CÁLCULO APLICADO – VÁRIAS VARIÁVEIS

Revisão:

DERIVADA de funções de uma variável

- ✓ Regras de derivação (soma e produto por constante) para derivar combinações lineares de funções elementares (funções constantes, potência, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e arcos trigonométricos
- ✓ Regra do Produto, regra do quociente e a regra da cadeia
- ✓ Aplicação de derivadas de funções de uma variável

- ✓ Valores máximos e mínimos de uma função de uma variável
- ✓ Testes da 1ª e 2ª derivada.
- ✓ Problemas de otimização.

Objetivo

Aplicar os conceitos de Cálculo Integral na resolução de problemas em engenharia e áreas afins.

Profa. Me. Alessandra Azzolini

FMU CENTRO UNIVERSITÁRIO

Derivada de uma função f em relação à variável x: é a taxa de variação de f à medida que x varia. A derivada no ponto $x = x_0$ é

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Regras de derivação

Derivada da função constante

$$\frac{d}{dx}(c) =$$

Se $\boldsymbol{y = f(x) = c, \text{então } y' = f'(x) =}$

Exemplo

$$f(x) = 4 \Rightarrow f'(x) =$$

Derivada da função identidade

$$\frac{d}{dx}(x) =$$

Se $\boldsymbol{y = f(x) = x, \text{então } y' = f'(x) =}$

Utilizando a **regra da potência** para resolver

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \quad ou$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f(x)' =$$
$$f(x) = x^4 \Rightarrow f(x)' =$$

Se f(x)= k.g(x) então f′(x)= k.g′(x)

$$f(x) = 3x^4$$
$$f(x)' =$$

Regra da soma e diferença
"A derivada da soma é igual à soma ou diferença das derivadas".
A derivada de uma soma ou diferença de duas funções f(x) e g(x) é a soma ou diferença das derivadas de f(x) e g(x).

$h(x) = 6x^2 + 4x$

$h'(x) =$

$y = 2x^3 - 5x - x + 3$

$y' =$

Derivada da função exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

A derivada da função exponencial $f(x) = e^x$ é ela mesmo.

Função	Derivada
$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$c.x^n$	$c.nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
a^x	$a^x\,ln(a)$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\,ln(a)}$
$ln\,(x)$	$\frac{1}{x}$
$sen\,(x)$	$cos\,(x)$
$cos\,(x)$	$-sen\,(x)$
$tg(x)$	$sec^2(x)$
$cotg(x)$	$-cossec^2(x)$

Regra do Produto

$$\boldsymbol{F(x) = f(x).g(x)}$$

$$\boldsymbol{F'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)}$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^4.ln\,(x)}$$

$$\boldsymbol{f'(x) =}$$

Regra do quociente

A Regra do Quociente diz que a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador.

$$\boldsymbol{F(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\boldsymbol{F'(x)} = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{sen\,(x)}{x^2}}$$

Agora é com vocês...

Vamos praticar!

Obtenha a derivada de cada função a seguir:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

b) $f(x) = x^2 + x^5$

c) $f(x) = 2x + 1$

d) $f(t) = 3t^2 - 6t + 10$

e) $f(y) = 10 \ln(y) - 3y + 6$

f) $f(x) = 5\text{sen}(x) + 2\cos(x) - 4$

g) $f(x) = x.\text{sen}(x)$

h) $f(x) = x^2.\ln(x)$

i) $f(x) = (2x^2 - 3x + 5).(2x - 1)$

j) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

k) $f(x) = \text{sen}\ \pi - \text{tg}(x)$

l) $f(x) = \sqrt{x}.\ \cos(x)$

m)) $\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{e^x}}{\boldsymbol{2x}}$

FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA (REGRA DA CADEIA)

Consideremos a função composta

$$F(x) = f(g(x))$$

Se *g* for derivável em x e *f* for derivável em *g(x)*, então a função composta
F = fog definida por *F(x) = f(g(x))* é derivável em x e *F* ' é dada pela seguinte fórmula:

