

1. Turbulencia

1.1. Introducción

Las características que debe exhibir un flujo turbulento son motivo de debate permanente, de modo que en esta sección se intentará dar una lista –algo arbitraria– de las más salientes sobre la que hay un consenso bastante amplio:

Amplio espectro de escalas espaciales y temporales: este tipo de flujos se caracteriza por exhibir estructuras en un amplio espectro de escalas espaciales y temporales. Si por ejemplo L es la escala espacial de las estructuras más grandes y ℓ la de las más pequeñas, que el espectro sea amplio implica $L \gg \ell$. La escala ℓ es típicamente aquella en la cual la disipación comienza a ser relevante, consumiendo energía del flujo, mientras que L viene dada por la escala de los mecanismo de excitación que provocan el flujo en la escala más grande. El cociente L/ℓ es proporcional al número de Reynolds Re , de modo que los flujos turbulentos tienen asociados Re altos. Usualmente tanto la frecuencia como el número de onda son las magnitudes que mejor caracterizan las estructuras temporales y espaciales respectivamente y es en términos de estas cantidades que se dice que la turbulencia tiene un amplio espectro.

Dominancia de la advección no lineal: existen ejemplos de campos de ondas de amplio espectro que sin embargo no son turbulentos: ¿por qué? porque para que el flujo sea turbulento, las diferentes escalas deben interactuar entre sí a través de los términos no lineales de la ecuación de movimiento siendo estas interacciones no lineales las responsables de la presencia de las estructuras. Así, en el caso turbulento, que el espectro sea amplio aparece como resultado de la dinámica interna del flujo.

Impredictibilidad en el espacio y el tiempo: Los flujos turbulentos son predecibles sólo a corto plazo. Esto es así por la alta sensibilidad del flujo a las condiciones iniciales y de contorno, resultado de la alta no linealidad. La predictibilidad puede recuperarse, sin embargo, en sentido estadístico. Esta sensibilidad a las condiciones iniciales y de contorno es característica de los sistemas caóticos. Sin embargo, así como la turbulencia es caótica, los movimientos caóticos no son necesariamente turbulentos: en efecto, algunos regímenes caóticos pueden ocurrir aún con pocos grados de libertad, es decir, pueden ser de pequeño espectro. La turbulencia es distinta del caos en el sentido que es compleja tanto en el espacio como en el tiempo.

Irreversibilidad: a medida que un flujo turbulento evoluciona, tiende a desconectarse de su estado inicial y a adoptar un estado equilibrado. Esta irreversibilidad, característica de los fenómenos termodinámicos, no aparece en los sistemas descritos por la mecánica de Newton. Sin embargo, y a pesar de que la dinámica del flujo turbulento está descrita con estas leyes se observa que la turbulencia tiende a mezclar y no a separar: esta observación se explica observando que, si no hubiera términos difusivos, una solución para (t, \vec{u}, p) sería solución para $(-t, -\vec{u}, p)$; sin embargo, cuando se incorporan los términos difusivos hay un quiebre en esta simetría.

Disipación: conectado con la observación anterior, si no hubiera términos difusivos, el flujo resultaría conservativo. Sin embargo los flujos turbulentos son disipativos a pesar de estar conducidos por mecanismos de excitación que actúan en la escala mayor. Se concluye que para que se provoque la disipación debe haber un mecanismo de transferencia de las propiedades del flujo desde las escalas mayores a las menores, en las cuales los términos difusivos se vuelven dominantes sobre los advectivos. Este proceso se denomina de *cascada turbulenta* y es característico de la turbulencia.

En varias referencias, se sugiere que una buena forma de aproximarse al problema de la turbulencia es a través de la observación de flujos que ocurren en la naturaleza: el océano, la atmósfera, lagos y ríos exhiben complejos flujos con las características antes mencionadas.

Existen numerosas reseñas históricas recientes sobre el estudio científico de la turbulencia (mencionamos las de Lumley (1992) y de Frisch (1999)). En ellas se indica que fue Leonardo quien acuñó el término *turbolenza*; sin embargo, no fue hasta el Siglo XIX en que el estudio sistemático de este tipo de flujos comenzara, con los trabajos de Hagen y Darcy. Trabajando independientemente, ambos encontraron que las pérdidas de presión en las canalizaciones urbanas tenían dos componentes: una, la ya presentada dependencia lineal con el largo de la canalización, la viscosidad y la velocidad del flujo, y una segunda, en que la dependencia era con el cuadrado de la velocidad media e independiente de la viscosidad.

Bousinesq, en 1877, publicó un trabajo en el que por primera vez distingue entre los regímenes laminar y turbulento. Indicó además que el transporte de cantidad de movimiento era mayor en el caso de los flujos turbulentos, fenómeno que explicó proponiendo una analogía con el caso de transporte laminar e incorporando una *viscosidad turbulenta*.

El siguiente aporte significativo fue el que realizó Reynolds, quien mediante experimentos en tubos de sección circular observó y explicó el fenómeno de *transición*, es decir, el mecanismo por el cual un flujo laminar deviene turbulento. Su aporte consistió en determinar que la transición ocurre cuando cierto parámetro adimensional –el $Re = \frac{RU}{\nu}$ – toma valores por encima de cierto umbral –el Re_c . Fue también Reynolds quien incorporó el tratamiento estadístico, utilizando para ello una descomposición de los campos de descripción en suma de una valor medio y una fluctuación, de media nula. Asociadas a esta descomposición están las llamadas *ecuaciones de Reynolds* y el *problema de clausura* [Cfr. Secciones 2 y 3].

Durante la primera parte del Siglo XX, hubo dos líneas de trabajo: una concentrada en el desarrollo de los modelos de turbulencia, necesarios para cerrar las ecuaciones de Reynolds. Aquí destacan los trabajos de Taylor, Prandtl y von Kármán. La otra línea, de carácter más fundamental se inicia en el trabajo de Richardson quien incorpora la idea de que la turbulencia es un fenómeno multiescala: él postuló que las estructuras más grandes, generadas por las fuerzas exteriores al sistema fluido son inestables y se rompen, dando lugar a estructuras más pequeñas, que a su vez se rompen en otras estructuras más pequeñas, hasta que el tamaño de las estructuras es tan pequeño como para que el efecto de la viscosidad sea dominante y las disipe. Esta idea fue fecunda ya que estimuló el trabajo de Taylor sobre turbulencia homogénea [Cfr. Sección ??] y el de von Kármán y Howarth sobre la transferencia de energía entre las estructuras de distinto tamaño.

A principios de la década del 1940, Kolmogorov presentó su teoría –*teoría de la cascada turbulenta* o K41– formalizando y extendiendo la idea de fenómeno multiescala de Richardson. Este trabajo marca un antes y un después en el estudio de la turbulencia. [Cfr. Sección ??]

La segunda mitad del Siglo XX trajo a la atención dos cuestiones relacionadas: en 1949, Batchelor y Townsend presentan evidencia de un fenómeno denominado *intermitencia*, que aparecen cuando se analizan las series temporales de las velocidades de las estructuras más pequeñas. Las teorías que mejor explican este fenómeno están basadas en modelos de cascadas multiplicativas: sin entrar en detalles, las consideraciones asociadas a estos modelos indican que en un flujo turbulento coexisten diversas estructuras fractales. La otra cuestión se plantea a nivel metodológico, cuando se deja el enfoque estadístico para proponerse un enfoque determinista, basado en el estudio de la organización estructural de cada flujo. Este nuevo abordaje se apoya en la evidencia experimental de los experimentos de Brown y Roshko de 1974, en los que se encontraron grandes *estructuras coherentes*, o grandes paquetes de ondas.

