

Le Théorème de Pythagore

Théorie, Démonstrations et 150 Exercices Progressifs

Introduction au Théorème de Pythagore

Qui était Pythagore ?

Pythagore (environ 580-495 av. J.-C.) était un philosophe et mathématicien grec. Il fonda une école célèbre à Crotone et ses découvertes mathématiques révolutionnèrent la géométrie.

Citation célèbre : "Tout est nombre"

Contributions importantes :

- Relations entre les nombres et la géométrie
- Théorie des proportions
- Musique et mathématiques
- Philosophie des nombres

À quoi sert le théorème de Pythagore ?

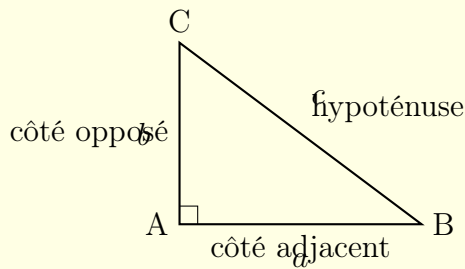
Le théorème de Pythagore permet de :

- Calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle
- Vérifier si un triangle est rectangle
- Résoudre des problèmes de distances
- Calculer des diagonales
- Résoudre des problèmes de la vie courante
- Faire des calculs en trigonométrie
- Résoudre des problèmes d'architecture

Théorème de Pythagore - Cours Complet

Partie 1 : Le Théorème et sa Démonstration

Énoncé du théorème de Pythagore

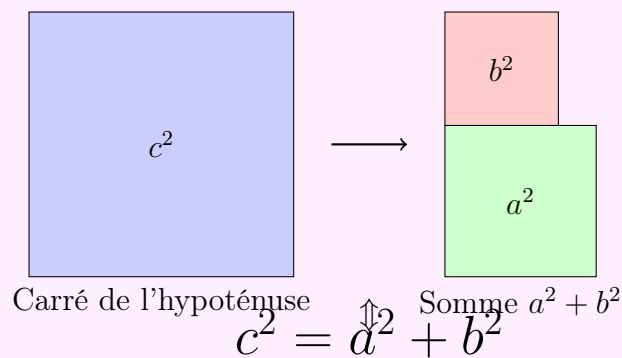


Théorème : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- c : hypoténuse (côté opposé à l'angle droit)
- a et b : côtés de l'angle droit
- **Attention :** Le théorème ne s'applique QUE dans les triangles rectangles !

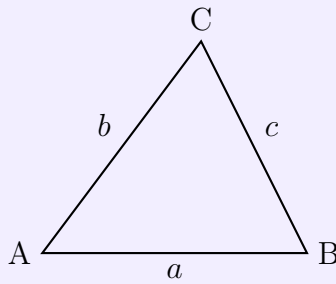
Démonstration visuelle par les aires



Explication : L'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les deux autres côtés.

Partie 2 : La Réciproque et sa Contraposée

Réciproque du théorème de Pythagore



Réciproque : Si dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple : Si $c^2 = a^2 + b^2$, alors le triangle est rectangle en C.

Méthode :

1. Identifier le plus grand côté
2. Calculer son carré
3. Calculer la somme des carrés des deux autres côtés
4. Comparer les résultats
5. Conclure

Contraposée du théorème de Pythagore

Contraposée : Si dans un triangle, le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Si $c^2 \neq a^2 + b^2$ alors le triangle n'est pas rectangle

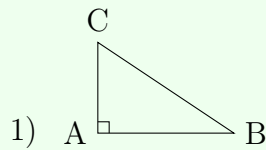
Utilité : Permet de démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

Théorème de Pythagore - Cours Complet

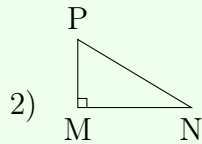
Niveau Débutant (Exercices 1-50)

Exercices 1-20 : Identifier l'hypoténuse

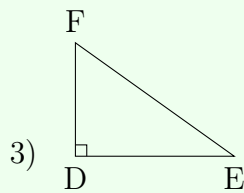
Pour chaque triangle rectangle, entourer l'hypoténuse :



