Université J.F. CHAMPOLLION Albi

Théorie et Algorithmique des Graphes

Licence d'informatique S5

Plan

Pour toute question : thierry.montaut@univ-jfc.fr

Introduction

En 1736, Leonhard Euler s'intéresse au problème des ponts de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad), ville prussienne construite autour de deux îles situées sur le Pregel :
"existe-t-il une promenade dans la ville prussienne de Königsberg passant une et une seule fois par chacun des sept ponts de la ville ?"
et le premier, propose de modéliser ce problèmes par un graphe.

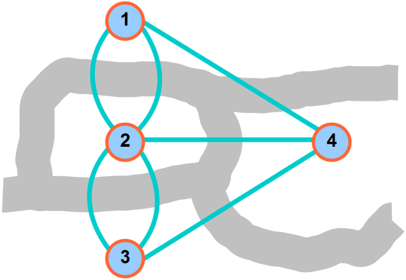


FIGURE: Les ponts de Königsberg. Graphe d'Euler

En 1856, William Hamilton utilise cette technique pour chercher cette fois-ci un chemin autour du monde passant une et une seule fois par 20 villes prestigieuses et en fait un jeu en plaçant les 20 villes aux sommets d'un dodécaèdre régulier.

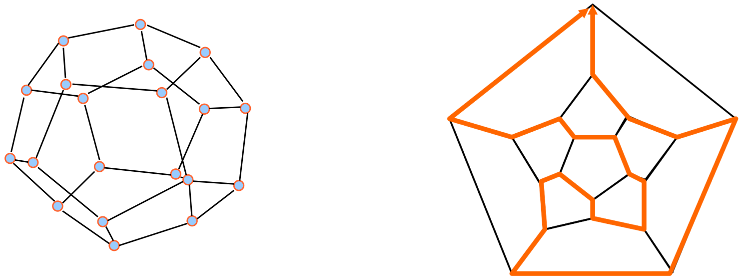


FIGURE: Le voyage autour du monde d'Hamilton

- Depuis, le recours à un graphe pour modéliser un système réel est devenu un outil classique des mathématiques discrètes et les propriétés des graphes ont été largement étudiées.
- Les graphes sont devenus un outil privilégié pour modéliser et étudier les ensembles structurés complexes, les relations entre objets, l'évolution de systèmes dans le temps, les réseaux.

Peu de domaines d’études ont autant d’applications dans des disciplines aussi diverses que mathématiques, informatique (système, réseaux, compilation...), mais aussi sociologie, théorie des jeux, botanique, zoologie, économie, automatique, génie industriel et beaucoup d’autres.

- A l'origine, les graphes sont des objets mathématiques étudiés par la **théorie des graphes**, une branche des mathématiques discrètes. Cette théorie s'intéresse peu aux applications et aux questions algorithmiques.
- **L'algorithmique des graphes,** liée à l'informatique, complète cette théorie en s'intéressant non plus à l'étude des graphes mais à la réalisation d'algorithmes de traitement des graphes, à leur mise en oeuvre et à leur optimisation.

- Les applications des graphes ayant pris une grande importance ces 20 dernières années en optimisation de projet, production, logistique, leur étude constitue aujourd'hui une partie importante de la **recherche opérationnelle**, discipline industrielle dont le but est de fournir des méthodes d'optimisation pour les problèmes de grande taille.
- La recherche opérationnelle s'intéressera donc entre autre à la mise au point de méthodes de résolution des problèmes de graphes "difficiles“ c'est-à-dire de complexité non polynomiale.

