Diagonalisation

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Objectif :

*Diagonaliser u*n endomorphisme de R^2, R^3 ou R^4 donné par sa matrice dans la base canonique de R^n.

Diagonalisation

1) Calcul du polynôme caractéristique de A :

$$P_A = \det(A - X.I_n)$$

$$P_A = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$

Diagonalisation

$$P_A = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$

On remarque que la somme sur chaque colonne vaut 2-X, on ajoute donc chaque ligne à la première...

$$= \begin{vmatrix} \color{red}{2-X} & \color{red}{2-X} & \color{red}{2-X} \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$

$L1 \leftarrow L1+L2+L3$

Diagonalisation

$$P_A = \begin{vmatrix} 2-X & 2-X & 2-X \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$

On met 2-X en facteur

Diagonalisation

$$P_A=(2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$ et on « creuse » la matrice

Diagonalisation

$$P_A = \begin{vmatrix} 2-X & 2-X & 2-X \\ -1 & -X & -1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$$

On met 2-X en facteur et on creuse la matrice

$$= (2-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

$L2 \leftarrow L2+L1$

$L3 \leftarrow L3-L1$

Diagonalisation

$$P_A = (2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

La matrice est alors triangulaire, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

Diagonalisation

$$P_A=(2-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix}$$

La matrice est alors triangulaire, son déterminant est le produit des coefficients diagonaux.

$$P_A=(2-X)(1-X)^2$$

Diagonalisation

$P_A = (2-X)(1-X)^2$

Le polynôme caractéristique est scindé sur R donc par critère, A est trigonalisable.

2 est valeur propre simple

1 est valeur propre double

Diagonalisation

$E_1 = \ker(A - I_3)$

$E_2 = \ker(A - 2I_3)$

On calcule les sous-espaces propres en commençant par les valeurs propres multiples pour pouvoir appliquer le critère de diagonalisation .

(Les valeurs propres simples sont toujours sympathiques!)

Diagonalisation

$E_1 = \ker(A - I_3)$

Le sous-espace propre est obtenu par résolution d'un système linéaire.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Par la méthode du pivot de Gauss par exemple...)

Diagonalisation

$E_1 = \ker(A - I_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$C2 \leftarrow C1-C2$

$C3 \leftarrow C1-C3$

Diagonalisation

$E_1 = \ker(A - I_3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A-I_3$ est échelonnée sur 1 colonne donc

$$rg(A-I_3)=1$$

D'après le théorème du rang :

$$\dim(E_1)=\dim(R^3)-rg(A-I_3)$$

$$= 3-1=2$$

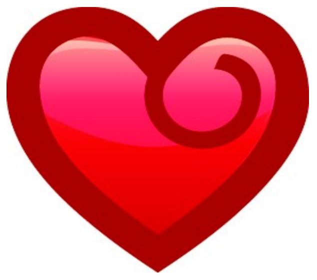
Diagonalisation

Le polynôme caractéristique de A est scindé sur R

$\dim(E_1)=2$ qui est aussi la multiplicité de la valeur propre 1

$\dim(E_2)=1$ qui est aussi la multiplicité de la valeur propre 1

Par critère A est diagonalisable sur R



Diagonalisation

Pour réaliser la diagonalisation, il faut calculer explicitement les sous-espaces propres :

Diagonalisation

C2 ← C2-C1

C3 ← C3-C1

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } E_1 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diagonalisation

$E_2 = \ker(A - 2I_3)$

Obtenu par résolution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \begin{array}{c} \text{C3 (C2-C3) C1} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} ; \quad \begin{array}{c} \text{C3 (C2-C1) (C1-C2+C3)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{0} \\ -1 & -1 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

D'où $E_2 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

1 est valeur propre de multiplicité 2 et de sous espace propre

$$E_1 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2 est valeur propre de multiplicité 1 et de sous espace propre

$$E_2 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

D'où $A=PDP^{-1}$ avec

1 est valeur propre de multiplicité 2 et de sous espace propre

$$E_1 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2 est valeur propre de multiplicité 1 et de sous espace propre

$$E_2 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

D'où $A=PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1 est valeur propre de multiplicité 2 et de sous espace propre

$$E_1 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2 est valeur propre de multiplicité 1 et de sous espace propre

$$E_2 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

D'où $A=PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Et $$P = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & \boxed{-1} & \boxed{1} \\ \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{-1} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$