2. Ecuaciones de Reynolds

La descripción de la turbulencia se hace a partir del sistema Continuidad-Navier/Stokes-Transporte, que para el caso de un fluido incompresible resulta

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{v}) &= 0 \\ \frac{D(\rho\vec{v})}{Dt} &= \frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(\rho\vec{v}) = \vec{g} - \operatorname{grad}p + 2\mu D(\vec{v}) \\ \frac{Dc}{Dt} &= \frac{\partial c}{\partial t} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad}(c) = \operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad}c)\end{aligned}\quad (1)$$

Los tres números adimensionales que se utilizan en el análisis de la turbulencia son: *i)* el número de Reynolds $Re = \frac{UL}{\nu}$, que expresa el cociente de fuerzas inerciales a viscosas y describe el mecanismo dominante de transporte de la cantidad de movimiento, *ii)* el número de Péclet, $Pe = \frac{UL}{\kappa}$, que evalúa la razón de la advección a la difusión y que es análogo al Re para el caso de transporte de un escalar y *iii)* el número de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$, que es el cociente de las escalas de difusividad de la cantidad de movimiento y de difusividad de un escalar.

De lo dicho más arriba, se concluye que es imposible realizar una descripción detallada de cada torbellino que se forma en un flujo turbulento. Sin embargo, como también se indicó más arriba, la turbulencia admite predictibilidad en sentido estadístico. Así, se construirá una descripción estadística de la turbulencia, basada en la descomposición del campo de velocidades según

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \quad (2)$$

donde \vec{V} representa el campo medio y \vec{v}' es la fluctuación del campo, es decir, su desviación de la media. El valor medio puede ser un promedio en el tiempo, de modo que \vec{V} sea sólo función de punto en un intervalo pequeño; de acuerdo a esto, nótese que por definición el valor medio de la fluctuación debe ser nula $\langle \vec{v}' \rangle = 0$. Reemplazando esta descomposición en el Sistema (1), se intenta construir una expresión cerrada para \vec{v} . Sin embargo, como se verá en breve, asociada a esta descripción y en virtud de los términos no lineales de la ecuación, aparecerá el denominado *problema de clausura*.

Considérese primero la ecuación de continuidad: reemplazando en ella la descomposición (2) para la velocidad, resulta que $\operatorname{div}\vec{V} = \operatorname{div}\vec{v}' = 0$.

Considérese ahora la ecuación de Navier-Stokes: reemplazando en esta la descomposición (2) y tomando promedios resulta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle \vec{V} + \vec{v}' \rangle}{\partial t} + \langle (\vec{V} + \vec{v}') \cdot \text{grad} [\vec{V} + \vec{v}'] \rangle &= \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} \langle p \rangle + \nu \Delta [\vec{V} + \vec{v}'] \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V} + \langle \vec{v}' \cdot \text{grad} \vec{v}' \rangle &= \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} \langle p \rangle + \nu \Delta \vec{V} \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} \vec{V} &= \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{div} \left[\langle p \rangle I - \rho \nu \text{grad} \vec{V} + \rho \langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle \right]\end{aligned}$$

Estas ecuaciones se conocen como *ecuaciones de Reynolds*, mientras que el término extra que aparece en el segundo miembro se denomina *tensor de tensiones de Reynolds*. Esta interpretación motivará una estrategia de clausura, que asume para esta tensión adicional un modelo de Ficks.

Análogamente, descomponiendo $c = C + c'$, en una función media y su fluctuación, la ecuación de transporte en promedio, resulta

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad} C = -\text{div} [-\kappa \text{grad} C + \langle \vec{v}' c' \rangle] .$$

El término $\langle \vec{v}' c' \rangle$ es el denominado *flujo de Reynolds del trazador*. El problema de modelar la turbulencia reside en representar las tensiones y flujos de Reynolds en términos de las cantidades medias.

3. El problema de clausura

Para exponer este problema considérese el siguiente problema simplificado (Vallis, G. K., 2006. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics: Fundamentals and Large-Scale Circulation. Cambridge University Press)

$$\frac{du}{dt} + uu + \nu u = 0 .$$

La ecuación promediada resulta

$$\frac{d \langle u \rangle}{dt} + \langle uu \rangle + \nu \langle u \rangle = 0 .$$

Obsérvese que no puede inferirse el valor del término $\langle uu \rangle$ a partir del valor de $\langle u \rangle$ ya que este se obtiene de hacer

$$\langle uu \rangle = \langle (U + u')(U + u') \rangle = UU + \langle u'u' \rangle \neq \langle u \rangle \langle u \rangle .$$

Es posible escribir una ecuación de momentos para el valor de $\langle uu \rangle$: multiplíquese la ecuación original por u y obténgase una expresión para u^2 , que en promedio resulta

$$\frac{1}{2} \frac{d \langle uu \rangle}{dt} + \langle uuu \rangle + \nu \langle uu \rangle = 0 .$$

En esta expresión aparece ahora un término cúbico $\langle uuu \rangle$, indeterminado. Si se construyese la siguiente ecuación de momentos, aparecería un término cuártico y así siguiendo se generaría una jerarquía abierta de incógnitas, sin clausura. Para lograr cerrar el problema se hace necesario recurrir a hipótesis físicas sobre el modelo que no estén contenidas en el Sistema (1).

Una estrategia de clausura clásica para las ecuaciones de Reynolds es la de Boussinesq, que relaciona $\langle \vec{v}' \vec{v}' \rangle$ con el flujo medio a través de un coeficiente de *viscosidad de torbellino* (eddy viscosity) mediante la relación

$$\vec{v}' \vec{v}' = -\nu_T \text{grad} \vec{V} . \quad (3)$$

Físicamente, la hipótesis que subyace reduce el efecto dinámico de la turbulencia a una propiedad del fluido. Así el efecto de la turbulencia modifica el valor de la viscosidad: en otras palabras, se asume que los torbellinos turbulentos se comportan como los movimientos moleculares, redistribuyendo y homogeneizando la cantidad de movimiento. Análogamente para el flujo del trazador, se define una difusividad de torbellino, κ_T y se propone que

$$\langle \vec{v}' c' \rangle = -\kappa_T \text{grad} \langle C \rangle .$$

Esta viscosidad/difusividad de torbellino se utiliza extensivamente en el modelado de flujos turbulentos a gran escala. En los modelos más simples κ_T y ν_T se consideran constantes mientras que en modelos más sofisticados se los asume dependientes del flujo a escala mayor. A pesar de su popularidad, esta estrategia de clausura no suele ser apropiada.

Otra estrategia de clausura es la adoptada por Prandtl, que deja el modelo de Ficks, en el que haya una proporcionalidad entre el tensor de Reynolds y el gradiente de velocidad media, para evaluar en su lugar una cantidad asociada a la dinámica del flujo, denominada *longitud de mezcla*, de particular utilidad en el caso de flujos de corte.

Para explicar el concepto, considérese una partícula de fluido, en una posición (x, y) . Por efecto de las fluctuaciones del flujo, otras partículas, ubicadas en $(x', y \pm \ell')$ interactuarán con ella, intercambiando cantidad de movimiento y produciendo como resultado de dicho intercambio una fluctuación en la componente longitudinal del flujo. La magnitud de las fluctuaciones dependerá de las velocidades medias de los alrededores de (x, y) y del valor de ℓ' .

Asociadas a las fluctuaciones en la componente longitudinal del flujo, aparecerán fluctuaciones del mismo orden en las componentes transversales, de modo de satisfacer la ecuación de continuidad. Así, la fluctuación producida por el intercambio de cantidad de movimiento entre la partícula en consideración y una de posición inicial $(x', y \pm \ell')$ podrá escribirse como

$$\Delta v_x = \pm \ell' \frac{dv_x}{dy}, \quad \text{o en valor absoluto } |\Delta v_x| = \ell' \left| \frac{dv_x}{dy} \right|.$$

Como ya se indicó, la fluctuación lateral deberá ser del mismo orden que la longitudinal, de modo que puede escribirse una relación del tipo

$$|\Delta v_y| = c \ell' \left| \frac{dv_x}{dy} \right|.$$

Si se construye el producto de $|\Delta v_y| |\Delta v_x| = c \ell'^2 \left| \frac{dv_x}{dy} \right|^2$ y si se acepta una proporcionalidad entre la fluctuación de los flujos así calculadas con las correspondientes componentes fluctuantes: $v'_y v'_x = -k |\Delta v_y| |\Delta v_x|$ ¹, tomando valor el valor medio de esta expresión resulta

$$\langle v'_y v'_x \rangle = -k c \ell'^2 \left| \frac{dV_x}{dy} \right|^2 = -\ell^2 \left| \frac{dV_x}{dy} \right|^2, \quad (4)$$

donde $\ell^2 = k c \ell'^2$ define la longitud de mezcla.

