Cours #3

Dualité dans PL

$$\begin{cases} \text{maximiser} & 2x_1 + 3x_2 \\ & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

<u>But</u> : Calculer des bornes sup pour l'optimum sans resoudre le (PL).

1. Notons que $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \Rightarrow OPT \leq 12$
2. Notons aussi $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{2}(4x_1 + 8x_2) \leq 6 \Rightarrow OPT \leq 6$
3. Aussi $2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{3}(4x_1 + 8x_2) + \frac{1}{3}(2x_1 + x_2) \leq \frac{12}{3} + \frac{3}{3} = 5$
   $\Rightarrow OPT \leq 5$

$$\begin{cases} \max & 2x_1 + 3x_2 & \\ & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 & (y_1) \\ & 2x_1 + x_2 \leq 3 & (y_2) \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 & (y_3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{cases}$$

$$(4x_1 + 8x_2)y_1 + (2x_1 + x_2)y_2 + (3x_1 + 2x_2)y_3 =$$

$$= (4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (6y_1 + y_2 + 2y_3)x_2 \leq$$

$$\leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$$

On souhaite des bornes sup les plus serres.

Cela revient a minimiser $12y_1+3y_2+4y_3$.

D'autre part, $4y_1+2y_2+3y_3\geq 2$ et $6y_1+y_2+2y_3\geq 3$.

On obtient le (PL) suivant:

$$(D)\quad\begin{cases}\text{minimiser } 12y_1+3y_2+4y_3\\ \qquad 4y_1+2y_2+3y_3\geq 2\\ \qquad 8y_1+y_2+2y_3\geq 3\\ \qquad y_1,y_2,y_3\geq 0\end{cases}$$

(D) est le <u>programme lineaire dual</u> à (PL).

Le dual de (D) est le PL initial (PL).

<u>Cas général:</u>

$$(PL)\quad\begin{cases}\text{maximiser } c_1x_1+\dots+c_nx_n\\ \qquad a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n\leq b_1 \quad (y_1)\\ \qquad \dots\dots\dots \qquad \vdots\\ \qquad a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n\leq b_m \quad (y_m)\end{cases}$$

$$(D)\quad\begin{cases}\text{minimiser } b_1y_1+\dots+b_my_m\\ \qquad a_{11}y_1+\dots+a_{m1}y_m\geq c_1\\ \qquad \dots\dots\dots\\ \qquad a_{1n}y_1+\dots+a_{mn}y_m\geq c_n\end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{maximiser } c^T x \\ Ax \leq b \qquad (PL) \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{minimiser } b^T y \\ A^T y \geq c \qquad (D) \\ y \geq 0 \end{cases}$$

<u>Proposition 1</u> (dualité faible). Si x est une solution <u>admissible</u> de (PL) et y est une solution <u>admissible</u> de (D), alors $c^T x \leq b^T y$.

<u>Preuve</u>: $$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \Big) x_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j \Big) y_i \overset{(2)}{\leq} \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

(1) car $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \ \forall j$ dans (D)

(2) car $\sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j \leq b_i \ \forall i$ dans (PL). $\square$

<u>Théorème 1</u> (dualité forte). Si $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ est une <u>solution optimale</u> de (PL), alors (D) admet une <u>solution optimale</u> $y^* = (y_1^*, \ldots, y_m^*)$ et $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$.

Donc (PL) et (D) ont la même valeur de l'optimum.

Notons la bijection $x_{n+i} \longleftrightarrow y_i, i=1,\dots,m$ entre les variables d'écart du primal et les variables duales.

Le Théorème 1 est une conséquence du résultat suivant:

<u>Proposition 2</u>: Soit $z = z_0 + \sum_{i=1}^{n+m} d_i x_i$ l'expression de la fonction objectif dans le dernier dictionnaire des (PL) (ou $d_i = 0$ si $i \in B$ et $d_i \leq 0$ si $i \in N$). Alors $y_1^* = -d_{n+1}, \dots, y_m^* = -d_{n+m}$ est une solution optimale du dual (D).

Avant de démontrer la Proposition 2, considerons l'exemple de la fabrique en terre cuite.

$$\begin{cases} \max\ z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\ \qquad 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42 \quad (x_5 \longleftrightarrow y_1) \\ \qquad x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17 \quad (x_6 \longleftrightarrow y_2) \\ \qquad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 24 \quad (x_7 \longleftrightarrow y_3) \\ \qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

(D3)

$$x_1 = 3 + x_2 \qquad\qquad -3x_6 + 2x_7$$
$$x_3 = 7 - x_2 - x_4 + x_6 - x_7$$
$$x_5 = 1 - x_2 - 2x_4 + x_6 + x_7$$
$$\overline{}$$
$$z = 147 - 2x_2 - x_4 - 3x_6 - 4x_7$$

<u>On a</u> : $B = \{1, 3, 5\}$ $N = \{2, 4, 6, 7\}$

Solution optimale du primal : $z = 147$,

$\boxed{x_1^* = 3,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 7}$.

Par la Proposition 2,

$$z = 147 + 0 \cdot x_1 + (-2)x_2 + 0 \cdot x_3 + (-1)x_4 + \overset{d_5}{0} \cdot x_5$$
$$+ \underset{d_6}{(-3)}x_6 + \underset{d_7}{(-4)}x_7$$

Les variables d'écart sont x_5, x_6, x_7.

Donc $\boxed{y_1^* = 0,\ y_2^* = 3,\ y_3^* = 4}$ est une solution optimale du dual (D) :

$$\begin{cases} \text{minimiser } 42y_1 + 17y_2 + 34y_3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 7 \\ 4y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 9 \\ 5y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 18 \qquad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\ 7y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 17 \end{cases}$$

<u>Conclusion:</u> Pour résoudre (PL) et (D) à la fois, il suffit de résoudre soit (PL) soit (D) (celui qui est plus facile).