$$F'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

Exemplo

$\boldsymbol{a}) \ \boldsymbol{F(x) = sen\ x^2}$

$\boldsymbol{b}) \ \boldsymbol{(sen\ x)^2}$

$\boldsymbol{c}) \ \boldsymbol{F(x) = e^{x^2-3x}}$

Utilizar a regra da cadeia para calcular a derivada da função

$\boldsymbol{a}) \ \boldsymbol{f(x) = (5x-7)^3}$

$\boldsymbol{b}) \boldsymbol{f(x) = \cos(5x^4)}$

$\boldsymbol{c}) \boldsymbol{f(x) = \ln(3x^2-2x)}$

$\boldsymbol{d}) \ \boldsymbol{f(x) = e^{4x}}$

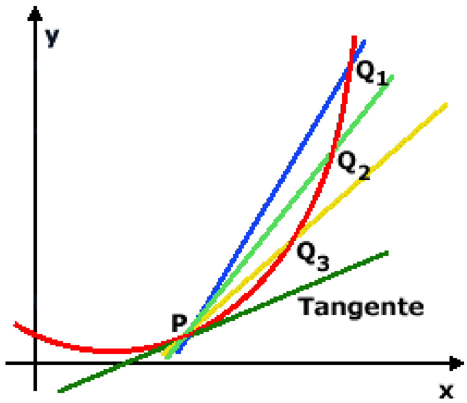
$\boldsymbol{e}) \ \boldsymbol{f(x) = (x^2-9)^3}$

$\boldsymbol{f}) \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x^3-3}}$

Derivadas de ordem superior

Seja $f'(x)$ a derivada de $f(x)$. Se calcularmos a função derivada $f'(x)$, nos pontos em que ela existe chamaremos de derivada segunda de $f(x)$ a essa função e a indicamos por $f''(x)$.

De modo análogo, podemos definir derivada terceira, quarta etc. A derivada de ordem n de $f(x)$será representada por $f^{(n)}(x)$, se n for grande, evitando o uso de muitas "linhas".



Calcular as sucessivas derivadas da função definida em $\mathbb{R}\ por$

Calcular as derivadas sucessivas até a ordem n = 5 indicada.

$a)\ f(x) = x^4 - 6x^3 - x$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

$f^{iV}(x) =$

$f^{v}(x) =$

$b)\ f(x) = sen\, x$

Usando as fórmulas de derivação, calcular a derivada de **3a** ordem da função

$\boldsymbol{f(x) = e^{7x}}$ em $\boldsymbol{x_0 = 0}$.

Aplicação das derivadas na física

A velocidade como derivada

Um objeto em movimento obedece à função horária $s = f(t) = t^2 + 4t$ (**t** em segundos e s em metros).

Determinar sua velocidade no instante $t_0 = 3s$.

Resolução:

$v = f'(t) = 2t + 4$

$v = f'(3) =$

Portanto, a velocidade no instante $t_0 = 3s$, v(3) será **m/s.**

A aceleração como derivada

A aceleração no instante $t_0 = 3s$ será igual á derivada da função horária $s = f(t)$.

$a = f''(t) = 2$

$a = f''(3) =$

Portanto, a aceleração no instante $t_0 = 3s$, a(3) será $\mathbf{m/s^2}$**.**

1. O movimento de um objeto ocorre ao longo de uma reta horizontal, de acordo com a função horária: $s = f(t) = 2t^2 + 5t - 6$. Sabendo-se que a unidade de comprimento é o metro e de tempo, o segundo, calcule a velocidade no instante $t_0 = 4s$.

$v = f(t) =$

2. Dada a função horária de um movimento retilíneo $s = f(t) = 8t^2 - t$, determine a distância em km percorrida e a velocidade em km/h ao fim de 5h.

$s = f(t) = 8t^2 - t$

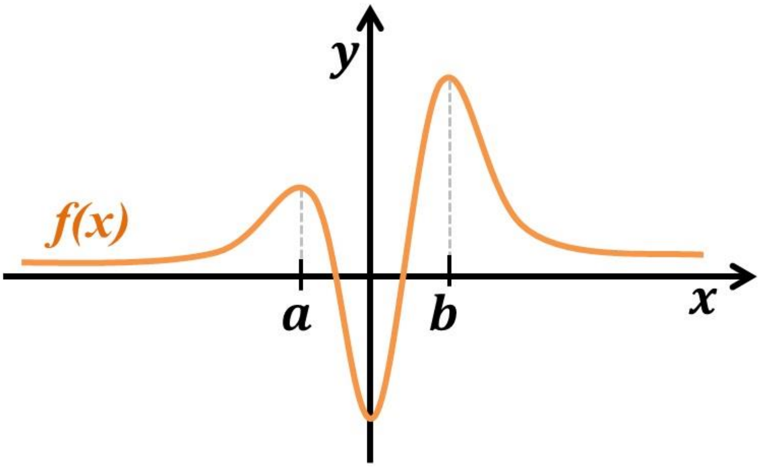
$s =$

3. Determine a aceleração de uma partícula no instante $t_0 = 6$, sabendo que sua velocidade obedece à função $v(t) = 4t^2 + 2t$ (Velocidade: m/s; tempo:s)

