Министерство образования Московской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Московской области
«НОГИНСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

И.А. Каверина

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ (Excel)

Лабораторный практикум

г.о. Балашиха
2021 г.

Каверина И.А. Численные методы (Excel). Учебно-методическое пособие, Лабораторный практикум // Балашиха: ГБПОУ МО «Ногинский колледж» подразделение «Балашиха», 2021, -85с.

Учебно-методическое пособие разработано для специальности среднего профессионального образования (далее - СПО): 09.02.07 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ» в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта (далее - ФГОС).

Содержит необходимые сведения теоретического характера, раскрывает содержание основных разделов курса. Приводятся решения типовых примеров по основным разделам дисциплины.

Организация-разработчик: Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Московской области «Ногинский колледж» подразделение «Балашиха»

Введение

Настоящее пособие предназначено в первую очередь для студентов программистских специальностей в рамках курса «Численные методы». В его основу положен материал, читаемый автором на протяжении ряда лет студентам ГБПОУ МО «Ногинский колледж» подразделение «Балашиха».

Главная задача пособия – это изучение теоритического материала через отработку вычислительных процедур с помощью Excel. Данная работа предшествует этапу программирования. Уровень изложения рассчитан на студентов, обладающих элементарными навыками работы с электронными таблицами в Excel.

Пособие состоит из 10 лабораторных работ, которые отражают методы решения соответствующей прикладной задачи. Решение задач приводится в таблицах Excel. Пособие содержит контрольные примеры.

Лабораторная работа № 1

«Основные понятия теории погрешностей»

Продолжительность: 2 часа.

Цель:

1. Ознакомление с основными понятиями теории погрешностей.

2. Проводить грамотно вычисления с числами, имеющими погрешность.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать понятия абсолютной и относительной погрешности и разницу между ними.

2. Знать формулы перехода от одного вида погрешности к другой.

3. Знать, что такое верные значащие цифры, и каким образом они отражаются в записи приближенного числа.

4. Знать, как следует записывать ответ при приближенных вычислениях.

Используемые программы:

Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор типового примера.

2. Самостоятельная работа: выполнение контрольного задания.

Описание работы

§1 Краткие теоретические сведения

Погрешностью $\boldsymbol{\Delta a}$ приближенного значения величины А называется разность между точным значением величины А и ее приближенным значением a, т.е.

$$\Delta a = \mathrm{A} - a \qquad (1)$$

Абсолютной погрешностью $\boldsymbol{\Delta}$ приближенного числа a называется абсолютная величина разности между точным числом А и приближенным числом a, т.е.

$$\Delta = |\,\Delta a\,| = |\,\mathrm{A} - a\,|. \qquad (2)$$

Если точное число А неизвестно, то абсолютную погрешность по формуле (2) определить нельзя. В таких случаях абсолютную погрешность оценивают сверху, т. е. находят возможно меньшее при данных условиях число Δ_α, такое, что

$$\Delta = |\, \mathrm{A} - a \,| \le \Delta_a \qquad (3)$$

Число Δ_a называется **предельной абсолютной погрешностью** приближенного числа a.

Абсолютная погрешность не полностью характеризует точность измерения. Поэтому на практике степень точности измерения оценивают с помощью **относительной погрешности** $\boldsymbol{\delta}$, которая определяется как отношение абсолютной погрешности к абсолютной величине точного значения искомой величины, т.е.

$$\delta = \frac{\Delta}{|\, A \,|} \qquad (4).$$

Число δ_α, заведомо не меньшее относительной погрешности называют предельной относительной погрешностью, т.е.

$$\frac{\Delta}{|\, A \,|} = \delta \le \delta_a \qquad (5).$$

Т.к. на практике А≈ α, то приближенно можно принять , что

$$\frac{\Delta_a}{|\, a \,|} = \delta_a \qquad (6).$$

Пример 1. Определить какое равенство точнее: $9/11 = 0{,}818$ или $\sqrt{18} = 4{,}24$.

Решение. Находим значения данных выражений с большим числом десятичных знаков: $A = 9/11 = 0{,}81818...$, $B = \sqrt{18} = 4{,}2426...$. Вычислим предельные абсолютные погрешности округляя результат с избытком

$$|\, 0{,}81818 - 0{,}818 \,| \le 0{,}00019 = \Delta_a \quad , \quad |\, 4{,}2426 - 4{,}24 \,| \le 0{,}0027 = \Delta_b .$$

Предельные относительные погрешности равны:

$$\delta_a = \frac{0{,}00019}{0{,}818} = 0{,}00024 \quad . \quad \delta_b = \frac{0{,}0027}{4{,}24} = 0{,}00064 .$$

Т.к. $\delta_a < \delta_b$, то это значит, что приближенное равенство 9/11=0,818 является более точным.

Значащей цифрой приближенного числа *a* называется всякая цифра в его десятичном изображении, отличная от нуля, и нуль, если он содержится между значащими цифрами или является представителем сохраненного десятичного разряда. Так, например, в числах $\underline{0{,}000}503$ и $\underline{0{,}0}4100$ подчеркнутые нули не являются значимыми цифрами. Иногда запись числа не дает возможности судить о том, сколько значащих цифр оно содержит. Например, из записи числа 38300 непонятно, сколько значащих цифр имеет это число. Но если оно должно иметь, например, четыре значащие цифры, то его нужно записать в виде $3{,}830 \cdot 10^4$.

Определение. Если абсолютная погрешность приближенного числа *a* не превышает 1/2 единицы его *n*-го разряда, то говорят, что число *a* имеет ***n*** **верных значащих цифр**.

Например, если для числа $\alpha = \underline{2{,}35}68$ абсолютная погрешность $\Delta \leq 0{,}005$, то число *a* имеет три верных знака (они подчеркнуты), так как $0{,}005 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01$.

Практическое правило определения количества верных знаков: количество верных знаков числа отсчитывается от первой значащей цифры числа до-первой, значащей цифры его абсолютной погрешности. Так, число $\underline{20{,}7}321$ с абсолютной погрешностью $\Delta = 0{,}029$ имеет три верные значащие цифры (они подчеркнуты).

Одним из наиболее важных, вопросов в численном анализе является вопрос о том, как ошибки начальной информации или ошибки возникшие в ходе вычислений распространяются дальше.

Если задана дифференцируемая функция нескольких независимых переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то предельная абсолютная погрешность этой функции вызываемая погрешностями аргументов $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \ldots, \Delta_{x_n}$ оценивается величиной

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i} \qquad (7).$$

Для оценки предельной относительной погрешности функции имеют место выражения

$$\delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln(u)}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i} \quad \text{или} \quad \delta_u = \frac{\Delta_u}{|\, u \,|} \qquad (8).$$

Пример 2. Оценить абсолютную и относительную погрешности функции $u = x_1 + x_2$, считая абсолютные предельные погрешности аргументов известными.

Решение. Т.к. $\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| = 1$, то согласно формуле (7), имеем

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i} = \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} .$$

Таким образом, предельная абсолютная погрешность суммы приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей этих чисел.

Согласно формуле (6), имеем $\delta_u = \frac{\Delta_u}{|\, u \,|}$; $\Delta_x = \delta_x \cdot |\, x \,|$, тогда если слагаемые одного знака, получаем

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|\, u \,|} = \frac{\Delta_{x_1} + \Delta_{x_2}}{|\, x_1 + x_2 \,|} = \frac{|\, x_1 \,| \cdot \delta_{x_1} + |\, x_2 \,| \cdot \delta_{x_2}}{|\, x_1 + x_2 \,|} \le \frac{\bar{\delta} \cdot (|\, x_1 \,| + |\, x_2 \,|)}{|\, x_1 + x_2 \,|} = \bar{\delta} ,$$

где $\bar{\delta} = \max(\delta_{x_1}, \delta_{x_2})$.

Т.о., если слагаемые одного знака, то предельная относительная погрешность их суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых.

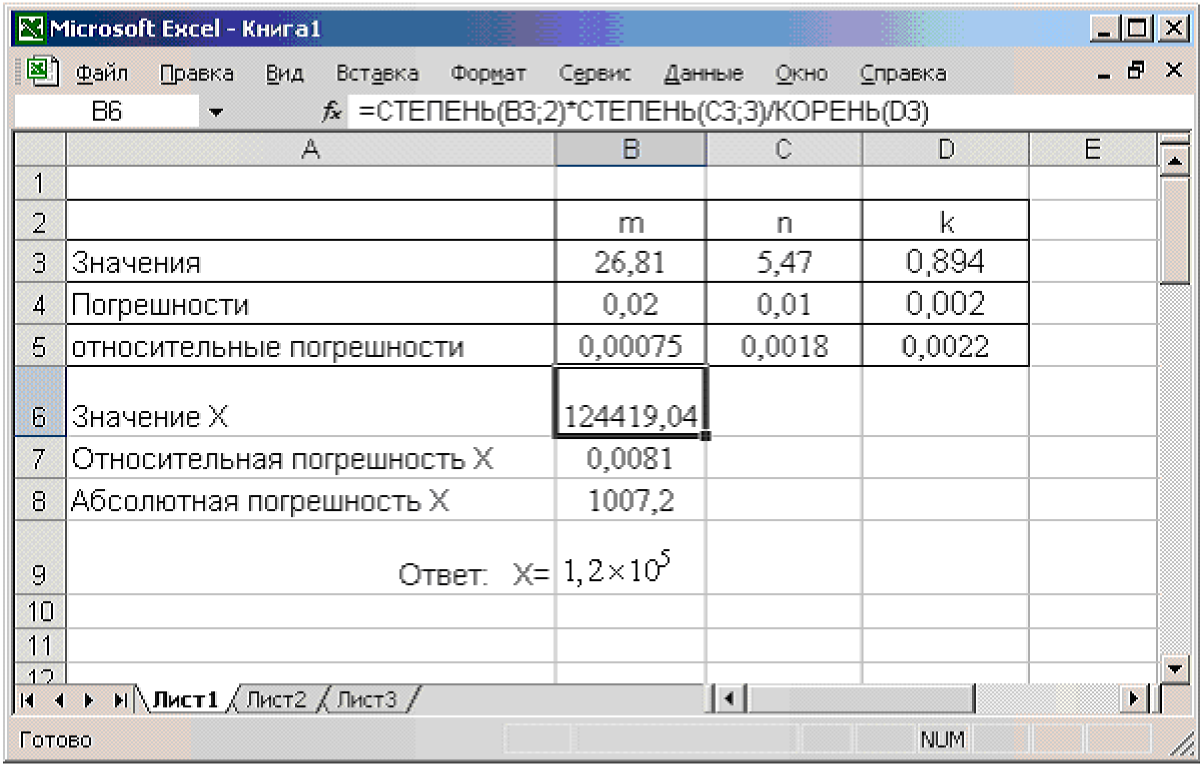
Если слагаемые разных знаков, то предельная относительная погрешность суммы вычисляется по формуле

$$\delta_u = \frac{|\, x_1 \,| \cdot \delta_{x_1} + |\, x_2 \,| \cdot \delta_{x_2}}{|\, x_1 + x_2 \,|} .$$

§2 Решение типового задания

Задача. Вычислить и определить погрешность результата $X = \frac{m^2 \cdot n^3}{\sqrt{k}}$, где m=26,81(±0,02), n=5,47(±0,01), k=0,894(±0,002).

Решение: Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel (см. рисунок 1).



	A	B	C	D
1				
2		m	n	k
3	Значения	26,81	5,47	0,894
4	Погрешности	0,02	0,01	0,002
5	относительные погрешности	0,00075	0,0018	0,0022
6	Значение X	124419,04		
7	Относительная погрешность X	0,0081		
8	Абсолютная погрешность X	1007,2		
9	Ответ: X=	$1,2\times10^5$		

Рисунок 1 Нахождение погрешности результата

Пояснения к решению:

1) В диапазон ячеек A3:A8 вводим поясняющий текст.

2) В ячейках B3:D4 (прямоугольная область с вершинами B3 и D4) вводим исходные данные.

3) Вычисляем относительные погрешности аргументов: в ячейку B5 вводим формулу =B4/B3 и нажимаем «Enter», после чего делаем протяжку вправо от ячейки B5 до ячейки D5.

4) Вычисляем значение результата X: в ячейку B6 вводим формулу =СТЕПЕНЬ(B3;2)*СТЕПЕНЬ(C3;3)/КОРЕНЬ(D3) и нажимаем «Enter», в ячейке B6 высвечивается результат. Для ввода функций рекомендуется использовать мастер функций и использовать диалоговое окно соответствующей функции. Например, для ввода функции СТЕПЕНЬ() нажмите пиктограмму вставки

функций $\boxed{f_x}$, выберете из полного перечня нужную функцию и нажмите кнопку «ОК» (см. рисунок 2).

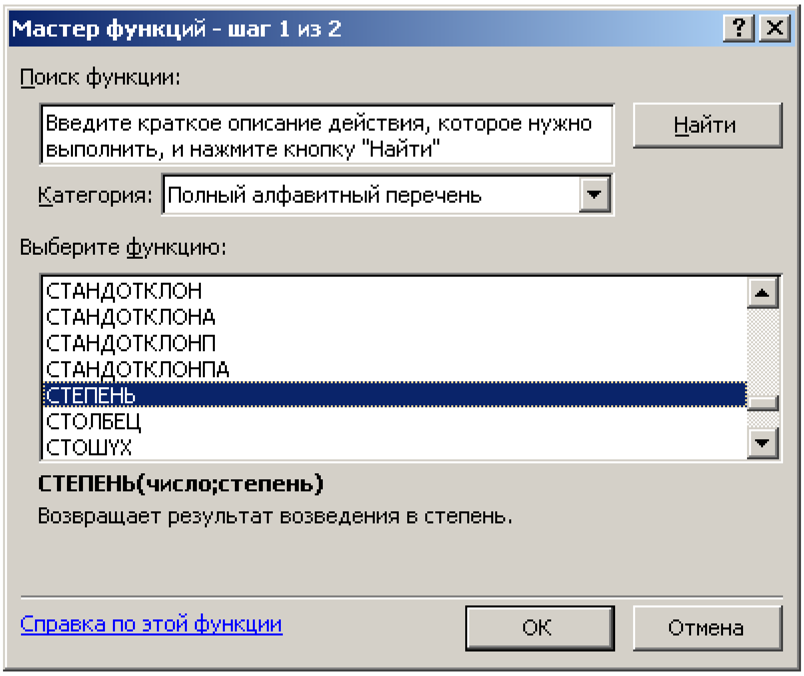


Рисунок 2 Мастер функций

Далее, путем «клика» на ячейки вводим ссылки на эти ячейки (см. рисунок 3).

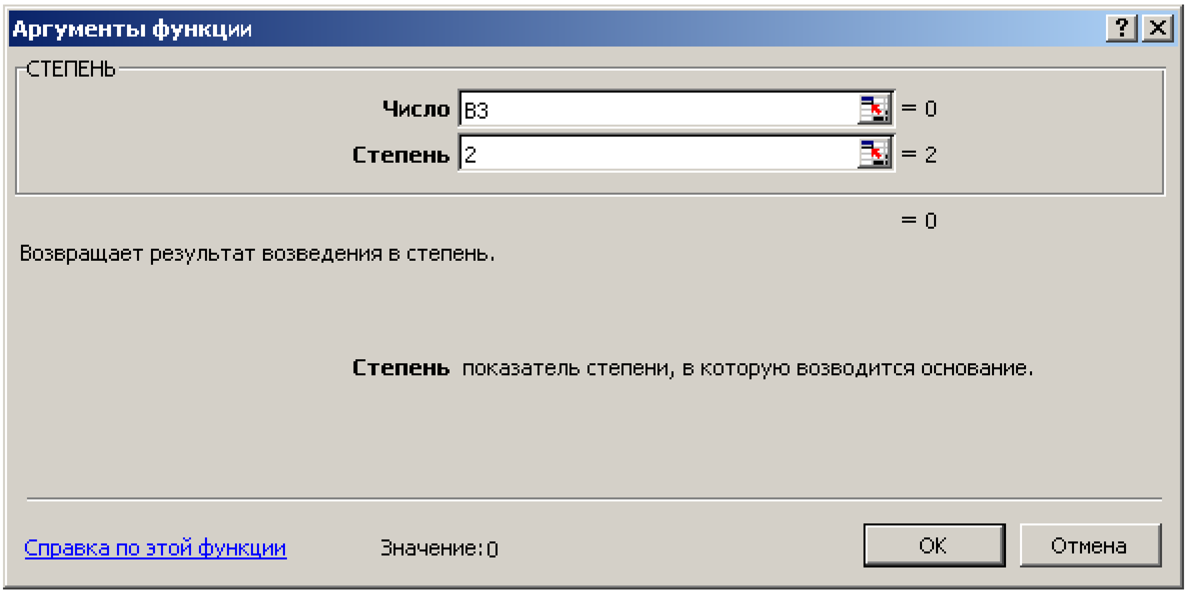


Рисунок 3 Ввод аргументов функции

Нажимаете кнопку «ОК».

5) Вычисляем относительную погрешность результата X согласно формуле (8): в ячейку B7 вводим формулу =2*B5+3*C5+0,5*D5 и нажимаем «Enter».

6) Вычисляем абсолютную погрешность результата X по формуле $\Delta_u = \delta_u \cdot |\, u \,|$: в ячейку B8 вводим формулу =B6*B7 и нажимаем «Enter».

7) Согласно теории записываем ответ с тремя верными значащими цифрами: X=1,24±10^3. Ответ: 1,24±10^3.

§3 Задания для самостоятельного решения

Задание №1.

Оценить абсолютную и относительную погрешности функций $u = x_1 \cdot x_2$ и $u = \dfrac{x_1}{x_2}$, считая абсолютные предельные погрешности аргументов известными.

Задание №2.

В приведенных задачах числа *m, n, k* вычислены с некоторой погрешностью. Необходимо вычислить и определить погрешность результата для X.

1. $X = \dfrac{m \cdot n}{\sqrt{k}}$, где *m*=3,85 (±0,01), *n*=12,163 (±0,002), *k*=17,32 (±0,03).

2. $X = \dfrac{m \cdot n^2}{\sqrt{k}}$, где *m*=3,15(±0,02), *n*=10,734 (±0,003), *k*=25,217 (±0,001).

3. $X = \dfrac{\sqrt{m} \cdot n}{3k}$, где *m*=15,16 (±0,01), *n*=35,41 (±0,02), *k*=7,68 (±0,03).

4. $X = \dfrac{\sqrt{m} \cdot n}{\sqrt{k}}$, где *m* =31,35(±0,03), *n*=72,24 (±0,01), *k*=20,15 (±0,02).

5. $X = \dfrac{\sqrt{m \cdot n}}{k}$, где *m*=3,851 (±0,002), *n*=16,31 (±0,01), *k*=3,51 (±0,03).

6. $X = \dfrac{\sqrt{m \cdot n}}{2k^3}$, где *m*=4,36 (±0,03), *n*=21,52 (±0,01), *k*=11,655 (±0,002).

7. $X = \dfrac{m^2 \cdot n}{k}$, где *m*=3,256 (±0,001), *n*=5,035 (±0,002), *k*=3,151 (±0,001).

8. $X = \dfrac{m^2 \cdot n}{k^3}$, где *m*=1,245(±0,002), *n*=2,321 (±0,002), *k*=1,074 (±0,001).

9. $X = \dfrac{m \cdot n^3}{k}$ где *m*=0,534 (±0,001), *n*=2,16 (±0,02), *k*=3,484 (±0,003).

10. $X = \dfrac{m \cdot n^3}{5k^2}$, где *m*=2,341 (±0,002), *n*=3,182 (±0,001), *k*=0,72 (±0,02).

11. $X = \dfrac{m \cdot n^2}{k^3}$, где *m*=1,356 (±0,001), *n*=3,87 (±0,02), *k*=0,851 (±0,002).

12. $X = \dfrac{m \cdot n^2}{k^2}$, где *m*=2,374 (±0,002), *n*=4,75 (±0,01), *k*=2,671 (±0,001).

13. $X = \dfrac{m \cdot n^2}{4k}$, где *m*=3,142 (±0,005), *n*=52,11 (±0,01), *k*=8,35 (±0,02).

14. $X = 2 \cdot \dfrac{m \cdot n^2}{\sqrt{k}}$, где *m*=3,143(±0,003), *n*=50,32 (±0,01), *k*=6,32 (±0,01).

