

Les Produits Remarquables

Théorie, Démonstrations Géométriques et 120 Exercices Progressifs

Introduction aux Produits Remarquables

Que sont les produits remarquables ?

Les **produits remarquables** sont des formules qui permettent de développer rapidement certaines expressions algébriques sans faire tous les calculs intermédiaires.

Utilité :

- Développer rapidement des expressions
- Factoriser des expressions complexes
- Résoudre des équations
- Simplifier des calculs algébriques
- Démontrer des identités mathématiques

Les trois produits remarquables fondamentaux :

1. Carré d'une somme : $(a + b)^2$
2. Carré d'une différence : $(a - b)^2$
3. Produit d'une somme par une différence : $(a + b)(a - b)$

Partie 1 : Le Carré d'une Somme

Formule du carré d'une somme

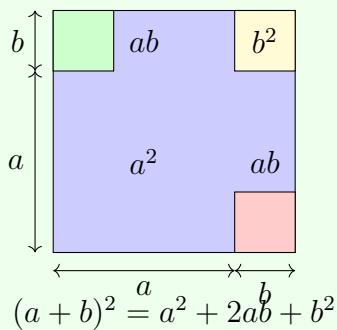
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Démonstration algébrique :

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\&= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\&= a^2 + ab + ab + b^2 \\&= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Produits Remarquables - Cours Complet

Démonstration géométrique



Explication : L'aire du grand carré $(a+b)^2$ est égale à la somme des aires des quatre parties.

Partie 2 : Le Carré d'une Différence

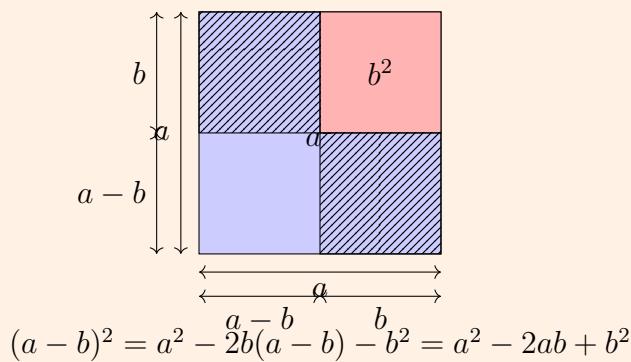
Formule du carré d'une différence

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Démonstration algébrique :

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) \\&= a \times a - a \times b - b \times a + b \times b \\&= a^2 - ab - ab + b^2 \\&= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Démonstration géométrique



Produits Remarquables - Cours Complet

Partie 3 : Produit d'une Somme par une Différence

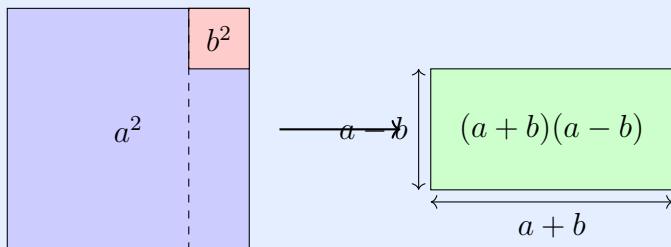
Formule du produit somme×différence

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Démonstration algébrique :

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a \times a - a \times b + b \times a - b \times b \\&= a^2 - ab + ab - b^2 \\&= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Démonstration géométrique



$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Niveau Débutant (Exercices 1-40)

Exercices 1-15 : Appliquer les formules

Développer en utilisant les produits remarquables :

- 1) $(x + 3)^2$
- 2) $(2x - 1)^2$
- 3) $(x + 4)(x - 4)$
- 4) $(3x + 2)^2$
- 5) $(5 - x)^2$
- 6) $(2x + 3)(2x - 3)$
- 7) $(x + 7)^2$
- 8) $(4x - 5)^2$
- 9) $(x + 1)(x - 1)$
- 10) $(2 + 3x)^2$
- 11) $(x - 6)^2$
- 12) $(3x + 4)(3x - 4)$
- 13) $(x + 10)^2$
- 14) $(5x - 2)^2$
- 15) $(x + a)(x - a)$

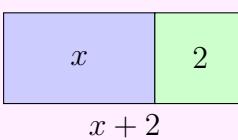
Produits Remarquables - Cours Complet

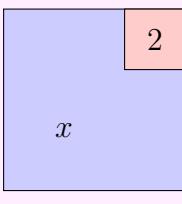
Exercices 16-30 : Calcul mental

Calculer mentalement :

- 16) 101^2
- 17) 99^2
- 18) 102×98
- 19) 45^2
- 20) 201^2
- 21) 199^2
- 22) 55^2
- 23) 1001^2
- 24) 999^2
- 25) 1002×998
- 26) $51^2 - 49^2$
- 27) 75^2
- 28) 125^2
- 29) 1005^2
- 30) 995^2

Exercices 31-40 : Vérifications géométriques

- 31)  Exprimer l'aire totale.