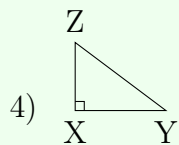
AB AC BC



MN MP NP



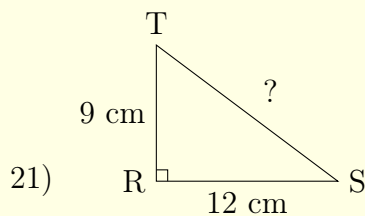
DE DF EF



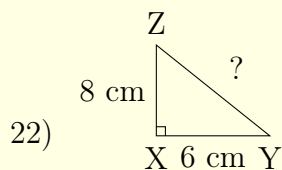
XY XZ YZ

Exercices 21-35 : Écrire la relation de Pythagore

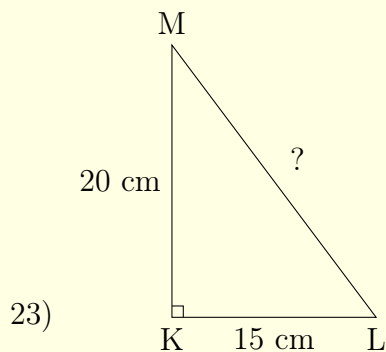
Pour chaque triangle rectangle, écrire la relation de Pythagore :



$$\dots^2 + \dots^2 = \dots^2$$



$$\dots^2 = \dots^2 + \dots^2$$



$$\dots^2 + \dots^2 = \dots^2$$

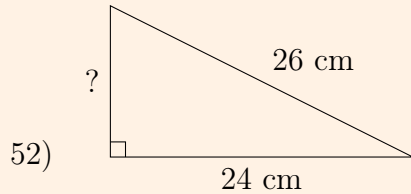
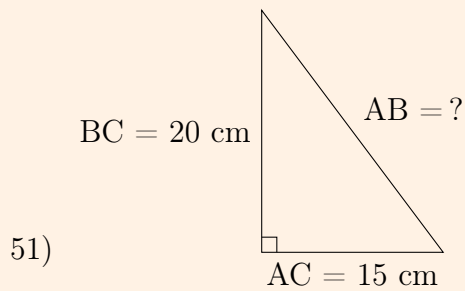
Théorème de Pythagore - Cours Complet

Exercices 36-50 : Calculs simples

- 36) Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 8 cm. Calculer l'hypoténuse.
- 37) L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 13 cm et un côté de l'angle droit mesure 5 cm. Calculer l'autre côté.
- 38) Un triangle rectangle a pour côtés 9 cm, 12 cm et 15 cm. Vérifier la relation de Pythagore.
- 39) Calculer la diagonale d'un rectangle de longueur 8 cm et largeur 6 cm.
- 40) Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle mesurent 7 cm et 24 cm. Calculer l'hypoténuse.
- 41) L'hypoténuse d'un triangle rectangle mesure 25 cm et un côté mesure 7 cm. Trouver l'autre côté.
- 42) Un triangle rectangle isocèle a ses côtés de l'angle droit qui mesurent 5 cm chacun. Calculer l'hypoténuse.
- 43) La diagonale d'un carré mesure 102 cm. Calculer son côté.
- 44) Dans un triangle rectangle, un côté mesure 8 cm et l'hypoténuse mesure 10 cm. Calculer l'autre côté.
- 45) Les trois côtés d'un triangle mesurent 6 cm, 8 cm et 10 cm. Ce triangle est-il rectangle ?

Niveau Intermédiaire (Exercices 51-100)

Exercices 51-70 : Applications directes



- 53) La diagonale d'un carré mesure 10 cm. Calculer son côté.
- 54) Un rectangle a pour dimensions 12 cm et 5 cm. Calculer sa diagonale.
- 55) Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Si le pied de l'échelle est à 3 m du mur, à quelle hauteur arrive-t-elle ?
- 56) Un câble de 25 m est tendu entre le sommet d'un poteau de 15 m et un point au sol. À quelle distance du pied du poteau se trouve ce point ?
- 57) Les côtés d'un triangle mesurent 7 cm, 24 cm et 25 cm. Ce triangle est-il rectangle ?
- 58) Calculer la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 8 cm.
- 59) Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse mesure 17 cm et un côté mesure 8 cm. Calculer l'autre côté.
- 60) Un losange a des diagonales de 12 cm et 16 cm. Calculer son côté.