15. $X = \sqrt{\dfrac{m \cdot n}{k}}$, где *m*=3,678 (±0,002), *n*=25,71 (±0,02), *k*=5,67 (±0,03).

16. $X = \sqrt{\dfrac{m \cdot n^3}{k}}$, где *m*=4,531(±0,001), *n*=3,84 (±0,01), *k*=3,78 (±0,02).

17. $X = 3 \cdot \dfrac{m \cdot n}{k^2}$, где *m*=5,274 (±0,002), *n*=0,82 (±0,01), *k*=0,68 (±0,02).

18. $X = 3 \cdot \dfrac{m \cdot n}{k^2}$, где *m*=3,234(±0,001), *n*=0,25 (±0,01), *k*=1,37 (±0,02).

19. $X = \dfrac{\sqrt{m} \cdot n^3}{\sqrt{k}}$ где *m*=25,41 (±0,01), *n*=6,25 (±0,02), *k*=0,379 (±0,001).

20. $X = 5 \cdot \dfrac{\sqrt{m} \cdot n^4}{\sqrt{k}}$ где *m*=29,71(±0,02), *n*=3,92 (±0,01), *k*=0,298 (±0,002).

21. $X = \dfrac{\sqrt{m} \cdot n^2}{k^2}$, где *m*=7,316 (±0,001), *n*=2,87 (±0,02), *k*=2,051 (±0,003).

22. $X = \dfrac{m \cdot n^2}{5k}$, где *m*=8,304 (±0,003), *n*=3,751 (±0,001), *k*=0,671 (±0,004).

23. $X = \dfrac{\sqrt[3]{m} \cdot n^2}{4k}$, где *m*=12,142 (±0,005), *n*=5,12 (±0,03), *k*=1,356 (±0,007).

24. $X = 2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{m} \cdot n^2}{\sqrt{k}}$, где *m*=23,183(±0,004), *n*=50,327 (±0,001), *k*=6,312 (±0,006).

25. $X = 7 \cdot \sqrt{\dfrac{m^3 \cdot n}{k}}$, где *m*=3,271 (±0,004), *n*=25,701 (±0,002), *k*=5,007 (±0,009).

26. $X = 9 \cdot \sqrt{\dfrac{m \cdot n^3}{k^4}}$, где m=4,531(±0,003), n=3,814 (±0,008), k=1,780 (±0,002).

27. $X = 3 \cdot \dfrac{m^4 \cdot n}{k^2}$, где m=1,204 (±0,007), n=0,820 (±0,001), k=1,618 (±0,003).

28. $X = 9 \cdot \dfrac{m^3 \cdot n}{k^2}$, где m=3,094(±0,005), n=0,250 (±0,005), k=4,373 (±0,008).

29. $X = 5 \cdot \dfrac{\sqrt{m} \cdot n^{3/4}}{\sqrt{k}}$ где m=15,401 (±0,005), n=6,250 (±0,005), k=9,379 (±0,005).

30. $X = \dfrac{\sqrt{m} \cdot n^4}{9k}$ где m=19,714(±0,002), n=2,902 (±0,007), k=0,218 (±0,004).

§4 Контрольные вопросы для самоподготовки

1) Назовите основные источники погрешностей.

2) Какая погрешность указана в записи числа $125{,}362 \pm 0{,}004$?

3) Чему равна предельная относительная погрешность числа 25 ± 1?

4) Число 2,5 вычислено с относительной погрешностью 1%. Чему равна абсолютная погрешность?

5) Что подразумевает запись $A = 5{,}362 \pm 0{,}004$?

6) Сколько верных значащих цифр, и какую погрешность имеет число $5{,}16 \cdot 10^6$?

7) Сколько верных значащих цифр, и какую погрешность имеет число $105{,}1600 \pm 0{,}00005$?

8) Есть ли разница между приближенными числами 5,2000 и 5,2?

9) Записать результат вычисления 2,599621 с тремя верными значащими цифрами.

10) Можно ли точно найти погрешность результата приближенных вычислений?

11) Подставляя приближенные значения в формулы, мы уменьшаем или увеличиваем погрешность результата?

12) Приведите формулу для (оценки) предельной абсолютной погрешности при вычислениях производимых по формуле.

13) Какие цифры необходимо записывать в ответ.

14) По какому вычисленному значению определяют верные значащие цифры приближенного числа.

15) Сформулируйте практическое правило определения количества верных знаков.

Лабораторная работа № 2

«Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений»

Продолжительность: 4 часа.

Цель:

1. Научиться решать алгебраические и трансцендентные уравнения, используя алгоритмы вычислительной математики.

2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать основные вычислительные алгоритмы решения алгебраических и трансцендентных уравнений.

2. Знать, «слабые» и «сильные» стороны различных алгоритмов.

3. Уметь реализовать вычислительные алгоритмы решения алгебраических и трансцендентных уравнений в MS Excel.

Используемые программы:

Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор методов деления пополам и метода хорд и касательных на примере решения типового задания.

2. Самостоятельная работа: решение контрольного задания.

Описание работы

§1 Краткие теоретические сведения

1.1 Метод деления пополам (метод дихотомии). Пусть $y = f(x)$ - функция действительной переменной и пусть известен интервал $[a,b]$, на котором функция меняет знак, следовательно, между a и b существует точка, в которой функция обращается в нуль. Если разделить интервал пополам и определить положительна или отрицательна функция в точке деления, то тем самым найдём подынтервал, в котором функция меняет знак. В принципе, повторным применением этого приема (деление интервала пополам) можно сколь угодно близко "подойти к корню".

Алгоритм метода. При заданной абсолютной точности ε алгоритм метода деление пополам состоит из следующих шагов:

1. Вычислить $f(a)$ и $f(b)$.
2. Положить $c = (a + b) / 2$. Вычислить f(c).
3. Если sign(f(c))=sign(f(a)), то заменить a на c; в противном случае заменить b на c (функция sign(x) означает знак в точке x).
4. Если $b - a > \varepsilon$ то перейти к шагу 2; в противном случае прекратить вычисления, поскольку мы достигли требуемой точности. В качестве корня уравнения $f(x) = 0$ может быть использована середина интервала - $(a + b) / 2$.

1.2 Метод хорд и касательных. Данный метод основан на построении схематического графика функции, определении интервалов его пересечения с осью абсцисс и последующим «сжатием» этого интервала при помощи строимых хорд и касательных к графику этой функции. Из рисунка 1 видно, что истинный корень **A** лежит между приближениями со стороны точки a и со стороны точки b**,** т.е. $a_n \le A \le b_n$.

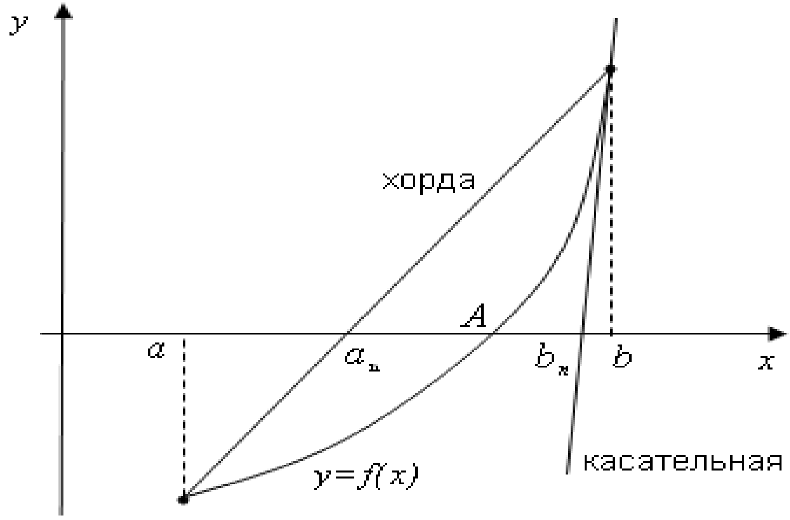


Рисунок 1

Также как и отдельно, в методе хорд и в методе касательных, для расчета приближений мы рассмотрим два случая.

1. Случай $f(a)\cdot f''(a)<0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{b_n - a_n}{f(a_n) - f(b_n)} \cdot f(a_n) \\ b_{n+1} = b_n - \dfrac{f(b_n)}{f'(b_n)} \end{cases} \qquad (1)$$

2. Случай $f(a)\cdot f''(a)>0$

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)} \\ b_{n+1} = b_n + \dfrac{b_n - a_n}{f(a_n) - f(b_n)} \cdot f(b_n) \end{cases} \qquad (2)$$

Если задана допустимая погрешность **ε**, то процесс уточнения корня прекратится, как только $|a_n - b_n| \le \varepsilon$. За значение корня *A* как правило берут $A = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

§2 Решение типового задания

Задача. Найти действительный корень уравнения $x^3 - 12x - 8 = 0$ с точностью 10^{-4}, на интервале [-1,0]. На первом этапе решения методом деления пополам, уменьшать интервал, содержащий корень, до тех пор, пока его длина не станет меньше 0,2. Потом, применить метод хорд и касательных.

Решение. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel (см. рисунок 1).

1-й этап. Сначала проводим вычисления по методу деления пополам.

1) В ячейках A2:H2 вводим поясняющий текст.

2) В ячейках B3:C3 вводим концы исходного интервала, содержащего корень;

3) В ячейку D3 вводим формулу «=(B3+C3)/2» - середина интервала.

4) В ячейку E3 вводим формулу «=СТЕПЕНЬ(B3;3)-12*B3-8» и нажимаем «Enter», после чего делаем протяжку с ячейки E3 до ячейки G3. Таким образом, вычисляем значение функции на концах интервала и в середине.

5) В ячейку H3 вводим формулу «=C3-B3» и нажимаем «Enter». Таким образом, находим длину интервала.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Метод деления пополам					
2	n	a_n	b_n	c_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(c_n)$	$b_n - a_n$
3	0	-1	0	-0,5	3	-8	-2,125	1
4	1	-1	-0,5	-0,75	3	-2,125	0,578	0,5
5	2	-0,75	-0,5	-0,625	0,578	-2,125	-0,744	0,25
6	3	-0,75	-0,625	-0,688	0,578	-0,744	-0,075	0,125
7			Метод хорд и касательных					
8		Проверка условия :		$f(a_n)f''(a_n) =$		-2,60	< 0	
9								
10	n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f'(b_n)$	$b_n - a_n$	
11	0	-0,75	-0,625	0,57813	-0,74414	-10,82813	0,125	
12	1	-0,69535	-0,69372	0,007960	-0,00918	-10,55625	0,0016242	
13	2	-0,69459	-0,69459	0,000001	-0,000002	-10,55262	0,0000003	
14								
15		Ответ :	корень	точность				
16			-0,6946	0,0001				

Лист1 Лист2 Лист3

Готово NUM

Рисунок 1. Решение уравнений методом дихотомии и методом хорд и касательных

6) В ячейку B4 вводим формулу «=ЕСЛИ(E3*G3>0;D3;B3)» и нажимаем «Enter». Данная формула отражает следующее: если $f(a_n)$ и $f(c_n)$ одного знака, то a_n перемещаем в точку c_n. Аналогично в ячейку C4 вводим формулу «=ЕСЛИ(F3*G3>0;D3;C3)» и нажимаем «Enter». После этого получаем новый интервал, содержащий корень.

7) Выделяем блок ячеек D3:H3 и делаем протяжку на одну строку вниз. Выделяем блок ячеек A4:H4 и делаем протяжку на несколько строк вниз, пока не достигнем заданной точности (в ячейке столба H появилось число 0,125<0,2). На этом первый этап решения завершен.

2-й этап – метод хорд и касательных (см. рисунок 1).

8) Проверяем условие: $f(a) \cdot f''(a) < 0$. Для чего, находим вторую производную $f''(x) = 6 \cdot x$, и в ячейку F8 вводим формулу «=E6*6*B6». Нажимаем «Enter». Условие выполнено, следовательно, в дальнейшем используем формулы (1).

9) В ячейки B11:C11 переносим значения из ячеек B6:C6.

10) В ячейку D11 вводим формулу «=СТЕПЕНЬ(B11;3)-12*B11-8», а в ячейку E11 вводим формулу «=СТЕПЕНЬ(C11;3)-12*C11-8».

11) В ячейку F11 вводим формулу для расчета значения первой производной $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12$ в точке b_n: «=3*СТЕПЕНЬ(C11;2)-12». Нажимаем «Enter».

12) В ячейку G11 вводим формулу «=C11-B11» и нажимаем «Enter». Таким образом, находим длину интервала, содержащего корень.

13) В ячейки B12:C12 набираем реализацию формул (1) для расчета новых границ интервала: в B12 – «=B11+(C11-B11)*D11/(D11-E11)», а в C12 – «=C11-E11/F11».

14) Выделяем блок ячеек D11:G11 и делаем протяжку на одну строку вниз. Выделяем блок ячеек A12: G12 и делаем протяжку на несколько строк вниз, пока не достигнем заданной точности (в ячейке столба G появилось число 0,0000003<10^{-4}). На этом второй этап решения завершен.

Ответ: приближенный корень уравнения равен $x_1 = -0{,}6946 \pm 0{,}0001$.

§3 Задания для самостоятельного решения

Найдите действительный корень уравнения с точностью 10^{-5}, на интервале $[a,b]$. На первом этапе решения методом деления пополам, уменьшать интервал, содержащий корень, до тех пор, пока его длина не станет меньше 0,2. Потом, применить метод хорд и касательных.

1. $x+e^{x}=0$, [-1;0].

2. $\mathrm{tg}x-x=0$, [3;4,6].

3. $x-\sin x-0{,}25=0$, [0;1,5].

4. $2x-e^{-0{,}1x}=0$, [0,2;1,5].

5. $x+\ln x=0$, [0,4;1,5].

6. $x-5\ln x=0$, [0,4;1,5].

7. $x^{7}-2x^{6}+7x-8=0$, [0;2].

8. $x^{5}+x^{4}+x-1=0$, [0;1].

9. $\sin x+\cos 2x=0$, [2;4].

10. $x\,ln x-1=0$, [0,8;2].

11. $x^{3}+x-1=0$, [0,2;1,5].

12. $x^{3}-x+1=0$, [-2,0].

13. $x^{3}+x-3=0$, [0,5;2].

14. $x^{3}-5x+3=0$, [-1;0,2].

15. $x^{3}+x+1=0$, [-1;0,4].

16. $x^{3}+2x-4=0$, [1;2,2].

17. $x^{3}-3x-3=0$, [2;3,4].

18. $x^{3}+8x-6=0$, [0;1,2].

19. $x^{4}+7x+1=0$, [-1;0,2].

20. $x^{4}+5x-3=0$, [-3,3;-2].

21. $x^{4}+4x-2=0$, [0;1,5].

22. $x^{5}-9x+4=0$, [-0,3;1].

23. $9x^{3}+3x+2=0$, [-1,3;0].

24. $3x^3+6x-5=0$, [-0,1;1,2].

25. $5x^3+3x-1=0$, [-0,3;1].

26. $4x^3-6x+7=0$, [-2,3;-1].

27. $9x^3-3x^2-1=0$, [-0,1;1,3].

28. $x^3+4x-1=0$, [-0,2;1].

29. $5x^4+2x-1=0$, [0,1;1,5].

30. $2x^4-15x+3=0$, [1;2,4].

§4 Контрольные вопросы для самоподготовки

1) Зачем надо отделять корни уравнений?

2) Как аналитически отделить корень уравнения? Какие проблемы могут встретиться при аналитическом отделении корней?

3) Какие условия гарантируют единственность корня после этапа отделения корня уравнений.

4) В чем заключается геометрический смысл метода половинного деления?

5) Всегда ли позволяет метод деления пополам вычислить отделенный корень уравнения с заданной погрешностью?

6) Как выбираются концы отрезка следующего интервала в методе половинного деления?

7) Если в интервале находится несколько корней уравнения, то можно ли применить метод деления пополам и сколько корней при этом будет найдено?

8) Какими свойствами должна обладать функция $y=f(x)$, чтобы методом половинного деления можно было гарантированно решить уравнение $f(x)=0$?

9) Какие корни позволяет определить метод хорд?

10) Всегда ли метод хорд позволяет вычислить отделенный корень с заданной погрешностью?

11) В чем заключается геометрический смысл метода хорд?

12) Исходя из чего выбирается в методе Ньютона первое приближение x_0?

13) Какой конец отрезка будет "закреплен" в методе Ньютона при $f(a)\cdot f''(a)<0$?

14) В каких случаях применение метода Ньютона не рекомендуется?

15) В чем главное преимущество метода хорд и касательных по сравнению с методом хорд или методом касательных?

16) Как практически организовать программу, решающую задачу нахождения корня уравнения методом хорд и касательных, если на «отделенном» отрезке не выполняется условие монотонности и выпуклости?

Лабораторная работа № 3

«Решение систем линейных уравнений: метод итераций и метод Зейделя»

Продолжительность: 4 часа.

Цель:

1. Научиться решать системы линейных уравнений, используя алгоритмы вычислительной математики.

2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать вычислительные алгоритмы метода итераций и метода Зейделя.

2. Знать достаточные условия, позволяющие решать системы линейных уравнений методом итераций и методом Зейделя.

3. Уметь реализовать вычислительные алгоритмы решения метода итераций и метода Зейделя в MS Excel.

4. Знать правила остановки процесса вычислений.

Используемые программы:

Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор методов итерации и метода Зейделя на примере решения типового задания.

2. Самостоятельная работа: выполнение контрольного задания по теме «Решение системы линейных уравнений методом Зейделя».

Описание работы

§1 Краткие теоретические сведения

1.1 Метод итераций. Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными (только в этом случае система имеет единственное решение, которое может быть найдено методами вычислительной математики):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется всякая группа n значений неизвестных x_1, x_2, …,x_n удовлетворяющая одновременно всем уравнениям системы.

Предполагая, что диагональные коэффициенты (т. е. a_{11}, a_{22},…, a_{nn}) не равны нулю, разрешим первое уравнение системы относительно x_1, второе — относительно x_2 и т. д.

Получим систему

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n + d_2 \\ ...... \\ x_n = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + ... + c_{nn}x_n + d_n \end{cases} \qquad (2)$$

где $c_{ij} = -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ (при $i \neq j$), $c_{ii} = 0$, $d_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$, $i = 1,2,...,n,$ $j = 1,2,...,n.$

Систему (2) будем решать методом последовательных приближений (методом итераций). За нулевое приближение неизвестных $x_1, x_2,...,x_n$ примем столбец свободных членов, т. е. будем считать, что $x_1^{(0)} = d_1\, , x_2^{(0)} = d_2,..., x_n^{(0)} = d_n$. Вообще за нулевое приближение можно взять какие угодно числа, например, положить все $x_1, x_2,...,x_n$ равными нулю. Подставив $x_1^{(0)} = d_1\, , x_2^{(0)} = d_2,..., x_n^{(0)} = d_n$ вместо $x_1, x_2,...,x_n$ в правую часть системы (2) . Получим первое приближение $x_1^{(1)}, x_2^{(1)},..., x_n^{(1)}$. Затем $x_1^{(1)}, x_2^{(1)},..., x_n^{(1)}$ подставим в правую часть системы (2), получим второе приближение и т. д

Этот процесс следует закончить тогда, когда в двух последовательных приближениях совпадет столько знаков, сколько требует нужная нам точность. Численный метод, в котором производится последовательное шаг за шагом уточнение первоначального, грубого приближения, называется методом итераций, а каждый шаг в таком методе - итерацией.

Достаточное условие сходимости. Для системы (1) процесс итераций сходится, если $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.

1.2 Метод Зейделя очень похож на рассмотренный выше метод итераций. Достаточные условия сходимости метода Зейделя — те же, что и для метода итераций. Рассматриваем систему (2). За нулевое приближение неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ примем столбец свободных членов, т. е. будем считать, что $x_1^{(0)} = d_1, x_2^{(0)} = d_2, ..., x_n^{(0)} = d_n$. Подставим в правую часть первого уравнения вместо $x_1, x_2, ..., x_n$ значения $x_1^{(0)} = d_1, x_2^{(0)} = d_2, ..., x_n^{(0)} = d_n$ и вычислим значение $x_1^{(1)}$. Во второе же уравнение вместо $x_3, x_4, \ldots, x_n$ будем подставлять $d_3, d_4, \ldots, d_n$, а вместо x_1 будем подставлять не d_1, а только что полученное из первого уравнения значение $x_1^{(1)}$. Получим $x_2^{(1)}$. В третье уравнение будем подставлять значения $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$, полученные из первых двух уравнений, и $d_4, \ldots, d_n$ и т. д. Таким образом, получим первое приближение $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}$. Второе приближение получается из первого также как первое приближение получено из нулевого. Продолжая этот процесс до тех пор, пока в двух последовательных приближениях не совпадет столько знаков, сколько их требуется в соответствии с заранее заданной точностью, придем к искомому приближенному решению системы (2), а следовательно и приближенному решению системы (1).

