Mathematische Grundlagen für Informatiker

Thema Relationen

Julia Padberg

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Relation

Stehen Elemente einer Menge A in Beziehung zu Elementen aus einer Menge B, so kann dies mit Hilfe einer **Relation** ausgedrückt werden. Diese besteht aus **geordneten Paaren** (a, b) der Elemente, die durch die Beziehung verknüpft sind.

Definition

Eine **Relation** R ist eine Teilmenge des kartesischen Produkts von A und B. Man sagt a steht in Relation zu b und schreibt $a \mathrel{\mathrm{R}} b$:

$$a \mathrel{\mathrm{R}} b \text{ genau dann, wenn } (a, b) \in R \subseteq A \times B\,.$$

Anwendungsbeispiel: relationalen Datenbanken

Eine Tabelle mit Vorlesungen und eine Tabelle von Studierenden in Beziehung zueinander.

Vorlesung	Raum
Höhere Mathematik I	V57.01
Knigge für Studierende	V47.02

Mtr.-Nr.	Name
1000000	Anton Antonius
1000001	Berta Bethel
1000002	Cornelius Cornell
1000003	Damian Damien
1000004	Egon Ekel
1000005	Frank Frankfurth

Ein Element aus der einen Menge kann in Relation zu mehreren Elementen der anderen Menge stehen.

Notation

- Jede Teilmenge $R \subseteq A \times B$ des kartesischen Produktes $A \times B$ heißt eine (zweistellige) **Relation** (Beziehung) von A und B:
  $R = \{(x, y) | x \in A \text{ und } y \in B \text{ und } x \text{ steht in Beziehung "R" zu } y\}$
- Schreibweise (gelesen als x steht mit y in Relation R):
  - Infix-Notation $x \mathrel{\mathrm{R}} y$ bzw. $(x \mathrel{\mathrm{R}} y)$
  - Präfix-Notation $\mathrm{R}\, xy$ bzw. $\mathrm{R}(x, y)$
  - Postfix-Notation $xy\, \mathrm{R}$ bzw. $(x, y)\, \mathrm{R}$
- Relationsbild einer Menge $X \subseteq A$ ist $R[X] := \{y | (x, y) \in R\}$
- Eine **n-stellige Relation** ist definiert durch:
  $R \subseteq M_1 \times M_2 \times ... \times M_n$ und
  $R = \{(m_1, m_2, .., m_n) | m_1, m_2 \text{ ... und } m_n \text{ stehen in Beziehung }\}$

Beispiele

- $<$ und $\leq$ sind Relationen auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $>, \geq, =$ und $\neq$ ebenfalls
- die Teilerrelation: nTm genau dann, wenn n Teiler von m dann ist $T = \{(n, m) |$ es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $k \cdot n = m\}$
- $P_3 := \{(x, x+3) | x \in \mathbb{N}\} = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), ...\}$
- $P_5 := \{(x, x+5) | x \in \mathbb{N}\} = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9) ...\}$
- $P_n := \{(x, x+n) | x \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 13:

- Geben Sie bitte 2 Beispiele an für zwei- und dreistellige Relationen über z.B. Mengen von Studierende, LVs, Noten , etc.
- Gegeben seien die Elemente a,b und c sowie die Mengen $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c\}$ und $C = \{c\}$.
  Geben Sie bitte die Relation $\in$ explizit als Teilmenge des entsprechenden Kreuzproduktes an.

Lösung

- 2 Relationen:
  1. $B \subseteq S \times LV$, wobei S die Menge der Studierenden im 1. Semester und LV die Menge der angebotenen LVs ist, und $B = \{(s, l) | s$ findet l bescheuert $\} = \emptyset$
  2. $E \subseteq S \times LV \times N$ zusätzlich ist $N = \{n \in \mathbb{N} | n \leq 15\}$ und $E = \{(s, l, n) |$ in l erzielt s die LP $n\}$
- $\in \subseteq \{a, b, c\} \times \{A, B, C\}$ mit $\in = \{(a, A), (b, A), (b, B), (c, B), (c, C)\}$

Komposition

Definition

Sind $R_1 \subset M_1 \times M_2$ und $R_2 \subset M_2 \times M_3$ zweistellige Relationen, so heißt die Verknüpfung $R_2 \circ R_1 \subseteq M_1 \times M_3$ mit
$R_2 \circ R_1 := \{(x, z) |$ es ex. $y \in M_2$ mit $(x, y) \in R_1$ und $(y, z) \in R_2\}$
Verkettung oder **Komposition** der Relationen R_1 und R_2.
$\circ$ wird in dem Zusammenhang gelesen als "R_2 nach R_1".

