Institut National Universitaire Champollion

TD 7 - Plus courts chemins dans un graphe valué

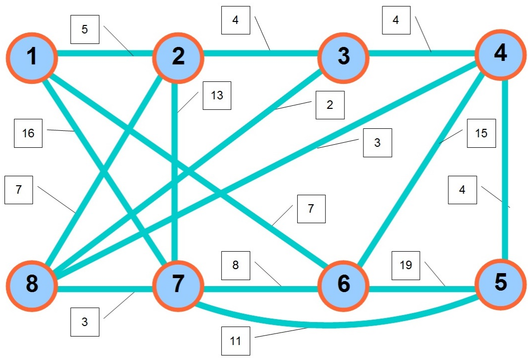
Théorie et Algorithmique des Graphes
L3 INFO - Semestre 5

Se repérer dans ce TP :

Exercice	1	CC 2016	3	4
Théorie			✓	✓
Algorithmie	✓	✓	✓	✓
Modélisation			✓	✓

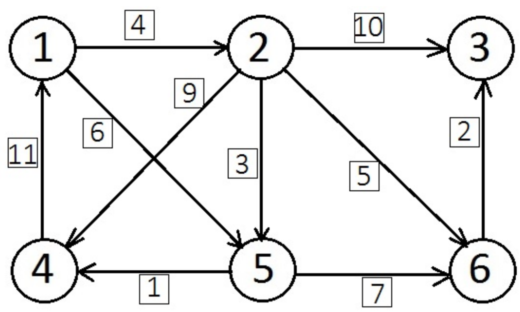
Exercice 1 :

Soit G le graphe orienté et valué ci-dessous. En justifiant précisément le choix de l'algorithme utilisé, déterminer les longueurs des plus cours chemins issus de quelques sommets.



CC 2016 - Plus courts chemins dans un graphe valué :

On cherche à connaître les plus courts chemins issus du sommet 1 dans le graphe valué G_1 suivant :



1. Quel(s) algorithme(s) peut-on utiliser pour répondre à cette question ? Justifier votre réponse.
2. Appliquer l'algorithme de Dijkstra optimisé sur le graphe G en complétant l'annexe.

Exercice 3 - Le problème du postier chinois :

Soit un graphe $G=(X,E)$ no orienté, connexe et valué par une fonction de poids p à valeurs positives. On note P_{tot} le poids total de G. On appelle *tournée* de G un circuit passant par chacune des arêtes de G (mais une arête peut être parcourue plusieurs fois, donc une tournée n'est pas un circuit eulérien !). On cherche à déterminer le poids minimal P_{min} d'une tournée de G. Remarquer que le poids d'une tournée de G ne dépend pas du sommet d'origine.

Si le graphe représente les rues qu'un facteur doit parcourir pour distribuer le courrier et que la fonction de poids est le nombre de kilomètres de chaque rue, on cherche donc à distribuer tout le courrier en parcourant le moins de kilomètres possibles.

Dans toute la suite, on suppose que G admet exactement deux sommets a et b de degré impair.

1. Montrer qu'il existe bien une tournée de poids minimal.
2. On note P_{ab} le poids du plus court chemin de a vers b. Nous allons montrer que :

$$P_{min} = P_{tot} + P_{ab} \tag{1}$$

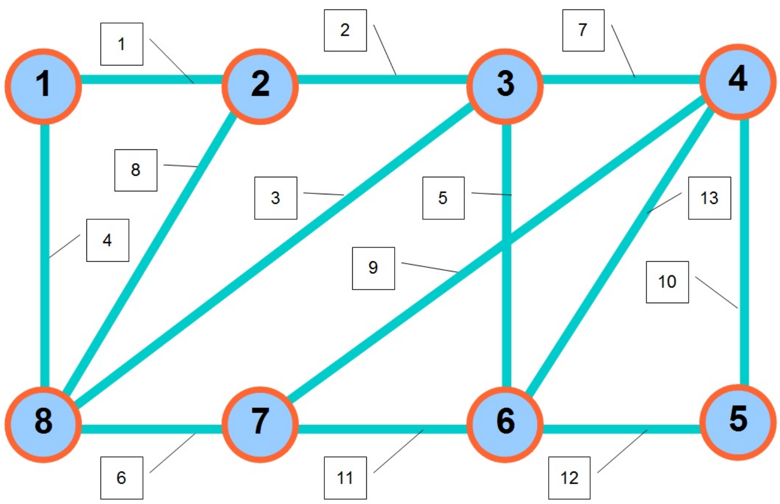
   (a) Montrer que $P_{min} \leqslant P_{tot} + P_{ab}$.

