



Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Modelo de avalanchas para fulguraciones solares

Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Noelia Ayelén Santos

Septiembre de 2017

Alumna: Noelia Santos (e-mail: noelia.santos@live.com.ar) LU:747/11

Directora: Laura Morales (e-mail: lmorales@df.uba.ar)

Lugar de trabajo: Instituto de Física del Plasma (UBA-CONICET), Buenos Aires, Argentina

Fecha de iniciación: Octubre de 2016

Fecha de finalización: Septiembre de 2017

Fecha de examen:

Informe aprobado:

Alumna: Noelia Santos

Jurado

Directora: Laura Morales

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Jurado

A mis padres, Bichi y Luis, y a Mariela.

Resumen

Las fulguraciones solares son fenómenos de liberación de energía intensa y repentina en la corona solar que calientan localmente el plasma hasta $\approx 10^7\text{ K}$. Con la llegada de la era espacial gran cantidad de fulguraciones se observaron en diferentes longitudes de ondas y en distintas regiones de la corona solar. Una característica que se observa a partir de la función de distribución de la energía liberada por las fulguraciones es que las mismas siguen leyes de potencia que se extienden por, al menos, ocho órdenes de magnitud.

Parker propuso que las fulguraciones solares son la manifestación colectiva de la energía liberada por pequeños eventos de reconexión magnética que ocurren a través de la estructura del campo magnético coronal. Este es mecánicamente retorcido por los movimientos estocásticos de sus bases ancladas por debajo de la fotósfera. El modelo de Parker posee los ingredientes necesarios como para suponer que la corona se encuentra en un estado de criticalidad auto-organizada y, por ende, su comportamiento podría ser modelado a partir de un autómata celular.

En este trabajo se modeló la liberación de energía en las fulguraciones solares mediante un autómata bidimensional, similar al propuesto por Lu & Hamilton. Se estudiaron las propiedades estadísticas de las avalanchas producidas por el autómata mediante el método de máxima verosimilitud (MLE). Los párametros estudiados fueron: energía liberada, energía liberada en el pico, duración y área cubierta en el pico. En todos los casos se encontraron valores que concuerdan con los valores observacionales recientes.

Contenidos

1. Introducción	1
2. Fulguraciones solares	3
2.1. La estructura del Sol	3
2.2. La corona solar	5
2.3. Fulguraciones	7
3. Marco teórico para la descripción del plasma coronal	10
3.1. Ecuaciones básicas de la magnetohidrodinámica	10
3.2. Difusión y congelamiento de líneas magnéticas	13
3.3. Magnetohidrostática	14
3.4. Energía MHD	15
3.5. Calentamiento coronal	16
3.6. Reconexión magnética	17
3.7. Conjetura de Parker: Calentamiento coronal y fulguraciones solares	19
4. Criticalidad auto-organizada	22
4.1. El paradigma de criticalidad de Bak: la pila de arena	22
4.2. Modelado de fulguraciones mediante SOC	24
5. Modelo de autómata celular	26
5.1. Forzado del sistema	27
5.2. Criterio de estabilidad	27
5.3. La regla de redistribución	28
5.4. Implementación numérica	29
5.5. Estado de criticalidad auto-organizada	30
6. Caracterización de avalanchas	34
6.1. Estadística de avalanchas	34
6.2. Propiedades geométricas de las avalanchas	40
7. Conclusiones	44

8. Apéndice **46**

Bibliografía **49**

1. Introducción

La corona solar está formada por un plasma magnetizado caracterizado por altas temperaturas del orden de 10^6 K . Cuando ocurre una fulguración solar el plasma coronal se calienta localmente hasta alcanzar temperaturas del orden de 10^7 K en tiempos extremadamente cortos (1 a 100 min). En los últimos 30 años las fulguraciones solares se han observado usando diversas técnicas y en un gran número de longitudes de onda. El análisis estadístico de las estas observaciones ha puesto en evidencia el hecho de que la función de distribución de la energía liberada por tales fulguraciones sigue la forma de una ley de potencias que se extiende por varios órdenes de magnitud [Aschwanden 2013], [Charbonneau 2001].

En 1988 Parker sugirió que el mecanismo que permite relacionar la liberación de energía cinética con la de existencia de campo magnético coronal es la reconexión magnética. Los campos magnéticos coronales anclados en el plasma fotosférico (altamente turbulento) sufren fuertes deformaciones que se acumulan formando complejas hojas de corrientes. Cuando la intensidad de la corriente en dichas hojas aumenta más allá de un cierto umbral el fenómeno de reconexión magnética domina (localmente) la dinámica coronal y la energía magnética se libera en forma de energía cinética y energía térmica [Parker 1983], [Parker 1988].

La solución de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica que permitirían verificar el modelo de Parker no es posible por la disparidad de escalas temporales y espaciales a resolver. Sin embargo, se han realizado muchas simulaciones, bajo ciertas hipótesis, obteniéndose resultados comparables con los de Parker. El paradigma de la criticalidad auto-organizada (*Self-organized Criticality*, [Bak et al. 1987]) apareció como una alternativa para el estudio estadístico de las fulguraciones solares.

En 1991 Lu & Hamilton [Lu&Hamilton 1991] propusieron que la corona solar se encuentra en un estado de criticalidad auto-organizada y la dinámica del campo magnético coronal podría modelarse a través de un autómata celular, pudiendo, de esta forma, explicar su comportamiento auto-similar.

El objetivo de este trabajo es modelar uno de los fenómenos que ocurren en la corona solar: las fulguraciones solares, a partir del paradigma de la criticalidad auto-organizada ampliando el trabajo previo de Lu & Hamilton.

En el capítulo 2 se describirán las fulguraciones y para ello se presentará en forma resumida la estructura del sol, haciendo especial énfasis en la atmósfera del mismo, lugar donde ocurren las fulguraciones. En el capítulo 3 se desarrollarán las ecuaciones básicas que permiten describir el plasma

coronal y las hipótesis propuestas para explicar el calentamiento coronal. En el capítulo 4 se presentará el paradigma de la criticalidad auto-organizada: la pila de arena, y como pueden modelarse las fulguraciones solares a través de este paradigma. En el capítulo 5 se explicará en detalle el autómata celular con el que se trabajó y se mostrará que el mismo alcanzó un estado de criticalidad auto-organizada. En el capítulo 6 se realizará un análisis estadístico de las avalanchas obtenidas a partir del autómata utilizando la técnica MLE (*maximum likelihood estimation*), para luego comparar con datos observacionales. Finalmente, en el capítulo 7 se presentarán las conclusiones del trabajo.

2. Fulguraciones solares

Las fulguraciones son los eventos más explosivos que ocurren en la atmósfera solar. En este capítulo inicialmente se presentará una breve introducción sobre la estructura del sol, haciendo especial énfasis en la atmósfera superior, escenario en el cual ocurren las fulguraciones. Finalmente se darán características generales de estos eventos de liberación de energía.

2.1. La estructura del Sol

El sol es una estrella bastante común en nuestro vasto universo pero su proximidad con la tierra la hace única. Tiene profundos efectos en el clima terrestre y en el clima espacial, y su estudio es de central importancia para comprender la estructura y evolución estelar y los plasmas astrofísicos en general.

El sol es una esfera gaseosa que se encuentra en equilibrio hidrostático (aproximado), esto significa que las reacciones nucleares que ocurren dentro de su núcleo crean la presión suficiente para sostener la superficie que, de otra manera, colapsaría debido a la auto-gravedad. Está compuesta principalmente por hidrógeno (92 %) y helio (8 %), mayormente ionizados debido a las altas temperaturas. El resto de los elementos, como C, N y O, suman un 0.1 % [Priest 2014].

La figura 2.1 muestra la estructura básica del sol. El centro contiene aproximadamente la mitad de su masa en una fracción del 1% de su volumen total, pero genera el 99% de la energía. La temperatura ($\approx 1.5 \times 10^7 K$) y la densidad (13 veces superior que la del plomo sólido) son lo suficientemente altas como para que se produzca fusión de hidrógeno a helio. La presión es 10^9 veces mayor a la de la atmósfera terrestre en el nivel del mar. El sol se encuentra en un equilibrio energético: la temperatura y presión en su centro proveen una tasa de producción de energía nuclear que balancea la tasa de emisión de energía por radiación en su superficie.

La energía generada en el núcleo en forma de radiación gamma se filtra continuamente hacia fuera de una manera muy suave a través de la zona radiativa por difusión radiativa. Esta zona se extiende desde $0.25 R_\odot$ hasta $0.7 R_\odot$, donde $R_\odot = 696.000$ km es el radio solar. Los fotones deben avanzar por un medio ionizado sumamente denso siendo dispersados, absorbidos y reemitidos infinitud de veces en su camino tardando unos 170.000 años en llegar desde el núcleo hasta la parte superior de la zona convectiva. Parte de la energía se disipa debido a estas interacciones y los rayos gamma se transforman en radiación de mayor longitud de onda. En la zona radiativa, la densidad decrece 3

órdenes de magnitud, y la temperatura a la mitad de su valor en el centro.

Por encima de la zona radiativa, el transporte de energía se produce por convección del plasma. Esto se debe a que la temperatura en su base es lo suficientemente baja ($\approx 10^6 K$) como para que los iones más pesados (C, N, O) tengan electrones en estados ligados, lo cual aumenta la opacidad del gas (el cual puede absorber fotones en procesos moleculares). Por otro lado, el gradiente de temperaturas es lo suficientemente fuerte como para generar movimientos convectivos debido a una inestabilidad del fluido, conocida como inestabilidad de Schwarzschild. Estos movimientos no involucran un transporte neto de materia, pero si hay un transporte neto de calor hacia el exterior del sol: El plasma caliente que se eleva desde el interior en forma turbulenta alcanza una posición en la que la opacidad ya no es suficiente para evitar el escape de la radiación. El plasma se expande, irradia y enfriá, y al hacerlo pierde su flotabilidad y desciende. La apariencia “granular” del sol cuando es visto en luz blanca provee evidencia observacional de tales movimientos convectivos en sus capas más externas [Priest 2014].

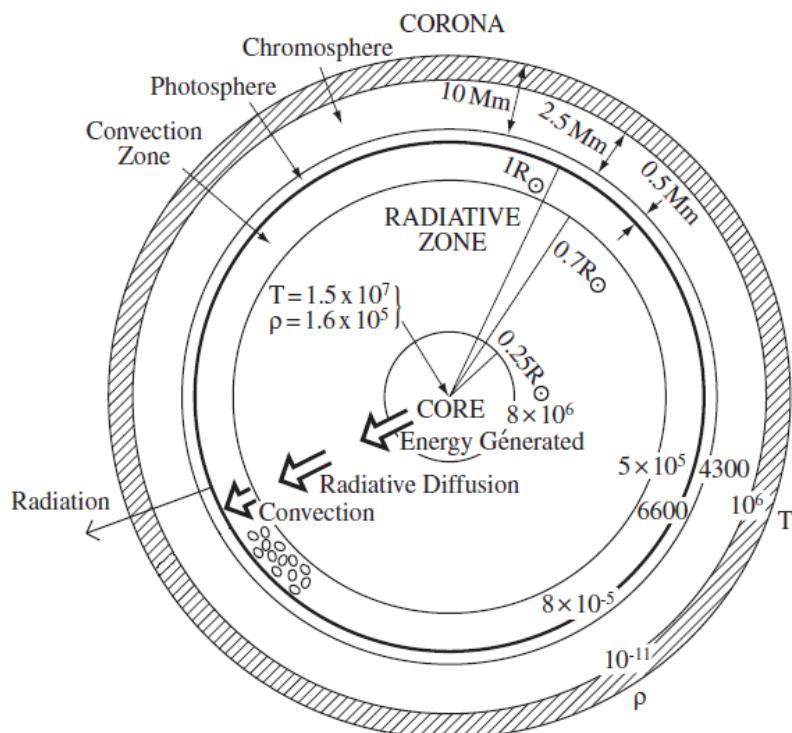


Figura 2.1: Esquema de la estructura global del sol. Se indican los tamaños de las diversas regiones, sus temperaturas (en K) y sus densidades (en kg/m^3). El núcleo es la región más interna y allí ocurre la fusión de hidrógeno a helio. Inicialmente la energía liberada en el núcleo viaja a través de la zona radiativa por difusión. Posteriormente se establece el transporte de energía por convección en la zona convectiva. La fotósfera determina la altura a partir de la cual los fotones escapan al medio interestelar. La crómosfera y la corona forman parte de la atmósfera solar [Priest 2014].

La atmósfera se define como la parte del Sol desde la cual los fotones pueden escapar directamente al espacio. Consta de cuatro regiones con diferentes propiedades físicas. La más baja es una capa extremadamente fina de plasma llamada fotósfera, desde donde se emite la mayor parte de la radiación. La fotósfera es lo que a simple vista se observa como la “superficie” y define el radio solar R_\odot . El espesor de la fotósfera es de 500 km y la temperatura decrece de 6600 K a 4300 K. Finalmente,

las capas más externas y tenues de la atmósfera solar son sucesivamente la cromósfera, la región de transición y la corona. La temperatura sube lentamente a través de la cromósfera, hasta 10000 K , y luego dramáticamente a través de la región de transición (de 100 km de espesor) a unos pocos millones de grados en la corona.

La corona se extiende a lo largo de varios radios solares y presenta temperaturas mayores a 10^6 K (dos órdenes de magnitud más grande que la temperatura de la superficie solar). Al mismo tiempo, la densidad cae en ocho órdenes de magnitud desde la fotósfera hasta la corona. En la figura 2.2 se muestra una representación esquemática de la temperatura y la densidad en la atmósfera solar como función de la altura.

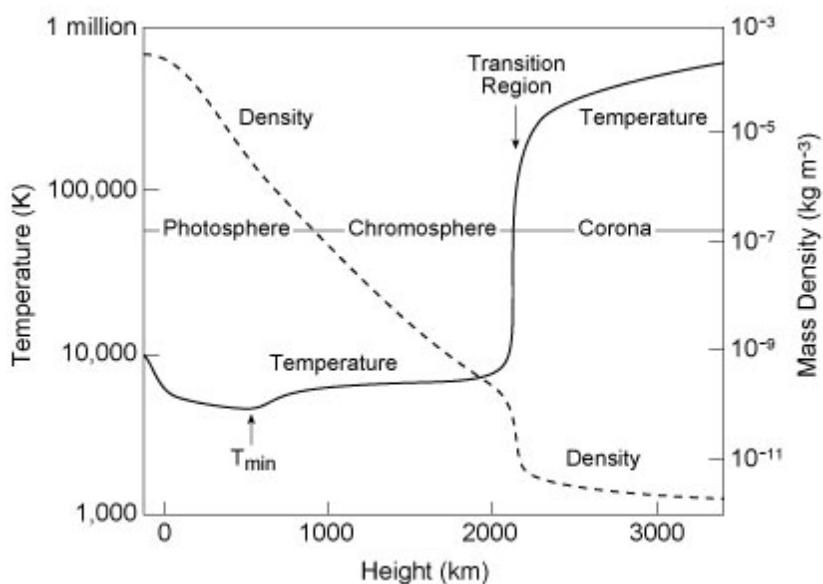


Figura 2.2: Esquema de la variación media de temperatura y densidad con la altura en la atmósfera solar. En la práctica la atmósfera es altamente inhomogénea, dinámica y variable en el tiempo [Priest 2014].

La alta temperatura de la atmósfera superior indica la necesidad de alguna fuente de energía mecánica, es decir, no térmica, puesto que por relajación termodinámica ordinaria se requeriría que la temperatura de la atmósfera por encima de la fotósfera siguiera disminuyendo. Este fenómeno es conocido como *calentamiento coronal* [Golub et al. 1997].

2.2. La corona solar

La observación de la corona solar comenzó con los eclipses solares, la única forma natural de suprimir el fuerte contraste causado por la radiación visible proveniente de la fotósfera (seis órdenes de magnitud mayor). A causa de su alta temperatura, el gas coronal es un intenso emisor de rayos X y EUV. Estos rangos espectrales son fuertemente absorbidos por la atmósfera terrestre por lo cual recién en la era espacial pudieron obtenerse una enorme cantidad de observaciones en estas longitudes de onda. La figura 2.3 muestra imágenes de la atmósfera solar tomada por Solar Dynamics Observatory (SDO) en el 2011. La imagen muestra una amplia jerarquía de estructuras de muy diversos tamaños

y morfologías.

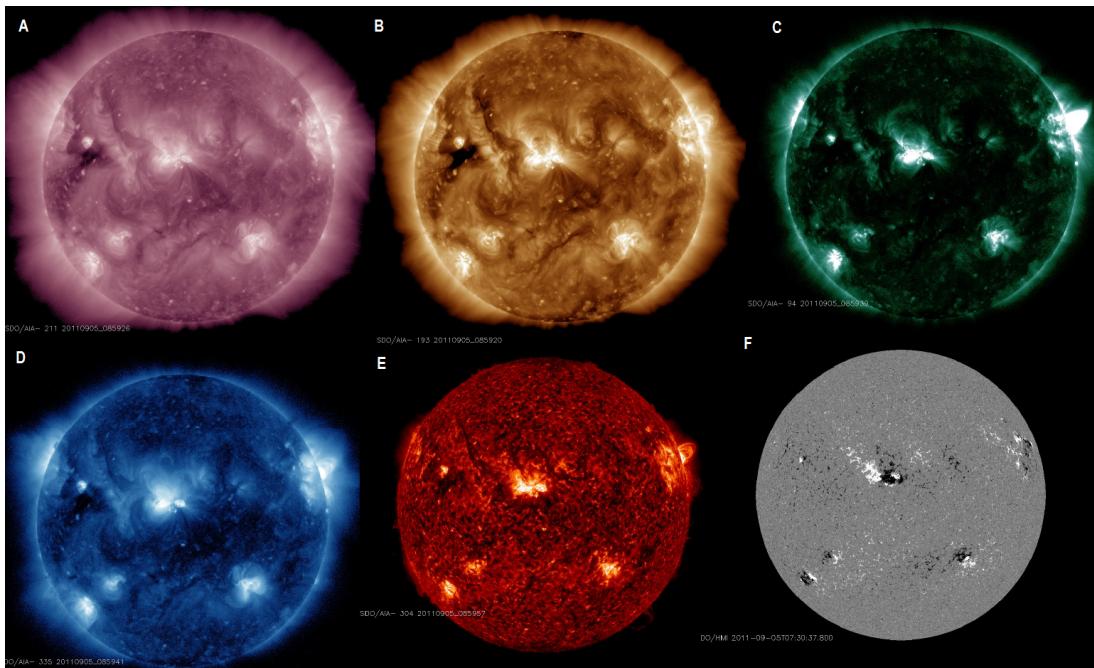


Figura 2.3: Imágenes de la corona solar y la cromósfera en diferentes longitudes de onda que muestran la complejidad y la amplia gama de escalas de estructuras. (A-E) SDO/AIA 211 Å, 193 Å, 94 Å, 335 Å y 304 Å. (F) Magnetograma SDO/HMI del campo magnético en la fotósfera. Todas las imágenes fueron tomadas el 5 de septiembre de 2011 (<https://sdo.gsfc.nasa.gov/data/aiahmi/>).