§2 Решение типового задания

Задача. Решить систему уравнений методом Зейделя. Продолжать итерации до тех пор, пока точность приближенного решения не станет меньше 0,001.

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 - 0{,}16 \cdot x_2 + 0{,}08 \cdot x_3 = 16 \\ 0{,}6 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0{,}09 \cdot x_3 = 6 \\ 0{,}2 \cdot x_1 - 0{,}6 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 12 \end{cases}$$

Решение. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel. Искомое решение приведено на рисунке 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Исходная система линейных уравнений					Проверка достаточного условия			
2	x_1	x_2	x_3	b					
3	4	-0,16	0,08	16		4	>	0,24	верно
4	0,6	3	0,09	6		3	>	0,69	верно
5	0,2	-0,6	-2	12		2	>	0,8	верно
6	Преобразованная система линейных уравнений X=CX+D								
7	x_1	x_2	x_3	d					
8	0	0,04	-0,02	4					
9	-0,2	0	-0,03	2					
10	0,1	-0,3	0	-6					
11	Решение							Ответ:	
12	x_1	0	4	4,20	4,18	4,17	4,17	x_1=	4,17
13	x_2	0	2	1,38	1,35	1,34	1,34	x_2=	1,34
14	x_3	0	-6	-6,20	-5,99	-5,99	-5,99	x_3=	-5,99

Рисунок 1. Решение системы линейных уравнений методом итераций.

Пояснение к решению.

1-й этап. Сначала проверяем выполнение достаточного условия.

1) В ячейках A1:H2 вводим поясняющий текст.

2) В ячейках A3:D5 вводим коэффициенты системы и свободные члены.

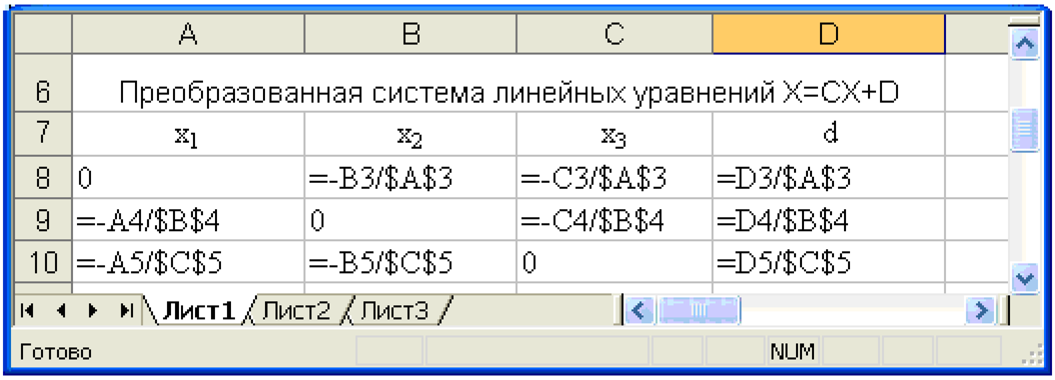
3) Проверяем выполнение достаточного условия. В ячейку F3 вводим «=ABS(A3)», а в ячейку H3 вводим формулу «=ABS(B3)+ABS(C3)». Аналогично, в ячейку F4 вводим «=ABS(B4)», а в ячейку H4 вводим формулу «=ABS(A4)+ABS(C4)», в ячейку F5 вводим «=ABS(C5)», а в ячейку H5 вводим формулу «=ABS(A5)+ABS(B5)». Видим, что достаточное условие $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ выполнено.

2-й этап. Находим решение методом итераций.

4) Переходим к преобразованной системе (2) по формулам:

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \quad (\text{при } i \neq j), \quad c_{ii} = 0, \quad d_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

В диапазон ячеек A8:D10 вводим соответствующие формулы (см. рисунок 2)



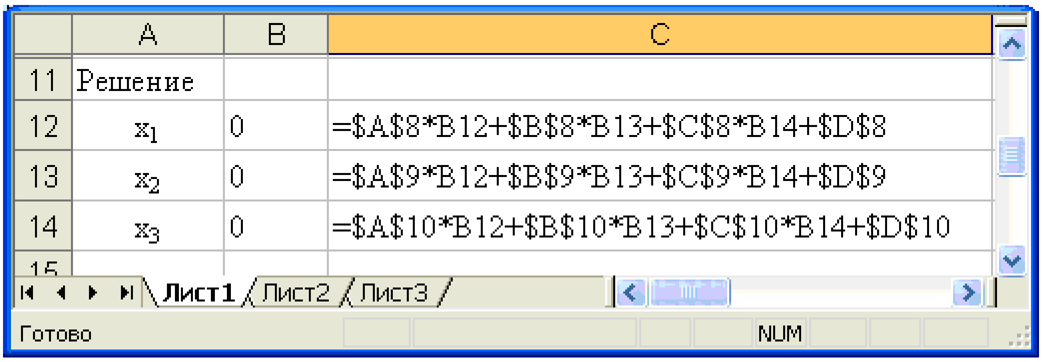
	A	B	C	D
6	Преобразованная система линейных уравнений X=CX+D			
7	x_1	x_2	x_3	d
8	0	=-B3/$A$3	=-C3/$A$3	=D3/$A$3
9	=-A4/$B$4	0	=-C4/$B$4	=D4/$B$4
10	=-A5/$C$5	=-B5/$C$5	0	=D5/$C$5

Рисунок 2. Ввод формул для правой части преобразованной системы X=CX+D.

5) В ячейках A12:A14 вводим поясняющий текст. В ячейках B12:B14 вводим начальные условия (все нули).

6) В ячейках A12:A14 вводим поясняющий текст. В ячейках B12:B14 вводим начальные условия (все нули).

7) Расчетные формулы вводим в диапазон ячеек C12:C14 (см. рисунок 3). Знак «$» ставим для того, чтобы при протяжке ссылки на соответствующие ячейки не изменялись. Нажимаем «Enter». В ячейках высвечиваются значения первого приближения.



	A	B	C
11	Решение		
12	x_1	0	=$A$8*B12+$B$8*B13+$C$8*B14+$D$8
13	x_2	0	=$A$9*B12+$B$9*B13+$C$9*B14+$D$9
14	x_3	0	=$A$10*B12+$B$10*B13+$C$10*B14+$D$10

Рисунок 3. Ввод формул метода итераций.

8) Выделяем ячейки C12:C14 и делаем протяжку вправо, до тех пор, пока не достигнем заданную точность (0,01): в ячейках F12:F14 и G12:G14 с точностью до двух десятичных чисел значения совпадают (см. рисунок 1).

9) Выписываем ответ: $x_1 = 4{,}17$; $x_2 = 1{,}34$; $x_3 = -5{,}99$.

§3 Задания для самостоятельного решения

Решить систему уравнений методом Зейделя. Продолжать итерации до тех пор, пока точность приближенного решения не станет меньше 0,005.

1) $10x_1+x_2+x_3=12$
$2x_1+10x_2+x_3=13$
$2x_1+2x_2+10x_3=14$

2) $4x_1+0{,}24x_2-0{,}08x_3=8$
$0{,}09x_1+3x_2-0{,}15x_3=9$
$0{,}04x_1-0{,}08x_2+4x_3=20$

3) $4x_1-x_2+x_3=4$
$x_1+6x_2+2x_3=9$
$-x_1-2x_2+5x_3=2$

4) $4x_1-x_2-x_3=-3$
$3x_1+5x_2-x_3=1$
$x_1-4x_2+10x_3=0$

5) $10x_1+2x_2+6x_3=28$
$x_1+10x_2+8x_3=7$
$2x_1-7x_2-10x_3=-17$

6) $8{,}6x_1+0{,}3x_2+2{,}4x_3=2{,}9$
$1{,}2x_1+9{,}1x_2+4{,}6x_3=9{,}7$
$-1{,}3x_1+0{,}8x_2+5{,}8x_3=-0{,}4$

7) $20x_1+2x_2+6x_3=38$
$x_1+20x_2+9x_3=-23$
$2x_1-7x_2-20x_3=-57$

8) $x_1-0{,}2x_2-0{,}2x_3=0{,}6$
$-0{,}1x_1+x_2-0{,}2x_3=0{,}7$
$-0{,}1x_1-0{,}1x_2+x_3=0{,}8$

9) $5x_1+0{,}5x_2+0{,}5x_3=6$
$x_1+5x_2+0{,}5x_3=6{,}5$
$x_1+x_2+5x_3=7$

10) $7{,}6x_1+0{,}5x_2+2{,}4x_3=1{,}9$
$2{,}2x_1+9{,}1x_2+4{,}4x_3=9{,}7$
$-1{,}3x_1+0{,}2x_2+5{,}8x_3=-1{,}4$

11) $x_1+0{,}1x_2+0{,}1x_3=1{,}2$
$0{,}2x_1+x_2+0{,}1x_3=1{,}3$
$0{,}2x_1+0{,}2x_2+x_3=1{,}4$

12) $2x_1+0{,}12x_2-0{,}04x_3=4$
$0{,}03x_1+x_2-0{,}05x_3=3$
$0{,}01x_1-0{,}02x_2+x_3=5$

13) $2x_1-0{,}5x_2+0{,}5x_3=2$

$0{,}5x_1+3x_2+x_3=4{,}5$

$-2x_1-4x_2+10x_3=4$

15) $10x_1+4x_2+x_3=10$

$-2x_1+10x_2-x_3=11$

$2x_1+4x_2+10x_3=14$

17) $14x_1-7x_2+x_3=4$

$-3x_1+6x_2+2x_3=9$

$-2x_1-2x_2+5x_3=9$

19) $10x_1+2x_2+6x_3=18$

$-2x_1+10x_2+8x_3=7$

$2x_1-4x_2-10x_3=-11$

21) $20x_1+5x_2+6x_3=18$

$-2x_1+20x_2+9x_3=23$

$2x_1-7x_2-20x_3=-22$

23) $5x_1+0{,}5x_2+0{,}7x_3=16$

$3x_1+5x_2+0{,}5x_3=8{,}5$

$2x_1+x_2+5{,}4x_3=7{,}1$

25) $7x_1+0{,}1x_2+5{,}1x_3=1{,}2$

$1{,}2x_1+2x_2+0{,}1x_3=1{,}3$

$0{,}2x_1+2{,}2x_2+3x_3=1{,}4$

27) $21x_1-7{,}5x_2+9{,}5x_3=2$

$6{,}5x_1+31x_2+x_3=14{,}5$

$-6x_1-2x_2+10x_3=4$

14) $4x_1-2x_2-x_3=-6$

$1{,}5x_1+2{,}5x_2-0{,}5x_3=0{,}5$

$0{,}25x_1-x_2+2{,}5x_3=0$

16) $5x_1+0{,}24x_2-0{,}8x_3=8$

$0{,}9x_1+4x_2-0{,}15x_3=9$

$0{,}8x_1-0{,}8x_2+4x_3=10$

18) $12x_1-x_2+6x_3=-3$

$3x_1+5x_2-x_3=11$

$3x_1-4x_2+10x_3=0$

20) $8x_1+0{,}3x_2+2{,}4x_3=3{,}9$

$1{,}7x_1+9{,}1x_2+4{,}2x_3=7{,}7$

$-1{,}3x_1+0{,}8x_2+4{,}8x_3=-1{,}4$

22) $5x_1-0{,}2x_2-0{,}9x_3=0{,}6$

$-0{,}6x_1+4x_2-0{,}2x_3=0{,}8$

$-0{,}1x_1-0{,}2x_2+x_3=1{,}8$

24) $9{,}6x_1+3{,}5x_2+2{,}4x_3=1{,}7$

$4{,}2x_1+9{,}1x_2-4{,}4x_3=9{,}7$

$-1{,}3x_1+0{,}9x_2+5{,}8x_3=-1{,}4$

26) $13x_1+5{,}12x_2-0{,}4x_3=4{,}5$

$0{,}3x_1+3x_2-0{,}5x_3=13$

$0{,}1x_1-0{,}2x_2+4x_3=5{,}5$

28) $8x_1-2x_2-3x_3=-16$

$1{,}5x_1+4{,}5x_2-1{,}5x_3=1{,}5$

$1{,}5x_1-x_2+3{,}5x_3=0$

29) $3x_1+x_2+x_3=2$

$2x_1+6x_2-x_3=1$

$2x_1-2x_2+7x_3=0,5$

30) $4,7x_1+0,24x_2-3,08x_3=8,1$

$0,9x_1+3,7x_2-1,5x_3=9,3$

$2,4x_1-0,8x_2+4,3x_3=2,6.$

§4 Контрольные вопросы для самоподготовки

1) В чем основное отличие точных и приближенных методов решения систем линейных уравнений?
2) Каким методом лучше всего решать систему уравнений невысокого порядка, например третьего?
3) В каких случаях предпочтительны итерационные методы решения систем линейных уравнений?
4) От чего зависит скорость сходимости метода итераций?
5) Сформулируйте условия сходимости метода итераций. Метода Зейделя.
6) Можно ли заранее оценить число итераций для получения решения с заданной погрешностью?
7) Как влияет вычислительная ошибка на точность решения системы уравнений методом итераций?
8) Какое вы знаете правило окончания вычислительного процесса по методу итераций?

Лабораторная работа № 4

«Решение систем линейных уравнений: метод Гаусса»

Продолжительность: 4 часа.

Цель:

1. Научиться решать системы линейных уравнений, используя алгоритмы метода Гаусса.
2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать вычислительные алгоритмы метода Гаусса.

2. Уметь реализовать вычислительные алгоритмы решения систем линейных уравнений методом Гаусса в MS Excel.

3. Знать «слабые места» метода Гаусса при его реализации на ЭВМ.

Используемые программы: Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор метода Гаусса на примере решения типового задания.

2. Самостоятельная работа: выполнение контрольного задания по теме «решение системы линейных уравнений методом Гаусса».

Описание работы

§1 Краткие теоретические сведения

1.1 Схема единственного деления. Рассмотрим сначала простейший вариант метода Гаусса, называемый схемой единственного деления.

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

Решением системы (1) называется всякая группа n значений неизвестных x_1, x_2, …,x_n удовлетворяющая одновременно всем уравнениям системы.

<u>**Прямой ход**</u> состоит из $n - 1$ шагов исключения.

<u>1-й шаг.</u> Целью этого шага является исключение неизвестного x_1 из уравнений с номерами i =2, 3, …, n. Предположим, что коэффициент $a_{11} \neq 0$. Будем называть его главным элементом 1-го шага. Найдем величины

$$q_{i1} = a_{i1}/a_{11} \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

называемые множителями 1-го шага. Вычтем последовательно из второго, третьего,…, n-го уравнений системы первое уравнение, умноженное соответственно на q_{21}, q_{31}, ..., q_{n1}. Это позволит обратить в нуль коэффициенты при x_1 во всех уравнениях, кроме первого. В результате получим эквивалентную систему

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1\,,$$
$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}\,,$$
$$a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)}\,,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}\,.$$

в которой $a_{ij}^{(1)}$ и $b_{ij}^{(1)}$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - q_{i1}a_{1j} \quad , \quad b_i^{(1)} = b_i - q_{i1}b_1.$$

2-й шаг. Целью этого шага является исключение неизвестного x_2 из уравнений с номерами i = 3, 4, …, n. Пусть $a_{22}^{(1)} \neq 0$, где $a_{22}^{(1)}$ – коэффициент, называемый главным (или ведущим) элементом 2-го шага. Вычислим множители 2-го шага

$$q_{i2} = a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)} \quad (i = 3, 4, \ldots, n)$$

и вычтем последовательно из третьего, четвертого, …, n-го уравнения системы второе уравнение, умноженное соответственно на q_{32}, q_{42}, …, q_{m2}. В результате получим систему

$$\begin{array}{rcll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 & ,\\
a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} & ,\\
a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} & ,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\
a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)} & .
\end{array}$$

Здесь коэффициенты $a_{ij}^{(2)}$ и $b_{ij}^{(2)}$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - q_{i2}a_{2j}^{(1)} \quad , \quad b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - q_{i2}b_2^{(1)}.$$

Аналогично проводятся остальные шаги. Опишем очередной k-й шаг.

k-й шаг. В предположении, что главный (ведущий) элемент k-го шага $a_{\mathrm{kk}}^{(\mathrm{k}-1)}$ отличен от нуля, вычислим множители k-го шага

$$q_{ik} = a_{ik}^{(k-1)} / a_{kk}^{(k-1)} \quad (i = k + 1, \ldots, n)$$

и вычтем последовательно из (k + 1)-го, …, n-го уравнений полученной на предыдущем шаге системы k-е уравнение, умноженное соответственно на $\mathrm{q}_{k+1,k}$, $\mathrm{q}_{k+2,\mathrm{k}}$, …, q_{nk}. Здесь коэффициенты $a_{ij}^{(k)}$ и $b_{ij}^{(k)}$ вычисляются по формулам

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - q_{ik}a_{kj}^{(k-1)} \quad , \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - q_{ik}b_k^{(k-1)}.$$

После (n - 1)-го шага исключения получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \quad ,\\
&\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \quad ,\\
&\qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \quad ,\\
&. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\
&\qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \quad .
\end{aligned}$$

матрица $\boldsymbol{A}^{(n-1)}$ которой является верхней треугольной.

На этом вычисления прямого хода заканчиваются.

Обратный ход. Из последнего уравнения системы находим x_n. Подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение, получим x_{n-1}. Осуществляя обратную подстановку, далее последовательно находим x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_1. Вычисления неизвестных здесь проводятся по формулам

$$x_n = b_n^{(n-1)} / a_{nn}^{(n-1)},$$

$$x_k = (b_k^{(n-1)} - a_{k,k+1}^{(n-1)}x_{k+1} - \ldots - a_{kn}^{(n-1)}x_n) / a_{kk}^{(n-1)}, (k = n - 1, \ldots, 1).$$

1.2 Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора). Заметим, что вычисление множителей, а также обратная подстановка требуют деления на главные элементы $a_{kk}^{(k-1)}$. Поэтому, если один из главных элементов оказывается равным нулю, то схема единственного деления не может быть реализована. Эта ситуация исключается в методе Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, суть которого состоит в следующем.

На 1-м шаге метода среди элементов a_{ij} определяют максимальный по модулю элемент $a_{i_1 j_1}$. Первое уравнение системы и уравнение с номером i_1 меняют местами. Далее стандартным образом производят исключение неизвестного x_{i_1} из всех уравнений, кроме первого. На k-м шаге метода среди коэффициентов $a_{ij}^{(k-1)}$ при неизвестных в уравнениях системы с номерами $i = k$, …, n выбирают максимальный по модулю коэффициент $a_{i_k j_k}^{(k-1)}$. Затем k-е уравнение и уравнение, содержащее найденный коэффициент, меняют местами и исключают неизвестное x_{j_k} из уравнений с номерами $i = k + 1, \ldots, n$. На этапе обратного хода неизвестные вычисляют в следующем порядке:

$$x_{j_n},\ x_{j_{n-1}},\ \ldots,\ x_{j_1}.$$

§2 Решение типового задания

Задача. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases} .$$

Решение. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel. Искомое решение приведено на рисунке 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Прямой ход								
2	x_1	x_2	x_3	b		x_1	x_2	x_3	b
3	1	1	1	4		1	1	1	4
4	2	3	1	9	~	0	1	-1	1
5	1	-1	-1	-2		0	-2	-2	-6
6									
7	x_1	x_2	x_3	b					
8	1	1	1	4					
9	0	1	-1	1					
10	0	0	-4	-4					
11	Обратный ход								
12				x_1	x_2	x_3			
13		Ответ:		1	2	1			

Метод Гаусса / Лист2 / Лист3

Готово NUM

Рисунок 1. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса.

Пояснение к решению.

Прямой ход.

1) В ячейках A2:D2 вводим поясняющий текст.

2) В ячейках A3:D5 вводим коэффициенты системы и свободные члены.

