Übungsblatt 5

Dynamische Systeme

Netzwerke und komplexe Systeme

F. Klimm und B.F. Maier

Schülerakademie 5.2 (Roßleben 2016)

Aufgabe 5.1 Populationsdynamik in diskreter Zeit

In dem Vortrag am Vormittag haben wir die Populationsdynamik von Verhulst diskutiert, deren Abbildungsgleichung lautet

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \,. \tag{1}$$

1. Wenn $x \in [0,1]$ gelten soll, wie ist dann die Beschränkung des Wachstumsparameters λ?
2. Was sind die Fixpunkte x^* der Dynamik?
3. Wie ist die Stabilität des kleineren der zwei Fixpunkte für $\lambda < 1$? Wie ist sie für $\lambda > 1$? Um das zu überprüfen, setze Werte $x^* + \epsilon$ ein (mit $\epsilon \ll 1$). Der Wert ϵ ist eine so genannte *Störung*. Um die Stabilität des Fixpunktes zu ermitteln, untersuche, wie sich die Abbildung verhält für eine kleine Störung (z.B. $\epsilon = 0.01$).

Aufgabe 5.2 Dynamische Systeme in kontinuierlicher Zeit

Dynamische Systeme in kontinuierlicher Zeit sind bestimmt durch

$$\dot{x} = f(x) \,, \tag{2}$$

wobei die Funktion f eine Abbildung $f : X \to X$ ist. In diesen Systemen sind Fixpunkte x^* gegeben durch

$$f(x^*) = \dot{x}|_{x=x^*} = 0 \,. \tag{3}$$

Teilaufgabe 5.2.1

Betrachte das dynamische System

$$\dot{x} = x^2 - 1 \,. \tag{4}$$

1. Bestimme die Fixpunkte.
2. Bestimme die Stabilität der Fixpunkte mit der Vektorfeldmethode.

Teilaufgabe 5.2.2

Bestimme die Fixpunkte und die Stabilität der dynamischen Systeme

1. $\dot{x} = -x^3$
2. $\dot{x} = x^3$
3. $\dot{x} = x^2$
4. $\dot{x} = x$
5. $\dot{x} = 0$
6. $\dot{x} = x - x^3$

Teilaufgabe 5.2.3 Bifurkation

Betrachte das dynamische System

$$\dot{x} = x^2 - a\,. \tag{5}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Bestimme die Fixpunkte und ihre Stabilität. Wieviele Fixpunkte gibt es für verschiedene Werte von a?

Teilaufgabe 5.2.4 Newton-Reibung

Die Reibungskraft der Luft auf fallende Gegenstände (auf der Erde, mit Fallbeschleunigung g) kann beschrieben werden durch $F(v) = \beta v^2$, wobei β eine Reibungskonstante ist und v die Geschwindigkeit der zu betrachtenden Masse m. Die Kraft wirkt in positive z-Richtung, also dem Fallen entgegen. Die Zeitentwicklung der Geschwindigkeit ist dann gegeben als

$$m\dot{v} = -mg + \beta v^2\,. \tag{6}$$

Was ist der Fixpunkt v^*? Ist er stabil? Wie ist der Fixpunkt physikalisch zu interpretieren? Warum ist das Ergebnis der Stabilitätsanalyse intuitiv?

Die allgemeine Form dieser Zeitentwicklung von v ist

$$m\dot{v} = -mg - \mathrm{sgn}(v)\beta v^2 \tag{7}$$

mit der Vorzeichenfunktion

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}\,. \tag{8}$$

Das heißt, die Reibung wirkt der Bewegung immer entgegen. Bestimme nun das Gleichgewicht v^* für $g = 0$. Ist der Fixpunkt stabil? Überlege dir eine physikalische Situation des Systems mit $g = 0$. Ergibt die Stabilitätsanalyse ein sinnvolles Ergebnis?

Aufgabe 5.3 Lineare Stabilität

Teilaufgabe 5.3.1

Betrachte das System

$$\dot{x} = \lambda x \tag{9}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Welches natürliche System ist durch diese Gleichung beschrieben?

Löse die Gleichung mit der Methode der Trennung der Variablen (verwende dazu deine Aufzeichnungen von der Krankheitsausbreitung). Hat das System einen Fixpunkt? Falls ja, für welche Werte von λ?

Teilaufgabe 5.3.2

Betrachte eine beliebige, differenzierbare Funktion $f(x)$. Zeige, dass die Funktion an einer beliebigen Stelle x_0 linear approximiert werden kann als

$$f(x) \approx f(x_0) + m(x - x_0)\,. \tag{10}$$

Zeige, dass die Steigung m bestimmt werden kann als $m = f'(x_0)$ mit der ersten Ableitung $f'(x)$.

Teilaufgabe 5.3.3

Zeige ohne grafische Methoden, dass für das dynamische System

$$\dot{x} = x - x^3 \tag{11}$$

die Stellen $x_1^* = -1$ und $x_3^* = 1$ linear stabil sind.

Aufgabe 5.4 Eigenwerte und Eigenvektoren

Teilaufgabe 5.4.1

Betrachte die Matrix

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Was sind die Eigenwerte? Wie lauten die Eigenvektoren $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$?