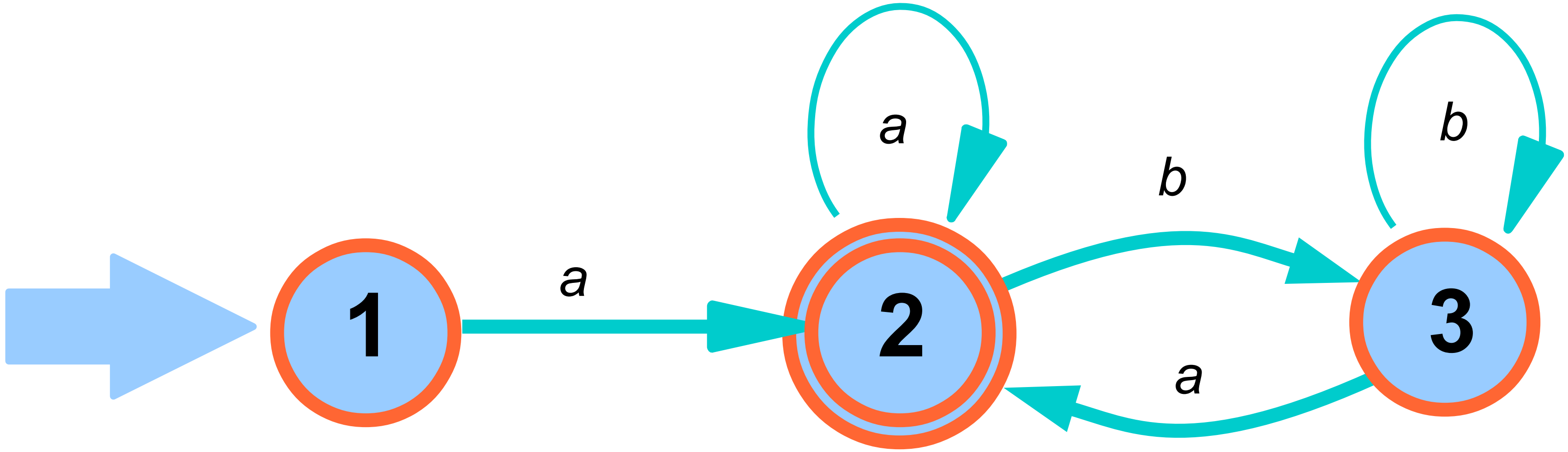
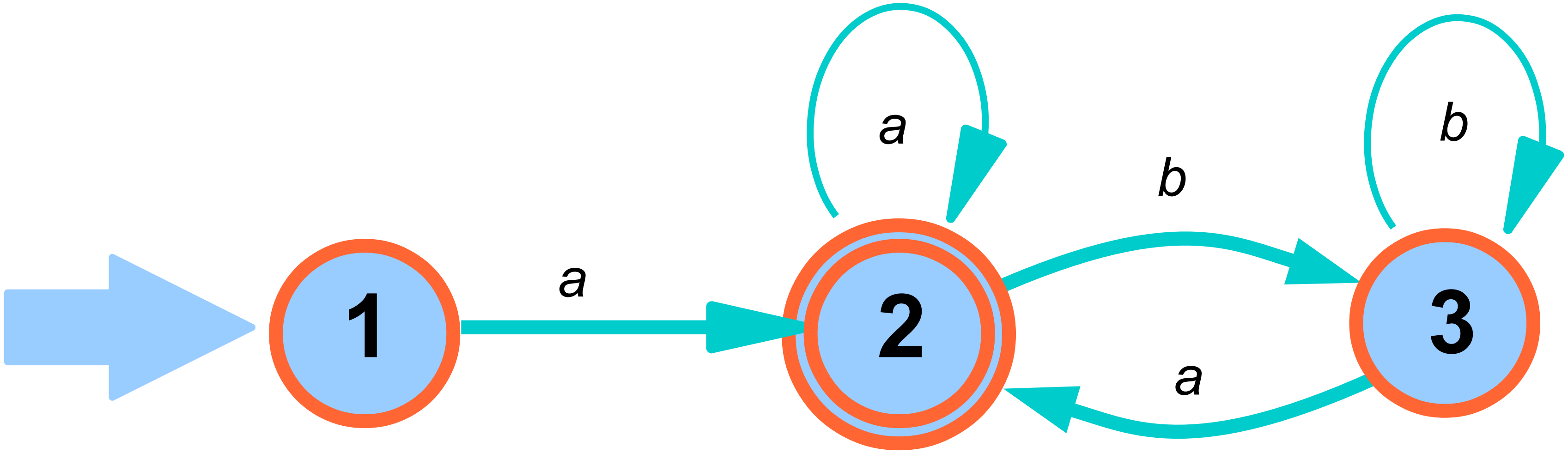
Caractériser le langage reconnu par l'automate :





On écrit le système des équations aux langages

$$\begin{cases} L1 = \varepsilon \\ L2 = L1.a + L2.a + L3.a \\ L3 = L2.b + L3.b \end{cases}$$

$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L2$

On résout le système :

- L1 = ε
- L2 = L1.a + L2.a + L3.a
- L3 = L2.b + L3.b

On peut directement remplacer L1 par ε

- L2 = a + L2.a + L3.a
- L3 = L2.b + L3.b

On ne peut déterminer directement ni L2 ni L3 !

On résout le système :

$$\begin{cases} (1)\ L2 = a + L2.a + L3.a \\ (2)\ L3 = L2.b + L3.b \end{cases}$$

A partir de (2), on exprime L3 en fonction de L2 :

d'Après le lemme d'Arden,

- $L3 = L2.b.b^* = L2.b^+$

On résout le système :

- (1) $L2 = a + L2.a + L3.a$
- (2) $L3 = L2.b + L3.b$

A partir de (2), on exprime L3 en fonction de L2 :

d'Après le lemme d'Arden,

- $L3 = L2.b.b^* = L2.b^+$

On reporte dans (1) qui devient,

$$
\begin{aligned}
(1')\ L2 &= a + L2.a + L2.b^+.a \\
&= a + L2\,(a+b^+.a) \\
&= a + L2.b^*.a
\end{aligned}
$$

On résout le système :

$$\begin{cases} \bullet\ (1)\ L2 = a + L2.b + L3.a \\ \bullet\ (2)\ L3 = L2.b + L3.b \end{cases}$$

$$(1')\ L2 = a + L2.b^{*}.a$$

donc d'après le lemme d'Arden,

- $L2 = a.(b^{*}a)^{*}$

d'où finalement $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = a.(b^{*}a)^{*}$

On reconnaît les mots commençant et finissant par « a ».