

# Les Produits Remarquables

## Théorie, Démonstrations Géométriques et 120 Exercices Progressifs

### Introduction aux Produits Remarquables

Que sont les produits remarquables ?

Les **produits remarquables** sont des formules qui permettent de développer rapidement certaines expressions algébriques sans faire tous les calculs intermédiaires.

**Utilité :**

- Développer rapidement des expressions
- Factoriser des expressions complexes
- Résoudre des équations
- Simplifier des calculs algébriques
- Démontrer des identités mathématiques

**Les trois produits remarquables fondamentaux :**

1. Carré d'une somme :  $(a + b)^2$
2. Carré d'une différence :  $(a - b)^2$
3. Produit d'une somme par une différence :  $(a + b)(a - b)$

### Partie 1 : Le Carré d'une Somme

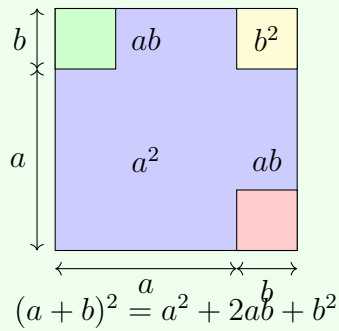
Formule du carré d'une somme

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Démonstration algébrique :**

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\ &= a^2 + ab + ab + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

## Démonstration géométrique



**Explication :** L'aire du grand carré  $(a + b)^2$  est égale à la somme des aires des quatre parties.

## Partie 2 : Le Carré d'une Différence

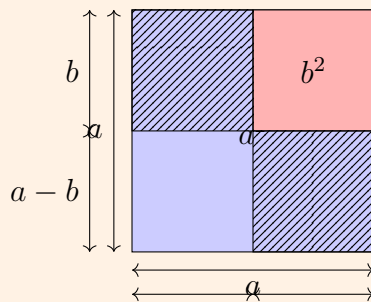
### Formule du carré d'une différence

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

**Démonstration algébrique :**

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= a \times a - a \times b - b \times a + b \times b \\ &= a^2 - ab - ab + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

### Démonstration géométrique



$$(a - b)^2 = a^2 - 2b(a - b) - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

## Partie 3 : Produit d'une Somme par une Différence

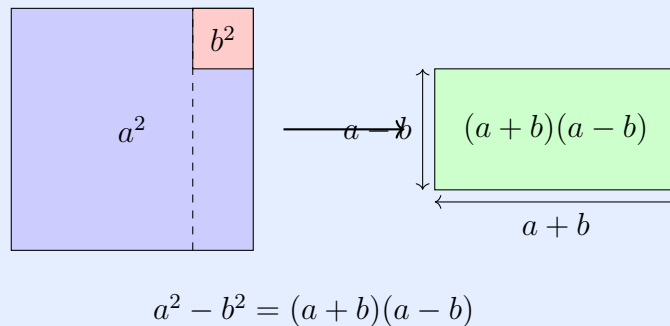
Formule du produit somme×différence

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Démonstration algébrique :

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \times a - a \times b + b \times a - b \times b \\ &= a^2 - ab + ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Démonstration géométrique



## Niveau Débutant (Exercices 1-40)

Exercices 1-15 : Appliquer les formules

Développer en utilisant les produits remarquables :

- 1)  $(x + 3)^2$
- 2)  $(2x - 1)^2$
- 3)  $(x + 4)(x - 4)$
- 4)  $(3x + 2)^2$
- 5)  $(5 - x)^2$
- 6)  $(2x + 3)(2x - 3)$
- 7)  $(x + 7)^2$
- 8)  $(4x - 5)^2$
- 9)  $(x + 1)(x - 1)$
- 10)  $(2 + 3x)^2$
- 11)  $(x - 6)^2$
- 12)  $(3x + 4)(3x - 4)$
- 13)  $(x + 10)^2$
- 14)  $(5x - 2)^2$
- 15)  $(x + a)(x - a)$

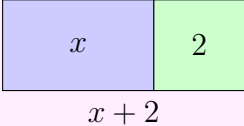
# Produits Remarquables - Cours Complet

## Exercices 16-30 : Calcul mental

Calculer mentalement :

- 16)  $101^2$
- 17)  $99^2$
- 18)  $102 \times 98$
- 19)  $45^2$
- 20)  $201^2$
- 21)  $199^2$
- 22)  $55^2$
- 23)  $1001^2$
- 24)  $999^2$
- 25)  $1002 \times 998$
- 26)  $51^2 - 49^2$
- 27)  $75^2$
- 28)  $125^2$
- 29)  $1005^2$
- 30)  $995^2$

## Exercices 31-40 : Vérifications géométriques

- 31)  Exprimer l'aire totale.

