Maths pour l'I.A.

Thierry Montaut

Plan du cours

- Compléments d'algèbre linéaire
- **Compléments d'analyse**
  - **Fonctions de plusieurs variables**
  - Dérivées partielles, gradient
  - formules de Taylor et plan tangent
  - Dérivées partielles d'une composée
  - Optimisation des fonctions de plusieurs variables
  - Méthodes numériques d'optimisation
- Compléments de probabilité et de statistiques

Fonctions de plusieurs variables

Le but de ce chapitre est de généraliser les notions de limite, de continuité et de dérivée des fonctions réelles au cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle fonction numérique de plusieurs variables toute fonction définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$f \; : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ X = (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

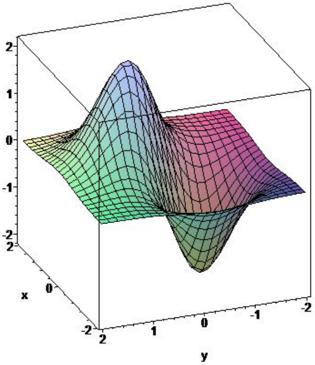
Fonctions de plusieurs variables

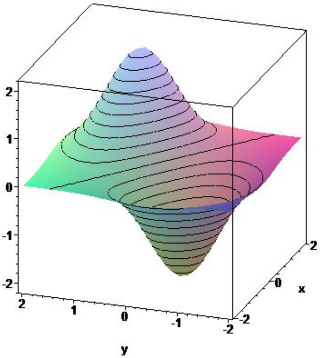
Définition

- **L'ensemble (ou domaine) de définition** *de f est* $\mathcal{D}_f = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \ f(x_1, ..., x_n) \text{ existe}\}$.
- *Le* **graphe** *de f est l'ensemble des éléments de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de la forme* $((x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n))$
- *Dans le cas de* $\mathbb{R}^2$ *c'est donc la surface de* $\mathbb{R}^3$ *d'équation cartésienne :* $z = f(x, y)$.
- *Les* **courbes de niveaux** *de f sont les parties de* $\mathbb{R}^n$ *d'équation* $f(x_1, ..., x_n) = k$.

Exemple

$$f : \left(\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & (3x+4y).e^{-(x^2+y^2)} \end{array} \right.$$





Exercices

1. Donner l'ensemble de définition de $f(x, y) = \ln(xy - 1)$.
2. Donner l'ensemble de définition de $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
3. Donner les équations des lignes de niveau de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Limite d'une fonction de plusieurs variables

On munit $E = \mathbb{R}^n$ de l'une de ses normes usuelles.

Définition

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \mathbb{R}^n$*. On dit que* f *admet pour* **limite** $l \in \mathbb{R}$ *en* a *ssi*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ tq \ \forall x \in \mathcal{D}, \ \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On dit également dans ce cas que $f(x)$ *tend vers* l *quand* x *tend vers* a*. (voir animation)*

L'interprétation est la même que dans le cas réel : "Il suffit de prendre x assez près de a dans $\mathbb{R}^n$, pour être sûr que $f(x)$ soit aussi près qu'on le veut de l."

On retrouve les définition des limites infinies :

Définition

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers a ssi

$$\forall A > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ tq\ \ \forall x \in \mathcal{D},\ \ \|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) > A$$

On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers a ssi

$$\forall A > 0,\ \ \exists \eta > 0,\ \ tq\ \ \forall x \in \mathcal{D},\ \ \|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) < -A$$

Proposition

1. *L'existence d'une limite et sa valeur ne dépendent pas du choix de la norme de $\mathbb{R}^n$.*
2. *Si f admet une limite en a, celle-ci est unique.*

Méthode pratique 1 : Les opérations sur les limites

On retrouve les propriétés classiques de stabilité par opérations :

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$ qui tendent respectivement vers l et l' quand x tend vers a. Alors :

1. *$f + g$ tend vers $l + l'$ quand x tend vers a.*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ tend vers $\lambda.l$ quand x tend vers a.*
3. *$f * g$ tend vers $l * l'$ quand x tend vers a.*
4. *Si $l' \neq 0$, $\frac{f}{g}$ tend vers $\frac{l}{l'}$ quand x tend vers a.*
5.

Composition des limites

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Soient f une fonction définie sur $\mathcal{D}$ tendant vers l quand x tend vers a. et $h(t)$ une **fonction réelle** *tendant vers l' quand t tend vers l. Alors par composition des limites :*
$h(f)$ tend vers l' quand x tend vers a.

Exemple : Donner la limite de $e^{1+x^2+y^2}$ en $(0,0)$.

Méthode pratique 2 : l'encadrement

Théorème

(d'encadrement ou des gendarmes).
S'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ *et des fonctions d'une seule variable réelle : h et k vérifiant* $h(x_i) \underset{x_i \to a_i}{\longrightarrow} l$ *et v* $k(x_i) \underset{x_i \to a_i}{\longrightarrow} l$ *et que*

$$\forall (x_1, \ldots x_n) \quad : \quad h(x_i) \leq f(x_1, \ldots x_n) \leq k(x_i),$$

alors

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$$

Exercice

Exercice 1 : Soit $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ et

$$f \ : \left(\begin{array}{c} U \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \end{array} \right.$$

f admet-elle une limite en $(0,0)$?

Méthode pratique 3 : le passage en polaire

Théorème

(passage en polaire).
Dans le cas particulier d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *S'il existe une fonction* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $h(\rho) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0$ *et que*

$$\forall(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| \leq h(\rho)$$

alors

$$f(x) \underset{x \to (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Exercice

Montrer que

$$\frac{2x^2y}{x^2+y^2} \underset{x \longrightarrow (0,0)}{\longrightarrow} 0$$

A l'aide d'un passage en polaire bien sûr...

Etude de restrictions

Dans $\mathbb{R}$, on ne pouvait tendre vers une valeur a que par valeur inférieure (limite à gauche) ou par valeur supérieure (limite à droite).
Dans $\mathbb{R}^n$, il existe une infinité de chemins menant à a.

Proposition

Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a alors la restriction de f à toute partie de $\mathcal{D}$ contenant a admet la même limite en a.
Attention la réciproque est fausse en général (c'était déjà le cas pour les fonctions réelles...)

Proposition

Par contraposée, pour nier l'existence d'une limite, il suffit de trouver une façon de tendre vers a (suivant une restriction) pour laquelle $f(x)$ n'a pas de limite ou deux façons de tendre vers a qui ne conduisent pas à la même limite.

Exemple

Exercice 2 On considère la fonction

$$f \ : \left(\begin{array}{c} \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4+y^2}. \end{array} \right.$$

Etudier la limite en (0,0) des restrictions de f à quelques droites puis à la parabole d'équation $y = x^2$. Conclure.

Continuité

Définition

On dit que la fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est
continue en *a ssi*

$$f(x) \underset{x \underset{\mathcal{D}}{\longrightarrow} a}{\longrightarrow} f(a)$$

Insistons bien sur le fait que cela contient deux résultats :
f admet une limite en a ET cette limite est $f(a)$.

Définition

On dit que la fonction f est continue sur $\mathcal{D}$ ssi elle est continue en tout point a de $\mathcal{D}$.

Opérations sur les fonctions continues

Propriété

D'après les résultats sur les opérations sur les limites, la somme, le produit par un scalaire, le produit, le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) et la composition de fonctions continues est une fonction continue.

On en déduit que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^n$ et que les fractions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.