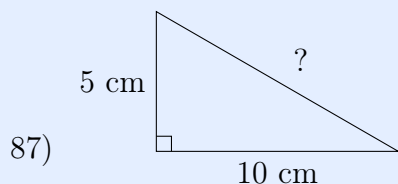
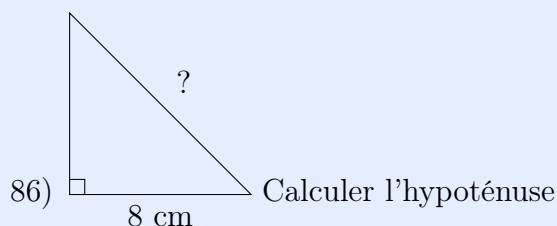
Théorème de Pythagore - Cours Complet

Exercices 71-85 : Réciproque de Pythagore

Dans chaque cas, dire si le triangle est rectangle :

- 71) Côtés : 5 cm, 12 cm, 13 cm
- 72) Côtés : 7 cm, 8 cm, 11 cm
- 73) Côtés : 9 cm, 40 cm, 41 cm
- 74) Côtés : 6 cm, 7 cm, 8 cm
- 75) Côtés : 15 cm, 20 cm, 25 cm
- 76) Côtés : 10 cm, 24 cm, 26 cm
- 77) Côtés : 8 cm, 15 cm, 17 cm
- 78) Côtés : 11 cm, 60 cm, 61 cm
- 79) Côtés : 12 cm, 35 cm, 37 cm
- 80) Côtés : 20 cm, 21 cm, 29 cm
- 81) Côtés : 9 cm, 12 cm, 15 cm
- 82) Côtés : 16 cm, 30 cm, 34 cm
- 83) Côtés : 7 cm, 10 cm, 12 cm
- 84) Côtés : 18 cm, 24 cm, 30 cm
- 85) Côtés : 13 cm, 84 cm, 85 cm

Exercices 86-100 : Problèmes avec figures complexes



- 88) Calculer la diagonale d'un cube d'arête 5 cm.
- 89) Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse la divise en segments de 4 cm et 9 cm. Calculer cette hauteur.
- 90) Un cône a une hauteur de 12 cm et un rayon de 5 cm. Calculer sa génératrice.
- 91) Un parallélépipède rectangle a pour dimensions 3 cm, 4 cm et 12 cm. Calculer sa diagonale.
- 92) Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse mesure 6,5 cm. Calculer l'hypoténuse.
- 93) Un trapèze rectangle a des bases de 8 cm et 12 cm, et une hauteur de 5 cm. Calculer la diagonale.
- 94) Un hexagone régulier de côté 6 cm est inscrit dans un cercle. Calculer le rayon du cercle.
- 95) Un triangle a pour côtés $2x+1$, $2x+3$ et $2x+5$. Pour quelle valeur de x ce triangle est-il rectangle ?

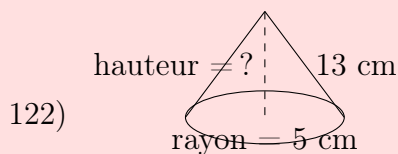
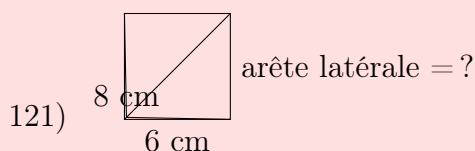
Niveau Avancé (Exercices 101-150)

