

Что почитать про VaR.

Игорь Вексин, PhD

30 сентября 2022 г.

1 Начальный минимум.

Предполагается, что большая часть студентов знакома с основами теории вероятностей и эконометрики. Далее перечислен самый минимум, без которого не будет понятно ничего остального.

Теория вероятностей: функция распределения случайной величины, математическое ожидание, дисперсия, ковариация, функции от случайных величин, нормальное распределение, распределение Стюдента, тестирование гипотез. Эконометрика: временные ряды, модель ARMA, модель GARCH.

2 Меры риска.

Value-at-Risk - это квантиль доходности финансового портфеля. Например, VaR 1% означает, что доходность ниже этой величины ожидается только в 1% случаев.

Expected Shortfall - это условное матожидание доходности в худших $\alpha\%$ случаях. ES 1% означает, что в худших 1% случаях доходность портфеля в среднем составит эту величину.

ES иногда называется Conditional VaR.

Самой известной книгой про Value-at-Risk является Jorion (2000), но для двух недель она слишком большая.

VaR и ES сначала использовали из интуитивных соображений. Научное определение мерам риска дали Artzner u. a. (1999): в их концепции мера риска - это количество денег которое нужно добавить к портфелю активов (и обязательств), чтобы инвестировать в этот портфель считалось приемлемым (например, чтобы активов хватило расплатиться по обязательствам). **Когерентные меры риска** удовлетворяют следующим четырём свойствам.

- Инвариантность: добавление денег уменьшает риск на добавленную величину.
- Субаддитивность: риск двух портфелей - не больше риска каждого портфеля по отдельности.

- Позитивная однородность: риск пропорционален размеру портфеля.
- Монотонность: если во всех случаях доходность одного портфеля выше доходности другого портфеля, то он менее рискованный.

ES - когерентная мера риска, а VaR - нет (не является субаддитивным).

3 Оценка VaR

Abad и. а. (2014) сделали достаточно большой обзор разных методов оценки VaR.

В большинстве моделей предполагается что доходность r_t имеет распределение (например, Нормальное) с нулевым средним и некоторой (меняющейся каждый день) дисперсией. $r_t \sim N(0, \sigma^2)$ Тогда распределение можно нормализовать, и оценивать дисперсию отдельно от формы распределения. $r_t = \sigma_t \epsilon_t$, где ϵ имеет нулевое среднее и единичную дисперсию.

3.1 Модели волатильности

Простыми моделями для дисперсии являются ARCH и GARCH (Engle (1982), Bollerslev (1986)). В **GARCH** текущая волатильность линейно зависит от предыдущей предсказанной волатильности и предыдущей реализованной волатильностью.

$$\sigma_t^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \beta_2 r_{t-1}^2$$

Очень похожая модель, но намного проще, предложена в большом JPMorganовском документе **RiskMetrics** Longestaey und Spencer (1996). В ней параметр λ не оценивается, а постулируется равным 0.94.

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$$

Для своей простоты - это хорошая модель, но обычно она используется чтобы продемонстрировать что другая модель лучше.

Если есть внутридневные данные, то для каждого дня можно посчитать внутридневную **реализованную волатильность**. Простым, но эффективным методом является использование двух шкал Zhang и. а. (2005). Допустим $r_{t:t+1}$ доходность актива за период с t по $t+1$. Пусть l - большая шкала, например 30 минут, состоящая из меньших интервалов $k = 1, 2, 3, \dots$ минут.

$$RV = \frac{1}{K} \sum_k \sum_t r_{(lt+k):(l(t+1)+k)}^2$$

Одна из известных моделей, использующих посчитанные реализованные волатильности это **HAR**-модель Corsi (2009). В ней волатильность равна линейной комбинации волатильностей за прошедший день, неделю и месяц.

$$\sigma_{t:(t+1)}^2 = \beta_0 + \beta_1 \sigma_{(t-1):t}^2 + \beta_2 \sigma_{(t-5):t}^2 + \beta_3 \sigma_{(t-22):t}^2$$

Следует отметить модель **CAViaR** Engle und Manganelli (2004), в которой волатильность не оценивается, а сразу оценивается VaR с помощью квантильной регрессии.

