CÁLCULO APLICADO – VÁRIAS VARIÁVEIS

Revisão de INTEGRAIS

de funções de uma variável

TEMAS

Revisão de Integrais de funções de uma variável.

- Integração de funções elementares (funções constantes, potência, exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e arcos trigonométricos
- Integral por Substituição e Integral por Partes

Integração de Funções Racionais por Frações Parciais.

Profa. Me. Alessandra Azzolini

Integral

Uma função F será chamada de

$$Integral: \begin{cases} \boldsymbol{Indefinida}: quando\ não\ há\ limites\ de\ integração \rightarrow\ F(x) + C \\ e \\ \boldsymbol{Definida}: quando\ há\ limites\ de\ integração \rightarrow\ valor \end{cases}$$

Definição de Integral Indefinida

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x) + C$ é chamada $integral\ indefinida$ da função $f(x)$ e é denotada por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Lembrando que é uma antiderivada ou um primitiva de f, se $F'(x) = f(x)$.

Exemplo

$F(x) = x^2$ é uma antiderivada (primitiva) de $f(x)$= 2x, pois $F'(x) = 2x$

Integrais básicas:

- Integral de constante: $\int n\,dx$, então $F(x) = nx + C$

$f(x) = 7 \rightarrow \int$ dx

$f(y) = \pi$

Por que usar a constante "C"?

$f(x) = x^3 + 2 \rightarrow$ função

$f'(x) = 3x^2 + 0 \rightarrow$ derivada da função

$F(x) = \frac{3x^3}{3} + C \rightarrow$ integral da função derivada

$F(x) = x^3 + C$

-Integral de polinômios:

$\int x^n dx$, então $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$f(x) = 2x \rightarrow \int 2x\, dx \rightarrow F(x) = \frac{}{} + C$

$f(x) = x^2 \rightarrow \int x^2 dx \rightarrow F(x) = \frac{}{} + C$

$f(x) = \frac{1}{x^3} \rightarrow \int x^{-3} dx \rightarrow F(x) = \frac{x^{-3}}{} + C = \frac{x}{} + C =$-

Integral de polinômios:

$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow \int \sqrt{x} dx \rightarrow \int x \quad dx \rightarrow \frac{}{} + C \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{} + C$

- Integral da função logarítmica:

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \int \frac{1}{x} dx$, então $F(x) = \ln(x) + C$

- Integral da função seno e cosseno:

f(x) = sen(x) → $\int$ sen(x) dx, então F(x)=

f(x) = cos(x) → $\int$ cos(x) dx, então F(x)=

- Integral de exponencial:

f(x) = e^x → $\int e^x dx$, então F(x)=

Propriedades Operatórias:

1ª Se F(x)= k.f(x) então k $\int$ f(x)dx

f(x)= $7e^x$ →F(x)=

2ª Se F(x)= f(x) + g(x) então $\int f(x)dx + \int g(x)dx$

f(x)= x^2 + sen(x) → F(x)= $\frac{}{} + C$

3ª Se f(x)= u(x) - v(x) então $\int u(x)dx - \int v(x)dx$

f(x)= x^3 + cos(x) → F(x)= $\frac{x}{} + C$

Agora é com vocês...Vamos praticar!

1) Determine

a) $\int x^8 dx =$

b) $\int (x^2 + 3x + 2)\, dx =$

c) $\int \sqrt{5}\, dy =$

d) $\int x^3 \sqrt{x}\, dx =$

e) $\int \frac{9}{x} dx =$

f) $\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2}\, dx$

Integral por substituição

Até agora vimos algumas maneiras integrar algumas funções, mas será que com o que temos seria fácil resolver $\int \sqrt{3x+4}\, dx$?

Para resolvermos esses tipos de integrais, precisamos usar um teorema, assim como a Regra da Cadeia que vimos em derivada.

