M1 Informatique, UE Complexité
Exemple de sujet d'examen

Durée : 1h30 – Tous documents interdits

1 Questions de cours

Chaque question peut posséder 0 ou plusieurs réponses possibles ; indiquez les réponses correctes pour chaque question sans les justifier.

Question 1 Soit A un langage dans **NP**. Que peut-on déduire ?

1. au moins un langage dans **NP** se réduit à A avec une réduction many-one polynomiale
2. si $A \in \mathbf{P}$ alors $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$
3. si $A \notin \mathbf{P}$ alors $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$
4. si $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ alors $A \in \mathbf{P}$

Question 2 Soient $A, B, C \in \mathbf{NP}$ trois langages et supposons que A se réduit à B et que B se réduit à C avec deux réductions many-one polynomiales. Que peut-on déduire ?

1. si C est **NP**-complet alors B est **NP**-complet
2. si $C \in \mathbf{P}$ alors $A \in \mathbf{P}$
3. si A est **NP**-complet alors C est **NP**-complet
4. si C est **NP**-complet alors A est **NP**-complet

2 Appartenence à NP

Considérons le problème suivant :

3-Coloration
Donnée : Un graphe non orienté $G = (S, A)$.
Question : Existe-t-il une coloration des sommets de G avec au plus trois couleurs telle que deux sommets adjacents ne sont jamais de la même couleur ?

Question 1 Montrez que ce problème appartient à **NP** en décrivant, avec du pseudo-code détaillé, soit un algorithme non déterministe pour le problème, soit un vérificateur déterministe, et analysez son temps de calcul. Vous pouvez assumer que le graphe est représenté par une matrice d'adjacence.

3 Réduction

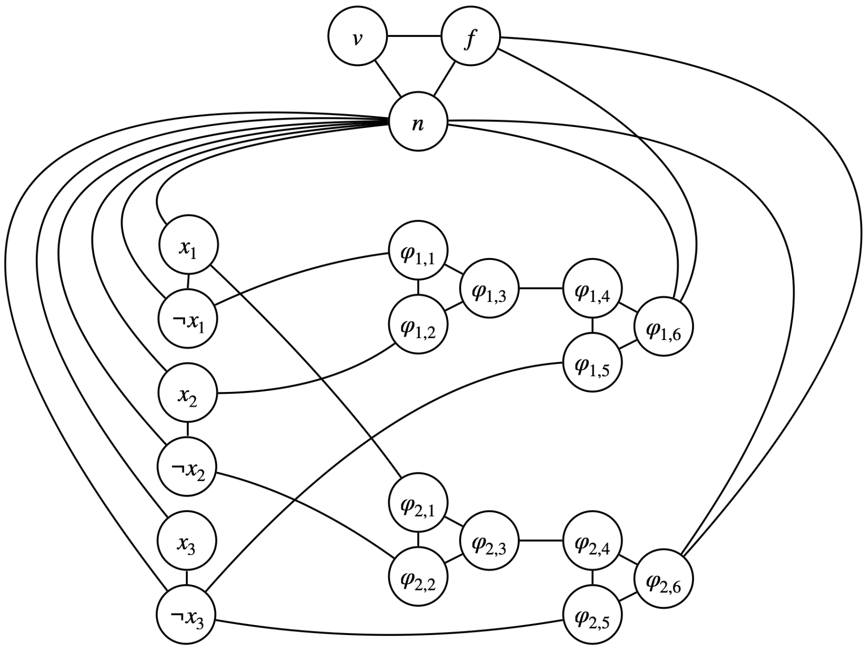
Considérons le problème suivant :

3SAT
Donnée : Une formule φ en forme normale conjonctive avec exactement trois littéraux par clause.
Question : Existe-t-il une affectation des variables qui satisfait φ ?