   (b) Sur le graphe G_1 ci-dessous, identifiez les sommets de degré impair et réaliser une tournée. Que remarquez-vous ?

   (c) Plus généralement, soit T une tournée de G, montrer qu'on peut en extraire un chemin de a vers b entièrement constitué d'arêtes parcourues au moins deux fois dans T.

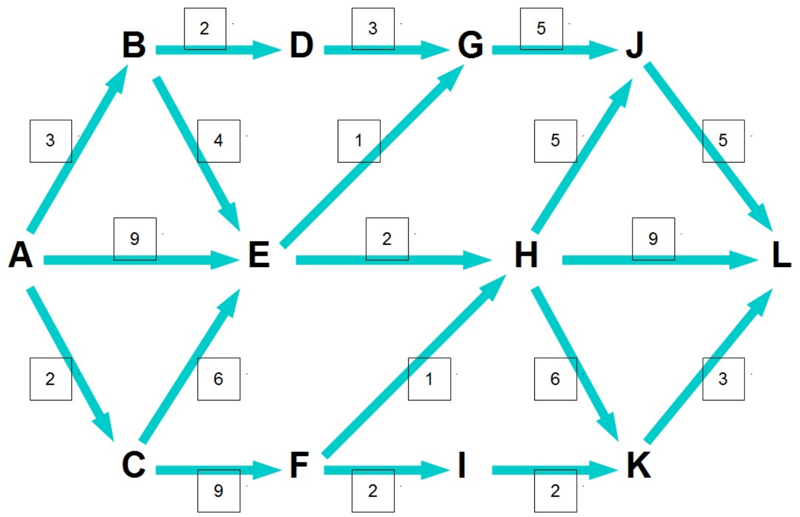
   (d) Montrer qu'alors $P(T) \geqslant P_{tot} + P_{ab}$.

   (e) En déduire l'égalité demandée.
3. Donner un procédé de construction d'une tournée minimale.
4. Déterminer une tournée de poids minimal du graphe G_1 ci-dessous.



Exercice 4 - Réalisation d'un chantier :

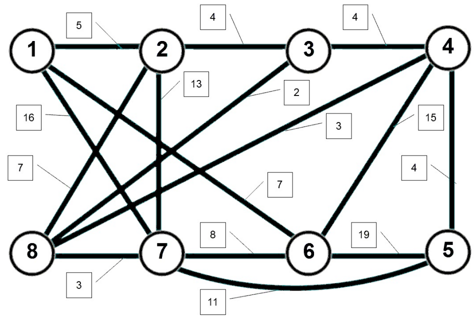
On cherche à minimiser la durée de réalisation d'un chantier. Le graphe orienté et valué ci-dessous représente les différentes étapes menant à la réalisation du projet.



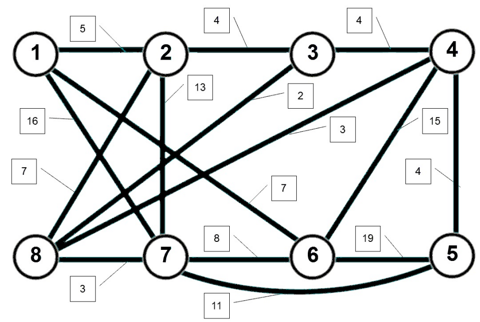
Au cours de sa réalisation, le projet évolue suivant différents états qui sont représentés par les sommets du graphe. Le projet débute à l'état A et s'achève lorsqu'on parvient à l'état L.

Un arc (S,T) indique que l'état S de réalisation du projet est antérieur à l'état T et le poids de l'arête (S,T) représente la durée, exprimée en heures, nécessaire à la réalisation de la tâche qui va conduire de l'état S à l'état T. Cette tâche ne peut être accomplie que si toutes les tâches conduisant à l'état S sont elles-mêmes déjà accomplies.
Pour fixer les idées, on supposera que la réalisation du projet commence à minuit (0h).

