Paradigmas de Programación

Correspondencia de Curry–Howard
Puntos fijos y recursión

2do cuatrimestre de 2024

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Correspondencia de Curry–Howard

Operador de punto fijo

Sistema de tipos para el cálculo-λ^b

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{true} : \mathsf{bool}}\ \text{T-TRUE}$$

Sistema de tipos para el cálculo-λ^b

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{true} : \mathsf{bool}}\,\text{T-TRUE} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \mathsf{false} : \mathsf{bool}}\,\text{T-FALSE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \mathsf{bool} \quad \Gamma \vdash N : \tau \quad \Gamma \vdash P : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N\ \mathsf{else}\ P : \tau}\,\text{T-IF}$$

Vamos a omitir las reglas para booleanos.

Sistema de tipos para el cálculo-λ^b

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{bool}}\text{T-TRUE} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{bool}}\text{T-FALSE}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{bool} \quad \Gamma \vdash N : \tau \quad \Gamma \vdash P : \tau}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } N \text{ else } P : \tau}\text{T-IF}$$

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}\text{T-VAR} \qquad \frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau.\, M : \tau \to \sigma}\text{T-ABS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma \quad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash M\, N : \tau}\text{T-APP}$$

Sistema de tipos para el cálculo-λ

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}\,\text{T-VAR}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma.M : \tau \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \to \sigma \qquad \Gamma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash MN : \tau}\,\text{T-APP}$$

Sistema de tipos para el cálculo-λ

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma, \quad \tau \vdash \quad \tau}\text{T-VAR}$$

$$\frac{\Gamma, \quad \tau \vdash \quad \sigma}{\Gamma \vdash \quad \tau \to \sigma}\text{T-ABS}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \quad \tau \to \sigma \qquad \Gamma \vdash \quad \tau}{\Gamma \vdash \quad \tau}\text{T-APP}$$

- Ignoremos los términos

Sistema de tipos para el cálculo-λ

Deducción natural

$$\frac{}{\Gamma, \quad \tau \vdash \quad \tau}\, ax$$

$$\frac{\Gamma, \quad \tau \vdash \quad \sigma}{\Gamma \vdash \quad \tau \to \sigma} \to_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \quad \tau \to \sigma \qquad \Gamma \vdash \quad \tau}{\Gamma \vdash \quad \tau} \to_e$$

- Ignoremos los términos
- Las reglas de tipado se corresponden con reglas de deducción natural.

Correspondencia de Curry

Curry y Feys observaron que si se lee el tipo $\tau \to \sigma$ como una implicación $\tau \Rightarrow \sigma$:

> la regla de tipado de la aplicación de una función es la regla **modus ponens**

Pruebas y Programas

Fórmulas	$\leftrightarrow$	Tipos
Demostraciones	$\leftrightarrow$	Términos

Pruebas y Programas

Fórmulas	$\leftrightarrow$	Tipos
Demostraciones	$\leftrightarrow$	Términos

Un juicio $\vdash \sigma$ es derivable **si y sólo si** el tipo σ está habitado, esto es, existe un término M tal que $\vdash M : \tau$ es derivable.

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Si, por ejemplo:

$$\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Si, por ejemplo:

$$\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

Corresponde al siguiente juicio de tipado:

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma . x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Si, por ejemplo:

$$\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

Corresponde al siguiente juicio de tipado:

$$\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma . x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$

El **término** $\lambda x : \sigma . x$ se asocia con la **prueba** de $\sigma \Rightarrow \sigma$ que se muestra en la parte superior

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\,ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \quad \dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_e$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\,ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \quad \dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_e$$

Corresponde al siguiente juicio de tipado:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \to \sigma \vdash x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma \to \sigma . x : (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS} \quad \dfrac{\dfrac{}{y : \sigma \vdash y : \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda y : \sigma . y : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}}{\vdash (\lambda x : \sigma \to \sigma . x)(\lambda y : \sigma . y) : \sigma \to \sigma}\,\text{T-APP}$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\, ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \quad \dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\, ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_e$$

