2. Найдем коэффициенты a и b для линейной модели $V = as + b$ с помощью функций НАКЛОН и ОТРЕЗОК, вычисленных, например, в ячейках Е17 и Е18. В диалоговых окнах этих функций в качестве величины **Известные_значения_y** выбирается массив значений линейной функции V , то есть диапазон G2:G14, а в качестве величины **Известные_значения_x** — массив значений аргумента s этой же функции, то есть диапазон A2:A14. Получаем $a \approx -0,05137$, $b \approx 2,8903039$ (рис. 15.9).

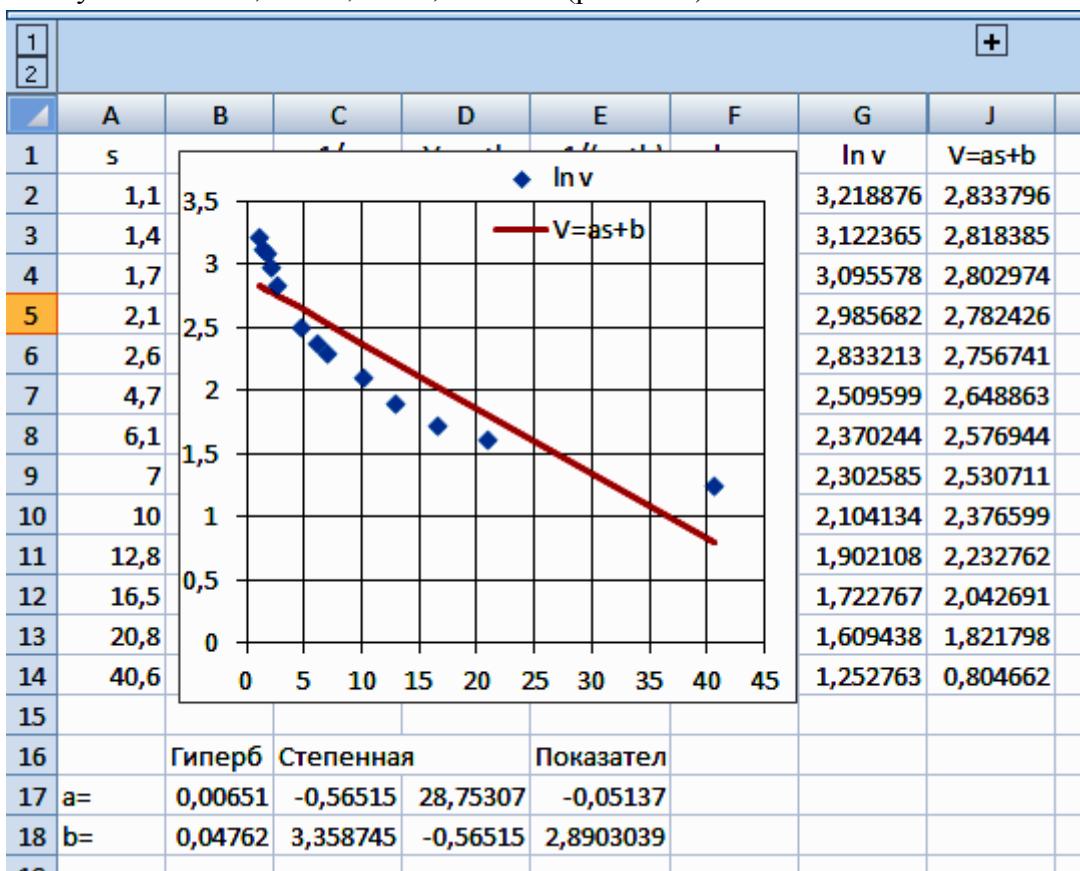


Рис. 15.9. Проверка адекватности показательной модели, сведенной к линейному виду

Отсюда $V = -0,05137s + 2,8903039$, а математическая модель — $v = e^{-0,05137s+2,8903039}$.

3. Проверим адекватность полученной модели, построив прямую $V = -0,05137s + 2,8903039$ на диаграмме рассеивания из п. 2 (рис. 15.9). Аргумент функции при этом берется из столбца А. Видим, что точки располагаются достаточно далеко от построенной прямой.

4. Проверим адекватность полученной модели, построив график $v = e^{-0,05137s+2,8903039}$ на исходной диаграмме рассеивания (рис. 15.10). Для этого надо построить столбец модельных значений v в столбце К и добавить новый ряд данных на диаграмму с точками из табл. 1. На рис. 15.10 для наглядности столбцы С:J сгруппированы. Видим, что график функции $v = e^{-0,05137s+2,8903039}$ проходит далеко от точек из таблицы, то есть модель плохо согласуется с данными задачи.

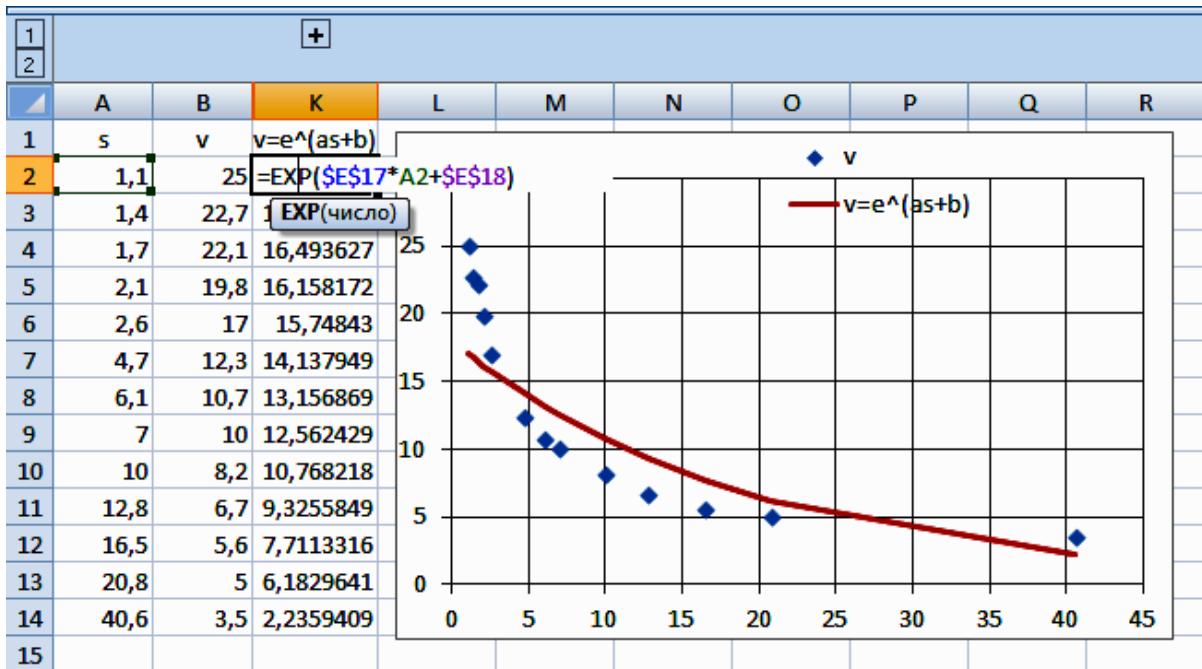


Рис. 15.10. Проверка адекватности нелинейной показательной модели

4 гипотеза. Допустим, зависимость $v = v(s)$ является *логарифмической*:

$$v = a \ln s + b, \quad a, b \in R. \quad (15.4)$$

Обозначим $S = \ln s$. Получим линейную зависимость

$$v = aS + b.$$

Теперь отметим точки $(\ln s_i; v_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = 13$ на координатной плоскости. Если они будут расположены близко к некоторой прямой, то гипотеза о логарифмической зависимости (15.4) будет верной. Столбец значений $\ln s_i$ уже имеется (столбец F).

1. Для проверки гипотезы построим диаграмму рассеивания, взяв за абсциссы точки числовые значения из столбца F, а за ординаты — из столбца B (рис. 15.11). Точки располагаются достаточно близко к одной прямой, значит, гипотеза о логарифмическом виде зависимости может быть верна. Выполним вычисления, аналогичные проведенным выше при проверке других гипотез. Это поможет сравнить качественные показатели всех гипотез и выбрать наилучшую.

2. Найдем коэффициенты a и b для линейной модели $v = aS + b$ с помощью функций НА-КЛОН и ОТРЕЗОК, вычисленных, например, в ячейках F17 и F18. В диалоговых окнах этих функций в качестве величины **Известные_значения_y** выбирается массив значений линейной функции v , то есть диапазон B2:B14, а в качестве величины **Известные_значения_x** — массив значений аргумента S этой же функции, то есть диапазон F2:F14. Получаем

$a \approx -6,44182$, $b \approx 24,04705$ (рис. 15.12). Отсюда $v = -6,44182S + 24,04705$, а математическая модель — $v = -6,44182 \ln s + 24,04705$.

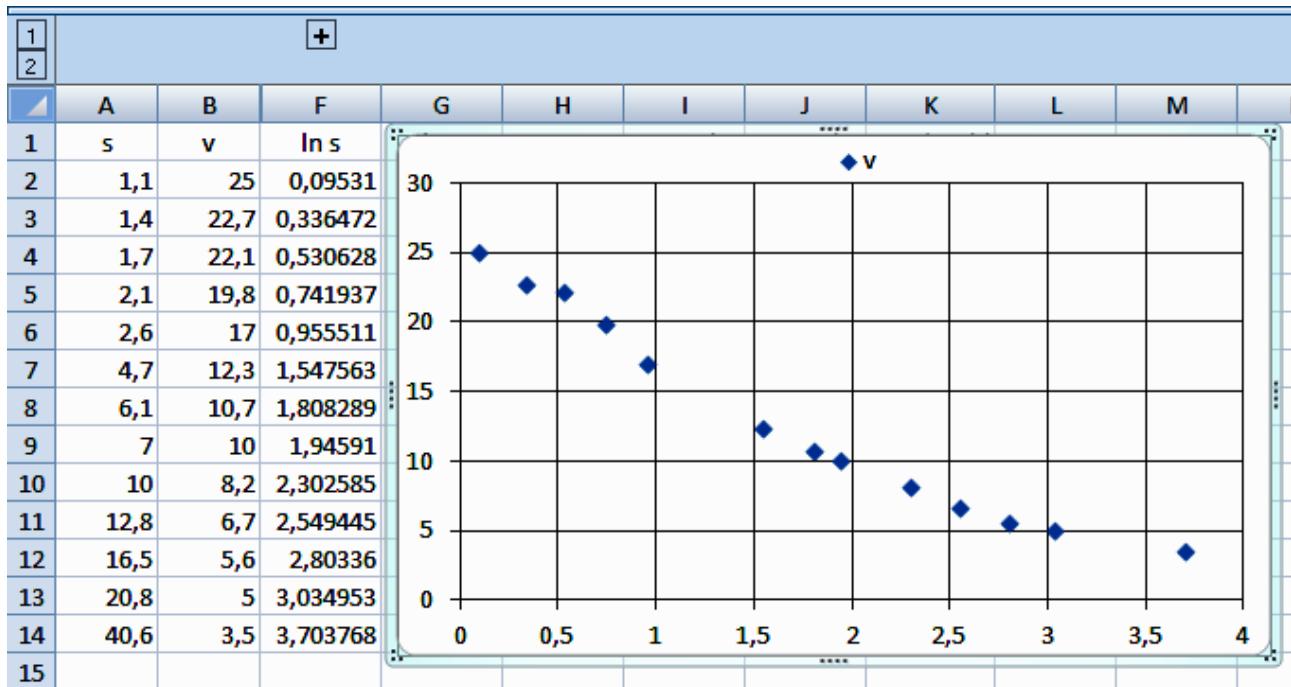


Рис. 15.11. Проверка гипотезы о логарифмическом виде зависимости

3. Проверим адекватность полученной модели, построив прямую $v = -6,44182S + 24,04705$ на диаграмме рассеивания из п. 2 (рис. 15.12). Аргумент функции при этом берется из столбца F. Видим, что точки располагаются достаточно близко к построенной прямой.

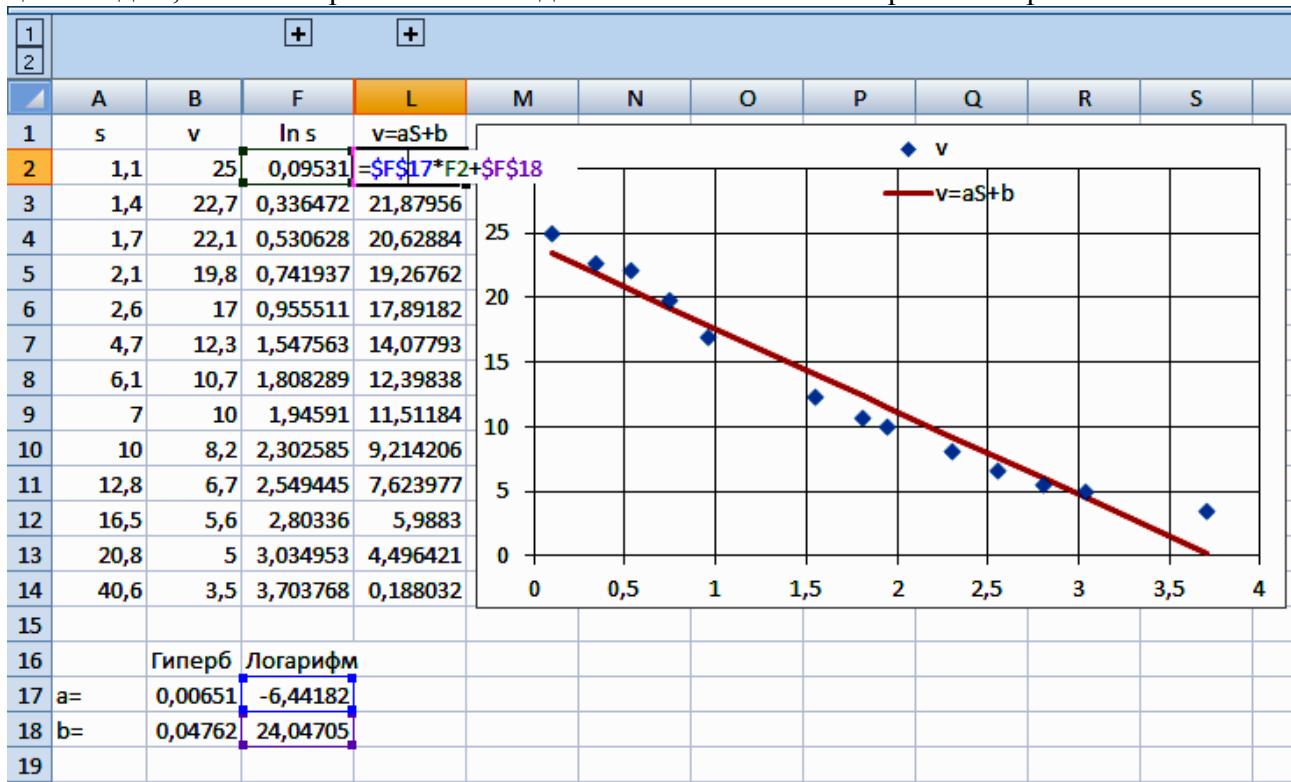


Рис. 15.12. Проверка адекватности логарифмической модели, сведенной к линейному виду

4. Проверим адекватность полученной модели, построив график $v = -6,44182 \ln s + 24,04705$ на исходной диаграмме рассеивания (рис. 15.13). Для этого надо построить столбец модель-

ных значений v в столбце М и добавить новый ряд данных на диаграмму с точками из табл. 1. На рис. 15.13 для наглядности столбцы С:L сгруппированы. Видим, что график функции $v = -6,44182 \ln s + 24,04705$ проходит не очень далеко от точек из таблицы, то есть логарифмическая модель достаточно хорошо согласуется с данными задачи.

