Master Informatique

Introduction à la Science des Données (ISD)

Cécile Capponi et Hachem Kadri

Aix-Marseille University, CNRS
Laboratoire d'Informatique et des Systèmes, LIS

`prenom.nom@univ-amu.fr`

Rappel : Algèbre linéaire

Vecteurs et arithmétique des vecteurs

- Définition :

  Un vecteur est une collection ordonnée de plusieurs valeurs scalaires

- Notation :

  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ou $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, avec v_1, v_2, v_3 sont des scalaires, généralement des réelles

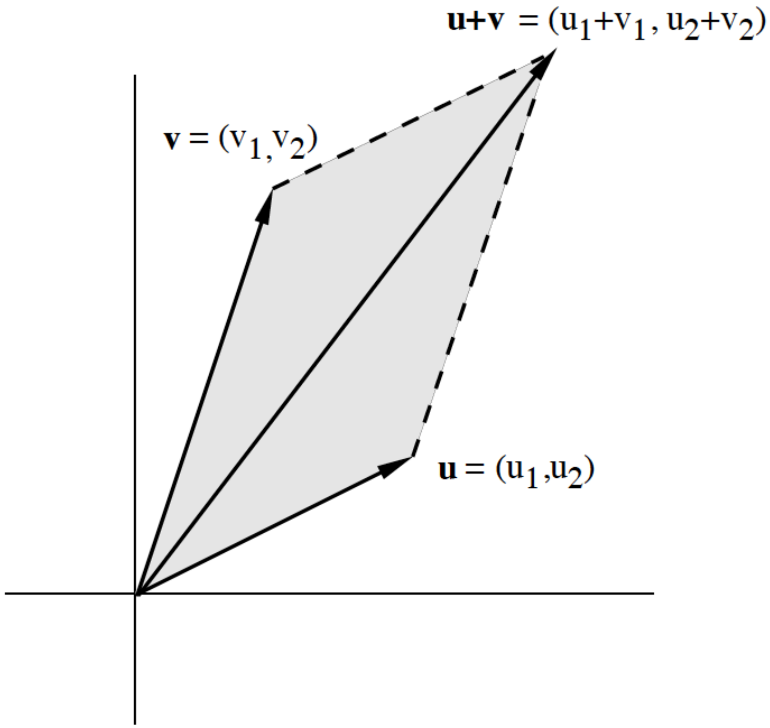
- Addition :

  $$c = a + b \qquad c = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- Multiplication vecteur-scalaire :

  $$c = \alpha v \qquad c = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$$

Addition



Multiplcation vecteur-scalaire

?

Espace vectoriel

Un espace vectoriel sur $\mathcal{F}$, ou $\mathcal{F}$-espace vectoriel, est un ensemble $\mathcal{V}$, dont les éléments sont appelés vecteurs, muni de deux lois d'addition de vecteurs et de multiplication vecteur-scalaire telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

(A1) $x + y \in \mathcal{V}, \forall x, y \in \mathcal{V}$.

(A2) $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in \mathcal{V}$.

(A3) $x + y = y + x, \forall x, y \in \mathcal{V}$.

(A4) Il y a un élement $\mathbf{0}$ tel que $x + \mathbf{0} = x, \forall x \in \mathcal{V}$.

(A5) $\forall x \in \mathcal{V}, \exists (-x) \in \mathcal{V}$ tel que $x + (-x) = 0$.

(M1) $\alpha x \in \mathcal{V}, \forall \alpha \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{V}$.

(M2) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \forall \alpha, \beta \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{V}$.

(M3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in \mathcal{F}, \forall x, y \in \mathcal{V}$.

(M4) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{V}$.

(M5) $\mathbf{1}x = x, \forall x \in \mathcal{V}$.

Espace vectoriel

Example

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est défini comme l'ensemble des n-tuplets ordonnés $(x_1, \ldots, x_n)$ de nombres réels. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n.

