# Metody Numeryczne - Projekt 2

Paweł Florek 327272 gr. 1

Grudzień 2023

## 1 Polecenie

Wyznaczanie rozkładu Crouta macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wykorzystanie tego rozkładu do rozwiązywania równań macierzowych $AX = B$ oraz $XA = B$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Wykonać testy dla różnych macierzy B, m.in dla takich, dla których $AX = XA$ (np. $B = I$). Porównać wyniki

## 2 Opis matematyczny

W rozkładzie LU macierz A zapisuje się jako iloczyn macierzy trójkątnej dolnej L oraz trójkątnej górnej U, przy czym na głównej przekątnej jednej z nich znajdują się wyłącznie jedynki. Jeśli U ma jedynyki na głównej przekątnej, to mamy do czynienia z rozkładem Crouta.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

### 2.1 Wzory ogólne na poszczególne elementy macierzy rozkładu

Dla wszystkich $i \in 1, 2, \dots, n$:
$u_{ii} = 1$
$l_{ji} = (a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki})$ dla $j \in \{i, i+1\dots, n\}$
$u_{ij} = (a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj})/l_{ii}$ dla $j \in \{i+1, i+2\dots, n\}$
Z ostatniego równania wynika, że metoda nie zadziała, gdy $l_{ii} = 0$. Wówczas w naszym wzorze nie dokonujemy dzielenie przez $l_{ii} = 0$.

### 2.2 Rozwiązywanie równań macierzowych

Rozwiązywanie układów równań liniowych $AX = B$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ Podstawiając A = LU otrzymujemy:

$$LUX = B.$$

Rozwiązywanie tego układu znajdujemy rozwiązując 2 układy z macierzami trójkątnymi:

$$LY = B \text{ oraz } UX = Y.$$

Jest to przydatne zwłaszcza w zastosowaniach, gdy mamy do rozwiązania wiele układów równań z tą samą macierzą, a różnymi macierzami B.
Analogicznie dla równań macierzowych $XA = B$.

## 3 Opis programu

Implementacja metod w funkcjach:

- rozkladCrouta(A) - funkcja służy wyznaczaniu rozkładu Crouta, gdzie:
  - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - macierz, której wyznaczamy rozkład LU,
  - L - macierz trójkątna dolna,
  - U - macierz trójkątna górna, z jedynkami na głównej przekątnej
- rozwiazAX(A, B) - funkcja rozwiązująca równanie macierzowe AX = B, gdzie:
  - $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - macierz z możliwym rozkładem LU,
  - $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$,
  - $X \in \mathbb{R}^{n \times m}$ - macierz rozwiązanie.
- rozwiazXA(A, B) - funkcja rozwiązująca równanie macierzowe XA = B, gdzie:
  - $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ - macierz z możliwym rozkładem LU,
  - $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$,
  - $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ - macierz rozwiązanie.
- bladAX/bladXA(A, B, X) - funkcja wyznaczająca błąd bezwzględny rozwiązania naszymi funkcjami w porównaniu dla funkcji wbudowanych.

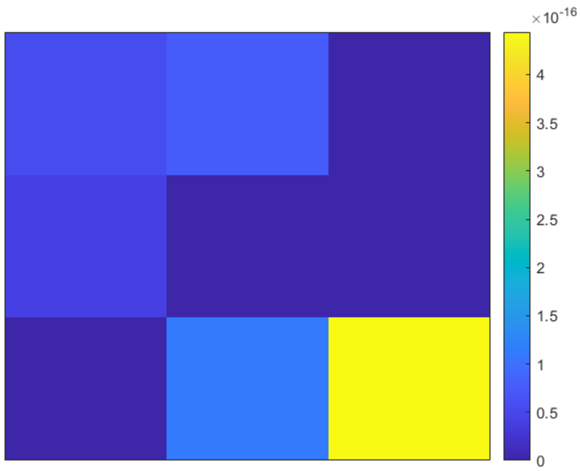
Przykładowe użycie powyższych funkcji:

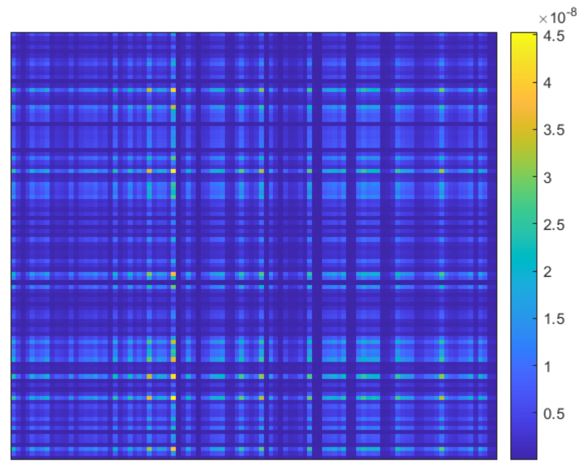
```
% przykĆadowe dane
A = [2 1 -1; -4 -1 3; 6 1 -3];
B = [1 1 3; -1 1 2; 3 -1 1];

% wyznaczanie rozkladu Crouta
[L, U] = rozkladCrouta(A)
% L =
%      2        0        0
%     -4        1        0
%      6       -2        2
% U =
%    1.0000    0.5000   -0.5000
%         0    1.0000    1.0000
%         0         0    1.0000

rozwiazAX(A, B)
% ans =
%    1.0000         0    1.5000
%         0    2.0000    4.0000
%    1.0000    1.0000    4.0000

bladAX(A, B)
% ans =
%   1.0e-15 *
%         0    0.0370         0
%         0    0.2220    0.4441
%         0         0         0

rozwiazXA(A, B)
% ans =
%    3.0000    3.5000    1.5000
%    2.5000    1.5000         0
%   -1.0000    2.5000    2.5000

bladXA(A, B)
% ans =
%   1.0e-15 *
%         0         0         0
%         0         0    0.2220
%    0.4441         0    0.4441
```

# 4 Analiza wyników

## 4.1 Macierze różnych wielkości

Weźmy losowe macierze $A_1, B_1 \in \mathbb{R}^{3\times3}$ oraz $A_2, B_2 \in \mathbb{R}^{100\times100}$. Błędy bezwzględne naszych rozwiązań równania AX = B przez nasz algorytm.:

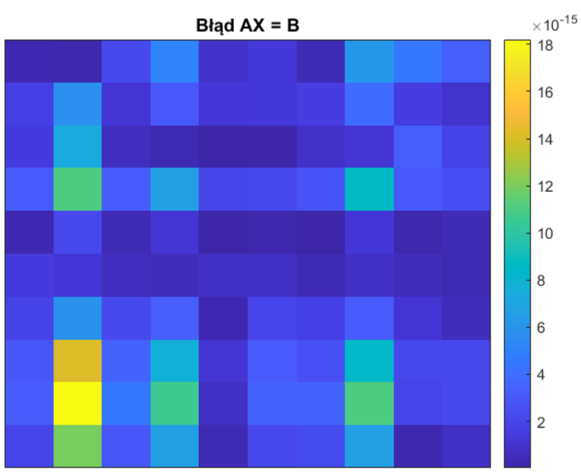


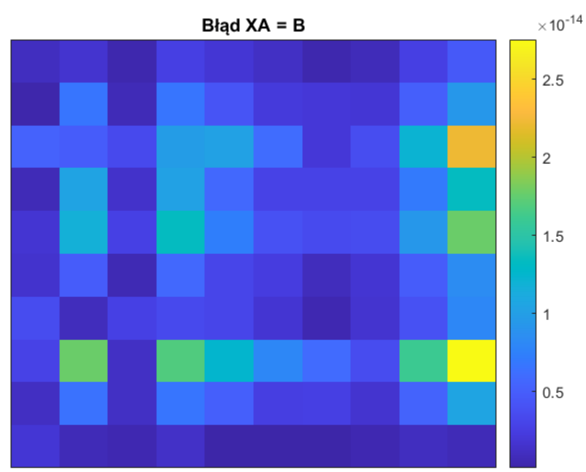




Widzimy, że wielkości rozważanych przez nas macierzy nie mają wpływu na dokładność rozwiązań, która i tak jest bardzo wysoka.

## 4.2 Macierze o elementach ujemnych

Dla macierzy $A \in \mathbb{R}_{-}^{10\times10}$ rozwiązaliśmy równania z polecenia. Wyniki wykazały, że nie ma to większego wpływu na dokładność metody.



