Cours #2

La méthode du simplexe à deux phases

$$\text{(PL)}\quad \begin{cases} \text{maximiser } z = x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{(PLA)}\quad \begin{cases} \text{maximiser } w = -x_0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_0 \leq 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_0 \leq -5 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - x_0 \leq -1 \\ x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

<u>Rémarque</u>: (PL) possède une solution admissible (et donc un dictionnaire réalisable) ssi (PLA) a $x_0 = 0$ comme solution optimale (c'est dû au fait que $x_0 \geq 0$ et on maximis $w = -x_0$). Donc x_0 est une variable de separation pour (PL).

(DA1)

$$\begin{aligned} x_4 &= 4 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_0 \\ x_5 &= -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_0 \\ x_6 &= -1 + x_1 - x_2 + 2x_3 + x_0 \\ \hline w &= \qquad\qquad\qquad\qquad - x_0 \end{aligned}$$

<u>Variable entrante</u>: x_0 (même si c'est pas legal)

Variable sortante: x_5 (la "plus negative")

(DA2)
$$
\begin{aligned}
x_0 &= 5 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 \\
x_4 &= 9 - 2x_2 - x_3 + x_5 \\
x_6 &= 4 + 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 \\
\hline
w &= -5 - 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5
\end{aligned}
$$

Variable entrante : x_2 (seule avec coeff. >0)

Variable sortante : x_6

$x_0 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \frac{5}{3}$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow x_2 \leq \frac{9}{2}$

$x_6 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_6 \leq 1}$

(DA3)
$$
\begin{aligned}
x_2 &= 1 + 0{,}75x_1 + 0{,}75x_3 + 0{,}25x_5 - 0{,}25x_6 \\
x_0 &= 2 - 0{,}25x_1 - 1{,}25x_3 + 0{,}25x_5 + 0{,}75x_6 \\
x_4 &= 7 - 1{,}5x_1 - 2{,}5x_3 + 0{,}5x_5 + 0{,}5x_6 \\
\hline
w &= -2 + 0{,}25x_1 + 1{,}25x_3 - 0{,}25x_5 - 0{,}75x_6
\end{aligned}
$$

Variable entrante : x_3

Variable sortante : x_0

$x_2 \geq 0 \Rightarrow x_3 \geq -\frac{1}{0{,}75}$

$x_0 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_3 \leq \frac{2}{1{,}25}}$

$x_4 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq \frac{7}{2.5}$

(DA3)

$$
\begin{array}{l}
x_3 = 1{,}6 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_5 + 0{,}6x_6 - 0{,}8x_0 \\
x_2 = 2{,}2 + 0{,}6x_1 + 0{,}4x_5 + 0{,}2x_6 - 0{,}6x_0 \\
x_4 = 3 - x_1 \qquad\qquad - x_6 + 2x_0 \\
\hline
w = \qquad\qquad\qquad\qquad - x_0
\end{array}
$$

<u>Stop</u>: $x_0^* = 0$, $x_1^* = x_5^* = x_6^* = 0$, $x_3^* = 1{,}6$, $x_2^* = 2{,}2$ $x_4^* = 3$ est une solution optimale pour (PLA).

(DA3) nous donne aussi le premier dictionnaire (D1) pour (PL). Il suffit d'éliminer la dernière colonne d (DA3) et exprimer la fonction objectif Z de (PL) comme <u>combinaison linéaire</u> des var. hors base x_1, x_5, x_6:

(D1)

$$
\begin{array}{l}
x_3 = 1{,}6 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_5 + 0{,}6x_6 \\
x_2 = 2{,}2 + 0{,}6x_1 + 0{,}4x_5 + 0{,}2x_6 \\
x_4 = 3 - x_1 \qquad\qquad - x_6 \\
\hline
Z = -0{,}6 + 0{,}2x_1 - 0{,}2x_5 + 0{,}4x_6
\end{array}
$$

L'algorithme du simplexe en cas général

Forme canonique:

$$\begin{cases} \text{maximiser } c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad A = (a_{ij})_{n\times m} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Forme equationelle:

$$\begin{cases} \text{maximiser } c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad A = (a_{ij})_{(n+m)\times m} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{pmatrix}$$

On passe de la forme canonique à la forme equationelle en ajoutant les variables d'ecart $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$.

Notons que A devient une matrice $(n+m)\times m$, c un vecteur $(n+m)\times 1$, alors que b reste comme avant.

<u>Convention</u>: On suppose par la suite (PL) en forme equationelle, ou les lignes de la matrice A <u>sont lineairement independentes</u> (on peut obtenir ca par elimination de Gauss).

<u>Notations</u>: Pour $B \subseteq \{1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$, soit A_B la réstriction de la matrice A sur les colonnes indexes par B.

<u>Ex</u>: Si $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \boxed{5} & 3 & \boxed{4} & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & \boxed{5} & 6 \end{pmatrix} \end{array}$, $B = \{2, 4\}$,

alors $A_B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 2 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$. De même facon on definit x_B, c_B ...

<u>Definition</u>: Une <u>solution base admissible</u> du (PL) $\max c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$ est une solution admissible x pour laquelle il existe $B \subseteq \{1, 2, \dots, n+m\}$ t.q.

(i) la matrice A_B est nonsingulière

(ii) $x_j = 0$ pour tout $j \notin B$.

