Metody Numeryczne - Projekt 1

Paweł Florek 327272 gr. 1

1 Polecenie

Porównanie metod Simpsona i Newtona ("trzech ósmych") do obliczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b w(x)\,dx$, gdzie $w(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$. Do obliczania wartości wielomianu zastosować metode Hornera.

2 Opis matematyczny metod

W przypadku, gdy wezły sa równoodległe oraz $x_0 = a$ i $x_n = b$ (czyli $x_k = a + hk$, gdzie $h = (b-a)/n$), wzór

$$S(f) = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

nosi nazwe kwadratury Newtona-Cotesa. Szczególnymi przypadkami kwadratór tego typu sa kwadratury Simpsona i Newtona ("trzy ósme"). W projekcie wykorzystamy kwadratury złożone.

2.1 Metoda Simpsona

Gdy $n = 2$, mamy 3 wezły: a, b i $\frac{a+b}{2}$. Kwadratura na nich skonstruowana to kwadratura (wzór) Simpsona, zwana również wzorem parabol. Funkcja f jest przybliżana wielomianem stopnia 2. W tym przypadku kwadratura ma postać

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right).$$

W projekcie wykorzystujemy kwadrature złożona. Przedział [a,b] dzielimy na podprzedziały $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \dots, N)$ o długości $H = \frac{b-a}{N}$, przy czym $x_k = a + kH$ dla $k = 1, \dots, N$. Złożony wzór Simpsona po przekształceniach ma postać:

$$S(f) = \frac{H}{6}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a + kH) + 4\sum_{k=0}^{N-1} f(a + kH + \frac{H}{2})\right).$$

Bład złożonej kwadratury Simpsona jest równy

$$E(f) = -\frac{1}{180 \cdot 2^4} H^4 (b-a) f^{(4)}(\mu),$$

dla pewnego $\mu \in (a, b)$

2.2 Metoda Newtona ("trzy ósme")

Dla $n = 3$ kwadratura jest oparta na 4 wezłach: $a, b, \frac{2a+b}{3}$ i $\frac{a+2b}{3}$. Funkcja f jest przybliżana wielomianem stopnia 3. Kwadratura Newtona ("trzech ósmych") ma postać:

$$S(f) = \frac{b-a}{8}\left(f(a) + 3f(\frac{2a+b}{3}) + 3f(\frac{a+2b}{3}) + f(b)\right).$$

W kwadraturze złożonej, przedział [a,b] dzielimy na podprzedziały $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, \ldots, N)$ o długości $H = \frac{b-a}{N}$, przy czym $x_k = a + kH$ dla $k = 1, \ldots, N$. Wzór złożonej kwadratury Newtona ("trzy ósme") ma postać:

$$S(f) = \frac{3H}{8} \left(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + 2f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-3}) + 3f(x_{n-2}) + 3f(x_{n-1}) + f(x_n) \right)$$

Bład złożonej kwadratury Newtona ("trzy ósme") jest równy

$$E(f) = -\frac{(1}{80} H^4 (b-a) f^4(\mu),$$

dla pewnego $\mu \in (a, b)$

3 Opis programu

Implementacja metod w funkcjach:

- simpson(w, a, b, N) - funkcja wyznaczajaca przybliżona wartość całki metoda Simpsona, gdzie:
  - w - wektor współczynników wielomianu
  - a,b - przedział całkowania, $a < b$
  - N - liczba podprzedziałów, w metodzie Simpsona N jest parzyste.
- newton(w, a, b, N) - funkcja wyznaczajaca przybliżona wartość całki metoda Newtona, gdzie:
  - w - wektor współczynników wielomianu
  - a,b - przedział całkowania, $a < b$
  - N - liczba podprzedziałów, w metodzie Newtona N jest podzielne przez 3.
- horner(w, x) - funckja wyznaczajaca wartość wielomianu metoda Hornera, gdzie:
  - w - wektor współczynników wielomianu
  - x - punkt, dla którego liczona jest wartość