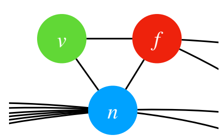
On veut réduire le problème **3SAT** à **3-Coloration** avec une réduction *many-one* en temps polynomial. Comme exemple, on peut transformer la formule

$$\varphi = \underbrace{(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)}_{\varphi_1} \wedge \underbrace{(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3)}_{\varphi_2}$$

avec $n = 3$ variables (x_1, x_2, x_3) et $m = 2$ clauses (φ_1, φ_2) en entrée G du problème **3-Coloration**, où G est le graphe suivant :

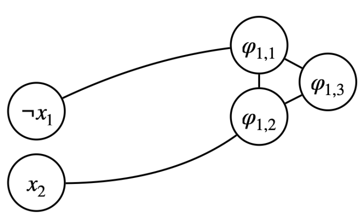


Observez le triangle formé par les sommets v, f, n. Nécessairement, il faut colorier ces trois sommets avec trois couleurs différentes, puisque ils sont tous reliés l'un à l'autre. Supposons, sans perte de généralité, que l'on colorie v en vert, f en rouge et n en bleu :

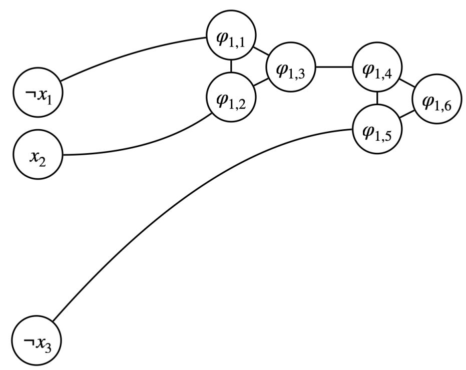


Question 1 En observant les connexions avec le triangle v, f, n, qu'est-ce qu'on peut dire *a priori* sur les couleurs possibles pour les sommets x_1 et $\neg x_1$, x_2 et $\neg x_2$, x_3 et $\neg x_3$? Et pour les sommets $\varphi_{1,6}$ et $\varphi_{2,6}$?

Question 2 Considérez le sous-graphe suivant. En gardant à l'esprit les couleurs possibles pour les sommets $\neg x_1$ et x_2 (question précédente), quelles sont toutes les colorations de ces deux sommets qui permettent de colorier $\varphi_{1,3}$ en vert ? Comment peut-on donc interpréter le « gadget » formé par les sommets $\varphi_{1,1}, \varphi_{1,2}, \varphi_{1,3}$?



Question 3 Considérez maintenant le sous-graphe suivant, qui contient celui de la question précédente. Quelles colorations des sommets $\neg x_1, x_2, \neg x_3$ permettent de colorier $\varphi_{1,6}$ en vert ? Comment peut-on donc interpréter le « gadget » formé par les sommets $\varphi_{1,1}$, $\varphi_{1,2}$, $\varphi_{1,3}$, $\varphi_{1,4}$, $\varphi_{1,5}$, $\varphi_{1,6}$?



Question 4 Trouver une affectation des variables x_1, x_2, x_3 de φ qui satisfait la formule, et une coloration à 3 couleurs pour G qui représente cette affectation.

Question 5 Trouver une coloration à 3 couleurs pour G, différente de celle de la réponse précédente, et une affectation des variables x_1, x_2, x_3 de φ qui représente cette coloration.

Question 6 Généralisez la transformation de la formule précédente φ en un graphe G à des formules **3-SAT** quelconques définies sur n variables et par m clauses, en décrivant (de forme précise, mais sans nécessairement écrire du pseudo-code) comment construire le graphe. Expliquez pourquoi cette transformation peut être calculée en temps polynomial.

Question 7 Expliquez pourquoi si une formule **3-SAT** est satisfaisable, alors elle est transformée en un graphe qui admet une coloration à 3 couleurs.

Question 8 Expliquez pourquoi si une formule **3-SAT** est transformée en un graphe qui admet une coloration à 3 couleurs, alors elle est satisfaisable.

Question 9 En sachant que **3-SAT** est **NP**-complet, et que **3-Coloration** appartient à **NP** (cf. exercice 2), comment peut-on classer le problème **3-Coloration** en utilisant la transformation proposée ? Justifiez votre réponse.