Graphe non orienté

Définition

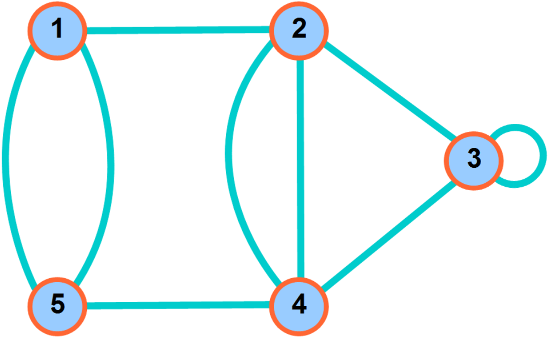
Un graphe non orienté est un couple (X, E) *où* X *est un ensemble fini de sommets et* E *un ensemble de paires* $\{x, y\}$ *(non ordonnées) de deux éléments de* X *appelées arêtes.*
On autorise parfois que E *contienne des parties de la forme* $\{x, x\}$ *(appelée boucle) ou qu'il contienne plusieurs arêtes égales, on parle alors de* **multigraphe**. *Si on veut insister sur leur absence on parle de* **graphe simple**.

Représentation sagittale : cas non orienté

Le multigraphe non orienté $G_2 = (X = \{1, 2, 3, 4, 5\},$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$$

sera représenté par le diagramme de la figure 22.



Définition

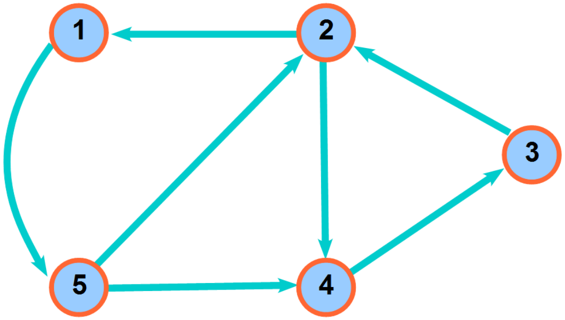
Un graphe orienté est un couple (X, E) où X est un ensemble fini de sommets et E un ensemble de couples (x, y) (ordonnés) d'éléments de X appelées arcs.
On autorise parfois que E contienne des couples de la forme (x, x) (appelée boucle) ou qu'il contienne plusieurs arcs égaux, on parle alors de **multigraphe orienté***. Si on veut insister sur leur absence on parle de* **graphe orienté simple***.*

Représentation sagittale : cas orienté

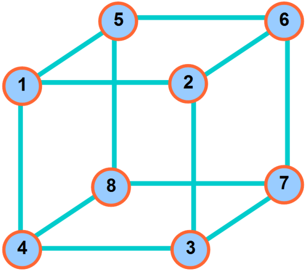
Le graphe orienté

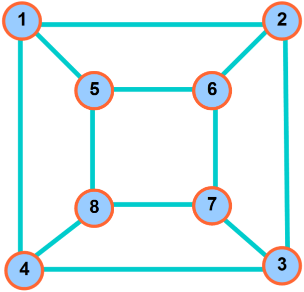
$$G_1 = (X = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$
$$E = \{(1,5), (2,1), (2,4), (3,2), (4,3), (5,2), (5,4)\}$$

sera représenté par le diagramme de la figure 25.



Attention, les représentations sagittales sont parfois trompeuses et il peut être difficile de vérifier l'égalité de deux graphes à l'aide de leur représentation sagittale.





Remarques

- Le graphe d'Euler et le graphe G_2 sont des exemples de multigraphes mais sauf cas exceptionnels (où cela sera précisé explicitement), nous ne nous intéresserons qu'aux **graphes simples.**
- On notera souvent indifféremment (x, y) les arêtes ou les arcs.
- Pour simplifier les choses nous considérerons dans tout le cours que $X = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Définition et Vocabulaire

Vous trouverez en fin de polycopié un lexique (français-anglais) des termes courants de la théorie des graphes.