<u>Observations:</u>

(1) A_B est une matrice carrée $m \times m$

(2) Une matrice carrée est non-singulière ssi elle est inversible ssi son determinant est $\neq 0$.

<u>Ex:</u> Soit comme avant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = (14, 7), \quad B = \{2, 4\}$$

et $x = (0, 2, 0, 1, 0)$.

Alors $A_B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ est nonsing. $(\det(A_B) = 21)$

et $x_j = 0 \ \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus B$.

<u>Pour la suite:</u> Si $B \subseteq \{1, \dots, n+m\}$ est associé a une solution base admissible, alors on apelle B une <u>base admissible</u>.

Soit $N := \{1, \dots, n+m\} \setminus B$ (cela correspond aux <u>variables hors-base</u>).

Proposition 1 : Toute solution base admissible est determiné de façon unique par B. En autres termes, si $B \subseteq \{1, \dots, n+m\}$ et A_B est non-singuliere, alors il existe au plus une solution admissible x avec $x_j = 0 \ \forall j \notin B$.

Preuve : Pour x admissible, on a $Ax = b$. On peut ecrire $Ax = A_B x_B + A_N x_N$. Si x est base admissible, alors $x_N = 0$, donc $A_N x_N = 0 \Rightarrow Ax = A_B x_B$.

Par consequence, $A_B x_B = b \Leftrightarrow \boxed{x_B = A_B^{-1} b.}$

Donc, x est uniquement defini à partir de B.

Inversement, si A_B est inversible, $A_B^{-1} b$ est uniquement defini, mais il est possible que $A_B^{-1} b$ a des coordonnées négatives. $\square$

Dictionnaires, cas général

Definition: Un dictionnaire $\mathcal{D}(B)$ associé à une base admissible B est un système de $m+1$ équations linéaires en variables $N = \{1, \dots, n+m\} \setminus B$ qui possède le même ensemble des solutions que le système $Ax = b$, $z = c^T x$ et a la forme

$$\boxed{\mathcal{D}(B) \quad \begin{array}{l} x_B = p + Q x_N \\ \hline z = z_0 + d^T x_N \end{array}}$$

où x_B est le vecteur des variables de base,

x_N est le vecteur des variables hors-base

p - un vecteur avec m coordonnées,

d - un vecteur avec n coordonnées

Q - une matrice $m \times n$

z_0 - un réel.

Solution de base associé à $\mathcal{D}(B)$: $x_N = 0$, $x_B = p$, $z = z_0$.

<u>Proposition 2</u>: Si B est une base admissible, alors $\mathcal{D}(B)$ est défini de façon unique par les formules:

$$Q = -A_B^{-1} A_N,\ p = A_B^{-1} b,\ z_0 = c_B^T A_B^{-1} b \text{ et}$$
$$d = c_N - (c_B^T A_B^{-1} A_N)^T.$$

<u>Preuve</u>: Comme $Ax = b$ et $Ax = A_B x_B + A_N x_N$ on déduit $A_B x_B = b - A_N x_N$. Multipliant par A_B^{-1} à gauche on obtient $x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$.

Donc $\boxed{p = A_B^{-1} b}$ et $\boxed{Q = -A_B^{-1} A_N.}$

En substituant la partie droite pour x_B dans l'equation $z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N$ on deduit:

$$z = c_B^T (A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N) + c_N^T x_N =$$
$$= c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N.$$

Donc $z_0 = c_B^T A_B^{-1} b$ et $d^T = c_N - (c_B^T A_B^{-1} A_N)^T$. $\square$

L'algorithme du simplexe

0. Calculer une base admissible et une solution base admissible (en utilisant le prog. lin. auxilliare). Si une telle base et solution de base existe pas, alors <u>stop</u>. Sinon.

1. Soit B la base admissible courrante et soit $\mathcal{D}(B)$ le dictionnaire associe.

2. Si $d \leq 0$, alors la solution base admissible $x_N = 0$, $x_B = p$, $z = z_0$ est optimale. Stop.

3. Sinon, choisir x_v, $v \in N$ avec $d_v > 0$ comme <u>variable entrante</u>. Si il y a plusieurs possibilides, utiliser la regle du pivot.

4. Choisir x_u, $u \in B$ la plus contreignante sur l'augmentation de x_v comme <u>variable sortante</u>

5. Faire $B \leftarrow B \setminus \{u\} \cup \{v\}$, calculer $\mathcal{D}(B)$ et aller à l'étape 1.

<u>Optimalité</u>: comme $z = z_0 + dx$ de $\mathcal{D}(B)$ est egale a $c^T x$ si on choisi une autre solution admissible $x' = (x_1', \ldots, x_{n+m}')$, alors comme $x_j' \geq 0 \ \forall j \in N$ et $d_j \leq 0 \ \forall j \in N$ on obtiendrai que $c^T x' = z_0 + \underset{\overset{\wedge\shortparallel}{0}}{dx'} \leq z_0$.

<u>Regle du pivot</u>:

(1) (Dantzig) <u>plus grand coefficient</u>: choisir comme variable entrante la variable avec le plus grand coeff. > 0.

(2) <u>plus grande croissance</u>: la variable avec coeff. > 0 qui augment le plus la fonction objectif.

(3) (Bland) la variable avec coeff > 0 et plus petit indice.

(4) <u>steepest edge</u>: maximiser le produit scalaire avec le vecteur c: $\max \dfrac{c^T(x_{NEW} - x_{OLD})}{\| x_{NEW} - x_{OLD} \|}$.