Übungsblatt 3

Matrixrechnereien und effektiver Widerstand

Netzwerke und komplexe Systeme

F. Klimm und B.F. Maier

Schülerakademie 5.2 (Roßleben 2016)

Aufgabe 3.1 Matrixmultiplikation

Gegeben sei die Reproduktionsmatrix eines Systems aus Schafen, Wölfen und Graseinheiten

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & -0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \\ -0.1 & 0 & 1.1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

die beschreibt, wie sich die momentanen Populationszahlen in einem Monat entwickeln werden.

Teilaufgabe 3.1.1 Populationsentwicklung

Die momentane Population sei

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Was ist die Population in einem Monat?

Teilaufgabe 3.1.2 Matrixinversion

Einführung) Manche quadratische Matrizen $\hat{A}$ haben eine sogenannte *Inverse* $\hat{A}^{-1}$. Die inverse Matrix erfüllt

$$\hat{A} \cdot \hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1} \cdot \hat{A} = \mathbb{1}, \tag{3}$$

mit der Identitätsmatrix

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Zeige, dass zweidimensionale Matrizen

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{5}$$

die Inverse

$$\hat{A} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{6}$$

haben. Sei nun die Reproduktionsmatrix in einem Schaf-Wolf-System

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

und die momentane Population ist

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 97 \\ 37 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Wie war die Population vor einem Monat?

Aufgabe) Betrachte die Reproduktionsmatrix $\hat{P}$. Die momentane Populationszahl ist

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 37 \\ 49 \\ 18 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Wie war die Population vor einem Monat?

Teilaufgabe 3.1.3 Eigenpopulationen

Betrachte die Reproduktionsmatrix

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Wie ist die Population nach einem Monat, wenn sie ursprünglich die Population aus Gleichung 2 war. Ist $\vec{x}_0$ ein Eigenvektor von $\hat{Q}$? Falls ja, welchen Eigenwert hat dann die Matrix $\hat{Q}$ für diesen Vektor?

Betrachte die zweidimensionale Matrix

$$\hat{Q}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

und eine Anfangspopulation von 10 Schafen und 10 Wölfen. Wie ist die die Population nach einem Monat? Wie ist der Eigenwert der Matrix zu dieser Population? Was bedeutet das für die inverse Matrix $\hat{Q}_2^{-1}$?

Teilaufgabe 3.1.4 Inverse eine singulären Matrix

Beweise folgenden Satz.

Sei $\hat{A}$ eine quadratische Matrix mit Eigenwert 0 wobei keiner der zugehörigen Eigenvektoren $\vec{e}_i$ der Nullvektor ist. Dann ist diese Matrix nicht invertierbar. Man sagt, sie ist "singulär."

Aufgabe 3.2 Effektiver Widerstand

Teilaufgabe 3.2.1 Ausrechnen

Betrachte Figur 1. Was ist der effektive Widerstand des Netzwerkes zwischen Knoten s und t?

Teilaufgabe 3.2.2 Allgemeine Netzwerke von Widerständen R_0

Schreibe eine Funktion, die als Eingabewerte die Adjazenzmatrix $\hat{A}$, den Einspeiseknoten s und den Ausgangsknoten t bekommt und als Ausgabe den effektiven Widerstand des Netzwerkes berechnet.

Untersuche die Beziehung des effektiven Widerstandes zwischen beliebigen Knoten eines zufälligen Netzwerkes mit Knotenzahl n und Verbindungswahrscheinlichkeit p zu eben diesen Parametern.

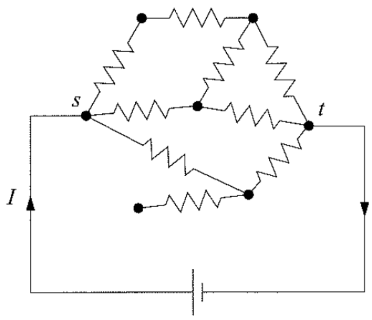

Figure 1: Ein Widerstandsnetzwerk. Im Schaltkreis fließt der Strom I und alle Widerstände haben den Wert R_0.

Abbildung aus "Networks – An Introdution", M. Newman, Oxford University Press, 2010, S. 162.

Aufgabe 3.3 Zusatz) Perkolation von zufälligen Netzwerken

Recherchiere, wie du die Komponenten eines Netzwerkes findest. Schreibe eine Funktion, die das für beliebige Netzwerke tut.

Generiere zufällige Netzwerke für variierende Knotenzahlen n und Verbindungswahrscheinlichkeiten p und finde den normierten Anteil S der größten Komponente, wobei gilt $S = |V_g|/n$ mit der Zahl der Knoten $|V_g|$ in der größten Komponente der Netzwerke (Komponente mit Knoten- und Kantenmenge (V_g, E_g)).

Untersuche, wie sich S mit steigendem p für konstante n verhält. Wie ist die kritische Wahrscheinlichkeit p_c für die Existenz einer großen Komponente? (Plus Aufgabe von vorher: Wie ist der mittlere Grad?).

Erhöhe die Knotenzahl. Wie verhält sich p_c? Kannst du eine Formel für p_c in Abhängigkeit von n und p finden?

Wie interpretierst du diese?