La corona está lejos de ser homogénea, la naturaleza altamente estructurada está íntimamente ligada a la presencia, en la superficie solar, de campos magnéticos que se generan dentro del sol y emergen a la superficie.

Las estructuras observadas en las imágenes de la figura 5.2 son visibles porque contienen plasma con una determinada densidad y temperatura para emitir en esas longitudes de onda. Debido a la alta conductividad, el plasma coronal se encuentra restringido a moverse en la dirección del campo magnético. Además la conductividad térmica a lo largo de la dirección del campo es 13 órdenes de magnitud mayor que en la dirección perpendicular. De este modo, las imágenes de la corona solar son una indicación de la topología del campo magnético. Como regla general las estructuras más calientes están asociados con regiones de campo magnético más intenso y, por tanto, de mayor luminosidad en rayos X y EUV. Todos estos factores insinúan que el campo magnético juega un papel importante en el problema del calentamiento de la corona [Parnell & Moortel 2012], [Golub et al. 1997].

Las estructuras magnéticas observadas en la corona suelen clasificarse en abiertas o cerradas. Las regiones donde se originan las líneas magnéticas abiertas son llamadas agujeros coronales, y aparecen como zonas oscuras en las imágenes en rayos X y EUV. En los agujeros coronales el plasma solar escapa en forma aproximadamente radial conformando el denominado viento solar. Este fenómeno ocurre debido a que el campo gravitatorio solar no puede compensar los fuertes gradientes de presión existentes. Se produce así un flujo saliente de plasma solar, guiado por el campo magnético solar que inunda el espacio interestelar.

Por otro lado, las áreas más brillantes de la imagen llamadas regiones activas presentan un campo magnético intenso donde se observan estructuras magnéticas cerradas o arcos magnéticos. Cada línea magnética de una región activa tiene ambos extremos sumergidos en la región convectiva, debajo de la fotósfera y conecta regiones de polaridad opuesta. La estructura espacio-temporal de estos arcos es muy compleja y variada a lo largo del ciclo solar [Aschwanden 2005].

2.3. Fulguraciones

Las observaciones demuestran que las fulguraciones son los fenómenos más explosivos en la atmósfera solar, liberando una enorme cantidad de energía, hasta un máximo de 10^{32} erg en unos pocos minutos (1-100 min) [Fletcher et al. 2011], [Benz 2017]. Tal proceso de liberación de energía da lugar a la eyección de masa coronal, aceleración de partículas no térmicas y al calentamiento del plasma (hasta $\approx 10^7 \text{ K}$). Estos procesos emiten radiación en casi todas las longitudes de onda: radio, luz blanca, EUV, rayos X blandos, rayos X duros e incluso rayos γ durante grandes fulguraciones. [Aschwanden 2005]

La figura 2.4 muestra el registro de una fulguración, mediante dos herramientas distintas, ocurrida el 4 de Noviembre de 2003. La imagen fue tomada en EUV (19.5 nm) por el instrumento EIT a bordo de la nave espacial SOHO. Esta fulguración ocurrió en una gran región activa y es recordada como una de las fulguraciones más intensa en rayos X registrada desde el espacio. También se presenta el flujo de rayos X medido en el período considerado por el GOES. La fulguración corresponde al pico más alto observado el 4 de Noviembre. Puede verse que otras fulguraciones ocurrieron 48 antes. Los picos más chicos también son fulguraciones mucho menos intensas ocurriendo en algún lugar del disco solar [Aschwanden 2013].

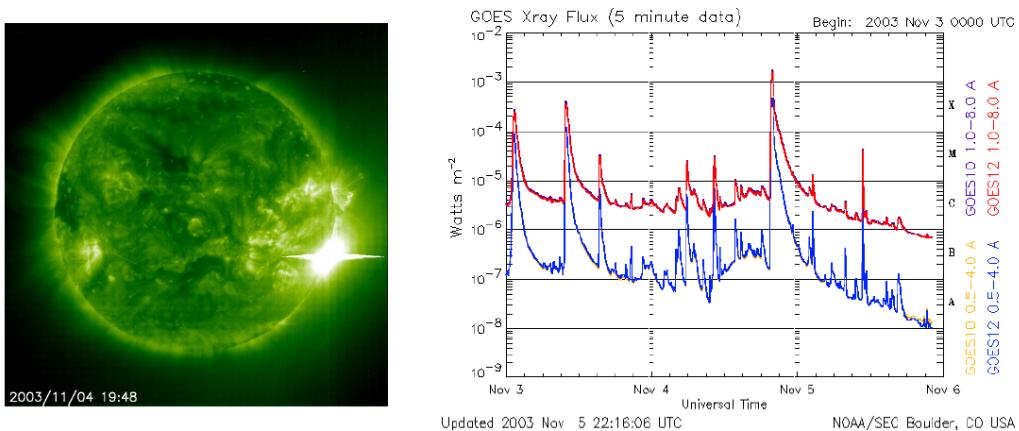


Figura 2.4: Izquierda: Imagen en EUV (19.5 nm) del disco solar el 4 de Noviembre de 2003 (los dos picos horizontales finos y brillantes son artefactos causados por la sobresaturación de píxeles en el CCD de la cámara). Derecha: una serie temporal de rayos X blandos del GOES en dos bandas de longitudes de onda durante un período de 3 días, incluyendo el 4 de Noviembre. La fase de inicio es muy rápida (la escala vertical es logarítmica), y es seguida por una fase de decaimiento más lenta. Este patrón es independiente del tamaño de la fulguración. https://soho.nascom.nasa.gov/hotshots/2003_11_04/

Las grandes fulguraciones, incluidas las de la figura 2.4, se producen dentro de grandes regiones activas, que como se mencionó anteriormente, son regiones fuertemente magnetizadas coincidentes a niveles fotosféricos con manchas solares. Esta coincidencia espacial deja poca duda de que el campo magnético solar proporciona el depósito de energía que alimenta el fenómeno de las fulguraciones.

Las fulguraciones han sido ampliamente estudiadas, en parte debido a su potencial impacto en las redes de comunicaciones e infraestructuras tecnológicas, especialmente por satélites en órbitas donde se reduce el efecto de blindaje del campo magnético de la Tierra.

Si bien no se conocen fulguraciones que hayan superado los $5 \times 10^{32} \text{ erg}$, no existe un límite inferior para la magnitud de las mismas. Es usual denominar fulguraciones (a secas) a los eventos de alrededor de 10^{32} erg , micro-fulguraciones a los de $10^{27} - 10^{30} \text{ erg}$ y nano-fulguraciones a los de $10^{24} - 10^{27} \text{ erg}$ [Aschwanden 2005].

Por la amplia variedad de tamaños de fulguraciones observadas y la habitualidad de su ocurrencia es razonable abordar el estudio estadístico de tales fenómenos.

Sea $f(E) dE$ la fracción de fulguraciones que liberan una cantidad de energía entre E y $E + dE$ por unidad de tiempo. Una sorprendente característica de la función de densidad de probabilidad de la energía $f(E)$ o PDF (*Probability Density Function*) reconstruida a partir de observaciones en UV, EUV y rayos X es que la misma sigue una ley de potencia:

$$f(E) = f_0 E^{-\alpha} \quad (2.1)$$

con $\alpha > 0$ y f_0 una constante de normalización. Actualmente esta ley se mantiene durante ocho órdenes de magnitud en E .

Leyes de potencia similares se obtienen para el máximo del flujo de energía (P) y duración de las fulguraciones (T). En la figura 2.5 se presentan datos observacionales obtenidos a partir de diferentes fuentes y en distintas regiones del espectro electromagnético, con sus respectivos valores de α [Charbonneau 2001], [Aschwanden 2009].

La conversión del flujo de rayos X o EUV observados en términos de la liberación de energía volumétrica es un ejercicio muy complicado. Para lograrlo es necesario realizar una serie de hipótesis en torno a la forma geométrica de la región, las condiciones físicas dentro del volumen, etc. Además, la resolución espacial y temporal finita y la presencia de un umbral de detección dificultan la definición observacional de lo que constituye una fulguración. Estos problemas de observación y análisis de datos dan como resultado valores significativamente diferentes de los índices de leyes de potencia, incluso cuando se trabaja con el mismo conjunto de datos.

Por otro lado, mientras que la tasa media de fulguraciones varía alrededor de un factor veinte en el transcurso del ciclo solar, los índices de la ley de potencia permanecen esencialmente constantes. Además, las PDF para distintas regiones activas muestran índices de leyes de potencia estadísticamente indistinguibles. Esto sugiere que estos procesos de liberación de energía son intrínsecos a los campos magnéticos coronales [Charbonneau 2001].

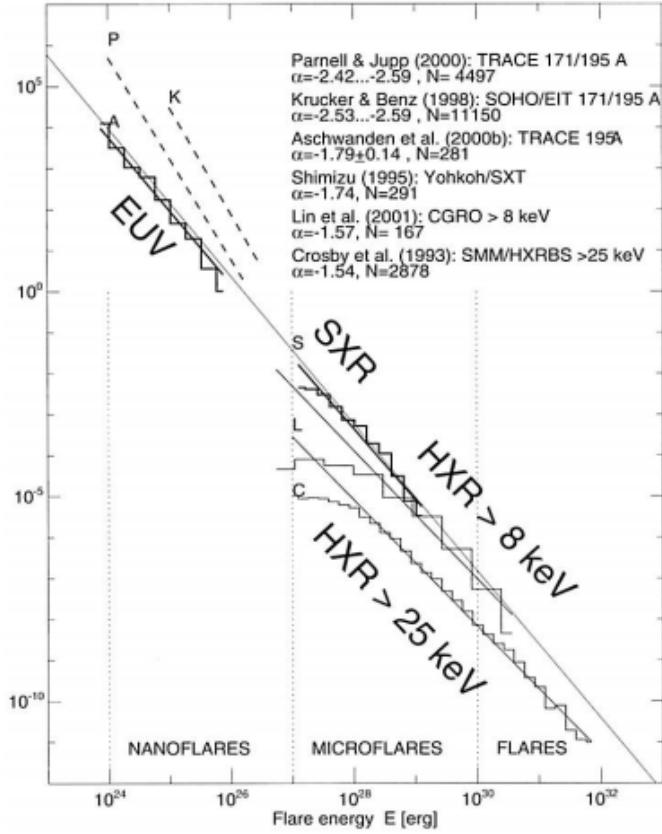


Figura 2.5: PDF de la energía de fulguraciones utilizando una escala normalizada en unidades de 10^{-50} fulguraciones por unidades de tiempo, área y de energía. La energía se define en términos de la energía térmica $E = 3n_e k_b T V$ para EUV y rayos X blandos, y en términos de la energía no térmica $> 25 \text{ keV}$ o $> 8 \text{ keV}$ [Aschwanden 2009].

3. Marco teórico para la descripción del plasma coronal

La materia que conforma la corona solar es un gas eléctricamente cargado por eso se desarrollarán, en este capítulo, las ecuaciones que permiten describir su dinámica: las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (y las aproximaciones que conducen a ellas). A partir de éstas, se analizarán ciertos aspectos relevantes para la dinámica coronal y se presentarán los mecanismos básicos que permiten modelar el fenómeno de las fulguraciones solares y su influencia en el calentamiento coronal.

3.1. Ecuaciones básicas de la magnetohidrodinámica

Un plasma es un gas de partículas cargadas eléctricamente. El plasma más simple es el formado por protones y electrones libres, que es, precisamente, la composición básica del plasma de hidrógeno en el sol. Estas partículas cargadas producen, al desplazarse, campos electromagnéticos los que, al mismo tiempo, modifican sus propias trayectorias. Por lo tanto, la descripción del plasma debe dar cuenta en forma autoconsistente de la evolución de las partículas y de los campos producidos por ellas.

La aproximación magnetohidrodinámica (MHD) propone tratar al plasma como un medio continuo. Esto es válido mientras la escala de longitud de las variaciones de los campos sea mucho mayor que las escalas internas típicas del plasma. Esta relación se satisface ampliamente en plasmas astrotípicos bajo campos magnéticos suficientemente intensos, tal como el que confina el plasma coronal (ya que el radio de Larmor, una escala típica del plasma, es inversamente proporcional al campo).

La segunda aproximación consiste en suponer que el plasma se encuentra en equilibrio termodinámico con funciones de distribución aproximadamente mawxellianas. Esta aproximación resulta apropiada para estudiar la evolución lenta de un plasma, es decir, para tiempos típicos mucho mayores que el tiempo entre colisiones.

De esta forma, esta descripción será válida para escalas de variación temporal mucho mayores que el tiempo entre colisiones y para escalas de longitud mucho mayores que el camino libre medio.

Las ecuaciones MHD se obtienen combinando las Leyes de Maxwell con las ecuaciones de fluidos. La ecuación de evolución para el campo de velocidades \vec{u} , conocida como ecuación de Navier-Stokes, se obtiene de plantear la conservación de momento para un elemento de fluido [Priest 2014],

[Golub et al. 1997], [Choudhuri 1998]:

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = \rho(\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\nabla p + \vec{F}_{vol} + \vec{F}_{visc}$$

donde ρ es la densidad de masa, ∇p es la fuerza por unidad de volumen debida a la presión, \vec{F}_{vol} representa el término de las fuerzas de volumen presentes y \vec{F}_{visc} el de las fuerzas viscosas.

En las fuerzas de volumen se considera la fuerza de Lorentz $q(\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B})$ debida a la presencia de los campos eléctricos \vec{E} y magnéticos \vec{B} que actúan sobre las cargas q en el elemento de fluido. En la aproximación de cuasi neutralidad, la carga neta en un elemento de fluido es cero aunque no así la densidad de corriente \vec{j} debido al movimiento relativo de los iones y electrones. Con esta aproximación, sólo influye el término debido al campo magnético que es, utilizando unidades CGS, de la forma $\frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c}$. Además de la fuerza electromagnética se debería considerar dentro del término de fuerzas de volumen la fuerza gravitatoria, pero se despreciarán sus efectos. Esta aproximación es razonable para la mayoría de los arcos magnéticos coronales puesto que su altura es inferior a la escala de alturas gravitatorias. La fuerza viscosa por unidad de volumen se obtiene a partir de la divergencia del tensor de esfuerzos. En el caso de estudio la fuerza viscosa se reduce a un término difusivo con una viscosidad dinámica escalar μ de la forma $\mu \nabla^2 \vec{u}$.

Finalmente, la ecuación de evolución del campo de velocidades es:

$$\rho(\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\nabla p + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.1)$$

Es importante notar que la fuerza de Lorentz está orientada en forma perpendicular a la dirección del campo magnético y, por lo tanto, la aceleración a lo largo de la línea de campo debe ser producida por otras fuerzas (gravitatorias o gradiente de presiones). Usando propiedades del álgebra vectorial la ecuación (3.1) puede escribirse:

$$\rho(\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}(\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (3.2)$$

El segundo término del lado derecho es no nulo si \vec{B} varía en la dirección de \vec{B} y representa una tensión magnética paralela a \vec{B} , que tiene un efecto restitutivo cuando las líneas de campo están curvadas. El tercer término representa una fuerza debida a una presión magnética que actúa en todas las direcciones.

La presión magnética y la térmica se pueden combinar en la ecuación (3.2) en un gradiente de presión total $-\nabla P = -\nabla(p + \frac{B^2}{8\pi})$. El cociente entre las presiones se denomina coeficiente β del plasma:

$$\beta = \frac{p}{B^2/8\pi} \quad (3.3)$$

Un valor de β muy pequeño indica que la dinámica está gobernada por el campo magnético. El plasma domina a los campos magnéticos en la fotósfera ($\beta > 1$) y lo contrario ocurre en la corona (β

< 1). En un arco coronal con $B \approx 100 G$, densidad $n \approx 1 \times 10^9 cm^{-3}$ y temperatura $T \approx 10^6 K$, se obtiene $\beta \approx 0.001$ [Aschwanden 2005].

La ecuación de evolución para el campo magnético \vec{B} se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \quad (3.4)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_c \quad (3.7)$$

donde \vec{j} y ρ_c , son la densidad de corriente y de carga, respectivamente. En la ecuación (3.5) puede despreciarse el último término (corrientes de desplazamiento) cuando las escalas de variación espacial l y temporal t de los campos son tales que $l/t \ll c$.

Para completar este sistema es necesaria una ley que relacione los campos y la densidad de corriente: la ley de Ohm, que en su forma más simple es:

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c} \right) \quad (3.8)$$

donde σ es la conductividad eléctrica. En la corona solar $\sigma \approx 10^{16} s^{-1}$, que es comparable a la conductividad de un buen conductor metálico a temperatura ambiente [Golub et al. 1997].

Reemplazando la ley de Ohm (3.8) y Ampère (3.5) en la ley de Faraday (3.4), se obtiene la ecuación de inducción magnética:

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (3.9)$$

donde $\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ es la difusividad magnética.

Las ecuaciones (3.2) y (3.9) describen la evolución del campo magnético y de velocidades que, como se observa, están fuertemente acoplados a través de los términos $\frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c}$ y $\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})$. Estos términos, junto con el convectivo, muestran que las ecuaciones de evolución son no lineales y, generalmente, no tienen solución analítica.

A las ecuaciones de evolución de los campos \vec{u} y \vec{B} se deben agregar ecuaciones de evolución para la densidad del plasma ρ y para la presión p . Para la densidad se plantea la ecuación de continuidad de la masa:

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.10)$$

La presión se relaciona con la densidad y la temperatura mediante una ecuación de estado. La evolución de la temperatura se obtiene, a su vez, de la ecuación de balance térmico en el cual intervienen términos de calentamiento, conducción del calor y radiación. La tasa de calentamiento viene dada por la disipación Joule y la disipación viscosa provenientes de los términos difusivos en las ecuaciones de evolución de los campos de velocidad y magnético [Priest 2014].

Cuando la velocidad del fluido es pequeña frente a la velocidad de propagación de ondas acústicas, vale la aproximación de incompresibilidad $\nabla \cdot \vec{u} = 0$. Incorporando esta hipótesis a la ecuación de continuidad (3.10) se obtiene que la densidad de cada elemento de fluido permanece constante.