Définition

Soit $G = (X, E)$ *un graphe .*

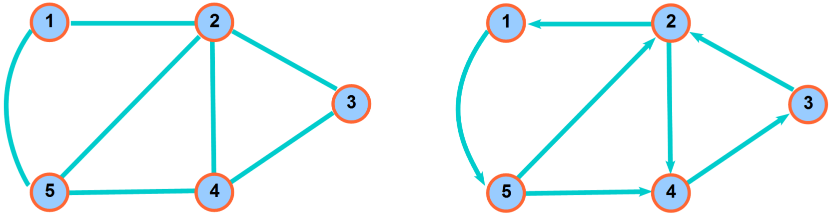
L'ordre *du graphe* G *est le nombre de ses sommets. On notera dans tout ce cours* $n = |X|$ *l'ordre du graphe* G. *On notera également* m *le nombre d'arêtes ou d'arcs de* G.

Orientation

Définition

On dit que le graphe orienté G_o est une orientation du graphe non orienté G s'ils ont le même ensemble de sommets X que pour toute arête $\{x, y\}$ de G soit (x, y) soit (y, x) est un arc de G_o (et pas les deux) et que pour tout arc (x,y) de G_o, $\{x, y\}$ est bien une arête de G.

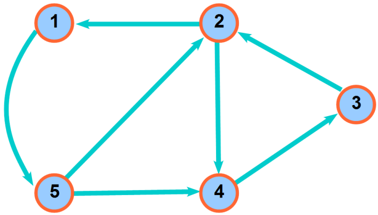
Un graphe non orienté et une de ses orientations possibles :

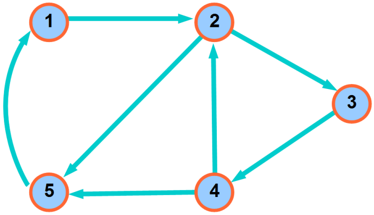


Graphe inverse

Définition

Si $G = (X, E)$ est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de G le graphe $G' = (X, E')$ de même ensemble de sommets X et tel que G possède l'arc (x, y) si et seulement si G' possède l'arc (y, x).

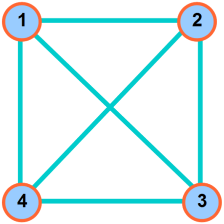


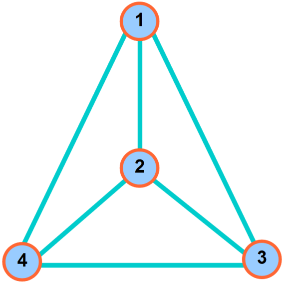


Graphe planaire

Définition

Un graphe est dit **planaire** *s'il admet une représentation sagittale sans que les arêtes se croisent. (Tout graphe a moins de 5 sommets est planaire).*



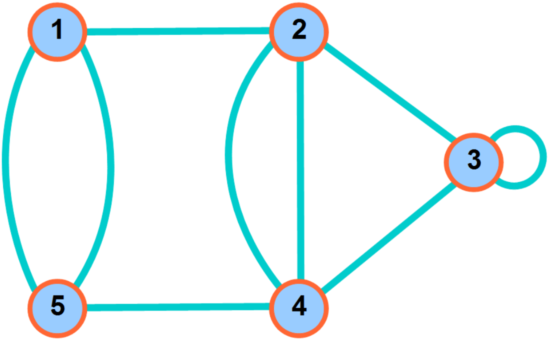


Voisinage, degré : Cas non orienté

Définition

- *Les deux sommets x et y sont dits* **adjacents ou voisins** *s'il existe une arête $\{x, y\}$ dans G. x et y sont appelés* **les extrémités** *de l'arête $\{x, y\}$.*
- **Le voisinage** *du sommet x est l'ensemble noté $V(x)$ de ses sommets adjacents (répétés avec leur multiplicité dans le cas d'un multigraphe)*
- *On appelle* **degré** *de x le nombre d'arêtes incidentes à x. C'est donc aussi le cardinale du voisinage de x. On note $d(x) = |V(x)|$ le degré de x.*
- *Un sommet de degré nul est dit* **isolé**, *un sommet de degré 1 est dit sommet* **pendant**.

Dans le multigraphe G_2, le sommet 2 est de degré 4 et de voisinage : $\{1, 3, 4, 4\}$.