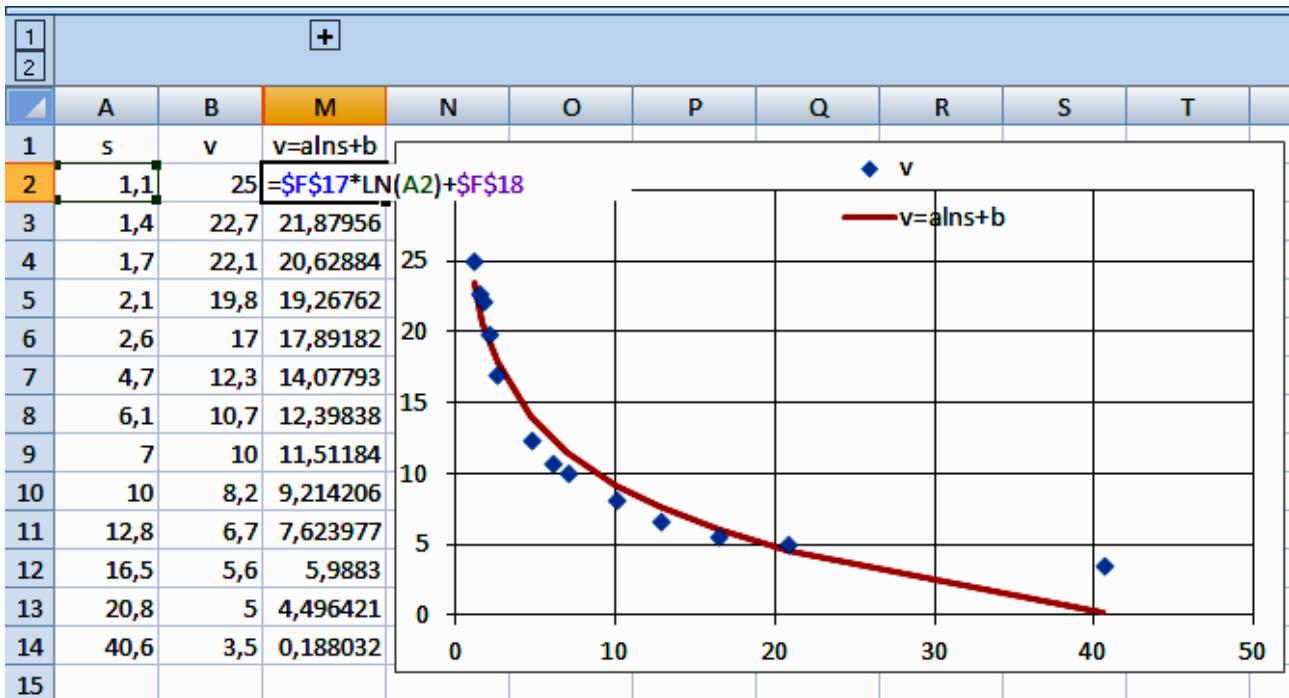


Рис. 15.13. Проверка адекватности нелинейной логарифмической модели

Таким образом, в данном примере визуально наилучшей является степенная зависимость: при обработке хромоникелевой стали скорость резания v (м/мин) в зависимости от площади поперечного сечения стружки s (мм^2) находится по формуле $v = 28,75307 \cdot s^{-0,56515}$.

При решении примера 1 видели, что гипотезы о гиперболической и логарифмической зависимости также имеют право на существование. Для количественного обоснования выбора той или иной гипотезы о виде зависимости надо находить *числовые характеристики адекватности математической модели*. Пусть проведен эксперимент по установлению зависимости значений некоторого параметра y от значений параметра x и результаты эксперимента занесены в таблицу (табл. 2), где n — количество измерений.

Таблица 2. Результаты эксперимента

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
y_i	y_1	y_2	\dots	y_n

Для линейной модели, построенной на основе табл. 2, главной числовой характеристикой является *коэффициент парной линейной корреляции r* :

$$r = \frac{\bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad (15.5)$$

где $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ — среднее арифметическое значение x_i из табл. 2,

$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$ — среднее арифметическое значение y_i из табл. 2,

$\bar{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}$ — среднее арифметическое значение произведений $x_i y_i$,

$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ — среднеквадратическое отклонение x ,

$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}$ — среднеквадратическое отклонение y .

Величины x и y абсолютно равноправны при расчете r . При этом $|r| \leq 1$, и чем ближе $|r|$ к единице, тем более ярко выражена линейная связь (корреляция) между y и x . Если $r > 0$, то увеличению x соответствует увеличение y . Если же $r < 0$, то увеличению x соответствует уменьшение y .

Значит, можно рассчитать коэффициент парной линейной корреляции r для всех моделей (15.1)–(15.4) из примера 1, сведенных к линейному виду, и выбрать тот вид зависимости, для которого $|r|$ ближе к единице.

Пример 2. Научимся находить коэффициент парной линейной корреляции r , используя данные табл. 1 из примера 1.

1. Для удобства скопируем диапазон A1:B14 с исходными данными на новый лист (рис. 15.14).

2. Поскольку исходная таблица — вертикальная, то слагаемые для нужных в формуле (15.5) сумм удобно вычислять в столбцах. Подготовим подписи для рассчитываемых величин (рис. 15.14). В нашем примере роль фактора x играет s , а фактора y — v . Поэтому подписи вместо x и y содержат s и v соответственно.

	A	B	C	D	E	F
1	s	v	s*v	(s-s_sred)^2	(v-v_sred)^2	
2	1,1	25				
3	1,4	22,7				
4	1,7	22,1				
5	2,1	19,8				
6	2,6	17				
7	4,7	12,3				
8	6,1	10,7				
9	7	10				
10	10	8,2				
11	12,8	6,7				
12	16,5	5,6				
13	20,8	5				
14	40,6	3,5				
15						
16	s_sred	v_sred	s*v_sred	sred_kv_s	sred_kv_v	r
17						

Рис. 15.14. Подписи для вычисления r

3. В столбце С вычислим $s_i v_i$, $i = 1, \dots, 13$: в ячейку C2 введем формулу «=A2*B2» и скопируем ее вниз на всю длину таблицы.

4. Вычислим \bar{s} , \bar{v} и $\bar{s \cdot v}$ в ячейках A17, B17 и C17:

$$A17: \text{«=СУММ(A2:A14)/13»} \left(\bar{s} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i \right);$$

$$B17: \text{«=СУММ(B2:B14)/13»} \left(\bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i \right);$$

C17: «=СУММ(C2:C14)/13» $\left(\bar{s \cdot v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i v_i \right)$. Формулу из A17 можно скопировать в B17:C17.

5. После того, как вычислены \bar{s} и \bar{v} , можно находить $(s_i - \bar{s})^2$ и $(v_i - \bar{v})^2$ в столбцах D и E:

D2: «=(A2-\$A\$17)^2», копируем вниз на всю длину таблицы;

E2: «=(B2-\$B\$17)^2», копируем вниз на всю длину таблицы.

6. Найдем среднеквадратические отклонения:

$$D17: \text{«=КОРЕНЬ(СУММ(D2:D14)/13)} \left(\sigma_s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2} \right);$$

$$E17: \text{«=КОРЕНЬ(СУММ(E2:E14)/13)} \left(\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2} \right).$$

7. Рассчитаем коэффициент r (рис. 15.15):

$$F17: \text{«=(C17-A17*B17)/(D17*E17)»} \left(r = \frac{\bar{s \cdot v} - \bar{s} \cdot \bar{v}}{\sigma_s \cdot \sigma_v} \right). \text{ Получаем } r \approx -0,77010956.$$

	A	B	C	D	E	F	G	
1	s	v	s*v	(s-s_sred)^2	(v-v_sred)^2			
2	1,1	25	27,5	75,69	144,7394083			
3	1,4	22,7	31,78	70,56	94,68786982			
4	1,7	22,1	37,57	65,61	83,37094675			
5	2,1	19,8	41,58	59,29	46,65940828			
6	2,6	17	44,2	51,84	16,24710059			
7	4,7	12,3	57,81	26,01	0,447869822			
8	6,1	10,7	65,27	13,69	5,149408284			
9	7	10	70	7,84	8,816331361			
10	10	8,2	82	0,04	22,74556213			
11	12,8	6,7	85,76	9	39,30325444			
12	16,5	5,6	92,4	44,89	54,30556213			
13	20,8	5	104	121	63,50863905			
14	40,6	3,5	142,1	948,64	89,66633136			
15								
16	s_sred	v_sred	s*v_sred	sred_kv_s	sred_kv_v	r		
17	9,8	12,96923	67,84385	10,72057691	7,177141558	= (C17-A17*B17)/(D17*E17)		
18								

Рис. 15.15. Вычисление r по формуле $r = \frac{\bar{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

В Excel имеется встроенная функция КОРРЕЛ для вычисления коэффициента парной линейной корреляции r . Самостоятельно рассчитайте в ячейке G17 значение r с помощью функции КОРРЕЛ, сравните с числом в F17. Убедитесь, что получаются одинаковые значения. Обратите внимание, что ряды данных в диалоговом окне этой функции называются

Массив1 и **Массив2**, что подчеркивает полное равноправие факторов: при линейной зависимости не важно, какой из факторов является функцией, а какой — аргументом.

Пример 3. С помощью встроенной функции КОРРЕЛ найдем коэффициенты парной линейной корреляции r для всех моделей (15.1)–(15.4) из примера 1, сведенных к линейному виду, и выберем тот вид зависимости, для которого $|r|$ ближе к единице.

Вычисление r можно провести, например, в строке 19, ниже полученных коэффициентов a и b построенных нелинейных моделей. Последовательность действий ясна из рис. 15.16, на котором для краткости свернуты строки 17–18 и столбец С. Получаем:

- 1) для гиперболической зависимости $r \approx 0,978974$;
- 2) степенной зависимости $r \approx -0,99765$;
- 3) показательной зависимости $r \approx -0,89138$;
- 4) логарифмической зависимости $r \approx -0,978902$.

Напомним, что для исходной таблицы (то есть для гипотезы о линейном виде зависимости) $r \approx -0,77010956$ (см. пример 2). Таким образом, наилучшей является гипотеза о степенном виде зависимости.

	A	B	D	E	F
16		Гиперболическая	Степенная	Показательная	Логарифмическая
19	$r =$	=КОРРЕЛ(A2:A14;C2:C14)	=КОРРЕЛ(F2:F14;G2:G14)	=КОРРЕЛ(A2:A14;G2:G14)	=КОРРЕЛ(F2:F14;B2:B14)
20					

Рис. 15.16. Формулы расчета r для всех моделей примера 1

Укажем еще несколько числовых характеристик адекватности математической модели. Значимость модели определяется ее возможностью прогнозировать среднее значение моделируемой функции по заданным значениям независимой переменной. Для определения значимости линейных и нелинейных моделей используется *корреляционное отношение* η :

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (15.6)$$

Корреляционное отношение η меняется в пределах от 0 до 1 и является показателем степени близости математической формулы (модели) к фактическим данным. Чем ближе η к единице, тем теснее связь между изучаемыми признаками, и тем точнее математическая модель описывает эту связь. Для линейных моделей $\eta = |r|$.

В качестве меры точности математической модели используют *среднюю относительную ошибку аппроксимации* ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|y_i - \bar{y}_i|}{|y_i|} \cdot 100\%. \quad (15.7)$$

При подборе математической формулы зависимости y от x следует ориентироваться на ту формулу, для которой η ближе к единице и для которой ε меньше.

Пример 4. Рассчитаем η и ε по формулам (15.6) и (15.7) для всех моделей (15.1)–(15.4) из примера 1 и для линейной модели тоже.

Модельные значения нелинейных функций y у нас уже получены (см. пример 1). Для получения линейной модели рассчитаем коэффициенты a и b , например, в G17 и G18: $a \approx -0,51557$, $b \approx 18,0218$. Подпишем столбец N «v=as+b», в ячейку N2 введем формулу «=G\$17*A2+\$G\$18» и скопируем ее вниз на всю длину таблицы. Теперь готовы значения функций, соответствующие линейной модели. Все действия по расчету η и ε для каждой модели однотипны, поэтому и выполнять их будем одновременно по шагам.

- Подготовим подписи для η и ε , например, в A20 и A21: «eta=», «eps=». В дальнейшем вычислим эти параметры для каждой модели под соответствующей подписью типа зависимости.
- Подготовим слагаемые $(y_i - \bar{y}_i)^2$ для каждой модели. В строке 1 в ячейках, например, O1:S1 выполним подписи — укажем тип зависимости, для которой будем вычислять эти слагаемые: «Гиперболическая», «Степенная», «Показательная», «Логарифмическая», «Линейная» (рис. 15.17). Напомним, что соответствующие модельные значения \bar{y}_i рассчитаны в столбцах E, I, K, M, N. Поэтому в ячейки O2:S2 введем формулы:

O2: «=(B2-E2)^2»;

P2: «=(B2-I2)^2»;

Q2: «=(B2-K2)^2»;

R2: «=(B2-M2)^2»;

S2: «=(B2-N2)^2»

и скопируем их на всю длину таблицы.

- Получим суммы $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2$ для каждой модели: в ячейку O15 введем формулу автосуммы «=СУММ(O2:O14)» и скопируем ее в P15:S15.

- Получим знаменатель $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ — общий для всех моделей. Значение \bar{y} рассчитаем в ячейке B15 с помощью формулы «=СРЗНАЧ(B2:B14)». Столбец Т подпишем «Знаменатель», в ячейку T2 введем формулу «=(B2-\$B\$15)^2» и скопируем вниз на всю длину таблицы. В ячейке T15 получим искомую сумму: «=СУММ(T2:T14)». Теперь все готово для вычисления корреляционных отношений.

	N	O	P	Q	R	S	T
1	v=as+b	Гиперб	Степенн	Паказат	Логарифм	Линейн	Знаменат
2	=G\$17*A2+\$G\$18	= (B2-E2)^2	= (B2-I2)^2	= (B2-K2)^2	= (B2-M2)^2	= (B2-N2)^2	= (B2-\$B\$15)^2
3	=G\$17*A3+\$G\$18	= (B3-E3)^2	= (B3-I3)^2	= (B3-K3)^2	= (B3-M3)^2	= (B3-N3)^2	= (B3-\$B\$15)^2
4	=G\$17*A4+\$G\$18	= (B4-E4)^2	= (B4-I4)^2	= (B4-K4)^2	= (B4-M4)^2	= (B4-N4)^2	= (B4-\$B\$15)^2
5	=G\$17*A5+\$G\$18	= (B5-E5)^2	= (B5-I5)^2	= (B5-K5)^2	= (B5-M5)^2	= (B5-N5)^2	= (B5-\$B\$15)^2
6	=G\$17*A6+\$G\$18	= (B6-E6)^2	= (B6-I6)^2	= (B6-K6)^2	= (B6-M6)^2	= (B6-N6)^2	= (B6-\$B\$15)^2
7	=G\$17*A7+\$G\$18	= (B7-E7)^2	= (B7-I7)^2	= (B7-K7)^2	= (B7-M7)^2	= (B7-N7)^2	= (B7-\$B\$15)^2
8	=G\$17*A8+\$G\$18	= (B8-E8)^2	= (B8-I8)^2	= (B8-K8)^2	= (B8-M8)^2	= (B8-N8)^2	= (B8-\$B\$15)^2
9	=G\$17*A9+\$G\$18	= (B9-E9)^2	= (B9-I9)^2	= (B9-K9)^2	= (B9-M9)^2	= (B9-N9)^2	= (B9-\$B\$15)^2
10	=G\$17*A10+\$G\$18	= (B10-E10)^2	= (B10-I10)^2	= (B10-K10)^2	= (B10-M10)^2	= (B10-N10)^2	= (B10-\$B\$15)^2
11	=G\$17*A11+\$G\$18	= (B11-E11)^2	= (B11-I11)^2	= (B11-K11)^2	= (B11-M11)^2	= (B11-N11)^2	= (B11-\$B\$15)^2
12	=G\$17*A12+\$G\$18	= (B12-E12)^2	= (B12-I12)^2	= (B12-K12)^2	= (B12-M12)^2	= (B12-N12)^2	= (B12-\$B\$15)^2
13	=G\$17*A13+\$G\$18	= (B13-E13)^2	= (B13-I13)^2	= (B13-K13)^2	= (B13-M13)^2	= (B13-N13)^2	= (B13-\$B\$15)^2
14	=G\$17*A14+\$G\$18	= (B14-E14)^2	= (B14-I14)^2	= (B14-K14)^2	= (B14-M14)^2	= (B14-N14)^2	= (B14-\$B\$15)^2
15		=СУММ(O2:O14)	=СУММ(P2:P14)	=СУММ(Q2:Q14)	=СУММ(R2:R14)	=СУММ(S2:S14)	=СУММ(T2:T14)
16							

Рис. 15.17. Формулы расчета $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2$ для всех моделей примера 1 и величины $\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$

- Рассчитаем корреляционные отношения по формуле (15.5):

B20: «=КОРЕНЬ(1-O15/\$T\$15)»;

D20: «=КОРЕНЬ(1-P15/\$T\$15)»;

E20: «=КОРЕНЬ(1-Q15/\$T\$15)»;

G20: «=КОРЕНЬ(1-R15/\$T\$15)»;

F20: «=КОРЕНЬ(1-S15/\$T\$15)».