En síntesis, realizando las suposiciones mencionadas, se obtiene una sistema de ecuaciones cerradas fuertemente acopladas para obtener el campo magnético y el de velocidades a partir de su estado inicial y condiciones de contorno adecuadas:

$$\begin{aligned}\rho(\partial_t \vec{u} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) &= -\nabla p + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c} + \mu \nabla^2 \vec{u} \\ \partial_t \vec{B} &= \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

En la siguiente sección se analizarán algunos casos límites que permitirán interpretar las implicancias de estas ecuaciones para la evolución del campo magnético \vec{B} .

3.2. Difusión y congelamiento de líneas magnéticas

Cuando el fluido está en reposo o bien cuando las velocidades son pequeñas y la difusividad magnética η es grande, la ecuación de inducción (3.9) se reduce a una ecuación de difusión:

$$\partial_t \vec{B} = \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (3.11)$$

Esto implica que las variaciones del campo en una escala de longitud l se destruyen en una escala de tiempo $t_d = l^2/\eta$. Por ejemplo en las fulguraciones solares, donde se libera energía magnética en una escala de tiempo del orden de los minutos, se requiere la formación de una escala espacial de cientos de metros [Priest 2014]: mientras más pequeña sea la escala espacial, más rápido se difunde el campo.

En el límite opuesto, $\eta \rightarrow 0$ (MHD ideal) es decir, cuando el tiempo característico de la variación del campo magnético es chico frente al tiempo de difusión t_d la ecuación de evolución se reduce a:

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) \quad (3.12)$$

Esta ecuación implica que el flujo magnético (ϕ) que atraviesa una superficie (S) rodeada por una

curva cerrada (C) que se mueve con el fluido, es constante.

Dada una superficie S , se define el flujo de \vec{B} a través de S como $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$. Si la superficie S se mueve solidariamente al fluido, la variación temporal del flujo dependerá entonces no sólo de la variación del campo sino también de las variación de S :

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_S \partial_t \vec{B} d\vec{s} + \oint_C \vec{B} \cdot (\vec{v} \times d\vec{l}) \quad (3.13)$$

Utilizando el teorema de Stokes y la ecuación de inducción en el límite ideal (3.12), resulta ser que $\frac{d\phi}{dt} = 0$. Esto muestra que las líneas de \vec{B} acompañan al fluido en sus movimientos; están “congeladas” al plasma. El fluido puede moverse libremente a lo largo de los arcos magnéticos coronales, pero al moverse en forma perpendicular, o bien arrastra consigo a las líneas o bien es frenado por éstas. Una consecuencia de esta condición es que dos líneas magnéticas no pueden cortarse entre sí, luego no puede haber un cambio topológico del campo en MHD ideal.

El primer término de la ecuación de inducción (3.9) es un término de transporte, mientras que el segundo es un término difusivo. Como resultado, las líneas son parcialmente transportadas por el flujo y parcialmente difundidas a través del mismo. Los dos regímenes expuestos pueden ser parametrizados por el cociente entre los dos términos del lado derecho de la ecuación de inducción:

$$\left| \frac{\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B})}{\eta \nabla^2 \vec{B}} \right| \approx \frac{u/l}{\eta/l^2} = \frac{ul}{\eta} \equiv R_M \quad (3.14)$$

Este cociente se denomina *Número de Reynolds Magnético* R_M , donde u es una velocidad característica del fluido y l una longitud característica. Un alto número de Reynolds magnético ($R_M \gg 1$) implica que el término no lineal domina sobre el término difusivo y el régimen puede ser turbulento. En el caso contrario ($R_M \ll 1$) la difusión domina sobre el transporte.

El plasma coronal es un muy buen conductor, luego $\eta \approx 0$ resulta una muy buena aproximación y $R_M \approx 10^8 - 10^{13}$ para escalas macroscópicas. Esto, sumado al hecho que en la corona $\beta \gg 1$, explica el confinamiento del plasma en los arcos magnéticos coronales [Golub et al. 1997].

3.3. Magnetohidrostática

La magnetohidrostática es relevante para estudiar una variedad de estructuras solares que parecen permanecer inmóviles o moverse lentamente durante largos períodos de tiempo. Por ejemplo, las estructuras del campo magnético coronal, que a menudo parecen estacionarias para tiempos que son largos en comparación con el tiempo de Alfvén. La velocidad de Alfvén es uno de los parámetros fundamentales que determina que tan rápido se propagan las perturbaciones de \vec{B} : en las estructuras magnéticas coronales se tiene $v_A \approx 10^4 \text{ km s}^{-1}$ [Golub et al. 1997].

Para una situación estática ($\vec{u} = 0$) y considerando $\mu = 0$, la ecuación (3.2) se reduce a:

$$0 = -\nabla p + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (3.15)$$

Es importante notar que el campo magnético que satisface esta ecuación, en general, no es una solución estática de la ecuación de inducción (3.9). En ausencia de movimiento, la ecuación (3.9) queda:

$$\partial_t \vec{B} = \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (3.16)$$

Se espera que el campo magnético se difunda, eventualmente interrumpiendo el equilibrio de fuerzas (3.15) pero, aun así, resulta útil considerar esas soluciones. En el límite de la astrofísica, con escalas de longitud y tiempo muy grandes, la difusión del campo magnético es, a menudo, tan lenta que la ecuación (3.15) puede tomarse como una condición de equilibrio aproximada. Si las diferentes fuerzas no están en equilibrio, usualmente los movimientos resultantes tienen escalas de tiempo, por lo general, mucho más pequeñas que la escala de tiempo de decaimiento de \vec{B} [Choudhuri 1998].

Para plasmas con $\beta \ll 1$, donde la presión del gas es despreciable frente a la presión magnética, el equilibrio de fuerzas supone:

$$\vec{j} \times \vec{B} = 0 \quad (3.17)$$

Un campo magnético que cumpla con esta condición es conocido como campo libre de fuerzas (*force free*) y se cumple que \vec{J} y \vec{B} son paralelos en todo punto.

3.4. Energía MHD

Considerando las ecuaciones MHD (3.2) y (3.9) y multiplicando escalarmente por \vec{u} y \vec{B} , respectivamente, se puede escribir una expresión para la energía de los campos. Operando algebraicamente se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \left(\rho u^2 + \frac{B^2}{4\pi} \right) dV = - \oint \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \vec{u} + p \vec{u} + \vec{E} \times \vec{B} \right) \cdot \hat{n} dS - \eta \int J^2 dV + \mu \int \vec{u} \nabla^2 \vec{u} dV \quad (3.18)$$

El lado izquierdo de la igualdad es la derivada temporal de la energía MHD del sistema (cinética más magnética). El primer término de volumen en el lado derecho de la ecuación representa la disipación Joule, y tiene signo definido negativo. El segundo representa la pérdida de energía por fricción. La integral de superficie representa el intercambio de energía a través del contorno que encierra al fluido: el primer término en la integral corresponde al flujo de energía cinética, el segundo al trabajo realizado por la presión y el tercero al flujo del vector de Poynting. En el caso ideal ($\eta = \nu = 0$), la integral de superficie se desvanece si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

(i) $\vec{u} \cdot \hat{n} = 0 = \vec{B} \cdot \hat{n}$ en el contorno; (ii) $\vec{u} = 0$ en el contorno; (iii) las condiciones de contorno son periódicas. En cualquiera de los casos, el sistema es aislado (no intercambia energía con el exterior) y la energía se conserva en el límite ideal [Milano 1999].

3.5. Calentamiento coronal

Como se mencionó en el capítulo anterior, el problema del calentamiento coronal consiste en identificar una fuente de energía capaz de mantener al plasma a una temperatura dos órdenes (o más) de magnitud por encima de la fotósfera (incluso lejos de las regiones activas, la temperatura alcanza $\approx 10^6 K$). Cualquier teoría, al mismo tiempo, deberá ser consistente con el balance de energía coronal.

Contando todos los mecanismos de pérdida de energía de la corona (radiación, viento solar, conducción de calor), la energía por unidad de tiempo requerida para mantener las altas temperaturas coronales asciende a $\approx 10^{21} W$, que es solo el 0.001 % de la luminosidad total solar ($\approx 3.86 \times 10^{26} W$). Sin embargo, los complejos mecanismos que permiten explicar cómo esta energía disponible llega a calentar la corona son aún motivo de gran cantidad de trabajos de investigación [Parnell & Moortel 2012].

En una primera aproximación el proceso de calentamiento coronal puede dividirse en tres etapas: la generación de la energía mecánica, el transporte de la energía, y la disipación.

Hay un acuerdo en que la fuente de energía es el movimiento turbulento del plasma en y debajo de la fotósfera. Dado que en la fotósfera $\beta \gg 1$, el campo magnético no es dinámicamente importante por debajo de la fotósfera y es pasivamente transportado por los movimientos de fluido. Es decir, el campo de velocidades fotósferico mueve continua y aleatoriamente las bases de los arcos coronales a través de la superficie solar a distintas escalas temporales, realizando un trabajo positivo sobre ellos. De este modo, una fracción de la energía cinética fotósferica es transferida a la estructura magnética coronal. En relación con el tiempo de Alfvén, los movimientos rápidos generan ondas y los movimientos lentos resultan en una serie de configuraciones, aproximadamente, libres de fuerza del campo magnético.

La corona es calentada mayormente por disipación Óhmica de las corrientes eléctricas y/o por las disipación viscosa de las ondas MHD y/o la turbulencia. Los coeficientes de disipación (la viscosidad cinemática ν y la resistividad η) son lo suficientemente pequeños en la corona como para que los tiempos de disipación sean extremadamente largos, comparados con los tiempos típicos de evolución de las estructuras coronales. Para disminuir los tiempos de disipación es necesario un gradiente de campo magnético y/o campo de velocidad muy grande en una distancia del orden del km o menor. Es decir que, en todos los casos, la conversión de la energía magnética a la energía térmica se produce en escalas espaciales que son mucho más pequeñas de lo que puede ser observado directamente por la instrumentación solar actual [Golub et al. 1997].

Se propusieron distintos mecanismos de calentamiento que, probablemente, funcionen en diferentes regiones de la atmósfera solar, por lo que el reto consiste en refinar los modelos actuales para estimar

cuantitativamente su importancia relativa. Esencialmente pueden distinguirse dos tipos de abordajes: ondas MHD y reconexión magnética. En la siguiente sección se presentará este último mecanismo ya que será fundamental para estudiar los eventos de liberación impulsiva de energía que se producen en la corona solar: las fulguraciones solares [Parnell & Moortel 2012].

3.6. Reconexión magnética

Todos los modelos de fulguraciones solares, y algunos modelos del calentamiento de la corona, recurren al mecanismo de reconexión magnética como ingrediente fundamental.

Cómo se mencionó anteriormente, dadas las escalas espaciales involucradas en el plasma coronal, la dinámica de gran escala puede ser descripta en el marco de la MHD ideal, en la cual se tiene congelamiento entre el campo magnético y la materia ($R_M \gg 1$). Sin embargo, si la resistividad es pequeña (no nula), se podría evolucionar a un régimen con $R_M \ll 1$, pues su efecto puede ser importante en una región donde el gradiente del campo magnético sea grande. Grandes gradientes del campo magnético están asociados con grandes densidades de corriente. Estas regiones se denominan hojas de corriente. La reconexión magnética da lugar a importantes efectos [Priest 2014]:

- i) permite cambiar la conectividad y topología de las líneas de campo magnético lo cual afecta el camino de partículas y la conducción de calor,
- ii) parte de la energía magnética es convertida en calor por disipación óhmica y energía cinética,
- iii) se crean intensas corrientes eléctricas y campos eléctricos, así como también ondas de choque que pueden influir en la aceleración de partículas a velocidades no térmicas.

Por su importancia histórica y su relevancia respecto del modelo de calentamiento coronal que se presentará más adelante, se desarrollará en esta sección el modelo desarrollado por Sweet (1958) & Parker (1957) [Parker 1957], [Sweet 1958]. Este modelo considera un flujo incompresible bidimensional en una situación estacionaria y una región de reconexión magnética rectangular de ancho 2δ y de largo 2Δ como se muestra en la figura 3.1.

El plasma transporta las líneas de campo de intensidad B_{in} con una velocidad de entrada u_{in} (dirigidos en forma opuesta) hacia la hoja de corriente donde se difunden por disipación Joule. Lo que resta de las líneas aparece reconnectado por los costados. Estas nuevas líneas reconectadas de intensidad B_{out} son expulsadas por el campo de velocidades saliente u_{out} y se integran a los manojos de líneas que estaban previamente a los laterales. Los puntos verdes representan la corriente cuya dirección sale del plano.

El plasma que se acerca a la zona de difusión se asume que cumple $\beta \ll 1$ pues, de esa manera, se crea una diferencia de presión magnética que acelera a estas estructuras hacia la hoja de corriente. Se propone como objetivo calcular u_{in} en términos de los parámetros del problema debido a que, esencialmente, mide la eficiencia de este proceso.

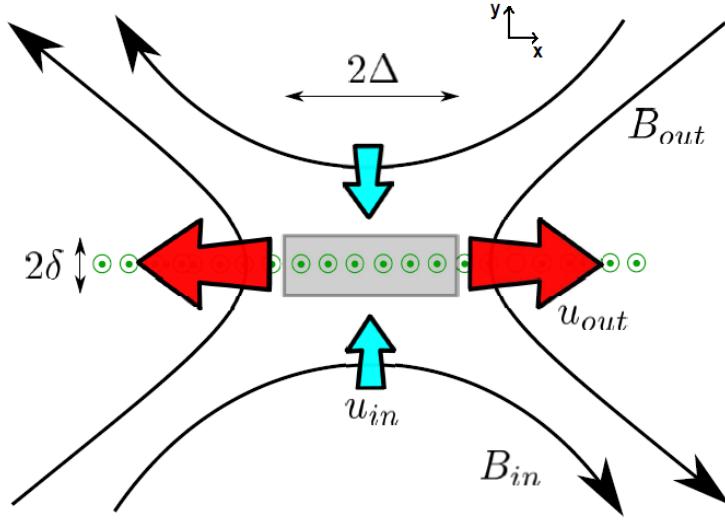


Figura 3.1: Modelo de reconexión de Sweet-Parker. Dos estructuras magnéticas opuestas se acercan (bajo el régimen $R_M \gg 1$). El campo magnético se difunde en la zona disipativa denominada hoja de corriente ($R_M \ll 1$). Las líneas reconectadas son expulsadas por los costados con velocidad u_{out} y se vuelve a $R_M \gg 1$. El origen del sistema de coordenadas se toma en el centro de la hoja de corriente [Andrés 2015].

Asumiendo que el plasma es incompresible ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) se obtiene

$$u_{in}\Delta = u_{out}\delta \quad (3.19)$$

luego $u_{in} \ll u_{out}$, por que por hipótesis $\Delta \gg \delta$.

En esta configuración, el campo \vec{E} apunta fuera del plano xy y en el régimen estacionario satisface $E_z \sim cte$ por la ecuación de Faraday (3.4). Usando la ley de Ohm (3.8) se puede obtener el valor de \vec{E} en tres puntos diferentes: $E_z(0, \delta) \approx -u_{in}B_{in}$, $E_z(0, 0) \approx -\eta j_z \approx -\eta \frac{B_{in}}{\delta}$ y $E_z(\Delta, 0) \approx -u_{out}B_{out}$. Igualando los módulos se llega a que:

$$u_{in} = \frac{\eta}{\delta} \quad (3.20)$$

$$B_{in}\delta = B_{out}\Delta \quad (3.21)$$

Por otro lado, se considera la componente x de la ecuación de movimiento (3.1) sin disipación y en el caso estacionario. Además, se desprecia el término del gradiente de presión hidrodinámica, pues se asume que es la misma a lo largo de la hoja de corriente [Priest 2014]. Haciendo un análisis para estimar el orden de magnitud de cada término y utilizando la ecuación (3.21) se llega a:

$$\frac{B_{in}^2}{8\pi} \approx \frac{\rho u_{out}^2}{2} \quad (3.22)$$

es decir que la energía magnética inicial se convierte en cinética luego de la reconexión. De la ecuación

(3.22) se puede despejar u_{out} obteniéndose:

$$u_{out} \approx \frac{B_{in}}{\sqrt{4\pi\rho}} = v_A \quad (3.23)$$

donde v_A es la velocidad de Alfvén. El plasma es acelerado hasta la velocidad de Alfvén al atravesar la zona de reconexión. Finalmente, se define la eficiencia del proceso como el flujo magnético reconectado por unidad de tiempo:

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = B_{in}u_{in} = B_{in}u_{out}\frac{\delta}{\Delta} = B_{in}v_A\frac{\delta}{\Delta} = B_{in}v_AM = B_{in}v_A\frac{1}{\sqrt{S}} \quad (3.24)$$

donde se utilizó la ecuación (3.19), (3.23) y se definió la tasa de reconexión adimensional $M = \sqrt{\frac{\eta}{v_A\Delta}} = S^{-1/2}$, con S el número de Lundquist $S \equiv \frac{v_A\Delta}{\eta}$. Típicamente en la corona $S \approx 10^{6-12}$, esto da un tiempo característico de reconexión del orden de días lo cual es demasiado largo para explicar los fenómenos impulsivos en la corona solar. En ese sentido, la reconexión de Sweet-Parker es denominada reconexión lenta [Priest 2014].

3.7. Conjetura de Parker: Calentamiento coronal y fulguraciones solares

Parker [Parker 1983], [Parker 1988] propuso que la corona solar podría ser calentada por la disipación de muchas hojas de corriente que surgen espontáneamente en los arcos magnéticos coronales debido a que se entrelazan y retuercen por los movimientos de sus bases ancladas en la fotósfera. En la figura 3.2 se muestra un esquema del escenario propuesto por Parker que se describe a continuación:

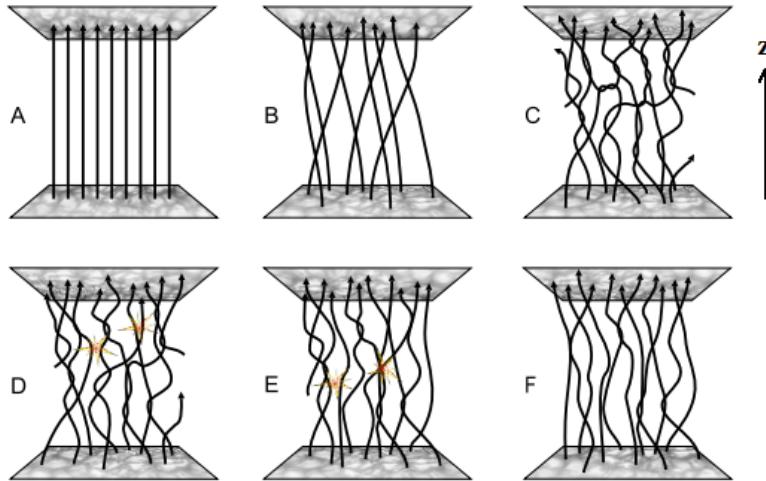


Figura 3.2: Representación de los arcos magnéticos coronales. Los planos representan la fotósfera solar. Inicialmente el movimiento convectivo horizontal enreda las líneas magnéticas (A → B). Las discontinuidades tangenciales magnéticas se forman cuando la línea intenta relajarse a un estado libre de fuerza bajo las restricciones topológicas dictadas por la alta conductividad eléctrica (C). La inestabilidad de estas discontinuidades tangenciales conduce a la reconexión magnética y a la liberación de energía espacialmente localizada (D) y a la formación de hojas de corriente en regiones vecinas que originalmente eran estables (D → E). Si bien la cascada de sucesos de reconexión ha reducido la tensión global (comparar C y F), el sistema conserva sin embargo un mayor nivel de estrés magnético interno que en su configuración original (A) [Aschwanden 2013].

