

Hochschule Düsseldorf – Fachbereich EI
Interdisziplinäres Praktikum Mathe/GET

EME 13 – Gleichstromkreise mit Leistungsanpassung

Autor:	Florian Rotunno
Matrikelnummer:	28158
Gruppe/Labor:	1.1A / 23.10.2025
Datum:	<Abgabedatum>

Inhaltsverzeichnis

1	Ausarbeitung	3
1.1	G12 – Einfacher Widerstand	3
1.2	G14 – Parallelschaltung	3
1.3	G15 – Parallelschaltung	4
1.4	G17 – Herleitung	4
1.5	G18 – Berechnungen	5
1.6	G19 – Berechnungen Reihenschaltung	6
1.7	G21 – Herleitung Spannungsteiler	6
1.8	G22 – Berechnungen	6
1.9	G23 – Berechnung von P_0 , P_x , P_{ges} , R_0 und Verhältnissen	7
1.10	G25 – Kurvenverläufe	7
1.11	M26 – Leistungsanpassung	8

1 Ausarbeitung

1.1 G12 – Einfacher Widerstand

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen Spannung, Strom und Widerstand an einem einfachen Widerstand untersucht. Ziel ist es, den Widerstandswert R sowie die Leistung P zu berechnen, die im Widerstand umgesetzt wird. Dazu werden die grundlegenden Formeln der Elektrotechnik angewendet, die den Zusammenhang zwischen Spannung U , Strom I und Widerstand R beschreiben.

Die Widerstände werden dabei mit der Formel

$$R = \frac{U}{I}$$

bestimmt, was dem ohmschen Gesetz entspricht. Die Leistung, die im Widerstand umgesetzt wird, berechnet sich aus dem Produkt von Spannung und Strom:

$$P = U \cdot I$$

Beispielrechnung: Für die gegebenen Messwerte $U = 9\text{ V}$ und $I = 27\text{ mA}$ lässt sich der Widerstand sowie die Leistung wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} R &= \frac{9\text{ V}}{27\text{ mA}} = 333,33\ \Omega, \\ P &= 9\text{ V} \cdot 27\text{ mA} = 243\text{ mW} \end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt, dass der Widerstand bei diesen Messwerten etwa $333\ \Omega$ beträgt und eine Leistung von rund 243 mW umgesetzt wird. Diese Werte sind wichtig, um das Verhalten des Widerstands im Stromkreis besser einschätzen zu können.

1.2 G14 – Parallelschaltung

In diesem Abschnitt wird das Verhalten von Widerständen in einer Parallelschaltung betrachtet. Es wird erläutert, dass in einer Parallelschaltung an allen Widerständen dieselbe Spannung anliegt, während sich der Gesamtstrom auf die einzelnen Zweige aufteilt. Diese Verteilung des Stroms wird durch den Knotensatz beschrieben, der besagt, dass der Gesamtstrom die Summe der Teilströme ist:

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2$$

Beispielrechnung 1 für 9 V: Anhand der gemessenen Ströme $I_1 = 40,7\text{ mA}$ und $I_2 = 18,7\text{ mA}$ wird der Gesamtstrom berechnet:

$$\begin{aligned} I_{\text{ges}} &= I_1 + I_2 \\ &= 40,7\text{ mA} + 18,7\text{ mA} \\ &= 59,4\text{ mA} \end{aligned}$$

Beispielrechnung 2 für 10 V: Für eine höhere Spannung von 10 V ergeben sich entsprechend höhere Teilströme:

$$\begin{aligned} I_{\text{ges}} &= I_1 + I_2 \\ &= 45,3\text{ mA} + 20,9\text{ mA} \\ &= 66,2\text{ mA} \end{aligned}$$

Ergebnis: Die berechneten Gesamtströme bestätigen, dass sich in einer Parallelschaltung die Ströme der einzelnen Zweige addieren. Dies entspricht dem theoretischen Verhalten und zeigt, dass der Gesamtstrom immer größer ist als jeder einzelne Teilstrom.