Sind R_1 und R_2 zweistellige Relationen auf einer Menge M, so ist $R_2 \circ R_1 := \{(x, z) |$ es ex. $y \in M$ mit $(x, y) \in R_1$ und $(y, z) \in R_2\}$.

Aufgabe 14:

Gegeben

- $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(n, m) \in R$ gdw $m = 3n$ und
- $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ mit $(n, z) \in S$ gdw $z = -n$.

1. Berechnen Sie bitte $S \circ R$.
2. Läßt sich auch $R \circ S$ berechnen?

Lösung

1. $S \circ R = \{(n, z) | z = -3n\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$.
2. Läßt sich auch $R \circ S$ berechnen?
   Nein, denn $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ aber $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Eigenschaften von Relationen

Definition

Eine Relation $R \subseteq A^2$ in einer Menge A heißt

- **reflexiv**, wenn jedes Element in Relation zu sich selbst steht: für alle $a \in A : (a, a) \in R$
- **symmetrisch**, wenn die Reihenfolge der Elemente keine Rolle spielt: $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \in R$
- **antisymmetrisch**, wenn aus der Symmetrie die Identität folgt: $(a, b) \in R$ und $(b, a) \in R$, dann $a = b$
- **transitiv**, wenn aus einer Kette das mittlere Element entfernt werden kann: $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$, dann $(a, c) \in R$
- **total**[1], wenn je zwei Elemente in mindestens einer Richtung in Relation stehen: für alle $a, b \in A : (a, b) \in R$ oder $(b, a) \in R$

[1] auch: linear

Aufgabe 15:

Gegeben $T \subseteq \mathbb{N}^2$ mit nTm gdw. n Teiler von m,
also $T = \{(n, m) |$ es.ex. $k \in \mathbb{N}$ und $k \cdot n = m\}$.

1. T ist reflexiv, i.e.für alle $n \in \mathbb{N} : (n, n) \in T$
   [X] wahr oder [ ] falsch
2. T ist symmetrisch, i.e.$(n, m) \in T$, dann $(m, n) \in T$
   [ ] wahr oder [X] falsch
3. T ist antisymmetrisch,i.e. $(n, m) \in T$ und $(m, n) \in T$, dann $n = m$
   [X] wahr oder [ ] falsch
4. T ist transitiv, i.e. $(n, m) \in T$ und $(m, o) \in T$, dann $(n, o) \in T$
   [X] wahr oder [ ] falsch
5. T ist total, i.e. für alle $n, m \in \mathbb{N} : (n, m) \in T$ oder $(m, n) \in T$
   [ ] wahr oder [X] falsch

Weitere Eigenschaften für $R \subseteq A^2$

- R irreflexiv: für alle $a \in A$ mit $(a, a) \notin R$
- R asymmetrisch: für alle $a, b \in A$ mit $(a, b) \in R$, dann $(b, a) \notin R$
- R alternativ: für alle $a, b \in A$ mit $(a, b) \in R$ xor $(b, a) \in R$
  (xor: exklusives oder!)

Weitere Eigenschaften für $R \subseteq A \times B$

- R rechtseindeutig: für alle $a \in A$ mit $(a, b) \in R$ und $(a, c) \in R$, dann $b = c$
- R linkseindeutig: für alle $a \in A$ mit $(b, a) \in R$ und $(c, a) \in R$, dann $b = c$
- R eindeutig: R rechtseindeutig und R linkseindeutig
- R linkstotal: für alle $a \in A$ existiert $b \in B$ mit $(a, b) \in R$
- R rechtstotal: für alle $b \in B$ existiert $a \in A$ mit $(a, b) \in R$

Spezielle Relationen

- Inverse: $R^{-1} := \{(y,x)|(x,y) \in R\}$
- Identität (über M): $R = Id := \{(x,x)|x \in M\}$
- Äquivalenz entspricht "Gleichwertigkeit"
- Ordnungen
- Abbildungen

Äquivalenzrelationen

Definition

Ist eine Relation reflexiv, symmetrisch und transitiv, so wird sie **Äquivalenzrelation** genannt.
Es wird dann meist $a \sim b$ statt $a \, \mathrm{R} \, b$ geschrieben.

