INU Champollion

Licence Info 3ème Année

Maths pour l'I.A.

Thierry Montaut

Plan du cours

- Compléments d'algèbre linéaire
  - Rappels de diagonalisation
  - Application au calcul des puissances de matrice
  - Espace euclidien $\mathbb{R}^n$: Produits scalaires, orthogonalité
  - Bases orthogonales. Projections orthogonales,
  - Diagonalisation des matrices symétriques
- Compléments d'analyse
- Compléments de probabilité et de statistiques

Rappels de diagonalisation

Pré-requis : Cours de méthodes matricielles de deuxième année. En particulier opérations matricielles (produit, transposée, inverse), rang, déterminants, polynômes.

Notation :
E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie n. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$. $u,\ v$, sont des endomorphismes de E et $A,\ B,\ D,\ T$, des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathscr{B} = (e_1, ...e_n) = (e),\ \mathscr{B}' = (\varepsilon_1, ...\varepsilon_n) = (\varepsilon)$, notent des bases de E.

Rappels

Deux matrices A et B sont dites **semblables** ssi

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \ \ t.q. \ \ A = PBP^{-1},$$

ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
Si $P = Pass(\mathscr{B}, \mathscr{B}')$ est la matrice de passage entre les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a alors

$$A = PBP^{-1}.$$

Le but de ce chapitre est de chercher à déterminer, pour un endomorphisme u donné, la base de E dans laquelle il sera représenté par une matrice diagonale.

Endormorphismes diagonalisables

Définition

Un endomorphisme u est dit **diagonalisable** *ssi il existe une base de E dans laquelle il est représenté par une matrice D diagonale, une telle base est appelée base de diagonalisation de u.*
Une matrice A est dite **diagonalisable** *ssi elle est semblable à une matrice D diagonale,*

$$i.e. \;\; \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), \;\; A = PDP^{-1}.$$

Proposition

Si $A = mat(u, (e))$ est la matrice représentant u dans la base (e) de E, u est diagonalisable (respectivement trigonalisable), ssi A l'est. Dans ce cas $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de (e) vers la base de diagonalisation de u.

Par définition de la matrice représentant un endomorphisme, u est diagonalisable dans une base $(e) = (e_1, \ldots, e_n)$ ssi

$$D = mat(u,(e)) = \begin{array}{cc} u(e_1)\ldots u(e_n) & \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ (0) & \ddots & (0) \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

Donc ssi tous les vecteurs de la base de diagonalisation vérifient

$$\forall i \in \ [\![1, n]\!], \ \ u(e_i) = \lambda_i e_i.$$

Ce type de vecteur va donc être d'une importance capitale par la suite.

Exemple :
Soit $E = \mathbb{R}^2$ et u l'endomorphisme de E représenté dans la base canonique par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que la famille $\{e_1 = (1, -1), e_2 = (1, 2)\}$ est une base de E et donner la matrice représentant u dans cette base.

Valeurs et vecteurs propres

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $V \in E$ *est dit* **vecteur propre** *de* u *associé à la* **valeur propre** λ *ssi :*

1. $V \neq 0$
2. $u(V) = \lambda.V$

On appelle spectre de u, *noté* $Sp(u)$ *l'ensemble de ses valeurs propres.*

Valeurs et vecteurs propres

Définition

Matriciellement : , $V \in \mathbb{R}^n$ *est dit* **vecteur propre** *de* A *associé à la* **valeur propre** λ *ssi :*

1. $V \neq 0$
2. $A.V = \lambda.V$

On appelle spectre de A, *noté* $Sp(A)$ *l'ensemble de ses valeurs propres.*

On peut donc réécrire la CNS précédente sous la forme :

Critère

Un endomorphisme u est diagonalisable, ssi il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u. Les éléments diagonaux de la matrice diagonale représentant u dans cette base sont les valeurs propres associées.

Remarque : V est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ ssi
$V \neq 0$ et $(u - \lambda Id)(V) = 0$ i.e. ssi

$$V \in ker(u - \lambda Id) \setminus \{0\}.$$

Définition

On appelle **sous-espace propre** *de u associé à la valeur propre λ le s.e.v. de E :*

$$E_\lambda = ker(u - \lambda Id).$$

Les vecteurs propres associés à la valeur propre λ sont les éléments non nuls de E_λ.

