TD 3. Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1°) $f(x,y)=\ln(xy-1)$. **2°)** $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$. **3°)** $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

4°) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ **5°)** $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

Exercice 2 Calculer les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

1°) $f(x,y)=\sin(xy)$. **2°)** $f(x,y)=(x+y).\sin(\frac{1}{x^2})$. **3°)** $f(x,y)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

4°) $f(x,y)=\frac{e^{xy}-1}{x}$. **5°)** $f(x,y)=\frac{1-\cos(xy)}{y^2}$. **6°)** $f(x,y)=\frac{\ln(xy+e^y)}{\sqrt{y}}$.

7°) $f(x,y)=\dfrac{2xy-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$. (Poser $x=\rho\cos(\theta)$ et $y=\rho\sin(\theta)$)

8°) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$. **9°)** $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$. **10°)** $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2)+\sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 3 Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limites en $(0,0)$:

1°) $f(x,y)=\dfrac{2xy-y^2}{x^2+y^2}$.

(On pourra étudier les restrictions de la fonction f à des droites passant par $(0\,,0)$).

2°) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x}$. **3°)** $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^4+3y^2}$. **4°)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

5°) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2-1}{x}$ **6°)** $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$.

7°) $f(x,y)=\dfrac{|x+y|}{x^2+y^2}$. **8°)** $f(x,y)=\dfrac{x^2-y}{x^2+y}$.

Exercice 4 Calculer les dérivées partielles de chacune des fonctions suivantes, ainsi que leur vecteur gradient en quelques points simples.

$$f\ :\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & e^x\cos(y^2)\end{array}\right.\qquad f\ :\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & (x^2+y^2)\cos(xy)\end{array}\right.$$

$$f\ :\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{1+x^2y^2}\end{array}\right.\qquad f\ :\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & xy+yz+xz\end{array}\right.$$

$$f\ :\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \cos(x^3y)\end{array}\right.\qquad f\ :\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{\sin(y)}{\ln(1+x^2)}\end{array}\right.$$

$$f\ :\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & x^3+3xe^y\end{array}\right.\qquad f\ :\left(\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y,z) & \longmapsto & x+y^2+y+z^2+z+x^2\end{array}\right.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Calculer les dérivées partielles secondes de quelques-une des fonctions précédentes.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Comparer la valeur exacte de $f(x,y) = x^2y^3 - x + 2y$ en $(0.01, 0.95)$ avec la valeur approchée obtenue (de tête) en utilisant la formule de Taylor à l'ordre 1.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Calculer la formule de Taylor à l'ordre 1 de quelques-une des fonctions précédentes au voisinage de points intéressants et l'utiliser pour obtenir des valeurs approchées de f sur des points voisins.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Déterminer les équations des plans tangents en $(0, \frac{\pi}{4})$ et $(0, \frac{\pi}{2})$ à la surface d'équation cartésienne

$$z = e^x \sin y + e^{-x} \cos y.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Calculer les équations des plans tangents de quelques-une des fonctions précédentes au voisinage de points intéressants.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Découvrez les possibilités de **Sage** concernant les fonctions de plusieurs variables (à l'aide du fichier joint), lisez la documentation sur plot3D, tracez les graphes de toutes les fonctions étudiées et reprenez les exercices à l'aide de Sage.