Para simplificar el estudio de la dinámica del sistema Parker sugirió que la curvatura del arco coronal no juega ningún rol importante en el proceso de relajación del campo magnético. Por ello, se consideran arcos magnéticos rectos (B uniforme), que se extienden en la dirección z con sus bases ancladas en los planos $z = 0$ y $z = L$ (que representan la fotósfera) tal como se muestra en la figura 3.2 A.

En un arco coronal típico, la densidad de energía cinética del plasma, en y por debajo de la fotósfera, excede la densidad de energía magnética. Como resultado, las bases serán aleatoriamente mezcladas por los movimientos horizontales del fluido convectivo.

La velocidad característica en la que el campo coronal puede reaccionar a los movimientos fotosféricos es del orden de velocidad de Alfvén ($\sim 10^4 \text{ km s}^{-1}$), que es mucho más rápida que la velocidad fotosférica media ($\sim 1 \text{ km s}^{-1}$). Por lo tanto, el campo magnético coronal responde de forma quasi-estática a los cambios en las condiciones límite fotosféricas, manteniendo continuamente un estado, aproximadamente, libre de fuerzas a través de la corona [Parker 1988].

En la corona, debido a la fuerte caída de densidad con la altura, la densidad de energía magnética excede la del plasma. La alta conductividad eléctrica del plasma coronal plantea una fuerte restricción topológica: las líneas de campo magnético no pueden cruzarse. Como consecuencia, el campo magnético se enreda (figura 3.2 B-C) alcanzando un estado quasi-estático libre de fuerza en todas partes, excepto donde las líneas de campo son forzadas a enredarse unas con otras y, localmente, se forma una discontinuidad tangencial. Esta discontinuidad tiene asociada una hoja de corriente dentro de la cuál fluye una densidad de corriente eléctrica \vec{j} , según la ley de Ampére (3.5). Cuando esta densidad de corriente es lo suficientemente intensa el plasma se vuelve inestable y se produce la reconexión de líneas magnéticas. Esto conlleva a la rápida transformación de la energía magnética allí localizada en energía cinética y térmica (figura 3.2 D).

El escenario aquí descripto no es suficiente para producir fulguraciones de todos los tamaños tal como predicen las observaciones. Parker sugirió que, para que esto sea posible, tiene que existir un valor umbral para la intensidad de \vec{j} . Cuando la intensidad de dicha densidad de corriente es lo suficientemente alta, se produce la reconexión y esto modifica las condiciones físicas en sitios vecinos, de tal manera que se generan nuevas inestabilidades que, a su vez, desencadenan otros eventos de reconexión en otros sitios vecinos (figura 3.2 D-E), y así sucesivamente hasta que se restablece la estabilidad en toda la estructura (figura 3.2 F). Bajo este punto de vista, una gran fulguración es sólo un conjunto de eventos elementales de reconexión, denominados *nanoflares*, ocurriendo en cascada [Aschwanden 2013].

La mayor parte de la energía magnética liberada por el proceso de reconexión termina calentando el plasma que rodea el sitio de la fulguración. Teniendo en cuenta la ecuación (2.1), la energía total liberada por unidad de tiempo por el conjunto de fulguraciones es:

$$E_{total} = \int_{E_{min}}^{E_{max}} f(E) E dE = f_0 \left[\frac{E^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right] \quad (3.25)$$

Experimentalmente se obtiene que la PDF es una ley de potencia en todas las escalas resueltas.

Si $\alpha < 2$, las fulguraciones más grandes dominan la liberación de energía. Por el contrario, si $\alpha > 2$ las fulguraciones más pequeñas son energéticamente dominantes.

En 1984 se registraron eventos en rayos X blandos de energía 10^{24} erg . Esto llevó a Parker a especular que estos eventos, a los que llamó nanoflares, podrían calentar la corona, siempre que ocurrieran en un número suficiente. Esta conjetura requiere que $\alpha > 2$ [Charbonneau 2001].

Para fulguraciones regulares, que ocurren principalmente en regiones activas, se encontró $\alpha \approx 1.53$. La energía liberada por las fulguraciones en regiones activas no es suficiente para calentar la corona. Sin embargo, las nanofulguraciones se producen no sólo en zonas activas, sino también en regiones tranquilas y en agujeros coronales y, en todos los casos, la PDF sigue una ley de potencia. En 1998 se observó que los microflares ($10^{25}\text{-}10^{26} \text{ erg}$) contribuían en un 20 % al calentamiento de las regiones tranquilas, con $\alpha \approx 2.6$. Diferentes autores realizaron un análisis de los nanoflares registrados por TRACE y encontraron que α varía en un rango $1.5 < \alpha < 2.5$ que es demasiado amplio para apoyar o no la conjetura de Parker. Claramente, un cálculo teórico de α sería un complemento útil para los análisis observacionales existentes [Podladchikova 2006], [Charbonneau 2001].

Las leyes de potencia encontradas sugieren una cierta invariancia de escala entre las fulguraciones, y son también compatibles con la hipótesis de Parker de que grandes fulguraciones podrían consistir en una multitud de nanoflares. Este punto de vista sugiere una organización o cooperación entre fulguraciones. Tales fenómenos son difíciles de abordar teóricamente o numéricamente con los modelos MHD debido a la amplia gama de escalas espaciales y temporales involucradas. Existen simulaciones numéricas que si bien corresponden a números de Reynolds moderados, no solo reproducen cualitativamente el escenario de nanoflares descriptos por Parker, sino que la estadística de eventos de dissipación resulta $\alpha \approx 1.5$ [Dmitruk & Gómez 1997], [Dmitruk et al. 1998], [Dmitruk & Gómez 1999]. La criticidad auto-organizada ofrece un camino alternativo hacia este objetivo.

4. Criticalidad auto-organizada

En las últimas décadas ha adquirido gran popularidad la llamada, comúnmente, teoría de la complejidad. El número de artículos, libros y trabajos que de una manera u otra se engloban dentro de lo que se llama complejidad es innumerable. Sin embargo, no existe tal teoría de la complejidad, al menos en el sentido tradicional de una teoría cerrada al estilo de la relatividad o la mecánica cuántica. Lo que se conoce como teoría de la complejidad es más bien un conjunto de ideas, modelos paradigmáticos, técnicas y herramientas que pueden ser útiles para caracterizar la dinámica de los llamados sistemas complejos.

Un sistema complejo está compuesto de un gran número de partes o grados de libertad que interactúan no-linealmente entre sí y que, como resultado de esta interacción, exhiben comportamientos dinámicos que no pueden interpretarse como la simple suma de los comportamientos individuales de sus componentes.

Las leyes de potencia aparecen frecuentemente en la descripción estadística de sistemas complejos. La distribución de tamaños de terremotos y fulguraciones solares, o la duración de avalanchas neuronales en el cerebro son sólo algunos ejemplos. Esta regularidad estadística sugiere que sólo un número limitado de mecanismos, o principios, conducen a la complejidad en todas sus manifestaciones [Sánchez et al. 2011].

4.1. El paradigma de criticalidad de Bak: la pila de arena

La criticalidad auto-organizada (SOC) proporciona un mecanismo general para la aparición de comportamientos complejos en la naturaleza, combinando la auto-organización y la criticalidad. Este concepto fue introducido por primera vez por Bak y sus colaboradores en 1987 (BTW) [Bak et al. 1987].

La criticalidad tiene un significado más general que el punto crítico de una transición de fase, pues incluye casi cualquier sistema no lineal con un umbral de inestabilidad global. El valor umbral determina si una inestabilidad, que involucra un evento de disipación de energía no lineal o avalancha, ocurre o no. Además, un sistema SOC tiene que ser auto-organizado, es decir, evoluciona al estado crítico sin la necesidad de sintonizar algún parámetro de control. Esto es logrado por un forzado lento y continuo, que lleva al sistema de nuevo al punto crítico después de cada avalancha. Así, puede decirse que, un sistema SOC tiene un balance de energía entre la entrada y la salida de avalanchas, y

por lo tanto la energía se conserva en el sistema. El comportamiento macroscópico muestra invariancia de escala temporal y espacial.

En forma resumida, puede definirse SOC como un estado crítico de un sistema disipativo no lineal que es lento y continuamente llevado hacia un valor crítico de un umbral de inestabilidad de todo el sistema, produciendo avalanchas de todos los tamaños y duraciones con distribuciones de tipo leyes de potencia [Aschwanden et al. 2016].

El ejemplo típico de un sistema en un estado de criticalidad auto-organizada es una pila de arena (figura 4.1): sobre una mesa plana se añade arena lentamente, un grano a la vez. Los granos pueden ser añadidos en posiciones aleatorias o pueden añadirse en un solo punto. Inicialmente, los granos de arena se quedarán cerca de donde aterrizan debido a la fricción. A medida que se agregan más granos de arena, la pila se vuelve más empinada y se producen pequeños desplazamientos de arena o avalanchas.

Un grano puede caer encima de otros granos y quedarse en un nivel inferior. Esto, a su vez, puede provocar que otros granos se derrumben. La adición de un solo grano puede causar un disturbio local pero nada dramático le sucede a la pila. En particular, eventos en una parte de la pila no afectan granos en una parte distante de la pila, la respuesta a pequeñas perturbaciones es pequeña. No hay comunicación global dentro de la pila en esta etapa, solo muchos granos individuales de arena.

A medida que aumenta la pendiente, un grano tiene más probabilidad de causar que otro grano caiga. En algún momento, localmente, se alcanza una pendiente crítica y no puede aumentar más porque la cantidad de arena añadida se equilibra en promedio con la cantidad de arena que cae hacia los bordes. Esto se denomina estado estacionario, ya que la cantidad de arena y la pendiente media son constantes en el tiempo. Es evidente que para tener este equilibrio promedio entre la arena añadida a la pila y la arena que sale a lo largo de los bordes, debe haber una comunicación a través de todo el sistema. Ocasionalmente, un solo grano de arena podrá causar una avalancha que involucra a toda la pila. Esta es la criticalidad auto-organizada. La adición de granos de arena ha transformado el sistema de un estado en el cual los granos individuales siguen su propia dinámica local a un estado crítico donde las dinámicas emergentes son globales. En el estado estacionario, hay un sistema complejo, la pila de arena, con su propia dinámica emergente, que no podría haber sido anticipada de las propiedades de los granos individuales [Bak 1996].

La pila de arena es un sistema dinámico abierto, ya que la arena se añade desde el exterior. Tiene muchos grados de libertad: los granos de arena. Un grano de arena que aterriza en la pila representa la energía potencial, medida como la altura del grano sobre la mesa. Cuando el grano se derrumba, esta energía se transforma en energía cinética. Cuando el grano que cae llega a la superficie, la energía cinética se disipa, es decir, se transforma en calor en la pila. Hay un flujo de energía a través del sistema.

El estado crítico se puede mantener sólo debido a la energía, en forma de nuevos granos de arena, que se suministra desde el exterior. La complejidad en el estado crítico surge en el sentido de que no existe un tamaño y tiempo característico de las avalanchas, es decir, no hay una escala presente en

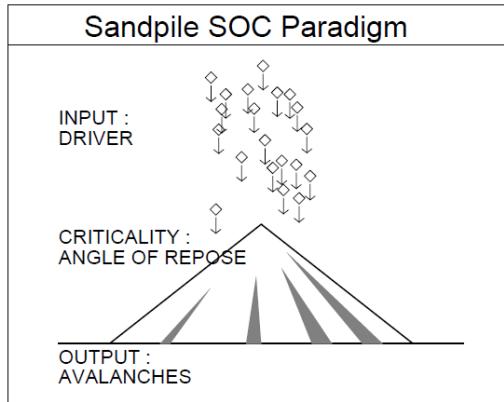


Figura 4.1: El paradigma original de SOC, consiste en un agente externo que entrega energía al sistema (granos de arena), un mecanismo que lleva a un estado de criticalidad auto-organizada (ángulo de reposo o pendiente umbral) y disipación mediante avalanchas [Aschwanden et al. 2016].

la evolución del sistema.

El concepto de SOC se ilustra habitualmente con simulaciones numéricas relativamente simples: autómatas celulares, en los cuales se obtienen leyes de potencia en la PDF de tamaño y duración de las avalanchas. El modelo tradicional del autómata celular de la pila de arena de BTW es una grilla regular donde se define una propiedad en cada celda o nodo y, en cada paso temporal, esa propiedad se actualiza simultáneamente de acuerdo con una simple regla de redistribución entre celdas vecinas.

4.2. Modelado de fulguraciones mediante SOC

Como se describió a lo largo del capítulo anterior, el problema de describir cuantitativamente las fulguraciones requiere un conocimiento de la física de la liberación de energía que ocurre en pequeñas escalas, y una descripción del acoplamiento entre escalas. Como las ecuaciones que describen este sistema (MHD) son no lineales el problema no puede resolverse en forma completa analíticamente y su solución numérica supone resolver una amplia variedad de escalas espaciales y temporales. Por esto motivo, se adoptó un nuevo enfoque para comprender la física de las fulguraciones que se basa en el modelado de la dinámica a gran escala del sistema y sus propiedades estadísticas.

En este contexto, Lu & Hamilton (L&H) [Lu&Hamilton 1991] propusieron que las leyes de potencia observadas en las fulguraciones son una consecuencia de que el campo magnético coronal está en un estado de criticalidad auto-organizada.

El modelo de calentamiento coronal propuesto por Parker incluye todos los ingredientes necesarios para conducir a la criticidad auto-organizada: Un sistema abierto (arco coronal), constituido por un gran número de grados de libertad que interactúan no linealmente, una fuente de energía externa (movimientos de las bases por convección fotósferica), y está sujeto a una inestabilidad del umbral local auto-estabilizante (reconexión magnética). Además hay una separación de escala temporal entre la fuente de energía (decenas de minutos a horas en los movimientos fotósfericos) y la energía liberada (de segundos a minutos en la reconexión magnética). Además, L&H sostienen su hipótesis en el hecho

de que los exponentes de las PDF no cambia a lo largo del ciclo solar, aún cuando cambia la tasa de ocurrencia.

Puede hacerse una comparación directa entre el campo magnético coronal y la descripción de la pila de arena presentada anteriormente. El comportamiento del campo es análogo a la de una pila de arena (ver tabla 4.1). La estructura del campo magnético coronal es mecánicamente deformada por movimientos aleatorios de sus bases ancladas en la fotósfera que son forzados por movimientos turbulentos del fluido convectivo (forzado en la pila: la adición de granos). El campo evoluciona a través de una serie de equilibrios libres de fuerza, aumentando la energía magnética de la configuración (aumento gradual de la pendiente). El forzado continuo conlleva a la formación de hojas de corriente asociadas con discontinuidades tangenciales del campo magnético. La magnitud de la corriente asociada a esas discontinuidades aumenta hasta alcanzar un valor crítico a partir del cual ocurre la reconexión magnética, análogo al momento en el cual se alcanza localmente la pendiente crítica en la pila de arena. El cambio en la topología e intensidad del campo magnético luego de que se produce la reconexión se corresponde con la redistribución de granos a los vecinos para reducir la pendiente local. Las fulguraciones son la manifestación colectiva de la energía liberada por avalanchas de pequeños eventos de reconexión magnética desencadenados localmente uno por otro. Esta descripción es análoga a la presentada en la figura 3.2 donde los nanoflares propuestos por Parker se identifican con los pequeños eventos de reconexión.

	<i>Pila de arena</i>	<i>Campo B coronal</i>
Forzado	Adición de granos de arena	Convección entrelaza líneas de B
Valor crítico	Pendiente de la pila	Densidad de corriente j
Redistribución	Derrumbamiento de granos	Reconexión de líneas magnéticas
Liberación de energía	Energía gravitatoria a cinética	Energía magnética a cinética y térmica

Tabla 4.1: Se identifican, tanto en la pila de la arena como en el campo magnético coronal, los elementos necesarios para hacer una descripción en términos de la criticalidad auto-organizada.

L&H realizaron simulaciones numéricas con autómatas celulares (análogas a la pila de arena de Bak) y observaron que los exponentes de las leyes de potencia obtenidas (energía y duración de las avalanchas) eran consistentes con los exponentes de las PDF observadas en las fulguraciones. Además se encontraron que eran, esencialmente, invariantes cuando se cambiaba el tamaño del sistema [Lu et al. 1993].

Este tipo de modelos no son los únicos existentes que intentan explicar esta fenomenología, pero son los únicos que utilizan conceptos importados de la teoría de la complejidad para explicar la dinámica observada en tiempos y escalas mucho más grandes que las relevantes para la física de los eventos individuales.

5. Modelo de autómata celular

En este capítulo se desarrollará la descripción del modelo de autómata celular utilizado para estudiar la estadística de las fulguraciones solares a partir de la criticalidad auto-organizada.

Los modelos numéricos de avalanchas están definidos en una grilla, que es una red de células o nodos interconectados. Dichas avalanchas, representarán el proceso de liberación de energía en un manojo de arcos coronales cuando ocurre una fulguración [Lu&Hamilton 1991], [Charbonneau 2001]. En este trabajo se utilizaron grillas bidimensionales ($D = 2$). La figura 5.1 muestra una grilla cartesiana bidimensional donde cada nodo interactúa con sus primeros vecinos. Tiene tamaño lineal $N = 6$ y, entonces, el número total de nodos es $N^D = 36$. Cada nodo interior tiene $2D = 4$ primeros vecinos. El vector $\mathbf{k} \equiv (i, j)$ se utiliza para etiquetar cada nodo de la grilla. Como condición de contorno se toma $B = 0$ en los bordes de la grilla.