Sous-espace vectoriel

Soit $\mathcal{S}$ un sous ensemble non vide d'un $\mathcal{F}$-espace vectoriel $\mathcal{V}$ ($\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$). Si $\mathcal{S}$ est aussi un $\mathcal{F}$-espace vectoriel muni des mêmes opérations d'addition de vecteurs et de multiplication scalaire-vecteur, alors $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}$.

- Il n'est pas nécessaire de vérifier les 10 conditions pour déterminer si un sous ensemble est aussi un sous-espace vectoriel — Seulement (A1) et (M1) doivent être vérifiées.
- $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}, \mathcal{S} \neq \emptyset$. $\mathcal{S}$ est un sous-espcae-vectoriel de $\mathcal{V}$, si et seulement si

(A1) $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$

(M1) $x \in \mathcal{S} \Rightarrow \alpha x \in \mathcal{S}, \forall \alpha \in \mathcal{F}$

Sous-espace engendré (span)

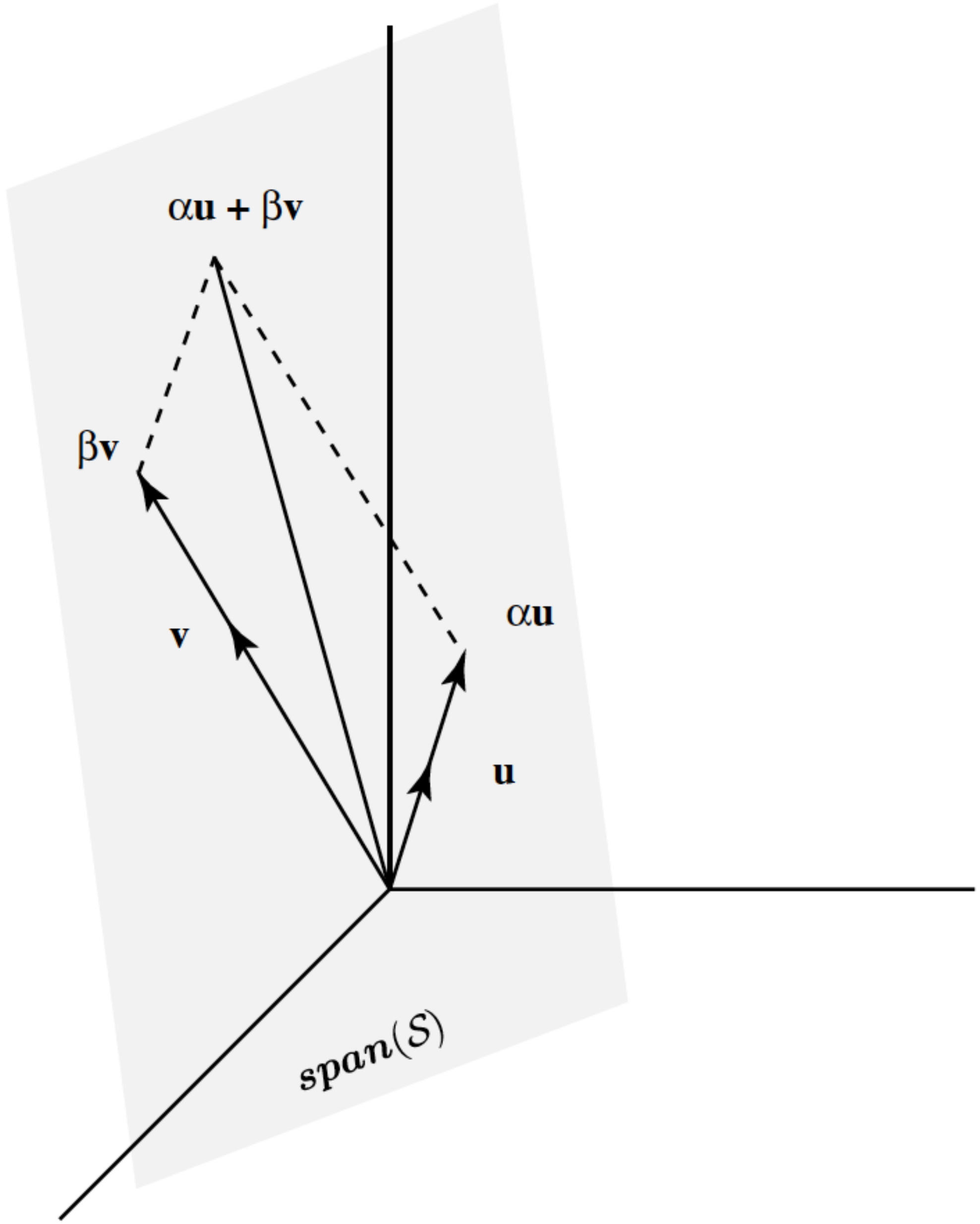
- Pour un ensemble de vecteur $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$, le sous-espace

