Mathematische Grundlagen für Informatiker

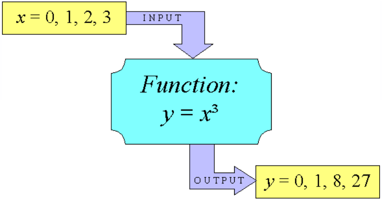
Thema Abbildungen

Julia Padberg

Hochschule für Angewandte Wissenschaften Hamburg
Hamburg University of Applied Sciences

Abbildungen

Motivation

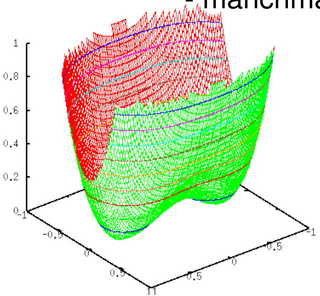


eine Abbildung

- ist mathematische Bezeichnung für die Zuordnung von Elementen einer Menge in die einer anderen Menge
- wied benötigt, wenn der Wert einer Größe vom Wert einer anderen Größe abhängt

- manchmal sehr genau, in Form ausgefeilter Theorien

- manchmal nur in grober Näherung



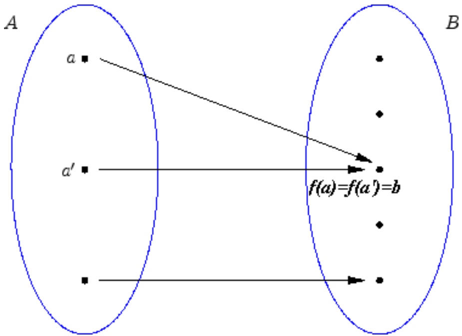
Abbildung

Definition

Unter einer Abbildung f von einer Menge A in eine Menge B versteht man eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ eindeutig ein bestimmtes $b = f(a) \in B$ zuordnet: $f : A \longrightarrow B$.
Für die Elementzuordnung verwendet man die Schreibweise $a \mapsto b = f(a)$ und bezeichnet b als das Bild von a, bzw. a als ein Urbild von b.

Eine Abbildung, deren Wertebereich ein Zahlenbereich ist, nennt man auch **Funktion**, insbesondere in der reellen und komplexen Analysis.

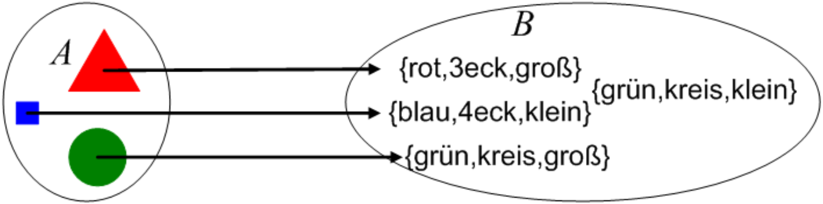
Beispiel



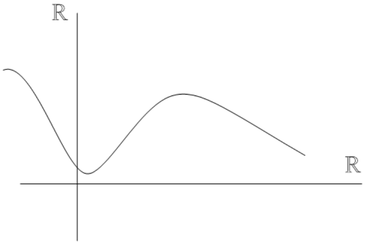
- Für jedes Element aus A gibt ein eindeutiges Bild
  i.e. von jedem a muss genau ein Pfeil ausgehen
  . ... linkstotal und rechtseindeutig
- Nicht alle Elemente aus B sind Bild eines Elementes aus A.
- Ein Element aus B darf auch Bild mehrerer Elemente aus A sein.
- ein Bild b kann mehrere Urbilder haben, z.B. a und a'.

Beispiele

BSP: Prädikate



BSP: Reelle Funktion



BSP: Manche Listen

Student	Matrikelnummer
Eva Musterfrau	HAW: 1234567
Adam Mustermann	HAW: 007007
...	...
...	...
...	...
...	...

Aufgabe 19: Abbildungen sind spezielle Relationen.

