

TD 1. DIAGONALISATION ET APPLICATIONS

Réaliser tous les calculs nécessaires à la main ET à l'aide de Sage.

Exercice 1 Calculer les déterminants suivants :

$$d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}, d_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, d_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{vmatrix},$$

Exercice 2 1°) Calculer le déterminant de la matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 2m \\ 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 2m+2 & m & 1 \\ m & 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

2°) Montrer que A_m est inversible ssi $m \notin \{0, -1, 2\}$.

Exercice 3 Déterminer les éléments propres et diagonaliser les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 Trouver les valeurs des paramètres réels a, b tels que la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

admettent le vecteur $(1, 2, 3)$ pour vecteur propre.

Exercice 5 Calculer les éléments propres et étudier la diagonalisabilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables :

$$\begin{aligned} \text{a) } A_1 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{b) } A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{c) } A_3 &= \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{d) } A_4 &= \begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{e) } A_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{f) } A_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 7 Applications de la diagonalisation.

1°) Puissance d'une matrice.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

2°) Calculer de même les puissances k ème des matrices diagonalisables des exercices précédents.

Exercice 8 Un pays est partagé en deux zones, l'une est urbaine, l'autre rurale. Chaque année, 10% des urbains partent à la campagne et 20% des ruraux partent vivre en ville. Au début de l'étude, 75% de la population est rurale.

1°) Donner le graphe probabiliste et la matrice de transition modélisant ce problème.

2°) Quelles sont les proportions après 1 année ? 2 ? 10 ? k ? Que se passera-t-il si rien ne change ?

Exercice 9 Montrer que toutes les matrices de transition d'un graphe probabiliste admettent 1 comme valeur propre.

Exercice 10 Si on attend suffisamment longtemps, quel est le temps le plus probable en Bretagne ? Quelle est la probabilité qu'il pleuve ?