Florine TEULIERES-QUILLET
ENSMA
A3-IA

TP 1 - Données Intelligentes

Problème

Une entreprise pharmaceutique fabrique deux produits A et B. Ces produits utilisent 3 molécules différentes, qu'on note ici H, P, et M.
Les quantités de matières premières nécessaires par boite sont indiquées dans la table suivante:

Produit	H(g)	P(g)	M(g)	Bénéfices (€)
A	2.5	0.125	17.5	6.5
B	7.5	0.125	10	11.5
Disponibilité	2404	51	5950	

Résolution

Modélisation du problème

Optimiser les bénéfices de l'entreprise revient à vendre le plus de produits dans la limite des stocks de composants disponibles. Il faut donc maximiser le résultat donné par : $A vendus * 6.5 + B vendus * 11.5$ en restant dans la limite des stocks.

En remplaçant $A vendus$ par x et $B\ vendus$ par y , on peut donc écrire le problème sous la forme suivante :

$$\mathbf{Max\ 6.5x + 11.5y}$$
$$\mathbf{2.5x + 7.5y \leq 2404}$$

$$0.125x + 0.125y \leq 51$$

$$17.5x + 10y \leq 5950$$

$$x , y \geq 0$$

Description du plan de production optimal

Afin de déterminer le plan de production optimal, nous allons résoudre le problème, en spécifiant x et y entiers, via l'utilisation de l'outil CPLEX.

```
/*********************************************
 * OPL 22.1.1.0 Model
 * Author: teulierf
 * Creation Date: 26 janv. 2024 at 11:12:16
 *********************************************/
dvar int x;
dvar int y;

maximize
  6.5*x + 11.5*y;
subject to {
  2.5*x + 7.5*y <= 2404;
  0.125*x + 0.125*y <= 51;
  17.5*x + 10*y <= 5950;
}
```

```
// solution (optimal) with objective 4032
// Quality Incumbent solution:
// MILP objective                                4,0320000000e+03
// MILP solution norm |x| (Total, Max)           4,08000e+02  2,76000e+02
// MILP solution error (Ax=b) (Total, Max)       0,00000e+00  0,00000e+00
// MILP x bound error (Total, Max)               0,00000e+00  0,00000e+00
// MILP x integrality error (Total, Max)         0,00000e+00  0,00000e+00
// MILP slack bound error (Total, Max)           0,00000e+00  0,00000e+00
//

x = 132;
y = 276;
```

Cette résolution indique donc qu'il faudra vendre 132 produits A et 276 produits B pour maximiser les bénéfices. La solution optimale vaudra dans ce cas : 4032.

Plan Optimal pour x, y réels

On réalise donc la même manipulation mais spécifiant cette fois que x et y sont réels et non entiers.

P1.mod   TP.mod

```
/*********************************************
 * OPL 22.1.1.0 Model
 * Author: teulierf
 * Creation Date: 26 janv. 2024 at 11:12:16
 *********************************************/
dvar float x;
dvar float y;

maximize
  6.5*x + 11.5*y;
subject to {
  2.5*x + 7.5*y <= 2404;
  0.125*x + 0.125*y <= 51;
  17.5*x + 10*y <= 5950;
}
```

```
// solution (optimal) with objective 4036
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Max. unscaled (scaled) Ax-b resid.          = 4,54747e-13 (5,68434e-14)
// Max. unscaled (scaled) c-B'pi resid.        = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) |x|                  = 276,8 (276,8)
// Max. unscaled (scaled) |slack|              = 886 (55,375)
// Max. unscaled (scaled) |pi|                 = 32 (8)
// Max. unscaled (scaled) |red-cost|           = 0 (0)
// Condition number of scaled basis            = 5,5e+00
//

x = 131.2;
y = 276.8;
```

Dans ce cas là, il faudra vendre 131,2 produits A et 276,8 produits B, la solution optimale vaudra alors : Z = 4036.

L'écart entre ces deux solutions vaut (4036−4032)/4032 ≤ 0.1%. L'écart est suffisamment faible, on peut donc le considérer négligeable. Ainsi, comme il est souvent plus aisé de trouver une solution optimale de réels qu'une solution optimale d'entiers, nous pouvons par la suite ne travailler qu'avec les réels.