Überlegen Sie bitte, inwiefern das so ist.
Beantworten Sie dafür bitte folgende Fragen:

- Wie läßt sich eine Abbildung $f : A \to B$ als Relation auffassen?
- Welche besonderen Eigenschaften hat diese Relation dann?
- Können Sie ein Beispiel geben??

Lösung

- $f : A \to B$ ist als Relation $f \subseteq A \times B$ mit $f = \{(a, f(a)) | a \in A\}$ aufzufassen.
- Sie ist rechtseindeutig und linkstotal, i.e.
  für alle $a \in A$ mit $(a, b_1) \in f$ und $(a, b_2) \in f$, dann $b_1 = b_2$
  und für alle $a \in A$ existiert $b \in B$ mit $(a, b) \in f$.
- $\emptyset : \emptyset \to B$

Abbildungen als Relation

Eine Relation $R \subseteq A \times B$ heißt Abbildung von A in B, wenn

1. für alle $a \in A$ gilt, es existiert ein $b \in B$, so dass $(a, b) \in R$,
   d.h. R ist linkstotal und
2. für alle $a \in A$ und alle $b_1, b_2 \in B$ gilt,
   $(a, b_1) \in R$ und $(a, b_2) \in R$, dann $b_1 = b_2$,
   d.h. R ist rechtseindeutig

Sei $R : A \to B$, dann ist A der **Definitionsbereich** und
B der **Bildbereich** von R.

Die **Komposition** ist definiert durch: $(R_2 \circ R_1)(x) := R_2(R_1(x))$

Komposition

Die **Komposition** (oder Verknüpfung) zweier Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist durch

$$a \mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad a \in A$$

definiert und in dem folgendem Diagramm veranschaulicht:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, d.h.

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

aber offensichtlich nicht kommutativ.

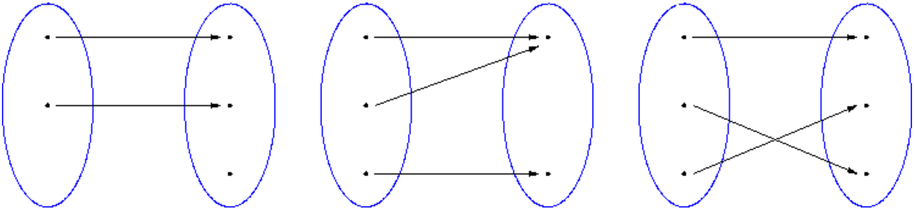
Eigenschaften

Definition

Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ zwischen zwei Mengen A und B heißt:

- **injektiv**, wenn für alle $a, a' \in A$ mit $a \neq a'$ gilt $f(a) \neq f(a')$.
- **surjektiv**, falls es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$.
- **bijektiv**, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

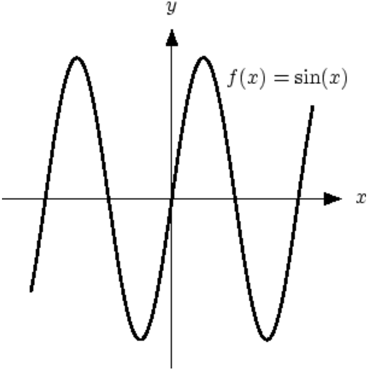
BSP:



Aufgabe 20:

Illustrieren Sie bitte eine reelle Funktion, die nicht injektiv und nicht surjektiv ist.

Lösung



Nicht injektiv, Nicht surjektiv

Alles halb so schlimm....

Tatsächlich wissen schon kleine Kinder, was eine bijektive Abbildung ist.
Beim Zählen nämlich kommt es darauf an, eine bijektive Abbildung herzustellen zwischen der Menge der Gegenstände, die gezählt werden sollen, und der Menge $\{1, ..., n\}$. Sollen beispielsweise Stofftiere gezählt werden, so stellt das Kind die Abbildung her, indem es unter Beachtung der Bedingungen (1) bis (4) jeweils auf ein Stofftier zeigt und dabei eine Zahl sagt.

