TD Dualité de la programmation linéaire

Exercice 1. (Chvátal) Formuler le dual du programme linéaire suivant et le résoudre avec l'algorithme du simplex :

$$\begin{array}{lrcrcr}
\text{Maximiser} & -x_1 & - & 2x_2 & & \\
\text{s.l.c.} & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & 7x_2 & \leq & 6 \\
 & 9x_1 & - & 4x_2 & \leq & 6 \\
 & -5x_1 & + & 2x_2 & \leq & -3 \\
 & 7x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0.
\end{array}$$

Extraire du dictionnaire optimal du programme linéaire dual, la solution optimale du primal.

Exercice 2. (Chvátal) Pour chacun des deux problèmes suivants, utiliser le théorème des écarts complémentaires pour déterminer si la solution proposée est optimale :

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\text{a. Maximiser} & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.l.c.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_5 & \geq & 0.
\end{array}$$

Solution proposée : $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$, $x_3 = \frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{5}{3}$, $x_5 = 0$.

$$\begin{array}{lrrcrcrcrcrcrcr}
\text{b. Maximiser} & & 4x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & - & 5x_5 & + & 8x_6 & & \\
\text{s.l.c.} & & x_1 & & & - & 4x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \leq & 1 \\
 & & 5x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & + & 3x_6 & \leq & 4 \\
 & & 4x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 3x_4 & - & 4x_5 & + & x_6 & \leq & 4 \\
 & & & - & x_2 & & & + & 2x_4 & + & x_5 & - & 5x_6 & \leq & 5 \\
 & - & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & + & 2x_6 & \leq & 7 \\
 & & 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & + & 4x_5 & + & 5x_6 & \leq & 5 \\
 & & & & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_6 & \geq & 0.
\end{array}$$

Solution proposée : $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $x_3 = \frac{5}{2}$, $x_4 = \frac{7}{2}$, $x_5 = 0$, $x_6 = \frac{1}{2}$.