Méthodes pratiques de recherche des éléments propres

Un fois connue une valeur propre λ, les vecteurs propres associés sont calculés en déterminant le sous-espace propre E_λ. On est donc ramené à un calcul de noyau, c'est-à-dire, une résolution de système linéaire. Cette résolution sera effectuée en pratique la méthode du pivot de Gauss :

Exemple : On reprend l'exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $rg(A)$ et $rg(A - 3I_2)$. En déduire que 0 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer une base des sous-espaces propres associés.

Proposition

Soit u un endomorphisme représenté par une matrice A dans une base (e) de E.
λ est valeur propre de u ssi elle est associée à un vecteur propre donc

$$\begin{array}{ll} \text{ssi} & E_\lambda \neq \{0\} \\ \text{ssi} & u - \lambda Id \text{ n'est pas injectif} \\ \text{ssi} & u - \lambda Id \text{ n'est pas bijectif} \\ \text{ssi} & A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ \text{ssi} & det(A - \lambda I_n) = 0 \end{array}$$

Recherche pratique des valeurs propres - Polynôme caractéristique

Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ On appelle **polynôme caractéristique** *de A le polynôme*

$$P_A = det(A - \lambda I_n).$$

On l'obtient en pratique par un calcul de déterminant.

Proposition

- *P_A est un polynôme de degré n et si on note*

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i,$$

- $$a_n = (-1)^n$$

Exemple : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Déterminer les éléments propres de A.

Proposition

- *Le polynôme caractéristique de* $mat(u,(e))$ *ne dépend que de* u *et pas du choix de la base* (e)*. On l'appelle alors polynôme caractéristique de* u *et on le note* P_u*.*
- *Les valeurs propres de* u *sont les racines sur* $\mathbb{R}$ *de son polynôme caractéristique .*
- *On appelle ordre de multiplicité d'une valeur propre son ordre de multiplicité en tant que racine de* P_u*. On parle ainsi de valeurs propres simples, doubles, triples, etc.*

Remarque :
Si une matrice est diagonalisable, sa forme diagonale a pour coefficients diagonaux les valeurs propres répétées avec leur ordre de multiplicité, on a donc unicité à une permutation près des coefficients diagonaux, correspondant à la même permutation des vecteurs de la base (donc des colonnes de la matrice de passage). On ordonnera quand on y pensera les coefficients diagonaux dans l'ordre croissant.
Remarque :
La trace étant indépendante des changement de base, si A est diagonalisable, $Tr(A) = Tr(D)$ donc la trace de A est égale à la somme des valeurs propres de A.

Exemple : Reprenons la matrice A de l'exemple précédent.

$$P_A = det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix}.$$

On obtient en développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{aligned} P_A &= (3-X)\begin{vmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (3-X)(4+X^2-4X-1) \\ &= (3-X)(X-1)(X-3) \\ &= (1-X)(3-X)^2. \end{aligned}$$

Donc $Sp(u) = \{1, 3\}$, 1 est valeur propre simple, 3 est valeur propre double.

Remarque : Le calcul des valeurs propres passe donc par un calcul de déterminant puis une factorisation de polynôme . Il vous appartient de faire les révisions qui s'imposent pour savoir mener ces calculs.

Proposition

Si λ est une valeur propre de u de multiplicité α alors

$$1 \leq dim(E_\lambda) \leq \alpha.$$

Corollaire

Si λ est une valeur propre simple $dim(E_\lambda) = 1$.

Critère Fondamental de Diagonalisation

Critère

Une matrice A est diagonalisable

- *ssi son polynôme caractéristique admet n racines réelles (comptées avec leur multiplicité) et que pour toute valeur propre de A la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre.*
- *ssi la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.*

Corollaire

Si u admet n valeurs propres distinctes alors u est diagonalisable.

Attention : Cette condition est suffisante mais pas nécessaire !

Méthode pratique de diagonalisation

Résumons la méthode pratique de diagonalisation issue des résultats précédents : Soit u un endomorphisme de E donné par sa matrice A dans une base (e).

- On calcule le polynôme caractéristique $P_u = P_A$. On en déduit les valeurs propres de u et leurs ordres de multiplicité. Penser aux valeurs propres évidentes pour réduire le degré du polynôme à factoriser. Si P_u n'est pas scindé, on ne peut pas réduire u.

- Sinon Pour chaque valeur propre λ :
  On détermine le sous-espace propre associé E_λ et on en précise la dimension et une base.
- Si pour chaque valeur propre on a égalité entre l'ordre de multiplicité et la dimension du sous-espace propre : u est diagonalisable, la matrice diagonale D associé a comme coefficients diagonaux les valeurs propres répétées avec leur ordre de multiplicité dans un ordre choisi librement, la base de diagonalisation est obtenue en faisant l'union des bases des sous-espaces propres dans l'ordre choisi pour les valeurs propres.

