Déterminant
Développement par rapport à la ligne i

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

- ***Objectif :***

  Ramener le calcul d'un déterminant à des déterminants plus petits en mettant en oeuvre la formule du développement par rapport à une ligne ou une colonne.

Développement par rapport à la ligne i

- Il ne s'agit pas « d'appliquer » la formule

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det\, A_{ij}$$

mais de mettre au point un processus de mise en œuvre de cette formule.

Développement par rapport à la ligne i

$$det\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(-1\right)^{i+j} det\, A_{ij}$$

Combinaison linéaire

Développement par rapport à la ligne i

$$det\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(-1\right)^{i+j} det\, A_{ij}$$

Des déterminants mineurs

Combinaison linéaire

Développement par rapport à la ligne i

$$det\left(A\right)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(-1\right)^{i+j} det\, A_{ij}$$

Des déterminants mineurs

pondéré par a_{ij}

Développement par rapport à la ligne i

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} det\, A_{ij}$$

avec alternance de signe

pondéré par a_{ij}

Développement par rapport à la ligne i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

on ne change pas de ligne (ligne i)

Développement par rapport à la ligne i

$$det(A)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\,det\,A_{ij}$$

on parcourt toutes les colonnes j de 1 à n

Développement par rapport à la ligne i

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- Le signe n'est pas calculé
- On applique la règle de l'échiquier :
- $(-1)^{1+1} = 1$
- $(-1)^{n+n} = 1$

donc les coins haut-gauche et bas-droit sont toujours positifs

Développement par rapport à la ligne i

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

- $(-1)^{i+(j+1)} = -\,(-1)^{i+j}$
- $(-1)^{(i+1)+j} = -\,(-1)^{i+j}$

  Donc les signes sont alternés quand on change de ligne ou de colonne

Développement par rapport à la ligne 2

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ \boxed{- \quad + \quad -} \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ \boxed{1 \quad 4 \quad -6} \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = -\,1 \det A_{21} + 4 \det A_{22} - (-\,6) \det A_{23}$$

Calcul des déterminants mineurs

$$D = \begin{vmatrix} & 5 & 7 \\ & & \\ & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Ligne 2

Colonne 1

$$D = -1 \det A_{21} + 4 \det A_{22} - (-6) \det A_{23}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -14$$

Calcul des déterminants mineurs

$$D = \begin{vmatrix} 3 & & 7 \\ & & \\ 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

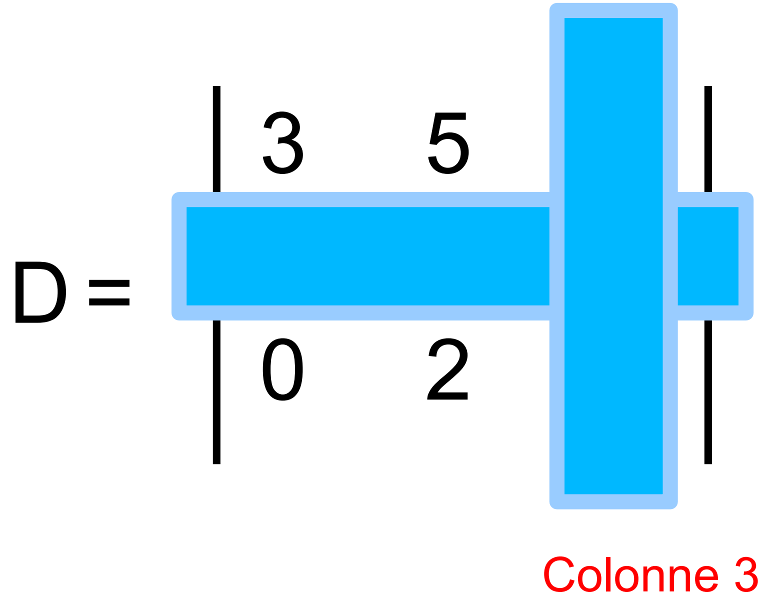
Ligne 2

Colonne 2

$$D = 14 + \; 4 \det A_{22} - (-6) \det A_{23}$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Calcul des déterminants mineurs



Ligne 2

On est resté en ligne 2
et on a parcouru
toutes les colonnes

$$D = 14 + \ 0 + 6*6 = \boxed{50}$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = +7 \det A_{13} + \ldots$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & \\ 0 & 2 & \end{vmatrix}$$

$$D = 7*2 \; + \ldots$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = 14 - (-6) \det A_{23} + \ldots$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & \\ & & \\ 0 & 2 & \end{vmatrix}$$

$$D = 14 \; + 6 * 6 + \ldots$$

Développement par rapport à la colonne 3

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ & & - \\ & & + \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$D = 50 + 0 * \det A_{33} = \boxed{50}$$

On est resté en colonne 3 et on a parcouru toutes les lignes.

Un coefficient nul évite un calcul de déterminant mineur !

Développement par rapport à la ligne 3

$$\begin{vmatrix} + & & \\ - & & \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

D'où l'intérêt d'utiliser la ligne ou la colonne la plus « creuse ».

$D = -\,2 \;\det A_{32} =$

Développement par rapport à la ligne 3

$$\begin{vmatrix} + & & \\ - & & \\ + & - & + \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 3 & & 7 \\ 1 & & -6 \\ & & \end{vmatrix}$$

D'où l'intérêt d'utiliser la ligne ou la colonne la plus « creuse ».

$$D = -2 \ \det A_{32} = -2 * (3*(-6)-7*1) = -2*(-18-7)$$

$$= 2*25 = \boxed{50}$$