Получаем:

- для гиперболической зависимости $\eta \approx 0,91005597$;
- степенной зависимости $\eta \approx 0,99373645$;
- показательной зависимости $\eta \approx 0,85297722$;
- логарифмической зависимости $\eta \approx 0,97890194$;
- линейной зависимости $\eta \approx 0,77011$ (получили $\eta = |r|$).

Самостоятельно составьте программу вычисления ε по формуле (15.7) для всех моделей (15.1)-(15.4) из примера 1 и для линейной модели. Результаты расчетов представлены на рис. 15.18.

	A	B	C	D	E	F	G
16		Гиперболическая		Степенная	Показательная	Логарифмическая	Линейная
17	a=	0,006513067	-0,565149435	28,75307323	-0,051370487	-6,441823477	-0,5155679
18	b=	0,047624231	3,358744656	-0,565149435	2,89030392	24,04705254	18,02179619
19	r=	0,978973944		-0,997647363	-0,891381716	-0,978901939	-0,77010956
20	eta=	0,910055968		0,993736448	0,852977218	0,978901939	0,77010956
21	eps=	13,2%		3,8%	26,2%	16,0%	48,4%
22							

Рис. 15.18. Средняя относительная ошибка аппроксимации для всех моделей примера 1

Все показатели говорят о том, что степенная модель — лучшая.

Замечание 1. Обработку гипотез о каждом виде зависимости можно вести на отдельных листах — на каждом по одной гипотезе. В этом случае удобно использовать копирование целых листов. Диаграммы для удобства надо подписывать.

Замечание 2. Уравнение линии тренда (функциональной зависимости) со всеми интересующими параметрами можно получить автоматически. Алгоритм получения описан в предыдущей лабораторной работе. Получите самостоятельно на диаграмме рассеивания из примера 1 линии тренда для всех рассмотренных зависимостей и сравните автоматически найденные параметры с рассчитанными в примере 1.

Задание для самостоятельной работы

В результате эксперимента была получена таблица зависимости y от x . С помощью метода наименьших квадратов найдите нелинейную функцию, выражающую эту зависимость. Для этого проверьте гипотезы о виде зависимости. Для полученной нелинейной модели найдите корреляционное отношение и среднюю относительную ошибку аппроксимации.

Вариант 1.

x_i	-2,3	-2	-1,5	-1,1	-0,6	-0,1	0,5	0,9	1,6	2,3
y_i	0,05	0,08	0,21	0,45	1,17	3,03	9,49	20,29	76,71	290,03

Вариант 2.

x_i	-1,2	-1,1	-0,6	-0,1	0,5	0,9	1,5	1,9	2,4	3,5
y_i	-0,21	-0,22	-0,24	-0,27	-0,32	-0,36	-0,44	-0,53	-0,69	-2,22

Вариант 3.

x_i	0,4	0,6	0,9	1,2	1,9	2,3	2,5	3,1	3,3	3,9
y_i	3,49	4,43	5,36	6,02	7,08	7,52	7,71	8,20	8,35	8,73

Вариант 4.

x_i	0,1	0,6	0,9	1,5	1,9	2,3	2,5	3,1	3,6	4,1
y_i	0,01	0,46	1,18	3,81	6,56	10,19	12,34	20,24	28,55	38,50

Вариант 5.

x_i	0,4	0,6	1,2	1,5	1,9	2	2,5	3,1	3,2	4,1
y_i	0,21	0,27	0,58	0,86	1,45	1,65	3,16	6,89	7,85	25,28

Вариант 6.

x_i	-2,3	-2	-1,5	-1,1	-0,6	-0,1	0,5	0,9	1,6	2,3
y_i	-0,06	-0,07	-0,08	-0,08	-0,10	-0,11	-0,14	-0,17	-0,27	-0,68

Вариант 7.

x_i	-1,2	-1,1	-0,6	-0,1	0,5	0,9	1,5	1,9	2,4	3,5
y_i	0,02	0,03	0,09	0,24	0,86	1,99	7,03	16,28	46,53	468,72

Вариант 8.

x_i	0,4	0,6	0,9	1,2	1,9	2,3	2,5	3,1	3,3	3,9
y_i	-4,14	-3,37	-2,60	-2,05	-1,18	-0,82	-0,66	-0,25	-0,13	0,19

Вариант 9.

x_i	0,4	0,6	1,2	1,5	1,9	2	2,5	3,1	3,2	4,1
y_i	0,02	0,09	0,91	1,91	4,16	4,92	10,28	20,92	23,23	52,62

Вариант 10.

x_i	0,1	0,6	0,9	1,5	1,9	2,3	2,5	3,1	3,6	4,1
y_i	-8,08	-2,88	-1,71	-0,22	0,46	1,02	1,26	1,88	2,31	2,69

Вариант 11.

x_i	-2,3	-2	-1,5	-1,1	-0,6	-0,1	0,5	0,9	1,6	2,3
y_i	0,04	0,08	0,23	0,45	1,19	3,01	9,49	20,29	76,81	292,03

Вариант 12.

x_i	-1,2	-1,1	-0,6	-0,1	0,5	0,9	1,5	1,9	2,4	3,5
y_i	-0,25	-0,22	-0,22	-0,29	-0,32	-0,36	-0,45	-0,51	-0,69	-2,24

Вариант 13.

x_i	0,4	0,6	0,9	1,2	1,9	2,3	2,5	3,1	3,3	3,9
y_i	3,47	4,42	5,26	6,12	7,09	7,59	7,78	8,30	8,32	8,71

Вариант 14.

x_i	0,1	0,6	0,9	1,5	1,9	2,3	2,5	3,1	3,6	4,1
y_i	0,02	0,44	1,28	3,85	6,59	10,14	12,24	20,29	28,65	39,50

Вариант 15.

x_i	0,4	0,6	1,2	1,5	1,9	2	2,5	3,1	3,2	4,1
y_i	0,26	0,29	0,55	0,89	1,43	1,66	3,19	6,99	7,95	25,38

Вариант 16.

x_i	-2,3	-2	-1,5	-1,1	-0,6	-0,1	0,5	0,9	1,6	2,3
y_i	-0,05	-0,08	-0,09	-0,10	-0,11	-0,12	-0,14	-0,18	-0,29	-0,67

Вариант 17.

x_i	-1,2	-1,1	-0,6	-0,1	0,5	0,9	1,5	1,9	2,4	3,5
y_i	0,01	0,03	0,08	0,22	0,89	1,97	7,05	16,18	46,73	463,72

Вариант 18.

x_i	0,4	0,6	0,9	1,2	1,9	2,3	2,5	3,1	3,3	3,9
y_i	-4,18	-3,33	-2,50	-2,11	-1,17	-0,83	-0,60	-0,27	-0,12	0,18

Вариант 19.

x_i	0,4	0,6	1,2	1,5	1,9	2	2,5	3,1	3,2	4,1
y_i	0,03	0,08	0,96	1,93	4,06	4,90	10,38	21,92	22,23	53,62

Вариант 20.

x_i	0,1	0,6	0,9	1,5	1,9	2,3	2,5	3,1	3,6	4,1
y_i	-8,09	-2,78	-1,64	-0,23	0,56	1,07	1,28	1,85	2,34	2,68

Лабораторная работа № 16
Поиск экстремума функции нескольких переменных.
Метод градиентного спуска

Пусть требуется найти экстремум (минимум или максимум) функции нескольких переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенной в некоторой области D пространства R^n .

Определение. Говорят, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ имеет *строгий максимум (строгий минимум)* в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек (x_1, x_2, \dots, x_n) из этой окрестности, кроме самой точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, выполняется неравенство

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) < f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \quad (f(x_1, x_2, \dots, x_n) > f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)). \quad (16.1)$$

Если неравенства (16.1) нестрогие, то максимум (минимум) называется *нестрогим*. При этом число $f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ называют *максимумом* или *максимальным значением* (минимумом или *минимальным значением*) функции и обозначают $f_{\max}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ($f_{\min}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$).

Теорема 1 (необходимые условия существования экстремума). *Если функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенная в некоторой области D пространства R^n , имеет экстремум в какой-либо ее точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, то все частные производные первого порядка данной функции в этой точке (если они существуют) равны нулю, то есть*

$$f'_{x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0, \quad f'_{x_2}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0, \dots, \quad f'_{x_n}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0. \quad (16.2)$$

Определение. Точка, в которой все частные производные функции нескольких переменных обращаются в ноль одновременно, называется *стационарной точкой*.

Таким образом, стационарные точки — точки, в которых может существовать экстремум. По этой причине они называются *точками, подозрительными на экстремум*.

Теорема 2 (достаточные условия существования экстремума функции двух переменных). *Если функция $f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) имеет частные производные до второго порядка включительно, причем $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$, а вторые частные производные непрерывны в точке (x_0, y_0) , то функция $f(x, y)$ в этой точке:*

1) при $\Delta > 0$, где $\Delta = f''_{xx}(x_0, y_0) \cdot f''_{yy}(x_0, y_0) - (f''_{xy}(x_0, y_0))^2$, имеет экстремум, а именно максимум, если $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, и минимум, если $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$;

2) при $\Delta < 0$ не имеет экстремума.

Пример 1. Из листа тонкой жести требуется изготовить контейнер в форме прямоугольного параллелепипеда объемом 1 м^3 , причем желательно израсходовать на его изготовление как можно меньше материала.

Требование минимизировать расходы материала означает, что площадь полной поверхности контейнера при заданном объеме должна быть минимальной из всех возможных. Пусть x, y, z — длины сторон контейнера, тогда по условию $x \cdot y \cdot z = 1, x > 0, y > 0, z > 0$, а площадь поверхности равна $S = 2 \cdot (x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z)$. Выразим одну из неизвестных величин, например, z , из равенства $x \cdot y \cdot z = 1$: $z = \frac{1}{xy}$. Подставляя z в выражение для S , получаем

$S = S(x, y) = 2 \cdot \left(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$. Таким образом, требуется найти наименьшее значение функции двух переменных $S(x, y)$ при ограничениях на переменные: $x > 0, y > 0$.

Алгоритм поиска экстремума функции двух переменных в заданной области хорошо известен. Если область замкнутая и ограниченная, а функция — дифференцируемая, то наименьшее и наибольшее значения достигаются на границе области или в стационарных точках этой области, то есть в точках, в которых все частные производные обращаются в нуль. В нашем случае область не является ограниченной, но стационарные точки можно найти и, используя достаточное условие существования экстремума функции двух переменных, определить наличие минимума или отсутствие его.

Как и в случае функции одной переменной, можно привлечь графическое представление функции двух переменных — построить поверхность в трехмерном пространстве. Это можно сделать в *Excel* с помощью диаграммы типа «Поверхность» на основе прямоугольного диапазона ячеек. Для этого надо сначала построить двумерную таблицу значений функции двух переменных (например, по аналогии с таблицей Пифагора). В столбце А по вертикали с заданным шагом будем менять значение y , а в строке 1 по горизонтали — x . Прямоугольный диапазон, задаваемый количеством занятых строк и столбцов значений y и x , заполним соответствующими значениями S . Ячейку A1 одновременно для x и для y использовать нельзя, будем в ней хранить шаг таблицы.

1. В ячейку A1 без подписи введем значение шага, например, 0,05.
2. Исходя из ограничений $x > 0$, $y > 0$ в A2 зададим начальное значение y , например, 0,1, а в B1 — такое же значение x (рис. 16.1).
3. В ячейку A3 введем формулу изменения y , предполагая дальнейшее копирование вниз, а в C1 — x , предполагая дальнейшее копирование вправо (рис. 16.1):

A3: «=A2+\$A\$1»;
C1: «=B1+\$A\$1».

	A	B	C	D
1	0,05	0,1	=B1+\$A\$1	
2	0,1			
3	=A2+\$A\$1			
4				

Рис. 16.1. Шаг, начальные значения x и y , формулы при построении поверхности

4. Построим таблицы значений x и y , от 0,1, например, до 2 копированием вниз для y и вправо для x (рис. 16.2).

5. В ячейку B2 введем формулу вычисления значения функции $S = 2 \cdot \left(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$ (рис. 16.2):

B2: «=2*(B\$1*\$A2+1/B\$1+1/\$A2)».

	A	B	C	D	E	F	G
1	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
2	0,1	=2*(B\$1*\$A2+1/B\$1+1/\$A2)					
3	0,15						
4	0,2						
5	0,25						

Рис. 16.2. Главная формула при построении поверхности

В этой формуле зафиксирован номер строки x , а номер столбца при этом не зафиксирован — B\$1, поэтому при копировании вправо адрес столбца x будет меняться, а при копировании вниз номер строки со значениями x меняться не будет. Аналогично у аргумента y зафиксирован адрес столбца A, в то время как номер строки не зафиксирован — \$A2. Этот адрес будет меняться только при копировании вниз.

6. Копируем формулу из B2 вправо на всю длину таблицы до AN2. После завершения этого копирования диапазон B2:AN2 выделен. Не щелкая кнопками мыши при выделенном диапазоне B2:AN2 копируем его вниз на всю длину таблицы, до строки 40.

7. Выделяем диапазон B2:AN40 (после копирования вниз он и так выделен) и вставляем диаграмму **Поверхность** (1 тип) (рис. 16.3).

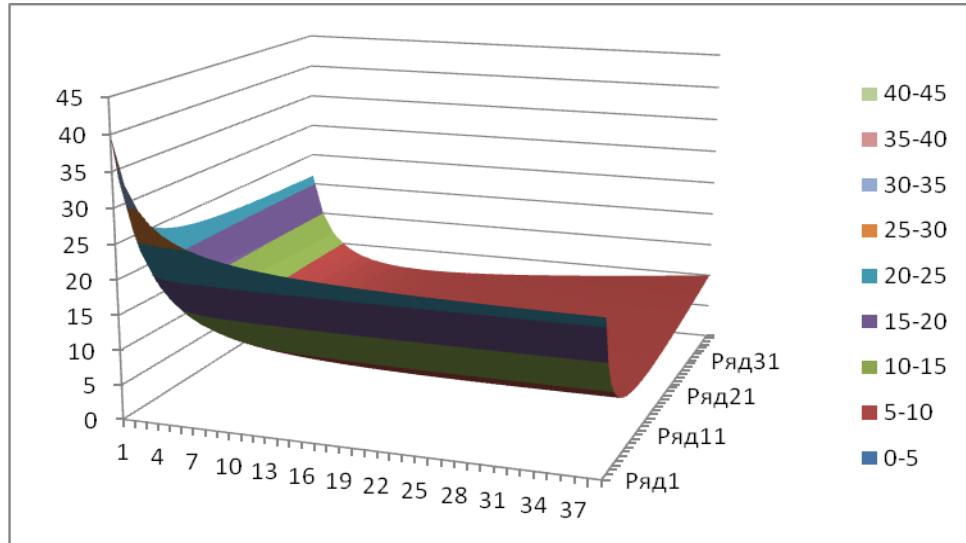


Рис. 16.3. Исходная диаграмма поверхности $S = 2 \cdot \left(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$

Недостатком построенной диаграммы является то, что по осям Ox и Oy отмечаются номера строк и столбцов, а не значения x и y . Этот недостаток устраним позже в примере 4. В данный момент выполненного построения достаточно, чтобы составить представление о поверхности. Полученную поверхность можно вращать. Выделим область построения диаграммы и правой кнопкой мыши вызовем контекстное меню, в котором выберем пункт **Поворот объемной фигуры...**. Полученную поверхность можно вращать вокруг осей Ox или Oy . Попробуйте выполнить это самостоятельно. На рис. 16.4 изображена та же поверхность в другой цветовой гамме с корректировкой максимального и минимального значений по вертикальной оси и с поворотом на 120° вокруг оси Ox и на -10° вокруг оси Oy .