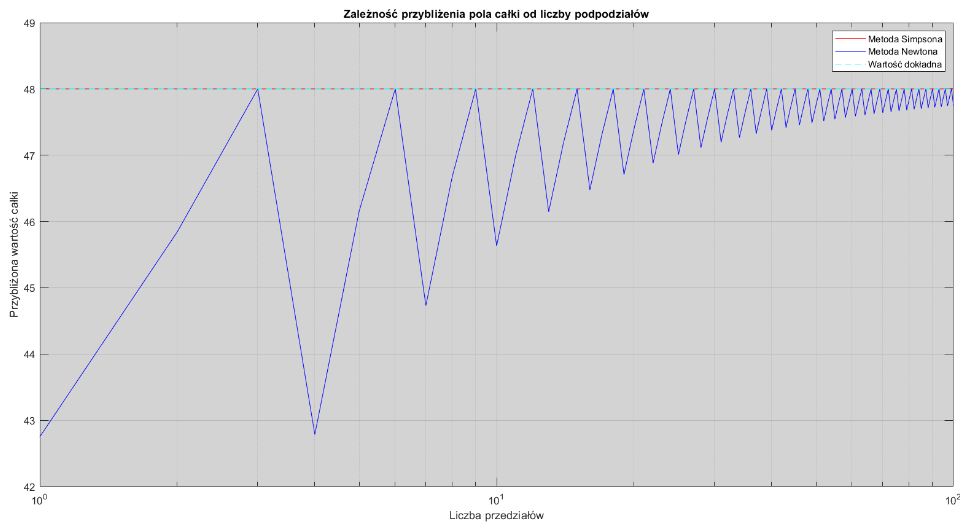
Przykładowe użycie powyższych funkcji:

```
% przykladowy wielomian
% 3x^3 + 2x^2 + 5x + 4
w = [3, 2, 5, 4];

% przykladowy przedzial
a = 0;
b = 3;

% przykladowa liczba podprzedzialow
N = 60;

% przyblizanie warto ci ca ki metoda Simpsona
s = simpson(w, a, b, N);
% przyblizanie warto ci calki metoda Newtona
n = newton(w, a, b, N);

% obliczanie wartosci ca ki wbudowana funkcja
c = integral(@(x) polyval(w, x), a, b);

% Porownanie wynikow
disp("Metoda Simpsona: " +  num2str(s))
disp("Metoda Newtona: " + num2str(n))
disp("Funckja wbudowana: " + num2str(c))

% Wyniki:
% Metoda Simpsona: 113.25
% Metoda Newtona: 113.25
% Funckja wbudowana: 113.25
```

4 Przykłady

4.1 Dokładność przybliżenia dla prostej funkcji wielomianowej

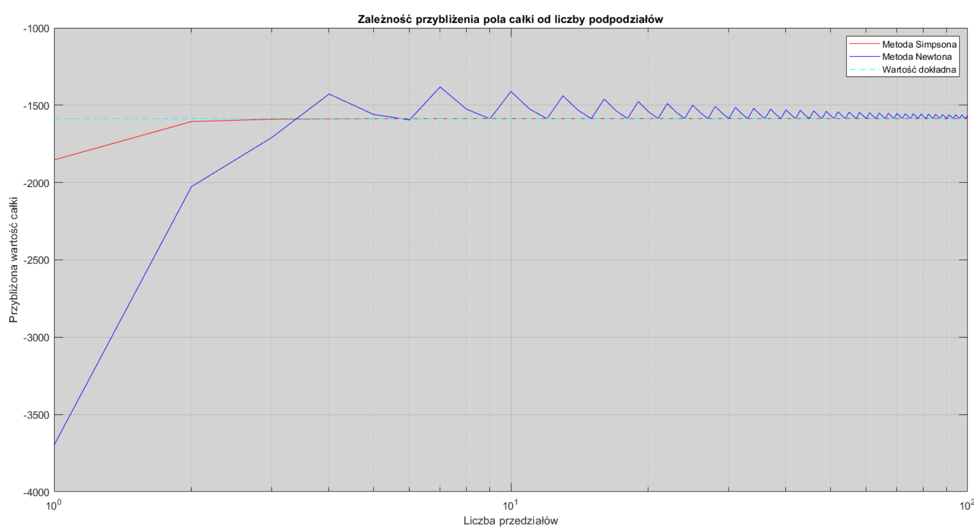
Przybliżamy wartość całki wielomianu $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ na przedziale [0,3].



Jak widać dla liczby podziałów niepodzienej przez 3, przybliżenie metody Newtona jest mocno niedokładne.