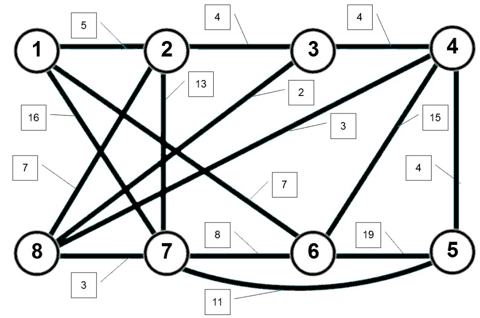
1. Montrer que la durée minimale pour réaliser le projet est le poids d'un chemin de poids *maximal* d'origine A et d'extrémité L.
2. Adapter l'algorithme de Bellman pour déterminer un plus long chemin (dit *chemin critique*).
3. Représenter en couleur ce chemin. Au plus tôt, à quelle heure le projet peut-il être réalisé ?
4. Vu les contraintes, certaines tâches ne peuvent commencer avant une certaine heure, par exemple, la tâche (B,E) ne peut commencer avant 3h (l'heure au plus tôt). D'autre part, certaines tâches disposent d'une marge de temps pour être réalisée tout en permettant au projet d'être achevé dans le temps optimal. En revanche, d'autres tâches sont critiques en ce sens que tout retard dans leur accomplissement entraîne un retard global dans l'achèvement du projet. Par exemple, la tâche (A,E) est critique, si elle ne commence pas à 0h, le projet en sera retardé, mais la tâche (A,B) n'est pas critique, on dispose d'une marge de manœuvre de 2 heures pour la réaliser, c'est à dire, elle peut commencer entre 0h et 2h (cette dernière est l'heure au plus tard). Pour chaque tâche, préciser à quelle heure au plus tôt et à quelle heure au plus tard elle peut être commencée pour que le projet soit réalisé dans la durée optimale.



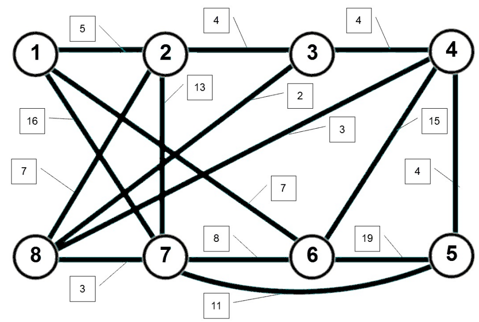
M =
D =
P =
x=
Ses successeurs sont :



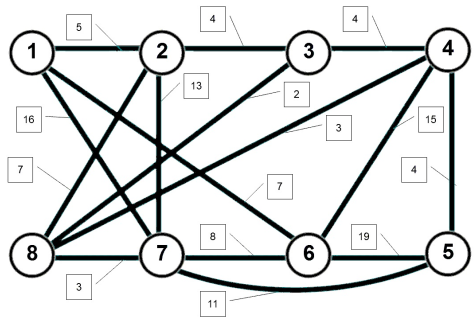
M =
D =
P =
x=
Ses successeurs sont :



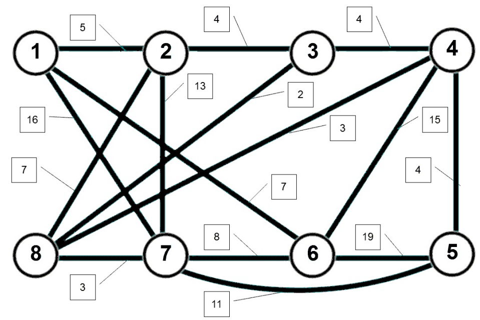
M =
D =
P =
x=
Ses successeurs sont :



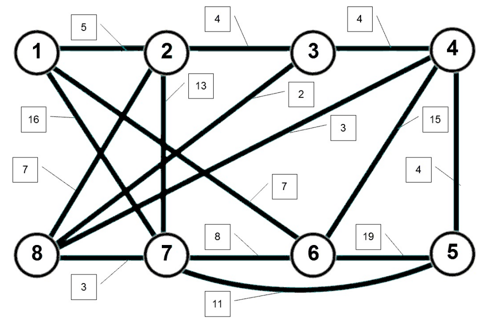
M =
D =
P =
x=
Ses successeurs sont :