1. rechtseindeutig
2. linkstotal
3. injektiv
4. surjektiv

Ganz kleine Kinder, die noch nicht richtig zählen können, verletzen regelmäßig mindestens eine der Bedingungen (1) bis (4).
So zeigt das Kind etwa mehrfach auf ein Stofftier oder vergisst eines.
Oder es zeigt zwar auf alle Stofftiere, sagt dabei aber die Zahlen "1, 2, 3, 2, 4".

Oder es sagt die Zahlen "1, 2, 5, 6, 8".

Aufgabe 21:

Zeigen Sie bitte, dass eine Abbildung $f : A \to B$,

- die surjektiv ist, eine rechtstotale Relation ist.
- die injektiv ist, eine linkseindeutige Relation ist.

Lösung

- Für $f \subseteq A \times B$ gilt wegen Surjektivität:
  für jedes $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$.
  Also gibt es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ mit $(a, f(a)) = (a, b) \in f$,
  damit ist f rechtstotal.
- Für $f \subseteq A \times B$ und je zwei beliebige Elemente $(a_1, b), (a_2, b) \in f$ gilt wegen Injektivität:
  $a_1 \neq a_2$ dann $b \neq b$ das geht aber nicht $\lightning$.
  Also muss $a_1 = a_2$ sein, und dann ist f auch schon linkseindeutig.

Übersicht: Eigenschaften

	links- total	rechts- total	links- eindeutig	rechts- eindeutig
partielle Abbildung				X
Abbildung	X			X
injektive Abbildung	X		X	X
surjektive Abbildung	X	X		X
bijektive Abbildung	X	X	X	X

Eigenschaften

Definition

Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ zwischen zwei Mengen A und B heißt

- **injektiv**, falls für alle $a, a' \in A$ aus $f(a) = f(a')$ schon $a = a'$ folgt.
- **surjektiv**, falls es für jedes $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $f(a) = b$
- **bijektiv**, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Kürzbarkeitseigenschaften der Komposition

Satz:

Gegeben seien

- $f_s : A \to B$
- $g, h : B \to C$
- $f_i : C \to D$

Dann gilt allgemein:

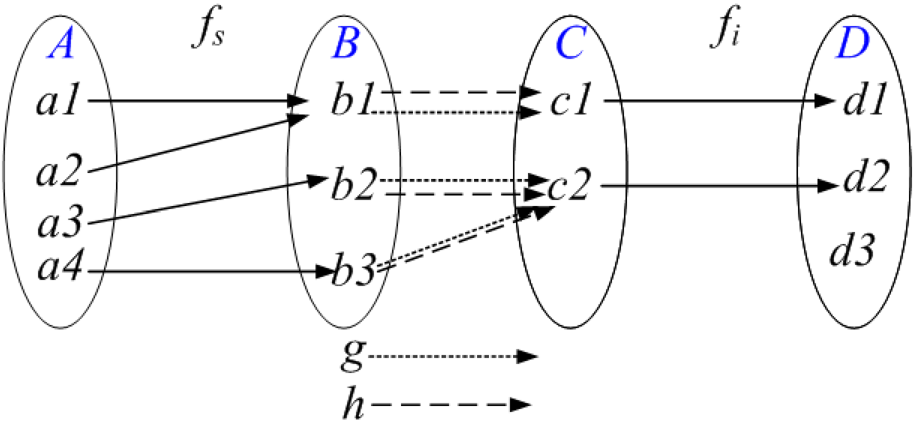
1. Ist f_s surjektiv, dann folgt aus $g \circ f_s = h \circ f_s$ dass $g = h$ ist.
2. Ist f_i injektiv, dann folgt aus $f_i \circ g = f_i \circ h$ dass $g = h$ ist.

Aufgabe 22:

Überlegen Sie sich bitte je ein Beispiel für 1 und 2.