$s = v(t) = 4t^2 + 2t$

Máximos e Mínimos de uma função: teste da primeira derivada

Grosseiramente podemos dizer que os pontos de Máximos e Mínimos de uma função são os pontos de picos e de depressões da função. Veja o gráfico:



Observando o gráfico podemos identificar que os pontos ***f(a)*** e ***f(b)*** são pontos de máximo local e ***f(0)*** é ponto de mínimo local.

Ainda mais, podemos dizer que o ponto ***f(b)*** é um máximo absoluto e ***f(0)*** é ponto de mínimo absoluto, pois ***f(b)*** é o maior valor de ***f*** e ***f(0)*** é o menor valor de ***f*** :

$$f(0) \leq f(x) \leq f(b).$$

Mas como encontrar estes pontos em uma função qualquer que não se conheça o gráfico?

Observamos que nos pontos de máximos e de mínimos de uma função com intervalos infinitos encontram-se os pontos críticos (pontos de inflexão).

Assim, quando derivamos e igualamos a zero, encontram-se estes pontos, $f'(x) = 0$.

O Estudo do sinal da função consiste em avaliar o comportamento da função ao longo do domínio, ou seja, descrever onde ela é crescente, decrescente e os pontos de inflexão.

Para realizar este estudo utilizamos os conhecimentos de derivada, uma vez que a derivada descreve a inclinação da reta tangente. Assim, quando tem-se:

- $f'(x) > 0$, a inclinação é positiva então a função é crescente.
- $f'(x) < 0$, a inclinação é negativa então a função é decrescente.
- $f'(x) = 0$, a inclinação é nula então a função está nos pontos de inflexão.

Vejamos um exemplo:

Dada a função $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$, faça o estudo da função.

Primeiramente deve-se derivar a função *f(x).* Como se trata de um polinômio pode-se aplicar a derivada da potência em cada termo, onde obtém-se:

$$f'(x) = 6x^2 - \frac{3}{2} . 2x - 3$$

$$f'(x) = 6x^2 - 3x - 3$$

Iniciamos encontrando os pontos de inflexão, pontos onde a derivada é igual a zero, ou seja, onde a inclinação da reta tangente é nula. $f'(x) = 0$

$$6x^2 - 3x - 3 = 0$$

Como se trata de uma equação do segundo grau pode-se encontrar as raízes aplicando a fórmula de Bháskara, onde encontram-se as raízes:

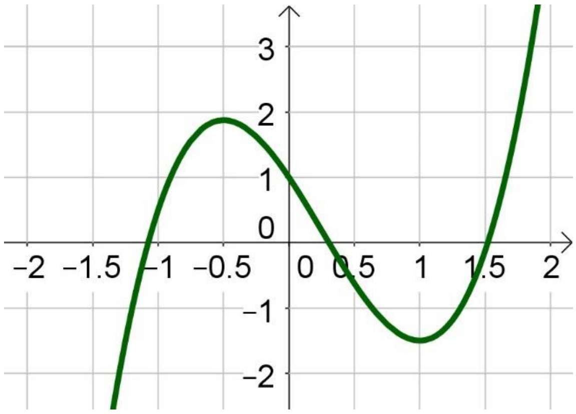
$$x_1 = 1 \;\; e \;\; x_2 = -\frac{1}{2}$$

Isto quer dizer que os pontos $x =$ e $x =$ a função *f(x)* não é crescente nem decrescente.

Começamos com o caso onde a função é crescente $(f'(x) > 0)$

De forma análoga, pode-se encontrar onde ela é decrescente, $f'(x) < 0$:

Observa-se no gráfico o comportamento da função conforme acabamos de encontrar.



O ponto de máximo local em $x = -\frac{1}{2}$ e mínimo local em $x = 1$.

