TD 5. Probabilités conjointes et marginales

Exercice 1 Quelques révisions.
5% des interrupteurs sortant d'une chaîne de production sont défectueux. On en prend deux au hasard. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre d'interrupteurs défectueux dans l'échantillon prélevé.
1°) Donner la loi de probabilité de X
2°) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Exercice 2 On lance un dé non truqué. On considère les variables aléatoires X et Y définies sur $\{1;2;3;4;5;6\}$ par :

- X prend la valeur 0 si le résultat est pair, et la valeur 1 sinon.
- Y prend la valeur 0 si le résultat est 2 ou 4, et la valeur 1 sinon.

Donner le tableau de la loi conjointe du couple (X, Y) et des lois marginales.

Exercice 3 On considère deux V.A.R. X et Y sur $\{0;1;2\}$.
On donne la table de la loi conjointe du couple (X, Y).

P	$\{Y=0\}$	$\{Y=1\}$	$\{Y=2\}$	$P(X)$
$\{X=1\}$	0.1	0.2	0.3	
$\{X=2\}$	0	0.1	0.2	
$\{X=2\}$	0	0	0.1	
$P(Y)$				

1°) Déterminer les lois marginales de X et de Y.
2°) Déterminer toutes les lois conditionnelles $P(X|Y)$.

Exercice 4 On lance un dé non truqué. On considère les variables aléatoires X et Y définies sur $\{1;2;3;4;5;6\}$ par :

- X prend la valeur 1 si le résultat est pair, et la valeur -1 sinon.
- Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5, et la valeur 1 sinon.

1°) Donner la table de la loi conjointe
2°) Combien y-a-t-il d'égalités à vérifier pour justifier que les X et Y sont indépendantes ?

Exercice 5 Soit X une variable aléatoire de loi uniforme discrète sur $\{-1, 0, 1\}$ et la seconde variable $Y = X^2$.
1°) Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes.
2°) Calculer leur covariance.

Exercice 6 La distribution conjointe de deux variables aléatoires discrètes se présente comme suit :

P	$\{Y=0\}$	$\{Y=1\}$	$\{Y=2\}$	$P(X)$
$\{X=10\}$	0	0.25	0	
$\{X=12\}$	0.25	0	0.25	
$\{X=14\}$	0	0.25	0	
$P(Y)$				

1°)Déterminer les loi marginales de X et de Y, puis les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.
2°)Déterminer $E(X.Y)$ et la covariance $cov(X,Y)$.
3°) Les deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 Deux systèmes de contrôle opèrent indépendamment et sont sujets à un certain nombre de pannes.
On donne les lois de probabilité marginales régissant le nombre de pannes par jour de chaque système :

Système X		Système Y	
a	$P(X=a)$	b	$P(Y=b)$
0	0.07	0	0.10
1	0.35	1	0.20
2	0.34	2	0.50
3	0.18	3	0.17
4	0.06	4	0.03

1°) Donner les probabilités des événements :
- Y a au moins 2 pannes par jour ;
- Le nombre de pannes de X est strictement inférieur à 2 et celui de Y supérieur ou égal à 3 ;
- Il se produit une seule panne pendant la journée ;
- X a le même nombre de pannes que Y .

2°)Déterminer la distribution conjointe de X et Y
3°)Déterminer la loi conditionnelle du nombre de pannes par jour du système X sachant que le nombre de pannes par jour du système Y est 1.
4°) Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $E(X+Y)$, $Var(X)$,$Var(Y)$, $Var(X+Y)$.
5°) Quelle est la covariance de X et Y ?

Exercice 8 On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite k possède k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boite, puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.
1°)Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
2°) En déduire la loi de Y.
3°) Calculer l'espérance de Y.

Exercice 9 (X,Y) un couple de variables aléatoires sur $\{1,2,\ldots,n\}$, suivant une loi conjointe uniforme.
1°)Déterminer la loi de X, la loi de Y, la loi de $X+Y$.
2°)X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 10 (X,Y) (Un exemple de variable discrète infinie ?)
un couple de variables aléatoires sur $\mathbb{N}$ telles que

$$P\{(X,Y)=(i,j)\}=\frac{1}{2^{i+j}}.$$

1°)Déterminer les loi marginales de X et de Y.
2°)X et Y sont elles indépendantes ?