3) Переходим к эквивалентной системе. Первое уравнение оставляем без изменения: в ячейку F3 вводим формулу «=A3», выделяем ячейку F3 и делаем протяжку до I3. Исключаем переменную x_1 из второго уравнения: в ячейку F4

вводим формулу «=A4-$A$4*A3/$A$3», выделяем ячейку F4 и делаем протяжку до I4. Исключаем переменную x_1 из третьего уравнения: в ячейку F5 вводим формулу «=A5-$A$5*A3/$A$3», выделяем ячейку F5 и делаем протяжку до I5.

4) Переходим к следующей эквивалентной системе. Первое уравнение оставляем без изменения: в ячейку A8 вводим формулу «=F3», выделяем ячейку A8 и делаем протяжку до D8. Второе уравнение оставляем без изменения: в ячейку A9 вводим формулу «=F4», выделяем ячейку A9 и делаем протяжку до D9. Исключаем переменную x_2 из третьего уравнения: в ячейку A10 вводим формулу «=F5-$G$5*F4/$G$4», выделяем ячейку A10 и делаем протяжку до D10. Получаем систему треугольного вида. Прямой ход завершен.

Обратный ход. Находим решение исходной системы.

5) В ячейках D12:F12 вводим поясняющий текст.

6) В ячейку F13 вводим формулу «=D10/C10» и нажимаем «Enter».

7) В ячейку E13 вводим формулу «=(D9-C9*F13)/B9» и нажимаем «Enter».

8) В ячейку D13 вводим формулу «=(D8-C8*F13-B8*E13)/A8» и нажимаем «Enter».

9) В ячейках D13:F13 высвечивается решение системы.

§3 Задания для самостоятельного решения

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

1) $x_1+x_2+x_3=2$
$2x_1-x_2-6x_3=2$
$3x_1-2x_2=8$

2) $3x_1-x_2+x_3=4$
$2x_1-5x_2-3x_3=-17$
$x_1+x_2-x_3=0$

3) $3x_1-x_2=5$
$-2x_1+x_2+x_3=0$
$2x_1-x_2+4x_3=15$

4) $x_1+x_2+2x_3=-1$
$2x_1-x_2+2x_3=-4$
$4x_1+x_2+4x_3=-2$

5) $2x_1-x_2-x_3=4$
$3x_1-4x_2-2x_3=11$
$3x_1-2x_2+4x_3=11$

6) $4x_1-3x_2+2x_3=9$
$2x_1+5x_2-3x_3=4$
$5x_1+6x_2-2x_3=18$

7) $x_1+2x_2+4x_3=31$
$5x_1+x_2+2x_3=29$
$3x_1-x_2+x_3=10$

8) $3x_1+2x_2+x_3=5$
$2x_1+3x_2+x_3=1$
$2x_1+x_2+3x_3=11$

9) $x_1+2x_2+x_3=4$
$3x_1-5x_2+3x_3=1$
$2x_1+7x_2-x_3=8$

10) $5x_1+8x_2-x_3=-7$
$x_1+2x_2+3x_3=1$
$2x_1-3x_2+2x_3=9$

11) $11x_1+3x_2-x_3=2$
$2x_1+5x_2-5x_3=0$
$x_1+x_2+x_3=2$

12) $x_1+5x_2-x_3=7$
$2x_1-x_2-x_3=4$
$3x_1-2x_2+4x_3=11$

13) $x_1-x_2=4$
$2x_1+3x_2+x_3=1$
$2x_1+x_2+3x_3=11$

14) $2x_1+x_2+4x_3=20$
$2x_1-x_2-3x_3=3$
$3x_1+4x_2-5x_3=-8$

15) $2x_1-x_2+3x_3=7$
$x_1+3x_2-2x_3=0$
$2x_2-x_3=2$

16) $3x_1+4x_2+2x_3=8$
$2x_1-x_2-3x_3=-1$
$x_1+5x_2+x_3=0$

17) $x_1+x_2+x_3=12$
$2x_1-x_2-6x_3=-2$
$3x_1-2x_2=8$

18) $3x_1-x_2+x_3=6$
$2x_1-5x_2-3x_3=-7$
$x_1+x_2-x_3=0$

19) $3x_1-x_2=15$
$-2x_1+x_2+x_3=10$
$2x_1-x_2+4x_3=5$

20) $x_1+x_2+2x_3=-11$
$2x_1-x_2+2x_3=-4,5$
$4x_1+x_2+4x_3=2$

21) $2x_1-x_2-x_3=4,9$
$3x_1-4x_2-2x_3=1,1$
$3x_1-2x_2+4x_3=4,1$

22) $4x_1-3x_2+2x_3=9,8$
$2x_1+5x_2-3x_3=-5$
$5x_1+6x_2-2x_3=1$

23) $x_1+2x_2+4x_3=4,1$
$5x_1+x_2+2x_3=2,9$
$3x_1-x_2+x_3=-6$

24) $3x_1+2x_2+x_3=-5$
$2x_1+3x_2+x_3=1,9$
$2x_1+x_2+3x_3=13$

25) $x_1+2x_2+x_3=16$
$3x_1-5x_2+3x_3=-9$
$2x_1+7x_2-x_3=7$

26) $5x_1+8x_2-x_3=-17$
$x_1+2x_2+3x_3=2,5$
$2x_1-3x_2+2x_3=5,9$

27) $11x_1+3x_2-x_3=9$
$2x_1+5x_2-5x_3=3$
$x_1+x_2+x_3=8$

28) $x_1+5x_2-x_3=5,6$
$2x_1-x_2-x_3=3,5$
$3x_1-2x_2+4x_3=1,1$

29) $x_1-x_2+x_3=4,9$
$2x_1+3x_2+x_3=11$
$2x_1-x_2+3x_3=13$

30) $2x_1+x_2+4x_3=13$
$2x_1-x_2-3x_3=11$
$3x_1+4x_2-5x_3=-7$

Задание №2.

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице (схема полного выбора)**.**

§4 Контрольные вопросы для самоподготовки

1) В чем состоит сущность прямого хода метода Гаусса?
2) Какие системы называются эквивалентными?
3) Является ли метод Гаусса самоисправляющимся?
4) Что вы можете сказать о вычислительной погрешности метода Гаусса при увеличении числа уравнений в системе? Как оценить эту погрешность?
5) Каким образом в методе Гаусса можно контролировать накопление вычислительных ошибок?
6) К точным или приближенным методам относится метод Гаусса?

Лабораторная работа № 5

«Интерполирование функций: формула Лагранжа»

Продолжительность: 2 часа.

Цель:

1. Научиться интерполировать функции, используя вычислительный алгоритм приближения методом Лагранжа.
2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать постановку задачи интерполирования и экстраполирования.
2. Знать вычислительный алгоритм метода Лагранжа.
3. Уметь оценивать погрешность результата.
4. Уметь реализовать вычислительный алгоритм метода Лагранжа в MS Excel.

Используемые программы:

Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор вычислительного алгоритма метода Лагранжа, решение типового задания.

2. Самостоятельная работа: решение контрольного задания по теме «Интерполирование функций: формула Лагранжа».

Описание работы

§1 Краткие теоретические сведения

1.1 Общая задача интерполирования заключается в следующем. На отрезке $[a,b]$ заданы $n+1$ точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые называются узлами интерполяции и заданы значения некоторой функции в этих точках $y_i = f(x_i), \quad i = \overline{0,n}$. Требуется построить функцию $F(x)$, принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и $f(x)$, т.е. такую, что $F(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$. Геометрически это означает, что нужно найти кривую, определенного типа, проходящую через заданные точки $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, … , $M_n(x_n, y_n)$. Можно построить бесчисленное множество непрерывных функций, графики которых будут проходить через заданные узловые точки, т.е. в такой общей постановке задача может иметь бесчисленное множество решений.

Однако, эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать многочлен $P_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий условиям: $y_0=P_n(x_0)$, $y_1=P_n(x_1)$, … , $y_n=P_n(x_n)$.

1.2 Интерполяционная формула Лагранжа

Формула Лагранжа может быть применена для произвольно заданных узлов интерполирования. Идея этого метода состоит в том, чтобы, прежде всего, найти многочлен, который принимает значение 1 в одной узловой точке и 0 во всех других. Легко видеть, что функция

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

является требуемым многочленом степени n; он равен 1, если $x=x_k$ и 0, когда $x=x_i,\ i\neq k$. Из этого следует, что

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k \cdot L_k(x)$$

есть многочлен степени n, проходящий через заданные $n+1$ точку $(x_0,\ y_0)$, $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,\ y_n)$.

Для вычисления лагранжевых коэффициентов удобно использовать приведенную ниже схему

k	x_k-x_i $(i\neq k)$	D_k	y_k	y_k/D_k
0	$\underline{(x-x_0)}\,(x_0-x_1)\ldots\,(x_0-x_n)$	D_0	y_0	y_0/D_0
1	$(x_1-x_0)\,\underline{(x-x_1)}\ldots\,(x_1-x_n)$	D_1	y_1	y_1/D_1
…				
n	$(x_n-x_0)\,(x_n-x_1)\ldots\,\underline{(x-x_n)}$	D_n	y_n	y_n/D_n
	$G_{n+1}(x)$			$\sum y_k/D_k$

здесь D_k — произведение элементов k-ой строки; $G_{n+1}(x)$ — произведение элементов главной диагонали (элементы подчеркнуты). Полином Лагранжа вычисляется так:

$$P_n(x) = G_{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{y_k}{D_k}.$$

§2 Решение типового задания

Найти приближенно значение функции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа при значении x=0,332:

$к$	x	y
0	0,15	6,61659
1	0,21	4,69170
2	0,29	3,35106
3	0,35	2,73951

Решение. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel. Искомое решение приведено на рисунке 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Интерполирование функций: Метод Лагранжа								
2	$к$	x_k	y_k	x_k-x_i ($i \neq k$)				D_k	y_k / D_k
3	0	0,15	6,61659	0,182	-0,06	-0,14	-0,2	-0,000306	-21639,82
4	1	0,21	4,69170	0,06	0,122	-0,08	-0,14	0,000082	57227,02
5	2	0,29	3,35106	0,14	0,08	0,042	-0,06	-0,000028	-118730,9
6	3	0,35	2,73951	0,2	0,14	0,06	-0,018	-0,000030	-90592,26
7									
8	x =	0,332		$\sum y_k$ / D_k =	-173735,92				
9				$G_{n+1}(x)$ =	-0,000017				
10			Ответ:	F(0,332) =	2,91637				

Метод Лагранжа / Лист2 / Лист3

Готово NUM

Рисунок 1 Интерполирование функций: метод Лагранжа

Пояснение к решению:

1) В ячейках A1:I2 вводим поясняющий текст.

2) Вводим значения и формулы в ячейки B3:G6 как показано на рисунке 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Интерполирование функций: Метод Лагранжа								
2	$к$	$x_к$	$y_к$	$x_к - x_i \quad (i \neq k)$				D_k	y_k / D_k
3	0	0,15	6,61659	=B8-B3	=B3-B4	=B3-B5	=B3-B6	=D3*E3*F3*G3	=C3/H3
4	1	0,21	4,6917	=B4-B3	=B8-B4	=B4-B5	=B4-B6	=D4*E4*F4*G4	=C4/H4
5	2	0,29	3,35106	=B5-B3	=B5-B4	=B8-B5	=B5-B6	=D5*E5*F5*G5	=C5/H5
6	3	0,35	2,73951	=B6-B3	=B6-B4	=B6-B5	=B8-B6	=D6*E6*F6*G6	=C6/H6
7									
8	$x =$	0,332		$\sum y_к / D_к =$	=СУММ(I3:I6)				
9				$G_{n+1}(x) =$	=D3*E4*F5*G6				
10			Ответ:	$F(0{,}332) =$	=E8*E9				
11									

Метод Лагранжа / Лист2 / Лист3

Готово NUM

Рисунок 2. Ввод расчетных формул.

3) В ячейку H3 вводим формулу «=D3*E3*F3*G3» и нажимаем «Enter». Выделяем ячейку H3 и делаем протяжку до ячейки H6.

4) В ячейку I3 вводим формулу «=C3/H3» и нажимаем «Enter». Выделяем ячейку I3 и делаем протяжку до ячейки I6. В ячейках высвечиваются численные значения.

5) Вводим формулы в ячейки E8:E10, как показано на рисунке 2.

6) Ответ: $F(0{,}332) = 2{,}91637$.

§3 Задания для самостоятельного решения

Найти приближенное значение функции с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа при заданном значении аргумента.

1)

$к$	x	y
0	0,21	4,69170
1	0,29	3,35106
2	0,35	2,73951
3	0,40	2,36522

примеры	Значение аргумента
№ 1	0,235
№ 2	0,385
№ 3	0,317
№ 4	0,332

2)

к	*x*	*y*
0	0,46	2,32513
1	0,52	2,59336
2	0,60	1,86263
3	0,65	1,74926

примеры	Значение аргумента
№ 5	0,478
№ 6	0,616
№ 7	0,537
№ 8	0,642

3)

к	*x*	*y*
0	0,35	2,73951
1	0,41	2,30080
2	0,47	1,96864
3	0,51	1,78776

примеры	Значение аргумента
№ 9	0,356
№ 10	0,482
№11	0,436
№12	0,453

4)

к	*x*	*y*
0	0,73	0,89492
1	0,80	1,02964
2	0,88	1,20966
3	0,93	1,34084

примеры	Значение аргумента
№13	0,740
№14	0,900
№15	0,812
№16	0,850

5)

к	*x*	*y*
0	0,80	1,02964
1	0,88	1,20966
2	0,93	1,34087
3	0,96	1,52368

примеры	Значение аргумента
№17	0,815
№18	0,955
№19	0,874
№20	0,896

6)

к	x	y
0	0,31	7,60170
1	0,39	6,35106
2	0,42	5,73751
3	0,44	5,36522

варианты	Значение аргумента
№ 21	0,335
№ 22	0,385
№ 23	0,417
№ 24	0,432

7)

к	x	y
0	0,36	9,34503
1	0,42	9,58336
2	0,46	9,84263
3	0,51	9,94326

варианты	Значение аргумента
№ 25	0,365
№ 26	0,415
№ 27	0,468
№ 28	0,518

8)

к	x	y
0	0,76	7,22503
1	0,82	7,48336
2	0,86	7,74263
3	0,91	7,84326

варианты	Значение аргумента
№ 29	0,768
№ 30	0,879

§4 Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Полиномом какой степени является интерполяционный полином Лагранжа при 7 узлах?
2. Может ли метод Лагранжа применяться для экстраполяции?
3. Что влияет на точность интерполяции в методе Лагранжа?
4. Можно ли добавлять новые узлы интерполяции при использовании метода Лагранжа?
5. Можно ли располагать узлы интерполяции произвольно при использовании

метода?

6. К какому классу функций относится функция, задаваемая интерполяционной формулой Лагранжа?
7. Как повлияет дополнительная точка исходных данных внутри отрезка $[x_0,x_n]$ на точность интерполяции?
8. Чему равна погрешность интерполяции в узле?
9. Как влияет количество узлов интерполяции на точность интерполяции?
10. Каким путем в общем случае можно повысить точность интерполяции?

Лабораторная работа № 6

«Интерполирование функций: формулы Ньютона»

Продолжительность: 4 часа.

Цель:

1. Научиться интерполировать функции, используя вычислительные алгоритмы приближения методом Ньютона.
2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать постановку задачи интерполирования и экстраполирования.
2. Знать вычислительные алгоритмы метода Ньютона, и ограничение связанное с применением этого метода.
3. Уметь оценивать погрешность результата.
4. Уметь реализовать вычислительные алгоритмы метода Ньютона в MS Excel.

Используемые программы: Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор вычислительных алгоритмов метода Ньютона, решение типового задания.

2. Самостоятельная работа: решение контрольного задания по теме «Интерполирование функций: формулы Ньютона».

Описание работы

§1. Краткие теоретические сведения.

1.1 Общая задача интерполирования заключается в следующем. На отрезке $[a,b]$ заданы $n+1$ точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$, которые называются узлами интерполяции и заданы значения некоторой функции в этих точках $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Требуется построить функцию $F(x)$, принадлежащую известному классу и принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и *f(x),* т.е. такую, что $F(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$. Геометрически это означает, что нужно найти кривую, определенного типа, проходящую через заданные точки $M_0(x_0,y_0)$, $M_1(x_1,y_1)$, … , $M_n(x_n,y_n)$. Можно построить бесчисленное множество непрерывных функций, графики которых будут проходить через заданные узловые точки.

Однако, эта задача становится однозначной, если вместо произвольной функции $F(x)$ искать многочлен $P_n(x)$ степени не выше *n*, удовлетворяющий условиям: $y_0=P_n(x_0)$, $y_1=P_n(x_1)$, … , $y_n=P_n(x_n)$.

1.2 Конечные (разделенные) разности. Пусть известны значения функции $y=f(x)$ в точках x_i (i=0,1,2,...): $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$,.... Выделим всевозможные пары соседних значений: (y_0, y_1), (y_1, y_2), (y_2, y_3)…, и в каждом случае вычтем предыдущее значение из последующего, получим разности:
$y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$, ... Эти разности называются конечными разностями первого порядка (первые разности) и обозначаются $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots)$.
Разностями второго порядка (вторые разности), называют разности первых разностей и обозначают их через $\Delta^2 y_i$: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots)$. Разности $(k+1)$-го порядка получаются из разностей k-го порядка по формулам: $\Delta^{k+1} y_i = \Delta^k y_{i+1} - \Delta^k y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots)$.

Таблица разностей различных порядков строится согласно схеме

k	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
1	x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
2	x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$		
3	x_3	y_3	Δy_3			
4	x_4	y_4				

1.3 Интерполяционные формулы Ньютона

Пусть для функции $y=f(x)$ заданы значения $y_k= f(x_k)$ в равноотстоящих точках $x_k=x_0+hk$, k=0,1,2,…, где h– шаг интерполяции. Требуется построить полином $P_n(x)$ степени не выше n, значения которого в узлах интерполяции совпадают со значениями функции в этих точках.

Для решения этой задачи можно использовать интерполяционные формулы Ньютона.

а) Интерполяционная формула Ньютона для «интерполирования вперед»:

$$P_m^I(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-m+1)}{m!}\Delta^m y_0$$

где $q=(x-x_0)/h$.

Эта формула удобна при интерполировании функций для значений x, близких к наименьшему узлу x_0.

б) Интерполяционная формула Ньютона для «интерполирования назад»:

$$P_m^{II}(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+m-1)}{m!}\Delta^{n-m} y_{n-m}$$

где $q=(x-x_n)/h$.

Эта формула удобна при интерполировании функций для значений $\boldsymbol{x}$, близких к концу таблицы.

Остаточные члены соответственно первой и второй интерполяционных формул Ньютона приближенно равны:

$$R_m^I(x) = \frac{q(q-1)\ldots(q-m)}{(m+1)!}\cdot M\ , \quad R_m^{II}(x) = \frac{q(q+1)\ldots(q+m)}{(m+1)!}\cdot M\ ,$$

где $M = \max_i |\Delta^{m+1} y_i|$

1.3 Пример

Для функции заданной таблично (1-3 столбец таблицы 1) найти значение этой функции при $x = 1{,}2173$ и $x = 1{,}270$. Воспользоваться интерполяционными формулами Ньютона с тремя слагаемыми. Оценить погрешность.

Решение: Составим таблицу конечных разностей

Таблица 1

k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$
0	1,215	0,106044	0,000447	-0,000003	0,000001
1	1,22	0,106491	0,000444	-0,000002	0,000001
2	1,225	0,106935	0,000442	-0,000001	-0,000001
3	1,23	0,107377	0,000441	-0,000002	0,000002
4	1,235	0,107818	0,000439	0	-0,000001
5	1,24	0,108257	0,000439	-0,000001	0
6	1,245	0,108696	0,000438	-0,000001	0,000001
7	1,25	0,109134	0,000437	0	
8	1,255	0,109571	0,000437		
9	1,26	0,110008			

В интерполяционной формуле Ньютона ограничимся тремя слагаемыми.

При x=1,2173 будем использовать первую интерполяционную формулу:

$$f(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

где h=0,05, q=(1,2173-1,215)/0,005=0,46.