Corresponde al siguiente juicio de tipado:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma \to \sigma \vdash x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda x : \sigma \to \sigma . x : (\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS} \quad \dfrac{\dfrac{}{y : \sigma \vdash y : \sigma}\,\text{T-VAR}}{\vdash \lambda y : \sigma . y : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}}{\vdash (\lambda x : \sigma \to \sigma . x)(\lambda y : \sigma . y) : \sigma \to \sigma}\,\text{T-APP}$$

El **término** $(\lambda x : \sigma \to \sigma . x)(\lambda y : \sigma . y)$ se asocia con la **prueba** que se muestra en la parte superior.

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\sigma \vdash \sigma}\Rightarrow_e}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \quad \dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\sigma \vdash \sigma}\Rightarrow_e}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma, y : \sigma \vdash y : \sigma}\,\text{T-VAR}}{x : \sigma \vdash \lambda y : \sigma . y : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS} \quad \dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\,\text{T-VAR}}{x : \sigma \vdash (\lambda y : \sigma . y) x : \sigma}\,\text{T-APP}}{\vdash \lambda x : \sigma . (\lambda y : \sigma . y) x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$

Ejemplo

¿Es derivable $\vdash \sigma \Rightarrow \sigma$?

También existe la siguiente prueba

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \quad \dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\sigma \vdash \sigma}\Rightarrow_e}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x : \sigma, y : \sigma \vdash y : \sigma}\,\text{T-VAR}}{x : \sigma \vdash \lambda y : \sigma.y : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS} \quad \dfrac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\,\text{T-VAR}}{x : \sigma \vdash (\lambda y : \sigma.y)x : \sigma}\,\text{T-APP}}{\vdash \lambda x : \sigma.(\lambda y : \sigma.y)x : \sigma \to \sigma}\,\text{T-ABS}$$

El **término** $\lambda x : \sigma.(\lambda y : \sigma.y)x$ se asocia con la **prueba** que se muestra en la parte superior.

Pruebas vs términos

- Una fórmula puede tener muchas pruebas distintas.
- Distintas pruebas corresponden a distintos juicios de tipado, es decir distintos términos.
- Notar que algunas pruebas de la misma proposición son mas complejas que otras:

Distintas pruebas de $\sigma \Rightarrow \sigma$

$$\dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\sigma \Rightarrow \sigma \vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\,ax}{\vdash (\sigma \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i \quad \dfrac{\dfrac{}{\sigma \vdash \sigma}\,ax}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_i}{\vdash \sigma \Rightarrow \sigma}\Rightarrow_e$$

Correspondencia de Curry-Howard

William Alvin Howard extendió la correspondencia:

- Tratando los restantes conectivos lógicos.
- Usando el cálculo-λ en lugar de la lógica combinatoria.
- Mostrando una correspondencia entre la simplificación de pruebas y la computación.

Simplificación de pruebas

Corte (*cut*)

Un *corte* es una "vuelta" innecesaria en una demostración.

- Está dado por una regla de introducción seguida inmediatamente de una regla de eliminación.

Simplificación de pruebas

Corte (*cut*)

Un *corte* es una "vuelta" innecesaria en una demostración.

- Está dado por una regla de introducción seguida inmediatamente de una regla de eliminación.
- Involucra a una *fórmula de corte* que no es subfórmula de la tesis.

Simplificación de pruebas

Corte (*cut*)

Un *corte* es una "vuelta" innecesaria en una demostración.