BSP:

Die Relation "hat gleich viele Elemente wie" ist eine Äquivalenzrelation in der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer endlichen Menge M denn es gilt:

- $|A| = |A|$(reflexiv),
- $|A| = |B| \Rightarrow |B| = |A|$ (symmetrisch) und
- $|A| = |B| = |C| \Rightarrow |A| = |C|$ (transitiv).

Aufgabe 16:

Plättchenmenge: Es gibt rote, blaue, grüne und schwarze Plättchen, die können groß oder klein sein, und die sind rund, dreieckig oder quadratisch.
Mathematisch gefasst $P = \{r, b, g, s\} \times \{g, k\} \times \{r, d, q\}$.
Bitte definieren Sie die Relation "hat-die-gleiche-Farbe" und zeigen Sie, dass es eine Äquivalenzrelation ist.

Lösung

$gF = \{(p_1, p_2)|p_i = (f_i, g_i, a_i) \in P$ für $i \in \{1,2\}$ und $f_1 = f_2\} \subseteq P \times P$
seien $p_i = (f_i, g_i, a_i) \in gF$ für $i \in \{1,2,3\}$, dann gilt, gF ist:
Reflexiv: für alle $_1 = (f_1, g_1, a_1) \in P$ gilt $f_1 = f_1$ also $(p_1, p_1) \in gF$
Symmetrisch: aus $(p_1, p_2) \in gF$ folgt $f_2 = f_1$, damit dann auch $(p_2, p_1) \in gF$
Transitiv: aus $(p_1, p_2), (p_2, p_3) \in gF$, folgt $f_1 = f_2 = f_3$, also auch $(p_1, p_3) \in gF$

Äquivalenzklassen

Definition

Gegeben eine Äquivalenzrelation R über der Menge A.
Dann ist für $a \in A$

$$[a] = \{x|(a,x) \in R\}$$

die **Äquivalenzklasse** von a.

- Eine Äquivalenzrelation unterteilt die Menge A in disjunkte Teilmengen die Äquivalenzklassen, wobei zwei Elemente einer Teilmenge zueinander in Relation stehen (also **äquivalent sind**), während zwei Elemente aus unterschiedlichen Teilmengen dies nicht tun.
- Die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ergibt wieder die Ausgangsmenge.

Beispiel

BSP:

$MOD3 \subseteq \mathbb{N}^2$ sei die Relation der Restklassen modulo3,
in der also zwei Zahlen in Relation sind,
wenn sie durch 3 geteilt, den selben Rest ergeben
(z.B. $7 \mod 3 = 1$, denn $7 : 3 = 2$ rest 1 und
$10 \mod 3 = 1$, denn $10 : 3 = 3$ rest 1).
Dann gibt es folgende Äquivalenzklassen:
$[1] = \{1, 4, 7, 10, ...\} = \{3n - 2 | n \in \mathbb{N}\}$
$[2] = \{2, 5, 8, 11, ...\} = \{3n - 1 | n \in \mathbb{N}\}$
$[3] = \{3, 6, 9, ...\} = \{3n | n \in \mathbb{N}\}$
aber auch
$[4] = \{n | n \mod 3 = 4 \mod 3\} = [1]$
$[5] = \{n | n \mod 3 = 5 \mod 3\} = [2]$
$[6] = \{n | n \mod 3 = 6 \mod 3\} = [3]$
und so fort

Aufgabe 17:

Gegeben diese folgenden Relationen über $\mathbb{N}^2$:

- $x \; R_1 \; y$: x und y haben einen gemeinsamen Teiler $\neq 1$
- $x \; R_2 \; y$: x und y haben gleichviele Teiler

Sind es Äquivalenzen ?

Lösung

- R_1 ist nicht transitiv, denn $(2, 6) \in R_1$ und $(6, 3) \in R_1$, aber $(2, 3) \notin R_1$ also KEINE Äquivalenz.
- R_2 ist Äquivalenz:
  - R_2 ist reflexiv, weil für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(n, n) \in R_2$, denn jede Zahl hat genauso viel Teiler wie sie selbst.
  - R_2 ist symmetrisch, wenn $(n, m) \in R_2$ dann auch $(m, n) \in R_2$, denn n und m haben gleich viel Teiler.
  - R_2 ist transitiv, wenn $(n, m), (m, o) \in R_2$ dann auch $(n, o) \in R_2$, denn n,m und o haben gleich viel Teiler.