<u>Preuve de la Proposition 2:</u> Considerons la fonction objectif du primal dans le dernier dictionnaire:

$$z = z_0 + \sum_{k=1}^{n+m} d_k x_k .$$

Alors d_k sont tous negatifs ou nuls.

D'autre part, $z_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$ et $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ par definition de variables d'ecart.

Posons $\boxed{y_i^* = -d_{n+i} \geq 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, m.}$ Alors,

$$z = z_0 + \sum_{k=1}^{n} d_k x_k - \sum_{i=1}^{m} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) y_i^* =$$

$$= z_0 - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* + \sum_{j=1}^{n} \Big(d_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \Big) x_j$$

et aussi $z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$.

À cause de l'indépendance des variables x_j, on déduit :

$$\begin{cases} \boxed{z_0 = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*} \\ c_j = d_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \text{ pour } j = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Comme $d_j \leq 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \boxed{\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \text{ pour } j = 1, \ldots, n} \\ y_i^* \geq 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Donc $y_1^* = -d_{n+1}, \ldots, y_m^* = -d_{n+m}$ est une solution <u>admissible</u> et <u>optimale</u> de (D)

$\square$

Le théorème des écarts complémentaires (un certificat d'optimalité)

Théorème 2 (des écarts complementaires)

Une solution admissible $x_1^*, \dots, x_n^*$ du primal est optimale ssi il existe des nombres $y_1^*, \dots, y_m^*$ tels que :

- si $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, alors $y_i^* = 0$
- si $x_j^* > 0$, alors $\sum a_{ij} y_i^* = c_j$

et tels que $\begin{cases} \sum a_{ij} y_i^* \geq c_j \,, \; j = 1, \dots, n \\ y_i^* \geq 0 \,, \; i = 1, \dots, m \end{cases}$

Dans ce cas, $y^* = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ est une solution optimale du dual.

Exemple d'application du Théorème 2 :

Considerons l'affirmation "$x_1^*=3$, $x_2^*=0$, $x_3^*=7$, $x_4^*=0$ est une solution optimale pour l'exemple fabrique-en-terre-cuite".

(1) $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ est une solution admissible du primal;

(2) cherchons s'il existe y_1^*, y_2^*, y_3^* vérifiant les conditions du Théorème 2:

$$\begin{cases} y_1^*=0 & \text{car la première contrainte du primal n'est pas serrée} \\ 2y_1^*+y_2^*+y_3^*=7 & \text{car } x_1^*>0 \\ 5y_1^*+2y_2^*+3y_3^*=18 & \text{car } x_3^*>0 \end{cases}$$

Donc $\begin{cases} y_2^*+y_3^*=7 \\ 2y_2^*+3y_3^*=18 \end{cases} \Rightarrow y_2^*=3,\ y_3^*=4.$

On peut verifier facilement que $y_1^*=0$, $y_2^*=3$, $y_3^*=4$ est une solution admissible du dual et que les inegalites 2 et 3 du primal sont serrées. Donc l'affirmation de début est vrai.

Preuve du Théorème 2 : Par la dualité faible,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \leq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*\right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum a_{ij} x_j^*\right) y_i^* \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* . \qquad (1)$$

Par le Théorème 1 de dualite forte, $x^* = (x_1^*, \dots x_n^*)$ et $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ sont deux solutions optimales du primal et du dual, si et seulement si

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* . \qquad (2)$$

Notons que (2) a lieu ssi toutes les inegalites dans (1) sont des egalites. Cela est equivalent à :

$$\left(x_j^* = 0 \text{ ou } \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j\right) \text{ et } \left(y_i^* = 0 \text{ ou } \sum a_{ij} x_j^* = b_i\right).$$

Ces conditions sont rien d'autre que les conditions des écarts complementaires. $\square$

La signification économique du dual

- b_i – la quantité de la ressource i ;
- a_{ij} – la quantité de la ressource i consommé pour la fabrication d'une unité de produit j ;
- x_j – la quantité fabriquée du produit j
- c_j – la valeur unitaire du produit j.

La relation à l'optimum $z_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$ implique que y_i doit représenter la "valeur unitaire de la ressource i", appelée aussi "prix implicite de la ressource i", i.e. le <u>montant maximum que l'on serait prêt à payer pour obtenir une unité supplimentaire de la ressource i.</u>

Pour notre <u>exemple</u>, $y_1^* = 0$, $y_2^* = 3$, $y_3^* = 4$, cela signifique que le prix implicite du moulage est 0 car dans la solution optimale $x_1^* = 3$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 7$, $x_4^* = 0$ il reste une heure de moulage.

Problème dual-réalisable

PL dual-realisable si les coefficients c_j de la fonction objectif sont tous negatifs.

Dans ce cas, à la place de la méthode à deux phases on peut utiliser le dual.

Exemple:

$$(P)\quad \begin{cases} \text{maximiser} & -x_1 - x_2 \\ & -3x_1 - x_2 \leq -4 \\ & 7x_1 - x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\quad \begin{cases} \text{minimiser} & -4y_1 + 7y_2 \\ & -3y_1 + 7y_2 \geq -1 \\ & -y_1 - y_2 \geq -1 \\ & y_1, y_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \text{maximiser} \\ \quad 4y_1 - 7y_2 \\ \quad 3y_1 - 7y_2 \leq 1 \\ \quad y_1 + y_2 \leq 1 \\ \quad y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$