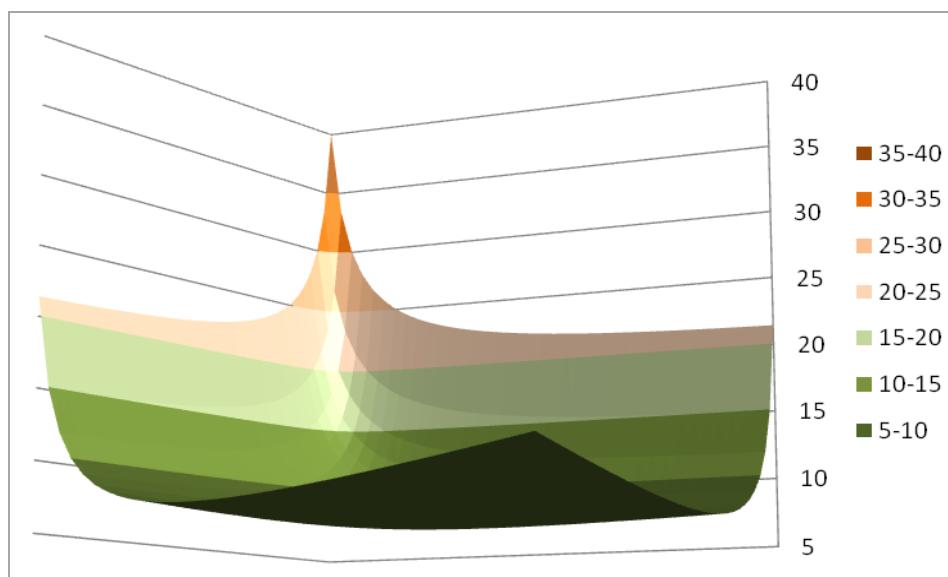


Рис. 16.4. Изменение цветовой гаммы и поворот поверхности

При вращении поверхности заметна неглубокая достаточно пологая «ямка», а по таблице видим, что значения функции S не меньше 6. То есть функция S , похоже, имеет минимум

не далеко от точки $(1; 1)$. Можно намеренно изменить масштаб по осям, вытянув в данном случае диаграмму по высоте (рис. 16.5), расширить таблицу по обеим переменным. Минимум станет более заметным.

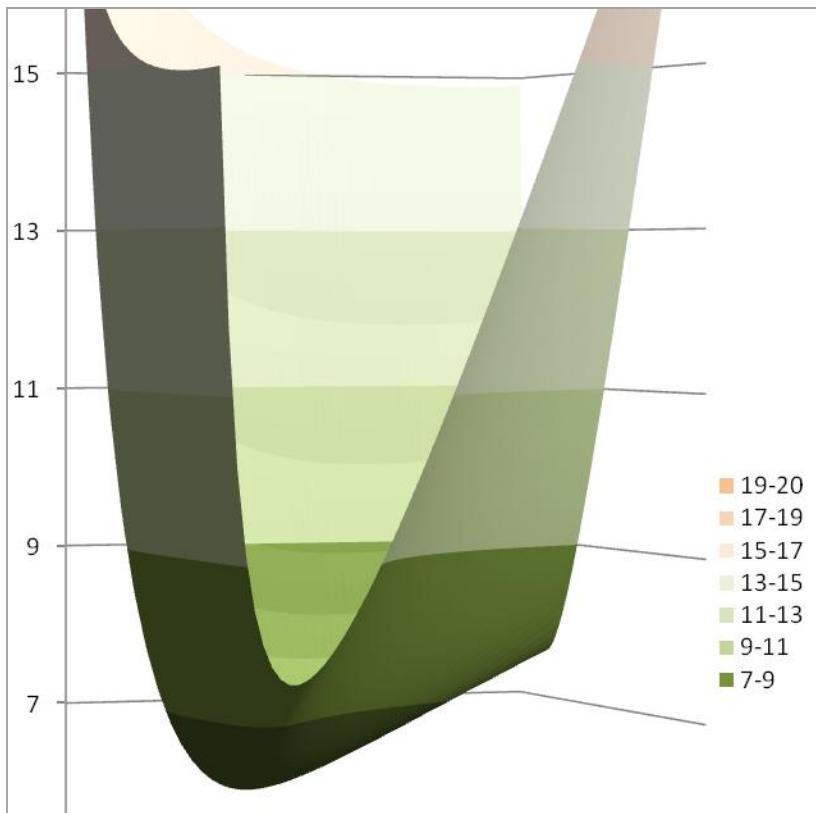


Рис. 16.5. Изменение масштаба по осям

Продолжим поиск минимума функции S . Воспользуемся теоремой 2. Для нахождения стационарных точек получим частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \cdot \left(y - \frac{1}{x^2} \right), \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{y^2} \right)$$

и, приравнивая их к нулю, — систему уравнений (16.2):

$$\begin{cases} y - \frac{1}{x^2} = 0, \\ x - \frac{1}{y^2} = 0. \end{cases} \quad (16.3)$$

Выразим $y = \frac{1}{x^2}$ из первого уравнения и подставим во второе, получим $x - x^4 = 0$, откуда $x = 1$, и $y = 1$, так как $x > 0, y > 0$. Таким образом, в интересующей нас области оказалась одна стационарная точка — $(1; 1)$. Для проверки достаточных условий существования в ней экстремума найдем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{4}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{4}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 2.$$

Получим $S''_{xx}(1; 1) = \frac{4}{1^3} = 4$, $S''_{yy}(1; 1) = \frac{4}{1^3} = 4$, $S''_{xy}(1; 1) = 2$,

$$\Delta = S''_{xx}(1; 1) \cdot S''_{yy}(1; 1) - (S''_{xy}(1; 1))^2 = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0.$$

Таким образом, по достаточному признаку наличия экстремума в стационарной точке $(1; 1)$ есть экстремум, и он — минимум, так как $S''_{xx}(1; 1) > 0$. Легко доказать, что

при $x > 0$, $y > 0$ в точке минимума $(1; 1)$ функция S принимает наименьшее значение, находя наименьшее значение S , например, на множестве $x \in [a; b]$, $y \in [c; d]$, где положительные a, b, c, d — варьируемые параметры. Получили:

$$\inf_{x>0, y>0} S = \inf_{x>0, y>0} 2 \cdot \left(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) = S_{\min}(1; 1) = 2 \cdot \left(1 \cdot 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) = 6.$$

При $x=1$, $y=1$ получаем, что $z=1$. Значит, наименьшую площадь поверхности, равную 6, из всех контейнеров объема 1 имеет контейнер в форме куба с ребром 1.

Задачу в примере 1 удалось решить точно, так как система нелинейных уравнений (16.3) оказалась достаточно простой. В более сложных случаях приходится привлекать численные (приближенные) методы поиска экстремума.

Метод градиентного спуска

Как известно, градиент функции нескольких переменных $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — это вектор

$$\text{grad } u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_2}; \dots; \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Big|_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0, \dots, x_n=x_n^0}, \quad (16.4)$$

задающий направление наибольшего возрастания функции. Следовательно, направление, противоположное задаваемому градиентом, ведет в сторону наибольшего убывания функции. Таким образом, выбрав произвольно начальную точку $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ из области определения функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, можно из нее сделать шаг в сторону наибольшего убывания функции, переместившись в точку $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$. Формулы перехода от точки $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ к точке $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ выглядят так:

$$\begin{cases} x_1^1 = x_1^0 - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0, \dots, x_n=x_n^0}, \\ x_2^1 = x_2^0 - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0, \dots, x_n=x_n^0}, \\ \dots \\ x_n^1 = x_n^0 - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0, \dots, x_n=x_n^0}, \end{cases} \quad (16.5)$$

где положительная величина h — шаг метода — подбирается опытным путем (см. далее Пример 2 и эксперименты с h), а знак « \rightarrow » указывает на движение в направлении, противоположном градиенту. В точке $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ процедура повторяется: находится градиент функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в данной точке и выполняется шаг в противоположном градиенту направлении, который заканчивается в точке $(x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$, и так далее. Формулы (16.5) можно обобщить на случай перехода от точки $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$ к точке $(x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \dots, x_n^{i+1})$:

$$\begin{cases} x_1^{i+1} = x_1^i - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^i, x_2=x_2^i, \dots, x_n=x_n^i}, \\ x_2^{i+1} = x_2^i - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1=x_1^i, x_2=x_2^i, \dots, x_n=x_n^i}, \quad i=0, 1, \dots, \quad (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D \subset R^n. \\ \dots \\ x_n^{i+1} = x_n^i - h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} \Big|_{x_1=x_1^i, x_2=x_2^i, \dots, x_n=x_n^i}, \end{cases} \quad (16.6)$$

Поиск минимума функции нескольких переменных по формулам (16.6) называется *методом градиентного спуска*. Процесс перехода от точки к точке по формулам (16.6) в идеале продолжается до получения наименьшего значения функции. На практике он может быть остановлен по одному из перечисленных ниже признаков окончания вычислений.

1. Поскольку в точке минимума $f'_{x_1} = 0, f'_{x_2} = 0, \dots, f'_{x_n} = 0$, то вычисления можно завершить на i -м шаге при условии, что $|f'_{x_1}(x_1^i, \dots, x_n^i)| + |f'_{x_2}(x_1^i, \dots, x_n^i)| + \dots + |f'_{x_n}(x_1^i, \dots, x_n^i)| < \varepsilon$, где ε — заданная точность. То есть вычисления прекращаются в случае, если все частные производные в некоторой точке достаточно близки к нулю.

2. Поскольку в точке минимума $f'_{x_1} = 0, f'_{x_2} = 0, \dots, f'_{x_n} = 0$, то при приближении к этой точке величины изменений переменных $x_j^{i+1} - x_j^i = -h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}, j=0, 1, \dots, n$, стремятся к нулю,

и вычисления можно завершить на $(i+1)$ -м шаге при условии, что $\sum_{j=1}^n |x_j^{i+1} - x_j^i| < \varepsilon$. То есть вычисления прекращаются в случае, если все компоненты двух соседних приближений к минимуму достаточно близки между собой (вычислительный процесс «топчется на месте»).

3. Поскольку при приближении к точке минимума величины изменений переменных стремятся к нулю, то значения непрерывной функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, вычисленные в точках $(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)$ и $(x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \dots, x_n^{i+1})$, сближаются между собой, и вычисления можно завершить на $(i+1)$ -м шаге при условии, что $|f(x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i) - f(x_1^{i+1}, x_2^{i+1}, \dots, x_n^{i+1})| < \varepsilon$.

В случае функции двух переменных $u = f(x_1, x_2)$ можно дать геометрическую интерпретацию формул (16.5) и (16.6). Как известно, вектор $\text{grad } u(x_1^0, x_2^0)$ перпендикулярен в точке (x_1^0, x_2^0) линии уровня этой функции $f(x_1, x_2) = C$, проходящей через точку (x_1^0, x_2^0) . На рис. 16.6 изображены линии уровня некоторой функции в окрестности минимума и показан начальный шаг метода градиентного спуска — переход от произвольно выбранной точки (x_1^0, x_2^0) к точке (x_1^1, x_2^1) с координатами, вычисленными по формулам (16.5). При этом

$$(x_1^1 - x_1^0)\vec{i} + (x_2^1 - x_2^0)\vec{j} = -h \cdot \text{grad } u(x_1^0, x_2^0) = \left(-h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0} \right) \cdot \vec{i} + \left(-h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x_1=x_1^0, x_2=x_2^0} \right) \cdot \vec{j}.$$

На рис. 16.7 дана геометрическая интерпретация нескольких первых шагов метода градиентного спуска. По мере приближения к точке минимума уменьшается длина вектора перемещения, так как величины $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ и $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ стремятся к нулю, а следовательно, и величины изменения координат $-h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}$ и $-h \cdot \frac{\partial f}{\partial x_2}$ стремятся к нулю при фиксированном h .

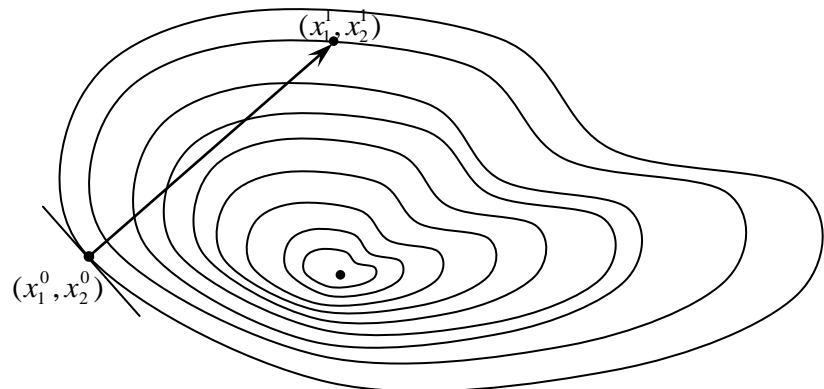


Рис. 16.6. Геометрическая интерпретация начального шага метода градиентного спуска

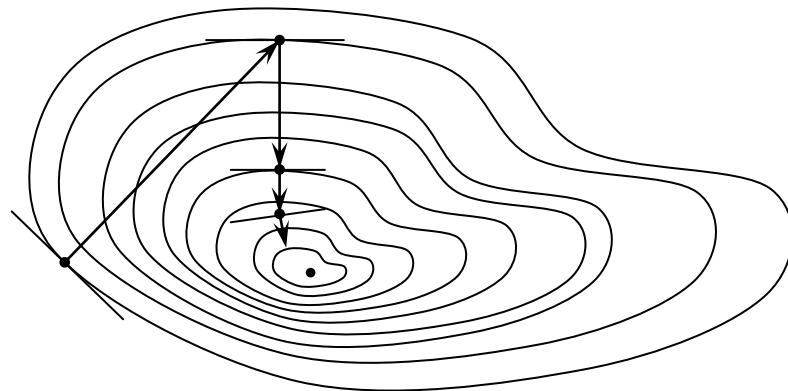


Рис. 16.7. Начальные шаги метода градиентного спуска

Как было сказано выше, начальная точка метода выбирается достаточно произвольно. Благодаря геометрической интерпретации можно про наблюдать за поведением различных последовательностей точек, полученных по формулам (16.6), начинающихся с различных начальных приближений. На рис. 16.8 показаны возможные последовательности точек, сходящиеся к точке минимума, если в качестве начальных выбраны точки различные точки A и B .

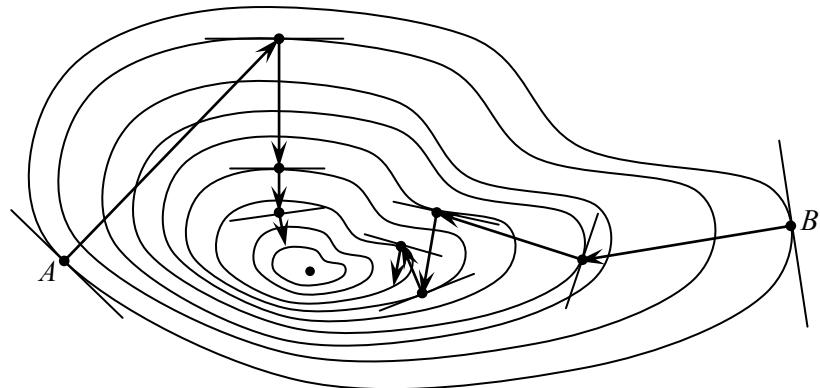


Рис. 16.8. Спуск для различных начальных приближений

Пример 2. Используем пример 1 в качестве модельного для численного поиска минимума. Сначала проведем расчеты вручную, а затем напишем программу для *Excel*.