- Está dado por una regla de introducción seguida inmediatamente de una regla de eliminación.
- Involucra a una *fórmula de corte* que no es subfórmula de la tesis.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\}\Phi}{\Gamma, \sigma \vdash \rho}}{\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \rho}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\vdots\,\}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \rho}\Rightarrow_e$$

Eliminación de cortes

$$\dfrac{\dfrac{\vdots\,\}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma}}{\dfrac{\vdots\,\}\Phi}{\Gamma \vdash \rho}}$$

Simplificación de pruebas

Eliminación de cortes (*cut-elimination*)

Reescribir una prueba de manera tal que no tenga cortes:

- Eliminamos σ reemplazando cada uso σ en la prueba de ρ por una copia de la prueba de σ.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\}\Phi}{\Gamma, \sigma \vdash \rho}}{\Gamma \vdash \sigma \Rightarrow \rho}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\vdots\,\}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \rho}\Rightarrow_e$$

Eliminación de cortes

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots\,\}\Psi}{\Gamma \vdash \sigma}}{\vdots\,\}\Phi}}{\Gamma \vdash \rho}$$

Computación como simplificación de pruebas

Eliminación de cortes y reducción β

Un paso de eliminación de cortes se corresponde con un paso de cómputo (aplicación de la regla β o $\textsc{e-app}\textsc{Abs}$).

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \tau \vdash M : \rho}}{\Gamma \vdash \lambda x : \tau . M : \tau \to \rho}\,\textsc{T-Abs} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \tau}}{\Gamma \vdash (\lambda x : \tau . M) N : \rho}\,\textsc{T-App} \quad \to \quad \dfrac{\begin{array}{c}\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \tau}}{\vdots}\end{array}}{\Gamma \vdash M\{x := N\} : \rho}$$

Conjunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \qquad \Gamma \vdash \sigma}{\tau \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e_2}$$

Producto

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\tau \vdash \langle M, N \rangle : \tau \times \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(M) : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(M) : \sigma}$$

Conjunción: corte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i}{\Gamma \vdash \tau}\wedge_{e_1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge_{e_2}$$

Conjunción: eliminación de corte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i}{\Gamma \vdash \tau}\wedge_{e_1} \quad \to \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \tau} \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma}}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}\wedge_i}{\Gamma \vdash \sigma}\wedge_{e_2} \quad \to \quad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash \sigma}$$

Producto: reducción

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \sigma}}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \tau \times \sigma}\wedge_i}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(\langle\rangle, M\rangle N : \tau}\wedge_{e_1} \qquad \to \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \sigma}}{\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \tau \times \sigma}\wedge_i}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(\langle\rangle, M\rangle N : \sigma}\wedge_{e_2} \qquad \to \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash N : \sigma}$$

Cálculo-$\lambda^{\times}$ — resumen

Tipos y términos

$$
\begin{array}{rcl}
\tau, \sigma, \ldots & ::= & \ldots \mid \tau \times \sigma \\
M, N, \ldots & ::= & \ldots \mid \langle M, N \rangle \mid \mathsf{fst}(M) \mid \mathsf{snd}(M)
\end{array}
$$

Cálculo-$\lambda^{\times}$ — resumen

Tipos y términos

$$
\begin{array}{rcl}
\tau, \sigma, \ldots & ::= & \ldots \mid \tau \times \sigma \\
M, N, \ldots & ::= & \ldots \mid \langle M, N \rangle \mid \mathsf{fst}(M) \mid \mathsf{snd}(M)
\end{array}
$$

Reglas de tipado

$$
\frac{\Gamma \vdash M : \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \tau \times \sigma} \times_i
$$

Cálculo-$\lambda^{\times}$ — resumen

Tipos y términos

$$
\begin{array}{rcl}
\tau, \sigma, \ldots & ::= & \ldots \mid \tau \times \sigma \\
M, N, \ldots & ::= & \ldots \mid \langle M, N \rangle \mid \mathsf{fst}(M) \mid \mathsf{snd}(M)
\end{array}
$$

Reglas de tipado

$$
\frac{\Gamma \vdash M : \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \tau \times \sigma} \times_i
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{fst}(M) : \tau} \times_{e_1} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{snd}(M) : \tau} \times_{e_2}
$$