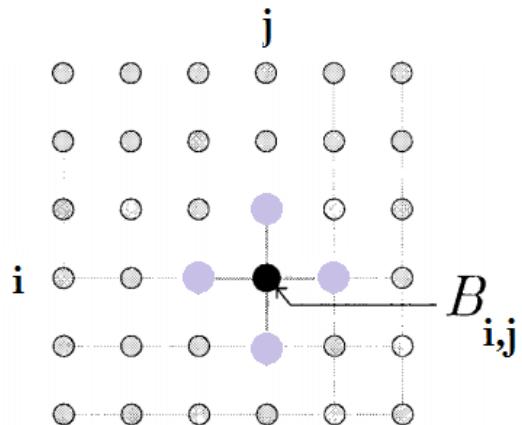


Figura 5.1: Grilla cartesiana bidimensional. Se define una cantidad B en cada nodo. Cada nodo interior tiene 4 primeros vecinos.

A cada nodo de la red se le atribuye una cantidad $B_{\mathbf{k}}$ escalar, que se asocia con el campo magnético, luego $B_{\mathbf{k}}^2$ es una medida de la energía magnética. Se define el valor medio del campo en la grilla $\langle B \rangle$ como:

$$\langle B \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}}; \quad (5.1)$$

y la energía de la grilla ε :

$$\varepsilon = \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}}^2 \quad (5.2)$$

Por las características del plasma coronal, y desde un punto de vista energético, es suficiente considerar la dinámica del campo magnético, dado que la energía magnética $B^2/8\pi$ domina la energía total del sistema [Lu 1995].

5.1. Forzado del sistema

La existencia de un estado estacionario global requiere que la cantidad física definida en la grilla sea forzada externamente. Para lograr eso, se selecciona un nodo interno aleatoriamente y se efectúa un incremento de B :

$$B_{\mathbf{k}}(t+1) = B_{\mathbf{k}}(t) + \delta B \quad (5.3)$$

donde \mathbf{k} es el nodo elegido aleatoriamente, t y $t+1$ indican que el cambio se realiza de un paso de tiempo a otro. El incremento δB es un número aleatorio que pertenece al intervalo:

$$\delta B \in [\sigma_1, \sigma_2] \quad \langle \delta B \rangle = 1/2(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (5.4)$$

Los extremos σ_1 y σ_2 deben ser elegidos de modo que la distribución de perturbaciones tengan valor medio distinto de cero pues así, a lo largo de varias iteraciones, el valor medio del campo crece en la grilla.

La razón para la adición de δB en la grilla es simular el reajuste lento del campo en respuesta a las condiciones de frontera subfotosféricas. En el modelo de BTW, esto es equivalente a tirar granos de arena, uno a la vez, en la pila de arena.

5.2. Criterio de estabilidad

En cada paso de tiempo debe testearse si cada nodo es estable, para algún criterio específico de estabilidad, equivalente a decir que un grano de arena es inestable si la pendiente local excede el ángulo de reposo. En este caso, un nodo es considerado inestable si el valor de una medida de la curvatura del campo (ΔB) excede cierto umbral prefijado Z_c :

$$\Delta B(t) = B_{\mathbf{k}}(t) - \frac{1}{4} \sum_{nn=1}^4 B_{nn}(t), \quad \Delta B(t) > Z_c \quad (5.5)$$

donde la suma se realiza sobre los 4 primeros vecinos nn en la grilla cartesiana bidimensional. Esta ecuación tiene la forma de una diferencia finita centrada de segundo orden para el operador laplaciano bidimensional actuando sobre el campo B . La elección numérica de Z_c no tiene influencia en el

comportamiento general del modelo, mientras que se mantenga distinto de cero. Sin embargo, la presencia de un umbral de estabilidad es crucial, pues le permite al sistema acumular energía.

En el contexto de los arcos magnéticos coronales, las discontinuidades tangenciales asociadas con fuertes densidades de corriente pueden desencadenar el proceso de reconexión magnética. En este modelo, no importa conocer los detalles de las inestabilidad que produce dicha reconexión, sólo alcanza con saber que existen y que se activan luego de que se alcanza un umbral [Lu 1995].

5.3. La regla de redistribución

Una vez que un nodo \mathbf{k} es declarado inestable es necesario un procedimiento para restablecer la estabilidad. El objetivo de esta regla de redistribución es representar a los granos de arena derrumbándose de la pila o a la relajación del campo magnético debido al proceso de la reconexión magnética. Un proceso natural es disminuir B del nodo inestable y distribuirlo entre los correspondientes nodos vecinos:

$$B_{\mathbf{k}}(t+1) = B_{\mathbf{k}}(t) - \frac{4}{5}Z_c, \quad B_{nn}(t+1) = B_{nn}(t) + \frac{1}{5}Z_c \quad (5.6)$$

El reajuste es sólo una difusión local del campo que reduce el valor local de ΔB y hace que el campo sea estable en ese punto, pero cambia el valor de ΔB en puntos cercanos. Siguiendo la regla uno o más vecinos pueden exceder el umbral de inestabilidad. En ese caso, la regla de redistribución se aplica a esos nodos, y así hasta restablecer la estabilidad en todos lados. La secuencia de eventos de redistribución representa la realización de una avalancha.

La perturbación es suspendida mientras ocurren las avalanchas. Una vez que todos los nodos son estables, se vuelve a perturbar el sistema. De este modo, el modelo representa a un sistema en el que la escala de tiempo de perturbación es mucho más larga que la escala de tiempo de reajuste, es decir que el campo añadido durante una avalancha puede ser despreciado. No perturbar el campo durante avalanchas corresponde al límite en el que los cambios en el campo magnético coronal debido a las condiciones de frontera subfotosféricas pueden ser ignorados durante la el tiempo que dura una fulguración.

Esta regla de redistribución es localmente conservativa en la variable B , entonces $B_{\mathbf{k}} + \sum_{nn=1}^{2D} B_{nn}$ permanente constante. Sin embargo, la cantidad B^2 decrece considerando los nodos implicados en la redistribución:

$$e_l = \frac{4}{5} \left(2 \frac{\Delta B}{Z_c} - 1 \right) Z_c^2 \quad (5.7)$$

donde la energía liberada e_l se asigna al nodo inestable l . Teniendo en cuenta la identificación de B^2 con la energía magnética, la energía total liberada por todos los nodos inestables en una dada iteración es igual a la energía liberada por unidad de tiempo por una fulguración:

$$\varepsilon_l = \sum_{inestables} e_l \quad (5.8)$$

Estrictamente $\varepsilon(t+1) = \varepsilon(t) - \varepsilon_l(t)$ solo se cumple para avalanchas que no alcanzan los límites de la grilla, ya que la condición $B=0$ en los contornos también elimina la energía del sistema en una forma no contabilizada en la ecuación (5.8).

Una unidad de energía natural es la cantidad de energía e_0 liberada por un único nodo que excede el umbral de estabilidad en una cantidad infinitesimal $e_0 = \frac{4}{5}Z_c^2$. Esto representa la energía más pequeña liberada por la grilla y eso la hace una unidad de energía conveniente [Aschwanden 2013].

Esto es análogo a la descripción de los nanoflares en la conjetura de Parker presentada en el capítulo anterior.

La inestabilidad activa la reconexión magnética local y el reajuste implica una difusión local rápida del campo con la consecuente reducción de la energía del mismo. Tanto este modelo como el campo magnético de la región activa solar son ejemplos de sistemas disipativos ya que la energía del campo no se conserva en una inestabilidad.

5.4. Implementación numérica

Hasta aquí se han definido todos los ingredientes necesarios para realizar una simulación simple. El código consiste en una iteración en tiempo ($i = 1$, iteraciones) que implica:

- (1) un loop sobre todos los nodos interiores, comprobando la estabilidad local;
- (2) un segundo loop que actualiza los B_k ;
- (3) la adición de un incremento de campo en algún nodo interior seleccionado al azar, teniendo lugar sólo si se encuentra que todos los nodos son estables en la iteración actual.

En el primer loop sobre la grilla se realiza un control de estabilidad en cada nodo interior, y si se detecta una inestabilidad se aplican los incrementos/decrementos de B asociados con la regla de redistribución definida por la ecuación (5.6). Sólo después de hacer el primer loop sobre la red, se actualiza el valor del campo sincrónicamente en todos los nodos interiores. La aplicación de las reglas de redistribución inmediatamente después de detectar un nodo inestable introduciría un sesgo espacial en el proceso de avalanchas, de acuerdo con la forma en que se lleva a cabo el barrido de la red.

Se realizaron simulaciones para tres tamaños de grilla diferentes y para cada tamaño se utilizaron tres umbrales diferentes, es decir, en total 9 simulaciones (ver tabla 5.1). Todas las simulaciones con condición inicial $B_k = 0 \forall k$, $\sigma_1 = -0.2$ y $\sigma_2 = 0.8$

Inicialmente se desarrolló el código en Matlab y se hicieron distintos test para verificar que el mismo funcione y llegue al estado de criticalidad auto-organizada. Además se variaron los parámetros libres del sistema (el tamaño y el umbral) para estimar el tiempo que le lleva al sistema alcanzar el estado buscado. En general la dinámica del sistema es independiente del umbral, pero la llegada al estado SOC es más lenta para mayores umbrales.

Es importante resaltar que se requiere de un análisis estadístico de las avalanchas para lo cual se necesita una buena cantidad de datos, luego es necesario evaluar en cada caso qué número de

iteraciones es necesario realizar para que el sistema evolucione hasta obtener un volumen importante de eventos.

Surgió un conflicto respecto a la memoria que disponía el software utilizado, por lo cual se decidió utilizar un código escrito en lenguaje IDL para correrlo en un cluster. Todos los datos fueron analizados en Matlab.

N	32			64			96		
Z_c	0.25	0.5	1	0.25	0.5	1	0.25	0.5	1
Iteraciones	5×10^6			4×10^7			2.4×10^8		

Tabla 5.1: Parámetros de cada simulación realizada: tamaño de la grilla, umbral y número de iteraciones.

5.5. Estado de criticalidad auto-organizada

Una forma de establecer si el autómata ha alcanzado el estado estacionario es estudiar las series temporales para la energía de la grilla ε y la energía liberada ε_l . En la figura 5.2 se muestra la serie temporal de la energía de la grilla obtenida en la simulación con $N = 64$ y $Z_c = 1$.

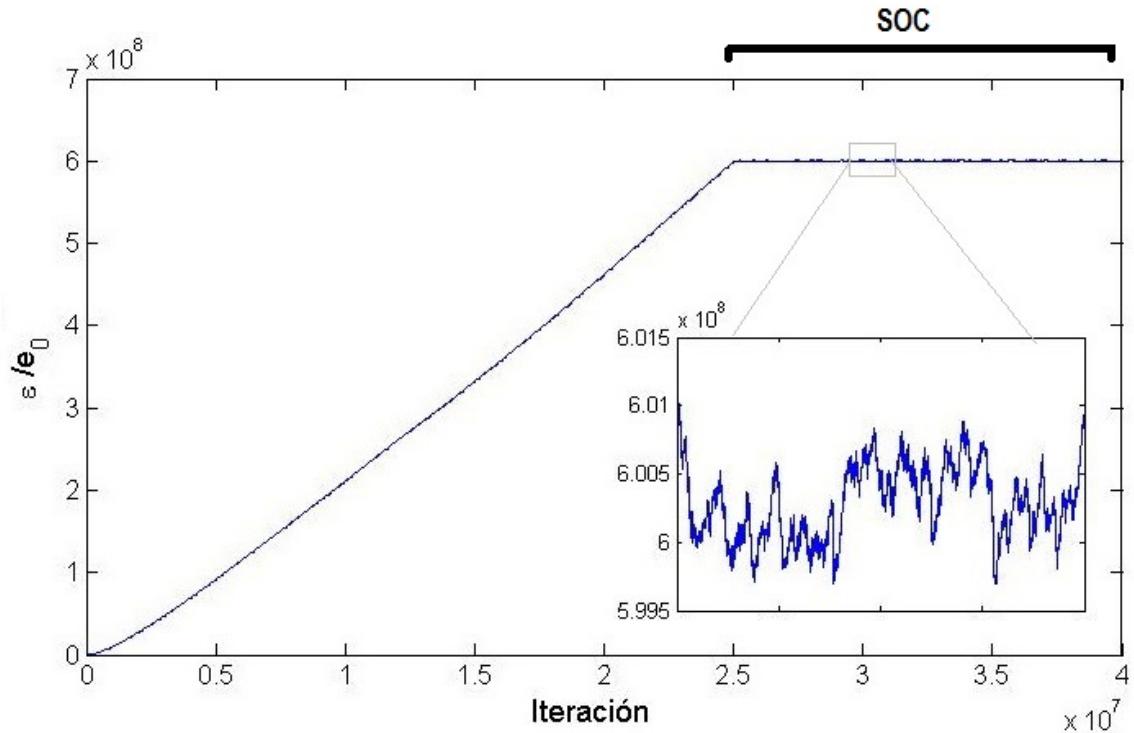


Figura 5.2: Serie temporal de la energía total de la grilla para $N = 64$ y $Z_c = 1$ y la energía normalizada con la unidad mínima de energía e_0 . El estado de criticalidad auto-organizada se alcanza cuando la energía total se estaciona.

Pueden distinguirse claramente dos comportamientos distintos. Por un lado, una primera etapa donde la energía aumenta persistentemente pero luego de $\approx 2.5 \times 10^7$ iteraciones se estaciona abup-

tamente (fluctúa alrededor de un valor medio). Este es el estado de criticalidad auto-organizada, pues el sistema está en un estado estadísticamente estacionario.

En la figura 5.3 se presenta la serie temporal de la energía liberada de la simulación considerada.

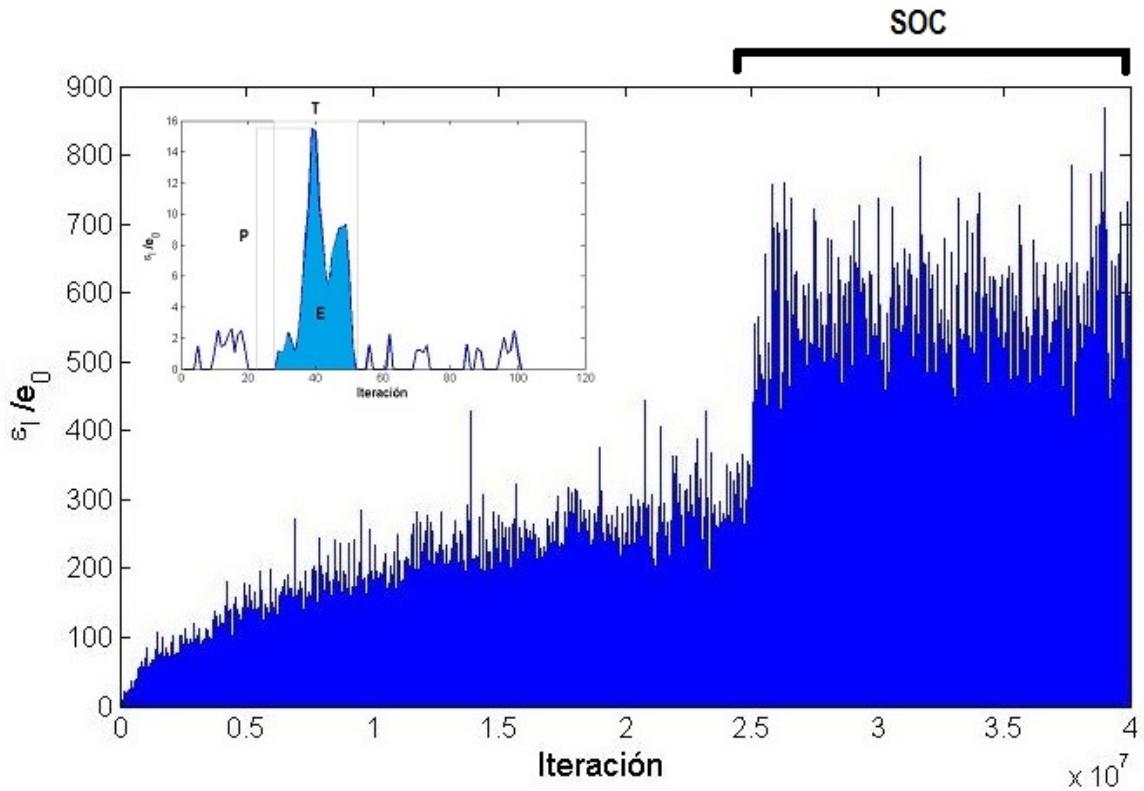


Figura 5.3: Serie temporal de la energía liberada en las avalanchas para $N = 64$ y $Z_c = 1$ y la energía normalizada con la unidad mínima de energía e_0 . En el estado de criticalidad auto-organizada se observa un aumento de tamaño de las avalanchas. Se muestra un zoom de la enegía liberada para definir gráficamente la energía, el pico de la energía y la duración de la misma que se extraen de esta serie temporal.

Puede verse que las avalanchas son eventos discretos, separados en tiempo y con una estructura temporal. El tamaño de las avalanchas aumenta gradualmente a medida que la energía ε aumenta, hasta que en el estado estacionario, hay un repentino crecimiento del tamaño de las avalanchas.

El estado SOC es estacionario en el sentido que en escalas temporales largas $\langle B \rangle$ y ε no crecen ni decrescen. Sin embargo, el modo en que esto ocurre es peculiar. Mientras que la tasa a la que se perturba es constante, la disipación de energía ocurre, de una manera intermitente, a través de avalanchas que son auto-similares en espacio y tiempo, es decir no tiene una escala característica espacial y temporal.

Es importante notar que las grandes avalanchas son esenciales para la existencia del estado estacionario. Debido a que la regla de redistribución es conservativa en B y la perturbación $\langle \delta B \rangle \neq 0$, la estacionariedad solo puede ser mantenida si B llega a los bordes a la misma tasa a la cual es introducido por la perturbación. El transporte de B a los bordes es logrado por grandes avalanchas. En otras palabras, las grandes avalanchas establecen correlaciones espaciales de largo alcance que son necesarias para establecer un balance apropiado entre las avalanchas internas donde B es conservado y las avalanchas disipativas que alcanzan los bordes de la grilla [Charbonneau 2001].

Si bien todas las simulaciones realizadas para distintos N y Z_c alcanzan un estado estacionario, el número de iteraciones a realizar depende fuertemente de estos parámetros. En la figura 5.4 se presenta un gráfico del tiempo SOC (número de iteración para el cual el autómata alcanzó el estado SOC comenzando con condicional inicial $B_k=0 \forall k$) en función del umbral utilizado Z_c . Esta misma curva se dibujó para los tres tamaños de grilla trabajados. Puede verse que, para los tamaños de grilla considerados, es necesario aumentar al menos en un orden de magnitud el número de iteraciones para que el sistema alcance el estado estacionario. Esto constituye una de las principales dificultades a la hora de aumentar el tamaño de la grilla.