## 4.3 Macierze osobliwe

W przypadku, gdy A jest macierzą osobliwą, istnieją dwa główne scenariusze dotyczące rozwiązania układu równań AX = B: brak rozwiązania lub nieskończona liczba rozwiązań. Sprawdźmy, jak zadziała nasz algorytm dla macierz osobliwej A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Rozkład LU dla tej macierzy ma postać L = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -13 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, U = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Widzimy, że na przekątnej macierzy U pojawiło się 0, co mogło sprawić problem przy obliczaniu rozkładu.

Próbując jednak rozwiązać układ równań AX = B, otrzymujemy: $\begin{pmatrix} NaN & NaN \\ Inf & -Inf \\ -Inf & Inf \end{pmatrix}$.

Świadczy to o braku rozwiązania lub nieskończonej liczbie rozwiązań. Wartości NaN i Inf mogą również wynikać z problemów numerycznych w procesie rozwiązywania układu równań. Mogły wystąpić dzielenia przez zero, błędy zaokrągleń lub inne problemy numeryczne, zwłaszcza, że macierz A jest osobliwa.

## 4.4 Macierze trójkątne

Dla macierzy trójkątnej górnej, jak i macierzy trójkątnej dolnej, można uzyskać rozkład LU w podobny sposób. Dla macierzy trójkątnej, proces znajdowania rozkładu LU jest łatwym do uzyskania. W przykładzie użyto macierzy $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$.

| | **Macierz trójkątna górna** | **Macierz trójkątna dolna** |
|---|---|---|
| **Średni błąd AX** | 0 | 4.3175e-16 |
| **Średni błąd XA** | 0 | 0 |

## 4.5 Macierze B, gdzie AX = XA

Przetestujmy nasz algorytm dla macierzy B, dla której AX = XA. Przykładem takiej macierzy jest macierz jednostkowa $I^{n\times n}$. Porównajmy wyniki dla różnych n.

| | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Średni błąd AX** | 6.1679e-18 | 1.3905e-17 | 1.8874e-17 | 6.2696e-16 | 8.4662e-16 | 8.8972e-17 | 3.321e-17 | 2.11e-16 |
| **Średni błąd XA** | 1.1565e-17 | 6.966e-18 | 1.4745e-17 | 9.5525e-16 | 9.7499e-16 | 1.1658e-16 | 3.7214e-17 | 2.216e-16 |

## 4.6 Porównanie czasowe

Sprawdźmy, jak wygląda porównanie czasowe dla różnych wielkości macierzy oraz porównanie "zwykłych" macierzy a trójkątnych (BZO sprawdzimy na macierzach trójkątnych górnych). Do wyznaczenia rozwiązania równania AX = B wykorzystaliśmy wbudowaną w MATLABie funkcje linsolve. Następnie, porównaliśmy czas z utworzynymi przez nas funkcjami.

| | **Zwykła 10x10** | **Trójkątna 10x10** | **Zwykła 10x100** | **Trójkątna 100x100** | **Zwykła 1000x1000** | **Trójkątna 1000x1000** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Czas MATLAB** | 0.0010446 | 0.0001207 | 0.0007239 | 0.0009317 | 0.043707 | 0.036932 |
| **Czas rozkladCrouta + rozwiazAX** | 0.0006617 | 5.8498 | 0.024473 | 0 | 5.6717 | 0 |

# 5 Praktyczne zastosowanie metody

- Rozwiązywanie układów równań - Metoda LU Crouta może być stosowana do rozwiązywania układów równań macierzowych, co jest powszechne w wielu obszarach nauki danych i uczenia maszynowego. W przypadku dużej liczby równań, gdzie macierze są rzadkie, zastosowanie efektywnych algorytmów rozkładu LU może przyspieszyć proces rozwiązywania układów równań.
- Dekompozycja LU może być używana do rozkładu macierzy i umożliwienia bardziej efektywnego obliczania pewnych operacji, zwłaszcza w przypadku iteracyjnych algorytmów optymalizacyjnych.
- Algorytmy faktoryzacji macierzy - W analizie składnikowej, gdzie modeluje się dane jako iloczyn macierzy, faktoryzacja LU może być używana jako jedna z metod faktoryzacji macierzy, co jest przydatne w redukcji wymiarów itp.