Cálculo-$\lambda^{\times}$ — resumen

Cálculo-$\lambda^\times$ — resumen

Valores

$$V, W, \ldots ::= \ldots \mid \langle V, W \rangle$$

Cálculo-$\lambda^{\times}$ — resumen

Valores

$$V, W, \dots ::= \dots \mid \langle V, W \rangle$$

Reglas de cómputo

$$\frac{}{\mathsf{fst}(\langle V, W \rangle) \to V}\textsc{e-fstPair} \qquad \frac{}{\mathsf{snd}(\langle V, W \rangle) \to W}\textsc{e-sndPair}$$

Cálculo-$\lambda^{\times}$ — resumen

Valores

$$V, W, \ldots ::= \ldots \mid \langle V, W \rangle$$

Reglas de cómputo

$$\frac{}{\mathsf{fst}(\langle V, W \rangle) \to V}\textsc{E-fstPair} \qquad \frac{}{\mathsf{snd}(\langle V, W \rangle) \to W}\textsc{E-sndPair}$$

Reglas de congruencia

$$\frac{M \to M'}{\langle M, N \rangle \to \langle M', N \rangle}\textsc{E-pair1} \qquad \frac{N \to N'}{\langle V, N \rangle \to \langle V, N' \rangle}\textsc{E-pair2}$$

$$\frac{M \to M'}{\mathsf{fst}(M) \to \mathsf{fst}(M')}\textsc{E-fst} \qquad \frac{M \to M'}{\mathsf{snd}(M) \to \mathsf{snd}(M')}\textsc{E-snd}$$

Disyunción

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma}\vee_{i_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \qquad \Gamma, \tau \vdash \rho \qquad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho}\vee_e$$

Suma

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{left}^{\sigma}(M) : \tau + \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{right}^{\tau}(M) : \tau + \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau + \sigma \qquad \Gamma, x : \tau \vdash M : \rho \qquad \Gamma, x : \tau \vdash N : \rho}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ M\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(x) \mapsto P\} : \rho}$$

Disyunción: corte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau}}{\Gamma \vdash \mathsf{left}^{\sigma}(M) : \tau + \sigma}\vee_{i_1} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \tau \vdash N : \rho} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho}}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ \mathsf{left}^{\sigma}(M)\ \{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(x) \mapsto P\} : \rho}\vee_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau}}{\Gamma \vdash \mathsf{left}^{\sigma}(M) : \tau + \sigma}\vee_{i_2} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \tau \vdash N : \rho} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho}}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ \mathsf{left}^{\sigma}(M)\ \{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(x) \mapsto P\} : \rho}\vee_e$$

Suma: reducción (1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau}}{\Gamma \vdash \mathsf{left}^{\sigma}(M) : \tau + \sigma}\vee_{i_1} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \tau \vdash N : \rho} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho}}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ \mathsf{left}^{\sigma}(M)\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(x) \mapsto P\} : \rho}\vee_e$$

$$\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau}}{\vdots}}{\Gamma \vdash N\{x := M\} : \rho}$$

Suma: reducción (2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \sigma}}{\Gamma \vdash \mathsf{right}^{\tau}(M) : \tau + \sigma}\vee_{i_2} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \tau \vdash N : \rho} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma, x : \sigma \vdash P : \rho}}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ \mathsf{right}^{\sigma}(M)\ \{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(x) \mapsto P\} : \rho}\vee_e$$

$$\to \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash M : \tau}}{\vdots}}{\Gamma \vdash P\{x := M\} : \rho}$$

Cálculo-λ^+: resumen

Tipos y términos

$$
\begin{array}{rcll}
\tau, \sigma, \ldots & ::= & \ldots \mid & \tau + \sigma \\
M, N, \ldots & ::= & \ldots \mid & \mathsf{left}^{\tau}(M) \mid \mathsf{right}^{\tau}(M) \\
 & & \mid & \mathsf{case}\ M\, \{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto P\}
\end{array}
$$

Cálculo-λ^+: resumen

Tipos y términos

$$
\begin{array}{rcll}
\tau, \sigma, \ldots & ::= & \ldots \mid & \tau + \sigma \\
M, N, \ldots & ::= & \ldots \mid & \mathsf{left}^{\tau}(M) \mid \mathsf{right}^{\tau}(M) \\
 & & \mid & \mathsf{case}\ M \{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto P\}
\end{array}
$$

