TD6 – Réductions, NP-difficulté, NP-complétude

Rappel 1 : Une reduction many-one polynomiale de L_1 à L_2, est donnée par un algo f en temps poly qui transforme chaque mot sur L_1 en un mot sur L_2, et préserve l'acceptation :

$$x \in L_1 \iff f(x) \in L_2.$$

On note alors $L_1 \leq_m^p L_2$, car le problème L_2 est *au moins aussi difficile* que le problème L_1.

Rappel 2 : L_2 est NP-difficile si et seulement si pour tout $L_1 \in$ NP on a $L_1 \leq_m^p L_2$.
Rappel 3 : L_2 est NP-complet si et seulement si $L_2 \in$ NP et L_2 est NP-difficile.
Rappel 4 : Si L_1 est NP-difficile et $L_1 \leq_m^p L_2$ alors L_2 est NP-difficile.

Donc, pour répondre à un exercice de la forme

« montrer que le problème **Toto** est NP-complet »,

on pourra remplir le texte à trou suivant :

(a) **Toto** $\in$ NP, car ....
....
⟨*ici soit on donne un algo dans* NP *pour décider* **Toto***, soit on utilise la char. exist. de* NP⟩ ....
....

(b) Pour le problème **Tata** que l'on sait déjà être NP-difficile, on a **Tata** $\leq_m^p$ **Toto**, car il existe la transformation $f : \Sigma^*_{\textbf{Tata}} \to \Sigma^*_{\textbf{Toto}}$ définie par ....
....
⟨*ici on explique comment transformer les instances de* **Tata** *en des instances de* **Toto**⟩ ....
....
...., qui est :

i. calculable en temps polynomial, car ....
....
⟨*ici on peut en général argumenter simplement : objets de taille poly faciles à générer...*⟩ ...
....

ii. et telle que, pour tout $x \in \Sigma^*_{\textbf{Tata}}$ on a $x \in \textbf{Tata} \iff f(x) \in \textbf{Toto}$. En effet :

i. pour tout $x \in \Sigma^*_{\textbf{Tata}}$ on a $x \in \textbf{Tata} \implies f(x) \in \textbf{Toto}$, car ....
....
....
⟨*ici se trouve le cœur de la démonstration – ventricule gauche*⟩ ....
....
....
....

ii. pour tout $x \in \Sigma^*_{\textbf{Tata}}$ on a $f(x) \in \textbf{Toto} \implies x \in \textbf{Tata}$, car ....
....
....
⟨*ici se trouve le cœur de la démonstration – ventricule droit*⟩ ....
....
....
....

Donc le problème **Toto** est NP-complet.

Exercice 1. *Problèmes* NP-*complets*

Les définitions des problèmes sont données ci-après. On supposera acquis que

3-SAT, **Clique** et **Couverture par Sommets** sont NP-complets.

Pour répondre à une question on pourra supposer que l'on a déjà répondu aux précédentes.

1. Montrer que **Isomorphisme de Sous-Graphes** est NP-complet. *Indice : réduire depuis* **Clique**.
2. Montrer que **Ensemble Dominant** est NP-complet. *Indice : réduire depuis* **Couverture par Sommets (Node Cover)**.
3. Montrer que **3-Colorabilité** est NP-complet. *Indice : réduire depuis* **3-SAT**.
4. Montrer que **Cycle Hamiltonien** est NP-complet. *Indice : réduire depuis* **3-SAT**.

3-SAT
entrée : une formule propositionnelle ϕ en forme normale conjonctive, dont toutes les clauses sont de taille exactement trois.
question : y a-t-il une affectation qui satisfait ϕ?

Clique
entrée : un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier $k \in \mathbb{N}$.
question : G contient-il une clique de taille k ?

Couverture par Sommets (Node Cover)
entrée : un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier naturel k.
question : existe-t-il un sous-ensemble de sommets $C \subseteq S$ de taille au plus k tel que chaque arête de G a au moins une extrémité dans C ?

Isomorphisme de Sous-Graphes
entrée : deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $H = (S', A')$.
question : G possède-t-il un sous-graphe isomorphe à H ?

Ensemble Dominant
entrée : un graphe non orienté $G = (S, A)$ et un entier naturel k.
question : existe-t-il un sous-ensemble de sommets $D \subseteq S$ de taille au plus k tel que chaque sommet de G est soit lui=même dans D, soit il est adjacent à un sommet dans D ?

3-Colorabilité
entrée : un graphe non orienté $G = (S, A)$.
question : existe-t-il une coloration des sommets de G avec au plus 3 couleurs telle que deux sommets adjacent soient toujours de deux couleurs différentes ?

Cycle Hamiltonien
entrée : un graphe non orienté $G = (S, A)$.
question : existe-t-il un cycle dans G qui qui passe par tous les sommets une fois et une seule ?