TD 1 : Mots et langages

Tous les langages considérés sont définis sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

Opérations entre langages :

Exercice 1 On considère les deux langages : $L = \{\epsilon, a, aa\}$ et $M = \{a, b, ab\}$ définis sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.
Calculer les langages $L^2, L.M, L^*$ et M^*.

Exercice 2 On considère le langage $L = \{a, aa, ba\}$.
Calculer les langages L^0, L^1, L^2, L^3.

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, caractériser L_1^* et calculer

$$L_1 \cap L_2, \quad L_1 \cup L_2, \quad L_1.L_2, \quad L_2.L_1.$$

1°) $L_1 = \{ab, bb\}, \quad L_2 = \{a, ab, bb, ba\}$.
2°) $L_1 = \{\epsilon\}, \quad L_2 = \{bb, ba\}$.
3°) $L_1 = \emptyset, \quad L_2 = \{bb, ba\}$.
4°) $L_1 = \{ab, bb\}, \quad L_2 = \Sigma^*$.

Comparaison de langages :

Exercice 4 Soient les langages L_1, L_2, L_3,
$L_1 = \{a^n b(a+b)^n, \quad n \in \mathbb{N}\}$,
$L_2 = \{(a+b)^n ba^n, \quad n \in \mathbb{N}\}$,
$L_3 = \{(a+b)^n b(a+b)^n, \quad n \in \mathbb{N}\}$,
Comparer les langages L_1, L_2 et L_3, (y a-t-il inclusion ? égalité ?)

Exercice 5 On considère sur un même alphabet Σ, une lettre a, deux mots u et v et trois langages A, L et M.
1°) Si $au = av$, a-t-on $u = v$? justifiez.
2°) Si $aL = aM$, a-t-on $L = M$? justifiez.
3°) Si $AL = AM$ a-t-on $L = M$? justifiez.

Exercice 6 Peut-on avoir $L \neq M$ et $L^* = M^*$. Justifiez.

Exercice 7 Soit L et M sont deux langages construits sur un même alphabet.
Comparer les langages suivants : $(L+M)^*; \quad (L^*+M)^*; \quad (M^*+L)^*; \quad (L^*+M^*)^*$.

Séance 2 : Propriétés des langages :

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ On considère des langages L, L_1, L_2 Montrer les propriétés suivantes :

1°)$L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L.L_1 \subseteq L.L_2$.
2°)Si $\epsilon \in L$, alors $L^* = L^+$
3°)$\epsilon \in L$ ssi $L \subseteq L^2$.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$
1°)Montrer que $L.(L_1 \cap L_2) \subseteq L.L_1 \cap L.L_2$.
2°)Montrer à l'aide d'un contre-exemple qu'on n'a pas nécessairement égalité.

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$
1°)Montrer que $(L_1 \cap L_2)^* \subseteq L_1^* \cap L_2^*$.
2°)Montrer à l'aide d'un contre-exemple qu'on n'a pas nécessairement égalité.

Expressions régulières :

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Décrire en français le langage défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et représenté par les expressions régulières suivantes :
1°)$a(a + b)^*b$.
2°)$((\epsilon + b)a^*)^*$.
3°)$(aa)^*a$.
4°)$(a + b.a)^*(b + \epsilon)$.

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ Représenter par une expression régulière chacun des langages suivants, définis sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:
1°)Les mots contenant exactement 2 a.
2°)Les mots contenant au moins 2 a.
3°)Les mots contenant au plus 2 a.
4°)Les mots contenant un nombre pair de a.
5°)Les mots ne contenant pas le facteur ab
6°)Les mots de longueur paire.