ARO : TD4

Modélisation par les flots

Exercice 1 (Flot maximum avec multiplicateurs)

Étant donné un réseau (V, A, c, m, s, t) où V est un ensemble de sommets, A est un ensemble d'arcs, pour tout arc $ij \in A$, c_{ij} est la capacité de l'arc ij et m_{ij} son multiplicateur, $s \in V$ est la source du flot et $t \in S$ sa destination. Un problème de flot avec multiplicateurs se distingue d'un problème de flot classique par le fait que la quantité de flot qui sort d'un arc ij est égal à la quantité de flot qui entre dans l'arc ij multipliée par m_{ij}. Si $m_{ij} < 1$ (resp. $m_{ij} > 1$) la quantité de flot qui sort de l'arc ij est inférieure (resp. supérieure) à la quantité de flot qui entre dans cet arc. Si $m_{ij} = 1$ pour tout arc $ij \in A$ alors on obtient un problème de flot classique (sans multiplicateur). Le problème de flot maximum avec multiplicateurs consiste à trouver un flot avec multiplicateurs entre s et t tel que la somme des valeurs des flots qui arrivent dans le sommet destination t est maximum.

1. En adaptant la formulation du problème de flot maximum vu en cours, formuler le problème de flot maximum avec multiplicateurs en tant que programme linéaire (indication : vous pourrez utiliser pour chaque arc ij un variable x_{ij} qui représente la quantité de flot qui entre dans l'arc ij).

Exercice 2 (Un problème de change)

Un investisseur dispose de 100000 euros qu'il souhaite échanger contre des dollars. Pour cela, il dispose des possibilités de changes résumées dans le tableau suivant. Il peut subdiviser ce montant, utiliser des devises intermédiaires et faire autant d'opérations de changes qu'il le souhaitent à condition de ne pas dépasser le montant maximum de chacune des opérations de changes.

66,7 roupies	contre 1 dollar	(au plus 5000 dollars)
113,4 yens	contre 1 dollar	(au plus 4000 dollars)
0,015 dollars	contre 1 roupie	(au plus 50000 roupies)
126,8 yens	contre 1 euro	(au plus 7000 euros)
75,96 roubles	contre 1 euro	(au plus 5000 euros)
0,59 roupies	contre 1 yen	(au plus 50000 yens)
0,0079 euros	contre 1 yen	(au plus 60000 yens)
0,60 rouble	contre 1 yen	(au plus 60000 yens)
0,0147 dollar	contre 1 rouble	(au plus 30000 roubles)
1,67 yen	contre 1 rouble	(au plus 40000 roubles)

1. Construire le graphe orienté des échanges de devises
2. Formuler le problème de maximiser le montant en dollars qu'il peut obtenir à partir des 100000 euros comme un problème de flot maximum avec multiplicateurs. Vous préciserez l'ensemble des sommets du graphe, l'ensemble des arcs avec leurs multiplicateurs et leurs capacités, ainsi que la source et la destination du flot.

Exercice 3 (Flot de coût minimum généralisé) Soit $N = (V, A, c, q, S)$ un réseau de flot : pour chaque arc (x, y) de N, $c(x, y) \geq 0$ désigne la capacité de (x, y) et $q(x, y)$ le coût de (x, y). Supposons de plus que chaque sommet x d'un sous-ensemble de sommets $S \subset V$ possède aussi une demande de flot $b(x) > 0$, qui représente la quantité totale de flot qui *doit traverser le sommet x*. Le but du problème de *flot de coût minimum généralisé* est de trouver un flot f de coût total minimum qui satisfait les demandes de flot de tous les sommets de S.

1. Modéliser le problème de flot de coût minimum généralisé comme *flot de coût minimum avec des capacités à la fois inférieures et supérieures.*
2. En vous inspirant mais sans passer par le flot de coût minimum, formuler le problème du flot de coût minimum généralisé comme un programme linéaire.

Exercice 4 (Lavage des serviettes au *Fouquet's*)

Le restaurant *Fouquet's* (99, avenue des Champs-Elysées 75008 Paris) a décidé d'optimiser ses dépenses hebdomadaires en achat de serviettes. Pour cela, il a embauché un spécialiste en Algorithmique (nommons-le "ARO"). Chaque semaine, la tâche d'ARO est de minimiser pour la semaine à venir les dépenses du restaurant en serviettes, en résolvant un problème de flot.

Au début de chaque semaine, le *Fouquet's* fournit à ARO le nombre d_i de serviettes nécessaires pour les clients du jour i de la semaine ($i \in \{L, M, Me, J, V, S, D\}$). Chaque jour, le *Fouquet's* dispose de 3 options : acheter de nouvelles serviettes (au coût de $a = 15$ euros par serviette), effectuer un lavage « express » (au coût de $\ell_1 = 5$ euros par serviette, les serviettes lavées seront disponibles le lendemain), ou effectuer un lavage « ordinaire » (au coût de $\ell_2 = 2$ euros par serviette, les serviettes sont disponibles deux jours après).