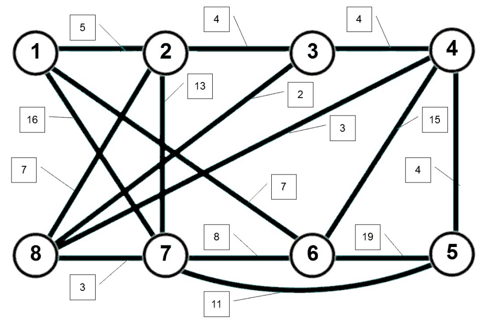
M =
D =
P =
x=
Ses successeurs sont :



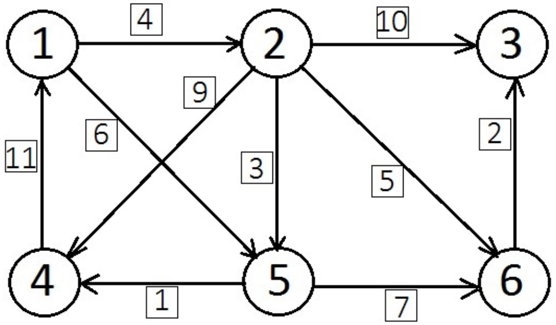
M =
D =
P =
x=
Ses successeurs sont :



M =
D =
P =
x=
Ses successeurs sont :



M =
D =
P =
x=
Ses successeurs sont :

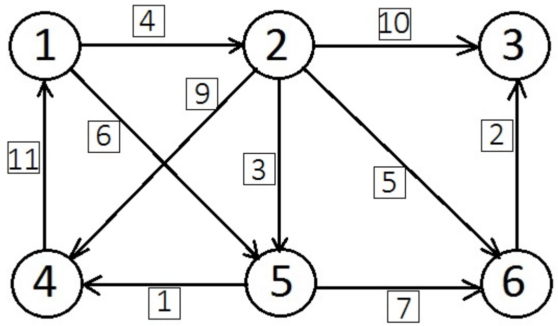


M =

D =

P =

x =

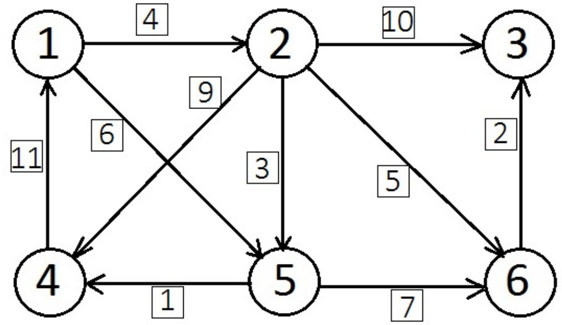


M =

D =

P =

x =

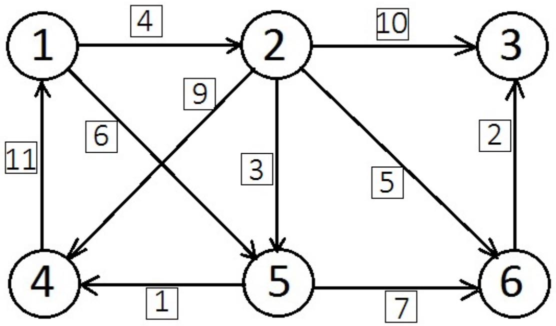


M =

D =

P =

x =

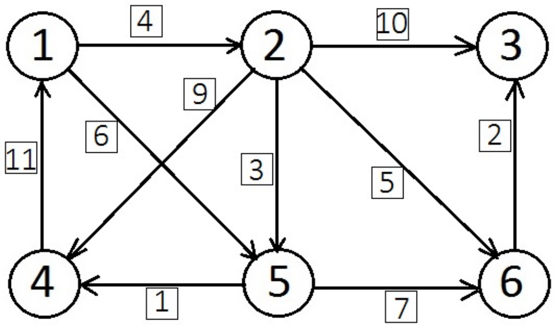


M =

D =

P =

x =

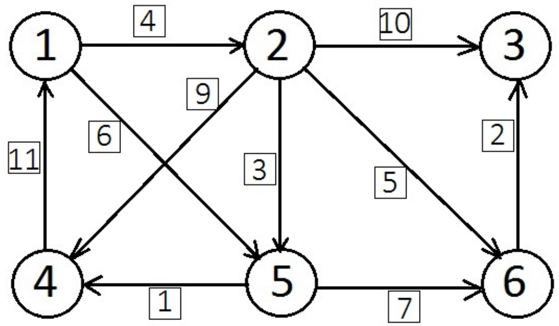


M =

D =

P =

x =



M =

D =

P =

x =