Exercices 101-120 : Problèmes de la vie courante

- 101) Une échelle de 5 m est appuyée contre un mur. Le pied de l'échelle est à 2 m du mur. À quelle hauteur arrive l'échelle ?
- 102) Un câble de 50 m est tendu entre le sommet d'un poteau de 30 m et un point au sol. À quelle distance du pied du poteau se trouve ce point ?
- 103) Un avion vole à 3000 m d'altitude. Un observateur au sol le voit sous un angle de 30° . Quelle est la distance entre l'avion et l'observateur ?
- 104) Calculer la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 10 cm.
- 105) Un rectangle a pour dimensions 12 cm et 5 cm. Calculer la longueur de ses diagonales.
- 106) Un bateau quitte le port et navigue 15 km vers l'est, puis 8 km vers le nord. À quelle distance se trouve-t-il du port ?
- 107) Une tour de 50 m de haut est observée d'un point situé à 120 m de son pied. Sous quel angle est-elle observée ?
- 108) Une échelle de 10 m glisse le long d'un mur. Quand son pied est à 6 m du mur, de combien descend-elle ?
- 109) Un cône a une génératrice de 13 cm et un rayon de 5 cm. Calculer sa hauteur.
- 110) Un parallélogramme a des côtés de 8 cm et 6 cm, et une diagonale de 10 cm. Est-il rectangle ?
- 111) Une pyramide à base carrée a une hauteur de 8 cm et une arête de base de 6 cm. Calculer l'arête latérale.
- 112) Un cerf-volant a des diagonales de 80 cm et 60 cm. Calculer la longueur de ses côtés.
- 113) Une poutre de 6 m doit être transportée dans un couloir de 2 m de large. Quelle est la hauteur maximale du couloir ?
- 114) Un câble est tendu entre deux poteaux de 8 m distants de 15 m. Le câble s'affaisse de 1 m au milieu. Calculer sa longueur.
- 115) Un triangle a pour côtés 13 cm, 14 cm et 15 cm. Est-il rectangle ? Calculer sa hauteur relative au plus grand côté.
- 116) Une échelle de 7 m repose contre un mur. Si on l'écarte de 1 m à la base, de combien descend-elle ?
- 117) Un cône tronqué a des rayons de 4 cm et 6 cm, et une hauteur de 3 cm. Calculer la génératrice.
- 118) Un bateau se trouve à 500 m d'une falaise de 200 m de haut. Sous quel angle voit-il le sommet ?
- 119) Une sphère a un rayon de 5 cm. Calculer la distance d'un point de la surface au point le plus éloigné.
- 120) Un télésiège monte sur une pente de 30° . La distance entre deux pylônes est de 100 m. Quelle est la dénivelée ?

Théorème de Pythagore - Cours Complet

Exercices 121-140 : Configurations complexes



- 123) Dans un tétraèdre régulier d'arête 10 cm, calculer la hauteur.
- 124) Un cône a une hauteur de 12 cm et un rayon de 9 cm. Calculer sa génératrice.
- 125) Une pyramide a une base carrée de 8 cm de côté et des arêtes latérales de 10 cm. Calculer sa hauteur.
- 126) Un parallélépipède a pour dimensions 6 cm, 8 cm et 10 cm. Calculer la longueur de ses diagonales.
- 127) Un triangle ABC est rectangle en A. La hauteur AH mesure 12 cm et BH = 9 cm. Calculer HC et les côtés du triangle.
- 128) Dans un cercle de rayon 13 cm, une corde est à 5 cm du centre. Calculer sa longueur.
- 129) Un cône a une génératrice de 15 cm et une hauteur de 12 cm. Calculer le rayon de sa base.
- 130) Un losange a un côté de 10 cm et une diagonale de 12 cm. Calculer l'autre diagonale.
- 131) Un trapèze isocèle a des bases de 8 cm et 12 cm, et des côtés non parallèles de 5 cm. Calculer sa hauteur.
- 132) Un triangle a pour côtés 5 cm, 5 cm et 6 cm. Calculer sa hauteur relative à la base.
- 133) Un cône tronqué a des génératrices de 13 cm, et des rayons de 5 cm et 8 cm. Calculer sa hauteur.
- 134) Un parallélogramme a des diagonales de 10 cm et 14 cm qui se coupent en leur milieu. Un côté mesure 6 cm. L'autre côté mesure-t-il 8 cm ?
- 135) Un tétraèdre a trois arêtes perpendiculaires deux à deux de longueurs 3 cm, 4 cm et 5 cm. Calculer l'arête opposée.
- 136) Un triangle a pour côtés 7 cm, 8 cm et 9 cm. Calculer la longueur de la médiane relative au plus grand côté.
- 137) Un cône a une surface latérale de 65 cm^2 et un rayon de 5 cm. Calculer sa hauteur.
- 138) Un parallélépipède a une diagonale de 15 cm et deux dimensions de 6 cm et 8 cm. Calculer la troisième dimension.
- 139) Un triangle rectangle a un périmètre de 30 cm et une hypoténuse de 13 cm. Calculer ses côtés.
- 140) Un cône a un volume de 100 cm^3 et une hauteur de 12 cm. Calculer sa génératrice.