3.2 Зависимость доходностей разных активов

Для оценки риска портфеля, состоящего из нескольких активов необходимо принять во внимание зависимость между доходностями разных активов.

Один из методов - расширить модели волатильности, и вместо одномерной дисперсии оценивать сразу **ковариационную матрицу**. Вот, например, обзор разных расширений GARCH для многомерных случаев: Bauwens и. а. (2006). Вообще во всех моделях выше можно заменить дисперсию на ковариационную матрицу.

Другой вариант - использовать копулы. **Копула** - это многомерная функция распределения квантилей. Таким образом отдельно моделируется распределение квантилей всех активов и предельное одномерное распределение доходности каждого актива. В отличие от ковариационной матрицы, копулы позволяют моделировать повышение зависимости в нижнем хвосте распределения (условно говоря, растут все акции по разному, а падают одинаково). В статье Oh und Patton (2016) копулы используются для моделирования VaR.

3.3 Распределение остатков

Распределение доходности активов имеет "толстые хвосты" (вероятность экстремальных значений высока, во всяком случае выше чем предсказывается Нормальным распределением) и положительную скошенность (растут акции чаще, но понемногу, а падают редко, но сильно).

Эти свойства имеет скошенная версия распределения Стюдента (**Skewed t-distribution**), предложенная в McDonald und Newey (1988). Обычно её и используют.

Можно использовать распределения с большим числом параметров, такое как Обобщенное Гиперболическое распределение, как например, в Bauer (2000).

При этом считается, что чем точнее модель, тем больше её остатки схожи с независимым Нормальным распределением.

Если в качестве распределения остатков берутся эмпирические остатки модели, то такой метод называется полупараметрическим (**semiparametric**).

3.4 Непараметрические методы

В непараметрических методах вместо моделирования распределения используется **эмпирическая функция распределения**. Самый простой метод использован в Hendricks (1996), здесь оценкой $\text{VaR}-\alpha\%$ является $\alpha\%$ квантиль эмпирического распределения. Например, при выборке 1000 наблюдений 5%-ый VaR - это 51ое худшее наблюдение.

Различные методы исторических симуляций для оценки VaR сравниваются в Rjiba и. а. (2015).

4 Сравнение моделей

Очевидный метод валидации модели - предсказать с её помощью VaR на каждый день за пределами обучающей выборки, и проверить, сколько раз доходность была хуже чем VaR, как в Kupiec и. а. (1995). VaR $\alpha\%$ должен не ошибаться статистически чаще чем в $\alpha\%$ случаев. Также можно проверить сколько раз "пробития" были повторными Christoffersen (1998), если пробития независимы, то не статистически чаще чем в $(\alpha\%)^2$ случаев. Это называется **Coverage Test** и Conditional Coverage Test соответственно.

Если нужно сравнить две модели предсказывающие VaR, то для каждого дня можно посчитать функцию ошибки, зависящую от предсказанного VaR и реализованной доходности.

$$L_t = L(VaR_t, r_t)$$

Первоначально функции ошибки (**loss function** или **scoring function**) подбирались интуитивно, пока Gneiting (2011) не разработал теорию, в которой матожидание функции ошибки должно достигать минимума если VaR оценён правильно. Для VaR $\alpha\%$ функция ошибки должна с точностью до монотонности быть равна:

$$L = (I_{r_t < VaR_t} - \alpha\%)(VaR_t - r_t)$$

Также было показано что для ES такой функции нету. Получив значения функции ошибки сравнивается в какой из двух моделей ошибка статистически меньше с помощью **DM**-теста Diebold und Mariano (2002).