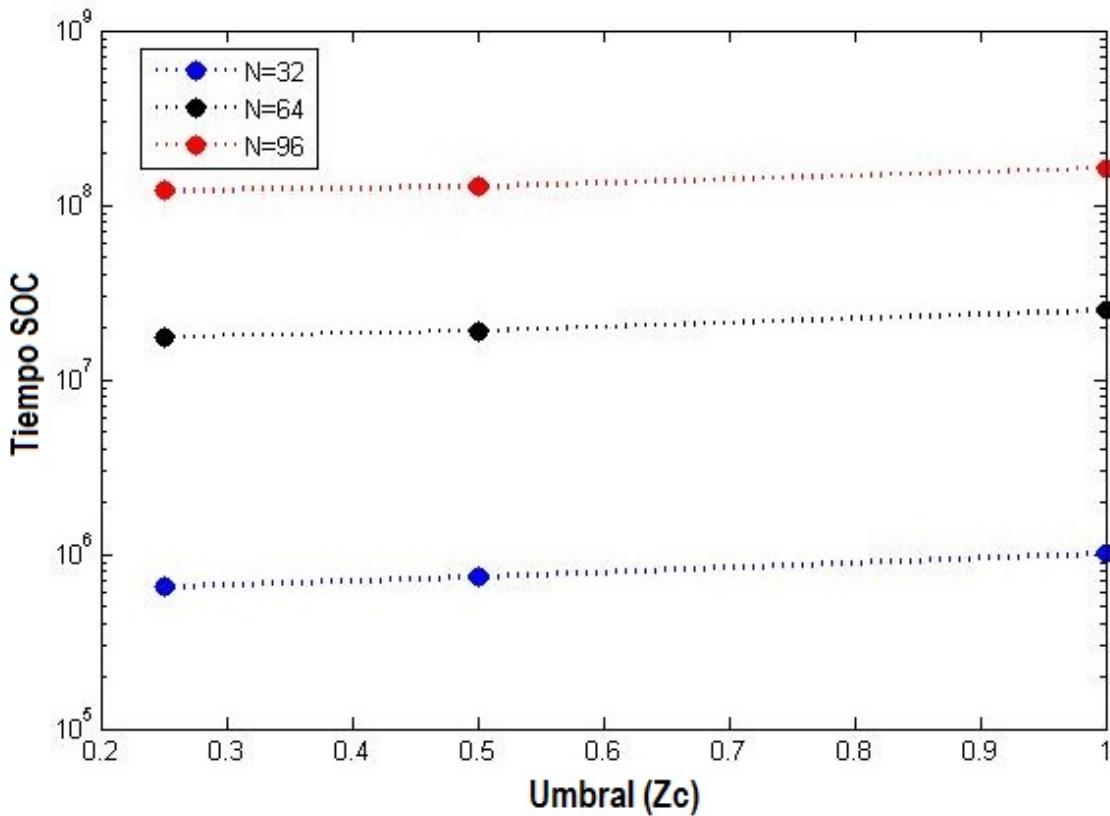


Figura 5.4: Tiempo inicial (iteración en la cual el autómata alcanza el estado SOC) vs. umbral (Z_c) para cada uno de los tres tamaños de grilla utilizados.

Estos tiempos fueron estimados de forma aproximada mediante la inspección de cada una de las simulaciones. Sin embargo, es posible detectar si el autómata alcanzó el estado estacionario viendo la evolución del campo magnético. En la figura 5.5 se presenta la variación del campo magnético B a lo largo de una fila de la grilla $B(i_0, j)$ en la simulación de $N = 32$ y $Z_c = 1$.

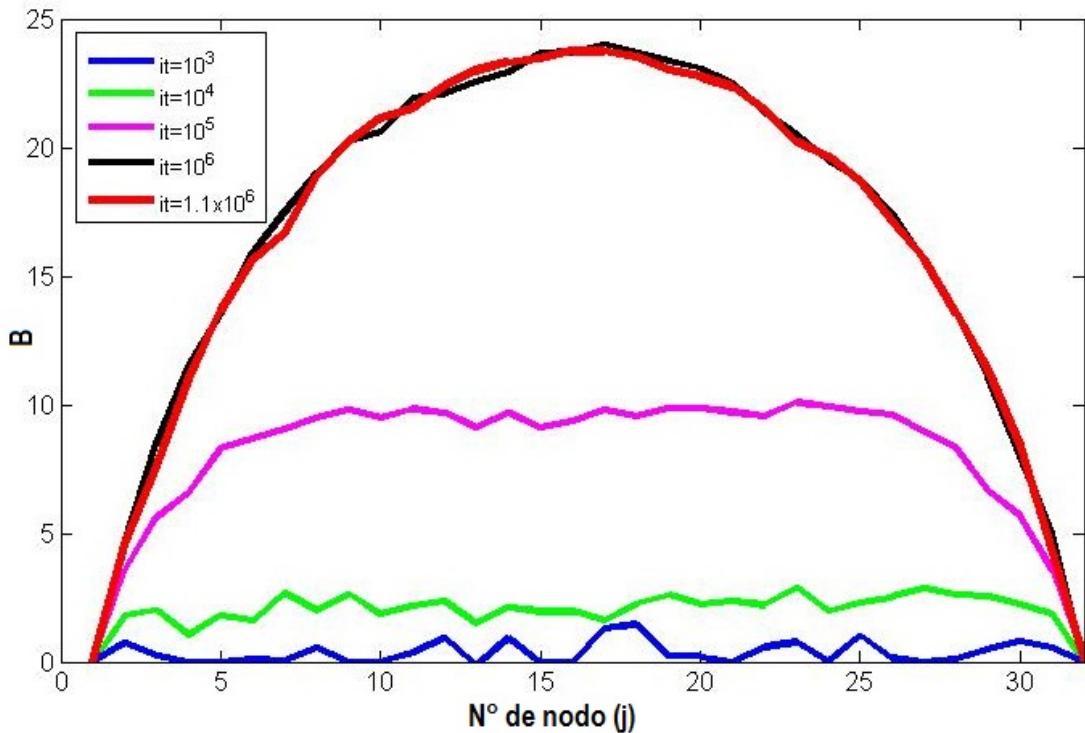


Figura 5.5: Campo magnético a lo largo de una fila de la grilla para distintas iteraciones (antes y después del estado estacionario).

Las curvas azul, verde y rosa corresponden al campo $B(i_0, j)$ en tres tiempos distintos, antes de que el sistema alcance el estado estacionario ($t_{SOC} < 10^6$, ver figura 5.4). Las curvas roja y negra representan el perfil del campo una vez que se alcanzó el estado estacionario para los tiempos allí indicados. Puede verse como el campo va creciendo, y al alcanzar el estado SOC, el valor medio del campo se ve inalterado. El resultado global de este comportamiento resulta en una energía total ε que alcanza el estado estacionario.

6. Caracterización de avalanchas

De las simulaciones numéricas descriptas en el capítulo anterior es posible obtener las series temporales de energía total y energía liberada. Este capítulo está dedicado a caracterizar el comportamiento estadístico (espacial y temporal) de las avalanchas obtenidas a partir de dichas series temporales. Con estos resultados se discutirá la pertinencia del autómata celular simulado en el contexto de la corona solar.

6.1. Estadística de avalanchas

Se definen tres cantidades que caracterizan el comportamiento temporal y enérgético de las mismas. La energía total E es la suma de la energía liberada en todos los nodos inestables a lo largo de toda la avalancha, es decir, el área bajo la curva de liberación de energía en la figura 5.3. El pico de energía P es la energía máxima liberada, en una sola iteración, en el curso de una avalancha. La duración T , es el número de iteraciones desde el inicio de la avalancha hasta la recuperación de la estabilidad a través de toda la grilla.

Para calcular estas cantidades primero se identificaron las avalanchas ocurridas en el estado estacionario, en la serie temporal de la energía liberada. Como se vió anteriormente, el número de simulaciones necesarias para llegar a dicho estado depende de tamaño de la grilla y del umbral elegido. El número de avalanchas encontradas es también variable. En la tabla 6.1 se presenta el número de iteraciones analizadas y el número de avalanchas encontradas en cada caso. En todos los casos la cantidad de avalanchas obtenidas es suficientemente grande como para dar cuenta del comportamiento estadístico del sistema estudiado.

N	Z_c	Iteraciones	Avalanchas
<i>32</i>	0.25	7×10^5	198178
	0.5	10^6	474389
	1	10^6	302605
<i>64</i>	0.25	2×10^7	574799
	0.5	2×10^7	949067
	1	2.5×10^7	761373
<i>96</i>	0.25	1.2×10^8	2720720
	0.5	1.1×10^8	4148575
	1	8×10^7	3266607

Tabla 6.1: Se presentan, para cada simulación realizada, el número de iteraciones analizadas (que se corresponden con datos donde el sistema está en el estado SOC) y el número de avalanchas encontradas en cada caso.

Una vez identificadas las avalanchas se calculó la PDF de la energía E , el pico P y la duración T para cada una de las simulaciones. En todos los casos se encontró que dichas cantidades tienen un comportamiento tipo ley de potencia que se extiende por varios órdenes de magnitud.

Para cuantificar el exponente que caracteriza a dichas leyes se usa típicamente un método que consiste en realizar una regresión lineal de los datos (previamente se binnean y se representan en escala logarítmica). Sin embargo, la aparición de numerosos fenómenos naturales y sociales que presentan leyes que, a priori, podrían ser consideradas leyes de potencias ha generado la necesidad de precisar y validar resultados. De este modo se han desarrollado numerosas herramientas para corroborar o rechazar diversas hipótesis estadísticas. Entre ellas Virkar & Clauset [Clauset et al. 2007], [Virkar & Clauset 2014] han desarrollado un método conocido como criterio de máxima verosimilitud (MLE). En este trabajo se decidió estudiar la estadística de las avalanchas a partir de esta metodología. (Ver apéndice)

En las figuras 6.1, 6.2 y 6.3 se presenta, para $N = 96$ y umbral $Z_c = 0.25$, la CDF (*cumulative distribution function*) de la energía E , la duración T y el pico P , respectivamente, construidas a partir de los datos y su ajuste obtenido a partir de la técnica MLE. Gráficos similares fueron generados para todos los demás tamaños de grilla y umbrales estudiados. Es necesario mencionar en este punto que la naturaleza discreta de las redes utilizadas y su tamaño finito distorsionan los resultados de las distribuciones de frecuencia obtenidas para pequeñas y grandes avalanchas, respectivamente.

En la tabla 6.2 se presenta, para cada simulación realizada, los exponentes de las leyes de potencia estimados mediante la técnica MLE para la energía E , la duración T y el pico P (α_E , α_T y α_P), con sus respectivos errores (Δ_E , Δ_T y Δ_P).

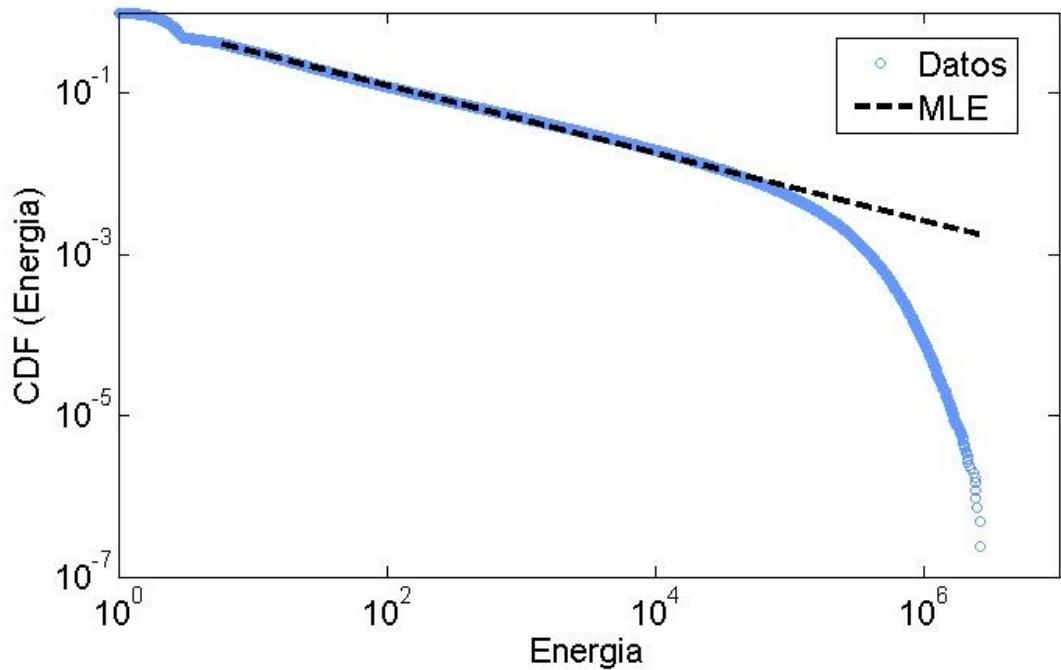


Figura 6.1: CDF de la energía calculada a partir de los datos con $N = 96$ y umbral $Z_c = 0.25$ (puntos azules) superpuesta a la distribución obtenida mediante la técnica MLE (línea negra).

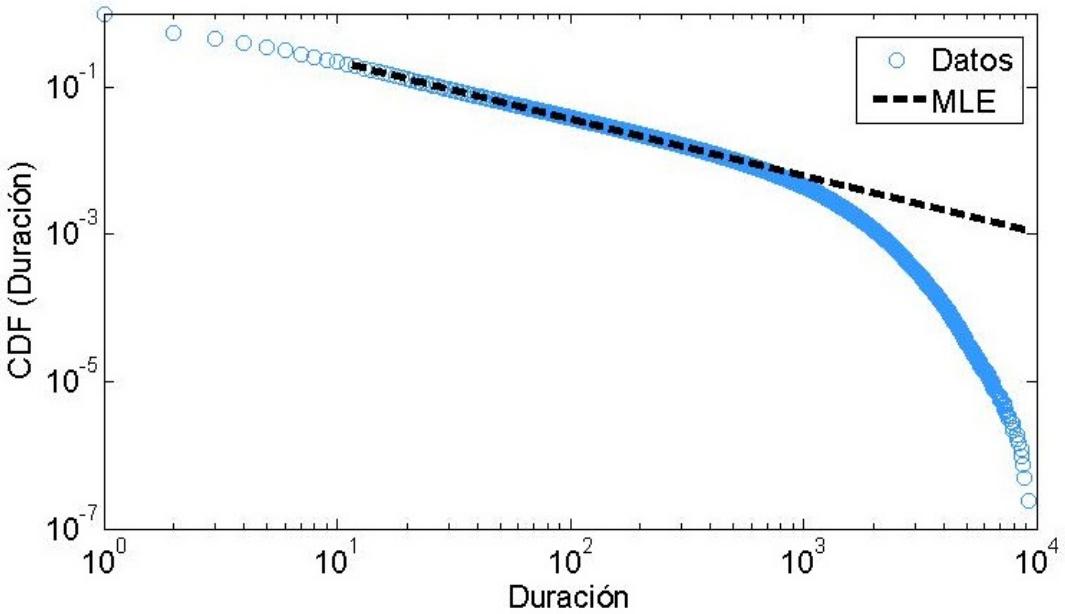


Figura 6.2: CDF de la duración calculada a partir de los datos con $N = 96$ y umbral $Z_c = 0.25$ (puntos azules) superpuesta a la distribución obtenida mediante la técnica MLE (línea negra).

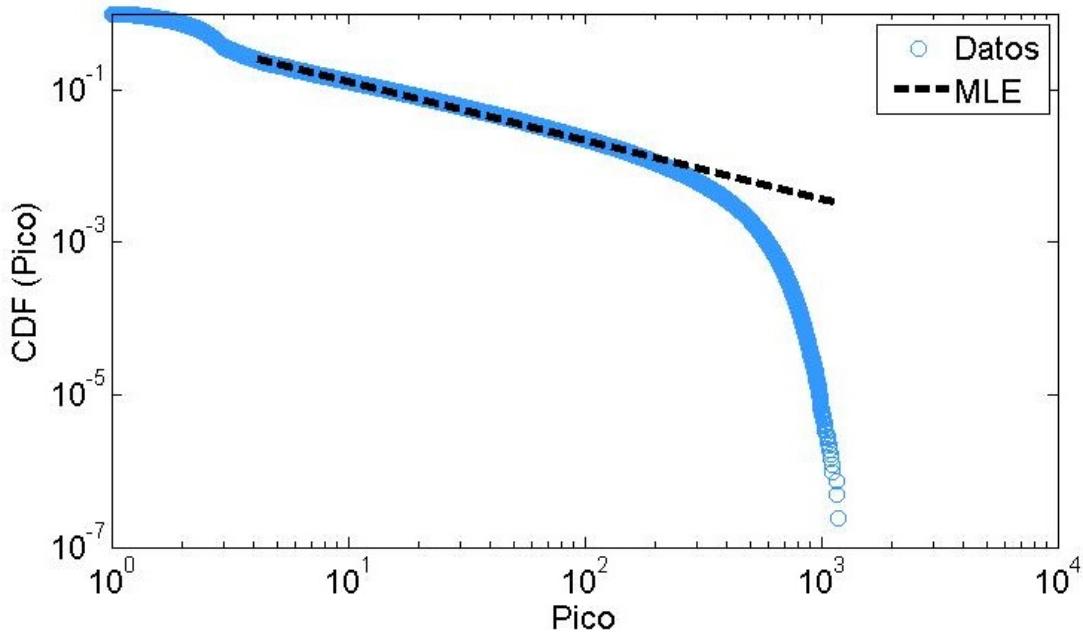


Figura 6.3: CDF del pico calculada a partir de los datos con $N = 96$ y umbral $Z_c = 0.25$ (puntos azules) superpuesta a la distribución obtenida mediante la técnica MLE (línea negra).

N	Z_c	$\alpha_E \pm \Delta_E$	$\alpha_T \pm \Delta_T$	$\alpha_P \pm \Delta_P$
32	0.25	1.54 ± 0.02	1.9 ± 0.1	1.82 ± 0.04
	0.5	1.49 ± 0.02	1.9 ± 0.1	1.88 ± 0.04
	1	1.50 ± 0.02	1.9 ± 0.1	1.92 ± 0.04
64	0.25	1.46 ± 0.02	1.80 ± 0.05	1.80 ± 0.05
	0.5	1.44 ± 0.02	1.81 ± 0.05	1.80 ± 0.04
	1	1.46 ± 0.02	1.84 ± 0.04	1.81 ± 0.04
96	0.25	1.44 ± 0.02	1.72 ± 0.04	1.78 ± 0.04
	0.5	1.42 ± 0.02	1.77 ± 0.04	1.77 ± 0.04
	1	1.44 ± 0.02	1.79 ± 0.04	1.77 ± 0.04

Tabla 6.2: Para cada uno de las simulaciones reazalidas se presentan los exponentes de las leyes de potencia estimados mediante MLE: la energía α_E , la duración α_T y el pico α_P , todos con sus respectivos errores.