Voisinage, degré : Cas orienté

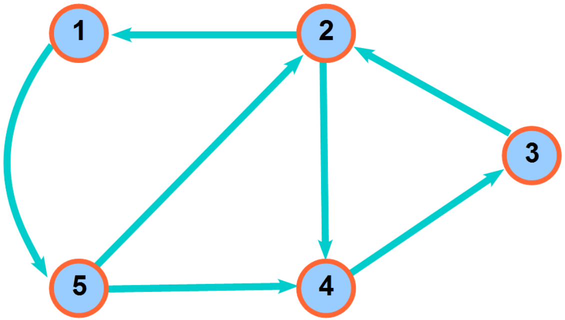
Définition

- *Les deux sommets x et y sont dits* **adjacents** *s'il existe un arc (x, y) dans G, x est* **l'origine** *de l'arc et y son extrémité. x est un* **prédécesseur** *de y et y un* **successeur** *de x.*
- *Le* **voisinage sortant** *du sommet x est l'ensemble noté $V^+(x)$ de ses successeurs.*
- *On appelle* **degré sortant** *de x le nombre de successeurs de x. On note $d^+(x) = |V^+(x)|$ le degré sortant de x.*

Définition

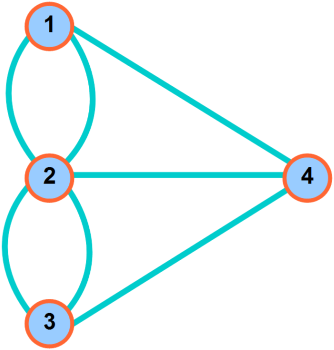
- *Le* **voisinage entrant** *du sommet x est l'ensemble noté $V^-(x)$ de ses prédécesseurs.*
- *On appelle* **degré entrant** *de x le nombre de prédécesseurs de x. On note $d^-(x) = |V^-(x)|$ le degré entrant de x.*
- *Un sommet x de degré entrant égal à 1 et de degré sortant nul est dit pendant. Un sommet de degré entrant nul est une source, un sommet de degré sortant nul est un puits.*

Dans le graphe G_1, 4 est de degré entrant 2, de voisinage entrant $\{2,5\}$, de degré sortant 1 et de voisinage sortant $\{3\}$.



Graphes non orientés classiques

Le graphe établi par Euler pour résoudre le problème des ponts de Königsberg est appelé graphe d'Euler. Une fois le problème ainsi modélisé, la réponse à la question posée est clairement non n'est-ce pas ?



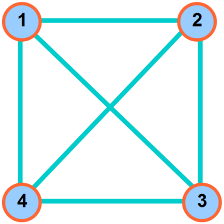
Graphes complets

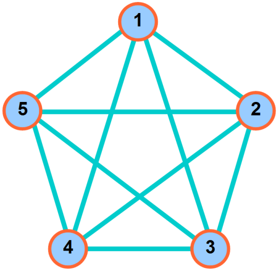
Définition

Un graphe non orienté est dit **complet** *si toute paire de sommets est reliée par une arête.*
On note K_n tout graphe complet à n arêtes (En hommage à Kasimir Kuratowski qui donna en 1930 une caractérisation des graphes planaires).

K_5 est le plus petit graphe complet non planaire.

Les graphes complets K_4 et K_5





Graphes k-parti

Définition

Un graphe $G = (X, E)$ est dit **k-parti** *s'il existe une partition de X en k ensembles non vides tel que toute arête de G ait ses extrémités dans des ensembles différents.*
Si k n'est pas précisé on parle de graphe multiparti, pour $k = 2$ et $k = 3$ on parle de graphe biparti, triparti.

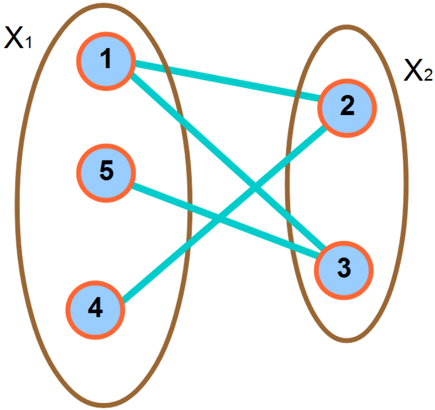
Graphes biparti

Précisons le cas (fondamental) où $k = 2$.