Список литературы

- [Abad u. a. 2014] ABAD, Pilar ; BENITO, Sonia ; LÓPEZ, Carmen: A comprehensive review of Value at Risk methodologies. In: *The Spanish Review of Financial Economics* 12 (2014), Nr. 1, S. 15–32
- [Artzner u. a. 1999] ARTZNER, Philippe ; DELBAEN, Freddy ; EBER, Jean-Marc ; HEATH, David: Coherent measures of risk. In: *Mathematical finance* 9 (1999), Nr. 3, S. 203–228
- [Bauer 2000] BAUER, Christian: Value at risk using hyperbolic distributions. In: *Journal of Economics and Business* 52 (2000), Nr. 5, S. 455–467
- [Bauwens u. a. 2006] BAUWENS, Luc ; LAURENT, Sébastien ; ROMBOUTS, Jeroen V.: Multivariate GARCH models: a survey. In: *Journal of applied econometrics* 21 (2006), Nr. 1, S. 79–109
- [Bollerslev 1986] BOLLERSLEV, Tim: Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. In: *Journal of econometrics* 31 (1986), Nr. 3, S. 307–327
- [Christoffersen 1998] CHRISTOFFERSEN, Peter F.: Evaluating interval forecasts. In: *International economic review* (1998), S. 841–862

- [Corsi 2009] CORSI, Fulvio: A simple approximate long-memory model of realized volatility. In: *Journal of Financial Econometrics* 7 (2009), Nr. 2, S. 174–196
- [Diebold und Mariano 2002] DIEBOLD, Francis X. ; MARIANO, Robert S.: Comparing predictive accuracy. In: *Journal of Business & economic statistics* 20 (2002), Nr. 1, S. 134–144
- [Engle 1982] ENGLE, Robert F.: Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. In: *Econometrica: Journal of the econometric society* (1982), S. 987–1007
- [Engle und Manganelli 2004] ENGLE, Robert F. ; MANGANELLI, Simone: CAViaR: Conditional autoregressive value at risk by regression quantiles. In: *Journal of business & economic statistics* 22 (2004), Nr. 4, S. 367–381
- [Gneiting 2011] GNEITING, Tilmann: Making and evaluating point forecasts. In: *Journal of the American Statistical Association* 106 (2011), Nr. 494, S. 746–762
- [Hendricks 1996] HENDRICKS, Darryll: Evaluation of value-at-risk models using historical data. In: *Economic policy review* 2 (1996), Nr. 1
- [Jorion 2000] JORION, Philippe: Value at risk. (2000)
- [Kupiec u. a. 1995] KUPIEC, Paul H. u. a.: *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models*. Division of Research and Statistics, Division of Monetary Affairs, Federal . . . , 1995
- [Longerstaey und Spencer 1996] LONGERSTAHEY, Jacques ; SPENCER, Martin: Riskmetricstm—technical document. In: *Morgan Guaranty Trust Company of New York: New York* 51 (1996), S. 54
- [McDonald und Newey 1988] McDONALD, James B. ; NEWHEY, Whitney K.: Partially adaptive estimation of regression models via the generalized t distribution. In: *Econometric theory* 4 (1988), Nr. 3, S. 428–457
- [Oh und Patton 2016] OH, Dong H. ; PATTON, Andrew J.: High-dimensional copula-based distributions with mixed frequency data. In: *Journal of Econometrics* 193 (2016), Nr. 2, S. 349–366
- [Rjiba u. a. 2015] RJIBA, Meriem ; TSAGRIS, Michail ; MHALLA, Hedi u. a.: Bootstrap for Value at Risk Prediction. In: *International Journal of Empirical Finance* 4 (2015), Nr. 6, S. 362–371
- [Zhang u. a. 2005] ZHANG, Lan ; MYKLAND, Per A. ; AÏT-SAHALIA, Yacine: A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data. In: *Journal of the American Statistical Association* 100 (2005), Nr. 472, S. 1394–1411