Lösung

Lösung



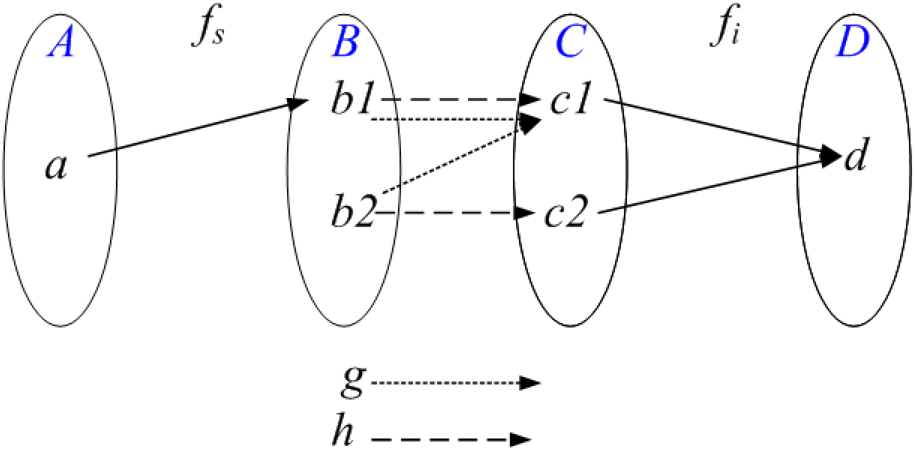
Aufgabe 23:

Geben Sie bitte je ein Beispiel dafür an, dass

1. Ist f_s **nicht** surjektiv,
   dann folgt aus $g \circ f_s = h \circ f_s$ **NICHT** dass $g = h$ ist.
2. Ist f_i **nicht** injektiv,
   dann folgt aus $f_i \circ g = f_i \circ h$ **NICHT** dass $g = h$ ist.

Lösung von Aufgabe 23

Lösung



Identität, Umkehrabbildung

Definition

Die Abbildung $id_A : A \to A$ mit $id_A(a) = a$ heißt **Identität** (auf A).

Definition

Für eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ ist durch $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$ die **Umkehrabbildung**[1] $f^{-1} : B \to A$ definiert.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[ll, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $f^{-1}(f(a)) = a$ und $f(f^{-1}(b)) = b$,
d.h. $f^{-1} \circ f = id_A$ und $f \circ f^{-1} = id_B$ ist die identische Abbildung.

[1] auch: inverse Abbildung

Bild und Urbild

Definition

Sei $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$.
Dann heißt die Menge

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

das **Bild** von A unter f.
Insbesondere heißt $Bild(f) := f(X)$ das **(volle) Bild** von f.

Definition

Gegeben die Abbildung $f : X \to Y$, dann ist das **Urbild** einer Teilmenge $B \subseteq Y$ definiert durch

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$$

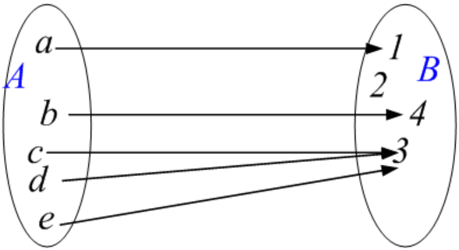
Urbilder als Abbildung

Satz

Das **Urbild** von Teilmengen ist eine Abbildung mit $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ und $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$

Beweis: $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ ist
linkstotal und rechtseindeutig, denn den für **jede** Teilmenge $B \subseteq Y$ ist **genau ein** Urbild $f^{-1}(B_1) := \{a | f(a) \in B\} \subseteq X$ definiert.

Beispiel



$f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ mit

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

$f^{-1}(\{1\}) = \{a\}$

$f^{-1}(\{1,3\}) = \{a, c, d, e\}$

...

$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$

$f^{-1}(\{3\}) = \{c, d, e\}$

...

$f^{-1}(\{1,2,3,4\}) = \{a, b, c, d, e\}$

insgesamt $|\mathcal{P}(B)| = 2^4 = 16$ Zuordnungen

Aufgabe 24:

Gegeben $M_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ und $M_2 = \{a, b, c\}$ und $f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, a)\}$.

Geben Sie bitte $f^{-1} : \mathcal{P}(M_2) \to \mathcal{P}(M_1)$ explizit an.