- 32)  Exprimer l'aire de la partie bleue.

- 33) Un carré de côté  $(x + 3)$  cm. Exprimer son aire.
- 34) Un rectangle de dimensions  $(x + 2)$  et  $(x - 2)$ . Exprimer son aire.
- 35) Un carré de côté  $x$  cm est agrandi de 5 cm. Exprimer la nouvelle aire.

## Niveau Intermédiaire (Exercices 41-80)

### Exercices 41-55 : Avec coefficients

Développer :

41)  $(2x + 3y)^2$

42)  $(3a - 4b)^2$

43)  $(5x + 2y)(5x - 2y)$

44)  $(2a + 5b)^2$

45)  $(4x - 3y)^2$

46)  $(3m + 2n)(3m - 2n)$

47)  $(6p + q)^2$

48)  $(2x - 7y)^2$

49)  $(5a + 3b)(5a - 3b)$

50)  $(x + 2y)^2$

51)  $(3x - 4)^2$

52)  $(2a + 5)^2$

53)  $(4 - 3x)^2$

54)  $(x + \frac{1}{2})^2$

55)  $(2x - \frac{1}{3})^2$

### Exercices 56-70 : Double développement

Développer :

56)  $(x + 2)(x + 3)$

57)  $(x - 4)(x + 5)$

58)  $(2x + 1)(3x - 2)$

59)  $(x - 3)(x - 7)$

60)  $(3x + 4)(2x + 5)$

61)  $(x + a)(x + b)$

62)  $(2x - 3)(4x + 1)$

63)  $(x + 2)(2x - 5)$

64)  $(3 - x)(4 + x)$

65)  $(2x + y)(3x - 2y)$

66)  $(a + b)(c + d)$

67)  $(x + 3)(2x - 7)$

68)  $(4x - 1)(3x + 2)$

69)  $(x - 5)(x - 8)$

70)  $(2a + 3b)(4a - b)$

## Exercices 71-80 : Factorisation

Factoriser en utilisant les produits remarquables :

71)  $x^2 + 6x + 9$

72)  $4x^2 - 12x + 9$

73)  $x^2 - 25$

74)  $9x^2 - 16$

75)  $x^2 - 8x + 16$

76)  $4x^2 + 20x + 25$

77)  $x^2 - 100$

78)  $16x^2 - 24x + 9$

79)  $x^2 + 10x + 25$

80)  $25x^2 - 49$

## Niveau Avancé (Exercices 81-120)

### Exercices 81-95 : Expressions complexes

Développer et simplifier :

81)  $(x + 1)^2 + (x - 1)^2$

82)  $(x + 2)^2 - (x - 2)^2$

83)  $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2$

84)  $(x + y)^2 - (x - y)^2$

85)  $(a + b + c)^2$

86)  $(x + 1)(x - 1) + (x + 2)(x - 2)$

87)  $(2x - 1)^2 + (3x + 2)^2$

88)  $(x + 3)^3$  (utiliser  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ )

89)  $(x - 2)^3$

90)  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

91)  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

92)  $(x + 1)^4$

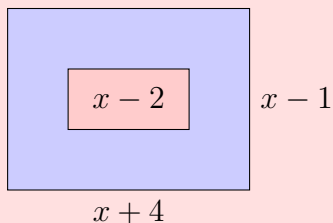
93)  $(2x - 1)^3$

94)  $(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2$

95)  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$

# Produits Remarquables - Cours Complet

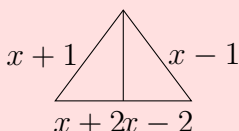
## Exercices 96-110 : Problèmes géométriques



96) Exprimer l'aire de la couronne bleue.

97) Un cube d'arête  $(x + 3)$  cm. Exprimer son volume.

98) Un cercle de rayon  $(x + 2)$  cm est inscrit dans un carré de côté  $(2x + 1)$  cm. Exprimer l'aire de la surface entre le cercle et le carré.

99)  Calculer l'aire du triangle.

100) Un terrain rectangulaire de dimensions  $(x + 10)$  m et  $(x - 10)$  m. On augmente chaque dimension de 5 m. Exprimer la nouvelle aire.