Le but est d'aider ARO à modéliser le problème du *Fouquet's* comme un *problème de flot de coût minimum généralisé* dans un réseau $N_{Fouquet's}$ à définir.

(a) Définir l'ensemble des sommets et des arcs du réseau de flot $N_{Fouquet's}$.

(b) Définir la fonction $q(u, v)$ (coût) et la fonction $c(u, v)$ (capacité) de chaque arc (u, v) de $N_{Fouquet's}$. Définir l'ensemble S et la fonction b (demande) de chaque noeud de S.

(c) Dessiner le réseau obtenu $N_{Fouquet's}$ pour les demandes journalières suivantes : $(100, 150, 100, 150, 200, 300, 250)$.

Exercice 5 (Modélisation par flot maximum)

Une ville F est alimentée en eau grâce à des réservoirs situées dans 3 villes (A, B et C). Chaque réservoir est alimenté à partir de différentes sources (nappes souterraines, châteaux d'eau, ...) comme suit : 10000 m3/jour pour A et C et 1 000 m3/jour pour B. Le réseau de distribution reliant la ville F aux réservoirs passe par plusieurs points qui sont reliés entres eux à travers des canalisations de différentes capacités selon le tableau ci-dessous :

Point de départ	A	A	B	C	C	D	E	E
Point d'arrivée	C	D	D	B	E	F	A	F
Capacité du canal (en milliers de m3)	2	4	5	4	11	7	3	13

1. Modéliser le problème sous forme d'un graphe.
2. Déterminer le flot maximal de chaque canalisation et la quantité journalière maximale acheminée vers la ville F.

Exercice 6 (Trafic et blanchiment en Grèce antique)

En Grèce antique, il n'y avait pas de banque, mais il y avait des dieux. Tous les dieux constituaient un réseau permettant de faire transiter de l'argent d'une source à une destination. Chaque grec avait accès à tous les dieux et pouvait leur confier une certaine somme d'argent qu'il souhaitait envoyer vers une destination donnée en passant par le réseau. Dans le réseau de dieux, on distinguait deux types de dieux : les bons et les méchants. Chaque mauvais dieu acceptait de recevoir n'importe quelle somme d'argent, puis répartissait cet argent à ses amis dans le réseau en retirant 2 jours de vie au grec expéditeur par drachme reçu. Chaque bon dieu ajoutait 1 jour de vie au grec expéditeur par drachme reçu, mais demandait que la somme d'argent provenant de chacune de ses connaissances ne dépasse pas $100\Delta\rho$ (100 drachmes).

Les bons dieux étaient :

— *Apollon*
— *Artémis*
— *Athéna*
— *Héra*
— *Hermès*
— *Zeus*

Les mauvais dieux étaient :

— *Arès*
— *Aphrodite*
— *Dionysos*
— *Hadès*
— *Héphaïstos*
— *Poséidon*

Zeus pouvait envoyer de l'argent à *Artémis*, *Hadès*, *Héra* et *Hermès*. *Hermès* pouvait envoyer de l'argent à *Zeus* et *Hadès*. *Hadès* pouvait envoyer de l'argent à *Zeus* et *Poséidon*. *Poséidon* à *Héra*. *Héra* à *Zeus*. *Athéna* à *Poséidon* et *Héra*. *Héphaïstos* à *Héra* et *Arès*. *Arès* à *Aphrodite*. *Aphrodite* à *Apollon*. *Apollon* à *Athéna*. *Dionysos* à *Zeus* et *Hadès*.

Un riche démocrate D a souhaité envoyer $1000\Delta\rho$ à un pauvre philosophe φ, tout en maximisant son gain (ou, au moins, en minimisant sa perte) en jours de vie. Malheureusement, le philosophe n'était ami qu'avec des mauvais dieux et ne pouvait donc pas recevoir d'argent provenant directement d'un bon dieu. Le riche démocrate ayant fait un nombre conséquent d'offrandes, il était autorisé à demander précisément à quels amis chaque dieu du réseau devait faire passer chaque drachme qu'il recevait (mais ce en respectant toujours les liens d'amitié et les quantités d'argent que chaque dieu pouvait faire transiter). Le problème qui nous intéresse consiste donc à indiquer au démocrate une façon de faire transiter l'argent à travers le réseau des dieux pour maximiser sa durée de vie.

1. Formuler le problème comme un problème de flot de coût minimum avec contraintes sur les arcs.
2. Dessiner le réseau de dieux et indiquer les capacités et les coûts de chacun des arcs.
3. Ecrire ce problème comme un programme linéaire. Notamment, écrire la signification des variables de décision, la fonction objectif et les contraintes.