Coûts marginaux pour chacunes des ressources

Afin de calculer la valeurs des coûts marginaux de chaques contraintes, nous allons transformer ce problème primal en problème dual:

Min 2404*y1 + 52*y2 + 5950*y3
2.5*y1 + 0.125*y2 + 17.5*y3 >= 6.5

7.5*y1 + 0.125*y2 + 10*y3 >= 11.5

y1 , y2, y3 ≥ 0

Il ne reste plus qu'à entrer ce problème dans l'IDE CPLEX pour trouver la solution:

```
/*********************************************
 * OPL 22.1.1.0 Model
 * Author: teulierf
 * Creation Date: 26 janv. 2024 at 11:45:23
 *********************************************/
dvar float y1;
dvar float y2;
dvar float y3;

minimize
  2404*y1 + 51*y2 + 5950*y3;
subject to {
  2.5*y1 + 0.125*y2 + 17.5*y3 >= 6.5;
  7.5*y1 + 0.125*y2 + 10*y3 >= 11.5;
  y1>=0;
  y2>=0;
  y3>=0;
}
```

```
// solution (optimal) with objective 4036
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Max. unscaled (scaled) Ax-b resid.          = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) c-B'pi resid.        = 4,54747e-13 (4,54747e-13)
// Max. unscaled (scaled) |x|                  = 32 (32)
// Max. unscaled (scaled) |slack|              = 32 (32)
// Max. unscaled (scaled) |pi|                 = 886 (2214,4)
// Max. unscaled (scaled) |red-cost|           = 0 (0)
// Condition number of scaled basis            = 7,7e+02
//

y1 = 1;
y2 = 32;
y3 = 0;
```

Une autre façon de trouver les coûts marginaux était d'utiliser le mode interactif de CPLEX, un fois le problème entré il suffit d'entrer la commande " display sensitivity rh -" pour afficher les coûts:

```
CPLEX> disp sens rh -
                                                   RHS Sensitivity Ranges
Constraint Name      Dual Price           Down         Current              Up
c1                       1.0000      1813.3333       2404.0000       3060.0000
c2                      32.0000        40.0667         51.0000         56.2118
c3                         zero      5064.0000       5950.0000       +infinity
CPLEX>
```

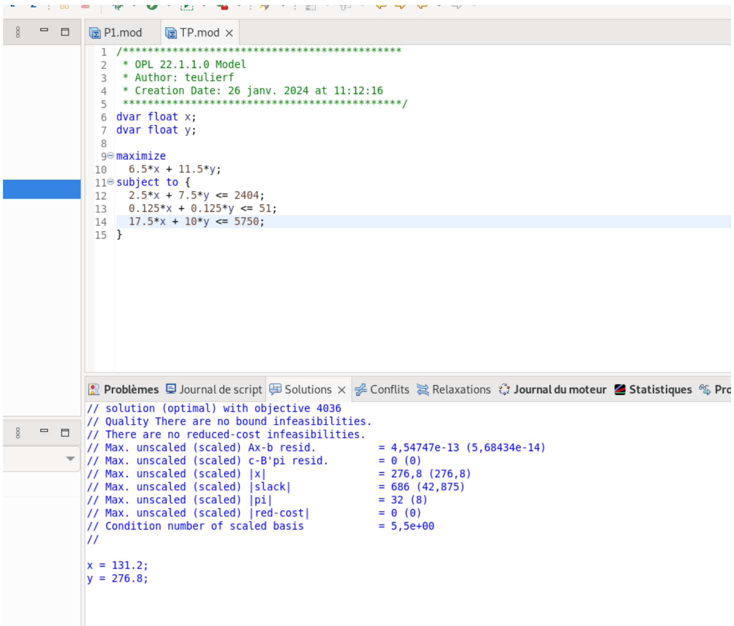
Suivant les deux méthodes, nous trouvons le mêmes résultat : Les coûts marginaux sont de 1 pour H, 32 pour P et 0 pour M. C'est donc logique d'avoir un prix marginal nul pour M. En effet, la ressource est disponible en grande quantité. Il n'est donc pas nécessaire de s'en préoccuper plus pour optimiser les bénéfices.

Détermination des ressources critiques

On vient de voir qu'il faudrait payer pour acheter plus de H et de P pour avoir un bénéfice totalement optimal des ventes. Les ressources critiques sont donc P et H. De plus, c'est P qui a le coût marginal le plus élevé, elle est donc la plus critique entre H et P.

Impact sur les bénéfices si le stock de M vaut 5750g

Pour déterminer cet impact, on résout le problème en changeant la contrainte sur M (on met ≤ 5750 plutôt que ≤ 5950 dans l'inégalité correspondante).



La solution optimale vaut alors : 4036. On trouve aussi exactement les mêmes valeurs de produits à vendre pour A et B. Diminuer les stocks de M de 200g n'a donc aucun impact sur les bénéfices ce qui est logique puisqu'on vient de voir que M n'est pas une ressource critique par rapport à H et P.