Lösung

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(\{\ \}) &= \{\ \}\\
f^{-1}(\{a\}) &= \{1, 4\}\\
f^{-1}(\{b\}) &= \{2, 3\}\\
f^{-1}(\{c\}) &= \{\ \}\\
f^{-1}(\{a, b\}) &= \{1, 2, 3, 4\}\\
f^{-1}(\{a, c\}) &= \{1, 4\}\\
f^{-1}(\{b, c\}) &= \{2, 3\}\\
f^{-1}(\{a, b, c\}) &= \{1, 2, 3, 4\}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 25: WAHR oder FALSCH??

Gelten diese Aussagen für jede Mengenabbildung $f : X \to Y$ und beliebige Mengen $A, A' \subseteq X$ und $B, B' \subseteq Y$???

1. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ — X wahr oder ☐ falsch
2. $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ — ☐ wahr oder X falsch
3. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ — X wahr oder ☐ falsch
4. $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ — X wahr oder ☐ falsch
5. $f(A \times A') = f(A) \times f(A')$ — ☐ wahr oder X falsch
6. $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ — ☐ wahr oder X falsch
7. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ — X wahr oder ☐ falsch
8. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ — X wahr oder ☐ falsch

Einschränkung der Abbildung

Definition

Sei $f : X \to Y$ und $A \subseteq X$.
Die Abbildung $f|_A : A \to Y$ ist so definiert, dass für alle $a \in A$ gilt:

$$(f|\,A)(a) := f(a)$$

und heißt Einschränkung der Abbildung von f auf A.
Der Index wird, wenn der Kontext klar ist, auch weggelassen.

Kern

Kern $Ker(f)$ von Abbildung $f : A \to B$:

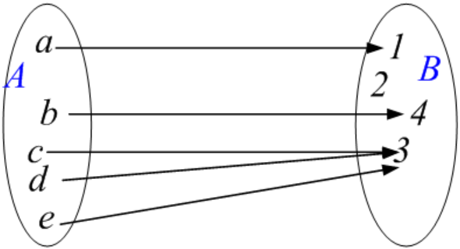
$$Ker(f) = \{(a_1, a_2) \in A \times A | f(a_1) = f(a_2)\}$$

Satz (Kern)

$Ker(f) \subseteq A \times A$ ist Äquivalenzrelation auf A

Beweisidee : $Ker(f)$ ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, da $Ker(f)$ über Gleichheit $f(a_1) = f(a_2)$ definiert ist.

BSP



$Ker(f) = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(c,d),(d,c)\}$

Aufgabe 26:

1. Bitte geben Sie den Kern von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ an.
2. Bitte geben Sie den Kern einer beliebigen injektiven Abbildung an.

Lösung

1. $Ker(f) = \{(x, y) \| x| = |y|\}$
   wobei $|\_|$ die Betragsfunktion der reellen Zahlen ist.
2. Für injektives $f : A \to B$ ist $Ker(f) = \{(a, a) | a \in A\} = Id_A$.

Abbildungen in dieser LV

Semantik der Aussagenlogik

- Die Elemente von $\mathbb{B} = 0, 1$ heißen Wahrheitswerte.
- Eine Belegung ist eine Abbildung $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{A} : D \to \mathbb{B}$, wobei D Teilmenge der atomaren Formeln ist.
- Eine Interpretation/Bewertung ist eine Abbildung $\widehat{\mathbf{A}}$ mit $\widehat{\mathbf{A}} : E \to \mathbb{B}$, wobei $E \supseteq D$ Menge aller Formeln über D ist.

Abbildungen in dieser LV

Lineare Abbildung

Seien V und W Vektorräume über demselben Körper K .
Eine Abbildung $\alpha : V \to W$ heißt lineare Abbildung, wenn sie die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

- $\alpha(u + v) = \alpha(u) + \alpha(v)$ für alle $u, v \in V$ Additivität
- $\alpha(kv) = k\alpha(v)$ für alle $v \in V, k \in K$ Homogenität