<u>Teorema (Regra da cadeira para a integral)</u>: Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma primitiva de f em I. Então,

$$\int \boldsymbol{f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C}$$

Exemplos:

a) $\int (x-2)^3\, dx$	u

b) $\int (x^2+3)^4\, 2x\, dx$	u

$c)\ \int \frac{e^x}{(1+e^x)^3} dx$	$u =$

d) $\int sen^2 x.\cos(\mathrm{x})\mathrm{dx} =$	$u =$

e) $\int \cos(\mathrm{x}+2)\mathrm{dx}$	$u =$

f) $\int \mathrm{e}^{2\mathrm{x}}\mathrm{dx} =$	$u =$

Agora é com vocês...Vamos praticar!

2) Calcule as integrais indefinidas

a) $\int (x-3)^5\, dx$	$u =$
$b) \displaystyle\int (x^3+7)^4\, x^2\, dx$	
c) $\int \left(\frac{x}{x^2+6}\right) dx\ =$	
d) $\int \cos(\mathrm{x}) \sqrt{sen(x)}\mathrm{dx} =$	
e) $\int tg^2(x) sec^2(x)\mathrm{dx} =$	
f) $\int \left(\frac{2x^2}{1-x^3}\right) dx\ =$	$u =$
g) $\int x\ sen\ (x^2+1)\mathrm{dx}$	
h) $\int \frac{\cos(\ln(x))}{\mathrm{x}} \mathrm{dx} +$	

CENTRO UNIVERSITÁRIO

Integral por partes

Quando escrevemos a fórmula da derivada de um produto, temos:

$$d(u.v) = u'.v + v'.u$$
$$d\,(u.v) = du.v + dv.u$$
$$u.dv = d(u.v) - du.v$$

Integrando, obtemos:

$$\int u.dv = \int d(u.v) - \int du.v$$

Logo:

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

Integral por partes

$$\int u.dv = u.v - \int v.du$$

Exemplos:

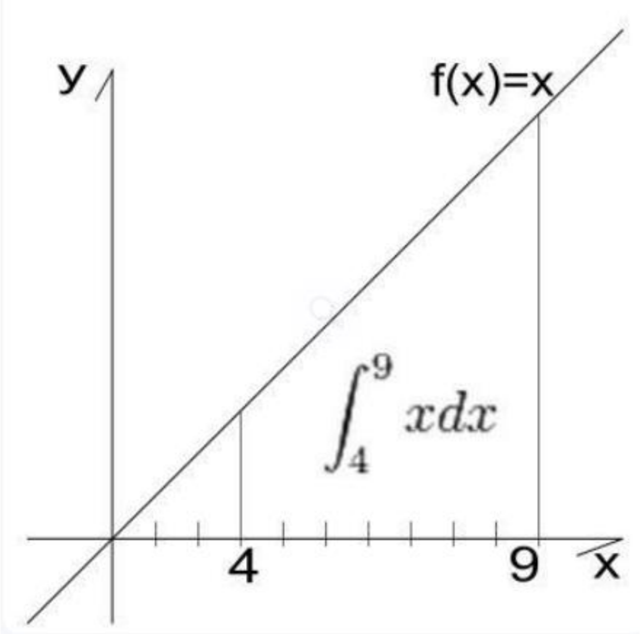
$\int x\, sen(x)dx =$	$u =$ $du =$	$dv =$ $v =$
$\int ln\,(x)dx =$	$u =$	$dv =$
$\int x\, sec^2(x)dx =$	$u =$ Substituição $u =$	$dv =$

3) Resolva as integrais indefinidas por partes.

a) $\int x.e^{x}\mathrm{dx}=$		
b) $\int x.\ln(x)\ \mathrm{dx}$		
c) $\int x.e^{2x}\mathrm{dx}=$		

