9. Übungsblatt zur Vorlesung
Statistische Methoden der Datenanalyse B
Abgabe: 07.11.2019 23:59

WiSe 19/20
Prof. W. Rhode

Zeit	Raum	Abgabe im Moodle; Mails mit Betreff: [SMD19]
Di. 16–18	CP-03–150	dominik.baak@udo.edu und noah.biederbeck@udo.edu
Do.14–16	CP-03–150	kevin3.schmidt@udo.edu und maximilian.sackel@udo.edu
Fr. 16–18	CP-03–150	felix.geyer@udo.edu und rune.dominik@udo.edu

Aufgabe 21: *Fehlerfortpflanzung* **5 P.**

Die Parameter einer Ausgleichsgeraden $y = a_0 + a_1 x$ wurden zu $a_0 = 1{,}0 \pm 0{,}2$ und $a_1 = 1{,}0 \pm 0{,}2$ bestimmt. Der Korrelationskoefffizient ist $\rho = -0{,}8$. Bestimmen Sie die Unsicherheit eines Wertes y als Funktion von x.

(a) Bestimmen Sie das Resultat analytisch sowohl unter Berücksichtigung der Korrelation als auch unter Vernachlässigung der Korrelation.

(b) Bestimmen Sie das Resultat numerisch mit einer Monte Carlo Simulation. Visualisieren Sie die Parameter a_0 und a_1 in einem Scatter-Plot.

(c) Bestimmen Sie die Vorhersagen y (Mittelwert und Standardabweichung) für feste $x = -3, 0, +3$ numerisch sowie analytisch und vergleichen Sie diese.

Aufgabe 22: *Teilchenspuren* **5 P.**

In einem Teilchenphysikexperiment stehen 2 Ebenen von Driftkammern senkrecht zur z-Achse an den Positionen z_1 und z_2 (kein Magnetfeld, Vakuum). Sie messen die jeweilige x-Position (x_1 und x_2) eines hindurchfliegenden geladenen Teilchens mit den Fehlern σ_{x_1} und σ_{x_2} ohne Korrelation.

(a) Berechnen Sie die Geradengleichung

$$x = az + b,$$

die die Bewegung des Teilchens in der x–z-Ebene beschreibt, sowie die Fehler, die Kovarianzmatrix und den Korrelationskoeffizienten von a und b.

(b) Die Messungen in den beiden Driftkammerebenen bei z_1 und z_2 sollen nun verwendet werden, um die Position des Teilchens im nächsten Detektorelement vorherzusagen. Dies sei eine weitere Driftkammerebene parallel zu den ersten beiden bei $z = z_3$. Berechnen Sie also mit Hilfe der in (a) bestimmten Geradengleichung die Position x_3 und ihren Fehler bei $z = z_3$.

(c) Wie ändert sich der Fehler von x_3, wenn Sie fälschlich die Korrelation zwischen a und b nicht berücksichtigen?

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Statistische Methoden der Datenanalyse B
Abgabe: 07.11.2019 23:59

WiSe 19/20
Prof. W. Rhode

Aufgabe 23: *Stichprobenvarianz* **5 P.**

Für alle Berechnungen sind $x_1, \dots, x_n$ die Ausprägungen der quadratisch integrierbaren, paarweise unkorrelierten, reellwertige Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ mit der Varianz σ^2 und dem Mittelwert μ.

(a) Testen Sie, ob die Formel (arithmetisches Mittel)

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \tag{1}$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für den Mittelwert μ der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

(b) Der Standardfehler des arithmetischen Mittels (1) ist definiert als die Wurzel aus der Varianz von $\bar{X}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}\left((\bar{X} - \mu)^2\right) = \mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{2}$$

gilt.
Tipp: Schauen Sie sich Rechenregeln für das Rechnen mit Varianzen an.

(c) Testen Sie, ob die Formel

$$S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \tag{3}$$

eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.

(d) Meist ist die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit unbekannt und es wird der Schätzer (1) für μ genutzt und (3) wird zu:

$$S_1'^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2 . \tag{4}$$

Testen Sie, ob (4) eine erwartungstreue Schätzfunktion für die Varianz σ^2 der Grundgesamtheit ist. Falls die Schätzfunktion nicht erwartungstreu ist, suchen Sie nach einer geeigneten Korrektur.
Tipp: Erweitern Sie den Summanden mit $-\mu+\mu$ und nutzen Sie die gebene Relation (2).

Aufgabe 24: *F-Praktikum* **5 P.**

In einem Praktikumsversuch werden folgende Werte gemessen:

Ψ / °	Asymmetrie	Ψ / °	Asymmetrie	Ψ / °	Asymmetrie
0	−0,032	30	0,010	60	0,057
90	0,068	120	0,076	150	0,080
180	0,031	210	0,005	240	−0,041
270	−0,090	300	−0,088	330	−0,074

Die Asymmetriewerte haben einen Messfehler von ±0,011. Die Theorie sagt, dass die Asymmetrie durch einen Ansatz der Form

$$f(\Psi) = A_0 \cos(\Psi + \delta)$$

beschrieben wird.

(a) Machen Sie zunächst den Ansatz

$$f(\Psi) = a_1 f_1(\Psi) + a_2 f_2(\Psi)$$

mit

$$f_1(\Psi) = \cos(\Psi) \quad \text{und} \quad f_2(\Psi) = \sin(\Psi)$$

und schreiben Sie die Designmatrix $\mathbf{A}$ auf.

(b) Berechnen Sie den Lösungsvektor $\hat{\mathbf{a}}$ für die Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate.

(c) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix $\mathbf{V}[\hat{\mathbf{a}}]$ sowie die Fehler von a_1 und a_2 und den Korrelationskoeffizienten.

(d) Berechnen Sie A_0 und δ und deren Fehler und Korrelation aus a_1 und a_2.