Théorème de Pythagore - Cours Complet

Exercices 141-150 : Défis mathématiques

- 141) Démontrer que dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse mesure la moitié de l'hypoténuse.
- 142) Trouver tous les triplets pythagoriciens (a, b, c entiers naturels) avec $c < 20$.
- 143) Un triangle a pour côtés $2n+1$, $2n^2+2n$, $2n^2+2n+1$. Démontrer que c'est un triangle rectangle.
- 144) Calculer l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de son côté.
- 145) Problème du chamallow : Si un chamallow carré de 4 cm de côté est placé au centre d'un biscuit carré de 6 cm de côté, quelle est la distance maximale entre les coins ?
- 146) Démontrer que dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur relative à l'hypoténuse est égal au produit des segments déterminés sur l'hypoténuse.
- 147) Trouver tous les triangles rectangles dont les côtés sont des entiers consécutifs.
- 148) Démontrer que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des quatre côtés.
- 149) Un triangle a pour côtés m^2-n^2 , $2mn$ et m^2+n^2 . Démontrer que c'est un triangle rectangle.
- 150) Calculer le rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle de côtés 6 cm, 8 cm et 10 cm.

Méthodes et Astuces

Méthode pour appliquer Pythagore

1. **Identifier** le triangle rectangle
2. **Repérer** l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit)
3. **Écrire** la relation : $hypotnuse^2 = ct_1^2 + ct_2^2$
4. **Remplacer** par les valeurs connues
5. **Résoudre** l'équation
6. **Conclure** avec une phrase
7. **Vérifier** la cohérence du résultat

Exemple : Triangle rectangle avec côtés 3 cm et 4 cm

$$c^2 = 3^2 + 4^2$$

$$c^2 = 9 + 16$$

$$c^2 = 25$$

$$c = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Théorème de Pythagore - Cours Complet

Méthode pour la réciproque

1. **Identifier** le plus grand côté
2. **Calculer** le carré du plus grand côté
3. **Calculer** la somme des carrés des deux autres côtés
4. **Comparer** les deux résultats
5. **Conclure** :
 - Si égaux \rightarrow triangle rectangle
 - Si différents \rightarrow triangle non rectangle

Exemple : Côtés 6 cm, 8 cm, 10 cm

$$\begin{aligned}10^2 &= 100 \\6^2 + 8^2 &= 36 + 64 = 100 \\&\Rightarrow \text{Triangle rectangle}\end{aligned}$$

Triplets pythagoriciens courants

| a | b | c | Multiple |
|----|----|----|--------------|
| 3 | 4 | 5 | 6, 8, 10 |
| 5 | 12 | 13 | 10, 24, 26 |
| 8 | 15 | 17 | 16, 30, 34 |
| 7 | 24 | 25 | 14, 48, 50 |
| 9 | 40 | 41 | 18, 80, 82 |
| 11 | 60 | 61 | 22, 120, 122 |
| 12 | 35 | 37 | 24, 70, 74 |
| 13 | 84 | 85 | 26, 168, 170 |

Astuce : Multiplier un triplet par un même nombre donne un nouveau triplet.

Formule générale : $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$ avec $m > n$

Tableau de Progression

Évaluation des compétences

| Niveau | Compétences | Exercices | Objectif | Temps estimé |
|---------------|-------------------------|-----------|-----------------|--------------|
| Débutant | Bases théoriques | 1-50 | 90% de réussite | 4-5 heures |
| Intermédiaire | Applications simples | 51-100 | 85% de réussite | 6-8 heures |
| Avancé | Problèmes complexes | 101-140 | 80% de réussite | 8-10 heures |
| Expert | Défis et démonstrations | 141-150 | 75% de réussite | 4-5 heures |

Théorème de Pythagore - Cours Complet

Conseils pour réussir

- **Apprendre** les triplets pythagoriciens par cœur
- **Toujours identifier** l'hypoténuse en premier
- **Vérifier** les unités de mesure
- **S'entraîner** avec des problèmes concrets
- **Ne pas oublier** la racine carrée à la fin
- **Rédiger** soigneusement les démonstrations
- **Vérifier** la cohérence des résultats
- **S'entraîner** régulièrement

Formulaire rapide

- | | |
|--|--|
| — Théorème de Pythagore : $c^2 = a^2 + b^2$ | — Hauteur triangle équilatéral : $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ |
| — Réciproque : Si $c^2 = a^2 + b^2$ alors triangle rectangle | — Côté d'un carré : $c = \frac{d}{\sqrt{2}}$ |
| — Diagonale d'un rectangle : $d = \sqrt{L^2 + l^2}$ | — Génératrice d'un cône : $g = \sqrt{h^2 + r^2}$ |
| — Diagonale d'un cube : $d = a\sqrt{3}$ | — Médiane hypoténuse : $m = \frac{c}{2}$ |

Bon courage pour maîtriser le théorème de Pythagore !

"Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est toujours égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit."

N'oubliez pas : la pratique régulière est la clé du succès !