Etude sensibilité des deux coefficients de l'objectif et des trois coefficients des seconds membres des contraintes

Pour étudier ces sensibilités, on utilise le CPLEX en mode interactif et on entre la commande: "Display sensitivity objective -". On peut ainsi observer les intervalles de valeur des paramètres de la fonction objective pour lesquels les valeurs de x et y ne changeront pas:

```
Display which sensitivity analysis: obj
Display objective sensitivity for which variable(s): -
                                                OBJ Sensitivity Ranges
Variable Name       Reduced Cost            Down          Current            Up
x                           zero          3.8333           6.5000       11.5000
y                           zero          6.5000          11.5000       19.5000
CPLEX>
```

Puis avec la commande: "Display sensitivity rhs -". On peut ainsi observer les intervalles de valeur des paramètres des contraintes pour lesquels les valeurs de x et y ne changeront pas:

```
CPLEX> disp sens rhs
Display RHS sensitivity for which constraint(s): -
                                                RHS Sensitivity Ranges
Constraint Name        Dual Price            Down          Current            Up
c1                         1.0000       1813.3333        2404.0000     3060.0000
c2                        32.0000         40.0667          51.0000       56.2118
c3                           zero       5064.0000        5950.0000     +infinity
CPLEX>
```

On peut en déduire que la sensibilité des 3 coefficients des seconds membres des contraintes valide le résultat précédent sur M. En effet, M peut varier entre 5064 et +infini sans avoir d'impact. On remarque que c'est sur P que l'écart de variation est le plus faible. Ainsi, même une faible variation aura sûrement un impact notable.
La sensibilité des deux coefficients objectif montre des zones de variations faibles mais du même ordre de grandeur pour les deux coefficients.

Pour quelle molécule il serait interressant d'avoir +1g supplémentaire

On a déjà vu précédemment qu'augmenter le stock de M n'aurait aucun impact. On peut donc déjà en déduire qu'il serait plus utile d'avoir +1g de stock pour H ou P. Pour déterminer pour laquelle des deux molécule (P ou H) ce serait le plus utile nous allons 2 plans de productions optimal, un avec +1 pour H et un avec +1 pour P:

+1g pour H

```
/*********************************************
 * OPL 22.1.1.0 Model
 * Author: teulierf
 * Creation Date: 26 janv. 2024 at 11:12:16
 *********************************************/
dvar float x;
dvar float y;

maximize
  6.5*x + 11.5*y;
subject to {
  2.5*x + 7.5*y <= 2405;
  0.125*x + 0.125*y <= 51;
  17.5*x + 10*y <= 5950;
}
```

```
// solution (optimal) with objective 4037
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Max. unscaled (scaled) Ax-b resid.          = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) c-B'pi resid.        = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) |x|                  = 277 (277)
// Max. unscaled (scaled) |slack|              = 887,5 (55,4688)
// Max. unscaled (scaled) |pi|                 = 32 (8)
// Max. unscaled (scaled) |red-cost|           = 0 (0)
// Condition number of scaled basis            = 5,5e+00
//

x = 131;
y = 277;
```

+1g pour P

```
/*********************************************
 * OPL 22.1.1.0 Model
 * Author: teulierf
 * Creation Date: 26 janv. 2024 at 11:12:16
 *********************************************/
dvar float x;
dvar float y;

maximize
  6.5*x + 11.5*y;
subject to {
  2.5*x + 7.5*y <= 2404;
  0.125*x + 0.125*y <= 52;
  17.5*x + 10*y <= 5950;
}
```

```
// solution (optimal) with objective 4068
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Max. unscaled (scaled) Ax-b resid.          = 4,54747e-13 (5,68434e-14)
// Max. unscaled (scaled) c-B'pi resid.        = 0 (0)
// Max. unscaled (scaled) |x|                  = 272,8 (272,8)
// Max. unscaled (scaled) |slack|              = 716 (44,75)
// Max. unscaled (scaled) |pi|                 = 32 (8)
// Max. unscaled (scaled) |red-cost|           = 0 (0)
// Condition number of scaled basis            = 5,5e+00
//

x = 143.2;
y = 272.8;
```

On augmente le bénéfice de 1€ dans le cas de H et de 32€ pour P.
Ainsi, l'augmentation de 1g de plus pour P aurait la plus grande influence sur les bénéfices. En effet, nous avons vu plus haut qu'entre H et P, P est la ressource la plus critique et que sa sensibilité est la plus élevée.