Reglas de tipado

$$
\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{left}^{\sigma}(M) : \tau + \sigma} +_{i_1} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{right}^{\tau}(M) : \tau + \sigma} +_{i_2}
$$

Cálculo-λ^+: resumen

Tipos y términos

$$
\begin{array}{rcl}
\tau, \sigma, \dots & ::= & \dots \mid \ \tau + \sigma \\
M, N, \dots & ::= & \dots \mid \ \mathsf{left}^{\tau}(M) \mid \mathsf{right}^{\tau}(M) \\
 & & \quad\ \mid \ \mathsf{case}\ M\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto P\}
\end{array}
$$

Reglas de tipado

$$
\frac{\Gamma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \mathsf{left}^{\sigma}(M) : \tau + \sigma} +_{i_1}
\qquad
\frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \mathsf{right}^{\tau}(M) : \tau + \sigma} +_{i_2}
$$

$$
\frac{\Gamma \vdash M : \tau + \sigma \qquad \Gamma, x : \tau \vdash N : \rho \qquad \Gamma, y : \sigma \vdash P : \rho}{\Gamma \vdash \mathsf{case}\ M\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto P\} : \rho} +_e
$$

Cálculo-λ^{+}: resumen

Valores

$$V, W, \ldots ::= \ldots \mid \mathsf{left}^{\tau}(V) \mid \mathsf{right}^{\tau}(V)$$

Cálculo-λ^+: resumen

Valores

$$V, W, \ldots ::= \ldots \mid \mathsf{left}^\tau(V) \mid \mathsf{right}^\tau(V)$$

Reglas de cómputo

$$\frac{}{\mathsf{case}\ \mathsf{left}^\tau(V)\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto M \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto N\} \to M\{x := V\}}\ \text{E-CASEL}$$

Cálculo-λ^+: resumen

Valores

$$V, W, \ldots ::= \ldots \mid \mathsf{left}^\tau(V) \mid \mathsf{right}^\tau(V)$$

Reglas de cómputo

$$\frac{}{\mathsf{case}\ \mathsf{left}^\tau(V)\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto M \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto N\} \to M\{x := V\}}\ \textsc{e-caseL}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}\ \mathsf{right}^\tau(V)\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto M \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto N\} \to N\{y := V\}}\ \textsc{e-caseR}$$

Cálculo-λ^+: resumen

Valores

$$V, W, \ldots ::= \ldots \mid \mathsf{left}^\tau(V) \mid \mathsf{right}^\tau(V)$$

Reglas de cómputo

$$\frac{}{\mathsf{case}\ \mathsf{left}^\tau(V)\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto M \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto N\} \to M\{x := V\}}\ \text{E-CASEL}$$

$$\frac{}{\mathsf{case}\ \mathsf{right}^\tau(V)\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto M \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto N\} \to N\{y := V\}}\ \text{E-CASER}$$

Reglas de congruencia

$$\frac{M \to M'}{\mathsf{left}^\tau(M) \to \mathsf{left}^\tau(M')}\ \text{E-INL} \qquad \frac{M \to M'}{\mathsf{right}^\tau(M) \to \mathsf{right}^\tau(M')}\ \text{E-INR}$$

$$\frac{M \to M'}{\begin{array}{l} \quad \mathsf{case}\ M\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto P\} \\ \to \mathsf{case}\ M'\,\{\mathsf{left}(x) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(y) \mapsto P\} \end{array}}\ \text{E-CASE}$$

Absurdo

$$\frac{\Gamma \vdash \qquad \bot}{\Gamma \vdash \qquad\qquad \tau} \bot_e$$

Absurdo

$$\frac{\Gamma \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \mathsf{case}^{\tau}\ M\,\{\,\} : \tau}\,\bot_e$$

Absurdo

$$\frac{\Gamma \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \mathsf{case}^{\tau}\ M\,\{\,\} : \tau}\bot_e$$

- Notar que no hay constructores para el tipo $\bot$.
- El tipo $\bot$ es el tipo vacío (sin habitantes).
- Se puede definir como un tipo de datos algebraico sin constructores.