Тогда

$$f(1{,}2173) = 0{,}106044 + 0{,}46 \cdot 0{,}000447 + \frac{0{,}46 \cdot (-0{,}54)}{2}(-0{,}000003) = 0{,}106250,$$

$$R_m^I(x) = \frac{0{,}46 \cdot (0{,}46-1) \cdot (0{,}46-2)}{3!} \cdot 0{,}000002 = 0{,}00000013.$$

При x=1,270 будем использовать вторую интерполяционную формулу:

$$f(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} \quad ,$$

где h=0,05, q=(1,270-1,260)/0,005=2, n=9. Тогда

$$f(1{,}270) = 0{,}110008 + 2 \cdot 0{,}000437 + 3 \cdot 0 = 0{,}110879$$

$$R_m^{II}(x) = \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (2+2)}{3\,!} \cdot 0{,}000002 = 0{,}000008.$$

§2 Решение типового задания

Вычислить приближенное значение функции, используя первую или вторую интерполяционные формулы Ньютона с тремя слагаемыми и оценкой погрешности, при x=1,2173 и x=1,270.

1,215	0,106044
1,220	0,106491
1,225	0,106935
1,230	0,107377
1,235	0,107818
1,240	0,108257
1,245	0,108696
1,250	0,109134
1,255	0,109571
1,260	0,110008

Решение. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel. Отметим, что при $\boldsymbol{x}$=1,2173 будем использовать интерполяционную формулу Ньютона для «интерполирования вперед», а при $\boldsymbol{x}$=1,270 - интерполяционную формулу Ньютона для «интерполирования назад». Искомое решение приведено на рисунке 1.

Пояснение к решению:

1) В ячейках A1:G1 вводим поясняющий текст.

2) В ячейках B2:C11 вводим исходные данные.

3) Находим шаг интерполяции h. В ячейку B12 вводим формулу «=B3-B2», нажимаем «Enter».

	A	B	C	D	E	F	G
1	k	x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\lvert\Delta^3 y_k\rvert$
2	0	1,215	0,106044	0,000447	-0,0000030	0,0000010	0,0000010
3	1	1,220	0,106491	0,000444	-0,0000020	0,0000010	0,0000010
4	2	1,225	0,106935	0,000442	-0,0000010	-0,0000010	0,0000010
5	3	1,230	0,107377	0,000441	-0,0000020	0,0000020	0,0000020
6	4	1,235	0,107818	0,000439	0,0000000	-0,0000010	0,0000010
7	5	1,240	0,108257	0,000439	-0,0000010	0,0000000	0,0000000
8	6	1,245	0,108696	0,000438	-0,0000010	0,0000010	0,0000010
9	7	1,250	0,109134	0,000437	0,0000000		
10	8	1,255	0,109571	0,000437			
11	9	1,260	0,110008				
12	h =	0,005				$\max\lvert\Delta^3 y_k\rvert$ =	0,0000020
13			x_1 =	1,2173	x_2 =	1,270	
14			q_1	0,46	q_2	2,00	
15	значение		$P^I(x_1)$	0,106250	$P^{II}(x_2)$	0,110882	
16	погрешность		R^I	0,0000001	R^{II}	0,0000080	

Метод Ньютона / Лист2 / Лист3

Готово NUM

Рисунок 1 Интерполирование функций: метод Ньютона

4) Находим конечные разности. В ячейку D2 вводим формулу «=C3-C2», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку D2 и делаем протяжку до ячейки D10. В ячейку E2 вводим формулу «=D3-D2», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку E2 и делаем протяжку до ячейки E9. Аналогично, в ячейку F2 вводим формулу «=E3-E2», нажимаем «Enter», затем, выделяем ячейку F2 и делаем протяжку до ячейки F8.

5) Находим абсолютные значения конечных разностей 3-го порядка. В ячейку G2 вводим формулу «=ABS(F2)», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку G2 и делаем протяжку до ячейки G8.

6) Находим максимум $\lvert\Delta^3 y_k\rvert$. В ячейку G12 вводим формулу «=МАКС(G2:G8)», нажимаем «Enter».

7) Вводим значения ***x***=1,2173 и ***x***=1,270 и интерполяционные формулы Ньютона, в ячейки D13:D16 (для 1-й формулы) и F13:F16 (для 2-й формулы), как показано на рисунке 2.

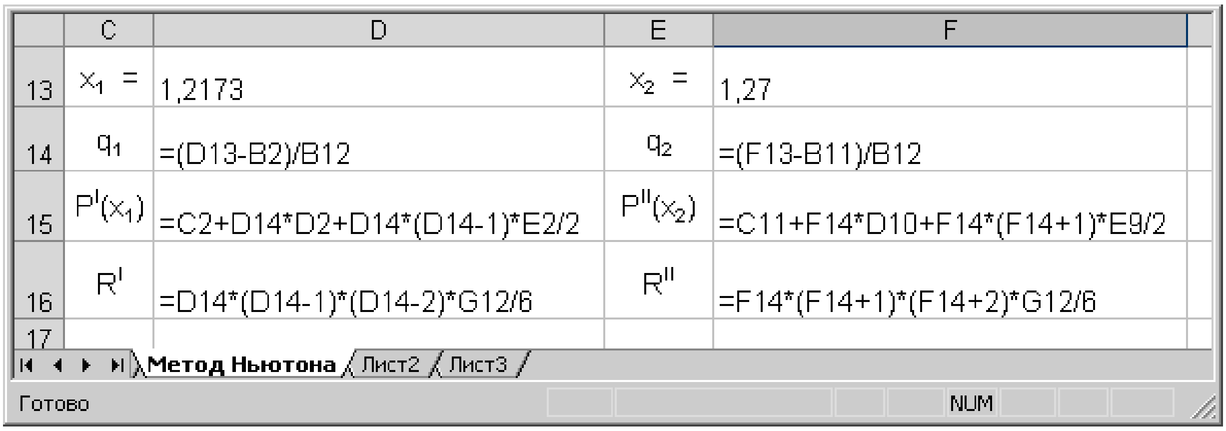


Рисунок 2. Ввод расчетных формул

7) Ответ: $P(1{,}2173) = 0{,}106250\,(\pm 0{,}0000001)$, $P(1{,}270) = 0{,}11088\,(\pm 0{,}000008)$.

§3 Задания для самостоятельного решения

Вычислить приближенное значение функции, используя первую или вторую интерполяционные формулы Ньютона с тремя слагаемыми и оценкой погрешности.

1)

к	*x*	*y*
0	0,45	20,1946
1	0,46	19,6133
2	0,47	18,9425
3	0,48	18,1746
4	0,49	17,3010
5	0,50	16,3123
6	0,51	15,1984
7	0,52	13,9484
8	0,53	12,5504
9	0,54	10,9937
10	0,55	9,2647

варианты	Значение аргумента
№1	0,455 0,5475
№2	0,4732 0,548
№3	0,4675 0,534
№4	0,445 0,537
№5	0,4741 0,548
№6	0,466 0,528
№7	0,476 0,541
№8	0,481 0,552
№9	0,457 0,543
№10	0,4632 0,553

2)

к	x	y
0	3,50	33,1154
1	3,55	34,8133
2	3,60	36,5982
3	3,65	38,4747
4	3,70	40,4473
5	3,75	42,5211
6	3,80	44,7012
7	3,85	46,9931
8	3,90	49,4024
9	3,95	51,9354
10	4,00	54,5982

варианты	Значение аргумента	
№11	3,522	4,031
№12	3,543	3,968
№13	3,547	3,895
№14	3,495	3,912
№15	3,489	3,896
№16	3,584	4,022
№17	3,581	3,875
№18	3,651	3,917
№19	3,672	3,963
№20	3,563	4,037

3)

к	x	y
0	0,15	4,4817
1	0,16	4,953
2	0,17	3,4739
3	0,18	6,0696
4	0,19	6,6859
5	0,20	7,3891
6	0,21	8,1662
7	0,22	9,0250
8	0,23	9,9742
9	0,24	11,0232
10	0,25	12,1825

варианты	Значение аргумента	
№21	0,1539	0,2469
№22	0,1648	0,2506
№23	0,1491	0,2350
№24	0,1493	0,2297
№25	0,1627	0,2438
№26	0,1554	0,2581
№27	0,1483	0,2377
№28	0,1593	0,2394
№29	0,1641	0,2483
№30	0,1753	0,2281

§4 Контрольные вопросы для самоподготовки

1. Может ли метод Ньютона применяться для экстраполяции?
2. Можно ли располагать неравномерно узлы интерполяции при использовании основного метода Ньютона?
3. Каким путем можно повысить точность интерполяции при использовании метода Ньютона?
4. Конечную разность какого наивысшего порядка можно получить по n=5 исходным точкам?
5. Можно ли конечную разность выразить только через исходные значения функции?
6. В чем заключается разница между первой и второй интерполяционными формулами Ньютона?
7. Какой прием можно использовать для оценки погрешности интерполяции таблично заданной функции?
8. Какой степени можно получить интерполяционный полином при трех заданных точках методом Ньютона?
9. По n+1 точке построены полиномы степени n методом Лагранжа и методом Ньютона. Какой из них будет иметь более простой вид?

Лабораторная работа № 7

«Приближенное вычисление определенных интегралов: формула трапеций»

Продолжительность: 2 часа.

Цель:

1. Научиться вычислять определенные интегралы, используя алгоритм вычислительной математики - формулу трапеций.
2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать вычислительный алгоритм метода трапеций.
2. Знать оценку погрешности связанную с методом трапеций.
3. Уметь реализовать вычислительный алгоритм метода трапеций в MS Excel.

Используемые программы:

Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор вычислительного алгоритма метода трапеций, решение типового задания.

2. Самостоятельная работа: решение контрольного задания по теме «Приближенное вычисление определенных интегралов: формула трапеций».

Описание работы

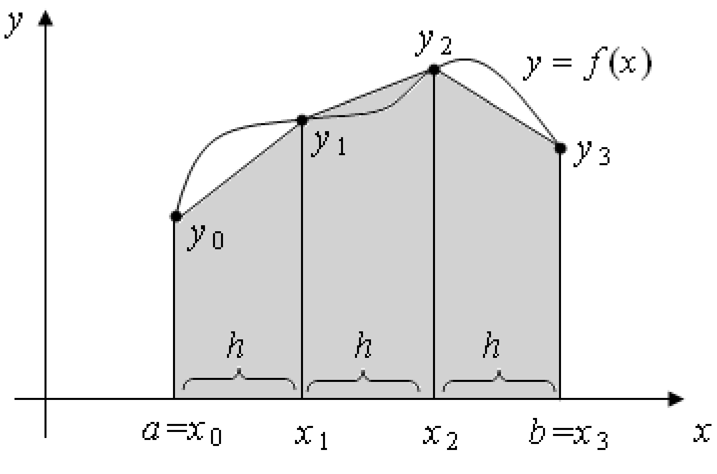
§1. Краткие теоретические сведения.

Формула трапеций имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \cdot \left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right] \qquad (1)$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}, \quad x_k = a + h \cdot k, \quad y_k = f(x_k), \quad k = 0,1,2,\ldots,n.$

Правая часть формулы выражает площадь фигуры, состоящей из трапеций, высота каждой из которых равна h:



Если R_n — остаточный член приближенной формулы (1), т.е. модуль разности между левой и правой частью этой формулы, то

$$|R_n| \le \frac{(b-a)^3 \cdot M_2}{12n^2} \approx \frac{(b-a)\max\left|\Delta^2 y\right|}{12} \qquad (2)$$

где $M_2 = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$

На практике более удобным способом оценки точности результата приближенного интегрирования является контрольный просчет по той же формуле, но с удвоенным шагом. При этом, если абсолютное значение разности этих двух просчетов меньше заданной точности, то процесс вычислений останавливают, считая, что точность вычисления достигнута. Надобность в оценке поправочного члена при этом отпадает.

Пример. Методом трапеций вычислить интеграл с двумя верными десятичными знаками:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

Решение: По условию задачи, погрешность не должна превышать 0,01/2=0,005 (напомним, что если абсолютная погрешность приближенного числа *a* не превышает 1/2 единицы его *n*-го разряда, то число *a* имеет *n* верных значащих цифр). Для выбора шага *h*, с которым мы будем проводить вычисления, оценим величину поправочного члена R_n. Воспользуемся формулой (2).

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad , \quad f''(x) = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$|f''| = \left|-2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\right| \le 2\left|1-3x^2\right| \le 4 .$$

Из формулы (2), получаем

$$\frac{4}{12 \cdot n^2} \le 0{,}005 \quad \Rightarrow \quad n^2 \ge \frac{200}{3} \approx 66{,}67 \quad \Rightarrow \quad n \ge 8{,}16 .$$

Для удобства вычислений желательно, чтобы шаг выражался круглым числом. Поэтому возьмем *n*=10, тогда *h*=0,1.

Оформим дальнейшие расчеты в виде бланка:

k	x_k	$1+x_k^2$	$y_k=1/(1+x_k^2)$
0	0	1	1
1	0,1	1,01	0,990
2	0,2	1,04	0,962
3	0,3	1,09	0,917
4	0,4	1,16	0,862
5	0,5	1,25	0,800
6	0,6	1,36	0,735
7	0,7	1,49	0,671
8	0,8	1,64	0,610
9	0,9	1,81	0,552
10	1,0	2	0,5

Отсюда, в силу формулы (1), получаем

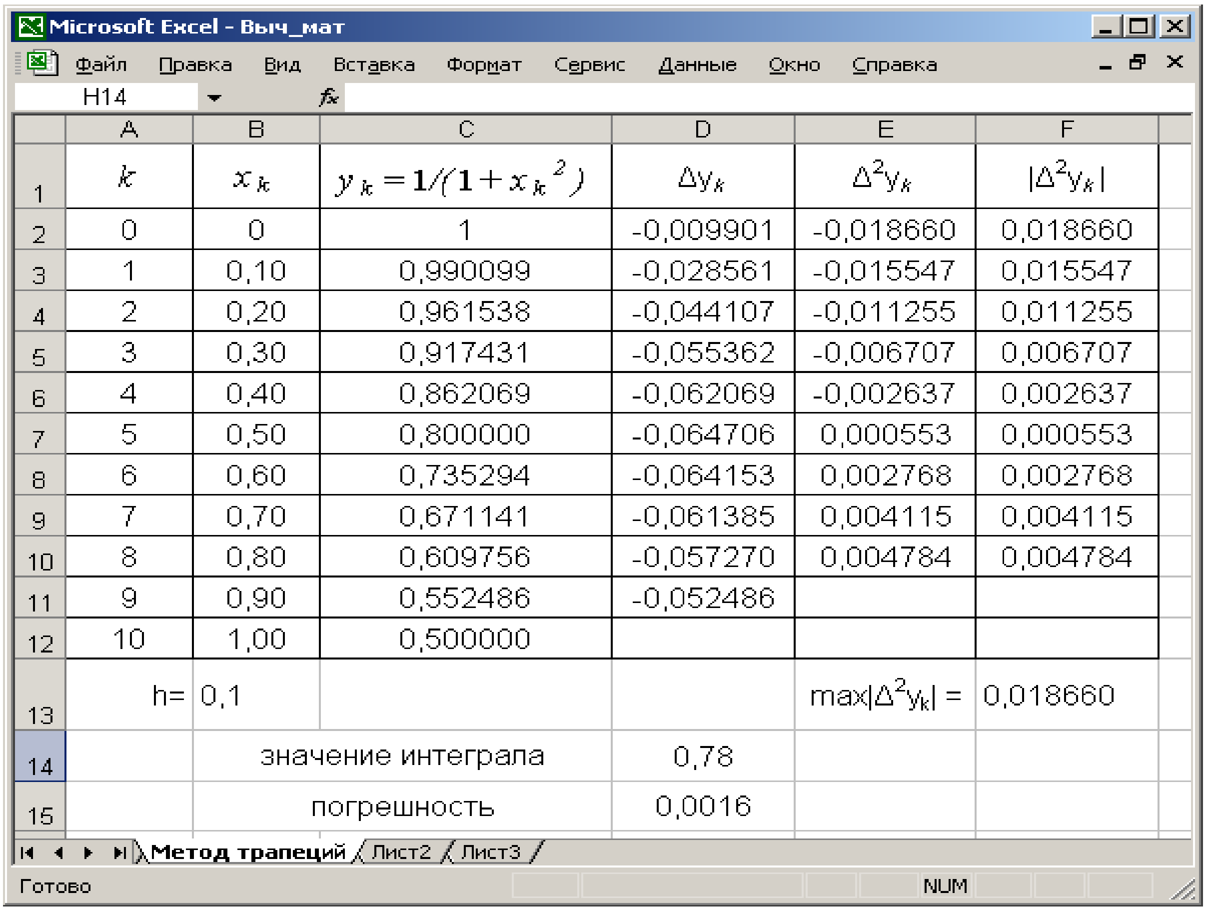
$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx 0{,}1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0{,}990 + 0{,}962 + \ldots + 0{,}610 + 0{,}552 + \frac{0{,}5}{2}\right) = 0{,}78\,.$$

§2. Решение типового задания.

Задача. Методом трапеций вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ при n=10 точках разбиения отрезка интегрирования. Оценить погрешность результата.

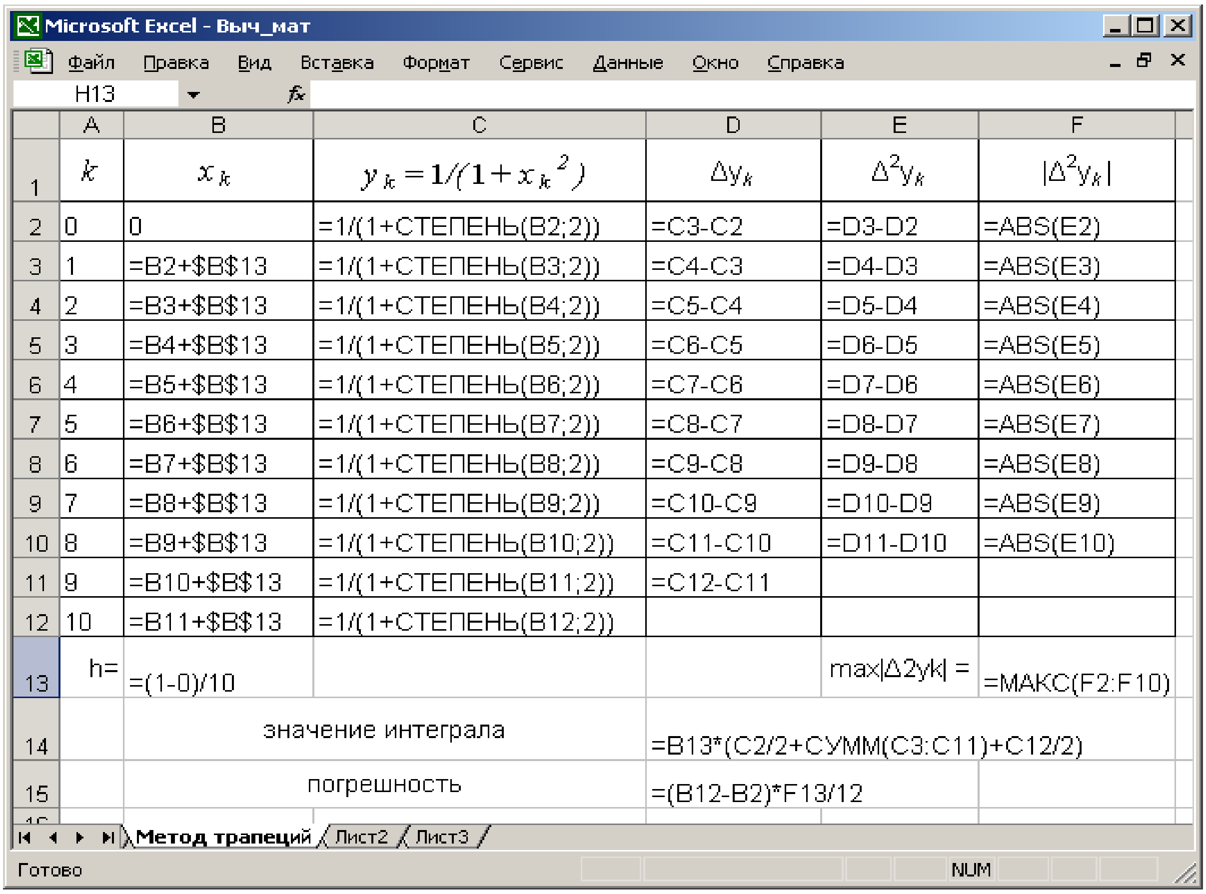
Решение. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel. Искомое решение приведено на рисунке 1. Пояснение к решению приведено на рисунке 2. Отметим, что формулы в расчетной таблице, получены в основном при помощи протяжки. Знак «$», используется для того, чтобы ссылка на ячейку B12 при протяжке не изменялась (абсолютная ссылка).