$$span(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_r v_r\}$$

  généré par tous les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{S}$ est par définition le sous-espace engendré par $\mathcal{S}$.

- Si $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel et que $\mathcal{V} = span(\mathcal{S})$, on dit que $\mathcal{S}$ est générateur (ou famille génératrice) ; c-a-d tout vecteur $\mathcal{V}$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{S}$

Sous-espace engendré (span)



Indépendance linéaire et base d'un espace vectoriel

- Un ensemble de vecteurs $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ est linéairement indépendant si la seule combinaison linéaire des vecteurs v_i égale au vecteur nul $\mathbf{0}$ est celle dont tous les coefficients sont nuls ; c-a-d la solution de

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

  est la solution triviale $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

- Une famille génératrice de vecteurs linéairement indépendants d'un espace vectoriel $\mathcal{V}$ est appelé une base de $\mathcal{V}$

Norme euclidienne

- Pour un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$, sa norme euclidienne est

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Si $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, alors $\|u\| = \sqrt{\sum u_i^2} = \sqrt{0+1+4+4+16} = 5$

- Par définition : $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, et $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

- La distance entre deux vecteurs u et v est défini par : $\|u - v\|$

Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$ est défini par :

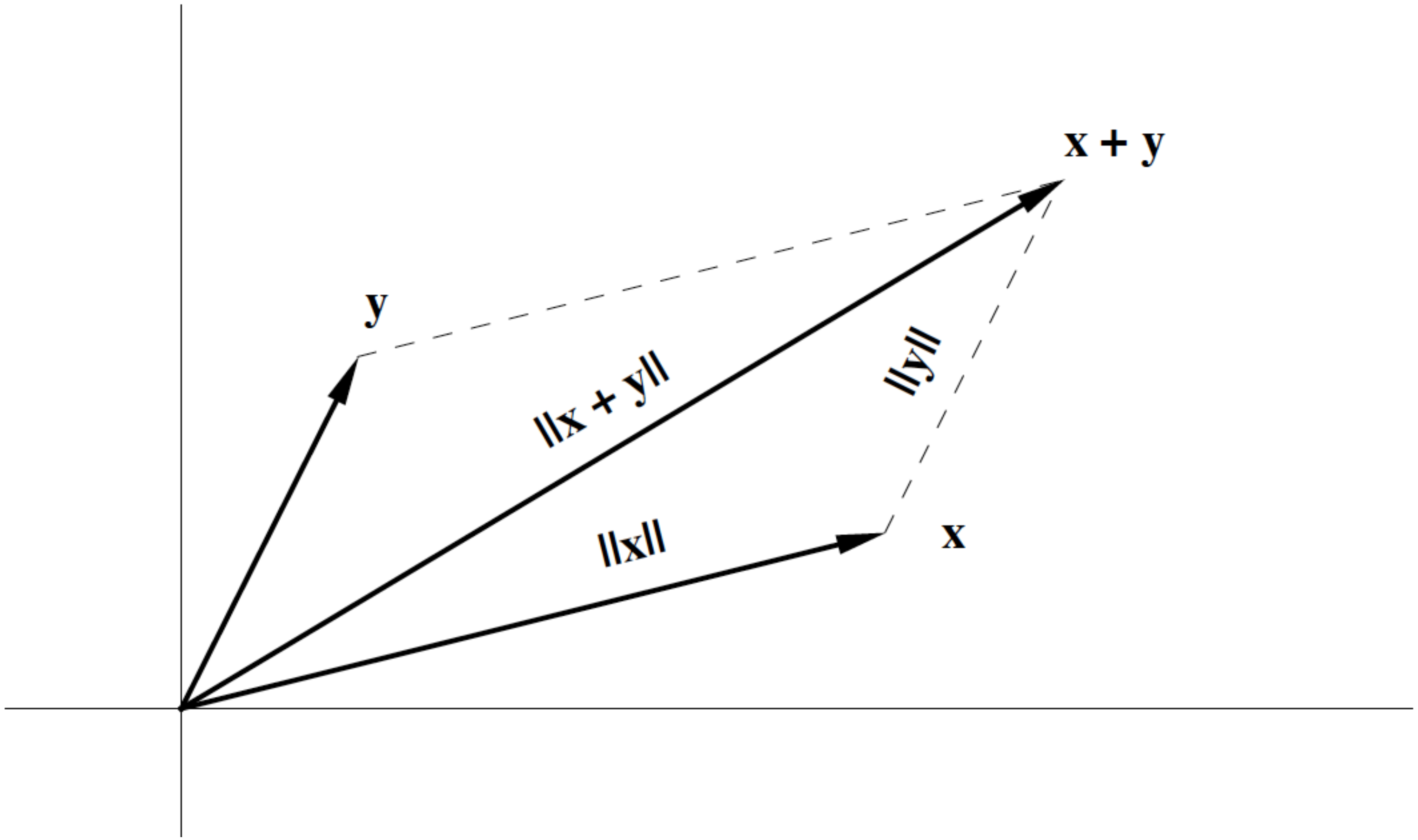
$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Inégalité triangulaire