1.3 G15 – Parallelschaltung

In dieser Aufgabe wird untersucht, wie sich die einzelnen Teilströme zum Gesamtstrom verhalten. Dazu werden die Quotienten der Teilströme zum Gesamtstrom gebildet:

$$\frac{I_1}{I_{\text{ges}}} \quad \text{und} \quad \frac{I_2}{I_{\text{ges}}}$$

Beispiel für 9 V: Mit den gemessenen Strömen $I_1 = 40,7 \text{ mA}$ und $I_2 = 18,7 \text{ mA}$ sowie dem Gesamtstrom $I_{\text{ges}} = 59,4 \text{ mA}$ ergibt sich folgendes Verhältnis:

$$\begin{aligned} \frac{I_2}{I_{\text{ges}}} &= \frac{18,7 \text{ mA}}{59,4 \text{ mA}} = 0,315 = 31,5\%, \\ \frac{I_1}{I_{\text{ges}}} &= \frac{40,7 \text{ mA}}{59,4 \text{ mA}} = 0,685 = 68,5\% \end{aligned}$$

Diese Werte zeigen, dass der erste Zweig etwa zwei Drittel des Gesamtstroms trägt, während der zweite Zweig etwa ein Drittel beiträgt. Das entspricht typischen Verteilungen in Parallelschaltungen mit unterschiedlichen Widerstandswerten.

1.4 G17 – Herleitung

In diesem Abschnitt wird die Herleitung der Stromverhältnisse in einer Parallelschaltung mit zwei Widerständen dargestellt. Ziel ist es, die Ströme in den einzelnen Zweigen anhand der bekannten Widerstände und der Gesamtstromstärke zu berechnen.

Gegeben sind die Formeln für den Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

und für den Strom in einem Zweig:

$$I_n = \frac{U}{R_n}. \quad (1)$$

Herleitung: Ausgehend vom Knotensatz und den Ohmschen Gesetzen gilt:

$$\begin{aligned} I_{\text{ges}} &= I_n + I_m, \\ I_{\text{ges}} &= U \left(\frac{1}{R_n} + \frac{1}{R_m} \right) \implies U = I_{\text{ges}} \frac{R_n R_m}{R_n + R_m}, \\ I_n &= \frac{U}{R_n} \stackrel{(2)}{=} I_{\text{ges}} \frac{R_n R_m}{R_n + R_m} \cdot \frac{1}{R_n} = I_{\text{ges}} \frac{R_m}{R_n + R_m} \end{aligned} \quad (2)$$

Bemerkung: Diese Herleitung zeigt, dass sich der Strom in einem Zweig der Parallelschaltung proportional zum Widerstand des anderen Zweigs verhält.

1.5 G18 – Berechnungen

In dieser Aufgabe werden die Leitwerte sowie der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung berechnet. Gegeben sind die Spannung $U = 9\text{ V}$ und die gemessenen Ströme I_1 und I_2 .

$$G_n = \frac{1}{R_n}$$

Für mehrere Widerstände in Parallelschaltung gilt:

$$G_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n G_i,$$

während der Gesamtwiderstand berechnet wird als:

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_n R_m}{R_n + R_m}$$

Berechnung:

$$G_1 = \frac{I_1}{U} = \frac{40,7\text{ mA}}{9\text{ V}} = 4,5\text{ mS},$$

$$G_2 = \frac{I_2}{U} = \frac{18,7\text{ mA}}{9\text{ V}} = 2,1\text{ mS},$$

$$G_{\text{ges}} = \frac{I_{\text{ges}}}{U} = \frac{59,4\text{ mA}}{9\text{ V}} = 6,6\text{ mS},$$

$$R_{\text{ges}} = \frac{U}{I_{\text{ges}}} = \frac{9\text{ V}}{59,4\text{ mA}} = 151,5\ \Omega$$

1.6 G19 – Berechnungen Reihenschaltung

Hier wird das Verhalten von Widerständen in einer Reihenschaltung betrachtet. Im Gegensatz zur Parallelschaltung teilt sich hier die Gesamtspannung auf die einzelnen Widerstände auf, während der Strom durch alle Widerstände gleich bleibt.

