CUFR Champollion

Licence INF 3ème Année

Méthodes démonstratives

Thierry Montaut

2013

Proposition

Définition

Une proposition est un énoncé mathématique qui peut être vrai ou faux.
Démontrer une proposition, c'est montrer qu'elle est vraie.
Suivant les cas, une proposition peut être démontrée par un calcul ou un raisonnement.

Exercice 1

1. Montrer que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
2. Montrer que dans un graphe orienté,

$$\sum_{x \in X} d^+(x) = m.$$

Preuve par l'absurde

Définition

Pour prouver une proposition P par l'absurde, on suppose que P est faux et on montre que cela conduit à une contradiction.
La preuve commence donc par " Supposons non(P),..." et il reste à trouver une contradiction.

Exercice 2

1. Soit un entier $n > 1$. Montrer que son plus petit diviseur d strictement supérieur à 1 est toujours premier.
2. Montrer par l'absurde que tout graphe simple possède au moins deux sommets de même degré.

Preuve par disjonction de cas

Définition

Pour prouver une proposition P par disjonction de cas, on distingue plusieurs cas recouvrant tous les cas possibles et menant tous à la conclusion que P est vrai.

Exercice 3

1. Montrer que pour tout entier n, $\frac{n(n+1)}{2}$ est un nombre entier.
2. Montrer par disjonction de cas que si deux entiers n et p ne sont pas multiples de 3 alors leur produit n'est pas multiple de 3.

Preuve par l'exemple

Définition

Pour prouver une proposition P de la forme

$$\exists x \in A,\ tq\ P(x)$$

il suffit de trouver ou de construire un élément x tel que $P(x)$ soit vrai. On parle de preuve par l'exemple.

Pour limiter l'utilisation du formalisme mathématique, nous utiliserons plutôt la formulation en français :"Montrer qu'il existe..."

Exercice 4

1. Montrer qu'il existe des graphes sans sommet égoïste.
2. Montrer que K_4 est planaire.

Le quantificateur universel

Définition

Pour prouver une proposition P de la forme

$$\forall x \in A, P(x)$$

il faut considérer un élément x quelconque de A et montrer que $P(x)$ est vrai. La rédaction commence alors par "soit $x \in A$," et il reste à montrer que $P(x)$ est vrai.

- C'est une grosse erreur que de penser qu'on peut prouver une proposition de la forme $\forall x \in A, P(x)$ par l'exemple.
- Nous utiliserons plutôt la formulation en français :"Montrer que tout machin vérifie..."

Exercice 5

1. Montrer que tout graphe non orienté simple admet un nombre pair de sommets de degré impair.

Non existence

Définition

- *La négation de $\exists x \in A$ tq $P(x)$ est*

$$\forall x \in A, \quad non(P(x)).$$

On le montre donc comme au point 2.

Exercice 6

1. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers n et p tels que $\sqrt{2} = \frac{n}{p}$. (irrationalité de $\sqrt{2}$).

Contre-exemples

Définition

- *La négation de* $\forall x \in A, P(x)$ *est*

$$\exists x \in A \text{ tq non}(P(x)).$$

On le montre donc comme au point 1. On parle de preuve par contre-exemple.

Exercice 7

1. Montrer que la proposition $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - n + 11$ est un nombre premier (divisible seulement par 1 et lui-même) est fausse. On pourra se faire aider de Maple.

Preuve par récurrence (simple)

Définition

Pour montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ *est vrai :*

- *Initialisation : Montrer que* $P(n_0)$ *est vraie.*
- *Hérédité : Supposer que* $P(n)$ *est vrai et montrer qu'alors* $P(n+1)$ *est vrai*
- *Conclusion : Par récurrence,* $P(n)$ *est vrai,* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Exercice 8

1. Montrer que pour $n \geq 1, n! \geq 2^{n-1}$.
2. Montrer de deux manières que $1+2+3+..n = \frac{n(n+1)}{2}$
3. Montrer qu'un graphe G non orienté, simple et sans triangle et possédant un nombre pair $n = 2k$ sommets possède moins de k^2 arêtes.

Preuve par récurrence (généralisée)

Définition

Pour montrer par récurrence généralisée que
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ *est vrai :*

- *Initialisation : Montrer que* $P(n_0)$ *est vraie.*
- *Hérédité : Supposer que* $P(k)$ *est vrai pour* $n_0 \leq k \leq n$ *et montrer qu'alors* $P(n+1)$ *est vrai*
- *Conclusion : Par récurrence,* $P(n)$ *est vrai,* $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Exercice 9

1.

implication

Définition

l'implication $P \Longrightarrow Q$ *signifie que si* P *est vrai alors* Q *est vrai.*
On peut montrer une implication :

- *Directement : On suppose que* P *est vrai et il faut montrer que* Q *est vrai.*
  La rédaction commence par "supposons que P *est vrai" et il reste à montrer* Q.
- *Par contraposée : il s'agit alors de montrer que* $non(Q) \Longrightarrow non(P)$. *Cela prouvera que* $P \Longrightarrow Q$.

- Nous utiliserons plutôt la formulation en français :"Montrer que si P est vrai alors Q est vrai"
- L'implication $Q \Longrightarrow P$ est appelée réciproque de l'implication $P \Longrightarrow Q$. Ce n'est pas parce qu'une implication est vraie que sa réciproque l'est !
- La négation de $P \Longrightarrow Q$ est "P est vrai et pourtant Q est faux".

Exercice 10

1. Montrer directement que n impair $\Longrightarrow n^2$ impair.
2. Montrer par contraposée que n^2 impair $\Longrightarrow n$ impair.
3. Montrer que si un graphe G est biparti, tous ses cycles sont de longueur pair.
4. Justifier le raisonnement par contraposée : c'est à dire que si $non(Q) \Longrightarrow non(P)$ alors $P \Longrightarrow Q$. (utiliser une preuve directe puis un raisonnement par l'absurde).
5. Quelle est la négation de l'implication $P \Longrightarrow Q$? Comment peut-on montrer cette implication par l'absurde ?
6. L'implication "Si deux graphes ont même nombre de sommets et même nombre d'arêtes alors ils sont égaux" est-elle vraie.

Equivalence

Définition

l'equivalence $P \iff Q$ *signifie que* P *est vrai si et seulement si* Q *est vrai.*
On peut montrer une equivalence :

- *par une succession équivalences élémentaires :* $P \iff P_2 \iff \dots \iff P_n \iff Q$. *C'est le seul cas où on utilise le symbole* $\iff$ *dans une rédaction. Pour nous, on réservera ce cas aux résolutions d'équations, autant dire qu'on ne l'utilisera presque jamais.*
- *Par double implication : on doit alors montrer que* $P \implies Q$ *et que* $Q \implies P$. *(par une des méthodes précédemment vues...)*

Nous utiliserons plutôt la formulation en français :"Montrer que P est vrai si et seulement si (ssi) Q est vrai".
De manière générale, nous privilégierons les rédactions en français à l'aide des expressions "si, alors, donc, d'où, on en déduit que,

Exercice 11

1. Soit x et y deux réels. Montrer que $1 + xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \iff |x - y| \geq 2$.
2. Montrer que n est impair $\iff$ n^2 est impair.
3. Montrer qu'un graphe G admet un circuit eulérien il est connexe et que tous ses sommets sont de degrés pairs.