Nótese que tanto la expresión (3) como la (4) son definiciones para la viscosidad de torbellino y la longitud de mezcla, respectivamente: la hipótesis es que estas cantidades serán más fácilmente correlacionables empíricamente que las tensiones de Reynolds. En todos los casos, será necesario contar con un modelo para representar estas cantidades.

¹Obsérvese que el producto $|\Delta v_y| |\Delta v_x|$ es siempre positivo, mientras que en el razonamiento, $v'_y v'_x$ debe ser negativo, para satisfacer la ecuación de continuidad.

4. Modelos de turbulencia

La especificación de ν_T o de ℓ puede realizarse en términos de relaciones algebraicas o de una combinación de ecuaciones algebraicas y diferenciales, lo que da lugar a una taxonomía basada en la cantidad de ecuaciones (diferenciales) que tiene el modelo. Típicamente, los modelos serán de cero, una y dos ecuaciones, por lo que se organiza el resto de la sección con esta clasificación.

4.1. Modelos de cero ecuaciones

Para el caso de flujos externos, un método totalmente algebraico de amplia difusión es el de Cebeci y Smith (CS). Este modelo asume que la capa límite turbulenta puede diferenciarse en dos regiones -una interior y otra exterior- las que pueden representarse con una viscosidad de torbellino distinta para cada región de la misma. Las correspondientes funciones son empíricas y basadas en consideraciones experimentales.

En la región interior: $0 \leq y \leq y_c$

$$(\nu_T)_{int} = \ell^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \gamma_{tr}$$

donde la longitud de mezcla viene dada por

$$\ell = \kappa y \left[1 - \exp \left(-\frac{y}{A} \right) \right] .$$

En esta expresión, $\kappa = 0,4$ y A es un factor de amortiguamiento, constante, representado por

$$A = 26 \frac{\nu}{N} u_\tau^{-1}, \quad N = (1 - 11,8 p^+)^{\frac{1}{2}}, \quad p^+ = \frac{\nu u_e}{u_\tau^3} \frac{du_e}{dx} .$$

En la región exterior: $y_c \leq y \leq y_\delta$

$$(\nu_T)_{ext} = \alpha u_e \delta^* \gamma_{tr} \gamma .$$

Aquí, δ^* es el *espesor de desplazamientos* dado por

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_e} \right) dy ,$$

y γ es un *factor de intermitencia* para la región exterior representado como

$$\gamma = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \frac{(y - Y)}{\sqrt{2}\sigma} \right] ,$$

donde Y y σ son parámetros de intermitencia generales: Y es el valor de y en que $\gamma = 0,5$ y σ es la desviación estándar. Los parámetros adimensionales de intermitencia, Y/δ^* y σ/δ^* vienen dados en función de H en la Figura 1,(a), mientras que la variación de δ/δ^* en la Figura 1,(b).

El parámetro α se calcula con la expresión

$$\alpha = \frac{0,0168}{\left[1 - \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial y} \right)_m \right]^{1,5}}.$$

En esta expresión, el subíndice m indica que se trata del valor donde el corte es máximo. El parámetro β resulta

$$\beta = \begin{cases} \frac{6}{1+2R_t(2+R_t)} & R_t \leq 1,0 \\ \frac{1+R_t}{R_t} & R_t > 1,0 \end{cases} \quad \text{donde} \quad R_t = \frac{\tau_w}{(-\rho < \vec{v}^i \vec{v}^j >)_{max}}.$$

Para completar el modelo, indiquemos que γ_{tr} es un parámetro de intermitencia de transición, definido como

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp \left[-G(x - x_{tr}) \int_{x_{tr}}^x \frac{dx}{u_e} \right], \quad G = \frac{3}{C^2} \frac{u_e^3}{\nu} R_{x_{tr}}^{-1,34}, \quad R_{x_{tr}} = (u_e x_{tr} / \nu)$$

$C = 60$ para Reynolds altos, o $C = 213(\log R_{x_{tr}} - 4,7323)$ para Reynolds más bajos.

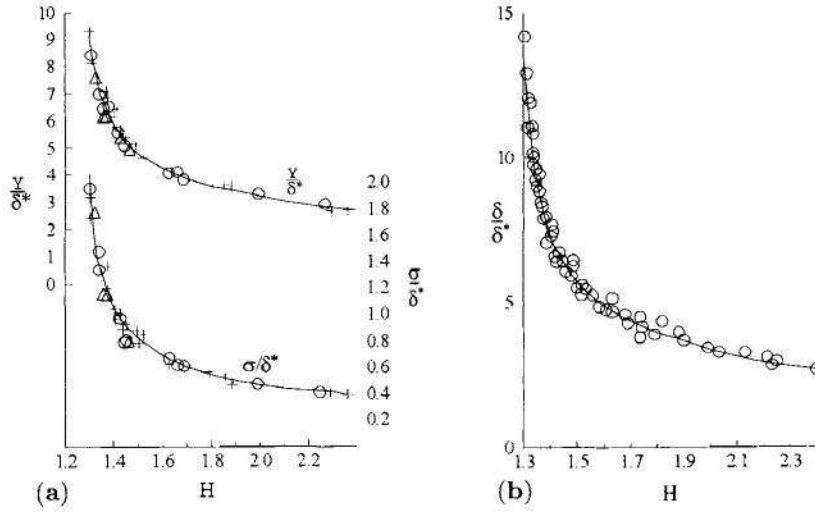


Figura 1: Dependencia de Y/δ^* , σ/δ^* y δ/δ^* con H de acuerdo a datos de Friedler y Head.

4.2. Modelos de una ecuación

De los muchos métodos que caben en esta categoría, se presenta el método de Spalart y Allmars (SA). El método emplea una única ecuación para el transporte para la viscosidad de torbellino. Permite obtener buenos resultados tanto en flujos de corte –por ejemplo, cerca de una pared– como en flujos sin corte –chorros o estelas. Las ecuaciones de este modelo son:

$$\nu_T = \epsilon f_{\nu_1} \quad (5)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = c_{b1}[1-f_{t2}]S\epsilon - (c_{w1}f_w - \frac{c_{b1}}{\kappa^2}f_{t2})\left(\frac{\epsilon}{d}\right)^2 + \frac{1}{\sigma}\text{div}[(\nu + \epsilon)\text{grad}\epsilon] + \frac{c_{b2}}{\sigma}\Delta\epsilon . \quad (6)$$

Aquí las constantes son

$$c_{b1} = 0,1355 , \quad c_{b2} = 0,622 , \quad \sigma = \frac{2}{3} , \quad c_{\nu_1} = 7,1 ,$$

$$c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + c_{b2}}{\sigma} , \quad c_{w2} = 0,3 , \quad c_{w3} = 2 , \quad \kappa = 0,41 ,$$

$$f_{\nu_1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{\nu_1}^3} , \quad f_{\nu_2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{\nu_1}} , \quad f_w = g \left[\frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right]^{\frac{1}{6}} , \quad f_{t2} = 1,1e^{-2\chi^2} ,$$

$$\chi = \frac{\epsilon}{\nu} , \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r) , \quad r = \frac{\epsilon}{S\kappa^2 d^2} , \quad S = \sqrt{2\Omega : \Omega} + \frac{\epsilon}{\kappa^2 d^2} f_{\nu_2} .$$

En el modelo, d es la menor distancia a la pared y Ω el tensor de torbellino. Junto a esta ecuación, se debn proveer condiciones iniciales y de contorno: sobre la pared, se asume que $\epsilon = 0$. Como condición inicial suelen aceptarse valores entre 0 y $\frac{\nu}{10}$.