Частные производные функции $S = S(x, y) = 2 \cdot \left(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$ равны $\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \cdot \left(y - \frac{1}{x^2} \right)$, $\frac{\partial S}{\partial y} = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{y^2} \right)$. Поэтому формулы (16.6) в данной задаче можно записать как

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i - h \cdot 2 \cdot \left(y_i - \frac{1}{x_i^2} \right), \\ y_{i+1} = y_i - h \cdot 2 \cdot \left(x_i - \frac{1}{y_i^2} \right). \end{cases} \quad (16.7)$$

Выберем начальное приближение из области определения функции $S = S(x, y)$, например, $x_0 = 10$, $y_0 = 10$, зададим h , например, $h = 0,2$, и по формулам (16.7) найдем x_1 , y_1 :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - h \cdot 2 \cdot \left(y_0 - \frac{1}{x_0^2} \right) = 10 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(10 - \frac{1}{10^2} \right) = 10 - 0,4 \cdot 9,99 = 6,004, \\ y_1 = y_0 - h \cdot 2 \cdot \left(x_0 - \frac{1}{y_0^2} \right) = 10 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(10 - \frac{1}{10^2} \right) = 10 - 0,4 \cdot 9,99 = 6,004. \end{cases}$$

Будем строить последовательность точек по формулам (16.7) до тех пор, пока не выполнится, например, 2-е условие окончания вычислительного процесса:

$$|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon = 10^{-2}$. После первого шага $|x_1 - x_0| + |y_1 - y_0| = 7,992 > \varepsilon$, вычисления необходимо продолжить. Найдем x_2 , y_2 :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - h \cdot 2 \cdot \left(y_1 - \frac{1}{x_1^2} \right) = 6,004 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(6,004 - \frac{1}{6,004^2} \right) = 6,004 - 0,4 \cdot 5,976259\dots = 3,613496\dots, \\ y_2 = y_1 - h \cdot 2 \cdot \left(x_1 - \frac{1}{y_1^2} \right) = 6,004 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(6,004 - \frac{1}{6,004^2} \right) = 6,004 - 0,4 \cdot 5,976259\dots = 3,613496\dots. \end{cases}$$

Поскольку вычислительный процесс будет остановлен сразу, как только выполнится неравенство $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| < 0,01$, не имеет смысла хранить более трех знаков при вычислении x_{i+1} и y_{i+1} . При округлении координат очередного приближения получаем не саму точку (x_{i+1}, y_{i+1}) , а точку рядом с ней. Но эта точка на очередном шаге метода градиентного спуска выступает как начальная, и небольшое отклонение от точных координат (x_{i+1}, y_{i+1}) соответствует выбору другого начального приближения, а вычислительный процесс все равно сходится к точке минимума (рис. 16.8). Поэтому смело округляем: $x_2 \approx 3,613$, $y_2 \approx 3,613$. После второго шага $|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = 4,782 > \varepsilon$, вычисления необходимо продолжить. Найдем x_3 , y_3 :

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - h \cdot 2 \cdot \left(y_2 - \frac{1}{x_2^2} \right) = 3,613 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(3,613 - \frac{1}{3,613^2} \right) = 3,613 - 0,4 \cdot 3,536393\dots \approx 2,198, \\ y_3 = y_2 - h \cdot 2 \cdot \left(x_2 - \frac{1}{y_2^2} \right) = 3,613 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(3,613 - \frac{1}{3,613^2} \right) = 3,613 - 0,4 \cdot 3,536393\dots \approx 2,198, \end{cases}$$

$$|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2| = 2,83 > \varepsilon.$$

Продолжим вычисления:

$$\begin{cases} x_4 = x_3 - h \cdot 2 \cdot \left(y_3 - \frac{1}{x_3^2} \right) = 2,198 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(2,198 - \frac{1}{2,198^2} \right) = 2,198 - 0,4 \cdot 1,991012... \approx 1,402, \\ y_4 = y_3 - h \cdot 2 \cdot \left(x_3 - \frac{1}{y_3^2} \right) = 2,198 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(2,198 - \frac{1}{2,198^2} \right) = 2,198 - 0,4 \cdot 1,991012... \approx 1,402, \end{cases}$$

$$|x_4 - x_3| + |y_4 - y_3| = 1,592 > \varepsilon,$$

$$\begin{cases} x_5 = x_4 - h \cdot 2 \cdot \left(y_4 - \frac{1}{x_4^2} \right) = 1,402 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(1,402 - \frac{1}{1,402^2} \right) = 1,402 - 0,4 \cdot 0,893250... \approx 1,045, \\ y_5 = y_4 - h \cdot 2 \cdot \left(x_4 - \frac{1}{y_4^2} \right) = 1,402 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(1,402 - \frac{1}{1,402^2} \right) = 1,402 - 0,4 \cdot 0,893250... \approx 1,045, \end{cases}$$

$$|x_5 - x_4| + |y_5 - y_4| = 0,714 > \varepsilon,$$

$$\begin{cases} x_6 = x_5 - h \cdot 2 \cdot \left(y_5 - \frac{1}{x_5^2} \right) = 1,045 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(1,045 - \frac{1}{1,045^2} \right) = 1,045 - 0,4 \cdot 0,129270... \approx 0,993, \\ y_6 = y_5 - h \cdot 2 \cdot \left(x_5 - \frac{1}{y_5^2} \right) = 1,045 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(1,045 - \frac{1}{1,045^2} \right) = 1,045 - 0,4 \cdot 0,129270... \approx 0,993, \end{cases}$$

$$|x_6 - x_5| + |y_6 - y_5| = 0,104 > \varepsilon,$$

$$\begin{cases} x_7 = x_6 - h \cdot 2 \cdot \left(y_6 - \frac{1}{x_6^2} \right) = 0,933 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(0,933 - \frac{1}{0,933^2} \right) = 0,933 - 0,4 \cdot (-0,021148...) \approx 1,001, \\ y_7 = y_6 - h \cdot 2 \cdot \left(x_6 - \frac{1}{y_6^2} \right) = 0,933 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(0,933 - \frac{1}{0,933^2} \right) = 0,933 - 0,4 \cdot (-0,021148...) \approx 1,001, \end{cases}$$

$$|x_7 - x_6| + |y_7 - y_6| = 0,016 > \varepsilon,$$

$$\begin{cases} x_8 = x_7 - h \cdot 2 \cdot \left(y_7 - \frac{1}{x_7^2} \right) = 1,001 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(1,001 - \frac{1}{1,001^2} \right) = 1,001 - 0,4 \cdot 0,002997... \approx 1,000, \\ y_8 = y_7 - h \cdot 2 \cdot \left(x_7 - \frac{1}{y_7^2} \right) = 1,001 - 0,2 \cdot 2 \cdot \left(1,001 - \frac{1}{1,001^2} \right) = 1,001 - 0,4 \cdot 0,002997... \approx 1,000, \end{cases}$$

$$|x_8 - x_7| + |y_8 - y_7| = 0,002 < \varepsilon,$$

вычисления окончены. Таким образом, наименьшего значения функция $S = S(x, y) = 2 \cdot \left(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right)$ достигает в точке $(1; 1)$, и оно равно 6:

$$S(1; 1) = 2 \cdot \left(1 \cdot 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right) = 6.$$

Реализуем процесс решения в *Excel* по следующим ниже шагам.

- В строке 1 выполним необходимые подписи (рис. 16.9). Для реализации формул (16.7) будем рассчитывать текущие значения x_i и y_i , значения частных производных в этих точках $\frac{\partial S}{\partial x}$ и $\frac{\partial S}{\partial y}$, для наблюдения за функцией — значение $S(x_i, y_i)$. В столбце F вычислим величи-

ну «Pogr» $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i|$ для сравнения с заданным $\varepsilon > 0$. Значение шага h введем, например, в ячейку H1, а в ячейке G1 выполним необходимую подпись.

2. В ячейки A2 и B2 введем начальное приближение $x_0 = 10$, $y_0 = 10$, в ячейку H1 — значение шага 0,2 (рис. 16.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	y_i	dS_dx	dS_dy	S(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,2
2		10	10					
3								

Рис. 16.9. Подписи, ввод шага и начального приближения в методе градиентного спуска

3. В ячейки C2, D2 и E2 введем формулы расчета соответствующих величин (рис. 16.10):

$$C2: \ll=2*(B2-1/(A2*A2))\gg \left(\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \cdot \left(y - \frac{1}{x^2} \right) \right);$$

$$D2: \ll=2*(A2-1/(B2*B2))\gg \left(\frac{\partial S}{\partial y} = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{y^2} \right) \right);$$

$$E2: \ll=2*(A2*B2+1/A2+1/B2)\gg \left(S = S(x, y) = 2 \cdot \left(xy + \frac{1}{y} + \frac{1}{x} \right) \right).$$

4. В ячейки A3 и B3 введем расчетные формулы (16.7) метода градиентного спуска (рис. 16.10):

$$A3: \ll=A2-H1*C2\gg \left(x_{i+1} = x_i - h \cdot \frac{\partial S}{\partial x} \Big|_{x=x_i, y=y_i} \right);$$

$$B3: \ll=B2-H1*D2\gg \left(y_{i+1} = y_i - h \cdot \frac{\partial S}{\partial y} \Big|_{x=x_i, y=y_i} \right);$$

в ячейку F3 — формулу

$$F3: \ll=ABS(A3-A2)+ABS(B3-B2)\gg (|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i|);$$

«подровняем» строки 2 и 3: скопируем C2:E2 в C3:E3. После этого все необходимые формулы в строке 3 готовы к копированию вниз (рис. 16.10).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	y_i	dS_dx	dS_dy	S(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,2
2	10	10	=2*(B2-1/(A2*A2))	=2*(A2-1/(B2*B2))	=2*(A2*B2+1/A2+1/B2)			
3	=A2-\$H\$1*C2	=B2-\$H\$1*D2	=2*(B3-1/(A3*A3))	=2*(A3-1/(B3*B3))	=2*(A3*B3+1/A3+1/B3)	=ABS(A3-A2)+ABS(B3-B2)		
4								

Рис. 16.10. Формулы в методе градиентного спуска

4. Копируем A3:F3 вниз до тех пор, пока число в столбце F не станет меньше заданного $\varepsilon > 0$, в данном случае — 0,01 (рис. 16.11). В полученных результатах установим отображение 9-ти знаков после запятой. Можно использовать условное форматирование для выделения цветом ячеек столбца F, в которых выполняется условие $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| < \varepsilon$. Окончание вычислений произошло в строке 10. Получили тот же результат, что и при расчетах вручную.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	y_i	dS_dx	dS_dy	S(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,2
2	10	10	19,98	19,98	200,4			
3	6,004	6,004	11,95251844	11,95251844	72,76225452	7,992		
4	3,613496311	3,613496311	7,073822251	7,073822251	27,22167232	4,7810074		
5	2,198731861	2,198731861	3,983763783	3,983763783	11,48807406	2,8295289		
6	1,401979104	1,401979104	1,786428931	1,786428931	6,784200388	1,5935055		
7	1,044693318	1,044693318	0,256851283	0,256851283	6,011643135	0,7145716		
8	0,993323061	0,993323061	-0,040331522	-0,040331522	6,000268688	0,1027405		
9	1,001389366	1,001389366	0,008324634	0,008324634	6,000011571	0,0161326		
10	0,999724439	0,999724439	-0,001653822	-0,001653822	6,000000456	0,0033299		
11								
12								

Рис. 16.11. Завершение метода градиентного спуска

Поиск экстремума можно продолжить до выполнения, например, условия $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| < 10^{-9}$ в строке 20 (рис. 16.12).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	y_i	dS_dx	dS_dy	S(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,2
2	10	10	19,98	19,98	200,4			
3	6,004	6,004	11,95251844	11,95251844	72,76225452	7,992		
4	3,613496311	3,613496311	7,073822251	7,073822251	27,22167232	4,7810074		
5	2,198731861	2,198731861	3,983763783	3,983763783	11,48807406	2,8295289		
6	1,401979104	1,401979104	1,786428931	1,786428931	6,784200388	1,5935055		
7	1,044693318	1,044693318	0,256851283	0,256851283	6,011643135	0,7145716		
8	0,993323061	0,993323061	-0,040331522	-0,040331522	6,000268688	0,1027405		
9	1,001389366	1,001389366	0,008324634	0,008324634	6,000011571	0,0161326		
10	0,999724439	0,999724439	-0,001653822	-0,001653822	6,000000456	0,0033299		
11	1,000055203	1,000055203	0,000331202	0,000331202	6,000000018	0,0006615		
12	0,999988963	0,999988963	-6,62228E-05	-6,62228E-05	6,000000001	0,0001325		
13	1,000002208	1,000002208	1,32453E-05	1,32453E-05		6	2,649E-05	
14	0,999999558	0,999999558	-2,64903E-06	-2,64903E-06		6	5,298E-06	
15	1,000000088	1,000000088	5,29806E-07	5,29806E-07		6	1,06E-06	
16	0,999999982	0,999999982	-1,05961E-07	-1,05961E-07		6	2,119E-07	
17	1,000000004	1,000000004	2,11922E-08	2,11922E-08		6	4,238E-08	
18	0,999999999	0,999999999	-4,23845E-09	-4,23845E-09		6	8,477E-09	
19	1	1	8,4769E-10	8,4769E-10		6	1,695E-09	
20	1	1	-1,69538E-10	-1,69538E-10		6	3,391E-10	
21								

Рис. 16.12. Другой вариант завершения метода градиентного спуска

Разумеется, при автоматизации вычислений поиск экстремума можно продолжить и до получения, например, столь малых чисел в столбцах частных производных, что они уже не оказывают влияния на изменения переменных (рис. 16.13), и значения переменных начинают повторяться со всеми значащими цифрами после запятой. В этом случае интересно проанализировать за отображением значащих цифр в записи величин в ячейках Excel. Установим большое количество знаков после запятой (например, 25) при отображении вычисляемых в методе градиентного спуска величин. Для краткости на рис. 16.13 строки с 6-й по 22-ю свернуты. Наблюдая за отображением разрядов в ячейках, можно сделать вывод, что длина

мантицы — 15 знаков (15 значащих цифр). Поэтому в записи x_i и y_i разряды, идущие после 15-ти значащих цифр, заполнены нулями, в то время как в записи $\frac{\partial S}{\partial x}$ и $\frac{\partial S}{\partial y}$ в тех же разрядах имеются отличные от нуля цифры, потому что числа хранятся в форме с плавающей запятой. Но наступает момент, когда значения частных производных становятся столь малыми, что величины $h \cdot \frac{\partial S}{\partial x}$ и $h \cdot \frac{\partial S}{\partial y}$ из-за своей малости не учитываются при выполнении операции вычитания в формулах (16.7): новые значения переменных получаются равными предыдущим значениям. В данном примере это произошло в строке 29, и величина $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i|$ равна машинному нулю, начиная со строки 30.

Рис. 16.13. Получение машинного решения методом градиентного спуска

В строке 30 получено машинное решение рассмотренного примера, так как различие между двумя последними приближениями равно нулю.

Проведите самостоятельно эксперименты с выбором начального приближения. Вводите в ячейки A2 и B2 различные координаты начальной точки из области определения функции S и наблюдайте за решением в строке 30. При выборе различных начальных приближений итог в этой задаче должен быть одним и тем же, так как минимум единственный.

Замечание 1. Выясним, когда надо останавливать вычислительный процесс, если выбрано другое условие его окончания. Анализируя проведенные численные эксперименты, видим, что условие 1 окончания вычислений $|f'_x(x_i, y_i)| + |f'_y(x_i, y_i)| < \varepsilon$ для $\varepsilon = 10^{-2}$ выполняется в 10-й строке (рис. 16.11), условие 3 $|f(x_i, y_i) - f(x_{i+1}, y_{i+1})| < \varepsilon$ — в 9-й строке (рис. 16.11). Таким образом, для данного примера все три условия выполняются практически одновременно.

Проведем эксперимент с выбором шага метода градиентного спуска. Возьмем, например, $h = 0,3$ (рис. 16.14).