- 32)  Exprimer l'aire de la partie bleue.

- 33) Un carré de côté $(x + 3)$ cm. Exprimer son aire.
34) Un rectangle de dimensions $(x + 2)$ et $(x - 2)$. Exprimer son aire.
35) Un carré de côté x cm est agrandi de 5 cm. Exprimer la nouvelle aire.

Produits Remarquables - Cours Complet

Niveau Intermédiaire (Exercices 41-80)

Exercices 41-55 : Avec coefficients

Développer :

- 41) $(2x + 3y)^2$
- 42) $(3a - 4b)^2$
- 43) $(5x + 2y)(5x - 2y)$
- 44) $(2a + 5b)^2$
- 45) $(4x - 3y)^2$
- 46) $(3m + 2n)(3m - 2n)$
- 47) $(6p + q)^2$
- 48) $(2x - 7y)^2$
- 49) $(5a + 3b)(5a - 3b)$
- 50) $(x + 2y)^2$
- 51) $(3x - 4)^2$
- 52) $(2a + 5)^2$
- 53) $(4 - 3x)^2$
- 54) $(x + \frac{1}{2})^2$
- 55) $(2x - \frac{1}{3})^2$

Exercices 56-70 : Double développement

Développer :

- 56) $(x + 2)(x + 3)$
- 57) $(x - 4)(x + 5)$
- 58) $(2x + 1)(3x - 2)$
- 59) $(x - 3)(x - 7)$
- 60) $(3x + 4)(2x + 5)$
- 61) $(x + a)(x + b)$
- 62) $(2x - 3)(4x + 1)$
- 63) $(x + 2)(2x - 5)$
- 64) $(3 - x)(4 + x)$
- 65) $(2x + y)(3x - 2y)$
- 66) $(a + b)(c + d)$
- 67) $(x + 3)(2x - 7)$
- 68) $(4x - 1)(3x + 2)$
- 69) $(x - 5)(x - 8)$
- 70) $(2a + 3b)(4a - b)$

Produits Remarquables - Cours Complet

Exercices 71-80 : Factorisation

Factoriser en utilisant les produits remarquables :

- 71) $x^2 + 6x + 9$
- 72) $4x^2 - 12x + 9$
- 73) $x^2 - 25$
- 74) $9x^2 - 16$
- 75) $x^2 - 8x + 16$
- 76) $4x^2 + 20x + 25$
- 77) $x^2 - 100$
- 78) $16x^2 - 24x + 9$
- 79) $x^2 + 10x + 25$
- 80) $25x^2 - 49$

Niveau Avancé (Exercices 81-120)

Exercices 81-95 : Expressions complexes

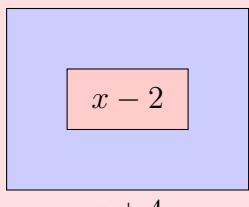
Développer et simplifier :

- 81) $(x + 1)^2 + (x - 1)^2$
- 82) $(x + 2)^2 - (x - 2)^2$
- 83) $(2x + 3)^2 - (2x - 3)^2$
- 84) $(x + y)^2 - (x - y)^2$
- 85) $(a + b + c)^2$
- 86) $(x + 1)(x - 1) + (x + 2)(x - 2)$
- 87) $(2x - 1)^2 + (3x + 2)^2$
- 88) $(x + 3)^3$ (utiliser $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$)
- 89) $(x - 2)^3$
- 90) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- 91) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- 92) $(x + 1)^4$
- 93) $(2x - 1)^3$
- 94) $(x + y + z)^2 - (x - y - z)^2$
- 95) $(x + \frac{1}{x})^2$

Produits Remarquables - Cours Complet

Exercices 96-110 : Problèmes géométriques

96)

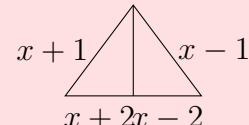


Exprimer l'aire de la couronne bleue.

97)

Un cube d'arête $(x + 3)$ cm. Exprimer son volume.98) Un cercle de rayon $(x + 2)$ cm est inscrit dans un carré de côté $(2x + 1)$ cm. Exprimer l'aire de la surface entre le cercle et le carré.

99)



Calculer l'aire du triangle.

100) Un terrain rectangulaire de dimensions $(x + 10)$ m et $(x - 10)$ m. On augmente chaque dimension de 5 m. Exprimer la nouvelle aire.

