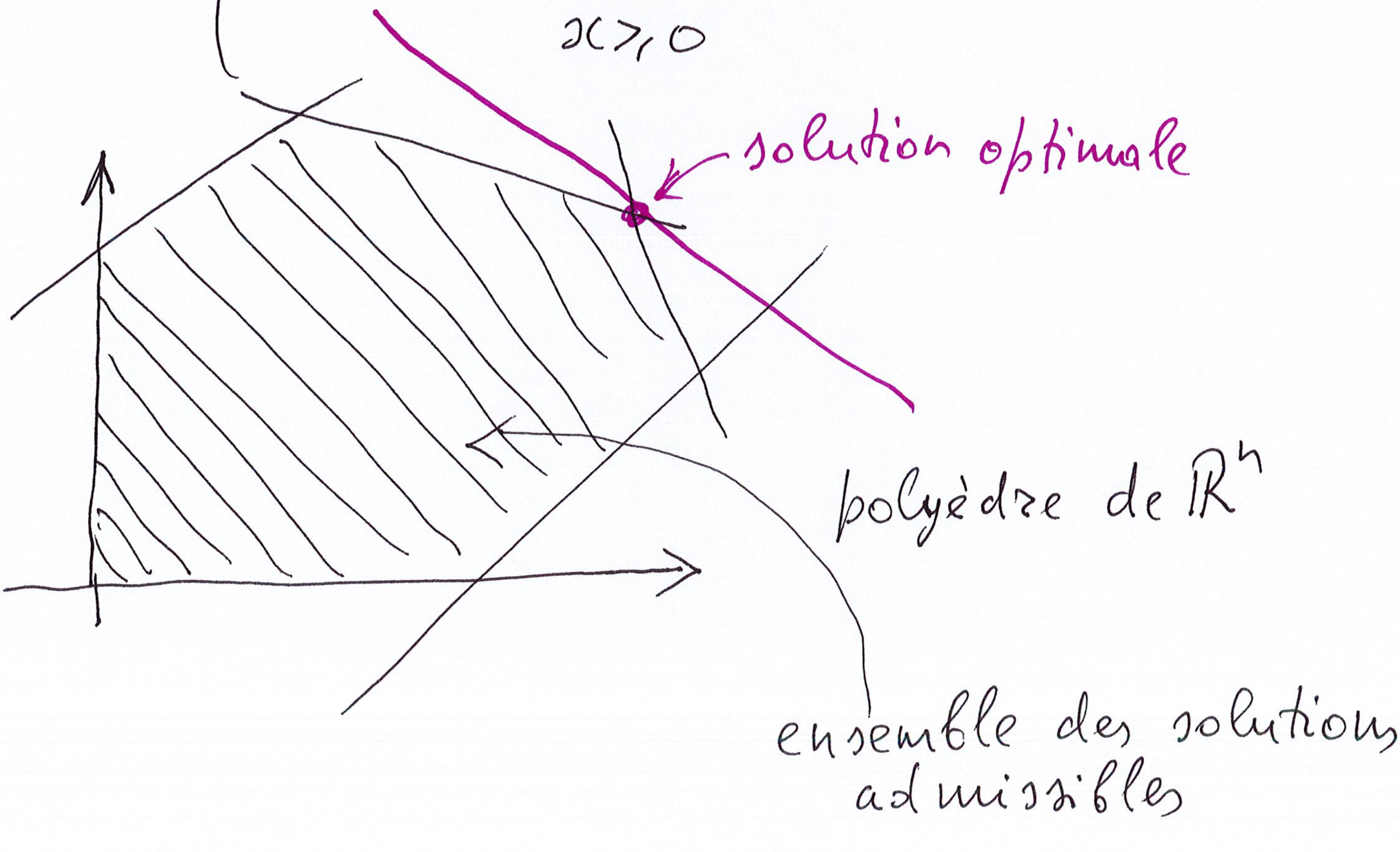
Programmation linéaire

Program linéaire

$$\begin{cases} \text{maximiser} \quad c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n \\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots a_{1n}x_n \le b_1 \\ \quad \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0 \end{cases}$$

Forme canonique :

$$\begin{cases} \text{maximiser} \quad c^T x \\ Ax \le b \\ x \geq 0 \end{cases}$$



L'algorithme du simplexe sur un exemple :

Fabrique d'objet en terre cuite :

Objet	Cendrier	Bol	Cruche	Vase	Dispo
Moulage	2	4	5	1	42h
Cuisson	1	1	2	2	17h
Peinture	1	2	3	3	24h
Bénéfice	7	9	18	17	

But : Etablir un plan de production, maximisant le bénéfice.

$$
\begin{cases}
\text{maximiser } z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4 \\
2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 \leq 42 \quad (x_5) \\
x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \leq 17 \quad (x_6) \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 24 \quad (x_7) \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0
\end{cases}
$$

Dictionnaire (D1)

$$x_5 = 42 - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 7x_4$$
$$x_6 = 17 - x_1 - x_2 - 2x_3 - 2x_4$$
$$x_7 = 24 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 3x_4$$
$$z = 7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 17x_4$$

Solution base admissible: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, $x_5 = 42$, $x_6 = 17$, $x_7 = 24$ et $z = 0$.

Pour l'ameliorer:

Variable entrante: x_3 (coefficient >0)

Variable sortante: x_7 (la plus contreignante sur la croissance de x_3: $\begin{cases} x_5 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 8,4 \\ x_6 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 8.5 \\ x_7 \geq 0 \Rightarrow x_3 \leq 8 \end{cases}$

Etape du pivot: x_3 entre dans la base et x_7 sorte de la base. On exprime x_3 par x_7 et les autres variables hors-base.

(D2)

$$x_3 = 8 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - x_4 - \frac{1}{3}x_7$$
$$x_5 = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - 2x_4 + \frac{5}{3}x_7$$
$$x_6 = 1 - \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_7$$
$$z = 144 + x_1 - 3x_2 - x_4 - 6x_7$$

<u>Solution base admissible</u> : $x_1 = x_2 = x_4 = x_7 = 0$

$x_3 = 8$, $x_5 = 2$, $x_6 = 1$ et $\boxed{z = 144}$

<u>Variable entrante</u> : x_1 (seule avec coef. >0)

<u>Variable sortante</u> : x_6 (la plus contreignante sur la croissance de x_1 : $\begin{cases} x_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 24 \\ x_5 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 6 \\ x_6 \geq 0 \Rightarrow x_1 \leq 3 \end{cases}$

<u>Etape du pivot</u> : x_1 entre dans la base et x_6 sort de la base.

$$(\mathcal{D}3) \quad \begin{array}{l} x_1 = 3 + x_2 \qquad\qquad\qquad - 3x_6 + 2x_7 \\ x_3 = 7 - x_2 - x_4 + x_6 - x_7 \\ x_5 = 1 - x_2 - 2x_4 + x_6 + x_7 \\ \hline z = 147 - 2x_2 - x_4 - 3x_6 - 4x_7 \end{array}$$

Tous les coefficients de z sont $\leq 0 \Rightarrow z = 147$ est optimale.

<u>Solution optimale</u> : $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 7$, $x_4 = 0$.

Bénéfice : 147 €