4.3. Modelos de dos ecuaciones

Hay varios modelos de dos ecuaciones que demuestran buena performance. De entre ellos, se presentará el modelo $k - \epsilon$, de Jones y Launder, que es el de más amplia adopción. En este modelo, la viscosidad de torbellino se expresa como:

$$\nu_T = \frac{c_\mu k^2}{\epsilon} , \quad (7)$$

donde k la energía cinética y ϵ la tasa de disipación de la energía del flujo, se obtienen de dos ecuaciones diferenciales que evalúan el transporte de estas cantidades, escritas como:

$$\frac{Dk}{Dt} = \text{div} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right] + \nu_T \left(2D(\vec{V}) \cdot \text{grad} \vec{V} \right) - \epsilon , \quad (8)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = \text{div} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\epsilon} \right) \text{grad} \epsilon \right] + c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} \nu_T \left(2D(\vec{V}) \cdot \text{grad} \vec{V} \right) - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} . \quad (9)$$

Los valores de las constantes que aparecen en las ecuaciones son:

$$c_\mu = 0,09, \quad c_{\epsilon_1} = 1,44, \quad c_{\epsilon_2} = 1,92, \quad \sigma_k = 1,0, \quad \sigma_\epsilon = 1,3.$$

Las ecuaciones de continuidad y de Reynolds, junto con este par de ecuaciones y el juego de valores propuestos para las constantes, constituyen un conjunto cerrado de ecuaciones. Para completarlo y permitir su solución, es necesario, sin embargo, proveer de condiciones de contorno apropiadas: en efecto, las ecuaciones, tal como esán, pueden aplicarse sin problemas a flujos libres. Sin embargo, cerca de paredes donde es válida la condición de no deslizamiento y donde, por ende, los gradientes de velocidad serán pronunciados, es necesario considerar las denominadas *funciones de pared*.

Por ejemplo, Launder y Sharma proponen modificar la ecuación para la viscosidad de torbellino de modo que:

$$\nu_T = c_\mu f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} , \quad (10)$$

donde la función de pared f_μ resulta

$$f_\mu = \exp \left[-\frac{3,4}{(1 + R_t/50)^2} \right] , \quad R_t = \frac{k^2}{\nu \epsilon} . \quad (11)$$

Las condiciones de contorno resultan

$$y = 0 , \quad k = \epsilon = 0 \quad \text{y} \quad y = \delta , k \rightarrow k_\delta , \epsilon = \epsilon_\delta .$$

Los valores k_δ y ϵ_δ no deben ser nulos sino solución de las ecuaciones (8) y (9) sobre la frontera de la capa límite.

5. La energía del flujo turbulento

El estudio del contenido y distribución de la energía del flujo turbulento, permite comprender los mecanismos de producción y decaimiento de la turbulencia. Algunas preguntas que se buscan contestar con este estudio son: ¿cuál es la fuente de energía de la turbulencia? esto es, ¿qué aspectos del flujo en la escala mayor dan lugar a la turbulencia? ¿dónde va la energía de la turbulencia? ¿se realimenta en la escala mayor o es disipada por la viscosidad en la escala menor? una vez generada, ¿cómo se redistribuye la energía tanto en el espacio como entre las distintas componentes del flujo?

Para realizar este análisis, se separa el campo bajo estudio en una componente en la escala mayor y otra en la escala menor. Por ejemplo, para un escalar u ,

$$u = \mathcal{U} + u' , \quad \text{con} \quad \frac{1}{\forall} \int_{\forall} u \, d^3x = \mathcal{U} , \quad \frac{1}{\forall} \int_{\forall} u' \, d^3x = 0 \quad (12)$$

donde \forall es el volumen sobre el que se realiza el promedio espacial.

Considérese la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}, \quad \text{que se descompone como} \quad K_m = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\mathcal{V}}, \quad K_t = \frac{1}{2} \vec{v}' \cdot \vec{v}' .$$

Para el flujo de mayor escala, para la i -ésima componente de la velocidad, resulta:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{V}_i^2}{\partial t} + \mathcal{V}_i \sum_{j=1}^3 \mathcal{V}_j \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} + \mathcal{V}_i \sum_{j=1}^3 v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = \vec{g} \cdot \vec{n}_i \mathcal{V}_i - \frac{\mathcal{V}_i}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \nu \mathcal{V}_i \Delta \mathcal{V}_i$$

Utilizando las identidades

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i \Delta \mathcal{V}_i &= \Delta \mathcal{V}_i - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} \\ \mathcal{V}_i \sum_{j=1}^3 v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (v'_j v'_i \mathcal{V}_i) - v'_i \sum_{j=1}^3 v'_j \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} \end{aligned}$$

y promediándola, la anterior se reescribe como

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \mathcal{V}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \frac{\mathcal{V}_i^2}{2} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\mathcal{V}_i P)}{\partial x_i} + \frac{\nu}{2} \Delta \mathcal{V}_i^2 - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v'_j v'_i \mathcal{V}_i \rangle + \\ &\quad -\nu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^3 \langle v'_i v'_j \rangle \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} + \\ &\quad + \vec{g} \cdot \vec{n}_i \mathcal{V}_i + \frac{P}{\rho} \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Los promedios son en el sentido de la descomposición (12). Sumando ahora para las tres componentes, se obtiene la evolución de K_m : en forma conservativa resulta

$$\begin{aligned} \frac{DK_m}{Dt} &:= \sum_{i=1}^3 \frac{D \frac{\mathcal{V}_i^2}{2}}{Dt} = \sum_{i=1}^3 \text{div} \left(-\frac{P}{\rho} \mathcal{V}_i \delta_{ij} + \nu \text{grad} \left(\frac{\mathcal{V}_i^2}{2} \right) - \langle \vec{v}' v'_i \mathcal{V}_i \rangle \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^3 \left(-\nu \text{grad} \mathcal{V}_i^2 + \langle v'_i \vec{v}' \rangle \cdot \text{grad} \mathcal{V}_i \right) + \vec{g} \cdot \vec{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

Los tres primeros términos de esta expresión expresan la redistribución de la energía cinética media en el volumen: representan respectivamente, el trabajo de la presión, el transporte por tensiones viscosas y el transporte debido a las tensiones de Reynolds. Si estas cantidades se integran en un volumen cerrado –uno a través del que no hay flujo– estos términos se anulan. El cuarto y quinto término representan las fuentes o sumideros de energía cinética: el primero de ellos es la disipación viscosa de energía cinética del flujo a escala mayor, mientras que el otro es la transferencia de energía cinética del flujo de mayor escala al flujo de escala menor: este término se llama de *producción de corte* (shear production), ya que el corte –gradientes finitos– da lugar a la producción de energía cinética turbulenta. Nótese que el último término de la expresión anterior $-\frac{P}{\rho}\text{div}\vec{\mathcal{V}}$ se cancela en virtud de la ecuación de continuidad.

Para hallar la evolución de la energía cinética del flujo turbulento se procede en forma análoga:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \frac{\langle v_i'^2 \rangle}{2} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle v_i' p' \rangle}{\partial x_i} + \nu \Delta \frac{\langle v_i'^2 \rangle}{2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_j' v_i'^2 \rangle + \\ & -\nu \sum_{j=1}^3 \left\langle \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \frac{\partial v_i'}{\partial x_j} \right\rangle - \sum_{j=1}^3 \langle v_i' v_j' \rangle \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} + \\ & + \frac{1}{\rho} \langle p' \frac{\partial v_i'}{\partial x_i} \rangle \end{aligned}$$

Es posible reconocer en esta expresión tres términos de re-distribución: el trabajo de la presión, el transporte viscoso y el debido a las tensiones de Reynolds. El cuarto término es la disipación de energía turbulenta, ϵ y el término de producción de corte aparece nuevamente, pero con signo opuesto al que tiene en la ecuación para la energía del flujo medio: esto indica que no se trata de una pérdida de energía sino de una transferencia de la misma desde el flujo medio al turbulento.