1	2	A	B	C	D	E	F	G	H
+	1	x_i	y_i	dS_dx	dS_dy	S(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,3
	2	10	10	19,98	19,98	200,4			
	3	4,006	4,006	7,887374158	7,887374158	33,09457425		11,988	
	4	1,639787752620	1,639787752620	2,535777997413	2,535777997413	7,817147834809	4,732424494761		
	5	0,879054353396	0,879054353396	-0,830095492803	-0,830095492803	6,095817450711	1,521466798448		
	23	0,997691967516	0,997691967516	-0,013880255630	-0,013880255630	6,000032011377	0,010423947716		
	24	1,001856044205	1,001856044205	0,011115646863	0,011115646863	6,000020643872	0,008328153378		
	25	0,998521350146	0,998521350146	-0,008885043466	-0,008885043466	6,000013131383	0,006669388118		
	26	1,001186863186	1,001186863186	0,007112740607	0,007112740607	6,000008445186	0,005331026080		
	27	0,999053041004	0,999053041004	-0,005687141165	-0,005687141165	6,000005383788	0,004267644364		
	28	1,000759183354	1,000759183354	0,004551645462	0,004551645462	6,000003456407	0,003412284699		
	29	0,999393689715	0,999393689715	-0,003640069168	-0,003640069168	6,000002206565	0,002730987277		
	30	1,000485710465	1,000485710465	0,002912848220	0,002912848220	6,000001415030	0,002184041501		
	31								

Рис. 16.14. Эффект увеличения шага в методе градиентного спуска

Видим, что на первых шагах приближение к точке минимума более быстрое, чем в случае $h = 0,2$. Но условие $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| < 10^{-2}$ выполняется здесь, начиная с 24-й строки, в отличие от 10-й в случае $h = 0,2$. Еще увеличим шаг до $h = 0,4$ (рис. 16.15). В этом случае сходимости последовательности точек (x_i, y_i) не наблюдается: величина $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i|$ остается все время больше единицы. Более того, видим, что в пределах разрядной сетки Excel процесс «зацикливается»: наблюдается повторение одних и тех же точек через одну и величина $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i|$ остается постоянной.

1	2	A	B	C	D	E	F	G	H
		x_i	y_i	ds_dx	ds_dy	S(x_i,y_i)	Pogr		h= 0,4
	1	10	10	19,98	19,98	200,4			
	2	2,008	2,008	3,519976127	3,519976127	10,05615987	15,984		
	3	0,600009549055	0,600009549055	-4,355359627320	-4,355359627320	7,386583485660	2,815980901890		
	4	2,342153399983	2,342153399983	4,319721357385	4,319721357385	12,679195165947	3,484287701856		
	5	0,614264857029	0,614264857029	-4,071992474105	-4,071992474105	7,266491637338	3,455777085908		
	6	2,243061846671	2,243061846671	4,088614205401	4,088614205401	11,845929628156	3,257593979284		
	7	0,607616164510	0,607616164510	-4,201923863635	-4,201923863635	7,321498143415	3,270891364321		
	8	2,288385709964	2,288385709964	4,194852176407	4,194852176407	12,221375393604	3,361539090908		
	9	0,610444839401	0,610444839401	-4,146178872684	-4,146178872684	7,297884403840	3,355881741125		
	10	0,609566392652	0,609566392652	-4,163415888278	-4,163415888278	7,305183930557	3,330732710623		
	11	2,274932747963	2,274932747963	4,163415888278	4,163415888278	12,108931751261	3,330732710622		
	12	0,609566392652	0,609566392652	-4,163415888278	-4,163415888278	7,305183930557	3,330732710622		
	13	2,274932747963	2,274932747963	4,163415888278	4,163415888278	12,108931751261	3,330732710622		
	14	0,609566392652	0,609566392652	-4,163415888278	-4,163415888278	7,305183930557	3,330732710622		
	15								
	16								
	17								
	18								
	19								
	20								

Рис. 16.15. «Зацикливание» вычислительного процесса в методе градиентного спуска

Дальнейшее увеличение шага приводит к разрушению вычислительного процесса. Самостоятельно получите результаты при $h = 0,45$, $h = 0,48$, $h = 0,5$. Уменьшим шаг относительно исходного $h = 0,2$. Пусть $h = 0,1$ (рис. 16.16). Сходимость есть, но более медленная. Условие достаточной близости двух последовательных приближений $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| < 10^{-2}$ выполняется здесь, начиная с 18-й строки, в отличие от 10-й в случае $h = 0,2$.

1	2	A	B	C	D	E	F	G	H
		x_i	y_i	ds_dx	ds_dy	S(x_i,y_i)	Pogr		h= 0,1
	1	10	10	19,98	19,98	200,4			
	2	8,002000000000	8,002000000000	15,972765619143	15,972765619143	128,563883031242	3,996000000000		
	3	6,404723438086	6,404723438086	12,760690745405	12,760690745405	82,665503703665	3,194553123829		
	4	5,128654363545	5,128654363545	10,181272049435	10,181272049435	53,386122838712	2,552138149081		
	5	1,012227550580	1,012227550580	0,072482630635	0,072482630635	6,000889853585	0,034199688061		
	6	1,004979287517	1,004979287517	0,029727946787	0,029727946787	6,000148268460	0,014496526127		
	7	1,002006492838	1,002006492838	0,012014865409	0,012014865409	6,000024123833	0,005945589357		
	8	1,000805006297	1,000805006297	0,004826153739	0,004826153739	6,000003886126	0,002402973082		
	9								
	10								
	11								
	12								
	13								
	14								
	15								
	16								
	17								
	18								
	19								
	20								

Рис. 16.16. Эффект уменьшения шага в методе градиентного спуска

Эксперименты с шагом h приводят к следующему выводу: необходимо опытным путем подобрать шаг так, чтобы была быстрая сходимость. В данном примере оптимальным оказалось значение шага, близкое к 0,2.

Пример 3. Найдем методом градиентного спуска минимум функции $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$ на множестве $x \in [-1; 1]$, $y \in [-1; 1]$.

Результаты расчетов при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $h = 0,05$ отражены на рис. 16.17. Вычисления можно остановить при выполнении условия $|x_{i+1} - x_i| + |y_{i+1} - y_i| < 10^{-2}$ в строке 25.

1	2	A	B	C	D	E	F	G	H
		x_i	y_i	df_dx	df_dy	f(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,05
		1	1	10	2	1			
		2	1	-1,56250	1,80000	0,57563	0,60000		
		3	0,50000	0,90000	-1,92707	1,62000	0,28424	0,16813	
		4	0,57813	0,81000	-1,94912	1,45800	-0,03259	0,17735	
		5	0,67448	0,72900	0,00000	0,19695	-0,73104	0,01094	
		24	0,81650	0,09848	0,17726	-0,73289	0,00985		
		25	0,81650	0,08863	0,00000	0,15953	-0,73438	0,00886	
		26	0,81650	0,07977	0,00000	0,14358	-0,73559	0,00798	
		27	0,81650	0,07179	0,00000				

Рис. 16.17. Окончание вычислений при достаточной близости двух последовательных приближений

Получили, что наименьшего значения функция $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$ достигает в точке $(0,817; 0,089)$, и это значение равно $-0,733$. Значение шага $h = 0,05$ при решении этой задачи найдено подбором. Самостоятельно реализуйте приведенный на рис. 16.17 вычислительный процесс и проведите эксперименты с шагом. Например, при $h = 0,2$ получаем «зацикливание» процесса, при $h = 0,3$ — разрушение. Несмотря на то, что условие достаточной близости двух последовательных приближений к точке минимума выполняется в строке 25, по рис. 16.17 видим, что одна из частных производных при этом далека от нуля. Поэтому вычисления можно продолжить, пока не выполняются все три условия окончания вычислений одновременно при $\varepsilon = 10^{-2}$ (рис. 16.18).

1	2	A	B	C	D	E	F	G	H
		x_i	y_i	df_dx	df_dy	f(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,05
		1	1	10	2	1			
		2	1	-1,56250	1,80000	0,57563	0,60000		
		3	0,50000	0,90000	-1,92707	1,62000	0,28424	0,16813	
		4	0,57813	0,81000	-1,94912	1,45800	-0,03259	0,17735	
		5	0,67448	0,72900	0,00000	0,19695	-0,73104	0,01094	
		50	0,81650	0,00636	0,00000	0,01273	-0,74070	0,00071	
		51	0,81650	0,00573	0,00000	0,01145	-0,74071	0,00064	
		52	0,81650	0,00515	0,00000	0,01031	-0,74071	0,00057	
		53	0,81650	0,00464	0,00000	0,00928	-0,74072	0,00052	
		54	0,81650	0,00417	0,00000	0,00835	-0,74072	0,00046	
		55	0,81650	0,00376	0,00000	0,00751	-0,74073	0,00042	

Рис. 16.18. Окончание вычислений при выполнении трех условий одновременно

Видим, что эти условия одновременно выполняются в строке 53. В этом случае ответ таков: наименьшего значения функция $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$ достигает в точке $(0,817; 0,005)$, и оно равно $-0,741$. Разница в ответах существенная, поэтому имеет смысл повысить точность до максимальной, то есть найти машинное решение, например, при 19 знаках после запятой (рис. 16.19).

1	2	A	B	C	D	E	F	G	H
		x_i	y_i	df_dx	df_dy	f(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,05
		1	1	10	2	1			
		2	1	-1,56250	1,80000	0,57563	0,60000		
		3	0,5000000000000000000	0,9000000000000000000	-1,5625000000000000000	1,8000000000000000000	0,5756250000000000000	0,6000000000000000000	
		4	0,5781250000000000000	0,8100000000000000000	-1,9270694348961100000	1,6200000000000000000	0,2842376627302960000	0,1681250000000000000	
		5	0,6744784717448050000	0,7290000000000000000	-1,9491247423080300000	1,4580000000000000000	-0,0325882900036605000	0,1773534717448060000	
		429	0,8164965809277260000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000001	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000000	
		430	0,8164965809277260000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000001	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000000	
		431	0,8164965809277260000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000000	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000000	
		432	0,8164965809277260000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000000	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000000	
		433	0,8164965809277260000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000000	0,0000000000000000000	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000000	

Рис. 16.19. Окончание вычислений при получении машинного решения

На рис. 16.19 хорошо видно, что значения производных в конце таблицы столь малы, что уже не оказывают влияния на изменения переменных при выполнении очередного шага метода градиентного спуска. При увеличении разрядности можно увидеть, что производные отличны от нуля. Поэтому можно утверждать, что минимум функции $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$ с точностью $\varepsilon = 10^{-15}$ находится в точке $(0,816496580927726; 0)$, и значение функции в этой точке равно $-0,740740740740741$.

Проведем эксперименты с выбором начального приближения. При $x_0 = -1, y_0 = -1, h = 0,05$ получим машинное решение: с точностью $\varepsilon = 10^{-15}$ минимум функции $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$ находится в точке $(-0,816496580927726; 0)$, и значение функции в этой точке равно $-0,740740740740741$ (рис. 16.20). Получили другую точку минимума.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1 2	x_i	y_i	df_dx	df_dy	f(x_i, y_i)	Pogr		h= 0,05
1	-1	-1	-10	-2	1			
2	-0,5000000000000000	-0,9000000000000000	1,5625000000000000	-1,8000000000000000	0,5756250000000000	0,6000000000000000		
3	-0,5781250000000000	-0,8100000000000000	1,927069434896110000	-1,6200000000000000	0,284237662730296000	0,1681250000000000		
4	-0,674478471744805000	-0,7290000000000000	1,949124742308030000	-1,4580000000000000	-0,0325882900036605000	0,1773534717448060000		
5	-0,816496580927726000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	-0,0000000000000001	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000		
429	-0,816496580927726000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	-0,0000000000000001	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000		
430	-0,816496580927726000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	-0,0000000000000001	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000		
431	-0,816496580927726000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000		
432	-0,816496580927726000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000		
433	-0,816496580927726000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	0,0000000000000000	-0,7407407407407410000	0,0000000000000000		
434								

Рис. 16.20. Эксперимент с выбором начального приближения

Не изменяя шага $h = 0,05$, проведите самостоятельно эксперименты с выбором начального приближения из заданной области $x \in [-1; 1], y \in [-1; 1]$. С большой вероятностью для любого допустимого начального приближения (кроме $x_0 = 0$) в результате будет получена одна из двух точек: $(-0,816496580927726; 0)$ или $(0,816496580927726; 0)$. Действительно, построив диаграмму поверхности (см. пример 1), видим, что функция имеет два минимума в указанной области (рис. 16.21). Обе эти точки можно найти аналитически, используя достаточное условие существования экстремума функции двух переменных (теорему 2).

Есть еще одна стационарная точка функции $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$ — точка $(0; 0)$. Но функция экстремума в ней не имеет. На рис. 16.21 и 16.22 видно, что поверхность в районе точки $(0; 0; 0)$ похожа на «седло». Действительно, в плоскости $x = 0$ получаем в сечении данной поверхности линию $f(x, y) = y^2$, а в плоскости $y = 0$ — линию $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4$. Линия $f(x, y) = y^2$ имеет при $y = 0$ строгий минимум, а линия $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4$ при $x = 0$ — строгий максимум. Следовательно, в любой окрестности точки $(0; 0)$ есть точки (в плоскости $y=0$), в которых значение функции $f(x, y)$ меньше, чем $f(0; 0)$, и точки (в плоскости $x = 0$), в которых значение функции $f(x, y)$ больше, чем $f(0; 0)$. Однако при определенных условиях, например, при $x_0 = -1, y_0 = -1, h = 0,1$, вычислительный процесс может привести именно к точке $(0; 0)$ как к якобы точке локального минимума функции $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$. Проведите вычислительный эксперимент с этими данными самостоятельно и дайте объяснение полученному результату.

Наличие у функции нескольких локальных экстремумов можно назвать *многоэкстремальностью*. Для выявления многоэкстремальности необходимо проводить серии вычислительных экспериментов с выбором начального приближения и шага метода.

Пример 4. Найдем методом градиентного спуска минимум функции $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ на множестве $x \in [-3; 3], y \in [-3; 3]$.

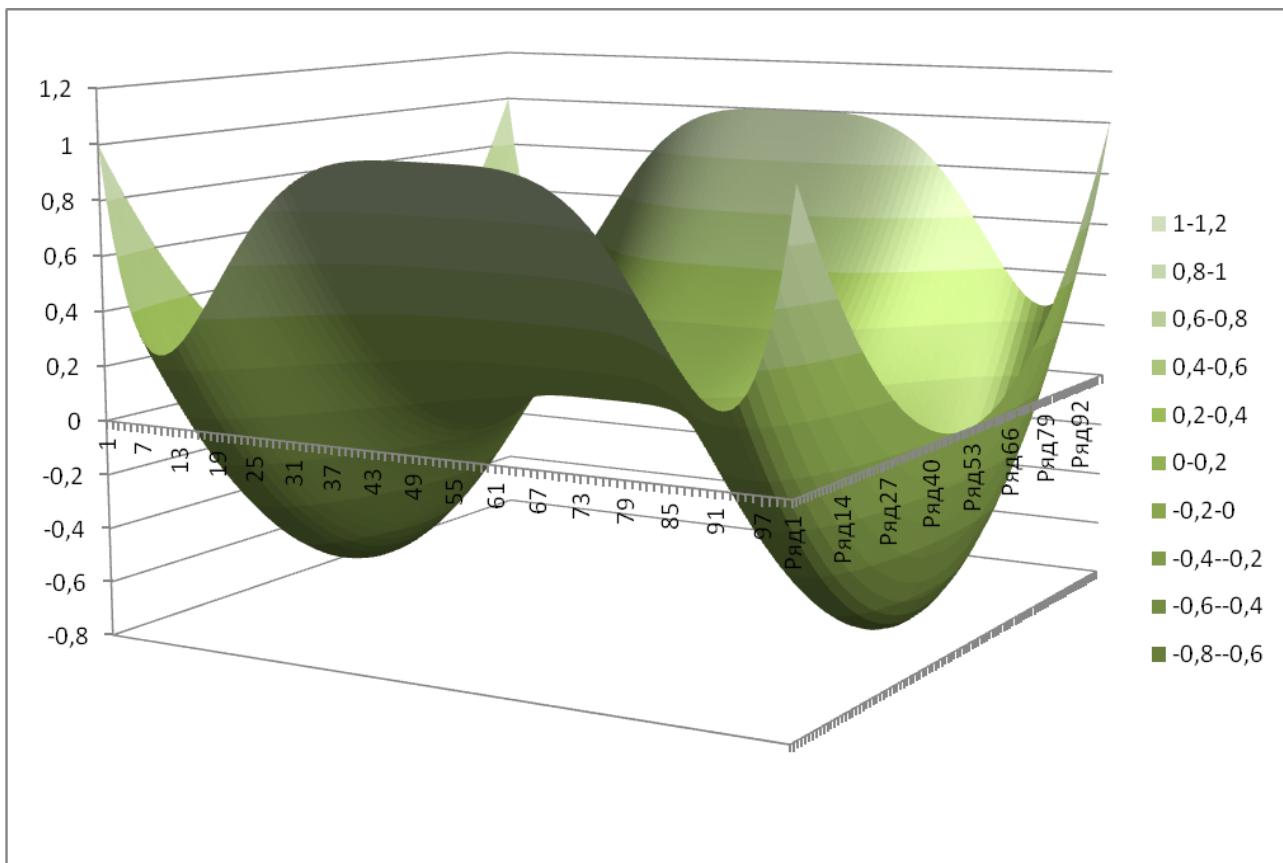


Рис. 16.21. График поверхности $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$ на множестве $x \in [-1; 1]$, $y \in [-1; 1]$

