

Déterminant

Développement par rapport à la ligne i

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- **Objectif :**

Ramener le calcul d'un déterminant à des déterminants plus petits en mettant en oeuvre la formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Développement par rapport à la ligne i

- Il ne s'agit pas « d'appliquer » la formule

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

mais de mettre au point un processus de mise en œuvre de cette formule.

Développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$



Combinaison linéaire

Développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Combinaison linéaire

Des déterminants mineurs

Développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

pondéré par a_{ij}

Des déterminants mineurs

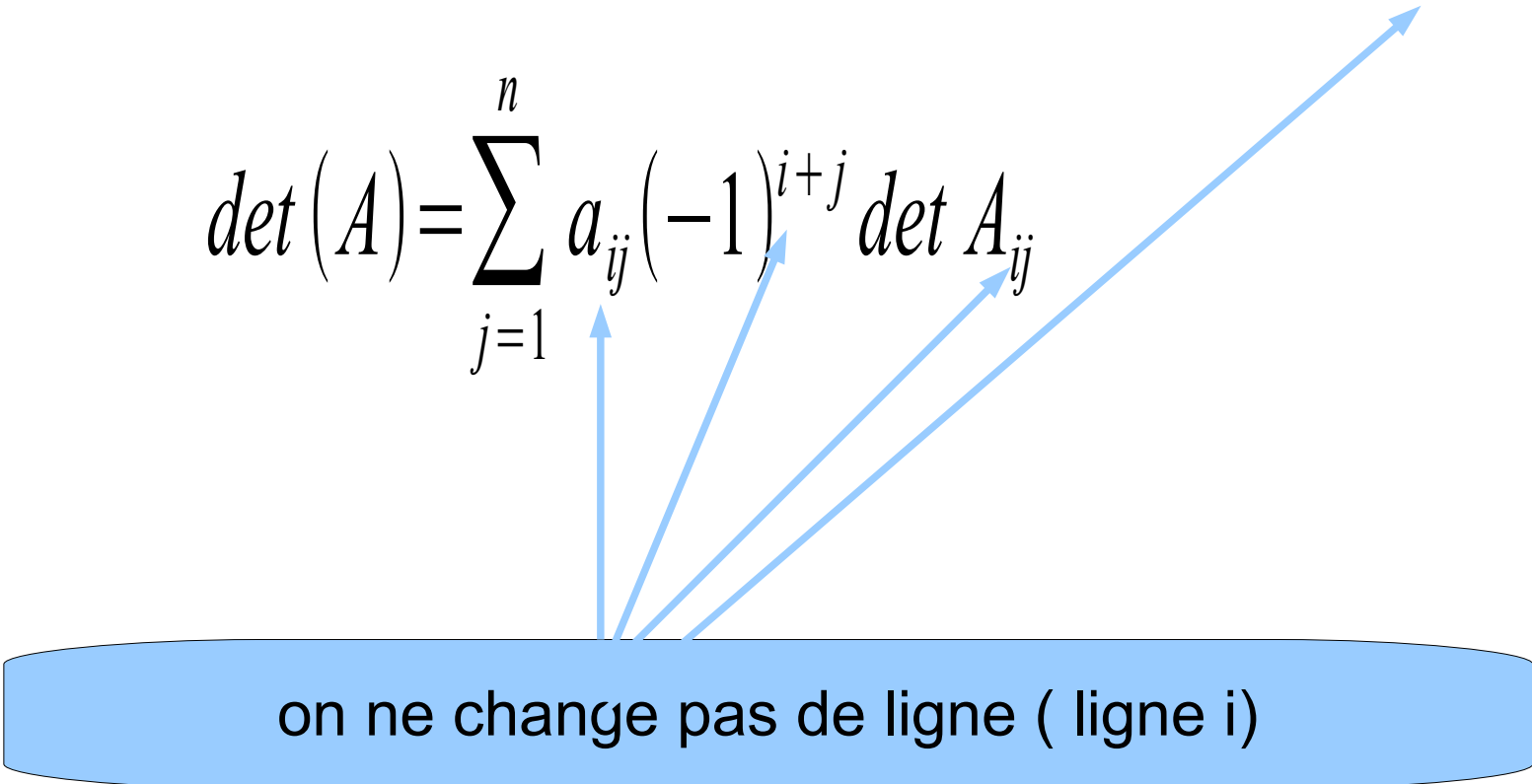
Développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