Ответ: Интеграл вычислен с двумя верными знаками: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0{,}78\,.$



	A	B	C	D	E	F
1	k	x_k	$y_k = 1/(1+x_k^2)$	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\lvert\Delta^2 y_k\rvert$
2	0	0	1	-0,009901	-0,018660	0,018660
3	1	0,10	0,990099	-0,028561	-0,015547	0,015547
4	2	0,20	0,961538	-0,044107	-0,011255	0,011255
5	3	0,30	0,917431	-0,055362	-0,006707	0,006707
6	4	0,40	0,862069	-0,062069	-0,002637	0,002637
7	5	0,50	0,800000	-0,064706	0,000553	0,000553
8	6	0,60	0,735294	-0,064153	0,002768	0,002768
9	7	0,70	0,671141	-0,061385	0,004115	0,004115
10	8	0,80	0,609756	-0,057270	0,004784	0,004784
11	9	0,90	0,552486	-0,052486		
12	10	1,00	0,500000			
13	h=	0,1			$\max\lvert\Delta^2 y_k\rvert$ =	0,018660
14		значение интеграла		0,78		
15		погрешность		0,0016		

Рисунок 1. Интегрирование функций: метод трапеций



	A	B	C	D	E	F
1	k	x_k	$y_k = 1/(1+x_k^2)$	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\lvert\Delta^2 y_k\rvert$
2	0	0	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B2;2))	=C3-C2	=D3-D2	=ABS(E2)
3	1	=B2+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B3;2))	=C4-C3	=D4-D3	=ABS(E3)
4	2	=B3+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B4;2))	=C5-C4	=D5-D4	=ABS(E4)
5	3	=B4+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B5;2))	=C6-C5	=D6-D5	=ABS(E5)
6	4	=B5+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B6;2))	=C7-C6	=D7-D6	=ABS(E6)
7	5	=B6+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B7;2))	=C8-C7	=D8-D7	=ABS(E7)
8	6	=B7+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B8;2))	=C9-C8	=D9-D8	=ABS(E8)
9	7	=B8+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B9;2))	=C10-C9	=D10-D9	=ABS(E9)
10	8	=B9+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B10;2))	=C11-C10	=D11-D10	=ABS(E10)
11	9	=B10+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B11;2))	=C12-C11		
12	10	=B11+$B$13	=1/(1+СТЕПЕНЬ(B12;2))			
13	h=	=(1-0)/10			max|Δ2yk| =	=МАКС(F2:F10)
14		значение интеграла		=B13*(C2/2+СУММ(C3:C11)+C12/2)		
15		погрешность		=(B12-B2)*F13/12		

Рисунок 2. Ввод расчетных формул

§3. Задания для самостоятельного решения

Методом трапеций вычислить интеграл с n=20. Оценить погрешность результата.

1). $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}dx$ 2). $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}dx$

3). $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}dx$ 4). $\int_0^1 \sqrt{x^3+2}dx$

5). $\int_0^1 x\cdot\sqrt{x^3+1}\,dx$ 6). $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x^3}}dx$

7). $\int_{0,8}^{1,6} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}dx$ 8). $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2,5+x^2}}dx$

9). $\int_{1,9}^{3} \sqrt{3\cdot x^3-0,8}dx$ 10). $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1,4+3\cdot x^2}}dx$

11). $\int_{1,6}^{2,6} \frac{1}{\sqrt{0,8+1,5x^2}}dx$ 12). $\int_{1,5}^{2,5} \sqrt{x^3-0,5}dx$

13) $\int_{0,6}^{1,8} \frac{1}{\sqrt{0,7+1,2x^2}}dx$ 14). $\int_{2,1}^{3,1} \frac{x}{\sqrt{x^3-8}}dx$

15). $\int_{0,5}^{1,7} \frac{1}{\sqrt{1,5+2x^2}}dx$ 16) $\int_0^1 \sqrt{x^3+1,5}dx$

17) $\int_{2,5}^{3,5} \frac{1}{\sqrt{3x^2-2,3}}dx$ 18) $\int_1^2 \sqrt{x^3+0,35}dx$.

19) $\int\limits_{0,8}^{1,8} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} dx$ 20) $\int\limits_{1,3}^{2,3} \frac{1}{\sqrt{3x^2-0,4}} dx$.

21). $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x+1)}{x} dx$ 22). $\int\limits_{1,4}^{2,4} x^2 \lg x dx$

23). $\int\limits_{1,8}^{2,8} \frac{\lg(x^2+3)}{x} dx$ 24). $\int\limits_{2,4}^{3,2} \frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1} dx$

25). $\int\limits_{1,2}^{2,8} \frac{\lg(x^2+1)}{2x-1} dx$ 26). $\int\limits_{1}^{2} \frac{\lg x}{x} dx$

27). $\int\limits_{1,4}^{2,4} (x+1)\sin x dx$ 28). $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{1}{x+\cos x} dx$

29). $\int\limits_{0,6}^{1,6} \frac{\cos x}{x+1} dx$. 30). $\int\limits_{0,8}^{1,3} \frac{\sin 2x}{x} dx$.

§4. Контрольные вопросы для самоподготовки.

1. Как в методе трапеций уменьшить погрешность нахождения интеграла?

2. В каких случаях метод трапеций находит применение?

3. Дана подынтегральная функция $f(x) = 5 \cdot x$. Какой из методов будет наиболее эффективен?

4. Можно ли получить методами прямоугольников и трапеций точное значение интеграла?

5. Можно ли методом трапеций вычислить неопределенный интеграл?

6. Можно ли в методе трапеций пользоваться автоматическим подбором шага интегрирования?

7. В чем сущность метода двойного просчета?

Лабораторная работа № 8

«Приближенное вычисление определенных интегралов: формула парабол (Симпсона)»

Продолжительность: 2 часа.

Цель:

1. Научиться вычислять определенные интегралы, используя алгоритм вычислительной математики - формулу парабол (Симпсона).
2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать вычислительный алгоритм метода Симпсона.
2. Знать оценку погрешности связанную с методом Симпсона.
3. Уметь реализовать вычислительный алгоритм метода Симпсона в MS Excel.

Используемые программы:

Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор вычислительного алгоритма метода Симпсона.

2. Самостоятельная работа: решение контрольного задания по теме «Приближенное вычисление определенных интегралов: формула Симпсона».

Описание работы

§1. Краткие теоретические сведения.

Разобьем интервал $[a,b]$ на $2n$ равных частей (четное число интервалов разбиения). Формула парабол (или формула Симпсона) имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[y_0 + 4\cdot(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2\cdot(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}\right] \qquad (1)$$

где $h = \dfrac{b-a}{2\cdot n}$, $x_k = a + h\cdot k$, $y_k = f(x_k)$, $k = 0,1,2,\ldots,2n$.

Правая часть формулы парабол (1) выражает площадь фигуры, составленной из параболических трапеций $x_0M_0M_2x_2$, $x_2M_2M_4x_4$ и т.д. (рисунок 1). Дуга

$M_0M_1M_2$ графика функции $y=f(x)$ заменена дугой параболы, проходящей через точки M_0,M_1,M_2. Аналогичная замена произведена и для остальных дуг.

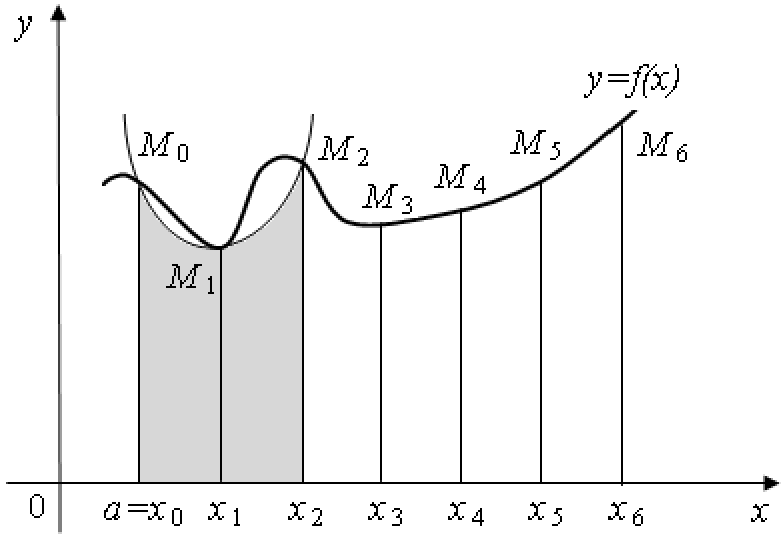


рисунок 1

Если R_n — остаточный член приближенной формулы (1), т.е. модуль разности между левой и правой частью этой формулы, то

$$\left|R_n\right| \le \frac{(b-a)^5 \cdot M_4}{180 \cdot (2n)^4} \approx \frac{(b-a)\max\left|\Delta^4 y\right|}{180} \quad \text{где} \quad M_4 = \max_{a \le x \le b}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

На практике более удобным способом оценки точности результата приближенного интегрирования является контрольный просчет по той же формуле, но с удвоенным шагом. При этом, если абсолютное значение разности этих двух просчетов меньше заданной точности, то процесс вычислений останавливают, считая, что точность вычисления достигнута. Надобность в оценке поправочного члена при этом отпадает.

Пример. Методом парабол вычислить интеграл при n=10, оценить погрешность результата: $\int_0^2 e^{-x^2}dx$

Решение: По условию задачи имеем: $2n$=20, h=0,1. Промежуточные расчеты оформим в виде бланка:

k	x_k	Значения $y_k = e^{-x^2}$		
		k=0, k=20	k-нечетные	k-четные
I	II	III	IV	V
0	0	1		
1	0,1		0,99005	
2	0,2			0,96079
3	0,3		0,91393	
4	0,4			0,85214
5	0,5		0,7788	
6	0,6			0,69768
7	0,7		0,61263	
8	0,8			0,52729
9	0,9		0,44486	
10	1,0			0,36788
11	1,1		0,2982	
12	1,2			0,23693
13	1,3		0,18452	
14	1,4			0,14086
15	1,5		0,1054	
16	1,6			0,0773
17	1,7		0,05558	
18	1,8			0,03916
19	1,9		0,02705	
20	2,0	0,01832		
	Σ	1,01832	4,41102	3,90003

В силу формулы (5.6), получаем

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx \frac{2-0}{6\cdot 10}\cdot(1{,}01832 + 4\cdot 4{,}1102 + 2\cdot 3{,}90003) = 0{,}88208$$

Для оценки точности полученного результата выполним контрольный перерасчет с удвоенным шагом *h*=0,02. В качестве исходных данных возьмем значения функции из III и V столбца основного бланка.

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx \approx \frac{2-0}{6\cdot 5}\cdot(1{,}01832 + 4\cdot(0{,}96079 + 0{,}69768 + 0{,}36788 + 0{,}14086$$

$$+0{,}03916) + 2\cdot(0{,}85214 + 0{,}52729 + 0{,}23693 + 0{,}07730)) = 0{,}88207.$$

Разность между двумя приведенными расчетами дает искомую погрешность ε=0,00001.

§2 Решение типового задания

Задача. Методом парабол (Симпсона) вычислить интеграл

$$\int_0^2 e^{-x^2}dx$$

с n=10 (т.е. с 20 интервалами разбиения). Оценить погрешность результата.

Решение. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel. Искомое решение приведено на рисунке 2. Будем выводить (по возможности) результаты расчетов с четырьмя десятичными знаками.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Метод парабол (Симпсона)									
2	k	x_k	y_k	k = 0, 2n	k - нечетное	k - четное	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\lvert\Delta^4 y_k\rvert$
3	0	0	1	1			-0,0100	-0,0193	0,0017	0,00096
4	1	0,1	0,9900		0,9900	0	-0,0293	-0,0176	0,0027	0,00070
5	2	0,2	0,9608		0	0,9608	-0,0469	-0,0149	0,0034	0,00040
6	3	0,3	0,9139		0,9139	0	-0,0618	-0,0116	0,0038	0,00008
7	4	0,4	0,8521		0	0,8521	-0,0733	-0,0078	0,0039	0,00021
8	5	0,5	0,7788		0,7788	0	-0,0811	-0,0039	0,0036	0,00046
9	6	0,6	0,6977		0	0,6977	-0,0850	-0,0003	0,0032	0,00063
10	7	0,7	0,6126		0,6126	0	-0,0853	0,0029	0,0026	0,00072
11	8	0,8	0,5273		0	0,5273	-0,0824	0,0055	0,0018	0,00072
12	9	0,9	0,4449		0,4449	0	-0,0770	0,0073	0,0011	0,00067
13	10	1,0	0,3679		0	0,3679	-0,0697	0,0084	0,0004	0,00056
14	11	1,1	0,2982		0,2982	0	-0,0613	0,0089	-0,0001	0,00043
15	12	1,2	0,2369		0	0,2369	-0,0524	0,0087	-0,0005	0,00029
16	13	1,3	0,1845		0,1845	0	-0,0437	0,0082	-0,0008	0,00016
17	14	1,4	0,1409		0	0,1409	-0,0355	0,0074	-0,0010	0,00005
18	15	1,5	0,1054		0,1054	0	-0,0281	0,0064	-0,0010	0,00003
19	16	1,6	0,0773		0	0,0773	-0,0217	0,0053	-0,0010	0,00009
20	17	1,7	0,0556		0,0556	0	-0,0164	0,0043	-0,0009	
21	18	1,8	0,0392		0	0,0392	-0,0121	0,0034		
22	19	1,9	0,0271		0,0271	0	-0,0087			
23	20	2	0,0183	0,0183						
24	Σ			1,0183	4,4110	3,9000	max$\lvert\Delta^4 y_k\rvert$ =			0,00096
25		значение интеграла			0,88208					
26		погрешность			0,00001					

Метод парабол / Лист3

Готово NUM

Рисунок 2 Приближенное вычисление определенного интеграла методом парабол

Пояснение к решению:

1) В ячейках A1:J2 вводим поясняющий текст. Отметим, что заголовки столбцов введены исходя из вида формулы парабол и её остаточного члена.

2) В ячейках A3:B23 вводим расчетные значения по x.

3) Рассчитываем значения подынтегральной функции. В ячейку C3 вводим формулу «=EXP(-B3*B3)», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку C3 и делаем протяжку вниз до ячейки C23.

4) В ячейку D3 вводим формулу «=C3», нажимаем «Enter». В ячейку D23 вводим формулу «=C23», нажимаем «Enter».

5) В ячейку E4 вводим формулу «=ЕСЛИ(ЕЧЁТН(A4);0;C4)», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку E4 и делаем протяжку вниз до ячейки E22.

6) В ячейку F4 вводим формулу «=ЕСЛИ(ЕЧЁТН(A4);C4;0)», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку F4 и делаем протяжку вниз до ячейки F22.

7) Вычисляем приближенное значение интеграла. В ячейку D24 вводим формулу «=СУММ(D3:D23)», нажимаем «Enter». Аналогично, в ячейку E24 вводим формулу «=СУММ(E3:E23)», а в ячейку F24 вводим формулу «=СУММ(F3:F23)». В ячейку E25 вводим формулу «=0,1*(D24+4*E24+2*F24)/3», нажимаем «Enter». В ячейке E25 высвечивается приближенное значение интеграла: 0,88208098.

8) Вычисляем абсолютную погрешность результата. В ячейку G3 вводим формулу «=C4-C3», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку G3 и делаем протяжку вниз до ячейки G22. Получены первые конечные разности. Аналогично находим конечные разности 2-го и 3-го порядка. В ячейку H3 вводим формулу «=G4-G3», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку H3 и делаем протяжку вниз до ячейки H21. В ячейку I3 вводим формулу «=H4-H3», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку I3 и делаем протяжку вниз до ячейки I20. Находим абсолютные значения конечных разностей 4-го порядка. В ячейку J3 вводим формулу «=ABS(I4-I3)», нажимаем «Enter». Выделяем ячейку J3 и делаем протяжку вниз до ячейки J19. В ячейку J24 вводим формулу «=МАКС(J3:J19)», нажимаем «Enter». В ячейку E26 вводим формулу «=(B23-B3)*J24/180»,

нажимаем «Enter». В ячейке E26 высвечивается абсолютная погрешность результата 0,0000106.

9) Корректируем результат вычисления с учетом погрешности: $0{,}88208 \pm 0{,}00001$.

§3. Задания для самостоятельного решения

Методом Симпсона вычислить интеграл с *n*=10. Оценить погрешность результата.

1). $\int\limits_0^2 \frac{\lg(x^2+1)}{x+1}dx$ 2). $\int\limits_0^1 x\cdot\sqrt{x^3+3}\,dx$

3). $\int\limits_0^{1,6} \sqrt{3x^4+1}\,dx$ 4). $\int\limits_{1,2}^3 \frac{\lg(x^2+1)}{x-1}dx$

5). $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x+1)}{x}dx$ 6). $\int\limits_{1,4}^{2,4} x^2\lg x dx$

7). $\int\limits_{1,8}^{2,8} \frac{\lg(x^2+3)}{x}dx$ 8). $\int\limits_{2,4}^{3,2} \frac{\lg(x^2+0,8)}{x-1}dx$

9). $\int\limits_{1,2}^{2,8} \frac{\lg(x^2+1)}{2x-1}dx$ 10). $\int\limits_1^2 \frac{\lg x}{x}dx$

11). $\int\limits_{1,4}^{2,4} (x+1)\sin x dx$ 12). $\int\limits_0^{0,5} \frac{1}{x+\cos x}dx$

13). $\int\limits_{0,6}^{1,6} \frac{\cos x}{x+1}dx$. 14). $\int\limits_{0,8}^{1,3} \frac{\sin 2x}{x}dx$.

15). $\int\limits_{0,4}^{1,4} \frac{\cos x}{x+2}dx$ 16). $\int\limits_{0,4}^{1,4} (2x+0,5)\sin x dx$

17). $\int_{0}^{1}(x+1)\cos x dx$. 18). $\int_{0}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$.

19) $\int_{0,8}^{1,8}x\sin(x-0{,}5)dx$. 20). $\int_{0,6}^{1,6}x^2\cos x dx$.

21). $\int_{1,6}^{2,6}\frac{1}{\sqrt{0{,}8+1{,}5x^2}}dx$ 22). $\int_{1,5}^{2,5}\sqrt{x^3-0{,}5}dx$

23) $\int_{0,6}^{1,8}\frac{1}{\sqrt{0{,}7+1{,}2x^2}}dx$ 24). $\int_{2,1}^{3,1}\frac{x}{\sqrt{x^3-8}}dx$

25). $\int_{0,5}^{1,7}\frac{1}{\sqrt{1{,}5+2x^2}}dx$ 26) $\int_{0}^{1}\sqrt{x^3+1{,}5}dx$

27) $\int_{2,5}^{3,5}\frac{1}{\sqrt{3x^2-2{,}3}}dx$ 28) $\int_{1}^{2}\sqrt{x^3+0{,}35}dx$.

29) $\int_{0,8}^{1,8}\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ 30) $\int_{1,3}^{2,3}\frac{1}{\sqrt{3x^2-0{,}4}}dx$.

§3. Контрольные вопросы для самоподготовки.

1. Какой аппроксимирующей функцией заменяется подынтегральная функция в методе Симпсона?

2. Дана подынтегральная функция $f(x)=3x^2+5$. Можно ли каким либо численным методом вычислить интеграл без ошибки?

3. Если для построения аппроксимирующей функции средняя точка берется не в середине участка, то, что изменится в алгоритме?

4. Чему равна погрешность формулы Симпсона, если подынтегральная функция является многочленом 3-й степени?

5. Обязательно ли участок интегрирования разбивать при реализации метода на более мелкие участки?

6. Дана подынтегральная функция $y = x + 5$, с каким методом совпадет метод Симпсона?

7. Как увеличить точность вычислений в методе Симпсона?

8. Можно ли применить метод двойного просчета для оценки погрешности в методе Симпсона?

9. В чем состоит преимущество метода двойного просчета перед вычислением погрешности по аналитическим формулам.

10. Как изменяется погрешность нахождения интеграла при уменьшении числа разбиений *n*?