Définition

Un graphe G est dit **biparti** *s'il existe une partition de l'ensemble des sommets en $X = X_1 \cup X_2$ telle que toute arête (x, y) de G ait une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2.*

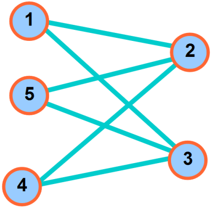
Graphe biparti



Graphes biparti

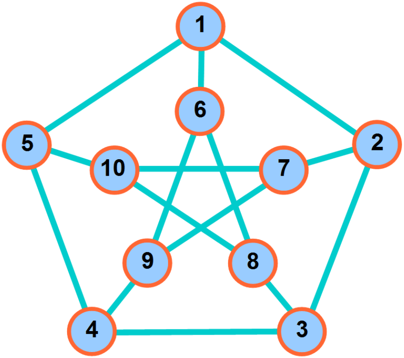
Définition

On appelle graphe biparti complet de tailles n et p un graphe biparti tel que $|X_1| = n$, $|X_2| = p$, *et pour tout* $x, y \in X_1 \times X_2$ *il existe une arête entre* x *et* y. *Toujours en hommage à Kasimir Kuratowski, on note* $K_{n,p}$ *un tel graphe biparti complet.*



Graphe de Petersen

Nous utiliserons beaucoup en TD le graphe de Petersen à 10 sommets et 15 arêtes, du au mathématicien danois Julius Petersen qui l'étudia en 1898 et qui possède de très nombreuses propriétés.



Premières propriétés

Proposition

Soit G un graphe non orienté simple à n sommets et m arêtes :

1. *Le graphe complet à n sommets possède* $m = \frac{n(n-1)}{2}$ *arêtes.*
2. *G vérifie donc* $m \leq \frac{1}{2}n(n-1)$. *(On a donc toujours* $m \leq O(n^2)$. *)*
3. $\sum_{x \in X} d(x)$ *est le nombre d'extrémités d'arêtes, c'est donc deux fois le nombre d'arêtes, c'est donc un nombre pair.*
4. *Il y a un nombre pair de sommets de degré impair.*

Exercices

- Montrer que tout graphe admet deux sommets de même degré.
- On suppose que l'amitié est réciproque (même si la littérature et la vie nous en donnent beaucoup de contre-exemple). Montrer que dans tout assemblée de personnes, il existe toujours deux personnes qui ont exactement le même nombre d'amis dans l'assemblée.

Propriété

Proposition

Soit G un graphe orienté simple à n sommets et m arcs :

1. *G vérifie* $m \leq n(n-1)$. *(On a donc toujours* $m \leq O(n^2)$. *)*
2. $\sum_{x \in X} d^+(x)$ *est le nombre d'origine ou d'extrémités d'arcs, c'est donc s le nombre d'arcs.*

Graphes partiels et sous-graphes

Définition

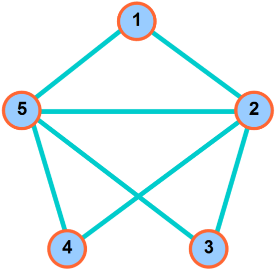
Soit $G = (X, E)$ un graphe, $G' = (X, E')$ est un **graphe partiel** *de G si $E' \subset E$. Dit autrement ils ont mêmes sommets mais on a enlevé quelques arêtes ou arcs...*

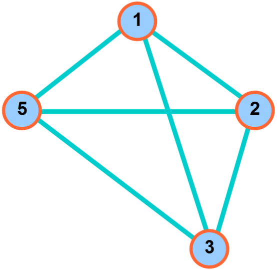
à ne pas confondre avec la définition suivante

Définition

$G' = (X', E')$ est un **sous-graphe** *de G si $X' \subset X$ et que $E' = E \cap X \times X$. Dit autrement on a enlevé quelques sommets et les arêtes ou arcs dont ils étaient extrémités.*

Graphes partiel et sous-graphe de K_5.





