Übungsblatt 4

Infektionsdynamiken

Netzwerke und komplexe Systeme

F. Klimm und B.F. Maier

Schülerakademie 5.2 (Roßleben 2016)

Aufgabe 4.1 Ein Netzwerk der Klosterschule Rossleben

Ziel dieser Aufgabe ist es ein Netzwerk der Klosterschule Roßleben zu erstellen. Dabei werden Räume als Knoten dargestellt. Zwei Räume sind über eine Kante verbunden wenn es möglich ist *direkt* von einem in den anderen zu gelangen. Am Ende soll dieses Netzwerk als Adjazenzmatrix auf dem Computer sein, so dass sie in Python geladen werden kann.

Teilaufgabe 4.1.1 Das Problem aufteilen

überlegt, wie ihr das Problem im Kurs aufteilen könnt. Am Ende soll es eine Datei geben, die alle Räume beinhaltet. Erstellt neben der Adjazenzmatrix auch eine zweite Datei, die den Namen der Räume angibt, also zum Beispiel:

Knotennummer	Etage	Raumbeschreibung
1	0	AL Büro
2	1	Plenum

$\vdots$

Teilaufgabe 4.1.2 Gradverteilung

Berechne die Gradverteilung $P(k)$ des Netzwerkes. Stelle die Verteilung als ein Histogramm dar.

Aufgabe 4.2 Krankheitsausbruch in der Akademie

Der 5.3 Kurs experimentiert im Erdgeschoss mit hochansteckenden pathogenen Keimen. Simuliere einen Krankheitsausbruch ausgehend vom Labor. Verwende dazu ein SI-Modell auf dem in Aufgabe 4.1 erstellten Netzwerk.

Teilaufgabe 4.2.1 Vollständige Infektion

Simuliere den Infektionsprozess für verschiedene Infektionsraten $\beta \in [0, 1]$. Nach wie vielen Zeitschritten t_{end} ist jeweils das gesamte Netzwerk infiziert? Erstelle eine Grafik die $t_{\text{end}}(\beta)$ darstellt. Interpretiere das Ergebnis.
Zusatz: Mittle $t_{\text{end}}(\beta)$ über $s = 20$ Simulationen. Wie verändert sich die Kurve?

Teilaufgabe 4.2.2 Gefährdete Kurse

Der Ausbruch beginnt wieder vom Labor des Kurses 5.3. Wir wollen ermitteln, welcher andere Kurs am stärksten gefährdet ist. Simuliere den SI-Prozess für $\beta = 0.01$ und ermittle, zu welchem Zeitpunkt die Räume der anderen Kurse und die AL infiziert wurden.

Welche Kurse/Räume sind am gefährdetsten?

Aufgabe 4.3 *Betweenness* Zentralität

Neben dem Grad k_i eines Knoten i gibt es auch das sogenannte *Betweenness* Zentralitätsmaßg_i. Es gibt an, auf wie vielen kürzesten Wegen zwischen allen Paaren von Knoten ein jeweiliger Knoten i liegt. Genauer ist er definiert als

$$g_i = \sum_{s \neq i \neq t} \frac{\sigma_{st}(i)}{\sigma_{st}}, \tag{1}$$

wobei σ_{st} die Anzahl der kürzesten Pfade zwischen den Knoten s und t ist und $\sigma_{st}(i)$ die Anzahl dieser Pfade, die durch den Knoten i gehen. Beachte, dass man mit dem Befehl `networkx.all_shortest_paths(G,s,t)` alle kürzesten Wege zwischen den Knoten s und t finden kann.

Teilaufgabe 4.3.1 Betweenness Zentralität von bestimmten Graphen

- Skizziere einen Pfadgraph und bestimme $g_i \; \forall \; i \in V$.
- Berechne g_i für den Kreisgraph C_n.
- Welche zwei Graphen auf n Knoten haben $g_i = 0 \; \forall \; i \in V$? Zeige, dass die beiden Graphen nicht isomorph sind wenn $n > 1$.

Teilaufgabe 4.3.2 Betweenness Zentralität des Kompletten Graphen nach Löschung einer Kante

Sei K_n der komplette Graph mit n Knoten und $e = \{u, v\}$ eine Kante. Zeige, dass die Betweenness Zentralität des Graphen $K_n - e$ dann

$$g_i = \begin{cases} \frac{1}{n-2} & \text{wenn } i \in \{u, v\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{2}$$

beträgt.

Teilaufgabe 4.3.3 Betweenness Zentralität zweier verbundener n-Cliquen

Der Graph G besteht aus zwei n-Cliquen die über einen einzelnen Knoten verbunden sind. Bestimme die Betweenness g_i dieses Verbindungsknoten.

Verallgemeinere dies für c n-Cliquen, die über einen zentralen Knoten verbunden sind und finde daher eine Funktion $g_i(c, n)$.

Aufgabe 4.4 Krankheitsausbruch in der Akademie – Impfung

Wir wollen nun untersuchen wie sich die Krankheitsausbreitung in der Akademie verlangsamt wenn wir bestimmte Räume 'impfen', d.h sie aus dem Netzwerk entfernen.

Teilaufgabe 4.4.1 Zufällige Impfung

Zunächst impfen wir zufällige Räume. Impfe zunächst einen zufälligen Raum, und untersuche ob sich die Dauer t_{end} bis zur kompletten Infektion verändert. Wiederhole dies ein paar mal. Verändert sich die Dauer? Interpretiere das Ergebnis.

Teilaufgabe 4.4.2 Zufällige Nachbarschafts-Impfung

Nun wiederholen wir die zufällige Impfung, allerdings nutzen wir unsere Erkenntnisse vom *Freundschafts-Paradoxon*. Wir impfen nicht eine zufälligen Raum sondern den Nachbarraum eines zufälligen Raumes. Nun wiederhole die Messungen von Aufgabe 4.4.1. Ändert sich das Verhalten merklich?

Teilaufgabe 4.4.3 Systematische Untersuchung des Impfverhaltens

Wir wollen das Verhalten des Systems unter Impfungen systematisch untersuchen. Dazu impfen wir nicht einen einzigen Raum sondern iterativ zunächst einen, dann einen zweiten, einen dritten, usw. bis 50 % aller Knoten geimpft sind. Für jeden dieser Impfschritte berechne folgende Größen unter Variation der Infektionsrate $\beta \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1\}$ die Anzahl von Knoten die nach 1000 Schritten Infiziert sind

- Die Anzahl N_1 von Knoten die nach 1 Schritt Infiziert sind
- Die Anzahl N_{10} von Knoten die nach 10 Schritten Infiziert sind
- Die Anzahl N_{100} von Knoten die nach 100 Schritten Infiziert sind
- Die Anzahl N_{1000} von Knoten die nach 1000 Schritten Infiziert sind

Beachte, dass du die Dynamik stoppen kannst wenn alle Knoten infiziert sind. Nutze dazu die Python Befehle `if` und `break`.

Wiederhole diese Messungen unter der Nachbarschafts-Impfung.

Interpretiere deine Ergebnisse, welche Impfstrategie ist effektiver, warum? Unter welchem Bedingungen wird nicht das gesamte Netzwerk infiziert?

Teilaufgabe 4.4.4 Zusatz: Impfung mit *Betweenness* Zentralität

Wiederhole die obigen Messungen unter der Impfstrategie, so dass du die Knoten mit der höchsten *Betweenness* Zentralität g_i impfst. Wie verändert sich das Ausbreitungsverhalten wenn diese gezielte Impfstrategie verwendet wird?