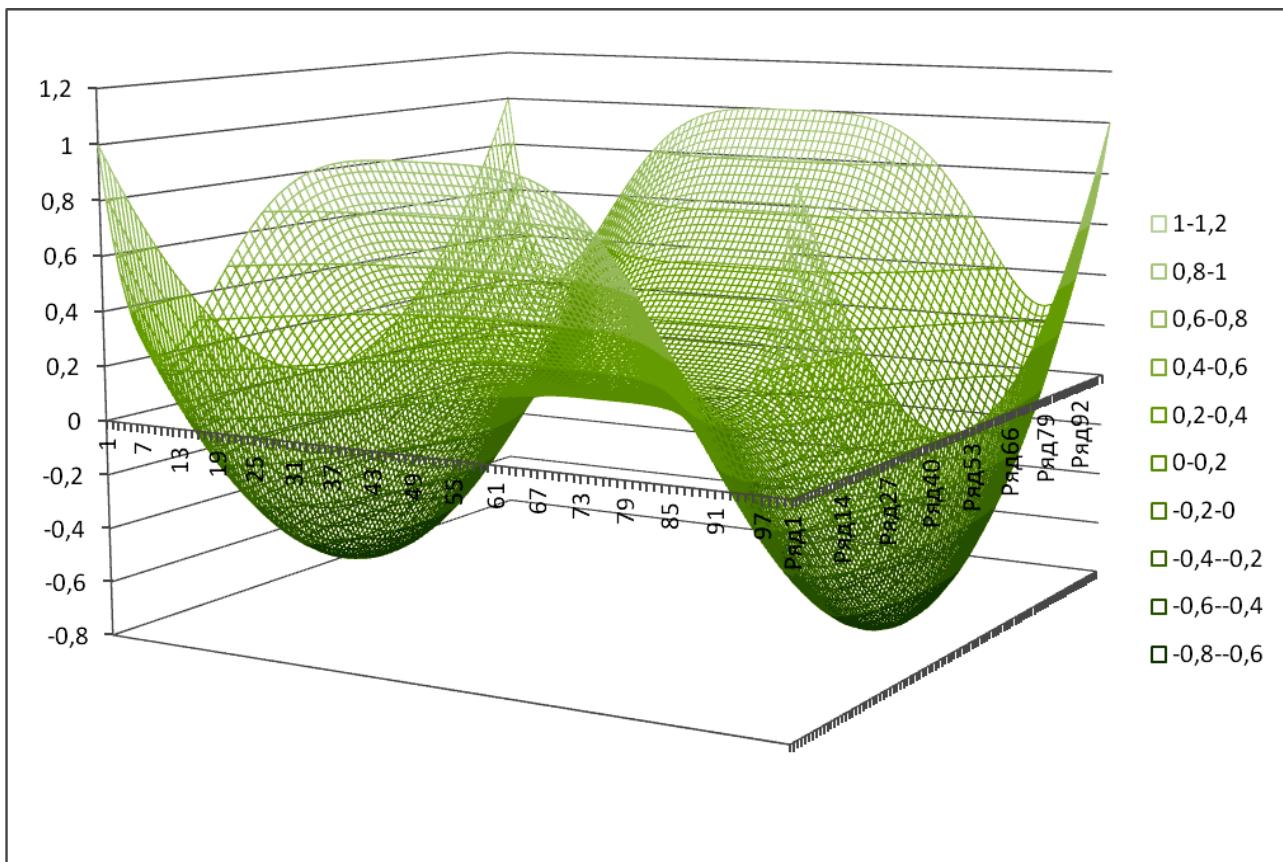


Рис. 16.22. График поверхности $f(x, y) = 5x^6 - 5x^4 + y^2$ в виде проволочной модели

Будем экспериментировать с выбором начального приближения и для каждого начального приближения подберем экспериментально значение шага, обеспечивающее быструю сходимость. Для данной функции, например, при $1 < |x_0| < 1,5$, $1 < |y_0| < 1,5$ удачным оказывается значение $h = 0,05$, а при $|x_0| < 1, |y_0| < 1$ — значение $h = 0,5$. В этом случае машинное решение по трем признакам получается в пределах 10—20-й строк, и за ним удобно следить, меняя начальные данные. Поскольку экспериментов можно провести много, сведем все результаты в таблицу. Обозначим координаты точки минимума x_{\min} и y_{\min} .

Таблица 1. Эксперименты с начальным приближением и шагом

x_0	y_0	h	x_{\min}	y_{\min}	f_{\min}
0,5	0,5	0,5	0	0	0
0,8	0,9	0,5	0	0	0
-0,5	-0,5	0,5	0	0	0
0,8	-0,8	0,5	0	0	0
1	1	0,05	1,53499006191973	1,53499006191973	-1
1,2	1	0,05	1,66765764508506	1,38971470423755	-1
2	1	0,05	1,9416259125557	0,97081295627785	-1
2	2	0,02	2,34473604991738	2,34473604991738	-1
2,1	2	0,02	2,40121061936357	2,28686725653674	-1
-2,1	-2	0,02	-2,40121061936358	-2,28686725653674	-1
-3	-3	0,015	-2,93928219083706	-2,93928219083706	-1
2,8	2,9	0,015	2,88727153845758	2,88727153845758	-1
-2,8	2,7	0,015	-2,99222914275444	2,8853638162275	-1

Экспериментально установили, что кроме одного минимума — точки $(0; 0)$ с нулевым значением функции в ней — существует еще много минимумов. Но все полученные в таблице минимумы обладают одним свойством: значение функции в них равно -1 . Действительно, минимальное значение функции $\sin(x^2 + y^2)$ равно -1 , и оно достигается в тех точках $(x; y)$, где $x^2 + y^2 = 3\pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, то есть в точках, лежащих на концентрических окружностях с центром в начале координат и радиусами $\sqrt{3\pi/2 + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Действительно, построив поверхность $z = \sin(x^2 + y^2)$, убеждаемся, что нестрогие минимумы образуют целые «желобки» (рис. 16.23), кроме одного, который находится в точке $(0; 0; 0)$. Поэтому координаты точек минимума так сильно отличаются: выбирая различные начальные приближения, попадаем в различные точки одного и того же «желобка» или разных «желобков».

Для большей наглядности поверхность на рис. 16.23 построена на множестве $x \in [-2; 3]$, $y \in [-2; 3]$. Кроме того, перед построением данной диаграммы шаг был помещен в ячейку A1, а значения x получены в строке 2. Значения переменных x и y из строки 2 и столбца A были включены в диапазон данных диаграммы. В итоге по осям отмечены значения переменных, а не номера строк и столбцов. В дальнейшем поверхности будем строить именно так. На рис. 16.24 представлен увеличенный участок поверхности $z = \sin(x^2 + y^2)$ в окрестности минимума в точке $(0; 0; 0)$.

Самостоятельно проведите эксперимент по выбору начального приближения и шага для поиска этого минимума. Убедитесь, что уменьшение шага с $h = 0,5$ приводит к уменьшению скорости сходимости, а решение остается неизменным.

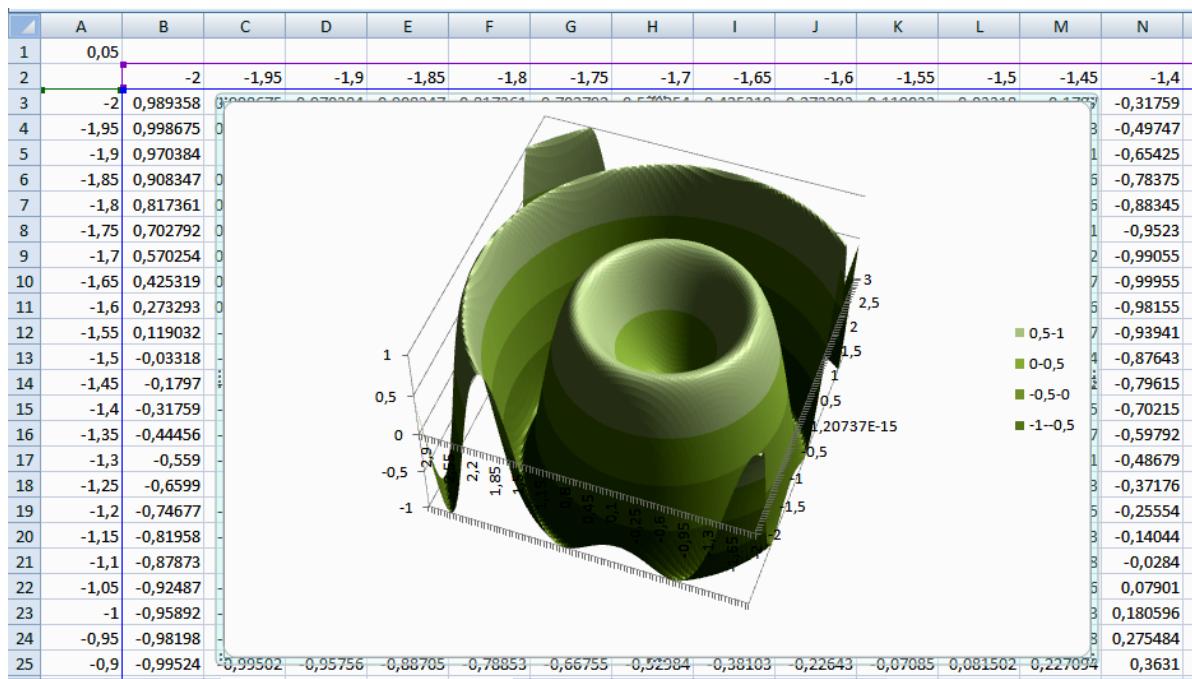


Рис. 16.23. График функции $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ на множестве $x \in [-2; 3]$, $y \in [-2; 3]$

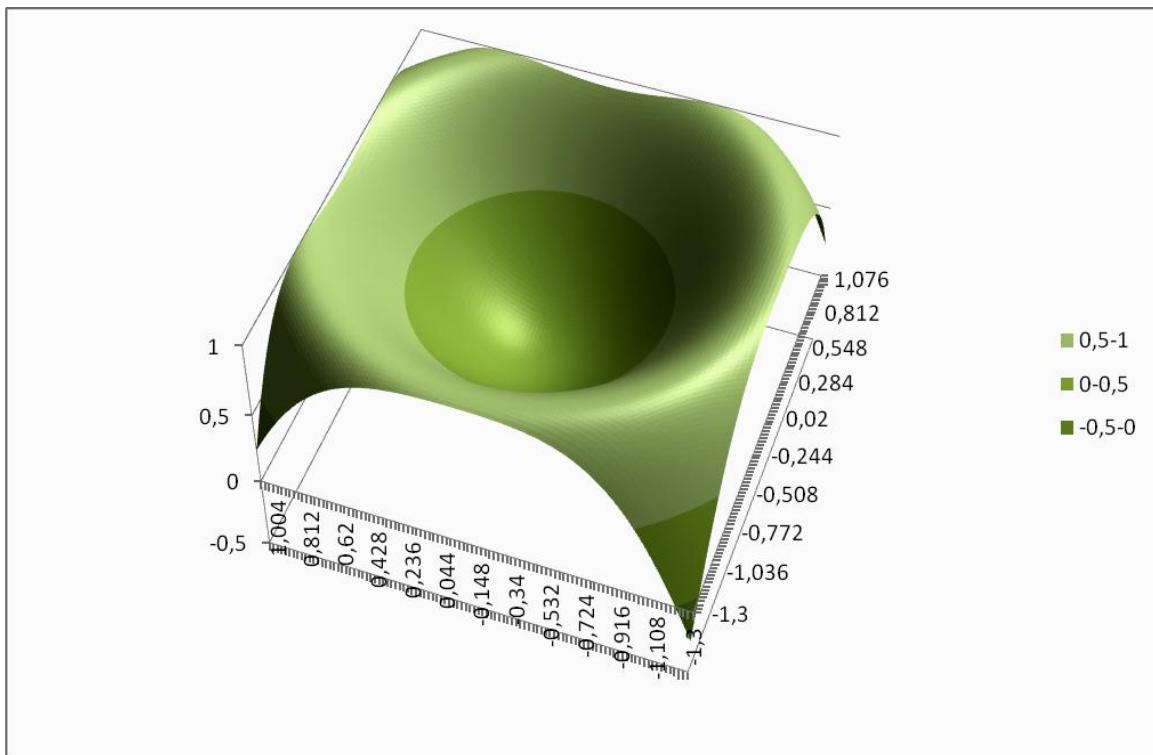


Рис. 16.24. График функции $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ на множестве $x \in [-1,3; 1,1]$, $y \in [-1,3; 1,1]$

Найдем методом градиентного спуска минимум немного измененной функции $f(x, y) = \sin(x^2 + 5y^2)$, очевидно, находящийся в точке $(0; 0; 0)$. График этой функции на множестве $x \in [-1,3; 1,1]$, $y \in [-1,3; 1,1]$ изображен на рис. 16.25. Полученная поверхность в отличие от предыдущей ската к оси Oy . Вследствие этого в районе минимума образовался «овраг», и это может привести к неприятным последствиям. Например, экспериментально установлено значение шага $h = 0,24$, при котором не происходит спуска в точку минимума с начального приближения $x_0 = 0,8$, $y_0 = 0,9$ (рис. 16.26).

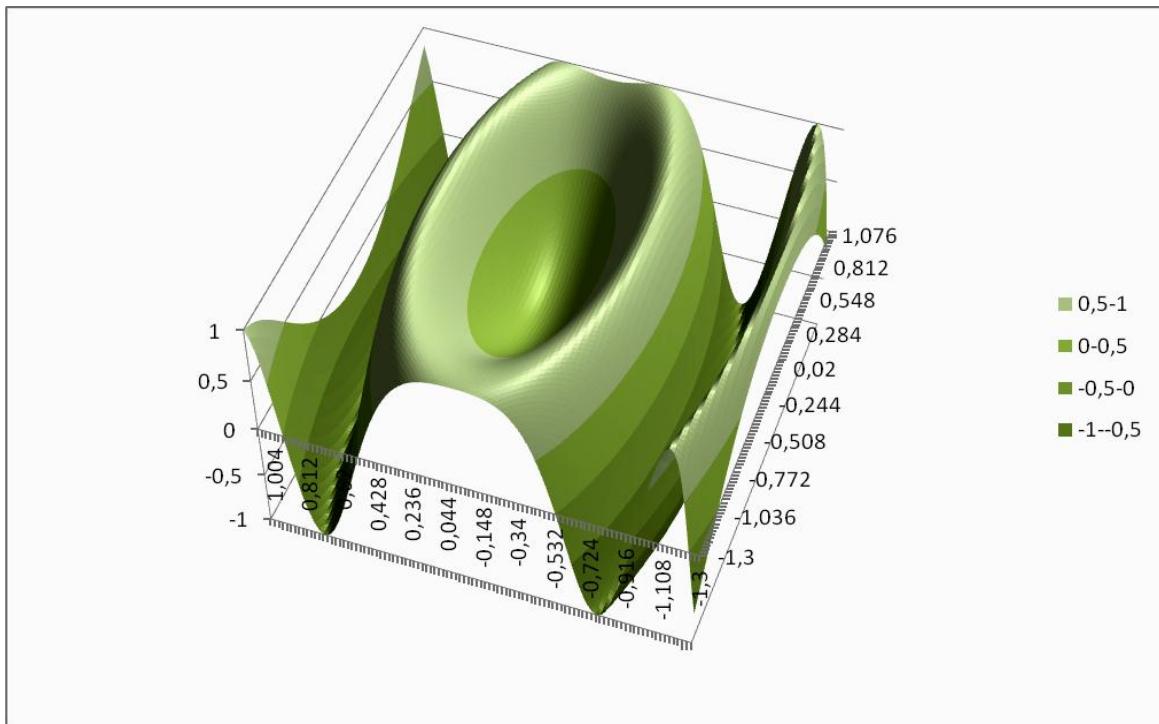


Рис. 16.25. График функции $f(x, y) = \sin(x^2 + 5y^2)$ на множестве $x \in [-1,3; 1,1]$, $y \in [-1,3; 1,1]$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x_i	y_i	df_dx	df_dy	f(x_i,y_i)	Pogr	h=	0,24
2		0,8	0,9	-0,03581937593196480	-0,20148398961730200	-0,99974937724799400		
3	0,80859665022367200	0,94835615750815300	0,68639163566144500	4,02514488503979000	-0,90545893174490400	0,05695280773182410		
4	0,64386265766492500	-0,01767861490139630	1,17783528052571000	-0,16169982910026500	0,40421624395758600	1,13076876496830000		
5	0,36118219033875400	0,02112934408266730	0,71601499715090700	0,20943622980083900	0,13229583792710300	0,32148842631023400		
86	0,000000000000000000	-0,34225298930970700	0,000000000000000000	-2,85210824424756000	0,55277079839256700	0,68450597861941300		
87	0,000000000000000000	0,34225298930970700	0,000000000000000000	2,85210824424756000	0,55277079839256600	0,68450597861941300		
88	0,000000000000000000	-0,34225298930970700	0,000000000000000000	-2,85210824424756000	0,55277079839256700	0,68450597861941300		
89	0,000000000000000000	0,34225298930970700	0,000000000000000000	2,85210824424756000	0,55277079839256600	0,68450597861941300		

Рис. 16.26. «Зацикливание» по одной переменной

В этом случае при достаточно большом количестве шагов $x = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial x} \approx 0$, но $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$

и $f(x, y) \neq 0$, а вычислительный процесс «зацикливается» по переменной y : ее значения в точности повторяются через один шаг, и улучшить ситуацию в данном случае невозможно, так как процесс полностью стабилизировался. Чертежование значений переменной y означает «перепрыгивание» с одной стороны оврага на другую и обратно в ту же точку. Но для тех же начальных данных и шага, например, равного 0,15, происходит спуск в точку $(0; 0; 0)$. Подберите самостоятельно другие значения шага, при которых происходит «зацикливание» в окрестности точки $(0; 0; 0)$ без спуска в эту точку.

