

Sujet n°5

Algorithmique & Programmation

Les arbres

Exercice 1 : Manipulation d'arbres

QUESTION 1. Proposer une structure de données pour représenter un arbre binaire.

QUESTION 2. Écrivez les fonctions élémentaires de manipulations d'arbres suivantes. Vous pouvez modifier les prototype afin de les adapter à des méthodes de classe.

- `node(x, n1, n2)` qui renvoie un nouveau nœud binaire qui contient la valeur `x` et dont le fils gauche est le nœud `n1` et le fils droit est le nœud `n2`.
- `term()` qui renvoie le terminateur d'un arbre.
- `tree(n)` construit un nouvel arbre de nœud racine `n`.
- `empty(a)` qui renvoie `True` si l'arbre `a` est vide et `False` sinon (attention, un arbre `a` toujours un nœud racine mais ce nœud est éventuellement vide).
- `root(a)` qui renvoie le nœud racine de l'arbre.

Remarque : toute ces fonctions sont très courtes.

QUESTION 3. Dessinez l'arbre `a` construit par les instructions suivantes :

```
>>> g = tree(node(1 ,node(0 ,term() , term()) , term()))
>>> d = tree(node(4 ,node(3 ,term() , term()) , node(5, term() ,term()))
>>> a = tree(node(2 ,root(g) ,root(d)))
```

QUESTION 4. Écrivez les fonctions suivantes de manière récursive en n'utilisant que les primitives de la question 2 et les fonctions définies dans les questions précédentes :

- `depth(a)` qui renvoie la profondeur de l'arbre (la longueur du plus long chemin descendant de la racine vers une feuille).
- `nb_node(a)` qui renvoie le nombre de nœuds de l'arbre `a`.
- `sum(a)` qui renvoie la somme de toutes les valeurs contenues dans l'arbre.
- `inc(a)` qui renvoie l'arbre `a` dans lequel toutes les valeurs ont été augmentées de 1.
- `hierarchy(a)` qui vérifie que pour tout nœud de l'arbre, la valeur du nœud est supérieure ou égale à la valeur de chacun de ses fils non vides. La fonction renvoie `True` si cette propriété est vraie et `False` sinon.

Exercice 2 : Arbres binaires de recherche

Le but de cet exercice est d'implémenter *les arbres binaires de recherche*, qui permettent de maintenir des données avec la possibilité de rechercher un élément plus rapidement qu'avec un tableau ou une liste chaînée.

Un *arbre binaire ordonné*, ou *arbre binaire de recherche* est un arbre binaire tel que pour tout nœud `N`, toutes les valeurs du sous-arbre gauche de `N` sont inférieures ou égales à la valeur de `N`, et toutes les valeurs du sous-arbre droit de `N` sont supérieures à la valeur de `N`.

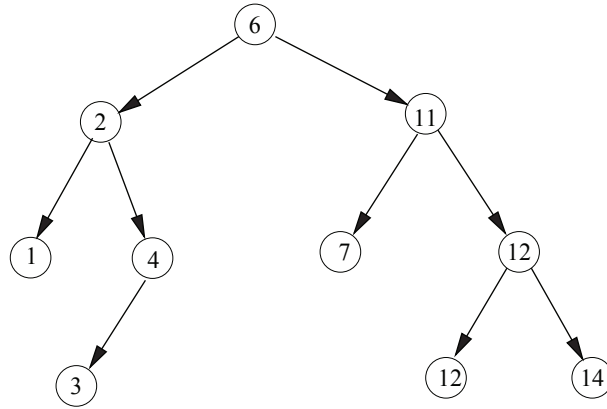


FIGURE 1 – Exemple d'arbre binaire de recherche.

QUESTION 1. Insertion d'éléments :

- Programmer un algorithme récursif d'insertion d'un élément dans un arbre binaire de recherche.
- Programmer un algorithme itératif d'insertion d'un élément dans un arbre binaire de recherche. Quel est la complexité de cet algorithme ?

QUESTION 2. Recherche d'un élément :

- Programmer un algorithme récursif de recherche d'une valeur n dans un arbre binaire de recherche.
- Programmer un algorithme itératif de recherche d'une valeur n dans un arbre binaire de recherche. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

QUESTION 3. Affichage de l'arbre :

- Programmer un algorithme d'affichage des nœud d'un arbre binaire de recherche dans l'ordre croissant.
- Programmer un algorithme d'affichage des nœud d'un arbre binaire de recherche dans l'ordre décroissant.

QUESTION 4. Proposez et programmez un algorithme de tri utilisant un arbre binaire de recherche.

Exercice 3 : Arbres binaires pour représenter des expressions arithmétiques

On considère des arbres qui représentent des expressions arithmétiques. Les valeurs des nœud peuvent donc être soit des nombres, soit les symboles $+$, $-$, $*$ et $/$. L'expression arithmétique $(+ (- 4 2) (* 3 5))$ sera représentée par l'arbre binaire représenté dans la figure 2.

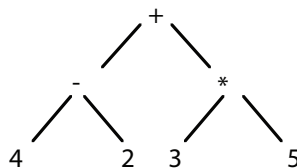


FIGURE 2 – Représentation d'une expression mathématique sous forme d'arbre binaire.

QUESTION 1. Écrire une fonction qui prend un tel arbre et qui renvoie la valeur numérique de l'expression correspondante. On supposera que chaque nœud possède soit 0 fils soit 2 fils.

QUESTION 2. Écrire une fonction qui prend en paramètre une chaîne de caractère représentant une expression mathématique préfixée et qui renvoie la valeur numérique de l'expression correspondante.