TD 2. $\mathbb{R}^n$ euclidien

$\boxed{\textbf{Exercice 1}}$ (produits scalaires de $\mathbb{R}^n$)
Montrer que

$$(X|Y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1$$

définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ mais pas

$$(X|Y) = 2x_1^2 + x_3^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_3$$

ni

$$(X|Y) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2.$$

$\boxed{\textbf{Exercice 2}}$ (norme et produits scalaires)
Montrer que si E est un espace euclidien, $\forall x, y \in E$,

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2(x|y),$$
$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 3}}$ Pour les trois normes classiques de $\mathbb{R}^2$:
1°) Calculer la distance entre les vecteurs $(1,2)$ et $(4,-1)$.
2°) Dessiner l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^2$ à une distance 1 de $(0,0)$.
3°) Calculer la distance entre les vecteurs $(1,2)$ et la droite d'équation $y = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 4}}$ Dans $E = \mathbb{R}^3$. Soit P le plan d'équation $x + y - z = 0$.
Donner une base de $D = P^\perp$ puis ses équations cartésiennes.

$\boxed{\textbf{Exercice 5}}$ Dans $E = \mathbb{R}^4$. Soit $F = vect\{(1,1,0,1),(0,1,2,1)\}$
Donner les équations cartésiennes puis une base de $F^\perp$.

$\boxed{\textbf{Exercice 6}}$ Démontrer le théorème de Pythagore dans $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ Dans $E = \mathbb{R}^2$. On considère la droite D de E d'équation $y = x$.
1°) Quel est le point de D le plus proche de A.
2°) Calculer la distance de $A = (1,4)$ à la droite D.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$ Dans $E = \mathbb{R}^3$. On considère le plan P de E d'équation $x - 2y + z = 0$.
1°) Donner un vecteur normal à P.
2°)Déterminer une base de P.
3°) Calculer le projeté orthogonal de $A = (1,0,0)$ sur P et en déduire la distance de A à P.
4°)Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur P.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$ Dans $E = \mathbb{R}^3$.
1°) Calculer la distance de $A = (1,2,1)$ au plan d'équation $x + y + z = 0$.
2°) Calculer la distance de A à la droite d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 10}}$ Dans $E = \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de $M = (x, y, z)$ sur F dans les cas suivants :
1°)F est la droite d'équations :$x = y = z$.
2°)F est la droite de vecteur directeur $(2, 1, -1)$ passant par $A = (1, 1, 0)$.
3°)F est le plan d'équation $2x + y - z = 2$.

$\boxed{\textbf{Exercice 11}}$ Orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt la base de $E = \mathbb{R}^3$:

$$u =^t (1, 0, 1), \quad v =^t (1, 1, 1), \quad w =^t (-1, -1, 0).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 12}}$ Dans $E = \mathbb{R}^4$. Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de E engendré par les vecteurs :

$$v_1 =^t (1, 1, 0, 0), \quad v_2 =^t (1, 0, -1, 1), \quad v_3 =^t (0, 1, 1, 1).$$

$\boxed{\textbf{Exercice 13}}$ Déterminer une base orthonormée du plan de $E = \mathbb{R}^3$ d'équation $x - y + z = 0$.

$\boxed{\textbf{Exercice 14}}$ (Distance à un hyperplan dans $\mathbb{R}^n$ affine)
1°) Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$, A un point quelconque de H et $\vec{n}$ un vecteur normal à H. Montrer que

$$d(A, H) = \frac{|(\vec{n}|\vec{AM})|}{||\vec{n}||}$$

$\boxed{\textbf{Exercice 15}}$ Programmer en Sage le calcul du projeté orthogonal d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$. sur un sev F de $\mathbb{R}^n$ donné par une base orthogonales.

$\boxed{\textbf{Exercice 16}}$ Programmer en Sage la méthode de Gram-Schmidt pour orthogonaliser une base B de $\mathbb{R}^n$.

$\boxed{\textbf{Exercice 17}}$ Programmer en Sage le calcul du projeté orthogonal d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$. sur un sev F de $\mathbb{R}^n$ donné par une de ses bases (qcq).

$\boxed{\textbf{Exercice 18}}$ Programmer en Sage le calcul de la distance d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ à un sev F de $\mathbb{R}^n$ donné par une de ses bases.