Absurdo

$$\frac{\Gamma \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \mathsf{case}^{\tau}\ M\,\{\,\} : \tau}\,\bot_e$$

- Notar que no hay constructores para el tipo $\bot$.
- El tipo $\bot$ es el tipo vacío (sin habitantes).
- Se puede definir como un tipo de datos algebraico sin constructores.
- El eliminador es un case con 0 ramas.
- Las ocurrencias de $\mathsf{case}^{\tau}\ M\,\{\,\}$ siempre corresponden a **situaciones imposibles** (código inalcanzable).

Cálculo-$\lambda^{\perp}$: resumen

Tipos y términos

$$
\begin{array}{rcl}
\tau, \sigma, \ldots & ::= & \ldots \mid \;\; \perp \\
M, N, \ldots & ::= & \ldots \mid \;\; \mathsf{case}^{\tau}\ M\,\{\,\}
\end{array}
$$

Cálculo-$\lambda^{\perp}$: resumen

Tipos y términos

$$\begin{array}{rcl} \tau, \sigma, \ldots & ::= & \ldots \mid \ \perp \\ M, N, \ldots & ::= & \ldots \mid \ \mathsf{case}^{\tau}\ M \{\,\} \end{array}$$

Reglas de tipado

$$\frac{\Gamma \vdash M : \perp}{\Gamma \vdash \mathsf{case}^{\tau}\ M \{\,\} : \tau} \perp_e$$

Cálculo-$\lambda^{\perp}$: resumen

Tipos y términos

$$\begin{array}{rcl} \tau, \sigma, \ldots & ::= & \ldots \mid \ \perp \\ M, N, \ldots & ::= & \ldots \mid \ \mathsf{case}^{\tau}\ M\,\{\,\} \end{array}$$

Reglas de tipado

$$\frac{\Gamma \vdash M : \perp}{\Gamma \vdash \mathsf{case}^{\tau}\ M\,\{\,\} : \tau}\perp_e$$

No se extienden los valores ni las reglas de reducción.

Tipo Unit

Se puede considerar una extensión de **NJ** con la fórmula $\top$ ("verdadero"):

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$$

Tipo Unit

Se puede considerar una extensión de **NJ** con la fórmula $\top$ ("verdadero"):

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top_i$$

- El cálculo-$\lambda^\top$ resulta de la siguiente extensión:

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \ldots & ::= & \ldots \mid \top \\ M, N, P, \ldots & ::= & \ldots \mid \star \end{array}$$

Tipo Unit

Se puede considerar una extensión de **NJ** con la fórmula $\top$ ("verdadero"):

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\top_i$$

- El cálculo-$\lambda^\top$ resulta de la siguiente extensión:

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \ldots & ::= & \ldots \mid \top \\ M, N, P, \ldots & ::= & \ldots \mid \star \end{array}$$

- Con una única regla de tipado:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \star : \top}\top_i$$

Tipo Unit

Se puede considerar una extensión de **NJ** con la fórmula $\top$ ("verdadero"):

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\top_i$$

- El cálculo-$\lambda^\top$ resulta de la siguiente extensión:

$$\begin{array}{lcl} \sigma, \tau, \ldots & ::= & \ldots \mid \top \\ M, N, P, \ldots & ::= & \ldots \mid \star \end{array}$$

- Con una única regla de tipado:

$$\frac{}{\Gamma \vdash \star : \top}\top_i$$

- El tipo $\top$ es un tipo algebraico con un único constructor $\star$.

Propiedades

El cálculo-$\lambda^{\times,+,\perp,\top}$ tiene buenas propiedades:

1. Unicidad de tipos. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash M : \sigma$ son derivables, entonces $\tau = \sigma$.