Integral Definida

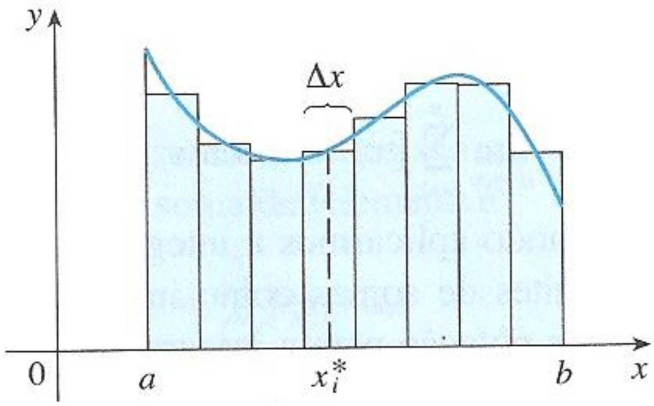
Quando aparece uma função como a seguinte e pede-se a área, geralmente não temos problemas em calcular



$A = — = — =$

$\int \quad dx = \quad — \mid \quad =$

Seja *f* uma função contínua num intervalo [a,b]:



$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} [\, f(x_1).\Delta x_1 + f(x_2).\Delta(x_2) + \cdots + f(x_n).\Delta x_n]$$

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x_i \rightarrow \textbf{Soma de Riemann}$$

O limite recebe o nome de Integral definida da função *f* sobre o intervalo [a,b] e será indicado pela notação:

$$A = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*).\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Teorema Fundamental do Cálculo (T.F.C.):

Se f(x) é contínua em um intervalo fechado [a,b] e F(x) (Integral), temos que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

4) Resolva as integrais definidas

$a) \int_2^5 x^2 dx =$

$b) \int_1^2 \frac{1}{x} dx =$

$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen(x)}{2} dx =$

$d) \int_{-2}^{2} (x^2 - 6x + 12)\,dx =$

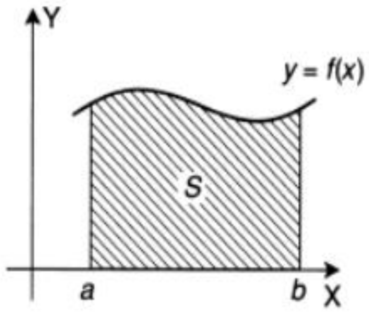
$e) \int_1^4 \frac{4}{x^2} dx =$

$f) \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx =$

CENTRO UNIVERSITÁRIO FMU

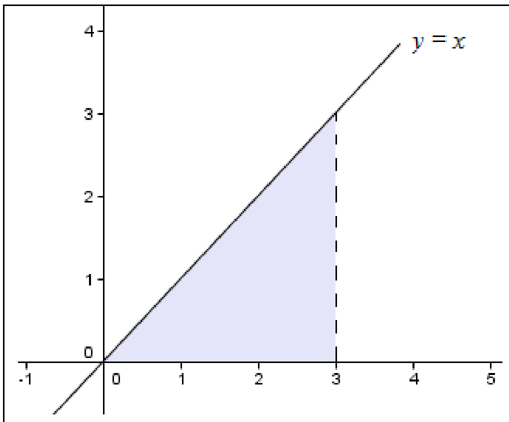
Aplicações de Cálculo de Área

Caso I: Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de $\mathrm{f(x)}$ e o eixo x, quando $\mathrm{f(x)} \geq 0$.

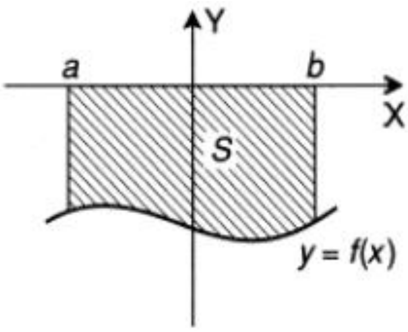


$$\mathbf{A} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)\,dx}$$

Exemplo: Determine a área limitada pelo eixo x e pela curva $\mathrm{f(x) = x}$, com $0 \leq \mathrm{x} \leq 3$.