## Exercices 111-120 : Défis mathématiques

111) Démontrer que  $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

112) Montrer que  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  pour tous réels  $a, b$

113) Trouver tous les entiers  $n$  tels que  $n^2 - 1$  soit premier

114) Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4

115) Simplifier :  $\frac{(x + 1)^2 - (x - 1)^2}{x}$

116) Résoudre :  $(x + 3)^2 = (x - 1)^2$

117) Montrer que si  $a + b = 1$  alors  $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

118) Développer :  $(a + b + c)(a + b - c)$

119) Trouver trois entiers consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit 110

120) Démontrer l'identité :  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

## Méthodes et Astuces

### Méthode pour développer

1. **Identifier** le type de produit remarquable
2. **Appliquer** la formule correspondante
3. **Vérifier** les signes
4. **Simplifier** l'expression

**Exemple :** Développer  $(3x - 4)^2$

$$\begin{aligned}(3x - 4)^2 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

# Produits Remarquables - Cours Complet

## Méthode pour factoriser

1. **Reconnaître** un produit remarquable
2. **Identifier**  $a$  et  $b$
3. **Appliquer** la formule inverse
4. **Vérifier** en développant

**Exemple :** Factoriser  $x^2 - 10x + 25$

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 25 &= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= (x - 5)^2\end{aligned}$$

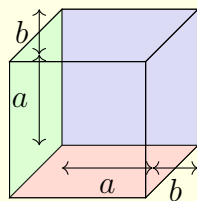
## Tableau récapitulatif des formules

Nom	Formule	Exemple
Carré d'une somme	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
Carré d'une différence	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$
Produit somme $\times$ différence	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$
Cube d'une somme	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
Cube d'une différence	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

## Représentations Géométriques Avancées

### Interprétation géométrique du cube

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



### Composition du cube :

- 1 cube d'arête  $a$  (volume  $a^3$ )
- 3 pavés  $a \times a \times b$  (volume  $3a^2b$ )
- 3 pavés  $a \times b \times b$  (volume  $3ab^2$ )
- 1 cube d'arête  $b$  (volume  $b^3$ )



## Tableau de Progression

### Évaluation des compétences

Niveau	Compétences	Exercices	Objectif	Temps estimé
Débutant	Appliquer les formules	1-40	95% de réussite	4-5 heures
Intermédiaire	Développer et factoriser	41-80	90% de réussite	5-7 heures
Avancé	Problèmes complexes	81-110	85% de réussite	6-8 heures
Expert	Défis mathématiques	111-120	80% de réussite	3-4 heures

### Conseils pour réussir

- **Apprendre** les formules par cœur
- **S'entraîner** au calcul mental
- **Vérifier** ses résultats en développant
- **Utiliser** les représentations géométriques
- **Commencer** par des exercices simples
- **S'entraîner** régulièrement
- **Comprendre** les démonstrations

### Erreurs fréquentes à éviter

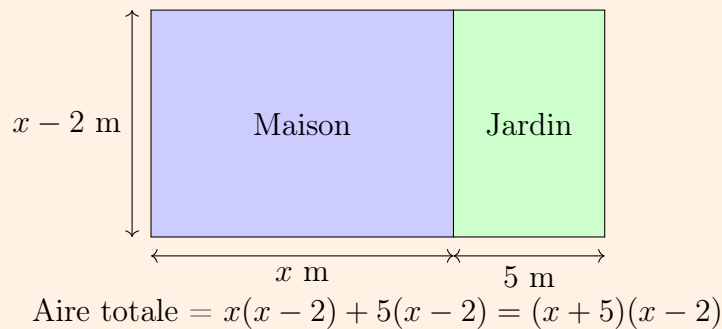
- Confondre  $(a + b)^2$  et  $a^2 + b^2$
- Oublier le double produit  $2ab$
- Se tromper dans les signes
- Confondre développement et factorisation
- Négliger la vérification
- Oublier les cas avec coefficients

## Applications dans la Vie Courante

### Exemples concrets

1. **Architecture** : Calcul des surfaces et volumes
2. **Économie** : Calcul d'optimisation de coûts
3. **Physique** : Lois du mouvement et énergie
4. **Informatique** : Algorithmes et calculs
5. **Art** : Proportions et design

**Exemple pratique** : Calcul de l'aire d'un terrain



Félicitations pour votre travail sur les produits remarquables !

"La maîtrise des produits remarquables est la base de l'algèbre moderne."

Continuez à vous entraîner pour une maîtrise parfaite !

## Annexes : Fiches Mémo

### Fiche 1 : Les 3 formules fondamentales

Carré d'une somme :	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Carré d'une différence :	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Produit somme $\times$ différence :	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

**Astuce mnémotechnique** : "Le premier au carré, plus le double produit, plus le deuxième au carré"

### Fiche 2 : Formules étendues

Cube d'une somme :	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Cube d'une différence :	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Somme de cubes :	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
Différence de cubes :	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$