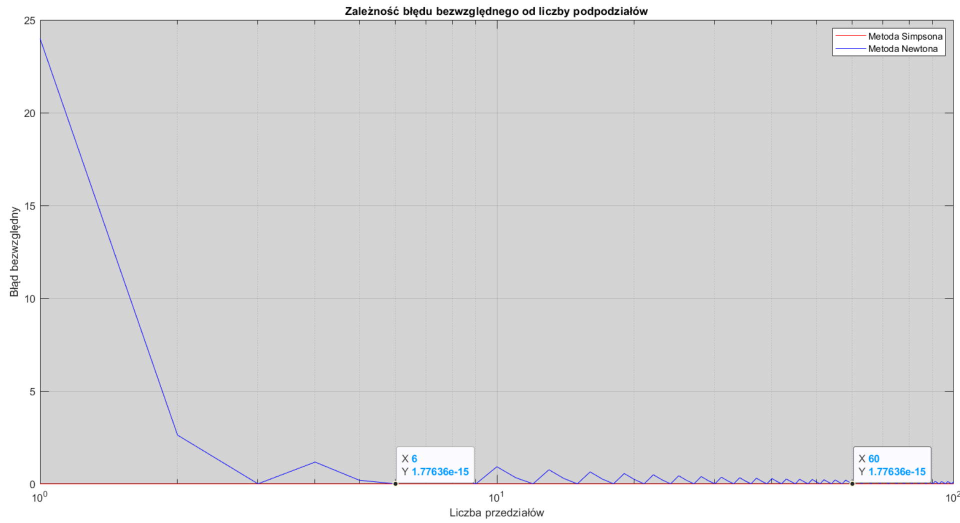
4.2 Dokładność przybliżenia dla wielomianu o ujemnym zbiorze wartości

Zbadajmy dokładność metod na wielomianie, który przyjmuje jedynie wartości ujemne. Weźmy $f(x) = -3x^6 - 2x^5 - 6x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 3x - 3$ na przedziale [0,3].



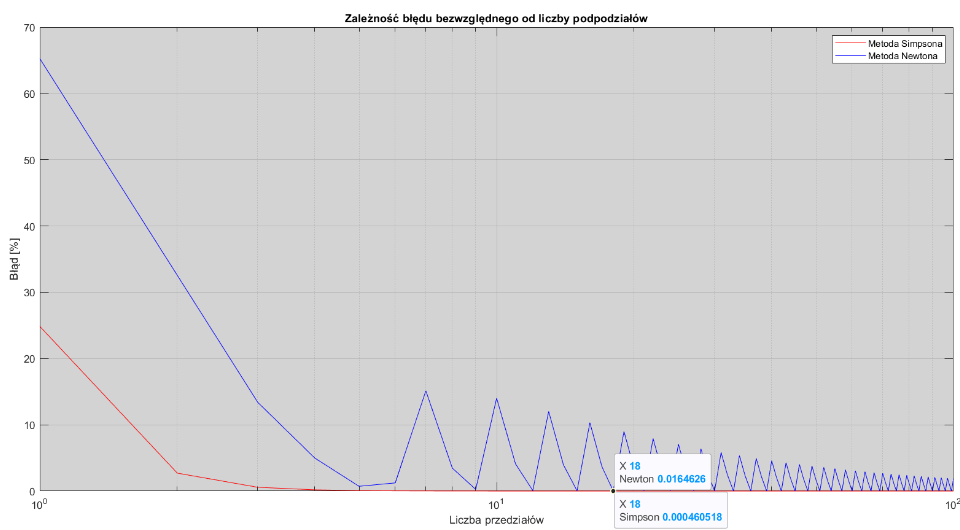
4.3 Dokładność przybliżenia w okolicach miejsc zerowych

Jeśli przedział całkowania zawiera pierwiastki wielomianu, to metody numeryczne moga być bardziej podatne na błedy, ponieważ wartości funkcji sa bliskie zeru. Przybliżamy wartość całki wielomianu $f(x) = x^2 + 6x + 8$ na przedziale [-6, 0]. Wielomian ma pierwiastki w $x_1 = -4$ i $x_2 = -2$.



4.4 Dokładność przybliżeneń dla wielomianu wiekszego stopnia

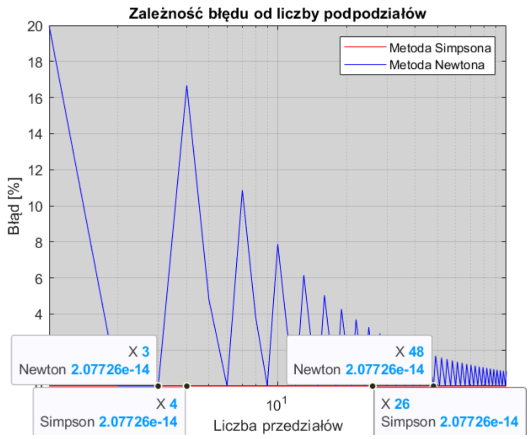
W przypadku wielomianów o wysokim stopniu, metody numeryczne moga wymagać dużego liczby podziałów przedziału całkowania, aby uzyskać dokładne wyniki. Przybliżamy wartość całki wielomianu $f(x) = x^7 + 4x^6 - 5x^5 + 6x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ na przedziale [0,6].

