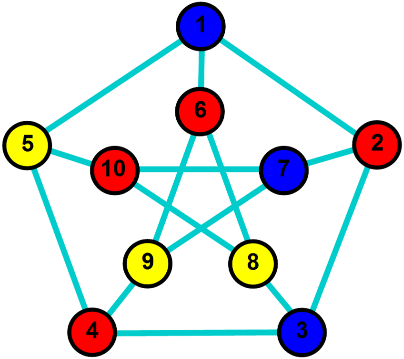
Ch. 5 Coloration des sommets d'un graphe

Dans tout ce paragraphe, $G = (X, E)$ est un **graphe non orienté.**

Définition

Une k coloration des sommets d'un graphe est une coloration des sommets du graphe à l'aide de k couleurs, telle que pour toute arête (x, y) *de G,* $c(x) \neq c(y)$. *(i.e. telle que deux sommets adjacents du graphe n'ont jamais la même couleur).*

Une 3 coloration des sommets du graphe de Petersen



Proposition

1) Si $G = (X, E)$ est un graphe k-parti, alors en associant une couleur différente à chaque X_i on obtient une k-coloration de G.
2) Si G est un graphe complet à n sommets, les seules colorations de G sont des n-colorations associant une couleur différente à chaque sommet.
3) Si G contient une clique de taille p (sous-graphe complet) alors il ne peut être colorié avec moins de p couleurs.

Nombre chromatique

Définition

On appelle nombre chromatique d'un graphe G, le plus petit entier k tel que G admette une k coloration. On le note $\gamma(G)$ (gamma de G).

On peut alors résumer les définitions et propositions précédentes :

Proposition

1) Pour un graphe à n sommets on a bien sûr

$$1 \leq \gamma(G) \leq n.$$

2) Si G est k parti alors $\gamma(G) \leq k$.
3) Si G contient une clique de taille p alors $\gamma(G) \geq p$.

Exercice

Montrer que si c_n est un cycle à n sommets, $(n \geq 2)$ alors $\gamma(c_n) = 2$ si n est pair et 3 si n est impair.

Le problème des quatre couleurs :

Le célèbre problème des quatre couleurs consiste à essayer de montrer que toute carte de géographie peut être coloriée à l'aide de seulement 4 couleurs de sorte que deux pays voisins n'aient pas la même couleur. Etudié depuis 1880 par Guthrie, il a été résolu par l'affirmative par Appel et Haken en 1976 en se ramenant à l'étude de 1509 cas particuliers explorés par ordinateur. L'impossibilité pratique d'une vérification humaine a fait couler beaucoup d'encre...
Remarque : Il est facile de voir que quatre couleurs sont nécessaires lorsqu'on a une 4-clique (Comme la 4-clique européenne France-Allemagne-Belgique-Luxembourg ou la 4-clique africaine Tanzanie-Zambie-Malawi-Mozambique).

Stockage de produits chimique (où l'organisation de soirées)

On crée le graphe d'incompatibilité où les sommets sont les invités et où il y a une arête entre deux sommets si les invités ne doivent pas se rencontrer. Le nombre chromatique est le nombre minimum de soirées à organiser pour inviter tout le monde sans commettre d'impair (ou le nombre minimum d'entrepôts différents pour stocker des produits chimiques incompatibles).

Un problème d'emploi du temps

La vie est ainsi faite qu'il faut parfois que des enseignants fassent cours à des étudiants. Mais les cours sont incompatibles (ne peuvent avoir lieu en même temps) s'il possèdent un même enseignant ou un même étudiant. Une k coloration du graphe de contrainte donne un emploi du temps réalisable et le nombre minimum de salles nécessaires pour sa mise en place.

Un premier algorithme naïf de coloration

Cet algorithme est simple à comprendre et facile à mettre en oeuvre mais...gourmand en couleurs !
L'idée est élémentaire. On attribue à chaque sommet la plus petite couleur non encore attribuée à un de ses voisins.

```
DEBUT
{On initialise le tableau à 0, (qui n'est pas une couleur)
Pour i de 1 à n Faire C[i]:=0;
{On détermine la couleur de chaque sommet}
Pour x de 1 à n Faire
  Début
  {Chercher la plus petite couleur non attribuée à un vois
  S:=[];
  Pour chaque voisin y de x Faire
    Si C[j]<>0 alors ajouter  (C[j],S);
{S contient alors toutes les couleurs interdites}
  C[i]:=min(S)
  Fin
FIN
```

On a un algorithme en $\sum_{x \in X} d(x)$ donc en $O(m)$, c'est à dire peu coûteux. Mais il peut engendrer un nombre important de couleur en fonction de l'ordre dans lequel les sommets sont écrits.
Exercice : Trouver une coloration naïve du graphe de Petersen.