Achat de 250g de H en plus auprès d'un nouveau fournisseur

On peut ainsi déterminer deux nouveaux tableaux de données suivants :

Produit	H(g)	P(g)	M(g)	Bénéfices (€)
A	2.5	0.125	17.5	6.5
B	7.5	0.125	10	11.5
Disponibilité	1404	51	5950	

Produit	H(g)	P(g)	M(g)	Bénéfices (€)
A	2.5	0.125	17.5	6
B	7.5	0.125	10	10
Disponibilité	250	51	5950	

Ainsi, maximiser les bénéfices revient à maximiser la somme des bénéfices du premier tableau ($Avendus1 * 6.5 + Bvendus1 * 11.5$) avec ceux du deuxième tableau ($Avendus2 * 6 + Bvendus2 * 10$) tout en respectant les contraintes sur la disponibilité.

Par exemple, pour P on a la contrainte :

$0.125 Avendus1 + 0.125 Bvendus1 + 0.125 Avendus2 + 0.125 Bvendus2 \leq 51$.

Avec $Avendus1 = x1$, $Bvendus1 = x2$, $Avendus2 = x3$ *et* $Bvendus2 = x4$, on a :

$$Max\ \mathbf{6.5}x\mathbf{1} + \mathbf{11.5}x\mathbf{2} + \mathbf{6}x\mathbf{3} + \mathbf{10}x\mathbf{4}$$

$$\mathbf{2.}\ x\ \mathbf{1} + \mathbf{7.5}x\ \mathbf{2} \leq \mathbf{2404}$$

$$\mathbf{2.5}x\ \mathbf{3} + \mathbf{7.5}x\ \mathbf{4} \leq \mathbf{250}$$

$$\mathbf{0.125}x\ \mathbf{1} + \mathbf{0.125}x\ \mathbf{2} + \mathbf{0.125}x\ \mathbf{3} + \mathbf{0.125}x\ \mathbf{3} \leq \mathbf{51}$$

$$\mathbf{17.5}x\ \mathbf{1} + \mathbf{10}x\ \mathbf{2} + \mathbf{17.5}x\ \mathbf{3} + \mathbf{10}x\ \mathbf{4} \leq \mathbf{5950}$$

$$x\mathbf{1}\ ,\ x\mathbf{2}\ ,\ x\mathbf{3}\ ,\ x\mathbf{4} \geq \mathbf{0}$$

On entre maintenant ce nouveau problème sous CPLEX pour déterminer le plan de production optimal:

```
/*********************************************
 * OPL 22.1.1.0 Model
 * Author: teulierf
 * Creation Date: 26 janv. 2024 at 12:05:02
 *********************************************/
dvar float x1;
dvar float x2;
dvar float x3;
dvar float x4;

maximize
  6.5*x1 + 11.5*x2 + 6*x3 + 10*x4;
subject to {
  2.5*x1 + 7.5*x2 <= 2404;
  2.5*x3 + 7.5*x4 <= 250;
  0.125*x1 + 0.125*x2 + 0.125*x3 + 0.125*x4 <= 51;
  17.5*x1 + 10*x2 + 17.5*x3 + 10*x4 <= 5950;
}
```

```
// solution (optimal) with objective 4236
// Quality There are no bound infeasibilities.
// There are no reduced-cost infeasibilities.
// Max. unscaled (scaled) Ax-b resid.          = 3,41061e-13 (2,13163e-14)
// Max. unscaled (scaled) c-B'pi resid.        = 8,88178e-16 (8,88178e-16)
// Max. unscaled (scaled) |x|                  = 293,467 (293,467)
// Max. unscaled (scaled) |slack|              = 1261 (78,8125)
// Max. unscaled (scaled) |pi|                 = 32 (8)
// Max. unscaled (scaled) |red-cost|           = 0 (0)
// Condition number of scaled basis            = 1,2e+01
//

x1 = 81.2;
x2 = 293.47;
x3 = 0;
x4 = 33.333;
```

Ainsi, en ajoutant 250g de H, même si les bénéfices ci- dessus sont plus faibles, la solution optimale augmente de manière significative et passe à un bénéfice de 4036 à 4236€.

Conclusion

L’outil CPLEX est un outil puissant qui nous a permis de mener une analyse précise du problème à résoudre. En effet, de par sa vitesse de calcul, nous avons pu changer les paramètres et relancer plusieurs calculs sans perte de temps. Ainsi un industriel pourrait faire de nombreuses simulations de résolution de son problème sans surcoût tout ça dans le but d’optimiser ses ventes. Pour résoudre le problème, nous avons vu que pour améliorer les bénéfices, il faut jouer sur les ressources critiques.