Worksheet 2

Färbung von Graphen

Networks and Complex Systems

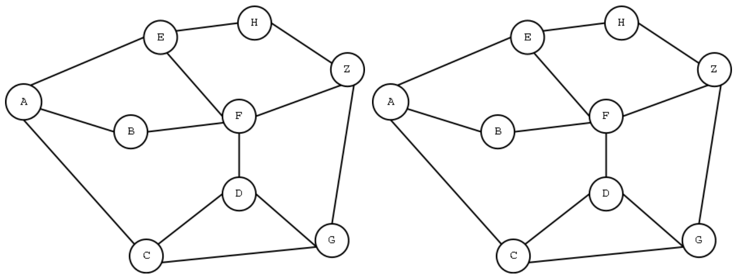
F. Klimm und B.F. Maier

Schülerakademie 5.2 (Roßleben 2016)

Exercise 2.1 Knotenfärbung

Subexercise 2.1.1 Einen Graphen färben

Finde zwei gültige Knotenfärbungen für den abgebildeten Graphen.



Wie viele Farben verwenden diese Färbungen?

Finde eine Färbung, die eine Farbe mehr verwendet als deine erste Färbung.

Was ist die maximal mögliche Anzahl von Farben, die eine Färbung verwenden kann?

Finde die minimal mögliche Anzahl von Farben, die eine gültige Färbung ergibt (also die chromatische Zahl χ).

Subexercise 2.1.2 Chromatische Zahl bestimmter Graphen

Finde die chromatische Zahl χ der folgenden Graphen in Abhänigkeit von der Anzahl n der Knoten:

1. Nullgraph N_n
2. Pfadgraph P_n
3. Kreisgraph C_n
4. Kompletter Graph K_n
5. Kompletter bipartiter Graph $K_{n,n}$

Subexercise 2.1.3 Chromatische Zahl

Gib zwei nichtisomorphe Beispielgraphen mit 5 Knoten und der chromatischen Zahl 3 an.

Subexercise 2.1.4 Zoodirektor

Ein Zoodirektor möchte die folgenden 5 Tiere in möglichst wenigen Gehege unterbringen: Adler, Schlange, Maus, Löwe und Ziege. Finde die minimal nötige Anzahl von Gehegen um diese Tiere unterzubringen wenn die folgenden Tiere nicht im selben Gehege sein dürfen: Adler & Schlange, Schlange & Maus, Löwe & Ziege.

Subexercise 2.1.5 Petersen Graph

In Abbildung 1 siehst du den sogenannten Petersen Graph. Finde dessen chromatische Zahl χ. Skizziere ihn mit einer χ-Färbung.

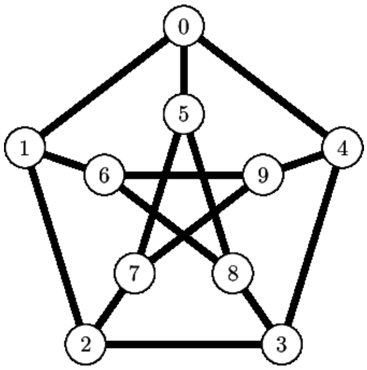


Figure 1: Petersen Graph.

Subexercise 2.1.6 Eine Obergrenze für die chromatische Zahl

Sei G ein Graph aus n Knoten und **nicht** der komplette Graph K_n. Zeige, dass $\chi(G) < n$. *Hinweis: Es kann nützlich sein zuerst folgendes Lemma zu beweisen: Sei $c(V)$ eine zulässige Färbung des Graphen $G = (V, E)$. Dann ist $c(V)$ auch eine zulässige Färbung des Graphen $G' = (V, E')$, wobei $E' \subset E$.*

Subexercise 2.1.7 Graphen gleicher Größe mit unterschiedlichem Chromatischer Zahl

Finde Graphen G und H so dass die Zahl n an Knoten und m der Kanten gleich sind aber $\chi(G) > \chi(H)$.

Exercise 2.2 Graphisomorphismus

Subexercise 2.2.1 Isomorphie von Graphen untersuchen

Welche dieser Graphen sind isomorph? Für jene die isomorph sind konstruiere einen Isomorphismus. Für jene die es nicht sind, finde eine graphentheoretische Größe die sich bei beiden Graphen unterscheidet.