Sumando la contribución de las tres componentes, resulta

$$\begin{aligned} \frac{DK_t}{Dt} = & \sum_{i=1}^3 \text{div} \left(-\frac{1}{\rho} \langle p' v_j \rangle \delta_{ij} + \nu \text{grad} \left(\frac{\langle v_i'^2 \rangle}{2} \right) - \langle \vec{v}' v_i'^2 \rangle \right) + \\ & + \sum_{i=1}^3 \left(-\underbrace{\nu \langle \text{grad} v_i'^2 \rangle}_{\epsilon} - \langle v_i' \vec{v}' \rangle \cdot \text{grad} \mathcal{V}_i \right) \quad (13) \end{aligned}$$

Se distinguen entonces dos mecanismos: el de producción y el de disipación.

Turbulencia estacionaria: si la turbulencia es estacionaria, $DK/Dt = 0$ y al integrar sobre todo el sistema, debe haber un balance entre la energía producida y la disipada.

Flujo de corte simple: en el caso en que $\vec{v} = (v_1(x_3), 0, 0)$, la producción de energía cinética turbulenta toma la forma $\langle v'_1 v'_3 \partial \mathcal{V}_1 / \partial z \rangle$, apareciendo sólo en la ecuación para $\langle v'^2_1 \rangle$. Así el flujo a escala mayor genera directamente energía turbulenta sólo en la dirección x_1 . Las componentes v'_2 y v'_3 se generan por transferencia de energía cinética desde el flujo a lo largo de x_1 a través de los términos de interacción con la presión.

Invarianza de los trazadores: al igual que para las componentes de la energía cinética, es posible obtener una ecuación para $\langle c'^2 \rangle$, donde c es un escalar pasivo, transportado por la turbulencia, que denominaremos *trazador*. La ecuación para tal trazador es

$$\frac{D \langle c'^2 \rangle}{Dt} = \kappa \Delta \langle c'^2 \rangle - \text{div} \langle \vec{v}' c'^2 \rangle / 2 - \langle c' \vec{v}' \rangle \cdot \text{grad} \mathcal{C} - \kappa \text{grad} c' \cdot \text{grad} c'.$$

Al igual que en el caso de la energía cinética, los dos primeros términos son términos de transporte, mientras que la varianza del trazador viene producida por el término $P_{\mathcal{T}} = - \langle c' \vec{v}' \rangle \cdot \text{grad} \mathcal{C}$ y disipada por $\epsilon_{\mathcal{T}} = \kappa \text{grad} c' \cdot \text{grad} c'$. Si el trazador es una cantidad invariante, debe verificarse que $P_{\mathcal{T}} = \epsilon_{\mathcal{T}}$.

6. Leyes de fricción

6.1. Capa límite

Considérese un flujo uniforme, paralelo a una pared plana infinita Γ en reposo. Debido a la condición de no deslizamiento, $\vec{v} = 0$ sobre Γ , se formará una capa de corte en las cercanías de la pared, denominada *capa límite*. En ella se generará vorticidad, la que se transportará hacia el resto del flujo provocando la posterior aparición de turbulencia.

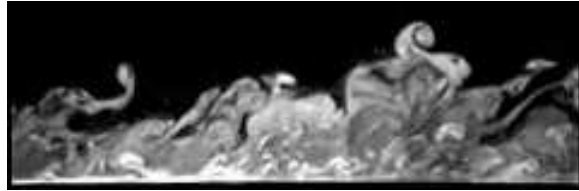


Figura 2: Imagen por fluorescencia láser de una capa límite turbulenta incompresible sobre una placa plana.

Para poder describir este fenómeno, considérense las ecuaciones de Continuidad-Navier/Stokes para el caso estacionario bidimensional, del flujo uniforme de intensidad $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_1$ paralelo a una placa plana [Cfr. Figura 3]:

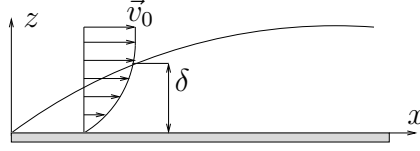


Figura 3: Ilustración del sistema bajo análisis.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0, \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Sean las siguientes escalas: $v_x \sim \mathcal{O}(v_0)$, $x \sim \mathcal{O}(L)$, $z \sim \mathcal{O}(\delta)$. De la ecuación de continuidad, se concluye que

$$\frac{v_x}{L} \sim \frac{v_z}{\delta} \quad \rightarrow \quad \frac{v_0}{L} \sim \frac{v_z}{\delta},$$

de modo que $v_z \sim \mathcal{O}(v_0 \delta / L)$. Adimensionalizando las variables y funciones con estas escalas, el sistema anterior resulta:

$$\begin{aligned} \frac{v_0}{L} \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) &= 0, \\ \frac{v_0^2}{L} \left(v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} \right) &= -\frac{P}{\rho L} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\nu v_0}{L^2} \partial_{x'x'}^2 v'_x + \frac{\nu v_0}{\delta^2} \partial_{z'z'}^2 v'_x, \\ \frac{\delta}{L} \frac{v_0^2}{L} \left(v'_x \frac{\partial v'_z}{\partial x'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} \right) &= -\frac{P}{\rho \delta} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\nu v_0}{L^2} \frac{\delta}{L} \partial_{x'x'}^2 v'_z + \frac{\nu v_0}{\delta^2} \frac{\delta}{L} \partial_{z'z'}^2 v'_z, \end{aligned}$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} &= 0, \\ v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'} &= -\frac{P}{\rho v_0^2} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{1}{Re} \left(\partial_{x'x'}^2 v'_x + \frac{L^2}{\delta^2} \partial_{z'z'}^2 v'_x \right), \\ v'_x \frac{\partial v'_z}{\partial x'} + v'_z \frac{\partial v'_z}{\partial z'} &= -\frac{P}{\rho v_0^2} \frac{L^2}{\delta^2} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{1}{Re} \left(\partial_{x'x'}^2 v'_z + \frac{L^2}{\delta^2} \partial_{z'z'}^2 v'_z \right), \end{aligned}$$

Siendo $Re \gg 1$, para conservar el término viscoso dominante en la ecuación para v_x , deberá verificarse que

$$\frac{\delta}{L} \sim Re^{-1/2} ,$$

lo que implica que dentro de la capa límite, las fuerzas viscosas serán comparables a las de inercia. Asimismo, para conservar el orden de la tercer ecuación, es necesario que

$$\frac{\partial p'}{\partial z} \sim \mathcal{O} \left(\frac{\delta}{L} \right)^2 ,$$

es decir muy pequeño. Esto implica que la variación de presión en la dirección transversal al flujo es prácticamente nula: se dice que la distribución de presión viene impresa por el flujo fuera de la capa límite. Allí, donde los esfuerzos de corte son despreciables, la ecuación de Bernoulli permite expresar

$$v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial x} .$$

Reemplazando esta expresión en las expresiones anteriores, resulta la denominada *aproximación de Prandtl para la capa límite* (1905), que en variables físicas resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\ v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \end{array} \right. \quad (14)$$

Como a se mencionó, este flujo puede devenir turbulento: utilizando ideas semejantes a las desarrolladas en la Sección ??, pueden distinguirse distintos regímenes dentro del flujo de capa límite:

subcapa viscosa: a distancias muy cercanas a la pared, $z < z_f$, donde z_f es la distancia a la cual $Re = 1$, los efectos de la fricción son importantes. Siguiendo la comparación con la turbulencia homogénea, esta escala puede compararse con la escala $\ell_d < 1/k_d$ donde la viscosidad es importante,

escala integral: esta escala viene dada por el tamaño máximo de los torbellinos, que definen el espesor δ de la capa límite turbulenta,

subcapa inercial: a mayores distancias de la pared, $z_f \ll z \ll \delta$, puede despreciarse la viscosidad. En esta región puede asumirse que el flujo no dependerá del espesor de la capa límite, definiéndose una *subcapa inercial*. Esta región es similar al rango inercial de la turbulencia homogénea, donde el flujo no se ve afectado por ν o por k_0 .

la corriente libre: finalmente y a distancias $z < \delta$, el flujo deja de ser turbulento deviniendo uniforme.