Лабораторная работа № 9

«Приближенное решение дифференциальных уравнений: метод Эйлера»

Продолжительность: 2 часа.

Цель:

1. Научиться решать дифференциальные уравнения, используя алгоритмы численных методов.
2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать вычислительные алгоритмы метода Эйлера и модифицированного метод Эйлера.
2. Уметь реализовать вычислительные алгоритмы решения задачи Коши методом Эйлера и модифицированным методом Эйлера в MS Excel.

Используемые программы:

Microsoft Excel.

План занятия:

1. Работа под руководством преподавателя: разбор вычислительного алгоритма метода Эйлера, решение типового задания.

2. Самостоятельная работа: решение контрольного задания по теме «Приближенное решение дифференциальных уравнений: метод Эйлера».

Описание работы

§1. Краткие теоретические сведения.

1.1 Задача Коши: Найти решение дифференциального уравнения

$$y'=f(x,y) \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

При численном решении уравнения (1) задача ставится так: в точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти приближения y_k ($k = 0,1,2,\ldots, n$) для значений точного решения $y(x_k)$. Разность $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ во многих случаях принимают постоянной h и называют шагом сетки, тогда $x_k = x_0 + kh, \quad k=0,1,\ldots,n$.

1.2 Метод Эйлера для решения указанной задачи Коши основан на непосредственной замене производной разностным отношением по приближенной формуле

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x,y)$$ откуда, если обозначить $h = \Delta x$, то

$$y(x+h) = y(x) + hf(x,y). \qquad (2)$$

Из (2) следует, что приближенные значения y_k в точках $x_k = x_0 + h \cdot k$ вычисляются по формуле

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \qquad (3)$$

Отметим, что точность полученных приближенных значений зависит от шага h; чем меньше шаг, тем выше точность результатов.

Пример. Приняв h=0,1, решить указанную задачу Коши методом Эйлера.

$$y' = y + x^2 \qquad y(0) = 1, \qquad 0 \le x \le 0{,}5.$$

Решение: В нашем случае $x_0=0$; $x_1=0{,}1$; $x_2=0{,}2$; $x_3=0{,}3$; $x_4=0{,}4$; $x_5=0{,}5$; $y_0=1$; $f(x,y)=y+x^2$; $h=0{,}1$. По формуле (3) находим: $y_1=y_0+h\cdot f(x_0,y_0)=1+0{,}1\cdot(1+0^2)=1{,}1$; $y_2=y_1+h\cdot f(x_1,y_1)=1{,}1+0{,}1\cdot(1{,}1+0{,}1^2)=1{,}211$ и т.д.

Результаты вычислений оформим в виде таблицы

k	x_k	y_k	$f(x_k,y_k)$	y_{k+1}
0	0	1	0,1	1,1
1	0,1	1,1	0,111	1,211
2	0,2	1,211	0,1251	1,3361
3	0,3	1,3361	0,1426	1,4787
4	0,4	1,4787	0,1639	1,6426
5	0,5	1,6426		

Искомое решение, как пара точек (x_k,y_k), находится в столбах 2 и 3 таблицы.

1.3 Модифицированный метод Эйлера.

Для повышения точности на практике используют модифицированный метод Эйлера второго порядка. Он имеет следующий вычислительный алгоритм:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}) \right)$$

Здесь в формуле используется значение $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ с еще пока неизвестным значением y_{i+1}. Это значение может быть найдено предварительно, например, по методу Эйлера, а затем использовано в алгоритме.

Точность вычислений обычно контролируют двойным просчетом: сначала вычисляют решение уравнения на каком-то текущем шаге h, т.е. находясь в точке x_i,- и вычисляя значение $y(x_i + h) = y_{i+1}^1$, затем в ту же точку x_{i+1} приходят за два шага по $h/2$, получают y_{i+1}^2, сравнивают их. Если для обоих вариантов различие $|y_{i+1}^1 - y_{i+1}^2|$ в пределах желаемой погрешности, то решение принимают, а если нет, то опять делят шаг на два и т.д., до тех пор, пока не получится приемлемый результат. Однако следует помнить, что при очень маленьком шаге, получающемся в результате его последовательного деления, может значительной оказаться накапливающаяся вычислительная ошибка.

§2 Решение типового задания

Приняв h=0,1 решить указанную задачу Коши методом Эйлера. Оценить погрешность результата. $y' = y + x^2$ $\quad y(0) = 1, \quad 0 \le x \le 0{,}5.$

Решение. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel. Искомое решение приведено на рисунке 1.

Метод Эйлера (с учетом погрешности)						
h=0,1				двойной просчет: h=0,05		
k	x_k	y_k	y_{k+1}	$y_{k+h/2}$	y_{k+h}	погрешность
0	0	1	1,1	1,05	1,103	0,002
1	0,1	1,100	1,211	1,156	1,214	0,003
2	0,2	1,211	1,336	1,274	1,339	0,003
3	0,3	1,336	1,479	1,407	1,482	0,004
4	0,4	1,479	1,643	1,561	1,647	0,004
5	0,5	1,643	1,832	1,737	1,837	0,005

Рисунок 1. Решение задачи Коши методом Эйлера

Пояснение к решению:

1) В ячейках A1:G3 вводим поясняющий текст.

2) В ячейках A4:B9 вводим расчетные значения по x. В ячейку C4 вводим начальное условие $y(0)=1$.

3) Рассчитываем значение решения в точке x=0,1 по формуле Эйлера с шагом h=0,1. В ячейку D4 вводим формулу «=C4+0,1*(C4+B4*B4)», нажимаем «Enter». В ячейку C5 вводим формулу «=D4», нажимаем «Enter».

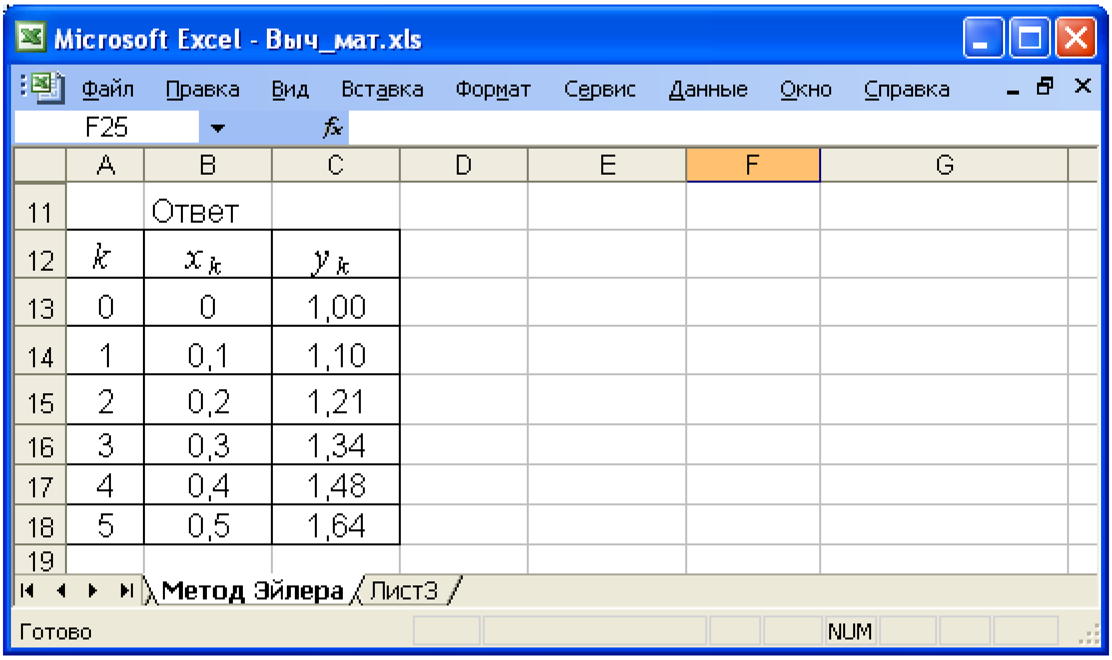
4) Рассчитываем значение решения в точке x=0,1 при двойном просчете по формуле Эйлера с шагом h=0,05. В ячейку E4 вводим формулу

«=C4+0,05*(C4+B4*B4)», нажимаем «Enter». В ячейку F4 вводим формулу «=E4+0,05*(E4+B4*B4)», нажимаем «Enter».

5) Оцениваем погрешность. В ячейку G4 вводим формулу «=ABS(D4-F4)», нажимаем «Enter».

6) Выделяем диапазон ячеек D4:G4 и делаем протяжку вниз до ячейки G5. Сформировалась строка A5:G5. Выделяем диапазон ячеек C5:G5 и делаем протяжку вниз до ячейки G9. Сформировались все строки таблицы решений (см. рисунок 1).

7) Выписываем искомое решение задачи Коши с учетом числа верных знаков (см. рисунок 2).



	A	B	C
11		Ответ	
12	k	x_k	y_k
13	0	0	1,00
14	1	0,1	1,10
15	2	0,2	1,21
16	3	0,3	1,34
17	4	0,4	1,48
18	5	0,5	1,64

Рисунок 2 Решение задачи Коши с учетом погрешности

§3 Задания для самостоятельного решения

Задание №1

Приняв $h=0{,}1$, решить указанную задачу Коши модифицированным методом Эйлера. Оценить погрешность вычислений.

1) $y'=2y+3x+1$, $y(0)=0$, $0\le x\le 1$.

2) $y'=x-2y-0{,}5$, $y(0)=0$, $0\le x\le 1$.

3) $y'=y^2+x+0{,}7$, $y(0)=1$, $0\le x\le 1$.

4) $y'=y^2+x+2$, $y(0)=1$, $0\le x\le 1$.

5) $y'=y\cdot x^2+x^3$, $y(0)=1$, $0\le x\le 1$.

6) $y'=x-y+0{,}1$, $y(0)=-1$, $0\le x\le 1$.

7) $y'=x^2-y+0{,}2$, $y(0)=2$, $0\le x\le 1$.

8) $y'=y+x+1$, $y(0)=1$, $0\le x\le 1$.

9) $y'=y-2x-0{,}2$, $y(0)=0$, $0\le x\le 1$.

10) $y'=x-y+2$, $y(1)=0$, $1\le x\le 2$.

11) $y'=y-3x-0{,}3$, $y(0)=1$, $0\le x\le 1$.

12) $y'=y+\cos x$, $y(2)=2$, $2\le x\le 3$.

13) $y'=2y-\cos x$, $y(1)=3$, $1\le x\le 2$.

14) $y'=x+\sin y$, $y(1)=1$, $1\le x\le 2$.

15) $y'=x-2\sin y$, $y(2)=1$, $2\le x\le 3$.

16) $y'=6y+3x-1$, $y(0)=5$, $0\le x\le 1$.

17) $y'=x-8y-0{,}4$, $y(0)=-2$, $0\le x\le 1$.

18) $y'=2y^2+x+0{,}1$, $y(1)=1$, $1\le x\le 2$.

19) $y'=y^2+x-2$, $y(2)=2$, $2\le x\le 3$.

20) $y'=y\cdot x^2+x^3$, $y(3)=1$, $3\le x\le 4$.

21) $y'=7x-y+0{,}3$, $y(4)=-1$, $4\le x\le 5$.

22) $y'=x^2-5y+0{,}9$, $y(2)=5$, $2\le x\le 3$.

23) $y'=3y+x-0{,}6$, $y(1)=1$, $1\le x\le 2$.

24) $y'=y+8x-0{,}2$, $y(1)=-5$, $1\le x\le 2$.

25) $y'=3x-y-2$, $y(1)=3$, $1\le x\le 2$.

26) $y'=y-2x-1{,}3$, $y(0)=-2$, $0\le x\le 1$.

27) $y'=y+2\cos x$, $y(1)=-2$, $2\le x\le 3$.

28) $y'=3y-\cos x$, $y(1)=-4$, $1 \le x \le 2$.

29) $y'=2x-7\sin y$, $y(1)=3$, $1 \le x \le 2$.

30) $y'=x-5\sin y$, $y(2)=-3$, $2 \le x \le 3$.

§4. Контрольные вопросы для самоподготовки.

1. Почему численными методами решается задача Коши, а не дифференциальное уравнение?
2. В каком виде дается решение задачи Коши численными методами?
3. Что является решением дифференциального уравнения?
4. Необходим ли поиск начальных условий в методе Эйлера?
5. К какой группе относится модифицированный метод Эйлера?
6. Почему точность метода Эйлера пропорциональна h а модифицированного пропорциональна h^2?
7. Можно ли методом Эйлера решать системы дифференциальных уравнений?
8. Можно ли использовать метод Эйлера для решения задач, не относящихся к задачам Коши?
9. Обязательно ли необходимо задание начальных условий при решении дифференциального уравнения методом Эйлера?
10. Можно ли оценить погрешность решения дифференциального уравнения, не зная точного решения?

Лабораторная работа № 10

«Приближенное решение дифференциальных уравнений: метод Рунге-Кутта 4-го порядка»

Продолжительность: 2 часа.

Цель:

1. Научиться решать дифференциальные уравнения, используя алгоритм метода Рунге-Кутта 4-го порядка.

2. Научиться реализовать вычислительные алгоритмы в MS Excel.

Результат обучения:

После успешного завершения занятия пользователь должен:

1. Знать вычислительные алгоритмы метода Рунге-Кутта 4-го порядка.
2. Уметь решать Задачу Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка в MS Excel.

Используемые программы:

Microsoft Excel.

План занятия:

Самостоятельная работа: решение контрольного задания по теме «Приближенное решение дифференциальных уравнений: метод Эйлера».

Описание работы

§1. Краткие теоретические сведения.

1.4 Задача Коши: Найти решение дифференциального уравнения

$$y'=f(x,y) \qquad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

При численном решении уравнения (1) задача ставится так: в точках $x_0, x_1, x_2,\dots, x_n$ найти приближения y_k ($k = 0,1,2,\dots, n$) для значений точного решения $y(x_k)$. Разность $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$ во многих случаях принимают постоянной h и называют шагом сетки, тогда $x_k = x_0+kh,\ \ k=0,1,\dots,n$.

1.2 Метод Рунге-Кутта 4-го порядка ─ один из наиболее часто употребляемых методов повышенной точности. Метод Рунге-Кутта применим к системам дифференциальных уравнений первого порядка, а также к обыкновенным дифференциальным уравнениям высших порядков. Однако, мы продемонстрируем этот метод для решения задачи Коши вида (1).

Суть данного метода, состоит в последовательном вычислении приближенных значений решения задачи Коши по формулам: y_0 и h ─ задано, тогда расчетные формулы для следующих приближений имеют вид

$$y_{m+1} = y_m + \frac{1}{6}(R_1 + 2R_2 + 2R_3 + R_4)\,, \quad m = 0,1,\dots,n-1 \qquad (2)$$

где $R_1 = h \cdot f(x_m, y_m)$,

$$R_2 = h \cdot f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{R_1}{2}\right),$$

$$R_3 = h \cdot f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{R_2}{2}\right),$$

$$R_4 = h \cdot f\left(x_m + h, y_m + R_3\right).$$

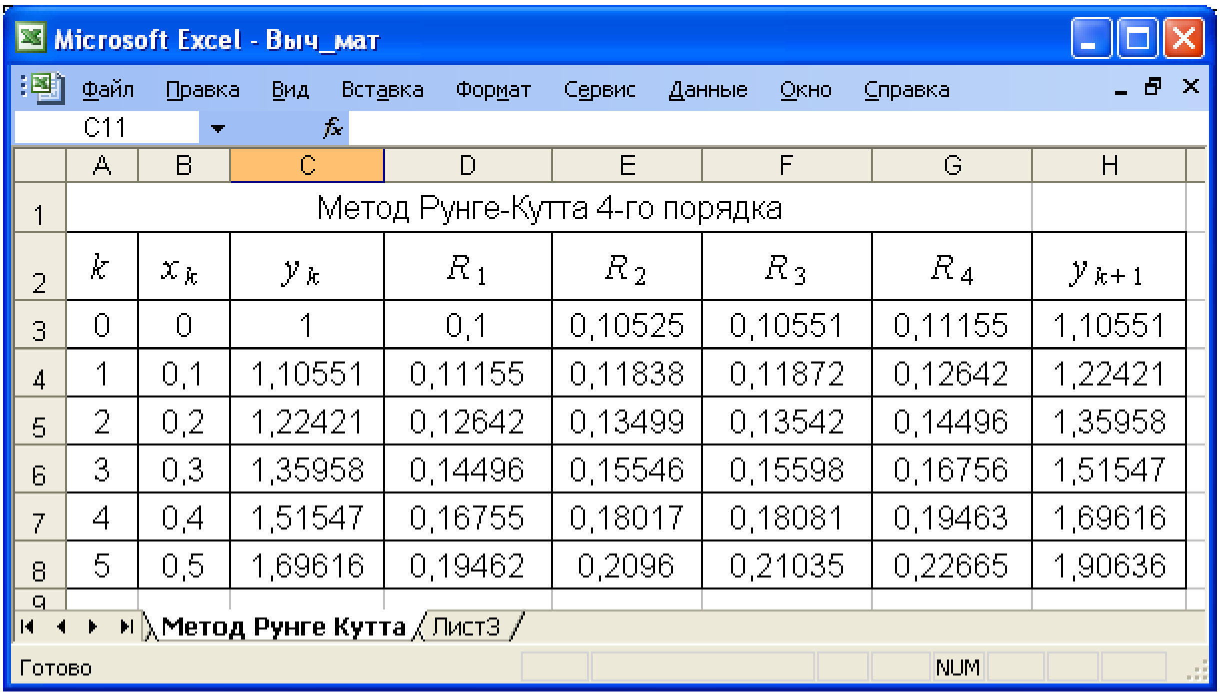
Отметим, что точность полученных приближенных значений зависит от шага h; чем меньше шаг, тем выше точность результатов.

§2 Решение типового задания

Приняв h=0,1 решить указанную задачу Коши методом Рунге-Кутта.

$$y' = y + x^2 \qquad y(0) = 1, \qquad 0 \le x \le 0{,}5.$$

Решение. В нашем случае x_0=0; x_1=0,1; x_2=0,2; x_3=0,3; x_4=0,4; x_5=0,5; y_0=1; $f(x,y)=y+x^2$; h=0,1, $h/2$=0,05. Произведем вычисления с использованием Microsoft Excel. Будем выводить результаты расчетов с пятью десятичными знаками. Искомое решение приведено на рисунке 1.



k	x_k	y_k	R_1	R_2	R_3	R_4	y_{k+1}
0	0	1	0,1	0,10525	0,10551	0,11155	1,10551
1	0,1	1,10551	0,11155	0,11838	0,11872	0,12642	1,22421
2	0,2	1,22421	0,12642	0,13499	0,13542	0,14496	1,35958
3	0,3	1,35958	0,14496	0,15546	0,15598	0,16756	1,51547
4	0,4	1,51547	0,16755	0,18017	0,18081	0,19463	1,69616
5	0,5	1,69616	0,19462	0,2096	0,21035	0,22665	1,90636

Рисунок 1. Решение задачи Коши методом Рунге Кутта

Пояснение к решению:

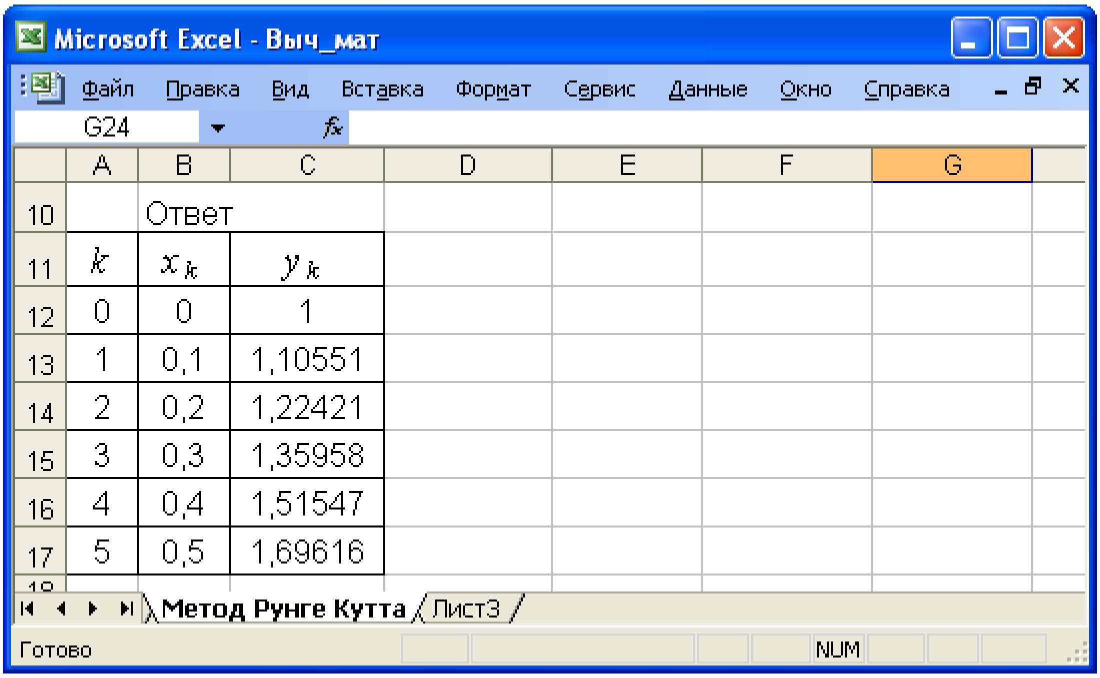
1) В ячейках A1:H2 вводим поясняющий текст.

