Universität Konstanz

Fachbereich Mathematik
und Statistik

Dr. E. Luik

7. Okt. 2013

NACHKLAUSUR ZU **Computereinsatz in der Mathematik**

Name	**Vorname**	**Matrikel-Nr.**	**Studiengang**

Allgemeine Richtlinien:

1. Diese Klausur beinhaltet **sechs** verschiedene Aufgaben (Rückseite beachten). Kontrollieren Sie Ihr Exemplar, ein Austauschexemplar kann Ihnen sofort ausgehändigt werden.
2. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
3. Schreiben Sie Ihren Namen auf dieses Deckblatt und auf jedes einzelne Aufgabenblatt. Ihre Matrikelnummer muss auf dem Deckblatt erscheinen.
4. Schreiben Sie **mit Tinte oder Kugelschreiber**.
5. **Zugelassene Hilfsmittel:** Vorher abgegebener Spickzettel (1 Seite DIN A 4), welcher dieser Klausur beiliegt. Alle anderen Hilfsmittel sind verboten und führen zum Ausschluss von der Klausur.
6. Die Klausur dauert **60 Minuten**.
7. Zum Bestehen sind mindestens 15 Punkte erforderlich.

Viel Erfolg!

Korrektur

	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	gesamt	Note
Punkte	6	5	4	5	4	6	30	-
erreicht								

Aufgabe 1: (6 Punkte)

a) Erstellen Sie ein Latex-Programm (ohne Präambel), das den folgenden Ausdruck erzeugt (die Nummerierung soll automatisch erfolgen):

1 Grundaufgaben der Numerik

1.1 Quadraturformeln

Eine Quadraturformel hat die Gestalt

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} w_k f(t_k) + R[f]$$

mit $w_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, m$ und $a \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq b$.

1.2 Lineare Gleichungssysteme

Wir verwenden die Schreibweise $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

b) Welchen Ausdruck erzeugt die folgende Latex-Sequenz?

```
Es sei $h(x,y) = \ln \left(9-x^2-(y-1)^2 \right)$. Diese Funktion hat
den Definitionsbereich
\[
  \mathbb{D}  = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \: : \:
  \sqrt{x^2 + (y-1)^2} < 3 \right\} .
\]
Für die partiellen Ableitungen erhalten wir
\[
  \frac{\partial}{\partial y}h(x,y) = \frac{2(1-y)}{9-x^2-(y-1)^2} .
\]
```

Aufgabe 2: (5 Punkte)

Welche Ergebnisse (auf dem Bildschirm) liefern die folgenden **Matlab**-Befehle?

```
A = [1 3 3; 0 2 1; 4 4 3];
B = sum(sum(A))
C = diag(diag(A),1)
A.^2 == 9.*ones(3,3)

n = 2; D = [ ];
for i = 1:n
  D = [D,(i:i+n).^2];
end
D
```

Aufgabe 3: (4 Punkte)

a) Erstellen Sie eine **Matlab-Funktion** zur Berechnung der Funktion

$$f(n,x) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} \exp(-kx)\,.$$

b) Schreiben Sie ein **Matlab-Programm**, welches unter Verwendung der Matlab-Funktion aus a) für $n = 2, 4, 6$ die Funktionen $f(n, x)$ mit verschiedenen Farben in ein Schaubild zeichnet (im Intervall [0,3]).

Aufgabe 4: (5 Punkte)

Es sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(a)g(b) < 0$. Dann gibt es nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in (a, b)$ mit $g(\xi) = 0$, d.h. g hat mindestens eine Nullstelle in (a, b).

Erstellen Sie eine **Matlab**-Funktion `function xi = nullstelle(g,a,b,eps)`, welche diese Nullstelle mit dem folgenden Verfahren (*Bisektionsverfahren*) berechnet:

1. Setze $s = \frac{a+b}{2}$ (Intervallmitte).
2. Gilt $g(s) = 0$, so setze `xi` $= s$ und beende das Verfahren.
   Gilt $g(a)g(s) < 0$, so setze $b = s$ (a bleibt unverändert).
   Gilt $g(s)g(b) < 0$, so setze $a = s$ (b bleibt unverändert).
3. Gilt für ein gegebenes `eps` > 0 die Beziehung $|b - a| <$ `eps`, so wird s als Näherungswert akzeptiert (also `xi` $= s$ gesetzt), und das Verfahren wird beendet. Andernfalls gehe wieder zu Schritt 1.

Aufgabe 5: (4 Punkte)

Gegeben sei die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$. Es werden $a \neq 0$, $c \neq 0$ und $b^2 - 4ac > 0$ vorausgesetzt. Die Wurzeln berechnet man üblicherweise mit den bekannten Formeln

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad .$$

Zeigen Sie, dass sich diese Wurzeln auch nach folgender Vorschrift ermitteln lassen:

$$y_1 = \frac{-2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad .$$

Welche Formeln sollte man zur Lösung von $x^2 - 1000000x + 1 = 0$ verwenden (mit Begründung)?

Aufgabe 6: (6 Punkte)

a) Wie lauten die **Maple-Kommandos** zur Berechnung

(1) des Grenzwertes $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\sin(3x)}{x^3}$,

(2) der Summe $\displaystyle\sum_{k=1}^{13} \binom{15}{k} 2^k 3^{15-k}$,

(3) der Lösungen von

$$\begin{aligned} 16x^4 + 16y^4 + z^4 &= 16 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ x^3 - y &= 0 \end{aligned}$$

b) Welche Ergebnisse liefern die folgenden **Maple-Befehle**?

(1)
```
f := a -> ln(3*a+x)
diff(f(a),a,a)
```

(2)
```
convert(11001,decimal,binary)
```