Méthodes pratiques de calcul des déterminants

- Il n'existe pas **UNE** méthode pratique, universelle et efficace pour calculer les déterminants.

- Savoir calculer efficacement les déterminants est donc une compétence délicate à acquérir qui nécessite (comme toutes les compétences calculatoires) ...

- De parfaitement maîtriser les techniques élémentaires,
- De prendre des initiatives, d'engager des calculs,
- De savoir faire marche arrière quand un calcul semble mal engagé,
- De développer du savoir faire ce qui ne peut se faire que par la pratique.

- De parfaitement maîtriser les techniques élémentaires :
    - Déterminants diagonaux et triangulaires
    - Déterminants par blocs
    - Développement / lignes ou colonnes
    - Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes
    - Reconnaître des déterminants nuls

Voir pour cela les présentations animées des méthodes.

- De prendre des initiatives, engager des calculs :
    - La solution la plus efficace est souvent un mélange des techniques précédentes.
    - Il faut engager une de ces techniques en s'adaptant à la forme des résultats intermédiaires sans chercher à tout prix à aller au bout de la méthode initialement choisie.
    - Il serait bien sûr dommage de se priver des indications fournies par l'énoncé.

Un premier exemple

Dans le cas d'un déterminant de petite taille et entièrement numérique, il faut simplement chercher à être efficace et sûr :

- En général, effectuer des opérations pour faire apparaître des blocs ou creuser une ligne ou une colonne et développer est une bonne stratégie.

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Echange lignes 1 et 2

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Devpt colonne 3

Par bloc ou devpt colonne 1

$$= - (1-(-2)) = - 3$$

Déterminants symboliques

- Les opérations sont moins simples quand tous les coefficients ne sont pas parfaitement connus.
- On est amené à distinguer des cas pour ne pas multiplier une ligne par 0 (et encore moins la diviser par 0)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ac & bc \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ac & bc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & c-b & c-a \\ ab & a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix}$$

On retranche C1 à C2 et C3

$$= \begin{vmatrix} c-b & c-a \\ a(c-b) & b(c-a) \end{vmatrix} = (c-b)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$$

Mise en facteur dans C1 et C2

Bloc ou devpt ligne 1

$$= (c-b)(c-a)(b-a)$$

Une remarque pratique importante

- Il est intéressant de noter (surtout dans le cas des déterminants symboliques), que si les sommes sur toutes les lignes (ou colonnes) sont égales, cela permet toujours de se ramener à un déterminant de taille n-1.

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+x & 1 & 1 & 1 \\ 3+x & x & 1 & 1 \\ 3+x & 1 & x & 1 \\ 3+x & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

On ajoute C2+C3+..+Cn à C1

$$= (3+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

On met 3+x en facteur dans C1
Ce qui fait apparaître une colonne de 1

$$(3+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (3+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

On retranche L1 à toutes les autres lignes

$$= (3+x)\,(x-1)^3$$

déterminant triangulaire supérieur

Déterminants de taille n

- Dans le cas d'un déterminant de taille n, il faut être très rigoureux lors des opérations (on ne « voit » pas tous les coefficients).
- On peut être amené à raisonner par récurrence.

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-1)+x & 1 & \cdots & & 1 \\ (n-1)+x & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ (n-1)+x & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

On ajoute C2+C3+..+Cn à C1

$$= ((n-1)+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

On met (n-1)+x en facteur dans C1
Ce qui fait apparaître une colonne de 1

$$= ((n-1)+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

On retranche L1 à toutes les autres lignes

$$= ((n-1)+x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 0 & x-1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$= ((n-1)+x)\,(x-1)^{\,n-1}$$