Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

18. Juli 2014

Klausur zu Computereinsatz in der Mathematik

Name	Vorname	Matrikel-Nr.	Studiengang

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **sechs** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
3. Schreiben Sie Ihren Namen auf dieses Deckblatt und auf jedes einzelne Aufgabenblatt. Ihre Matrikelnummer muss auf dem Deckblatt erscheinen.
4. Schreiben Sie **mit Tinte oder Kugelschreiber**.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** Vorher abgegebener Spickzettel (1 Seite DIN A 4), welcher dieser Klausur beiliegt. Alle anderen Hilfsmittel sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Die Klausur dauert **60 Minuten**.
7. Zum Bestehen sind mindestens 15 Punkte erforderlich.

Viel Erfolg!

Korrektur

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	gesamt	Note
Punkte	5	4	5	6	5	5	30	-
erreicht								

Aufgabe 1: (5 Punkte)

Erstellen Sie ein Latex-Programm (ohne Präambel), das den folgenden Ausdruck erzeugt:

Wir betrachten die autonome Anfangswertaufgabe

$$\dot{x} \;=\; F(x)\;, \qquad x(t_0) \;=\; y^{(0)} \quad (F\;:\;\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n).$$

Ein **explizites Runge-Kutta-Verfahren der Stufe** s wird dargestellt durch die Matrix mit reellen Einträgen

$$\left(\begin{array}{ccccc} \beta_{21} & & & & \\ \beta_{31} & \beta_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \beta_{s1} & \beta_{s2} & \cdots & \beta_{s,s-1} & \\ \hline \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{s-1} & \gamma_s \end{array}\right)$$

Dadurch wird folgendes Verfahren beschrieben:

$$\begin{array}{rcl} K^{(1)}(h,x) & = & F(x) \\ K^{(2)}(h,x) & = & F\Big(x \,+\, h\beta_{21}K^{(1)}(h,x)\Big) \\ & \vdots & \\ K^{(s)}(h,x) & = & F\left(x \,+\, \displaystyle\sum_{i=1}^{s-1} h\beta_{si}K^{(i)}(h,x)\right) \end{array}$$

Mit diesen Hilfsgrößen bildet man die Verfahrensfunktion

$$V(h,x) \;=\; \sum_{j=1}^{s} \gamma_j K^{(j)}(h,x) \qquad .$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)

Welche Ergebnisse (auf dem Bildschirm) liefern die folgenden **Matlab**-Befehle?

(1)
```
U = [1 2; 3 4; 5 6];
W = [U' eye(2,2); 10:10:50]
```

(2)
```
E = diag([1 1 1]);
F = [0 0 1; 0 1 0; 1 0 0];
G = E | F
```

(3)
```
A = [1 1 1; 0 1 1; 0 0 1];
C = A^2
B = A.^2
D = sum(sum(A))
```

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Erstellen Sie ein **Matlab-Programm**, das gleichverteilte Zufallszahlen aus dem Intervall $[12, 15]$ erzeugt und in eine Datei schreibt. Gehen Sie wie folgt vor:

(1) Über den Bildschirm wird der Name der Datei und die Anzahl der zu erzeugenden Zufallszahlen eingelesen.

(2) In diese Datei werden diese Zufallszahlen in übersichtlicher Form mit 3 Stellen nach dem Komma geschrieben, und zwar in jeder Zeile genau eine Zahl.

(3) Auf den Bildschirm wird der Name der beschriebenen Datei und die Anzahl der erzeugten Zufallszahlen ausgegeben.

bitte wenden

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \exp(-x^2+4x-4) - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

a) Bestimmen Sie $f'(x)$ und erstellen Sie dann zwei **Matlab-Funktionen** für $f(x)$ bzw. $f'(x)$.

b) Schreiben Sie ein **Matlab-Programm**, das unter Verwendung der beiden Matlab-Funktionen aus a) nach dem folgenden Verfahren eine Nullstelle von $f(x)$ berechnet:

(1) Über den Bildschirm wird ein x_0 (Startwert) eingelesen.

(2) Es werden nach der Vorschrift

$$x_{i+1} \;=\; x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (i = 0, 1, 2, \cdots)$$

so lange Näherungwerte berechnet bis gilt

$$|f(x_{i+1})| \;<\; 10^{-5} \quad \textbf{und} \quad |x_{i+1} - x_i| \;<\; 10^{-5} \,.$$

(3) Dann wird die zuletzt berechnete Näherung x_{i+1} als Nullstelle akzeptiert und auf dem Bildschirm ausgegeben.

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Gegeben sei das Polynom $p(x) \;=\; 5x^4 \;-\; 41x^3 \;+\; 129x^2 \;-\; 184x \;+\; 100$.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas die Taylor-Entwicklung von $p(x)$ um $\bar{x} \;=\; 2$.

b) Beantworten Sie mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas folgende Fragen (mit Begründung):

(1) Ist $\bar{x} = 2$ eine mindestens doppelte Nullstelle von $p(x)$?

(2) Ist $\bar{x} = 2$ ein relatives Minimum (Tiefpunkt) von $p(x)$?

Aufgabe 6: (5 Punkte)

a) Berechnen Sie mit Maple

(1) das Taylor-Polynom vom Grad 6 zum Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ von

$$g(x) \;=\; \frac{e^x}{x^3 + 2x^2 + 3x + 1} \,,$$

(2) die inverse Matrix von $A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$,

(3) alle Lösungen von

$$\begin{aligned} 16x^4 \;+\; 16y^4 \;+\; z^4 \;&=\; 16 \\ x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2 \;&=\; 3 \\ x^3 \;-\; y \;&=\; 0 \end{aligned}$$

.

b) Welches Ergebnis liefert die folgende **Maple-Sequenz**?

```
f := x -> sum(x^k,k=0..5)
diff(f(x),x,x)
```