	$\int_{0}^{3} \mathbf{x\,dx} = \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} \vert_0^3 = 4{,}5\ u.a.$

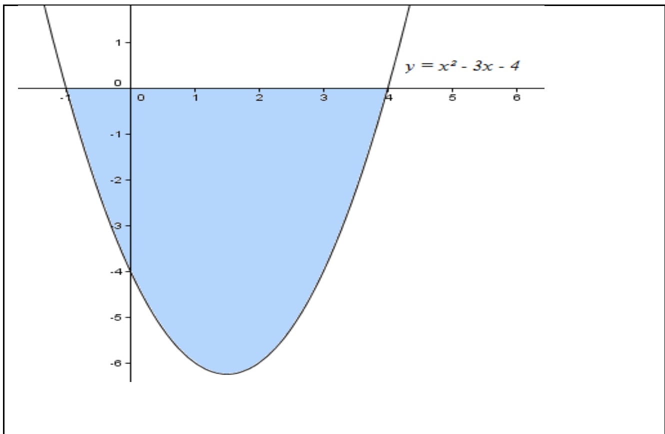
Caso II: Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de $\mathrm{f(x)}$ e o eixo x, quando $\mathrm{f(x)} \leq 0$.



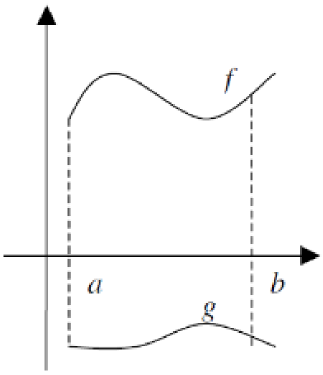
$$\mathbf{A} = \left| \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)\,dx} \right|$$

Exemplo:

Determine a área limitada pelo eixo x e pela curva $f(x) = x^2 - 3x - 4$, com $-1 \leq x \leq 4$

	$\int_{-1}^{4} (x^2 - 3x - 4)\, dx = \lvert -20{,}83 \rvert$ $= 20{,}83\ u.a.$

Caso III: Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, quando $f(x) \geq g(x)$.



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Como resolver?

Para encontrarmos a área, devemos seguir alguns passos:

1) Igualar as duas funções e os pontos de intersecção;
2) Esboçar a região, a área que queremos determinar;
3) Verificar pelo gráfico, qual é a função que aparece primeiro (olhando de cima para baixo) e montar a integral;
4) Resolver a integral

Exemplo:

Calcule a área da região limitada pelos gráficos de $\mathrm{f(x)} = 4 - \mathrm{x}^2$ e $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x} + 2.$

	$A = \int \; [\;(\,) - (\,)]\,dx =$

5) Resolva as integrais e esboce os gráficos.

a) Calcule a área da região compreendida entre os gráficos $y = x$ e y = x^5 com $0 \leq x \leq 1.$

b) Determine área da região compreendida entre os gráficos $y = \mathrm{sen}(x)$ e y =cos (x) com $0 \leq x \leq \pi.$

c) Calcule a área do conjunto $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\, 1 \leq x \leq 2 \; e \; 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2}\right\}.$

d)Calcule a área do conjunto de todos os (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}.$

e) A é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 - 1 \leq y \leq 0.$

f) A é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $0 \leq y \leq 4 - x^2.$

FMU
CENTRO UNIVERSITÁRIO

Tabela de Integral

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int k\,dx = kx + C$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \operatorname{cossec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$$

$$\int \operatorname{cossec} x \operatorname{cotg} x\,dx = -\operatorname{cossec} x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{tg}^{-1} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

STEWART, James. ***Cálculo, volume I***. 5ª edição. São Paulo - SP: Pioneira Thomson Learning, 2006.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um Curso de Cálculo: Volume 1**. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2001.Disponível em https://www.dicasdecalculo.com.br/conteudos/derivadas/aplicacoes-de derivadas/ acesso em 29 de setembro 2019.