Máximos e Mínimos de uma função: teste da segunda derivada

Análise da concavidade de uma função

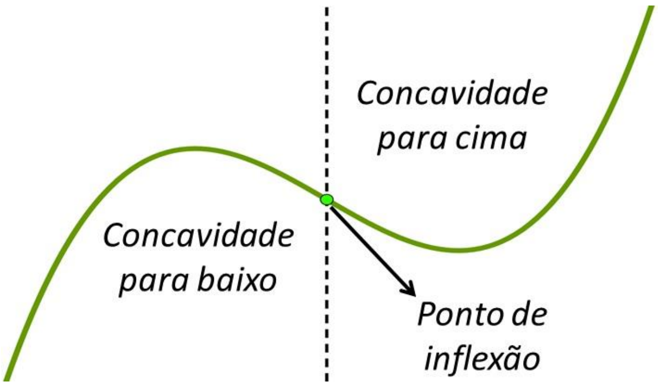
Apresenta-se como realizar a **Análise da concavidade de uma função**, ou seja, determinar em que parte do domínio a função possui a concavidade voltada para cima e/ou para baixo.

Para isto a função deve ser duas vezes derivável em um intervalo aberto *(a,b)* e deve-se verificar as seguintes situações:

1) Se $f''(x) > 0$ em *(a,b)*, então a concavidade está voltada para cima;

2) Se $f''(x) < 0$ em *(a,b)*, então a concavidade está voltada para baixo;

3) Se $f''(x) = 0$ em *(a,b)*, então este é um ponto de inflexão.



Observação: nem todo ponto de inflexão é um ponto de máximo ou mínimo, sempre faça o estudo do sinal da função antes e depois dos pontos encontrados, pois o sinal deve mudar.

Veja o exemplo da função $f(x) = x^3$ para o domínio $x \in \mathbb{R}$, na qual $f'(x) = 3x^2$ e $3x^2 = 0$ onde encontramos $x = 0$, porém esta função é monótona crescente (sempre crescente), não havendo troca de sinal em ***0***. Logo, não há pontos de máximos e de mínimos.

Obs: quando temos uma função ***f*** continua em um intervalo fechado, ***[a,b]***, então tem-se pontos de máximos ou mínimos locais em ***a*** e ***b,*** mas não necessariamente máximos ou mínimos absolutos.

1º) Calculamos $f'(x)$

2º) Calculamos os números críticos x_i $de\ f'^{(x)} = 0$

3º) Calculamos $f''(x)$, nela substituindo os números críticos.

4º) aplicando o teste da derivada segunda.

Determine os intervalos abertos nos quais *f(x)* têm a concavidade para cima e para baixo:

$a)\ \boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 1}$

1º) Calculamos $f'(x)$

2º) Calculamos os números críticos x_i $de\ f'^{(x)} = 0$

3º) Calculamos $f''(x)$, nela substituindo os números críticos.

4º) aplicando o teste da derivada segunda:

Como $f''(\quad)\ e\ f''(\quad)$ são diferentes de zero, existem extremos locais.

$$x = \text{ é } ponto\ de\ máximo\ relativo$$

$$x = \text{ é } ponto\ de\ minimo\ relativo$$

Determine os pontos de máximos relativo e de mínimo relativo das funções, se existirem:

$máximo\ relativo$

$\boldsymbol{mínimo\ relativo}$

$a)\ f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

$b)\ f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$

$c)\ f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$

$d)\ f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 24x + 15$

Aplicação da Teoria dos Máximos e Mínimos na Resolução de Problema

Exemplo 1

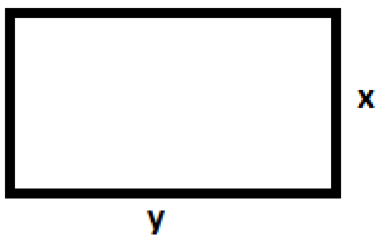
Dentre os retângulos de 16 cm de perímetro, qual o de maior área?

Resolução

1º) Determinamos a função principal:

A função principal é a área do retângulo, pois a grandeza área vem acompanhada da expressão maior.

Sejam x e y os lados de um retângulo.



A área do retângulo em função de x e y será

$\boldsymbol{A(x,y) = \ xy}$ (1)

2º) Escrevemos a função principal só dependendo de uma variável.

O outro dado do problema, 16 cm de perímetro servirá para fazer com que a função principal tenha uma só variável ou só x ou y.

O perímetro do retângulo é dado por $\boldsymbol{2p = 2x + 2y = 16 \Rightarrow p = x + y =}$

$\boldsymbol{y = 8 - x}$ (2)

Substituindo (2) em (1), vem:

$\boldsymbol{A(x,y) = \ xy}$ (1) e $\boldsymbol{y = 8 - x}$ (2)

$\boldsymbol{A(x) = \ x(8 - x)}$

3º) Calculamos os pontos críticos de $\boldsymbol{A(x)}$:

$\boldsymbol{A'(x) = 8 - 2x}$

$\boldsymbol{x =}$ é $\boldsymbol{o}$ ú$\boldsymbol{nico\ ponto\ cr}$í$\boldsymbol{ttico\ de\ A(x)}$.