Siendo las PDF de energía y pico las que se extienden por mas órdenes de magnitud, esto redundó en la obtención de exponententes más precisos mientras que, para el caso de la duración, los errores en la estimación del exponente de la ley de potencias fue mayor.

Es importante notar que las grandes avalanchas que caracterizan al estado SOC son necesarias para obtener un índice de ley de potencia confiable. Por tal motivo, es necesario hacer simulaciones lo suficientemente largas para tener una muestra estadísticamente significativa de las avalanchas que

el sistema puede generar.

Puede observarse que, para un tamaño fijo de la grilla, los valores de α obtenidos (para cada una de las variables analizadas) resultan indistinguibles entre sí. En general para grillas suficientemente grandes los índices de las leyes de potencia convergen a un valor, es decir se independizan del tamaño de la grilla.

Otra de las herramientas que se utilizan habitualmente en el estudio de las avalanchas es verificar que las variables analizadas (E , T y P), están experimentalmente relacionadas por una ley de potencias [Charbonneau 2001], [Veronig et al. 2002], [Georgoulis et al. 2001], es decir $\log(y) \sim \gamma_{xy} \log(x)$. En la figura 6.4 se presenta P vs E y, en la figura 6.5, D vs P para $N = 64$ y $Z_c = 1$, y el ajuste lineal realizado para estimar γ_{xy} . En la tabla 6.3 se presentan las estimaciones de γ_{xy} , con sus respectivos errores, y la bondad del ajuste r^2 para cada una de las simulaciones realizadas.

Cabe aclarar que, por los motivos expuestos anteriormente, los extremos de la función no fueron considerados a la hora de hacer el ajuste. Para dar cuenta de esto se seleccionó un P_{min} y E_{min} a partir del cual se consideraron los datos. Para minimizar la posibilidad de sesgo en este cálculo se realizaron numerosos ajustes tomando valores en un entorno de tales valores mínimos.

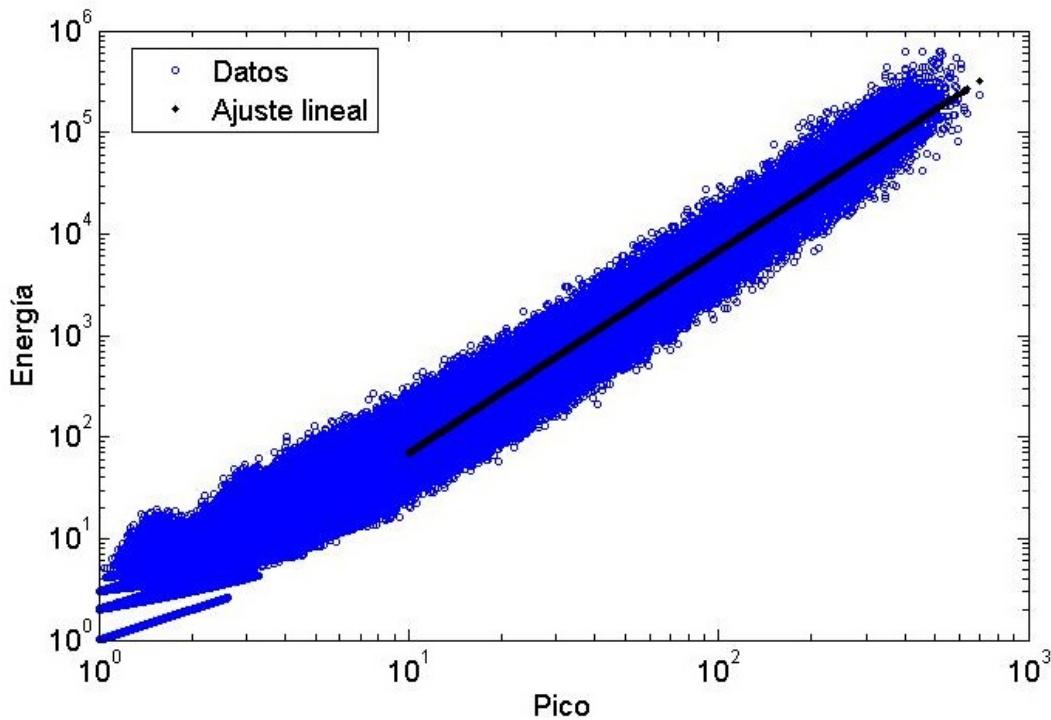


Figura 6.4: Pico vs. Energía para $N = 64$ y $Z_c = 1$. Los puntos azules representan datos, mientras que la línea negra es un ajuste lineal.

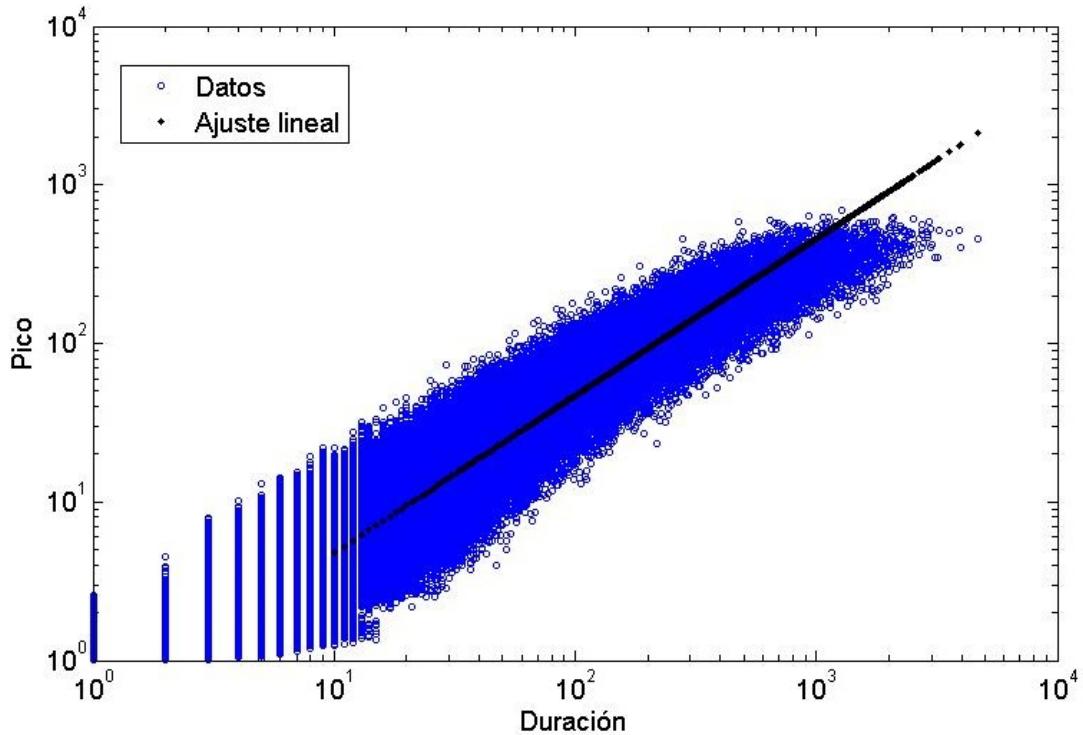


Figura 6.5: Duración vs. Pico para $N = 64$ y $Z_c = 1$. Los puntos azules representan datos, mientras que la línea negra es un ajuste lineal.

N	Z_c	γ_{PE}	r_{PE}^2	γ_{DP}	r_{DP}^2
32	0.25	1.95 ± 0.09	0.94	0.94 ± 0.03	0.86
	0.5	1.91 ± 0.08	0.95	0.94 ± 0.04	0.85
	1	1.83 ± 0.06	0.94	0.95 ± 0.06	0.86
64	0.25	1.97 ± 0.05	0.96	0.91 ± 0.04	0.88
	0.5	1.92 ± 0.05	0.96	0.91 ± 0.06	0.88
	1	1.96 ± 0.05	0.96	0.98 ± 0.04	0.89
96	0.25	1.98 ± 0.05	0.96	0.88 ± 0.05	0.89
	0.5	1.95 ± 0.05	0.96	0.89 ± 0.07	0.89
	1	1.93 ± 0.05	0.96	0.90 ± 0.06	0.89

Tabla 6.3: Se presentan las estimaciones de γ_{PE} y γ_{DP} obtenidas del ajuste lineal, con sus respectivos errores, y la bondad del ajuste r^2 para cada una de las simulaciones realizadas.

Al igual que ocurrió en el análisis de las PDFs, los datos que involucran a la duración suelen ser menos robustos. Los valores de γ_{PE} resultaron indistinguibles para todas las simulaciones realizadas.

La hipótesis de que la corona solar se encuentra en un estado de criticalidad auto-organizada fue desarrollada por Lu & Hamilton a fin de dar cuenta del comportamiento estadístico de las

observaciones de las fulguraciones solares. En los últimos años el número y la precisión de dichos datos ha aumentado y es posible comparar los resultados aquí obtenidos con más observaciones que las que existían a principio de los años 90. Para los valores de α existen una gran cantidad de estimaciones que se sintetizan en la tabla 6.4. Allí se presentan el rango de valores estimados de α para datos observacionales obtenidos en distintas regiones del espectro y medidos con distinto instrumental en los últimos 20 años [Aschwanden et al. 2016].

	α_E	α_T	α_P
Rayos γ y HXR	1.4 - 1.7	2.2 - 2.4	1.5 - 1.8
SXR	1.4 - 2	2 - 2.9	1.6 - 2.1
EUV, UV y H α	1.4 - 2.3	1.4 - 2.7	1.2 - 2.7

Tabla 6.4: Se presentan los valores de α estimados para diferentes regiones del espectro electromagnético en cuales hay emisión cuando ocurre una fulguración. Se presentan los valores entre los cuales varían estos exponentes. Para información más detallada dirigirse a [Aschwanden et al. 2016], [Charbonneau 2001].

Los valores de α obtenidos mediante el análisis de las simulaciones entran dentro del rango estimado a partir de las observaciones. Las mediciones de α_T son las que presentan mayor variación. Dicha dispersión es motivada por las dificultades experimentales de establecer el inicio y final de una fulguración [Fletcher et al. 2011], [Benz 2017].

Asimismo puede notarse que los resultados también están en coherencia con resultados previos obtenidos para autómatas similares pero con distintos umbrales y tamaños de grilla [Lu et al. 1993], [Charbonneau 2001]. En todos esos casos la estimación de los exponentes fue realizada mediante el ajuste típico mientras que en este trabajo se incorporó el método MLE. Además, el paquete utilizado permite evaluar la plausibilidad de la hipótesis de ley de potencia, comparando con otras posibles distribuciones. En este trabajo se comparó la estimación bajo la hipótesis de una ley de potencia con una estimación exponencial [Gamborino et al. 2016]. En todos los casos se observó que los datos se ajustan mejor a una ley de potencia. Los resultados de este trabajo permiten corroborar que esta herramienta es pertinente para el estudio estadístico de los datos obtenidos a partir del autómata.

Los valores de α_E obtenidos están alejados de la predicción de Parker para nanoflares. Este resultado se obtiene para la gran mayoría de los modelos de autómatas [Charbonneau 2001].

La existencia de un α similar a los medidos hace pensar que la esencia de mecanismo de generación de energía es retenido por un autómata celular sencillo.

6.2. Propiedades geométricas de las avalanchas

Siguiendo la lógica generada por las observaciones de las últimas dos décadas, se estudió el área cubierta por una fulguración, en particular el área cubierta en el máximo de energía. Esta medición experimental es la menos problemática de todas las mediciones de área posible y por ello es la

preferida para validar el modelo teórico [McIntosh et al. 2002]. En el modelo de autómata se asocia el área en el pico como el número de nodos inestables en el máximo de energía de la avalancha, una vez que se alcanza el estado estacionario.

Obtener estos datos es sumamente costoso desde el punto de vista numérico pues para eso es necesario almacenar una matriz de $N \times N \times$ iteraciones. Por ese motivo, se estudió un subconjunto más pequeño: $N = 64$ y 2×10^5 iteraciones. En la figura 6.6 se muestra el área total de una avalancha de 137 iteraciones y el área en el pico para $N = 64$ y $Z_c = 0.25$. En la figura 6.7, se muestra la energía liberada por esa misma avalancha en función del número de iteraciones.

Si se representa la PDF del área en el pico puede observarse un comportamiento de ley de potencia por casi dos órdenes, como se observa en la figura 6.8. En la tabla 6.5 se presentan los exponentes de las leyes de potencia estimadas en cada caso (α_A) utilizando el método MLE.

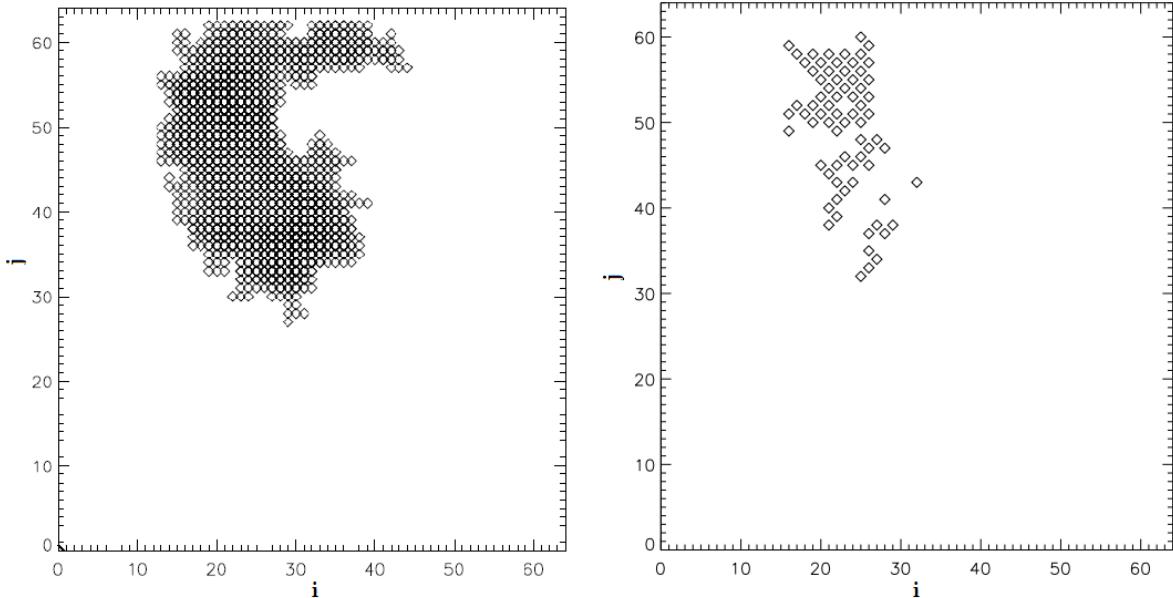


Figura 6.6: Avalancha de duración 137 iteraciones. Izquierda: Área total (nodos inestables = 2961). Derecha: Área en el pico (nodos inestables = 72).

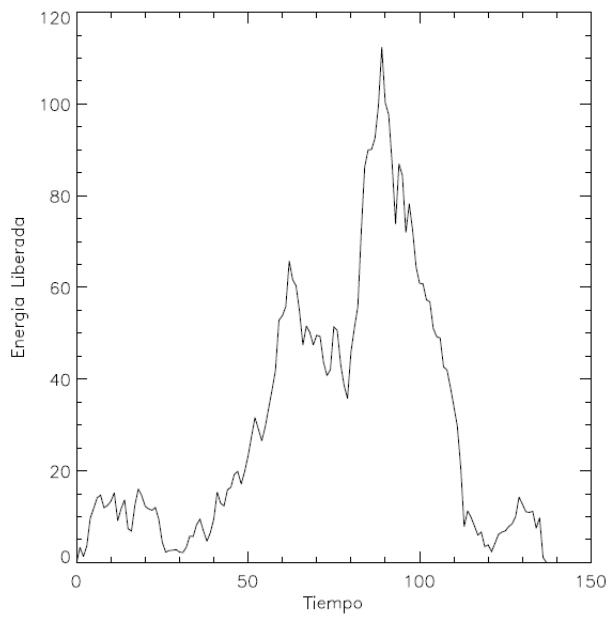


Figura 6.7: Energía liberada en la avalancha considerada (duración: 137 iteraciones). El pico de energía ocurre en la iteración 98.

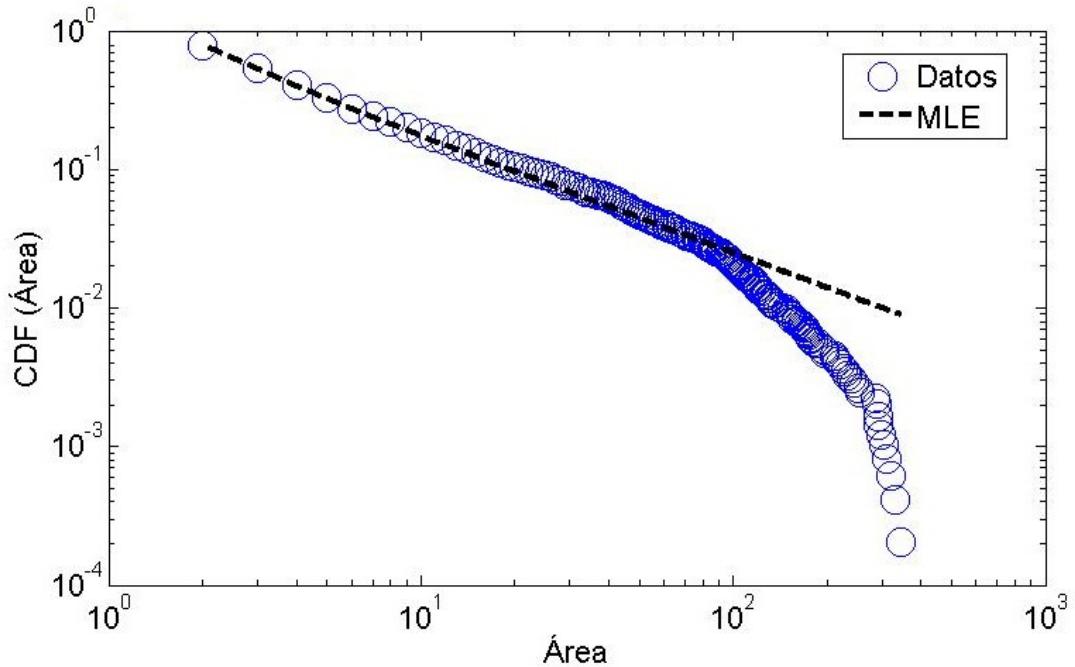


Figura 6.8: CDF del área en el pico calculada a partir de los datos con $N = 64$ y umbral $Z_c = 0.25$ (puntos azules) superpuesta a la distribución obtenida mediante la técnica MLE (línea negra).