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$


x + y
y
	x + y	
	y	
	x	
x

Norme Lp

pour $p \geq 1$, la norme Lp de $x \in \mathbb{R}^n$ est définie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Inégalité de Hölder

Si $p > 1$ et $q > 1$ tel que $1/p + 1/q = 1$, alors

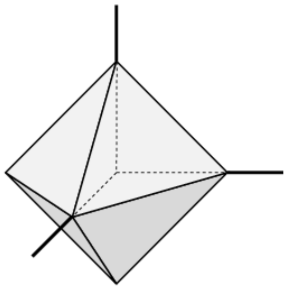
$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

- $p = 2 : \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (norme euclidienne)
- $p = 1 : \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $p = \infty : \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

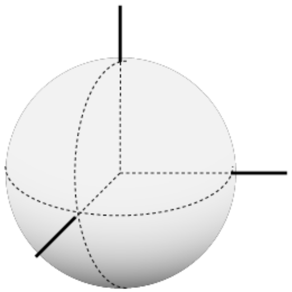
Exemple ?

norme Lp

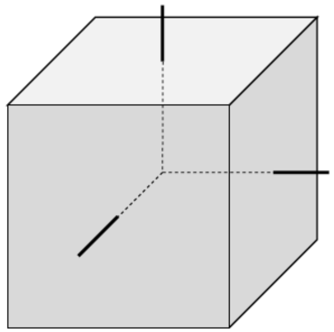
$$S_p = \{x \mid \|x\|_p = 1\}$$



$\mathcal{S}_1$



$\mathcal{S}_2$



$\mathcal{S}_\infty$

Produit scalaire et espace préhilbertien

Un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{V}$ est une fonction qui associe à chaque paire ordonnée de vecteur $x, y \in \mathcal{V}$ une valeur scalaire réelle qui satisfait les conditions suivantes :

- $\langle x, x\rangle \geq 0$, et $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
- $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
- $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est par définition un espace préhilbertien.