Äquivalenzabschluss

- Reflexiver Abschluss $r(R)$ von $R \subseteq A \times A$:
  $r(R) = R \cup \{(a, a) | a \in A\}$
- Symmetrischer Abschluss $s(R)$:
  $s(R) = R \cup \{(b, a) | (a, b) \in R\}$
- Transitiver Abschluss $t(R)$:
  $t(R) = R \cup \{(a, c) |$ es ex. $b_1, b_2, ..., b_n,$
  mit $(a, b_1), (b_i, b_{i+1}), (b_n, c) \in R\}$

Satz (Erzeugte Äquivalenzrelation) :

$t(s(r(R)))$ ist Äquivalenzrelation.

Bemerkung:

$s(t(r(R)))$ i.a. nicht transitiv.

Beispiel

Gegeben die Relation Q über $\{1, 2, ..., 8\}$
mit $x \; Q \; y$ gdw. x und y haben einen gemeinsamen Teiler $\neq 1$

also $Q = \{ (2, 2), (2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), (2, 8), (8, 2),$
$(3, 3), (3, 6), (6, 3), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (4, 8), (8, 4),$
$(5, 5), (6, 6), (6, 8), (8, 6), (7, 7), (8, 8)\}$
dann ist

- $r(Q) = Q \cup \{(1, 1)\}$
- $s(r(Q)) = r(Q)$ da sowie so schon symmetrisch
- $t(s(r(Q))) = r(Q) \cup \{(2, 3), (3, 2), (4, 3), (3, 4), (8, 3), (3, 8)\}$

Ordnungen

Definition

Ist eine Relation reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, so ist sie eine **Halbordnung** und man schreibt meist $a \le b$ statt $a\,R\,b$.
Ist eine Halbordnung zusätzlich total, heißt sie **(totale) Ordnung** und A heißt durch $\le$ geordnet.

BSP: Mengeninklusion

Die Inklusion $\subseteq$ ist eine Halbordnung in der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M denn es gilt:

- $A \subseteq A$ (reflexiv),
- $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Rightarrow A = B$ (antisymmetrisch) und
- $A \subseteq B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ (transitiv).

Hat M mehr als ein Element, so ist die Inklusion $\subseteq$ keine Ordnung, denn dann gilt für $a, b \in M, a \neq b : \{a\} \not\subseteq \{b\}$ und $\{b\} \not\subseteq \{a\}$, das heißt, sie ist nicht total.

Hasse-Diagramm

- graphische Darstellung von Halbordnungen.
- 1967 von dem Mathematiker Helmut Hasse

Konstruktion

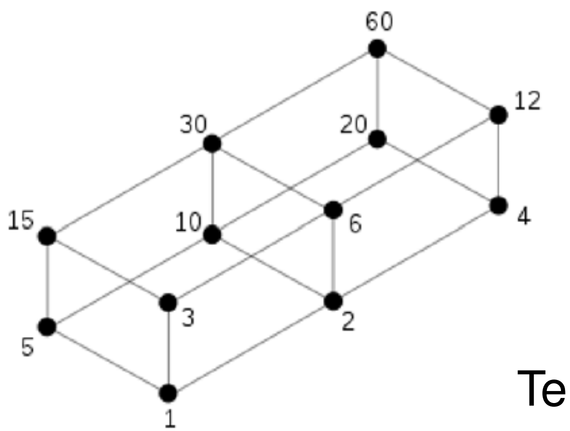
Das Hasse-Diagramm für eine Halbordnung $(M, \le)$

- ein gerichteter Graph,
- die Elemente von M bilden die Knoten
- eine Kante zwischen zwei Knoten a und b:
  - wenn $a \le b$ gilt,
  - es kein c gibt mit $a \le c \le b$ und
  - der Knoten b oberhalb von a liegt.

Teilerverband

BSP: Teilerverband

Die Teiler einer natürlichen Zahl lassen sich mittels eines Hasse-Diagramms darstellen, da die Teilbarkeitsrelation eine Halbordnung ist.



Teilerverband für 60

Aufgabe 18:

Geben Sie bitte das Hasse-Diagramm für $\mathcal{P}(\{x, y, z\})$ an.

Lösung