Exercices 111-120 : Défis mathématiques

111) Démontrer que $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$ 112) Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$ pour tous réels a, b 113) Trouver tous les entiers n tels que $n^2 - 1$ soit premier

114) Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est divisible par 4

115) Simplifier : $\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x}$ 116) Résoudre : $(x+3)^2 = (x-1)^2$ 117) Montrer que si $a + b = 1$ alors $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ 118) Développer : $(a + b + c)(a + b - c)$

119) Trouver trois entiers consécutifs tels que la somme de leurs carrés soit 110

120) Démontrer l'identité : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$

Méthodes et Astuces

Méthode pour développer

1. Identifier le type de produit remarquable
2. Appliquer la formule correspondante
3. Vérifier les signes
4. Simplifier l'expression

Exemple : Développer $(3x - 4)^2$

$$\begin{aligned}(3x - 4)^2 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 4 + 4^2 \\ &= 9x^2 - 24x + 16\end{aligned}$$

Produits Remarquables - Cours Complet

Méthode pour factoriser

1. **Reconnaître** un produit remarquable
2. **Identifier** a et b
3. **Appliquer** la formule inverse
4. **Vérifier** en développant

Exemple : Factoriser $x^2 - 10x + 25$

$$\begin{aligned}x^2 - 10x + 25 &= x^2 - 2 \times x \times 5 + 5^2 \\&= (x - 5)^2\end{aligned}$$

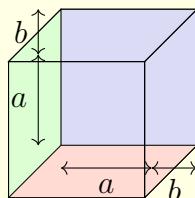
Tableau récapitulatif des formules

Nom	Formule	Exemple
Carré d'une somme	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
Carré d'une différence	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$
Produit somme × différence	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$
Cube d'une somme	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
Cube d'une différence	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	$(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Représentations Géométriques Avancées

Interprétation géométrique du cube

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$



Composition du cube :

- 1 cube d'arête a (volume a^3)
- 3 pavés $a \times a \times b$ (volume $3a^2b$)
- 3 pavés $a \times b \times b$ (volume $3ab^2$)
- 1 cube d'arête b (volume b^3)

Produits Remarquables - Cours Complet

Tableau de Progression

Évaluation des compétences

Niveau	Compétences	Exercices	Objectif	Temps estimé
Débutant	Appliquer les formules	1-40	95% de réussite	4-5 heures
Intermédiaire	Développer et factoriser	41-80	90% de réussite	5-7 heures
Avancé	Problèmes complexes	81-110	85% de réussite	6-8 heures
Expert	Défis mathématiques	111-120	80% de réussite	3-4 heures

Conseils pour réussir

- **Apprendre** les formules par cœur
- **S'entraîner** au calcul mental
- **Vérifier** ses résultats en développant
- **Utiliser** les représentations géométriques
- **Commencer** par des exercices simples
- **S'entraîner** régulièrement
- **Comprendre** les démonstrations

Erreurs fréquentes à éviter

- Confondre $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$
- Oublier le double produit $2ab$
- Se tromper dans les signes
- Confondre développement et factorisation
- Négliger la vérification
- Oublier les cas avec coefficients

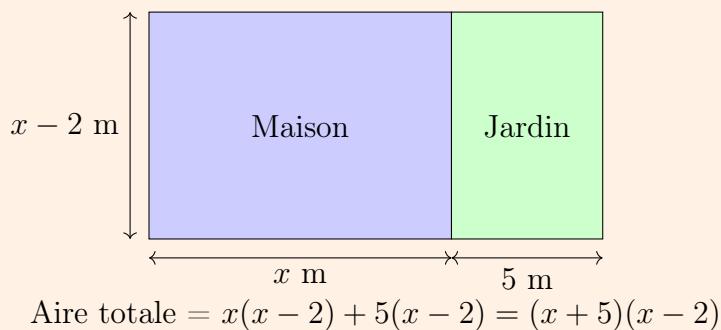
Produits Remarquables - Cours Complet

Applications dans la Vie Courante

Exemples concrets

1. **Architecture** : Calcul des surfaces et volumes
2. **Économie** : Calcul d'optimisation de coûts
3. **Physique** : Lois du mouvement et énergie
4. **Informatique** : Algorithmes et calculs
5. **Art** : Proportions et design

Exemple pratique : Calcul de l'aire d'un terrain



Félicitations pour votre travail sur les produits remarquables !

"La maîtrise des produits remarquables est la base de l'algèbre moderne."

Continuez à vous entraîner pour une maîtrise parfaite !

Annexes : Fiches Mémo

Fiche 1 : Les 3 formules fondamentales

Carré d'une somme : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Carré d'une différence : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Produit somme × différence : $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Astuce mnémotechnique : "Le premier au carré, plus le double produit, plus le deuxième au carré"

Fiche 2 : Formules étendues

Cube d'une somme : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cube d'une différence : $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Somme de cubes : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Différence de cubes : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$