avec alternance de signe

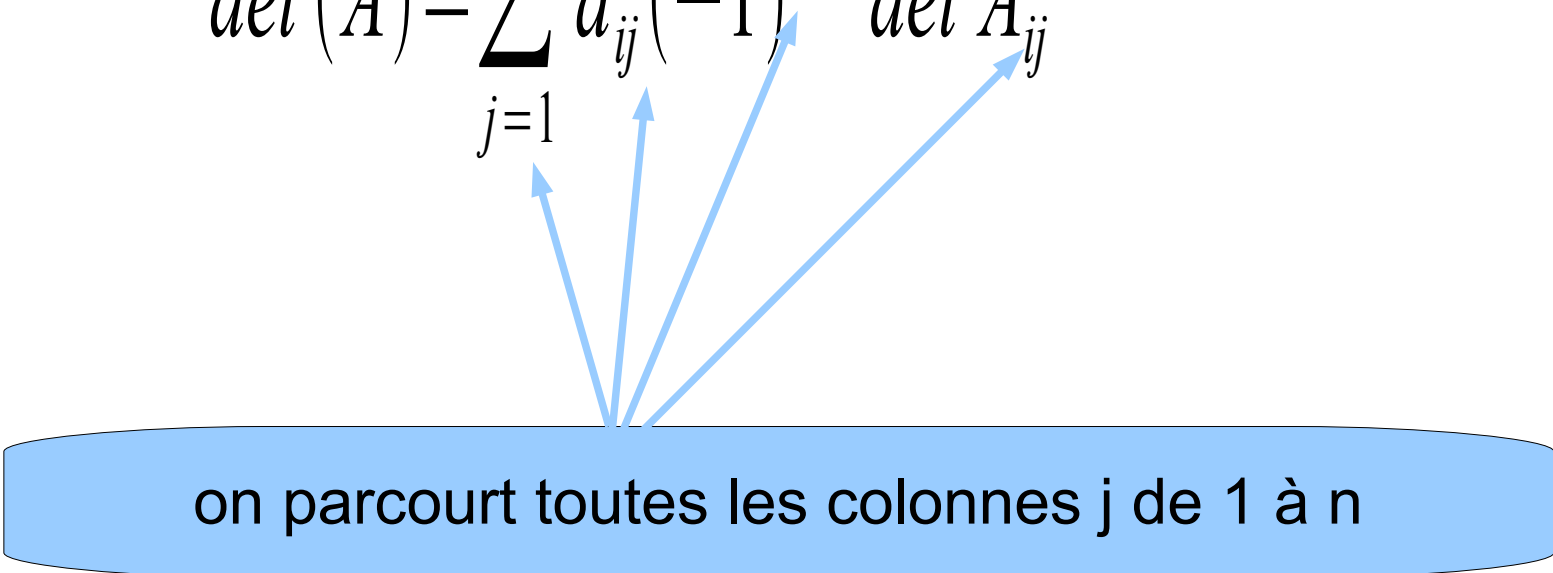
pondéré par a_{ij}

Développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$


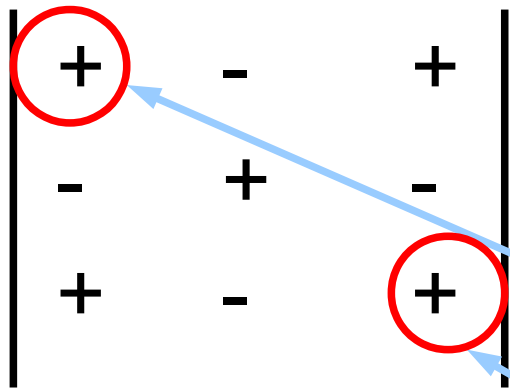
on ne change pas de ligne (ligne i)

Développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$


on parcourt toutes les colonnes j de 1 à n

Développement par rapport à la ligne i



+	-	+
-	+	-
+	-	+

- Le signe n'est pas calculé
- On applique la règle de l'échiquier :
- $(-1)^{1+1} = 1$
- $(-1)^{n+n} = 1$

donc les coins haut-
gauche et bas-droit sont
toujours positifs

Développement par rapport à la ligne i

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- $(-1)^{i+(j+1)} = - (-1)^{i+j}$
- $(-1)^{(i+1)+j} = - (-1)^{i+j}$

Donc les signes sont alternés quand on change de ligne ou de colonne

Développement par rapport à la ligne 2

The diagram illustrates the expansion of a determinant D by the second row. It shows a 3x3 sign matrix, a 3x3 matrix A , and the resulting expansion formula.