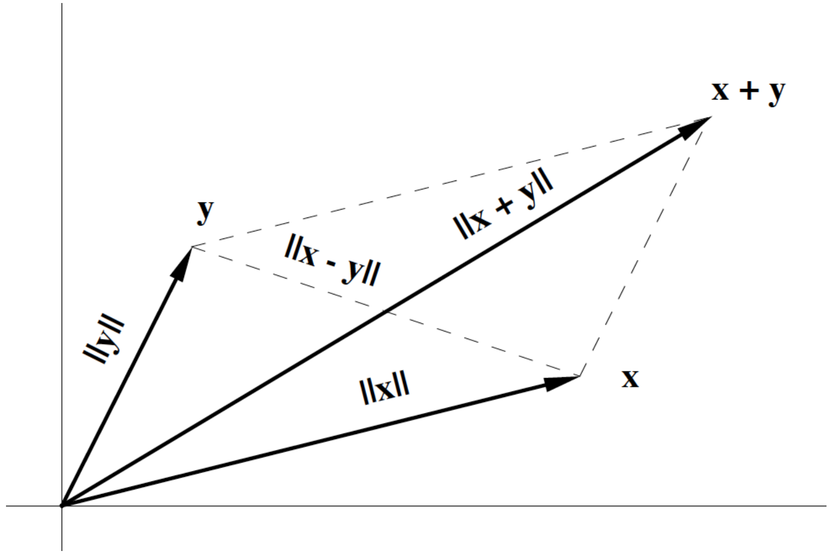
Normes dans les espaces préhilbertiens

Si $\mathcal{V}$ est un espace préhilbertien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors

$$\| \cdot \| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$$

définie une norme sur $\mathcal{V}$.

Règle du parallélogramme



$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Orthogonalité

- Dans un espace préhilbertien $\mathcal{V}$, on dit qye deux vecteurs $x, y \in \mathcal{V}$ sont orthogonaux, et on note $x \perp y$, si $\langle x, y \rangle = 0$
- La mesure en radians d'un angle entre deux vecteurs $x, y \in \mathcal{V}$ non-nuls est par définition le nombre $\theta \in [0, \pi[$ qui vérifie :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

- Une famille $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ est dit famille orthonormale si et seulement si $\|u_i\| = 1, \forall i$, and $u_i \perp u_j, \forall i \neq j$
- Toute famille orthonormale est linéairemnt indépendante
- Toute famille orthonormale de n vecteurs d'un esace vectoriel $\mathcal{V}$ de dimension n est une base orthonormale de $\mathcal{V}$

Complément orthogonal

- Le complément orthogonal $\mathcal{M}^{\perp}$ d'un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$ d'un espace préhilbertien $\mathcal{V}$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{V}$ qui sont orthogonaux à tout vecteur de W, c'est-à-dire

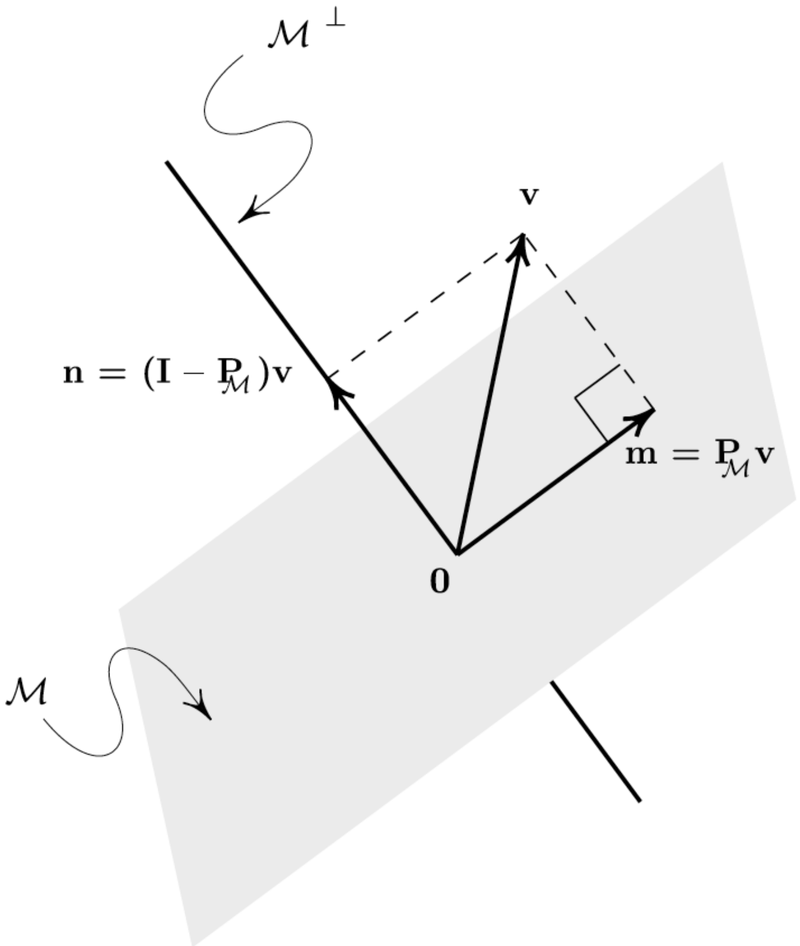
$$\mathcal{M}^{\perp} = \{x \in \mathcal{V} | \langle m, x \rangle = 0, \forall m \in \mathcal{M}\}$$