Las ecuaciones de gobierno para la velocidad, pueden derivarse de las ecuaciones generales del flujo o de la aproximación de Prandtl. [Cfr. nuevamente la Figura 3]. Como se estableció ya, si L es la escala de longitud en la dirección del flujo, $\delta/L \ll 1$, y las variaciones en la dirección del flujo son despreciables, comparadas con las variaciones del flujo en la dirección normal a la pared. Con estas hipótesis, las ecuaciones de Reynolds, promediadas resultan:

$$\begin{aligned} V_z \frac{dV_x}{dz} &= \frac{d}{dz} \left(\nu \frac{dV_x}{dz} - \langle v'_z v'_x \rangle \right) \\ \frac{dV_z}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

Respecto a las condiciones de contorno, considerando impermeable la pared, $V_z = v'_z = 0$ sobre $\Gamma := \{(x, z = 0)\}$. Considerando entonces la segunda ecuación, resulta que $V_z = 0$ para todo z de modo que el sistema se reduce a

$$\frac{d}{dz} \left(\nu \frac{dV_x}{dz} - \langle v'_z v'_x \rangle \right) = 0. \quad (15)$$

La ecuación (15) permite hallar una expresión para la tensión τ sobre la pared: en efecto,

$$\tau = \rho \left(\nu \frac{dV_x}{dz} - \langle v'_z v'_x \rangle \right)_{z=0} = \left(\mu \frac{dV_x}{dz} \right)_{z=0}. \quad (16)$$

Esta tensión es constante sobre toda la placa. Lejos de la pared resultará

$$\tau = -\rho \langle v'_z v'_x \rangle.$$

Esta expresión permite definir una escala de velocidad:

$$\rho v_*^2 = \tau = \left(\mu \frac{dV_x}{dz} \right)_{z=0} \quad (17)$$

donde v_* es la *velocidad de fricción*. Lejos de la pared, la ecuación (16) implica que v_* es la escala de la fluctuación turbulenta. Es posible definir, entonces, una escala de longitud, asociada a la velocidad de fricción, de la forma

$$z_f = \frac{\nu}{v_*} \quad (18)$$

que representa la escala a la cual $Re = 1$, es decir la distancia en la que ocurre la transición desde la subcapa viscosa a la inercial.

Los comportamientos del flujo en las capas viscosa e inercial están dados por mecanismos distintos. En la subcapa viscosa, $z < z_f$, la velocidad debe depender de la distancia normal a la pared, z , así como de la viscosidad y de la velocidad de fricción. Es posible escribir una relación adimensional de la forma

$$\frac{V_x}{v_*} = f\left(\frac{z}{z_f}\right) = f\left(\frac{zv_*}{\nu}\right).$$

Definiendo $V^+ = V_x/v_*$ y $z^+ = zv_*/\nu$, la anterior suele presentarse como $V^+ = f(z^+)$. En el caso de una pared rugosa, es conveniente utilizar como escala de longitud la rugosidad z_0 , especialmente si $z_0 > z_f$.

En la subcapa inercial, en cambio, se desprecian los efectos viscosos. Así, cerca del borde de la capa límite turbulenta, el flujo deberá depender de la escala de velocidad turbulenta –la velocidad de fricción– del espesor de la capa límite, δ y de la distancia normal a la placa. Esta relación puede expresarse como

$$\frac{dV_x}{dz} = \frac{v_*}{\delta} g\left(\frac{z}{\delta}\right).$$

La condición de borde para esta ecuación indica que para $z \rightarrow \infty$, $V_x \rightarrow v_0$. Integrando la EDO, resulta

$$\int_z^\infty \frac{dV_x}{dz'} dz' = \frac{v_*}{\delta} \int_z^\infty g\left(\frac{z'}{\delta}\right) dz'$$

$$\frac{V_x(z) - v_0}{v_*} = G\left(\frac{z}{\delta}\right) = G(\zeta)$$

donde $\zeta = z/\delta$. Este tipo de expresiones se denominan *leyes para la deficiencia de velocidad*. Esta es una solución de semejanza para $V^+ = V_x/v_*$ que asume que a medida que cambia el espesor de la capa límite o para distintas capas límites, la forma de V^+ permanece invariante. Obsérvese que esta solución de semejanza es válida fuera de la subcapa viscosa y no satisface la condición $V_x = 0$ sobre Γ .

Resta encontrar una solución para la zona de transición, que permita ajustar las soluciones obtenidas para las subcapas viscosa e inercial. Considérese que ambas leyes de velocidad deben coincidir en esta región de transición

$$\begin{aligned} \frac{dV^{+(v)}}{dz^+} &= \frac{df}{dz^+} = \frac{\zeta}{z^+} \frac{dG}{d\zeta} = \frac{dV^{+(i)}}{dz^+} \quad \text{o reordenando} \\ z^+ \frac{df}{dz^+} &= \zeta \frac{dG}{d\zeta} \end{aligned} \quad (19)$$

El primer miembro de la ecuación (19) sólo puede depender de z^+ mientras que el segundo miembro sólo puede depender de ζ : esto sólo se cumple si son iguales a una constante

$$z^+ \frac{df}{dz^+} = \zeta \frac{dG}{d\zeta} = \frac{1}{\mathcal{K}} . \quad (20)$$

La constante $\mathcal{K} \approx 2,46$ es la *constante de von Karman*. Esto implica que

$$\frac{dV_x}{dz} = \frac{v_*}{\mathcal{K}z} ,$$

de modo que en esta región de transición, el flujo está determinado por v_* y z , resultando independiente de ν o δ . Integrando las (20), resulta

$$\frac{V_x}{v_*} = \frac{1}{\mathcal{K}} \ln \left(\frac{v_* z}{\nu} \right) + A , \quad (21)$$

$$\text{o formando la deficiencia de velocidad} \quad \frac{V_x - v_0}{v_*} = \frac{1}{\mathcal{K}} \ln \left(\frac{z}{\delta} \right) + B . \quad (22)$$

La región de aplicación, que definimos por $\zeta \ll 1$ y $z^+ \gg 1$ se denomina *subcapa logarítmica*.

Nota: La tensión en la pared suele expresarse en términos del coeficiente de fricción c_f :

$$\tau = \frac{1}{2} \rho c_f v_0^2 , \quad \text{donde} \quad c_f = 2 \left(\frac{v_*}{v_0} \right)^2 .$$

Para una pared lisa, resulta

$$c_f = \left[\frac{1}{2\mathcal{K}} \ln \left(\frac{c_f}{2} \right) + \frac{1}{\mathcal{K}} \ln \left(\frac{v_0 \delta}{\nu} \right) + A - B \right]^2 .$$

6.2. Fricción en tubos de sección circular

Considérese ahora el caso del flujo en un tubo de sección circular, con el eje $x - x$ orientado longitudinalmente. El campo de velocidades tendrá su estructura dada como $\vec{v} = (v'_r, v'_\theta, V_x + v'_x)$: esto es que superpuesto al flujo medio longitudinal, está el flujo turbulento, resultando $V_\theta = V_r = 0$. Las velocidades v'_r, v'_θ, v'_x son independientes de x y de θ .