Application aux calcul de puissances de matrices

Un des intérêts pratiques de la réduction des matrices est le calcul des puissances de matrice. En effet,

Proposition

si $A = PDP^{-1}$ *alors* $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PD^kP^{-1}$,

ce qui ramène donc au calcul des puissances de la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ (0) & \ddots & (0) \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Application aux calcul de puissances de matrices

Or le calcul des puissances de D est trivial :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ (0) & \ddots & (0) \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Le calcul de A^k se résume donc à deux produits de matrices (et une inversion) pour obtenir $A^k = PD^kP^{-1}$.

Application aux chaînes de Markov

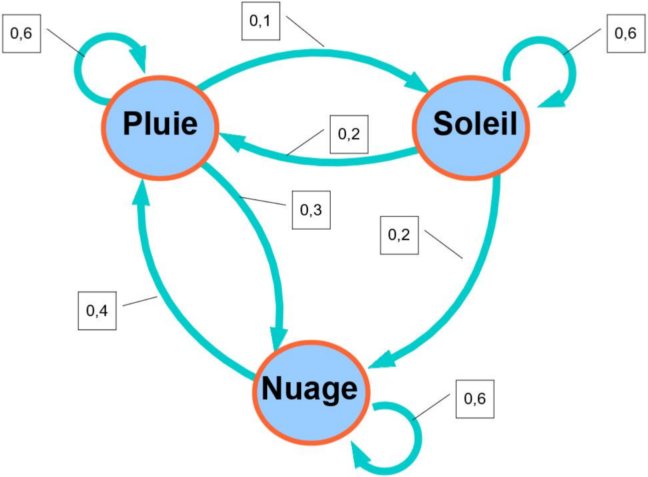
En Bretagne le temps est parfois changeant ! Mais en fonction du temps qu'il fait le jour *n*, on peut calculer la probabilité du temps qu'il fera le lendemain :

	Pluie	Soleil	Nuages
Pluie	60%	10%	30%
Soleil	20%	60%	20%
Nuages	40%	0%	60%

Ces changements du temps peuvent être modélisés par un graphe orienté simple dont les sommet sont le temps qu'il fait le jour n et tel qu'il existe un arc (x,y) valué par la valeur $v \in [0,1]$ si, quand il fait le temps x le jour n, il y a une probabilité v qu'il fasse le temps y le jour $n+1$.

Graphes probabilistes

La situation précédente peut alors être modélisée par le graphe suivant :



Graphes probabilistes

Définition

Un **graphe probabiliste** *est un graphe orienté simple donc les arcs* (x, y) *sont valuées par des valeurs réelles* v *représentant la probabilité de transition entre les deux sommet* x *et* y*. On a donc :*

- *Toutes les valeurs* v *sont dans* $[0, 1]$,
- *La somme des poids sortant d'un sommet est toujours égale à 1.*

Rappel : chaînes de Markov

Définition

- *Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans un état $E = \{e_1, ..., e_m\}$ supposé fini et telle que la valeur de X_{n+1} ne dépend que de la valeur de X_n (et non pas des valeurs de $X_0, X_1, ...X_n$.*
- *Une chaîne de Markov est donc caractérisé par ses probabilité de transitions :*
$$p_{ij}(n) = P_{X_n=e_i}(X_{n+1} = e_j)$$
La probabilité que X_{n+1} soit dans l'état e_j sachant qu'à l'étape précédente, X_n valait e_i.
- *Un processus de Markov est dit homogène lorsque cette probabilité ne dépend pas de n mais seulement de i et j. Un tel processus peut être représenté par un graphe probabiliste de sommets $X = \{1, ..., m\}$ et tel que l'arête (i, j) soit valuée par p_{ij}.*

Rappel : chaînes de Markov

Définition

- *La matrice d'adjacence T associée à ce graphe est appelée matrice de transition de la chaîne de Markov.*
- *On note $\pi_j(n) = P(X_n = e_j)$ la probabilité qu'à l'étape n la variable soit dans l'état e_j, et*

$$\pi(n) = (\pi_1(n), \dots, \pi_m(n)).$$

Théorème

- $$\forall n \in \mathbb{N}, : \quad \pi(n+1) = \pi(n).T$$
- $$\forall n \in \mathbb{N}, : \quad \pi(n) = pi(0).T^n.$$

Donc si l'état initial de la variable est connu, on déduit l'état à la date n d'un calcul de puissance de matrice.