Для отображения разных частей листа Excel так, как на рис. 16.26, использован разделитель, находящийся в правом верхнем углу над полосой прокрутки. Он позволяет разделить лист по горизонтали на две части и осуществлять прокрутку независимо в каждой из частей. Для разделения листа по вертикали имеется разделитель в правом нижнем углу за полосой прокрутки.

Пример 5. Продемонстрируем на примере поиска локального минимума функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ на множестве $x \in [-3; 3]$, $y \in [-3; 3]$ еще некоторые возможные ситуации, возникающие при реализации метода покоординатного спуска.

График функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ в заданной области представлен на рис. 16.27. На поверхности достаточно хорошо угадывается неглубокий минимум. Из геометрических особенностей этой поверхности ясно, что начиная вычислительный процесс из точки, достаточно далекой от минимума, и двигаясь в сторону убывания функции, можно пройти мимо минимума. Например, при $x_0 = 3$, $y_0 = 3$ трудно подобрать значение шага, обеспечивающего быструю сходимость. Так, при $h = 0,1$ машинное решение наблюдается только в строке 151: $x_{\min} = 0,6666666666666667$, $y_{\min} = 0,6666666666666667$, $f_{\min} = -0,296296296296296$. А уже значение $h = 0,15$ приводит к переполнению вследствие выхода за пределы области, увеличения по абсолютной величине частных производных и устремления последовательности точек в бесконечность. Самую быструю сходимость при данном начальном приближении обеспечивает шаг $h = 0,14$. Машинное решение получается в строке 119.

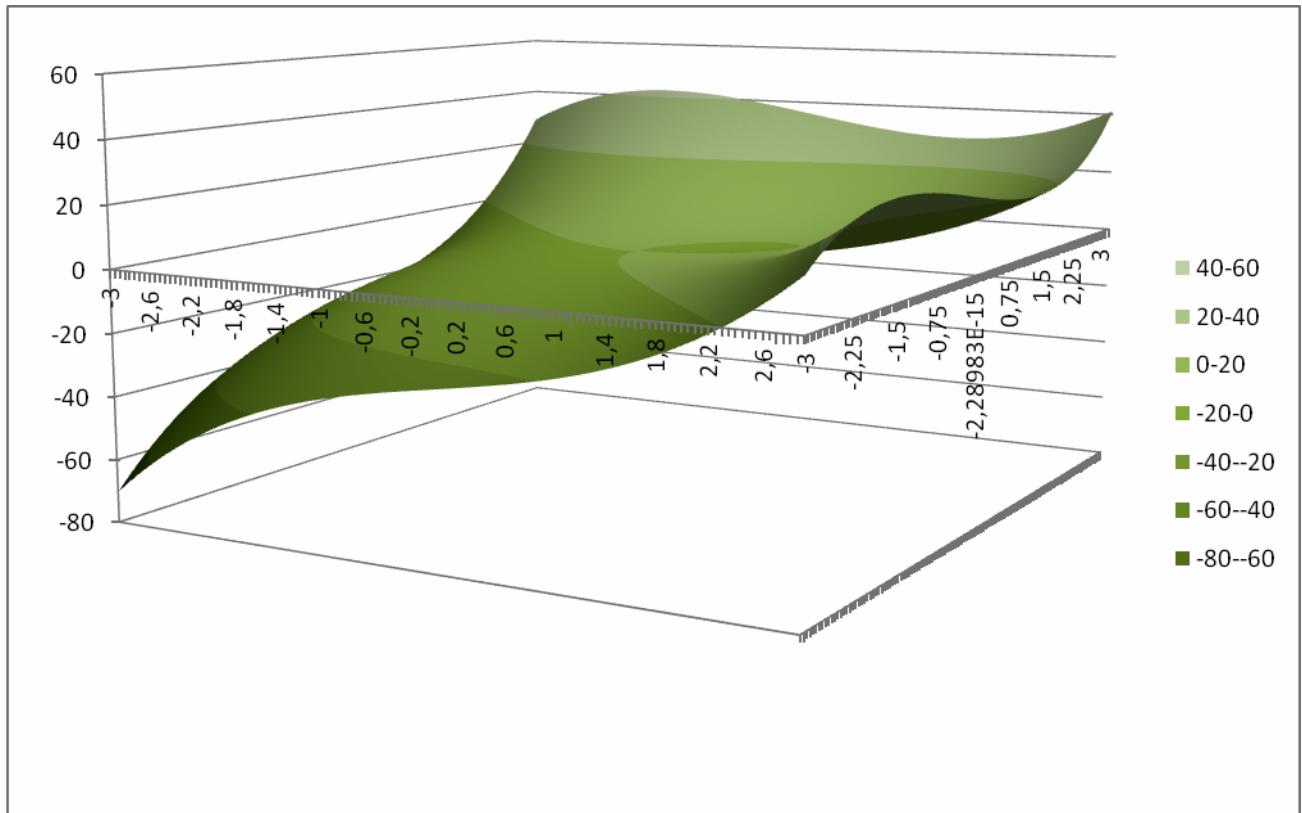


Рис. 16.27. График функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ на множестве $x \in [-3; 3]$, $y \in [-3; 3]$

На рис. 16.28 представлен увеличенный фрагмент рассматриваемой поверхности.

Проведите самостоятельно эксперименты по выбору начального приближения и шага для поиска минимума функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$.

Замечание 2. Напомним, что для нахождения максимума функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ надо найти минимум функции $g = -f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Максимум u находится в той же точке $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, что и минимум g , и отличается от него знаком.

Замечание 3. Если функция $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ достаточно сложна, то для вычисления значений частных производных необходимо привлекать численные методы нахождения частных производных.

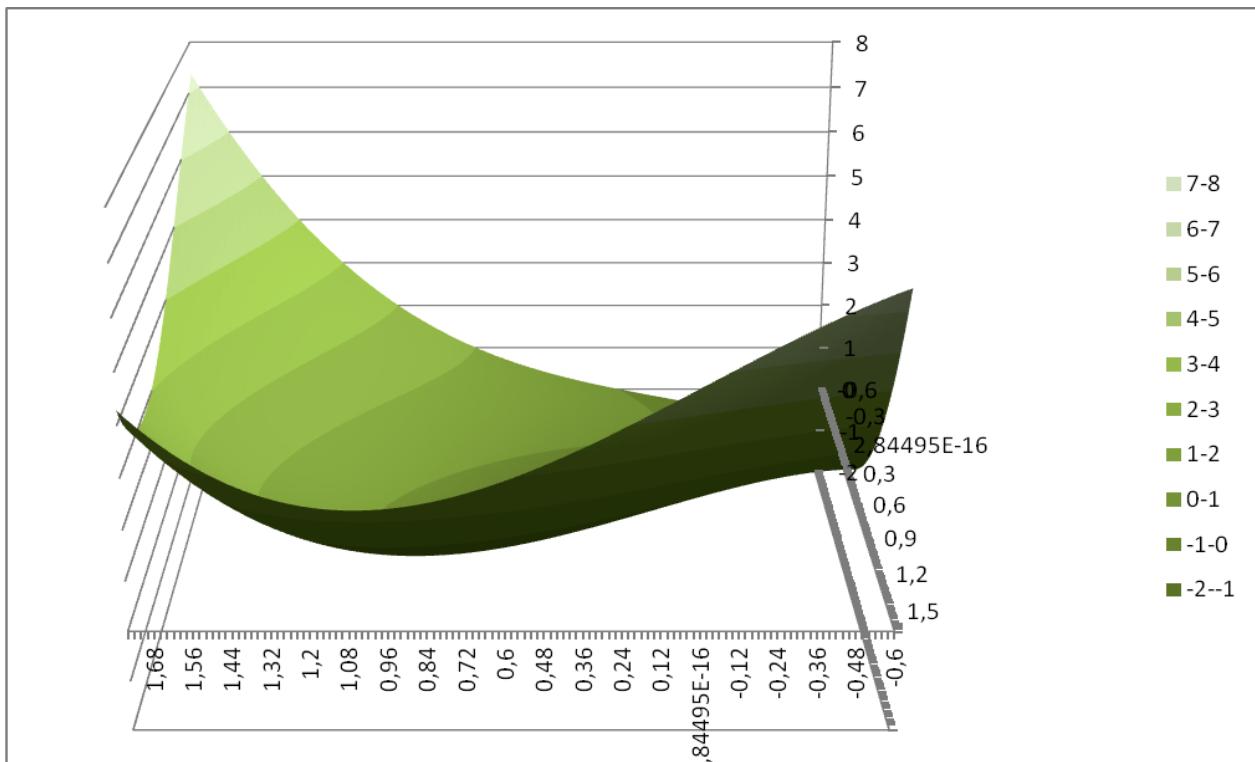


Рис. 16.28. График функции $f(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$ на множестве $x \in [-0,6; 1,7]$, $y \in [-0,6; 1,7]$

Задание для самостоятельной работы

Методом градиентного спуска найдите минимум функции двух переменных и значение функции в нем.

Вариант 1. $z = y^4 - 2y^2x + 2x^2 + 4x + 4$.

Вариант 2. $z = x^4 + 2x^2y + x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 2y + 1$.

Вариант 3. $z = 2y^4 + 2x^2 - 6y^2 - 6x + 9$.

Вариант 4. $z = x^4 - 2x^2y + x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y + 9$.

Вариант 5. $z = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 7x^2 - 2y^2 + 4xy + 9$.

Вариант 6. $z = x^4 + 2x^2y + x^2 + 2y^2 - 2xy - 10x + 10y + 25$.

Вариант 7. $z = y^4 - 2xy^2 + 2x^2 + 11y^2 - 6xy - 2x + 1$.

Вариант 8. $z = x^4 + 2x^2y - 6x^2 + 2y^2 - 4xy - 10y + 25$.

Вариант 9. $z = y^4 + 2xy^2 + 2x^2 - 3y^2 - 6xy - 12x + 36$.

Вариант 10. $z = x^4 - 2x^2y + 27x^2 + 2y^2 - 10xy - 2y + 1$.

Вариант 11. $z = x^4 - 2x^2y + 2y^2 + 4y + 4$.

Вариант 12. $z = y^4 + 2y^2x + y^2 + 2x^2 - 2xy - 2y + 2x + 1$.

Вариант 13. $z = 2x^4 + 2y^2 - 6x^2 - 6y + 9$.

Вариант 14. $z = y^4 - 2y^2x + y^2 + 2x^2 - 2xy + 6y - 6x + 9$.

Вариант 15. $z = y^4 + x^4 - 2x^2y^2 + 7y^2 - 2x^2 + 4xy + 9$.

Вариант 16. $z = y^4 + 2y^2x + y^2 + 2x^2 - 2xy - 10y + 10x + 25$.

Вариант 17. $z = x^4 - 2yx^2 + 2y^2 + 11x^2 - 6xy - 2y + 1$.

Вариант 18. $z = y^4 + 2y^2x - 6y^2 + 2x^2 - 4xy - 10x + 25$.

Вариант 19. $z = x^4 + 2x^2y + 2y^2 - 3x^2 - 6xy - 12y + 36$.

Вариант 20. $z = y^4 - 2y^2x + 27y^2 + 2x^2 - 10xy - 2x + 1$.

Список литературы

1. **Вводные лекции по прикладной математике** [Текст] / А. Н. Тихонов, Д. П. Костомаров. — М. : Наука, 1984. — 192 с.
2. **Горемыкина, Г. И.** Избранные разделы линейной алгебры с элементами экономической алгоритики [Текст] : учеб. пособие для студ. экон. и физ.-мат. фак. / Г. И. Горемыкина, М. А. Ляшко. — Балашов : Николаев, 2003. — 96 с.
3. **Гутер, Р. С.** Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта [Текст] : учеб. пособие для студентов втузов / Р. С. Гутер, Б. В. Овчинский. — М. : Наука, 1970. — 432 с.
4. **Жидков, Е. Н.** Вычислительная математика [Текст] : учеб. пособие для студентов вузов / Е. Н. Жидков. — М. : Академия, 2010. — 208 с.
5. **Заварыкин, В. М.** Численные методы [Текст] : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / В. М. Заварыкин, В. Г. Житомирский, М. П. Лапчик. — М.: Просвещение, 1990. — 176 с.
6. **Красс, М. С.** Основы математики и ее приложения в экономическом образовании [Текст] : учеб. / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. — М. : Дело, 2008. — 720 с.
7. **Кремер, Н. Ш.** Высшая математика для экономистов [Текст] / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. — М. : Юнити, 2010. — 479 с.
8. **Матрицы и вычисления** [Текст] / В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. — М. : Наука, 1984. — 320 с.
9. **Пирумов, У. Г.** Численные методы [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студ. втузов / У. Г. Пирумов. — Электрон. дан. — М. : Дрофа, 2007. — 222 с. — Режим доступа: <http://www.biblioclub.ru/book/53450/>. — Загл. с экрана.
10. **Померанцев, А. Л.** Матричные операции в *Excel* (2010) [Электронный ресурс] : электронный учебник / А. Л. Померанцев. — Электрон. дан.— М. : Российское хемометрическое общество, 2010. — Режим доступа: <http://www.chemometrics.ru/materials/textbooks/excel.htm>. — Загл. с экрана.
11. **Понтрягин, Л. С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения [Текст] : учеб. для государственных университетов / Л. С. Понтрягин. — М. : Наука, 1970. — 332 с.

Учебно-методическое издание

**Ляшко Марина Александровна,
Бекетова Елена Александровна**

Численные методы в Excel

Учебно-методическое пособие для студентов вузов

Подписано в печать 03.09.12. Формат 60×84/16.

Уч.-изд. л. 12,2. Усл.-печ. л. 15,0.

Тираж 100 экз. Заказ № 134/947

ИП «Николаев»,
г. Балашов, Саратовская обл., а/я 55.

Отпечатано с оригинал-макета,
изготовленного редакционно-издательским отделом
Балашовского института Саратовского университета.
412309, г. Балашов, Саратовская обл., ул. К. Маркса, 29.

Печатное агентство «Арья»,
ИП «Николаев», Лиц. ПЛД № 68-52.
412300, г. Балашов, Саратовская обл.,
ул. К. Маркса, 43.
E-mail: arya@balashov.san.ru