	$N = 64$	$\alpha_A \pm \Delta_A$
Z_c	0.25	1.79 ± 0.11
	0.5	1.82 ± 0.05
	1	1.83 ± 0.05

Tabla 6.5: Para cada uno de las simulaciones realizadas se presentan los exponentes de las leyes de potencia α_A con sus respectivos errores, estimados mediante MLE.

Datos observacionales [Aschwanden & Parnell 2002] producen índices de leyes de potencia α_A que va desde 1.86 para datos de Yohkoh SXR hasta 2.45 para las observaciones EUV-TRACE. Los resultados preliminares si bien comparan adecuadamente con las observaciones no son tan robustos desde el punto de vista estadístico ya que la cantidad de avalanchas estudiadas es considerablemente menor. Sin embargo estos resultados, de otra manera, permiten demostrar que el autómata celular utilizado logra representar características observadas a pesar de su simpleza. Una evaluación más acabada en este sentido podría realizarse en un modelo 3D.

7. Conclusiones

El problema del calentamiento coronal se encuentra entre los problemas que más ha preocupado a la comunidad de la física solar en los últimos 50 años. Desde que se observó que la atmósfera exterior del sol alcanza temperaturas varios órdenes de magnitud mayor que en la superficie se propusieron gran cantidad de mecanismos para explicar este calentamiento. A grandes rasgos, estos mecanismos pueden dividirse en calentamiento por reconexión magnética o por disipación de ondas magnéticas. Aun así conocer los detalles de estos procesos, así cómo determinar cuáles de ellos dominan, son preguntas difíciles de responder tanto teórica como observacionalmente.

Las fulguraciones son los eventos más explosivos de la atmósfera solar liberando hasta 10^{32} erg en decenas de minutos como resultado de la rápida disipación de corrientes mediante reconexión magnética. Parker propuso que la corona solar podría ser calentada por la disipación de muchas discontinuidades tangenciales de pequeña escala que surgen espontáneamente en el campo magnético coronal retorcido por movimientos fotósfericos al azar.

El hecho experimental de que la distribución de frecuencia de la energía de las fulguraciones, y varias otras características siguen una ley de potencia por varios órdenes de magnitud. Las leyes de potencia encontradas sugieren una cierta invariancia de escala entre las fulguraciones y son también compatibles con la hipótesis de Parker de que grandes fulguraciones podrían consistir en una multitud de nanoflares. Por lo tanto, este punto de vista sugiere una organización entre fulguraciones.

Lu & Hamilton abrieron un enfoque para modelar la liberación de la energía en las fulguraciones basados en la criticalidad auto-organizada (SOC) que es consiste con el modelo de Parker, donde las avalanchas se identifican con una fulguración. El éxito del modelo en la reproducción de las estadísticas de las fulguraciones ha estimulado la aparición de diferentes modelos de autómatas celulares. Estos modelos permiten cambiar fácilmente los elementos físicos que incluyen, y permiten un estudio estadístico detallado con un costo computacional menor al que supondría la solución numérica de las ecuaciones de la MHD.

En esta tesis se trabajó con un autómata celular bidimensional. Se realizaron simulaciones para tres tamaños de grilla $N = 32, 64, 96$ y tres umbrales $Z_c = 0.25, 0.5, 1$. Se comprobó que, en todos los casos, el sistema alcanzó el estado estacionario. Para ello, se verificó que la energía de la grilla y el valor medio del campo en la grilla fluctúan alrededor de un valor medio. Por otro lado, se obtuvo una estimación de la cantidad de iteraciones a realizar para alcanzar el estado estacionario, comenzando con el campo nulo sobre toda la grilla, en función del umbral aplicado y del tamaño de la grilla. En

este sentido se verificó que el aumento en el umbral implica un menor aumento relativo del número de iteraciones necesarias para alcanzar el estado estacionario que el aumento del tamaño de grilla.

Posteriormente, se realizaron distintos análisis estadísticos del modelo para caracterizar las avalanchas obtenidas y poder comparar el modelo con diferentes observaciones. Inicialmente, se realizó la estadística de las avalanchas, observándose que la función de distribución de las mismas (energía, pico de energía y duración) sigue una ley de potencia por varios órdenes de magnitud. Para estimar el exponente de la ley de potencia se utilizó un nuevo método MLE y se evaluó la plausibilidad de la hipótesis de ley de potencia. Además se estimaron los coeficientes de correlación entre las variables medidas y el área de las avalanchas. Todas los resultados obtenidos están comprendidos dentro del intervalo de las observaciones y, en general, son también consistentes con resultados de autómatas similares cuyos resultados fueron obtenidos mediante otros métodos de ajuste.

Estos resultados, junto con los argumentos empíricos de que las fulguraciones satisfacen muchas de las condiciones de los modelos de SOC, dan fuerte apoyo a la visión de que las fulguraciones son la relajación de eventos de un sistema auto-organizado (campo magnético coronal). Esto sugiere en particular que la estadística de las fulguraciones solares no depende sensiblemente de la microfísica ni del mecanismo de accionamiento que lleva a configuraciones inestables.

Los modelos de autómata celular ciertamente no proporcionan un modelo completo para el calentamiento coronal y claramente no son los únicos para abordar estos problemas. Sin embargo, se han reunido logros considerables y proporcionan un marco amplio y extensible para el estudio de eventos impulsivos en la corona solar.

8. Apéndice

En los últimos años una cantidad significativa de trabajos de investigación se ha centrado en mostrar que muchos fenómenos físicos y sociales siguen una distribución de ley de potencia.

Sea x la variable de interés. Para valores continuos, la función de densidad de probabilidad (PDF) está definida como:

$$p(x)dx = Pr(x \leq X \leq x + dx) = Cx^{-\alpha}dx \quad (8.1)$$

donde C es una constante de normalización y α es el exponente de la ley de potencia. Esta PDF diverge en el origen por lo cual debe haber un límite inferior para este comportamiento, que se denotará x_{min} . Para valores discretos, la función se define de la misma manera, sólo que x es un entero:

$$p(x) = Pr(X = x) = Cx^{-\alpha} \quad (8.2)$$

En muchos casos, es útil trabajar con la función de distribución acumulada (CDF), que se identificará como $P(x)$. Tanto para el caso continuo como discreto se define la CDF como $P(x) = \Pr(X > x)$.

A menudo se utilizan métodos gráficos para ajustar los datos empíricos a una distribución de ley de potencia. La PDF puede ser estimada constuyendo el histograma de los datos. En primer lugar se grafica el histograma de los datos en escala logarítmica. Si se construye con un binning equiespaciado en la escala lineal aparecen dos problemas: (i) se introduce mucho ruido para valores grandes de la variable aleatoria; y (ii) al transformarlo a escala log-log los bins del histograma se acumulan hacia la derecha del gráfico, dejando relativamente poco muestreados los valores pequeños de la variable, que son los más frecuentes. Lo más habitual es entonces realizar un binning logarítmico: esto logrará que los bins queden equiespaciados al visualizarlos en escala logarítmica. Alternativamente puede trabajarse con la CDF, que es menos sensible al ruido en la cola de la distribución.

Cuando el histograma logarítmico parece revelar una ley de potencias en alguna región (en general $x_{min} \leq x \leq x_{max}$), el siguiente problema consiste en estimar los dos parámetros de la distribución, x_{min} y α : Usualmente el x_{min} se estima visualmente y el α se obtiene de una regresión lineal. Como la regresión no esta sujeta a la condición de normalización, los valores obtenidos no necesariamente corresponderán a una distribución de probabilidad. Por otro lado, hay muchas distribuciones que pueden parecer lineales en escala logarítmica (log normal, exponencial) [Clauset et al. 2007],

[Virkar & Clauset 2014].

Para ilustrar el fracaso de los métodos gráficos, en la tabla 8.1 se presenta un experimento $N = 10000$ números aleatorios que siguen una ley de potencia con $\alpha = 2.5$. Se muestra una estimación de α mediante diversos métodos gráficos. La estimación es una variable aleatoria y su distribución depende del método que se utiliza para obtener dicha estimación. Importante medidas de la calidad de un estimador son su media y su desviación estándar. Si la media del estimador es igual a la verdadero exponente, entonces el estimador es imparcial y estimadores con una distribución que se concentra alrededor de α son deseables. Para cada método gráfico se calculó un histograma de la distribución del estimador para calificar su calidad repitiendo el experimento numérico 500 veces [Bauke 2007].

Método	Media de la estimación	Desviación Standard de la estimación
fit PDF binneo lineal	1.597	0.167
fit PDF binneo lineal	2.395	0.304
fit PDF binneo logarítmico	2.397	0.080
fit CDF binneo logarítmico	2.544	0.127
MLE	2.500	0.016

Tabla 8.1: Fiteo de una distribución de ley de potencia mediante diferentes métodos. Se presentan la media y la desviación standard de α en cada caso [Bauke 2007].

En resumen, las estimaciones de los exponentes de las distribuciones de leyes de potencia basados en un ajuste lineal por cuadrados mínimos son intrínsecamente inexactos y carecen de una justificación matemática sólida. Los estimadores de máxima verosimilitud (MLE) ofrecen una sólida alternativa a los métodos gráficos.

Para comenzar con la estimación MLE se calcula la función de probabilidad conjunta de los datos x_1, \dots, x_n , parametrizada con α y x_{min} (se asume conocido), que se llamará función de verosimilitud: $L(\alpha)$. Asumiendo que los x_i son independientes:

$$L(\alpha) = p(\alpha | x_{min} | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^N p(\alpha | x_{min} | x_i) \quad (8.3)$$

A partir de aquí se busca el valor de α (entre todos los posibles) que haga más verosímil (más probable) la muestra de datos obtenidos. Es decir, la estimación de α corresponderá al valor que maximiza la función de verosimilitud L . Usualmente se maximiza el logaritmo de L , por que es más simple (y equivalente) La estimación así obtenida se llama estimación de máxima verosimilitud.

Hasta aquí no se detalló como estimar el x_{min} , pues en la descripción anterior se asumió que era conocido. En la mayoría de las distribuciones observadas en la naturaleza, el comportamiento de ley de potencia sólo se mantiene por encima de algún valor. El método por el cual se elige el x_{min} tiene

un fuerte impacto tanto en la estimación de α como en los resultados de lo expuesto acerca de MLE.

Generalmente, MLE falla en estimar el x_{min} y el enfoque de elegirlo por inspección visual en un gráfico log-log de los datos empíricos es subjetivo, y por lo tanto debe evitarse.

A continuación se detalla el método utilizado: Se estima α mediante MLE para distintos valores de x_{min} . Luego, se elige el valor de x_{min} para el cual la PDF de los datos y la estimación de la ley de potencia (mediante MLE) son lo más similares posible. Para ello, se utiliza la estadística de Kolmogorov-Smirnov que mide la máxima distancia entre dos funciones de probabilidad:

$$D(x) = \max_{x \geq x_{min}} |S(x) - P(x)| \quad (8.4)$$

donde $S(x)$ es la CDF de los datos por encima de x_{min} y $P(x)$ es la CDF estimada por MLE, para la región $x \geq x_{min}$. La estimación de x_{min} surge a partir de minimizar D [Clauset et al. 2007].

Las herramientas presentadas hasta ahora permiten ajustar una distribución de ley de potencia a un conjunto de datos dados y proporcionar estimaciones de los parámetros α y x_{min} . Sin embargo, no dice nada sobre si la ley de potencia es un ajuste plausible.

En general, no es fácil decir con certeza si un determinado conjunto de datos tiene una distribución de ley de potencia. Incluso si se extraen datos de una ley de potencia es muy poco probable que la distribución observada siga exactamente la forma de ley de potencia: siempre habrá algunas pequeñas desviaciones debido a la naturaleza aleatoria del proceso de muestreo. El desafío consiste en distinguir las desviaciones de este tipo de las que surgen debido a que los datos se extraen de una distribución que no es una ley de potencia.

Un enfoque estándar para responder a este tipo de preguntas es usar una prueba de bondad del ajuste, que genera un p-valor que cuantifica la plausibilidad de la hipótesis. Estas pruebas se basan en la medición de la distancia entre la distribución de los datos empíricos y el modelo hipotético. Primero se estima α y x_{min} mediante MLE y KS para los datos que se poseen. En segundo lugar, se generan varios datos sintéticos que sigan una ley de potencia con los parámetros obtenidos. Se fitean cada uno de los datos sintéticos generados mediante MLE y KS y luego se contabiliza la fracción de resultados que son mayores que el valor obtenido para los datos reales. Esta fracción se conoce como p-valor. Si p es grande (cercano a 1), entonces la diferencia entre los datos empíricos y el modelo pueden atribuirse únicamente a fluctuaciones estadísticas; si es pequeño, el modelo no es un ajuste plausible a los datos [Clauset et al. 2007].

Existen métodos que permiten comparar directamente dos distribuciones entre sí y que son considerablemente más fáciles de implementar que lo descripto anteriormente. Uno de ellos es la prueba de verosimilitud. La idea básica es calcular la función de verosimilitud de los datos bajo dos distribuciones distintas. La que tiene mayor probabilidad es, entonces, el mejor ajuste. La relación entre los logaritmos de la función de verosimilitud será positivo o negativo dependiendo de qué distribución ajustar mejor a los datos o cero en caso de empate.

Se utilizó el paquete de power-law de matlab para realizar las estimaciones y el de python para evaluar la plausibilidad comparando distribuciones [Clauset et al. 2007], [Virkar & Clauset 2014].

Bibliografía

- [Priest 2014] PRIEST, E., *Magnetohydrodynamics of the sun* (Cambridge University Press, New York, 2014).
- [Golub et al. 1997] GOLUB, L. & PASACHOFF, J., *The solar corona* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).
- [Parnell & Moortel 2012] PARSELL, C. & DE MOORTEL, I., Phil. Trans. R. Soc. A, 370(1970), 3217, 2012
- [Aschwanden 2005] ASCHWANDEN, M., *Physics of the solar corona - An introduction with problems and Solutions* (Springer, Berlín, 2005).
- [Fletcher et al. 2011] FLETCHER, L., DENNIS, B., HUDSON, H., KRUCKER, S., PHILLIPS, K., VERRONIG, A., BATTAGLIA, M, BONE, L., CASPI, A., CHEN, Q. ET AL., Space Sci. Rev., 159, 19, 2011
- [Benz 2017] BENZ, A., Rev. Sol. Phys., 14, 2, 167, 2017
- [Aschwanden 2013] ASCHWANDEN, M., *Self-Organized Criticality Systems* (Open Academic Press, Berlín, 2013).
- [Aschwanden 2009] ASCHWANDEN, M., *Self-Organized Criticality in Astrophysics: The Statistics of Nonlinear Processes in the Universe* (Springer, USA, 2011).
- [Charbonneau 2001] CHARBONNEAU, P., MCINTOSH, S., LIU, H., AND BODGAN, T., ApJ, 203, 321, 2001
- [Choudhuri 1998] CHOUDHURI, A., *The physics of fluids and plasmas - An introduction for astrophysicists*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [Milano 1999] MILANO, L., Tesis doctoral, FCEyN, UBA, 1999
- [Parker 1957] PARKER, E., J. Geophys. Res, 62, 509, 1957
- [Sweet 1958] SWEET, P., Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics, 6, 123, 1958 Gases (Stockholm 1956) p. 123

- [Andrés 2015] ANDRÉS, N., Tesis doctoral, FCEyN, UBA, 2015
- [Parker 1983] PARKER, E., ApJ, 264, 642, 1983
- [Parker 1988] PARKER, E., ApJ, 330, 474, 1988
- [Podladchikova 2006] PODLADCHIKOVA, O. AND LEFEBVRE, B. , Solar Activity and its Magnetic Origin, Proc. IAU Symposium, 233, 481, 2006.
- [Dmitruk & Gómez 1997] DMITRUK, P. AND GÓMEZ, D., ApJ, 484, L83, 1997
- [Dmitruk et al. 1998] DMITRUK, P., GÓMEZ, D. AND DELUCA, E., ApJ, 505, 974, 1998
- [Dmitruk & Gómez 1999] DMITRUK, P. AND GÓMEZ, D., ApJ, 527, L63, 1999
- [Sánchez et al. 2011] SANCHÉZ, R., VAN MILLIGEN, B. & PARRODO, J., REF, Vol 25-3, Julio-Septiembre 2011
- [Bak et al. 1987] BAK, P., TANG, C. AND WIESENFELD, K., Phys. Rev. A. , 59, 381, 1987
- [Bak 1996] BAK, P., *How nature works: The science of Self-organized Criticality* (Copernicus, New York, 1996)
- [Lu&Hamilton 1991] LU, E. & HAMILTON, R., ApJ, 380, L89, 1991
- [Lu et al. 1993] LU, E., HAMILTON, R., McTIERNAN, M. Y BROMUND, K., ApJ, 412, 841, 1993
- [Lu 1995] LU, E., ApJ, 446, 109, 1995
- [Clauset et al. 2007] CLAUSSET, A., SHALIZI, C., & NEWMAN, M., SIAM Review 51(4), 661-703, 2009
- [Virkar & Clauset 2014] VIRKAR, Y. & CLAUSSET, A., Annals of Applied Statistics, 8(1), 89, ,2014.
- [Veronig et al. 2002] VERONIG, A., TEMMER, M., HANSLMEIER, A., OTRUBA, W. & MESSEROTTI, M. , A&A 382, 1070, 2002
- [Georgoulis et al. 2001] M. K. GEORGOULIS, M., VILMER, N., AND CROSBY, N., A&A 367, 326, 2001.
- [Aschwanden et al. 2016] ASCHWANDEN, M., CROSBY, N., DIMITROPOULOU, M., GEORGOULIS, M., HERTAGEN, S., MCATEER, J., MILOVANOV, A., MINESHIGE, S., MORALES, L., ET AL, Space Sci. Rev., 198, 47, 2016
- [Gamborino et al. 2016] GAMBORINO, D., CASTILLO, D. & MARTINELL1, J., Nonlin. Processes Geophys, 23, 175, 2016

[McIntosh et al. 2002] MCINTOSH, S., CHARNONNEAU, P., BODGAN, T., LIU, H. & NORMAN, J., Phys. Rev. E. , 65, 46125, 2002

[Aschwanden & Parnell 2002] ASCHWANDEN, M. & PARRELL, C., ApJ, 572, 1048, 2002

[Bauke 2007] BAUKE, H., Eur. Phys. J. B, 58(2), 167, 2007