TD 3. Extrema d'une fonction de plusieurs variables

Réaliser tous les calculs nécessaires à la main ET à l'aide de Sage. Toutes les fonctions pour lesquelles c'est possibles seront représentées à l'aide de Sage.

Exercice 1 : Étudier de même les extrema des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
1°)$x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$,
2°)$x^4 + y^4 - 4xy$,
3°)$(x - y)^2 + (x + y)^4$,
4°)$(x - y)^2 + (x + y)^3$,
(Etudier la restriction à la droite d'équation $y = x$.)
5°)$x^2y + \ln(1 + y^2)$
(Etudier la restriction à la courbe d'équation $y = x^3$.)

Exercice 2 : Etudier les extrema des fonctions suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
1°)$x^2 + 2y^2 + 3z^2$,
2°)$x^2 + 2y^2 - 3z^2$,
3°)$z(e^x - 1) - y^2$,

Exercice 3 Descente de gradient pour une fonction réelle :
1°)Écrire une fonction $grad1(f, d, alpha, eps, N)$ mettant en oeuvre la méthode de descente du gradient à pas fixe pour une fonction d'une variable réelle.
2°)Déterminer analytiquement puis par une descente de gradient le minimum de la fonction f définie sur $[-1, 1]$ par $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x^4$.
3°)Déterminer analytiquement puis par une descente de gradient le minimum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$.

Exercice 4 Descente de gradient pour une fonction de deux variables :
1°)Écrire une fonction $grad2(f, d, alpha, eps, N)$ mettant en oeuvre la méthode de descente du gradient à pas fixe pour une fonction d'une variable réelle.
2°)Déterminer analytiquement puis par une descente de gradient le minimum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Descente de gradient et régression linéaire.

Le but de cet exercice est d'utiliser la méthode de descente de gradient pour déterminer la droite la plus proche de l'ensemble de points de $\mathbb{R}^2$:

$$X = [(0.5; 1.4), (2.3; 1.9), (2.9; 3.2)].$$

Soit D la droite d'équation $y = ax + b$. On définit l'erreur commise en approchant le nuage de points par la droite D par :

$$e(a, b) = \sum_{i=1}^{3} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Notre problème est donc de déterminer exactement puis numériquement la droite qui minimise cette erreur.

1°) a) Représenter graphiquement le nuage de points, une droite quelconque et l'erreur commise.

b) Calculer explicitement la fonction $e(a, b)$, et tracer son graphe à l'aide de Sage.

2°) On fixe dans cette question $b = 1$ et on cherche la valeur de a qui minimise l'erreur.

a) Tracer le graphe de la fonction $e1(a) = e(a, 1)$.

b) Déterminer analytiquement son minimum $a1$.

c) Tracer sur un même graphique le nuage de points et la droite d'équation $y = a1x + b$. **d)** Déterminer une valeur approchée de ce minimum par une méthode de gradient réelle.

3°) On fixe maintenant $a = 0.6$ et on cherche la valeur de b qui minimise l'erreur.

a) Tracer le graphe de la fonction $e2(b) = e(0.6, b)$.

b) Déterminer analytiquement son minimum $b1$.

c) Tracer sur un même graphique le nuage de points et la droite d'équation $y = 0.6x + b1$.

d) Déterminer une valeur approchée de ce minimum par une méthode de gradient réelle.

4°) a) Déterminer analytiquement le minimum de la fonction de deux variables $e(a, b)$.

b) Déterminer une valeur approchée de ce minimum par une méthode de gradient à deux variables.