Un algorithme glouton de coloration

Lorsqu'on demande à un enfant de colorier un graphe en respectant la contrainte de ne pas colorier deux sommets adjacents de la même couleur il utilise souvent l'algorithme suivant. On le qualifie de glouton car il consiste à prendre les couleurs une par une en coloriant à chaque fois un ensemble maximal de sommets.

Définition

On appelle noyau de G un ensemble maximal de sommets non adjacents deux à deux. Cette algorithme consiste donc à attribuer à chaque couleur un noyau de sommets.

Le calcul d’un noyau peut être effectué de la manière suivante :

```
DEBUT
(* Soit L la liste des sommets à colorier *)
N:=[];
Tant que L<>[] faire
  x:=tete(L);;reste(L);
  ajouter(x,N);
  Enlever tous les voisins de x de L;
FIN
```

L'algorithme de coloration a alors la forme suivante :

```
DEBUT
c:=1; (* La première couleur *)
S:=[1..n]; (* les sommets  à colorier *)
Tant que S<>[] faire
  Calculer un noyau à partir de S;
  Enlever les sommets correspondants de S;
  Colorier tous les sommets du noyau
      à l'aide de la couleur c;
  c++;
FIN
```

Un algorithme optimal mais non polynomial

- Si on souhaite une coloration optimale (avec le moins de couleurs possibles), une idée consiste à utiliser le principe suivant :
- On part du nombre de couleurs c obtenu par la coloration naïve par exemple, et on cherche, (tant qu'on trouve des solutions), à obtenir une coloration avec une couleur de moins.
- Pour cela il faut explorer toutes les combinaisons de colorations (on peut tout de même imposer la couleur du premier sommet qui ne change rien à l'existence d'une k-coloration).

Pour les parcourir toutes, on utilise un algorithme de **backtracking** : Pour tous les sommets (sauf le premier) on va essayer une à une les k couleurs possibles et chercher à colorer tous les sommets suivants. Si toutes les couleurs ont été essayées sans succès, on revient au sommet précédent (retour en arrière ou backtracking) et on passe à la couleur suivante.

Propriété

Comme chaque sommet peut prendre n couleurs, la recherche d'une k coloration par exploration complète est donc dans le pire cas en n^n donc surexponentielle ! La croissance d'une telle complexité limite ce type d'algorithme à de très petits graphes (quelques sommets).

- Il semble donc que nous n'ayons le choix qu'entre des méthode non optimales ou trop complexes. C'est la dure réalité ! Le problème consistant à "Trouver une coloration de G à l'aide du nombre minimal de couleurs $\gamma(G),''$ est ce qu'on appelle en algorithmique un problème "difficile" cela signifie qu'on n'en connaît pas actuellement d'algorithme efficace et on conjecture qu'il n'en existe pas !
- En pratique, les meilleurs résultats pour les "gros" graphes sont actuellement obtenus à l'aide des **méthodes heuristiques.** Notre première rencontre avec un problème difficile (il en existe beaucoup d'autres) va nous donner l'occasion (en complément de cours) de présenter ces algorithmes.

Méthodes heuristiques

- *Vous trouverez dans le polycopié de cours un paragraphe présentant les méthodes heuristiques et leur application à la recherche de colorations efficaces.*
- *Ce paragraphe est un complément donné uniquement pour votre culture personnelle.*
- *Il ne sera illustré ni en TD ni en TP.*
- *Aucune connaissance de ce paragraphe n'est exigible à l'examen.*
- *Il peut donc être ignoré en première lecture.*

Coloration des arêtes d'un graphe

On définit de même le problème de la coloration des arêtes d'un graphe :

Définition

Une k coloration des arêtes d'un graphe simple est une coloration des arêtes du graphe à l'aide de k couleurs, telle que deux arêtes adjacentes du graphe n'ont jamais la même couleur).

Définition

L'indice chromatique $\chi(G)$ est le plus petit nombre k tel qu'il existe une k coloration des arêtes de G. (A ne pas confondre avec le nombre chromatique $\gamma(G)$...)

Ce problème n'est pas traité ici mais sera étudié partiellement en TD.

Une 4 coloration des arêtes du graphe de Petersen.