Propiedades

El cálculo-$\lambda^{\times,+,\perp,\top}$ tiene buenas propiedades:

1. Unicidad de tipos. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash M : \sigma$ son derivables, entonces $\tau = \sigma$.
2. Weakening + Strengthening. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ es derivable y $\mathsf{fv}(M) \subseteq \mathsf{dom}(\Gamma \cap \Gamma')$ entonces $\Gamma' \vdash M : \tau$ es derivable.

Propiedades

El cálculo-$\lambda^{\times,+,\perp,\top}$ tiene buenas propiedades:

1. Unicidad de tipos. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash M : \sigma$ son derivables, entonces $\tau = \sigma$.
2. Weakening + Strengthening. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ es derivable y $\mathsf{fv}(M) \subseteq \mathsf{dom}(\Gamma \cap \Gamma')$ entonces $\Gamma' \vdash M : \tau$ es derivable.
3. Determinismo. Si $M \to N_1$ y $M \to N_2$ entonces $N_1 = N_2$.

Propiedades

El cálculo-$\lambda^{\times,+,\perp,\top}$ tiene buenas propiedades:

1. Unicidad de tipos. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash M : \sigma$ son derivables, entonces $\tau = \sigma$.
2. Weakening + Strengthening. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ es derivable y $\mathsf{fv}(M) \subseteq \mathsf{dom}(\Gamma \cap \Gamma')$ entonces $\Gamma' \vdash M : \tau$ es derivable.
3. Determinismo. Si $M \to N_1$ y $M \to N_2$ entonces $N_1 = N_2$.
4. Preservación de tipos. Si $\vdash M : \tau$ y $M \to N$ entonces $\vdash N : \tau$.

Propiedades

El cálculo-$\lambda^{\times,+,\perp,\top}$ tiene buenas propiedades:

1. Unicidad de tipos. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash M : \sigma$ son derivables, entonces $\tau = \sigma$.
2. Weakening + Strengthening. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ es derivable y $\mathrm{fv}(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma \cap \Gamma')$ entonces $\Gamma' \vdash M : \tau$ es derivable.
3. Determinismo. Si $M \to N_1$ y $M \to N_2$ entonces $N_1 = N_2$.
4. Preservación de tipos. Si $\vdash M : \tau$ y $M \to N$ entonces $\vdash N : \tau$.
5. Progreso. Si $\vdash M : \tau$ entonces:
    5.1 O bien M es un valor.
    5.2 O bien existe N tal que $M \to N$.

Propiedades

El cálculo-$\lambda^{\times,+,\perp,\top}$ tiene buenas propiedades:

1. Unicidad de tipos. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ y $\Gamma \vdash M : \sigma$ son derivables, entonces $\tau = \sigma$.
2. Weakening + Strengthening. Si $\Gamma \vdash M : \tau$ es derivable y $\mathrm{fv}(M) \subseteq \mathrm{dom}(\Gamma \cap \Gamma')$ entonces $\Gamma' \vdash M : \tau$ es derivable.
3. Determinismo. Si $M \to N_1$ y $M \to N_2$ entonces $N_1 = N_2$.
4. Preservación de tipos. Si $\vdash M : \tau$ y $M \to N$ entonces $\vdash N : \tau$.
5. Progreso. Si $\vdash M : \tau$ entonces:
   5.1 O bien M es un valor.
   5.2 O bien existe N tal que $M \to N$.
6. Terminación. Si $\vdash M : \tau$, entonces no hay una cadena infinita de pasos:

$$M \to M_1 \to M_2 \to \dots$$

Correspondencia de Curry-Howard

Teorema (Correspondencia de Curry–Howard)

Son equivalentes:

1. $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$ es derivable en **NJ**
2. Existe un término M tal que $x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n \vdash M : \sigma$.

Correspondencia de Curry-Howard

Teorema (Correspondencia de Curry–Howard)

Son equivalentes:

1. $\tau_1, \ldots, \tau_n \vdash \sigma$ es derivable en **NJ**
2. Existe un término M tal que $x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n \vdash M : \sigma$.