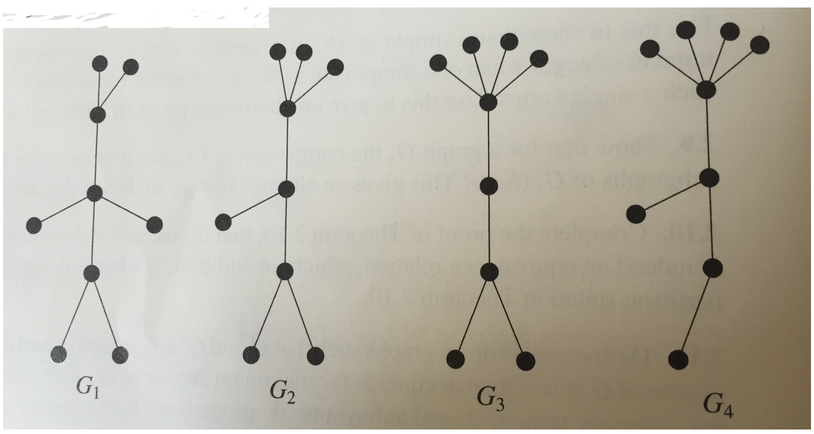


Figure 2: Welche dieser Graphen sind isomorph?

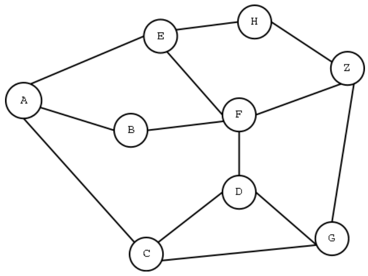
Subexercise 2.2.2 2-reguläre Graphen

Die Menge aller 2-regulären Graphen kann auch als *Vereinigung von Kreisgraphen* beschrieben werden. Finde verschiedene 2-reguläre Graphen mit $n = 10$. Beweise, dass diese Graphen nicht isomorph sind.

Exercise 2.3 Kantenfärbung

Subexercise 2.3.1 Kantenfärbung eines Graphen

Finde eine gültige Kantenfärbung für den abgebildeten Graphen welche Δ Farben verwendet, wobei Δ sein maximaler Grad ist. Wie ist der chromatische Index dieses Graphen?



Subexercise 2.3.2 Kantenfärbung bestimmter Graphen

Bestimme den chromatischen Index χ' der folgenden Graphen in Abhänigkeit von der Anzahl n der Knoten:

1. Pfadgraph P_n
2. Kreisgraph C_n
3. Kompletter Graph K_n (schwierig, eventuell auslassen)

Vergleiche für diese Graphen den chromatischen Index χ mit dem maximalen Grad Δ.

Exercise 2.4 Gierige Färbung Programmieren

Wir wollen den gierigen Färbung-Algorithmus programmieren und auf verschiedene Netzwerke anwenden.

Subexercise 2.4.1 Gierige Färbung

Erstelle eine Funktion die als Input eine Adjazenzmatrix und eine Reihenfolge aller Knoten hat und die Knoten des Graphen *gierig* färbt.

Subexercise 2.4.2 Gierige Färbung von bestimmten Graphen

Wende den gierigen Algorithmus auf die Graphen von Teilaufgabe 2.1.2 an wenn $n = 10$. Verwende verschiedene zufällige Reihenfolgen der Knoten. Vergleiche deine analytischen Ergebnisse für die chromatische Zahl mit der Anzahl von verwendeten Farben der gierigen Färbung.

Subexercise 2.4.3 Zeitkomplexität des gierigen Färbe-Algorithmus

Wir wollen den gierigen Algorithmus auf zufällige Graphen der Größe n anwenden. Um sicher die chromatische Zahl eines jeden Graphen zu bestimmen müssen wir alle möglichen Knotenreihenfolgen verwenden.
Wieviel Knotenreihenfolgen gibt es in Abhänigkeit von n? überprüfe die Zeitkomplexität des gierigen Algorithmus numerisch.

Exercise 2.5 Käfighaltung von Tieren

Lade das Netzwerk mit dem Namen `everglades_adjazenz.txt`. Es handelt sich um eine Nahrungskette von Tieren im Everglades Nationalpark in Florida. Die

Tiere sind verbunden wenn sie in einer Räuber-Beute Beziehung stehen. Ein Zoo möchte diese 63 Tiere halten. Es sollen so wenig wie möglich Käfige verwendet werden wobei Tiere nicht im selber Käfig sein dürfen wenn eines des andere potentiell isst. In der Datei `everglades_namen.txt` sind die Namen der Tiere angegeben.

Formuliere das Problem graphentheoretisch und löse es numerisch. Wende dazu den gierigen Färbe-Algorithmus auf zufällige Reihenfolgen der Knoten an.

Exercise 2.6 Chromatisches Polynom

Recherchiere das Chromatische Polynom und was ein Baum ist. Beweise, dass das chromatische Polynom des Nullgraphen $\chi_{N_n}(t) = t$, des kompletten Graphen $\chi_{K_n}(t) = t^n$ und eines Baums

$$\chi_{G(t)} = t(t-1)^{n-1} \tag{1}$$

beträgt.