- Si $\mathcal{M}$ est sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien $\mathcal{V}$ de dimension finie n, alors
  - $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$
  - $dim\mathcal{M}^{\perp} = n - dim\mathcal{M}$
  - $\mathcal{M}^{\perp^{\perp}} = \mathcal{M}$

Projection orthogonale

Soit $v = m + n$ avec $m \in \mathcal{M}$, $n \in \mathcal{M}^{\perp}$ et $v \in \mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}$

- m est appelé la projection orthogonale de v sur $\mathcal{M}$



Matrices

- Une matrice est un tableau à 2D de nombres

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$$

- Un vecteur est une matrice avec une seule ligne ou une seule colonne
- L'élément à la i-ème linge et la j-ème colonne d'une matrice A est noté A_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{pmatrix}$$

Matrices

- Arithmétique : addition, produit de Hadamard, produit matriciel, ...
- Types : carrée, symétrique, triangulaire, diagonale, ...
- Opérations : transposé, inverse, trace, déterminant, ...

Valeurs propres et vecteurs propres

Soit A une matrice carrée,

- un scalaire λ et un vecteur non-nul X qui vérifient

$$AX = \lambda X$$

  sont par définition une valeur propre et un vecteur propre de A

- Toute matrice réelle symétrique est diagonalisable par une matrice orthogonale, c-a-d $\exists U$, une matrice orthogonale, telle que

$$U^\top AU = D,$$

  avec D une matrice diagonale. Les éléments de D sont les valeurs propres de A et les colonnes de U sont les vecteurs propres de A.

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice A est le nombre maximale de colonnes indépendantes.

- $rank(A^\top) = rank(A)$
- Le rang de A est donc aussi le nombre maximale de lignes indépendantes
- Soit A une matrice $r \times s$, $rank(A) \leq \min(r, s)$
- Soit A une matrice $n \times n$, A est inversible $\Leftrightarrow rank(A) = n$
- Le rang d'une matrice carrée est égale au nombre de valeurs propres non-nulles

Décomposition (ou Factorisation) de matrices

- Décomposition LU (lower, upper)

$$A = LU$$

- L est une matrice triangulaire inférieure et U une matrice triangulaire supérieure

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}$$

Décomposition (ou Factorisation) de matrices

- Décomposition QR

$$A = QR$$

- Q est une matrice orthogonale et R une matrice triangulaire supérieur

Décomposition (ou Factorisation) de matrices

- Décomposition de Cholesky

$$A = LL^\top$$

- A est une matrice symétrique définie positive L une matrice triangulaire inférieure

Décomposition (ou Factorisation) de matrices

- Décomposition en valeurs singulières

$$A = U \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^\top$$

- A est une matrice $m \times n$ de rang r
- U et V sont des matrices orthogonales de taille, respectivement, $m \times m$ et $n \times n$
- $D = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r)$ est une matrice diagonale de taille $r \times r$, avec $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_r > 0$
- σ_i, $i = 1 \dots, r$, sont les valeurs singulières de A