Beispiel: Die Spannungsverhältnisse werden durch Quotienten der Teilspannungen zur Gesamtspannung dargestellt:

$$\frac{U_0}{U_{\text{ges}}} = \frac{2,4 \text{ V}}{4 \text{ V}} = 0,6 = 60\%,$$
$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{1,6 \text{ V}}{4 \text{ V}} = 0,4 = 40\%.$$

Diese Werte zeigen, dass die Spannung sich aufteilen, was für eine Reihenschaltung spricht.

1.7 G21 – Herleitung Spannungsteiler

In diesem Abschnitt wird die Herleitung des Spannungsteilers erklärt. Da in einer Reihenschaltung der Strom überall gleich ist, lassen sich die Spannungen an den einzelnen Widerständen durch den Strom und deren Widerstandswerte berechnen.

Es gilt:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_0},$$
$$U_1 = I \cdot R_1, \quad U_0 = I \cdot R_0,$$
$$\Rightarrow \frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_0},$$
$$\frac{U_0}{U} = \frac{R_0}{R_0 + R_1}$$

1.8 G22 – Berechnungen

Um die Leitwerte und Widerstände zu bestimmen, geht man von einer Quellspannung von 9V aus. R_0 und R_1 werden mit folgenden Formeln bestimmt:

$$R_1 = \frac{3,6 \text{ V}}{16,3 \text{ mA}} = 220,9 \Omega, \quad R_0 = \frac{5,38 \text{ V}}{16,3 \text{ mA}} = 330 \Omega.$$

Zusätzlich werden die Leitwerte berechnet, die den Kehrwert der Widerstände darstellen und die Leitfähigkeit beschreiben:

$$G_1 = \frac{I}{U_1} = I \cdot \frac{R_0 + R_1}{R_1 \cdot U} = 16,3 \text{ mA} \cdot \frac{330 \Omega + 220,9 \Omega}{220,9 \Omega \cdot 9 \text{ V}} = 0,00452 \text{ S} = 4,5 \text{ mS},$$
$$G_2 = \frac{I}{U_0} = I \cdot \frac{R_0 + R_1}{R_0 \cdot U} = 16,3 \text{ mA} \cdot \frac{330 \Omega + 220,9 \Omega}{330 \Omega \cdot 9 \text{ V}} = 0,00303 \text{ S} = 3,03 \text{ mS},$$
$$G_{\text{ges}} = \frac{I}{U_0 + U_1} = \frac{16,3 \text{ mA}}{9 \text{ V}} = 0,0018 \text{ S} = 1,8 \text{ mS},$$
$$R_{\text{ges}} = \frac{U_0 + U_1}{I} = \frac{9 \text{ V}}{16,3 \text{ mA}} = 552,15 \Omega$$

1.9 G23 – Berechnung von P_0 , P_x , P_{ges} , R_0 und Verhältnissen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Leistungsgrößen und Widerstände berechnet, die aus den Messungen abgeleitet werden können. Dabei werden die Leistungen an den einzelnen Widerständen und die Gesamtleistung betrachtet sowie Verhältnisse und Wirkungsgrade ermittelt.

Die relevanten Formeln lauten:

$$P_0 = R_0 \cdot I^2, \quad P_x = R_x \cdot I^2, \quad P_{\text{ges}} = I \cdot U,$$

$$R_0 = \frac{U}{I} - R_x,$$

$$X = \frac{R_x}{R_0}, \quad \eta_{p_0} = \frac{P_0}{P}, \quad \eta_{p_x} = \frac{P_x}{P}$$

Beispielrechnung für $R_x = 630 \Omega$: Der Wert für R_0 wird aus der Messung entnommen und beträgt hier $345,61 \Omega$. Die Berechnungen basieren auf dem Spannungsteilerprinzip und der Maschengleichung $U - U_0 - U_x = 0$, wobei der Strom und der Widerstand R_x bekannt sind.