Sign matrix:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Matrix A :

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Expansion formula:

$$D = -1 \det A_{21} + 4 \det A_{22} - (-6) \det A_{23}$$

Arrows indicate the mapping from the signs in the second row of the sign matrix to the elements in the second row of matrix A in the expansion formula.

Calcul des déterminants mineurs

$$D = \begin{vmatrix} & 5 & 7 \\ & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Colonne 1

Ligne 2

$$D = -1 \det A_{21} + 4 \det A_{22} - (-6) \det A_{23}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -14$$

Calcul des déterminants mineurs

$$D = \begin{vmatrix} & 3 & & 7 & \\ & & & & \\ & & & & \\ & 0 & & 0 & \end{vmatrix}$$

Colonne 2

Ligne 2

$$D = 14 + 4 \det A_{22} - (-6) \det A_{23}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Calcul des déterminants mineurs

$$D = \begin{vmatrix} & 3 & 5 & \\ & \color{blue}{\boxed{}} & \color{blue}{\boxed{}} & \color{blue}{\boxed{}} \\ 0 & 2 & & \color{blue}{\boxed{}} \\ & & & \color{blue}{\boxed{}} \end{vmatrix}$$

Colonne 3

Ligne 2

On est resté en ligne 2
et on a parcouru
toutes les colonnes

$$D = 14 + 0 + 6*6 = \boxed{50}$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = +7 \det A_{13} + \dots$$

Développement par rapport à la colonne 3

The diagram consists of a vertical line on the left, followed by a plus sign (+), a minus sign (-), and a blue rectangular box. Inside the box, there is a plus sign (+) at the top, a minus sign (-) in the middle, and a plus sign (+) at the bottom. The top plus sign inside the box is circled in red.

D =

1	4
0	2

$$D = 7 * 2 + \dots$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & \begin{vmatrix} + \\ - \\ + \end{vmatrix} \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & \begin{vmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$D = 14 - (-6) \det A_{23} + \dots$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & \begin{vmatrix} + \\ - \\ + \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & \begin{vmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$D = 14 + 6 * 6 + \dots$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = 50 + 0 * \det A_{33} = 50$$

On est resté en colonne 3
et on a parcouru toutes les
lignes.

Un coefficient nul évite un calcul de déterminant mineur !

Développement par rapport à la ligne 3

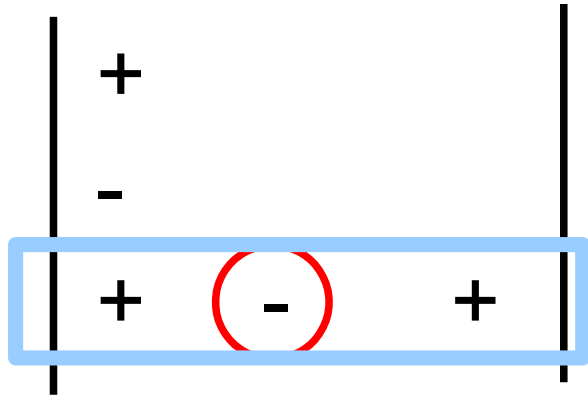
+
-
+
(-)
+

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & (2) & 0 \end{vmatrix}$$

D'où l'intérêt d'utiliser la ligne ou la colonne la plus « creuse ».

$$D = -2 \det A_{32} =$$

Développement par rapport à la ligne 3



$$D = \begin{vmatrix} 3 & & 7 \\ 1 & & -6 \\ & & \end{vmatrix}$$

The diagram shows the 2x2 minor matrix obtained by deleting the third row and second column. The minor is represented by a blue cross shape, with the 2x2 submatrix highlighted by a blue rectangle. The values 3, 1, 7, and -6 are placed in the corners of the cross.

D'où l'intérêt d'utiliser la ligne ou la colonne la plus « creuse ».

$$\begin{aligned} D &= -2 \det A_{32} = -2 * (3 * (-6) - 7 * 1) = -2 * (-18 - 7) \\ &= 2 * 25 = 50 \end{aligned}$$