Exercice : Combien un graphe à n sommets et m arêtes possède-t-il de graphes partielles ? de sous-graphes ?

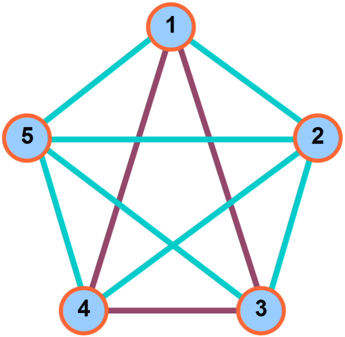
Clique

Définition

Si G est un graphe non orienté, on appelle **clique** *de G un sous graphe complet de G. On précise parfois k-clique pour une clique d'ordre k.*

Exercice : Bien identifier la forme d'une k-clique pour $k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Une 3-clique du graphe K_5.



Chaines et cycles d'un graphe non orienté

Définition

On appelle **chaîne** *de G toute suite alternée de sommets et d'arêtes de G : $c = (x_0, a_1, x_1, ..., a_n, x_n)$ telle que $\forall i \in [1, n], \;\; a_i = (x_{i-1}, x_i)$.*
c est une chaîne de longueur n (le nombre d'arêtes) joignant x_0 à x_n.
Dans le cas d'un graphe simple, il est inutile de préciser l'arête et nous noterons donc simplement :

$$c = (x_0, x_1, ..., x_n).$$

ou

$$c = x_0 \;\_\_\_\; x_1 \;\_\_\_\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_{n-1} \;\_\_\_\; x_n$$

Connexité

Définition

1)Soit x et y deux sommets de G. On dit que y est accessible à partir de x dans G s'il existe une chaîne de G joignant x à y. On considère (x_0) comme une chaîne de longueur nulle joignant x_0 à lui-même.
2)$G = (X, E)$ est dit **connexe** *si $\forall (x, y) \in X^2$, y est accessible à partir de x.*
3)L'accessibilité définit une relation d'équivalence entre les sommets. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées **composantes connexes** *de G.*

Chaînes simples et élémentaires

Définition

Une chaîne est dite **simple** *si elle ne passe pas deux fois par la même arête et est dite* **élémentaire** *si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.Il est clair qu'une chaîne élémentaire est simple.*

Définition

On appelle **cycle** *une chaîne simple dont l'origine est égale à l'extrémité, i.e. une chaîne simple de la forme* $c = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0)$.

Remarque : On impose à une chaîne d'être simple (ne pas passer deux fois par la même arête, pour éviter de pouvoir considérer l'aller-retour $x - y - x$ comme un cycle.

Propriété

Théorème

1. *Toute chaîne élémentaire a une longueur* $\leq n-1$.
2. *Tout cycle élémentaire a une longueur* $\leq n$.
3. *De toute chaîne on peut extraire une chaîne élémentaire.*

Chemins et circuits d'un graphe orienté

Le passage du cas non orienté au cas orienté n'entraine parfois qu'un changement de vocabulaire, mais le changement est parfois plus profond (c'est le cas par exemple de la notion de forte connexité).

Définition

On appelle **chemin** *de G toute suite alternée de sommets et d'arcs de G :* $c = (x_0, a_1, x_1, ..., a_n, x_n)$ *telle que* $\forall i \in [1, n], \;\; a_i = (x_{i-1}, x_i)$. *c est un chemin de longueur n (le nombre d'arcs) joignant* x_0 *à* x_n.
Dans le cas d'un graphe simple, il est inutile de préciser l'arc et on notera :

$$c = (x_0, x_1, ..., x_n).$$

ou

$$c = x_0 \;\; \to \;\; x_1 \;\; \to \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_{n-1} \;\; \to \;\; x_n$$

