Inversion de matrices
1) Par résolution d'un système linéaire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- ***Méthode :***

  On résout AX=Y (par pivot de Gauss par exemple) et on exprime X en fonction Y

Si A est inversible, AX=Y ssi $X=A^{-1}Y$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

AX=Y ssi

$$\begin{cases} x + 2y & = a \\ -x + 3y & = b \\ y - z & = c \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} 5y = a + b \\ x = a - 2y \\ z = y - c \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} x = 1/5\ (3a - 2b) \\ y = 1/5\ (a + b) \\ z = 1/5\ (a + b - 5c) \end{cases}$$

Donc AX=Y ssi

$$\begin{cases} x = 1/5\,(3a - 2b) \\ y = 1/5\,(a + b) \\ z = 1/5\,(a + b - 5c) \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1/5 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Or AX=Y ssi $X=A^{-1}Y$, donc par identification

$$\boxed{A^{-1} = 1/5 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}}$$

2) Méthode de Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- *Si une suite d'opérations sur les lignes ramène A à I_n (par un pivot de Gauss), alors les mêmes opérations dans le même ordre ramène I_n à A^{-1}.*

Idée : Opérer directement sur les lignes de la matrice : $(A \mid I_n)$

On se ramène à une matrice triangulaire supérieur par un pivot descendant :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L2 \leftarrow L2 + L1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$L2 \leftrightarrow L3$

$L3 \leftarrow L3 - 5L2$

On divise les lignes pour obtenir une diagonale de 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right)$$

$$L3 \leftarrow L3/5$$

On se ramène à l'identité par un pivot montant

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right)$$

L2 ← L2 + L3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right)$$

L1 ← L1 -2 L2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/5 & -1 \end{array}\right)$$

I_n

A^{-1}

$$\boxed{A^{-1} = 1/5 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}}$$

3) Formule de la comatrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On se ramène à des calculs de déterminants par application de la formule :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \, {}^{t}\mathrm{com}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^t\mathrm{com}(A)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 \end{array}\right| \quad \text{par blocs !}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, {}^{t}\mathrm{com}(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ & 3 & 0 \\ & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ -1 & & 0 \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -(1) & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} & & \\ -1 & 3 & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & +(-1) \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} & 2 & 0 \\ & & \\ & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -(-2) & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & +(-1) & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ & & \\ 0 & 1 & \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -(1) \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} & 2 & 0 \\ & 3 & 0 \\ & & \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ +0 & - & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ -1 & & 0 \\ & & \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -{\color{red}0} & + \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \\ -1 & 3 & \\ & & \end{pmatrix} \qquad \mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & +{\color{red}5} \end{pmatrix}$$

$$^{t}\,\mathrm{com}(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\mathrm{com}(A)$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}}$$