Las ecuaciones de gobierno del flujo –esto es las ecuaciones de Reynolds en coordenadas cilíndricas– son

$$\frac{\partial r V_x}{\partial x} = 0 , \quad (23)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r < v'_x v'_r >)}{\partial r} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_x}{\partial r} \right) = 0 , \quad (24)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial < r v'_r v'_r >}{\partial r} + \frac{< v'_\theta v'_\theta >}{r} = 0 . \quad (25)$$

Integrando la Ecuación (25) entre 0 y r , resulta

$$-\frac{p}{\rho} - \int_0^r \frac{1}{r} \frac{\partial(r < v'_r v'_r >)}{\partial r} + \int_0^r \frac{< v'_\theta v'_\theta >}{r} = -\frac{p(x, 0)}{\rho} = -\frac{p_0(x)}{\rho} .$$

Derivando esta expresión respecto de x , resulta

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x} \Rightarrow p(x, r) = p_0(x) + \Phi(r) ,$$

la que reemplazada en la Ecuación (24) resulta

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp_0}{dx} - \frac{1}{r} \frac{d(r < v'_x v'_r >)}{dr} + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_x}{dr} \right) = 0 , \quad (26)$$

en virtud de que ni V_x ni $< v'_x v'_r >$ dependen de x . De la Ecuación (26) se deduce que $\frac{dp_0}{dx}$ es constante, de modo que al integrar esta Ecuación respecto de r resulta

$$-\frac{r^2}{2\rho} \frac{dp_0}{dx} - r < v'_x v'_r > + \nu r \frac{dV_x}{dr} = 0 .$$

Si se evalúa esta expresión en la pared del tubo, $r = R$, se obtiene que

$$-\frac{R}{2} \frac{dp_0}{dx} = \mu \left(\frac{dV_x}{dr} \right)_{r=R} = \tau = \rho v_*^2 = \frac{1}{2} \rho c_f V_0^2 = \frac{\lambda}{8} \rho V_x^2 , \quad (27)$$

donde $V_0 = \int_0^R V_x 2\pi dr$ es la velocidad media del flujo medio y $\lambda = 4c_f$ es el coeficiente de Darcy. La velocidad de fricción puede expresarse como

$$v_* = V_0 \sqrt{\lambda/8} = V_0 \sqrt{c_f/2} .$$

Sustituyendo la expresión para el gradiente de presión expresado en términos de v_* sobre la pared en (26), resulta

$$\frac{rv_*^2}{R} - \langle v'_x v'_r \rangle + \nu \frac{dV_x}{dr} = 0 . \quad (28)$$

La evidencia experimental muestra que V_x es del orden de V_0 , mientras que $\langle v'_x v'_r \rangle$ es del orden de v_*^2 . Utilizando las variables adimensionales

$$f = \frac{V_x}{V_0}, \quad g = \frac{\langle v'_x v'_r \rangle}{v_*^2}, \quad y = 1 - \frac{r}{R} ,$$

la Ecuación (28) toma la forma

$$1 - y - g - \frac{\nu V_0}{Rv_*^2} \frac{df}{dy} = 0 . \quad (29)$$

Esta es una EDO de primer orden, que junto con la condición $f = 0$ en $y = 0$, constituye un PVI para f . Sin embargo, como en todos los modelos turbulentos, aparece una incógnita extra, la *función de esfuerzos de corte adimensionales turbulentos* g , la que será necesario modelar con hipótesis adicionales o mediante experimentos para cerrar el problema.

Las observaciones experimentales indican que el número de Reynolds de un flujo turbulento totalmente desarrollado es tal que $Re = V_0 R / \nu \gg 1$ y el producto de éste por el factor de fricción es tal que $\lambda Re = \lambda V_0 R / \nu \gg 1$. Incorporando esta observación al modelo, la Ecuación (29) se reduce a

$$1 - y - g = 0 ,$$

que cumple con la condición en el centro del tubo ($r = 0$ o $y = 1$) donde $g = 0$, pero que no cumple la condición en la pared ($r = R$ o $y = 0$) donde g resulta 1 en vez de anularse, como debería ser en virtud de que se anulan las fluctuaciones de velocidad. La Figura 4 ilustra la distribución de g dada por la expresión anterior comparada con la observada: la discrepancia se produce, como se comentó antes para valores pequeños de y , esto es, cerca de la pared.

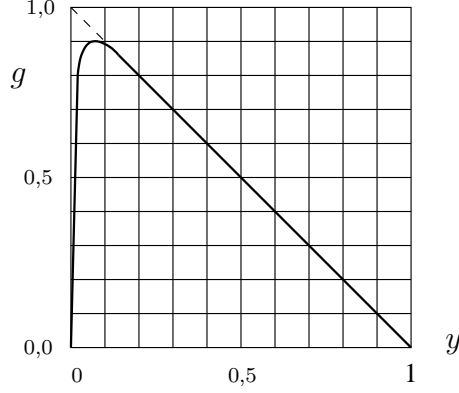


Figura 4: Distribución radial de esfuerzos turbulentos.

Está claro que será necesario considerar, al igual que se hizo en el caso del flujo sobre la placa plana, al menos tres regiones de flujo: en la zona central del tubo, esto es, en la región inercial ($y \sim 1$), los esfuerzos viscosos son despreciables, con lo que el campo de velocidad dependerá de la intensidad del flujo medio, dada por V_0 , la del flujo turbulento, v_* y la distancia desde la pared del tubo, $y = 1 - \frac{r}{R}$, pudiéndoselo representar como

$$V_x = V_0 + u_* F(y) \quad \text{o alternativamente como} \quad \frac{V_x - V_0}{u_*} = F(y) .$$

Con esta representación, el gradiente en esta región resulta

$$\frac{dV_x^{(i)}}{dy} = u_* \frac{dF}{dy} . \quad (30)$$

Por el contrario, en la región cercana a la pared ($y \rightarrow 0$) se define una región laminar, dominada por la viscosidad, en la que la Ecuación (29) se reduce a

$$1 - g - \frac{\nu V_0}{R v_*^2} \frac{dV_x^{(v)}}{dy} = 0 .$$

Adoptando la definición de $V^+ = \frac{V_x}{v_*}$ e introduciendo la variable $\eta := \frac{yR}{y^+}$, con $y^+ = \frac{y}{v_*}$, la anterior permite obtener una expresión para V^+ : en efecto

$$\frac{dV^+}{d\eta} = 1 - g , \quad V^+ = \eta - \int_0^\eta g(\eta') d\eta' .$$

Análogamente a lo discutido en el caso del flujo sobre la placa plana, existirá una región intermedia en la cual ambas soluciones deben empalmar (los valores del campo y de la derivada deben coincidir): en esta región, la zona logarítmica, debe verificarse que

$$\frac{dV_x^{(i)}}{dy} := v_* \frac{dF(y)}{dy} = v_* \frac{dV^+}{d\eta} \frac{d\eta}{dy} =: \frac{dV_x^{(v)}}{dy} .$$

Teniendo en cuenta que $d\eta/dy = Rv_*/\nu = 1/\delta$ (Cfr. la sección anterior), resulta

$$\frac{dF(y)}{dy} = \frac{1}{\delta} \frac{dV^+}{d\eta} .$$

el caso es análogo al del flujo sobre una placa plana: la relación sólo se satisface si ambos miembros son constantes: introduciendo nuevamente la constante de von Karman e integrando ambos miembros, resulta

$$F(y) = \mathcal{K} \ln y + C_y , \quad V^+(\eta) = \mathcal{K} \ln \eta + C_\eta \quad (31)$$

análogas de las ecuaciones (21) y (22) para el caso del flujo en un tubo. Con estas expresiones, reemplazando en las expresiones para el campo de velocidades e igualando, resulta

$$V_0 + v_*(\mathcal{K} \ln y + C_y) = u_*(\mathcal{K} \ln \eta + C_\eta) ,$$

la que, reduciendo a la variable y se reduce a

$$V_0 + v_* C_y = u_* \mathcal{K} \ln \left(\frac{Rv_*}{\nu} \right) + v_* C_\eta .$$

Dividiendo por v_* e introduciendo el coeficiente de fricción de Darcy ($\sqrt{\lambda/8} = v_*/V_0$) resulta

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \mathcal{K} \ln \left(\frac{RV_0}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + C_\eta - C_y . \quad (32)$$

Esta es la expresión para el coeficiente de fricción de Darcy en función del número de Reynolds. Experimentalmente se verifica que, para el caso de tubos lisos, $C_\eta - C_y \sim 2$.