Forte connexité

Définition

1)Soit x et y deux sommets de G. On dit que y est accessible à partir de x dans G s'il existe un chemin de G joignant x à y.
2)$G = (X, E)$ est dit **fortement connexe** *si $\forall (x, y) \in X^2$, y est accessible à partir de x.*
3)On construit une relation d'équivalence entre les sommets par x est en relation avec y ssi y est accessible à partir de x et x à partir de y. Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées **composantes fortement connexes** *de G.*

Chemins simples et élémentaire

Définition

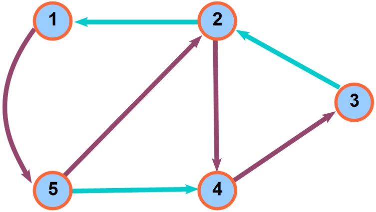
Un chemin est dit **élémentaire** *si il ne passe pas deux fois par le même sommet.*

Définition

On appelle **circuit** *un chemin dont l'origine est égale à l'extrémité, i.e. un chemin de la forme* $c = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_0)$.

Cette fois-ci on autorise le circuit (x, y, x) car les arcs (x, y) et (y, x) sont différents.

Chemin élémentaire et circuit



Propriété

Proposition

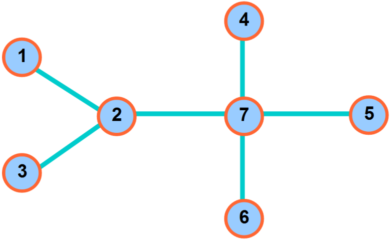
De tout chemin on peut extraire un chemin élémentaire.

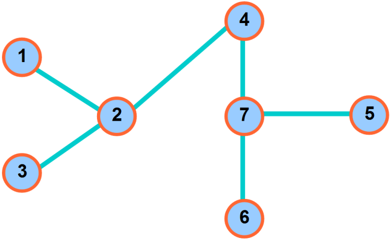
Arbres

Définition

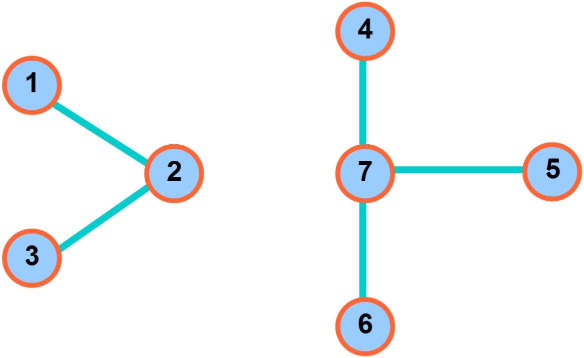
On appelle **arbre** *un graphe non orienté connexe et sans cycle.*
Une union d'arbre, donc un graphe non orienté et sans cycle est **une forêt**.

Exemples d'arbres





Une forêt est une union d'arbres



Caractérisation des arbres

Théorème

Il existe de nombreuses caractérisations équivalentes des arbres : Un graphe T à n sommets et m arêtes est un arbre ssi :

1. *T est connexe et $m = n - 1$*
2. *T est connexe et $m = n - 1$*
3. *T est sans cycle et maximal en tant que tel (si on lui ajoute une arête entre deux sommets quelconques, cela crée toujours un cycle)*
4. *T est connexe et minimal en tant que tel (si on lui enlève une arête quelconque, le graphe n'est plus connexe)*
5. *Deux sommets quelconques de T sont reliés par un unique chemin.*

Arborescences

Il ne faut pas confondre les arbres qui sont des graphes non orienté avec les arborescences qui seront des graphes orientés.

Définition

Un arbre est dit **enraciné** *en r lorsqu'on a choisi un de ses sommets r que l'on appelle alors la racine de l'arbre enraciné.*
On appelle **arborescence** *tout graphe obtenu à partir d'un arbre par enracinement en r et orientation des arêtes à partir de r.*

Une arborescence obtenue par enracinement d'A_2 sur la racine 4