Die Leistungen und Verhältnisse werden wie folgt berechnet:

$$P_0 = R_0 \cdot I^2 = 345,16 \Omega \cdot (12,3 \text{ mA})^2 = 0,05228 \text{ W} = 52,3 \text{ mW},$$

$$P_x = R_x \cdot I^2 = 630 \Omega \cdot (12,3 \text{ mA})^2 = 0,0953 \text{ W} = 95,3 \text{ mW},$$

$$P = P_x + P_0 = 52,3 \text{ mW} + 95,3 \text{ mW} = 147,6 \text{ mW},$$

$$X = \frac{R_x}{R_0} = \frac{630 \Omega}{345,16 \Omega} = 1,822 = 182\%,$$

$$\eta_{p_0} = \frac{P_0}{P} = \frac{52,3 \text{ mW}}{147,6 \text{ mW}} = 0,354 = 35,3\%,$$

$$\eta_{p_x} = \frac{P_x}{P} = \frac{95,3 \text{ mW}}{147,6 \text{ mW}} = 0,646 = 64,6\%$$

1.10 G25 – Kurvenverläufe

Der Wirkungsgrad steigt erst und fällt nach seinem Maximum wieder ab. Die Lastleistung steigt ebenso bis zu einem gewissen Grad, jedoch fällt sie danach wieder ab. Dies liegt daran, dass bei einer zu hohen Last der Strom immer weiter sinkt, da die Spannung an der Quelle konstant bleibt. Somit sinkt auch die Leistung, da diese ja aus dem Produkt von Spannung und Strom besteht.

Beide Verläufe entsprechen der Theorie und haben ihre Maxima bei $R_x = R_0$, sprich Wirkungsgrad von 50% und maximale Leistung von $P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{ges}}^2}{4R_0}$.

1.11 M26 – Leistungsanpassung

Gegeben: Quelle U_{ges} mit Innenwiderstand R_0 , Last $R_x = xR_0$. Um die maximale Leistung zu berechnen, reicht es die funktion abzuleiten, an dem Punkt wo die Steigung gleich Null ist, befindet sich das Maximum.

Strom, Leistung und Wirkungsgrad:

$$I = \frac{U_{\text{ges}}}{R_0(1+x)}, \quad P = I^2 R_x = \frac{U_{\text{ges}}^2}{R_0} \frac{x}{(1+x)^2}, \quad \eta(x) = \frac{P}{P_{\text{ges}}} = \frac{x}{1+x}$$

Bestimmung des Maximums von P über $f(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$:

Wir schreiben $f(x) = x(1+x)^{-2}$. Dann

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} [x(1+x)^{-2}] \\ &= 1 \cdot (1+x)^{-2} + x \cdot (-2)(1+x)^{-3} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{2x}{(1+x)^3} = \frac{(1+x) - 2x}{(1+x)^3} = \frac{1-x}{(1+x)^3} \end{aligned}$$

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

Ergebnis:

$$R_x = R_0, \quad P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{ges}}^2}{4R_0}, \quad \eta(1) = \frac{1}{2} = 50\%$$

Bei $R_x = R_0$ halbiert sich die Klemmenspannung. Beide Widerstände setzen dieselbe Leistung um, daher ist die übertragene Leistung maximal, der Wirkungsgrad jedoch 50%.

b) Möglichst großer Wirkungsgrad

Aus $P(x) = \frac{U_{\text{ges}}^2}{R_0} \frac{x}{(1+x)^2}$ und $P_{\text{max}} = \frac{U_{\text{ges}}^2}{4R_0}$ sowie $P = \frac{8}{9}P_{\text{max}}$

$$\frac{U_{\text{ges}}^2}{R_0} \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{8}{9} \frac{U_{\text{ges}}^2}{4R_0}$$

Gemeinsamen Faktor kürzen

$$\frac{x}{(1+x)^2} = \frac{2}{9}$$

Wenn man jetzt genau hinschaut, ergibt sich für $x=2$

$$\frac{2}{(1+2)^2} = \frac{2}{9}$$

$$\text{Wirkungsgrad } \eta(x) = \frac{x}{1+x}$$

$$\eta(2) = \frac{2}{3}$$

Ergebnis: Für $\frac{8}{9}P_{\text{max}}$ und maximalen Wirkungsgrad wählt man $x=2$, also $R_x = 2R_0$, dann ergibt sich ein Wirkungsgrad von $\eta = \frac{2}{3} = 66,7\%$