Cuando se tiene en cuenta la rugosidad del tubo, esta puede caracterizarse mediante su *rugosidad* ϵ , o mediante la *rugosidad relativa* ϵ/D . Al incorporar este parámetro, la expresión de la velocidad para la subcapa laminar adoptará la forma

$$V_x = \Phi(v_*, \nu, y, \epsilon) .$$

Aplicando técnicas del análisis dimensional es fácil mostrar que

$$\frac{V_x}{v_*} = \Psi\left(\frac{v_* R y}{\nu}, \frac{v_* \epsilon}{\nu}\right) = \Psi\left(\eta, \frac{v_* \epsilon}{\nu}\right) = V^+ .$$

Este es el perfil que deberá empalmarse con el de la región inercial, resultando para la región logarítmica

$$V^+ = \mathcal{K} \ln \eta + C_\epsilon \left(\frac{v_* \epsilon}{\nu}\right) .$$

Obsérvese que la constante C_ϵ no es la misma para todos los flujos sino que depende de λ –a través de v_* – y del número de Reynolds $Re_\epsilon = \frac{v_* \epsilon}{\nu}$.

Si se reemplaza esta expresión y la expresión para $F(y)$ dada en la Ecuación (31)–en forma análoga a como se hizo antes– en la expresión para el campo de velocidad, se obtiene una expresión análoga a la Ecuación (32), pero para tubos rugosos:

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \mathcal{K} \ln \left(\frac{R V_0}{\nu} \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \right) + C_\epsilon \left(\frac{v_* \epsilon}{\nu} \right) - C_y . \quad (33)$$

Esta expresión no puede evaluarse porque se desconoce $C_\epsilon \left(\frac{v_* \epsilon}{\nu} \right)$. Sin embargo, obsérvese que cuando $\nu/v_* \gg \epsilon$, se tiene el límite del tubo liso y se verifica que $C_\epsilon \left(\frac{v_* \epsilon}{\nu} \right) \rightarrow C_\eta$; si por el contrario $\nu/v_* \ll \epsilon$, conviene escribir la relación en términos del factor $\frac{\nu}{v_* \epsilon}$: procediendo así se puede escribir una relación del tipo

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = \mathcal{K} \ln \left(\frac{R}{\epsilon} \right) + C_0 \left(\frac{\nu/v_*}{\epsilon} \right) - C_y . \quad (34)$$

Tomando el límite para $\frac{\nu}{v_* \epsilon} \rightarrow 0$, $C_0 \left(\frac{\nu/v_*}{\epsilon} \right) \rightarrow C_0(0) =: C_0$, donde $C_0 - C_y \approx 4,92$. En esta expresión, para el flujo totalmente turbulento, λ es independiente del Re , dependiendo sólo de la rugosidad relativa. Para el caso que $h \sim \nu/v_*$, se usa la expresión

$$\sqrt{\frac{8}{\lambda}} = 4,92 - 2,46 \ln \left(\frac{\epsilon}{R} + 3,28 \frac{\nu}{V_0 R} \sqrt{\frac{8}{\lambda}} \right) . \quad (35)$$

Toda esta información se compila en un gráfico, denominado *diagrama de Moody*, (Figura 5).

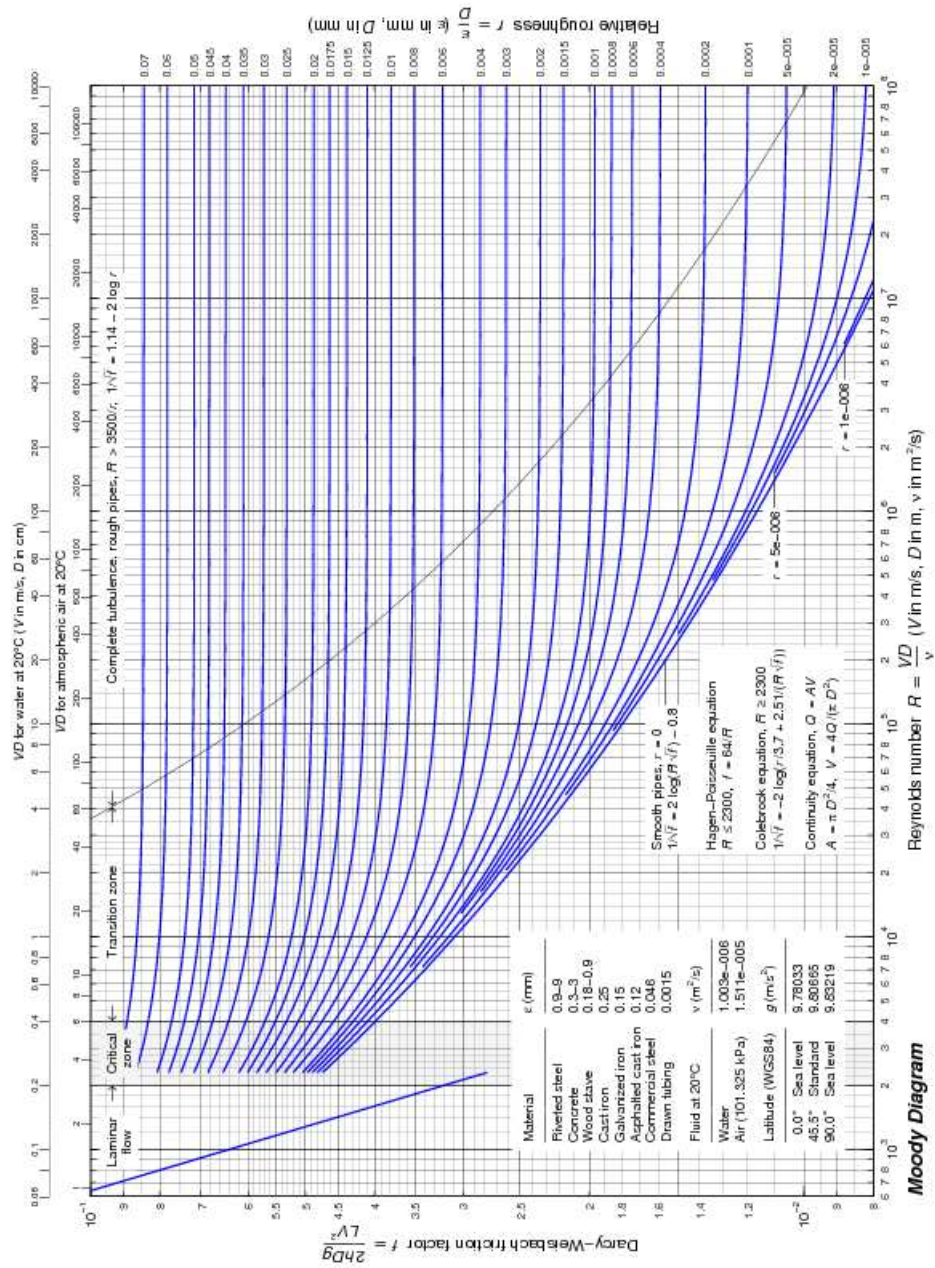


Figura 5: Diagrama de Moody, producido con el script moody.m de Matlab escrito por Tom Davis [Acceder al sitio <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/> y utilizar el buscador con la palabra "moody"].