# Inversion de matrices 1) Par résolution d'un système linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

#### • Méthode :

On résout AX=Y (par pivot de Gauss par exemple) et on exprime X en fonction Y

Si A est inversible, AX=Y ssi X=A-1Y



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

AX=Y ssi

$$\begin{cases} x + 2y &= a \\ -x + 3y &= b \\ y &- z &= c \end{cases}$$
 ssi 
$$\begin{cases} 5y = a + b \\ x &= a - 2y \\ z &= y - c \end{cases}$$

$$x = 1/5 (3a - 2b)$$
  
ssi  $y = 1/5 (a + b)$   
 $z = 1/5 (a + b - 5c)$ 



#### Donc AX=Y ssi

$$\begin{cases} x = 1/5 & (3a - 2b) \\ y = 1/5 & (a + b) \end{cases}$$
 ssi 
$$z = 1/5 & (a + b - 5c)$$
 ssi 
$$z = 1/5 & (a + b - 5c)$$
 ssi 
$$z = 1/5 & (a + b - 5c)$$

Or AX=Y ssi X=A-1Y, donc par identification

# 2) Méthode de Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si une suite d'opérations sur les lignes ramène A à I<sub>n</sub> (par un pivot de Gauss), alors les mêmes opérations dans le même ordre ramène I<sub>n</sub> à A<sup>-1</sup>.

Idée : Opérer directement sur les

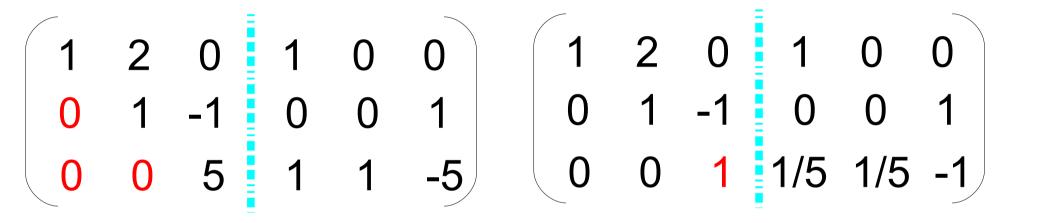
lignes de la matrice :  $(A | I_n)$ 



On se ramène à une matrice triangulaire supérieur par un pivot descendant :

$$L2 \leftrightarrow L3$$

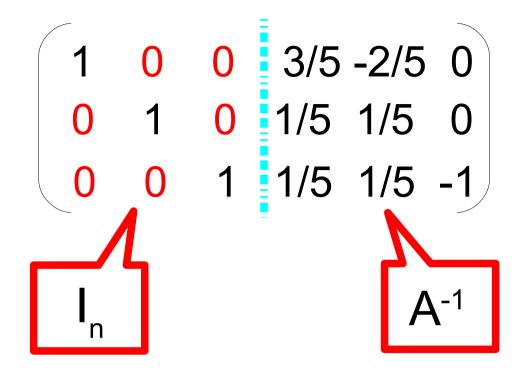
### On divise les lignes pour obtenir une diagonale de 1 :





## On se ramène à l'identité par un pivot montant







# 3) Formule de la comatrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On se ramène à des calculs de déterminants par application de la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}^{t} \operatorname{com}(A)$$



$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{tcom}(A)$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$
 par blocs!

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{tcom}(A)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$com(A) = \begin{bmatrix} -3 & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & -(1) + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$com(A) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & +(-1) \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$com(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -(-2) & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$
with Algèbre Linéaire 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad com(A) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & +(-1) & -1 \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad com(A) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -(1) \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad com(A) = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -(1) \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$com(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -0 & + \end{bmatrix}$$

$$com(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +5 \end{bmatrix}$$

$${}^{t} com(A) = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{com}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$