TD 2 : Unification

1 Substitutions et unificateurs

Exercice 1 Appliquez les substitutions :
- $\sigma_1 = [X \leftarrow f(Y), Y \leftarrow g(a)]$
- $\sigma_2 = [X \leftarrow h(c, Y), Z \leftarrow 3]$

aux termes :
- $h(X, g(Z))$
- $g(a)$
- $h(f(X), h(Y, Z))$

Exercice 2 Comparez les substitutions suivantes par ordre de généralité :
- $\sigma_1 = [X \leftarrow f(Y)]$
- $\sigma_2 = [X \leftarrow f(a), Y \leftarrow g(a)]$
- $\sigma_3 = [X \leftarrow f(g(a)), Y \leftarrow g(a)]$
- $\sigma_4 = [Y \leftarrow g(Z)]$

Exercice 3 (Idempotence d'une substitution) Une fonction σ est dite *idempotente* si $\sigma = \sigma \circ \sigma$.

Soit $\sigma = [X_1 \leftarrow t_1; \ldots; X_n \leftarrow t_n]$ une substitution. Montrez que le fait qu'aucun t_i $(i = 1, \ldots, n)$ ne contient un X_i $(i = 1, \ldots, n)$ est une condition nécessaire et suffisante pour que σ soit idempotente.

2 Unification

Exercice 4 Déterminer le *mgu* des problèmes d'unification suivants, ou justifier pourquoi les termes ne sont pas unifiables syntaxiquement. On suppose que les symboles en minuscule (f, g, h, a, b, c) sont des constantes et les symboles en majuscules(X, Y, Z) des variables.

1. $f(g(X)) \stackrel{?}{=} f(Y)$
2. $f(g(Y)) \stackrel{?}{=} f(Y)$
3. $h(X, g(X)) \stackrel{?}{=} h(Y, g(X))$
4. $h(X, g(c)) \stackrel{?}{=} h(Y, g(X))$
5. $h(X, g(c)) \stackrel{?}{=} h(Y, Y)$
6. $h(X, g(c)) \stackrel{?}{=} h(g(c), Y)$
7. $h(X, g(c)) \stackrel{?}{=} h(g(a), X)$

Exercice 5 Appliquez l'algorithme d'unification aux termes suivants. Montrez clairement les différentes étapes de l'algorithme ; il ne suffit pas d'afficher l'unificateur.

1. $pair(a, crypt(Z, b)) \stackrel{?}{=} pair(X, Y)$
2. $pair(crypt(X, b), crypt(Y, b)) \stackrel{?}{=} pair(crypt(a, b), Z)$
3. $crypt(pair(Z, a), X) \stackrel{?}{=} crypt(pair(Y, crypt(X, b)), b)$

4. $crypt(pair(a, Z), X) \stackrel{?}{=} crypt(pair(Y, crypt(X, b)), b)$

Exercice 6 (Idempotence d'un unificateur) Montrez que les unificateurs produits par l'algorithme d'unification sont idempotents.

Exercice 7 (Règles orthogonales dans l'algorithme d'unification) Soient $\{X, Y\}$ des variables, $\{a\}$ une constante et $\{f, g, h\}$ des fonctions. On rappelle qu'une constante peut être vue comme une fonction d'arité 0.

1. Appliquez l'algorithme d'unification aux termes suivants. Montrez clairement les différentes étapes de l'algorithme et affichez clairement l'unificateur le plus général obtenu :
   (U_1) $f(X, g(Y)) \stackrel{?}{=} f(g(Y), g(a))$.
   (U_2) $f(g(h(X)), g(a)) \stackrel{?}{=} f(g(Y), g(a))$ ici, on n'utilisera **pas** la règle *Delete*.
   (U_3) $f(g(Y), X) \stackrel{?}{=} f(g(X), Y)$
2. En vous inspirant de (U_3), trouvez une équation unifiable de la forme $s \stackrel{?}{=} t$ qu'il est impossible d'unifier sans la règle *Delete* (en supposant qu'on ne modifie pas les autres règles). Vous devez justifier précisément pourquoi il n'est pas possible d'utiliser d'autres règles à la place de *Delete*.
3. L'algorithme d'unification est non-déterministe à plusieurs égards. Une forme de non-déterminisme vient du fait que les règles ne sont pas orthogonales, c'est à dire, plusieurs règles peuvent être applicables pour une équation $s \stackrel{?}{=} t$ donnée. Sur la base des observations précédentes, modifiez la règle *Delete* pour obtenir un système de règles orthogonales.