4º) Calculamos $\boldsymbol{A''(x)}$

$\boldsymbol{A''(x) =}$

$\boldsymbol{A''(4) =}$

5º) Conclusão

O retângulo de maior área é dado por

$\boldsymbol{A(4) = 4\ .\ (8 - 4) = 16, isto}$ é$\boldsymbol{, um\ quadrado\ de\ lado\ com\ 4\ cm}$.

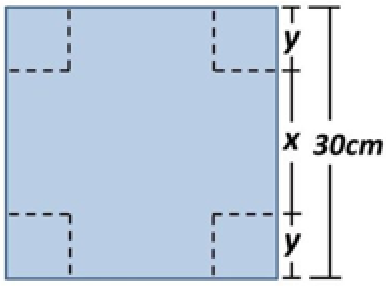
FMU CENTRO UNIVERSITÁRIO

Exemplo 2

Um exercício em que se utiliza o conhecimento de Máximos e Mínimos de uma função.

Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado *30cm*, deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando seus cantos em quadrados iguais e dobrado convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de modo que o volume da caixa seja o maior possível.

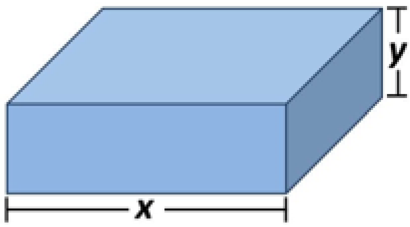
Iniciamos a resolução fazendo um esboço do problema:



onde *y* é o lado dos quadrados a serem cortados e *x* a medida resultante após o corte. Assim, tem-se:

$$30 = x + 2y \Rightarrow x = 30 - 2y \, .$$

Após basta cortar os cantos e dobrá-los para obter uma caixa da seguinte forma:



onde o volume é calculado como:

$$V = x^2 y \, .$$

Substituindo tem-se:

$$V = (30 - 2y)^2 y = 900y - 120y^2 + 4y^3 \, .$$

Sabe-se que os máximos e mínimos são encontrados nos pontos críticos, ou seja, onde o coeficiente angular da reta tangente é igual a zero.

Assim, para obter os pontos onde este coeficiente seja igual a zero, deve-se derivar a equação é igualar a zero, $\frac{dV}{dy} = 0$. Em seguida, encontram-se os valores destes pontos:

$$\frac{dV}{dy} = 900 - 240y + 12y^2$$

$$0 = 900 - 240y + 12y^2 \, .$$

Aplicando a **Fórmula de Bhaskara** obtém-se:

$$y = \frac{240 \pm \sqrt{240^2 - 4 \cdot 12 \cdot 900}}{2 \cdot 12}$$

$$y = \frac{240 \pm 120}{24},$$

o que nos dá $y_1 = 15cm$ e $y_2 = 5cm$.

Porém, o valor de $y_1 = 15cm$ não pode ser admitido, visto que teríamos um valor de $x = 0cm$.

Resposta: devem ser cortados quadrados de lados de $5cm$.

Regra de L'Hospital

Apresenta-se uma forma prática de resolver limites indeterminados utilizando derivadas, isto é através da Regra de L'Hospital.

Entretanto, para utilizar estas regras temos que ter as indeterminações dos tipos $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Seja as funções $f(x)$ e $g(x)$ diferenciáveis em um intervalo aberto que contém a e que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

ou

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty.$$

Se existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ ou se esse limite for $-\infty$ ou $+\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Obs: Esta mesma afirmação vale para $x \to a^-$, $x \to a^+$, $x \to -\infty$ ou $x \to +\infty$.

Exemplos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Determine:

$a)\ \lim\limits_{x \to -2} \frac{x+2}{x^2-4}$

$b)\ \lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-8x}$

$c)\ \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-6x+5}$

$d)\ \lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2-4x+2}{x^3-\ \ x^2-x+1}$

$e)\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2+3x}{x^3+4}$

$f)\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x}$

$g)\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

STEWART, James. ***Cálculo, volume I***. 5ª edição. São Paulo - SP: Pioneira Thomson Learning, 2006.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um Curso de Cálculo: Volume 1**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2001.