2) В ячейках A3:B8 вводим расчетные значения по x. В ячейку C3 вводим начальное условие $y(0)=1$.

3) Рассчитываем значение решения в точке x=0,1 по формулам Рунге-Кутта. В ячейку D3 вводим формулу «=0,1*(C3+B3*B3)», нажимаем «Enter». В ячейку E3 вводим формулу «=0,1*(C3+D3/2+СТЕПЕНЬ(B3+0,05;2))», нажимаем «Enter». В ячейку F3 вводим формулу «=0,1*(C3+E3/2+СТЕПЕНЬ(B3+0,05;2))», нажимаем «Enter». В ячейку G3 вводим «=0,1*(C3+F3+СТЕПЕНЬ(B3+0,1;2))», нажимаем «Enter». В ячейку H3 вводим «=C3+(D3+2*E3+2*F3+G3)/6», нажимаем «Enter». Наконец, вычисленное значение переносим в следующую строку, т.е. в ячейку C4 вводим «=H3», нажимаем «Enter».

4) Выделяем диапазон ячеек D3:H3 и делаем протяжку вниз до ячейки H4. Сформировалась строка A4:H4. Выделяем диапазон ячеек C4:H4 и делаем протяжку вниз до ячейки H8. Сформировались все строки таблицы решений (см. рисунок 1).

5) Выписываем искомое решение задачи Коши (см. рисунок 2).



k	x_k	y_k
0	0	1
1	0,1	1,10551
2	0,2	1,22421
3	0,3	1,35958
4	0,4	1,51547
5	0,5	1,69616

Рисунок 2 Решение задачи Коши

§3. Задания для самостоятельного решения

Задание №1.

Приняв $h = 0{,}1$, решить указанную задачу Коши методом Рунге-Кутта 4-го порядка. Условия задач взять из лабораторной работы №9.

§4. Контрольные вопросы для самоподготовки.

1. Сколько раз необходимо на каждом шаге вычислять правую часть уравнения при использовании метода четвертого порядка?
2. Как можно оценить погрешность решения дифференциального уравнения при использовании метода Рунге – Кутта 4-го порядка?
3. Сколько предыдущих значений функции нужно иметь, чтобы сосчитать одно следующее значение?
4. К какой группе методов (аналитические или численные) относится имеющий аналитическое выражение от искомого значения функции метод Рунге – Кутта?
5. Что можно отнести к недостаткам метода, например, самого распространенного четвертого порядка?
6. Как зависит погрешность метода от величины шага решения?
7. Возможно ли применение переменного шага в методе Рунге – Кутта?
8. Каким образом можно организовать автоматический подбор шага решения уравнения?

Ответы на контрольные вопросы.

Лабораторная работа №1. «Основные понятия теории погрешностей»

1) Измерительные приборы; погрешности метода вычислений; погрешности связанные со спецификой записи чисел с плавающей точкой (действительных чисел) в памяти ЭВМ.

2) Предельная абсолютная погрешность равна 0,004.

3) Предельная относительная погрешность равна 4%.

4) Истинное значение числа лежит в пределах $5{,}358 \le A \le 5{,}366$.

5) Предельная абсолютная погрешность равна 0,025.

6) Верных значащих цифры 3; предельная абсолютная погрешность 10^4.

7) Все цифры в записи числа являются верными значащими цифрами (7).

8) Число 5,2000 вычислено с абсолютной погрешность 0,00005, а число 5,2 с абсолютной погрешность 0,05.

9) Ответ: 2,600.

10) Нет. Предельные погрешности, которые фигурируют в вычислениях, являются лишь оценками.

11) Как правило, погрешности возрастают с числом производимых вычислений.

12) $\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i}$.

13) Только верные значащие цифры.

14) По предельной абсолютной погрешности.

15) Количество верных знаков числа отсчитывается от первой значащей цифры числа до- первой, значащей цифры его абсолютной погрешности.

Лабораторная работа №2. «Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений»

1) Отделение корней дает интервал, в котором находится только один корень, это обеспечивает работоспособность большинства методов уточнения корней.

2) Аналитически отделить корень уравнения можно методом проб и ошибок (основан на теореме Больцано-Коши), при этом формально мы знаем, что на концах интервала непрерывная функция принимает значения разных знаков, а количество корней остается неизвестным, т.е. интервал может содержать более одного корня.

3) На концах интервала непрерывная функция принимает значения разных знаков и монотонна.

4) Геометрический смысл метода половинного деления заключается в последовательном делении отрезка, где локализован корень, на две равные части.

5) Если нелинейная функция в левой части уравнения непрерывна, то метод половинного деления всегда позволит получить корень с заданной погрешностью, так как процесс решения в этом случае не зависит от свойств функции.

6) Один из концов отрезка следующего интервала в методе половинного деления всегда находится в середине текущего отрезка, а второй определяется из условия — на концах интервала функция принимает значения разных знаков.

7) Если в интервале находится несколько корней уравнения, то метод деления пополам применить можно, при этом найден будет только один. Какой? Это зависит от свойств функции – в принципе любой.

8) Функции $y=f(x)$ достаточно быть непрерывной, чтобы можно было гарантированно решить уравнение $f(x) = 0$.

9) Метод хорд позволяет определять предварительно отделенные корни.

10) Нет, не всегда. Для получения решения с заданной погрешностью, во-первых, функция должна быть монотонной (по крайней мере в окрестности корня), во-вторых, она должна быть выпуклой (по крайней мере в окрестности корня).

11) Геометрический смысл метода хорд заключается в замене нелинейной функции на участке отделения корня линейной, проходящей через концы участка, т.е. хордой.

12) Исходя из чего выбирается в методе Ньютона первое приближение x_0? Начальное приближение x_0 в методе Ньютона выбирается таким образом, чтобы касательная к функции в точке x_0 пересекала ось x внутри начального интервала, где отделен корень. Это оценивается по знакам функции и второй производной или практически можно методом проб и ошибок.

13) "Закрепленным" будет правый конец b.

14) Если функция $y=f(x)$ немонотонна и не выпукла, то метод Ньютона в классическом варианте может не дать гарантированный результат (можно в отдельных случаях получить корень, если на каждом шаге заново определять закрепленный конец).

15) Истинный корень А лежит между приближениями со стороны точки a и со стороны точки b, т.е. $a_n \leq A \leq b_n$ и нет надобности оценивать погрешность аналитически.

16) Из данной ситуации можно выйти, например, так: на первом этапе решения методом деления пополам, уменьшать интервал, содержащий корень, до тех пор, пока его длина не станет меньше, скажем, 0,1, а потом, применить метод хорд и касательных и искать корень до заданной точности, скажем, до 10^{-5} .

Лабораторная работа №3. «Решение систем линейных уравнений: метод итераций и метод Зейделя**»**

1) Точные методы решения систем линейных уравнений позволяют получить решение непосредственно в аналитическом виде или в виде алгоритма с конечным числом шагов, а приближенные — как предел некоторой последовательности при стремлении числа итераций к бесконечности.

2) Систему из трех уравнений, конечно, проще всего решать любым точным методом, например методом Крамера.

3) Итерационные методы наиболее предпочтительны в задачах высокой размерности (n>30), когда точные методы могут дать решение с большой накопившейся вычислительной погрешностью.

4) Скорость сходимости в методе итераций зависит от свойств системы уравнений (определяющейся коэффициентами уравнений) и от начальных условий поиска решения.

5) Метод итераций будет сходиться, если все суммы модулей коэффициентов строк (или столбцов) преобразованной системы уравнений будут меньше единицы.

6) Число шагов для получения решения с заданной погрешностью можно оценить заранее, используя выражение для погрешности. Для этого надо подставить в выражение заданное значение погрешности и решить получающееся уравнение относительно числа итераций (оно находится в показателе степени).

7) Наличие вычислительной ошибки в итерационных методах приводит лишь к увеличению числа итераций для достижения решения, так как итерационные методы обладают свойством самоисправляемости ошибок.

8) Эти правила приводятся в теоремах скорости сходимости, например, как только $\max_i |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}| < \varepsilon$, то процесс вычислений можно остановить.

Лабораторная работа №4. «Решение систем линейных уравнений: метод Гаусса**»**

1) Путем эквивалентных преобразований привести систему к системе треугольного вида.

2) Системы называются эквивалентными, если у них совпадает множество решений.

3) Нет. Ошибка на каком-то этапе приводит к неверному решению.

4) Вычислительная погрешность метода Гаусса при увеличении числа уравнений в системе резко возрастает, т.к. приходится проводить достаточно много операций. Оценить эту погрешность, увы, нельзя, можно только контролировать и то условно.

5) В методе Гаусса можно ввести дополнительные переменные в каждом уравнении, равные сумме всех коэффициентов уравнения, с которыми проводят

все операции как с коэффициентами.: При этом невыполнение равенства этих переменных сумме коэффициентов является признаком накопившейся вычислительной погрешности.

6) Метод Гаусса относится к точным методам.

Лабораторная работа №5. «Интерполирование функций: формула Лагранжа»

1) Полиномом 6-й степени, так как именно он может быть проведен через заданные 7 точки.

2) В принципе может, в методе не заложено ограничений на применение для экстраполяции.

3) На точность интерполяции влияют: порешности; число узлов; свойства исходной функции (посредством производной (n+1)-го порядка), расположение узлов в интервале, положение точки, в которой определяется погрешность.

4) Новые узлы добавлять можно, но интерполяционное значение функции необходимо рассчитывать заново, а не вносить поправку, обусловленную добавляемой точкой.

5) Узлы можно располагать произвольно.

6) Интерполяционная формула Лагранжа относится к полиномиальным функциям.

7) Дополнительная точка внутри интервала повысит точность интерполяции (если общее число точек не слишком велико).

8) Погрешность в узле всегда равна нулю, так как интерполяционная функция всегда проходит через все узлы.

9) С ростом числа узлов (на заданном интервале) погрешность сначала падает, что обусловлено лучшим совпадением исходной функции и интерполяционным полиномом более высокой степени, а затем может возрастать за счет высокой чувствительности к вычислительным погрешностям, особенно в коэффициентах при высоких степенях переменной x. Она может также возрастать и вследствие того, что полином высокой степени не сходится к

интерполируемой функции.

10) Точность интерполяции в заданной точке можно повысить за счет некоторого повышения числа узлов и оптимального их размещения на заданном интервале.

Лабораторная работа №6. «Интерполирование функций: формулы Ньютона»

1) Может, в методе не заложено ограничений на применение для экстраполяции.

2) Нет, неравномерно располагать узлы интерполяции при использовании формул с конечными разностями нельзя, так как невозможно в этом случае рассчитать конечные разности; существует развитие методов Ньютона, позволяющее использовать неравномерно расположенные узлы, в этом случае используются разделенные, а не конечные разности.

3) Точность интерполяции в заданной точке можно повысить за счет увеличения числа узлов.

4) Можно получить конечную разность 4-го порядка по n=5 точкам.

5) Можно конечную разность любого порядка выразить через исходные значения функции, так как разность первого порядка непосредственно выражается через функции, разность второго порядка — через разности первого порядка, подставив выражения для которых в формулу для второй разности получим выражение второй разности через исходные функции, и т.д.

6) Первая интерполяционная формула базируется на конечных разностях, вычисленных в начальных точках, а вторая — на конечных разностях, вычисленных в конечных точках заданного интервала.

7) Для оценки погрешности интерполяции по имеющимся n точкам можно для интерполяции использовать меньшее число точек (например, n-1 или n-2), а остальные точки использовать для вычисления конечной разности высокого порядка, которая используется в формуле оценки погрешности интерполяции.

8) По трем заданным точкам можно получить интерполяционный полином

второго порядка.

9) Вид у них будет одинаковый, т.к. интерполяционный полином степени n при наличии $n+1$ точки единственный.

Лабораторная работа №7. «Приближенное вычисление определенных интегралов: формула трапеций»

1) При использовании метода трапеций для повышения точности интегрирования можно увеличить число участков разбиения исходного интервала, на каждом маленьком интервале интеграл будет вычисляться точнее.

2) Метод трапеций как один из самых простых методов находит применение при вычислениях интегралов со сравнительно невысокой точностью, а также может использоваться при интегрировании функций с невысокой скоростью изменения.

3) Предложенная функция линейная, следовательно, метод трапеций даст абсолютно точный результат. Он и будет наиболее эффективен, так как он из всех методов, способных вычислить этот интеграл точно, самый простой.

4) Можно; если подынтегральная функция будет постоянной, то оба метода дадут точное значение интеграла, а если она будет линейной, то метод трапеций даст точный результат.

5) Нельзя, т.к. неопределенный интеграл не является числом и как следствие, у него неизвестны границы интегрирования.

6) Автоматическим подбором шага интегрирования можно пользоваться в тех случаях, когда есть возможность оценки погрешности интегрирования. Особенно это предпочтительно при равномерном расположении точек и удвоении числа шагов, так как в этом случае можно не вычислять дважды отдельные значения подынтегральной функции, а использовать уже найденные на предыдущем шаге; это относится ко всем простейшим методам в частности к методу трапеций.

7) Вычисляется значение интеграла при n и $2n$ точках разбиения. Если разность между полученными значениями меньше заданной погрешности, то вычисления останавливаются, а в качестве ответа выдается значение при $2n$ точках разбиения.

Лабораторная работа №8. «Приближенное вычисление определенных интегралов: формула парабол (Симпсона)»

1) Подынтегральная функция заменяется в методе Симпсона параболой второго порядка.

2) Предложенная функция квадратичная, следовательно, метод Симпсона даст абсолютно точный результат. Он и будет наиболее эффективен, так как он самый простой из всех методов, способных вычислить этот интеграл точно.

3) Если средняя точка берется не в середине участка, то, во-первых, изменится вычислительная формула, во-вторых, метод не будет без ошибки интегрировать кубические параболы (именно за счет выбора третьей точки в середине участка метод обеспечивает интегрирование без ошибки и полинома третьей степени, а не только второй), в-третьих, при "двойном просчете" не удастся использовать ранее рассчитанные значения подынтегральной функции, что удлинит оценку погрешности и усложнит программирование метода.

4) Погрешность равна нулю. Интегрирование без ошибки кубических парабол методом Симпсона обеспечивается потому, что третья точка, участвующая на каждом участке в вычислении интеграла, берется в середине интервала.

5) Нет, не обязательно, если на исходном участке получающаяся погрешность интегрирования получается удовлетворительной.

6) Для данной линейной подынтегральной функции результат использования метода Симпсона совпадет с результатами методов трапеций, методов Ньютона—Котеса порядка 1 и выше. Только метод прямоугольников даст результат с погрешностью.

7) Следует увеличить число точек разбиения.

8) Да, можно.

9) Подбор шага в этом случае происходит автоматически, что облегчает программирование данного метода.

10) При уменьшении числа разбиений n исходного интервала погрешность численного интегрирования, как правило, увеличивается. Исключения составляют случаи, когда интеграл вычисляется численным методом точно, в этих случаях уменьшение числа интервалов не изменит погрешность.

Лабораторная работа №9. «Приближенное решение дифференциальных уравнений: метод Эйлера»

1) Задача Коши имеет единственное решение, а дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений.

2) В виде таблично заданной функции.

3) Решением дифференциального уравнения является множество функций, а не число, как при решении конечных уравнений.

4) Начальные условия должны задаваться для численного решения дифференциального уравнения (задача Коши).

5) Модифицированный метод Эйлера относится к группе одношаговых методов, так как для нахождения значения функции в следующей точке требуется знание только одной текущей точки.

6) Модифицированный метод Эйлера имеет погрешность, пропорциональную h^2, поскольку он является, в отличие от метода Эйлера, методом второго порядка (интеграл заменяется по методу трапеций).

7) Метод Эйлера позволяет решать системы дифференциальных уравнений.

8) Можно решать задачи, не относящиеся к задачам Коши, хотя существуют другие, более подходящие для этой цели методы.

9) Задание начальных условий при решении задачи Коши обязательно.

10) Погрешность решения можно оценить с использованием приема двойного просчета; именно этот прием положен в основу автоматического подбора шага для получения решения с заданной погрешностью.

Лабораторная работа №10. «Приближенное решение дифференциальных уравнений: метод Рунге-Кутта 4-го порядка»

1. При использовании метода четвертого порядка необходимо на каждом шаге четыре раза вычислять правую часть уравнения.

2. Погрешность решения можно оценить с использованием приема двойного просчета; именно этот прием положен в основу автоматического подбора шага для получения решения с заданной погрешностью.

3. Метод Рунге – Кутта относится к одношаговым, поэтому для расчета следующего значения функции не нужно ни одного предыдущего значения.

4. Метод Рунге – Кутта относится к численным методам решения дифференциальных уравнений.

5. К недостаткам метода (четвертого порядка) можно отнести необходимость четырехкратного вычисления правых сторон уравнений на каждом шаге.

6. Погрешность метода пропорциональна h^4, где h —шаг решения.

7. Метод Рунге – Кутта является одношаговым, поэтому можно применять переменный шаг при его использовании, так как для нахождения следующей точки требуется только одна текущая.

8. Шаг решения можно автоматически подобрать, последовательно уменьшая его вдвое, оценивая при этом разность найденного значения функции при двух значениях шага: как только разница не будет превышать заданной погрешности, так текущий шаг можно принять за шаг решения уравнения.

Литература

Основная литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. // М., «Лань», 2007.- 664с.
2. Васильков Ю.В., Василькова В.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании. // М., Финансы и статистика, 2009г., 256с.
3. Мажукин В.И., Королева О.Н. Математическое моделирование в экономике. Часть I. Численные методы и вычислительные алгоритмы. Часть II. Лабораторный практикум по численным методам и вычислительным алгоритмам. // М., Флинта: МПСИ, 2008г., 232с.
4. Срочко В.А. Численные методы. Курс лекций. // М., «Лань», 2010.

Дополнительная литература

5. Демидович В.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа.// М., «Лань», 2010. – 400С
6. Гусак А.А. Справочное пособие к решению задач: Математический анализ и дифференциальные уравнения. // «Тетра Системс», Минск, 2006.
7. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. // М., «Лань», 2009.- 367С.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. // М., «Лань», 2009.-662С

Содержание.

Введение .... **Ошибка! Закладка не определена.**

Лабораторная работа № 1 3

«Основные понятия теории погрешностей» 3

Лабораторная работа № 2 12

«Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений» 12

Лабораторная работа № 3 19

«Решение систем линейных уравнений: метод итераций и метод Зейделя» 19

Лабораторная работа № 4 26

«Решение систем линейных уравнений: метод Гаусса» 26

Лабораторная работа № 5 33

«Интерполирование функций: формула Лагранжа» 33

Лабораторная работа № 6 40

«Интерполирование функций: формулы Ньютона» 40

Лабораторная работа № 7 48

«Приближенное вычисление определенных интегралов: формула трапеций» 48

Лабораторная работа № 8 55

«Приближенное вычисление определенных интегралов: формула парабол (Симпсона)» 55

Лабораторная работа № 9 62

«Приближенное решение дифференциальных уравнений: метод Эйлера» . 62

Лабораторная работа № 10 68

«Приближенное решение дифференциальных уравнений: метод Рунге-Кутта 4-го порядка» 68

Ответы на контрольные вопросы. 73

Литература 83

Содержание. 84