Nota

En el teorema de arriba identificamos tácitamente los símbolos:

$\to$	$\Rightarrow$
$\times$	$\wedge$
$+$	$\vee$

Consistencia de la lógica

La relación entre reducción y pruebas permite concluir que la lógica es consistente.

Corolario

El juicio $\vdash \bot$ **no** es derivable en NJ.

Consistencia de la lógica

La relación entre reducción y pruebas permite concluir que la lógica es consistente.

Corolario

El juicio $\vdash \bot$ **no** es derivable en NJ.

Se obtiene a partir del siguiente razonamiento:

- Debe existir M, tal que $\vdash M : \bot$.
- Por terminación y preservación de tipos, debería existir un valor V, tal que $\vdash V : \bot$. Por analisis de casos en los posibles valores, se puede concluir que no existe.

Sobre la negación

- La negación se puede codificar como:

$$\neg\sigma \equiv (\sigma \to \bot)$$

- Notar que la regla:
  - $\neg_i$ corresponde a $\Rightarrow_i$
  - $\neg_e$ corresponde a $\Rightarrow_e$
- No hay necesidad de extender el cálculo-λ con negación.

Sobre los booleanos

- Los ignoramos porque se pueden codificar.

Sobre los booleanos

- Los ignoramos porque se pueden codificar.

Booleanos como sumas

$$\begin{aligned}
\mathsf{Bool} &\equiv \top + \top \\
\mathsf{true} &\equiv \mathsf{left}^{\top}(\star) \\
\mathsf{false} &\equiv \mathsf{right}^{\top}(\star) \\
\mathsf{if}\ M\ \mathsf{then}\ N\ \mathsf{else}\ P &\equiv \mathsf{case}\ M \{\mathsf{left}(_) \mapsto N \parallel \mathsf{right}(_) \mapsto P\}
\end{aligned}$$

Correspondencia de Curry–Howard

Operador de punto fijo

Recursión

- Extendemos la sintaxis con un nuevo operador:

$$M ::= \ldots \mid \mathsf{fix}\ M$$

Recursión

- Extendemos la sintaxis con un nuevo operador:

$$M ::= \dots \mid \text{fix } M$$

- No se precisan nuevos tipos pero sí una regla de tipado.

$$\frac{\Gamma \vdash M : \tau \to \tau}{\Gamma \vdash \text{fix } M : \tau}\text{T-FIX}$$

Semántica operacional small-step

- No hay valores nuevos pero sí reglas de evaluación nuevas.

$$\frac{M \to M'}{\mathsf{fix}\ M \to \mathsf{fix}\ M'}\ \text{E-FIX}$$

Semántica operacional small-step

- No hay valores nuevos pero sí reglas de evaluación nuevas.

$$\frac{M \to M'}{\mathsf{fix}\ M \to \mathsf{fix}\ M'}\ \text{E-FIX}$$

$$\frac{}{\mathsf{fix}\ (\lambda x : \tau.\, M) \to M\{x := \mathsf{fix}\ (\lambda x : \tau.\, M)\}}\ \text{E-FIXBETA}$$

Ejemplos

Sea M el término

$$\begin{array}{l}\lambda f : \mathsf{nat} \to \mathsf{nat}. \\ \ \lambda x : \mathsf{nat}. \\ \ \ \mathit{if}\ \mathsf{iszero}(x)\ \mathit{then}\ \underline{1}\ \mathit{else}\ x * f(\mathsf{pred}(x))\end{array}$$

en

$$\mathsf{fix}\ M\ \underline{3}$$

Ejemplos

- Ahora podemos definir funciones parciales:

$$\text{fix } (\lambda x : \sigma . x)$$

- Notar que $\vdash \text{fix } (\lambda x : \sigma . x) : \sigma$ para cualquier σ.
- En particular, vale para $\sigma = \bot$.
- En consecuencia, si se extiende **NJ** con un operador fix , la lógica resulta inconsistente ($\vdash \bot$ sería derivable)

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ? ? ? ? ? ? ? ? ?