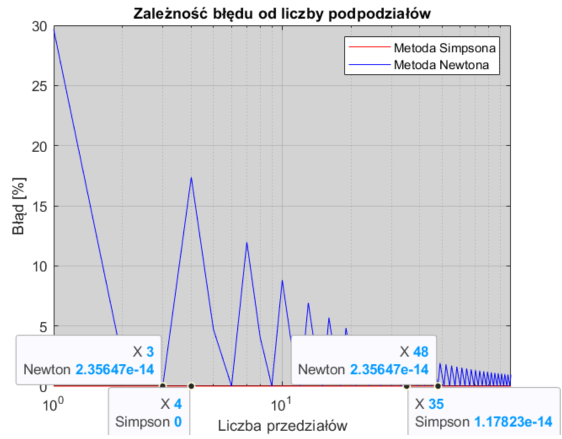


Przy wielomianach dużego stopmia potrzeba o wiele wiecej podpodziałów by otrzymać dokładne wyniki.

4.5 Dokładność w zależności od przedziału całkowania

Badamy wielomian $f(x) = x^3 + 20x^2 - 10x + 9$ na przedziałach [0,10] i [0,100].

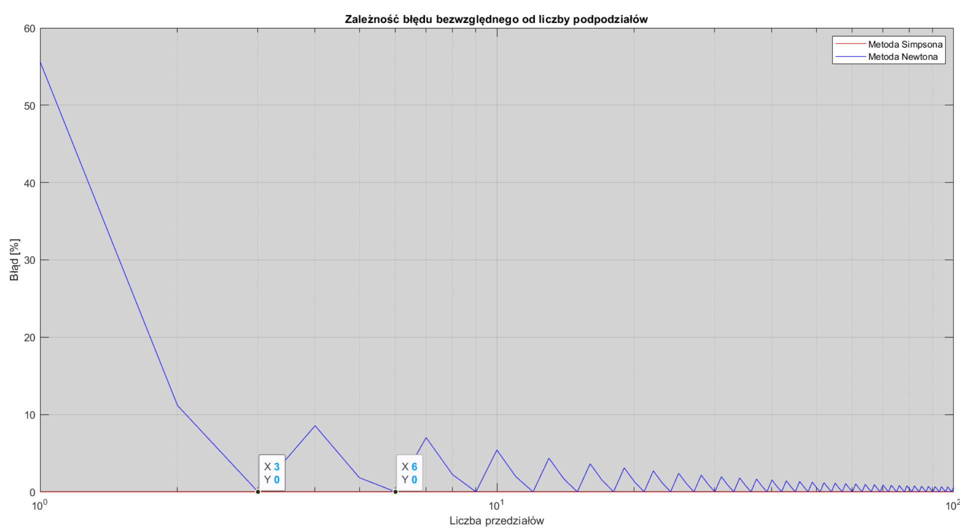




Rysunek 1 przedstawia bład dla przedziału [0,10], rysunek 2 dla przedziału [0,100].

4.6 Dokładność w okolicach ekstremum lokalnego

Wielomian z ekstremum lokalnym w przedziale całkowania, może wpłynać na dokładność interpolacji w przypadku metody Newtona (3/8). Metoda Simpsona może radzić sobie lepiej w takich sytuacjach. Niech $f(x) = x^3 - 36x^2 + 3x + 1$, f ma ekstremum lokalne w pobliżu x = 0, weźmy wiec przedział [-5,5].



5 Wnioski

Metoda Simpsona działa z minimalna niedokładnościa dla wszystkich przypadków powyżej pewnej ilości przedziałów. Natomiast metoda Newtona 3/8 działa poprawnie dla liczby podziałów podzielnych przez 3, zbiega również do prawidłowej wartości w wiekszej liczby podpodziałów niż metoda Simpsona. Gdy rośnie stopień wielomianu, obie metody potrzebuja wiekszej liczby podpodziałów. Zmiana zakresu całkowania nie wpływa znacznie na dokładność obu metod.