Lënda: **Sinjalet dhe sistemet**

Literatura

1. Shënime të shtypura dhe transparencat e ligjëratave.
2. "*Schaum's Outline of Theory and Problems of Signals and Systems*", Hwei P. Hsu, 1995, McGraw-Hill.
3. "*Signals and Systems*", Alan V. Oppenheim, 2nd ed., 1996, Prentice Hall.
4. "*Fundamentals of Signals and Systems-Using Matlab*", E. Kamen and B. Heck; 3rd ed., 2006, Prentice Hall.

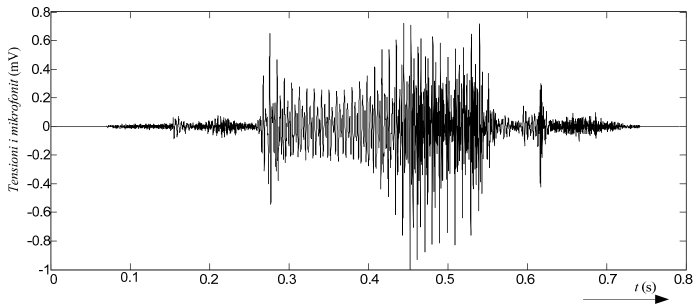
Sinjalet dhe sistemet

(Konceptet themelore)

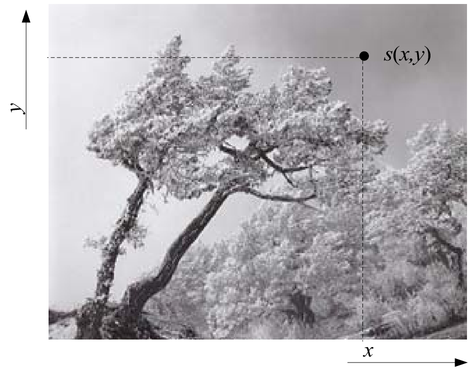
Sinjalet

1.1. Sinjalet dhe klasifikimi i tyre

- Sinjali përcjellë informatën për zhvillimin e një dukurie.
- E shprehur matematikisht: *sinjali është funksion i një apo më shumë variabëlve të pavarura*.



- Në grafik është treguar sinjali i tensionit në dalje të mikrofonit me rastin e shqiptimit të fjalës "**sinjal**".
- Ky është sinjal njëdimensional, ku variabëli i pavarur është koha.



- Sinjali i formuar si funksion i të hirtës të bashkësisë së pikave të fotografisë në funksion të variabëlve hapësinorë *x* dhe *y*.
- Ky është sinjal dydimensional, ku asnjëra nga varabëlat nuk është kohë

Klasifikimi i parë i sinjaleve:

- Sinjalet njëdimensionale
- Sinjalet shumëdimensionale

Klasifikimi i dytë i sinjaleve:

- Sinjalet e përcaktuara (deterministike)
- Sinjalet e rastit (stokastike)

Sinjalet e përcaktuara

- Sinjalet e përcaktuara janë ato sinjale, vlera e të cilave është e njohur për çdo vlerë të variabëlit të pavarur.
- Vlerat e sinjalit mund të shprehen me ndonjë shprehje matematikore, paraqitje grafike, apo me ndonjë listë tabelore.

Sinjalet e rastit

- Te sinjalet e rastit vlerat e sinjalit në një moment të caktuar kohor nuk mund të dihet paraprakisht në mënyrë të sigurt.
- Këto sinjale përshkruhen përmes funksioneve të shpërndarjes së gjasës.
- Vetëm sinjalet e rastit përcjellin informacion.
- Edhe pse në këtë lëndë do të trajtohen vetëm sinjalet e përcaktuara, ne do të supozojmë se edhe këto përcjellin informacion.

Klasifikimi i tretë i sinjaleve:

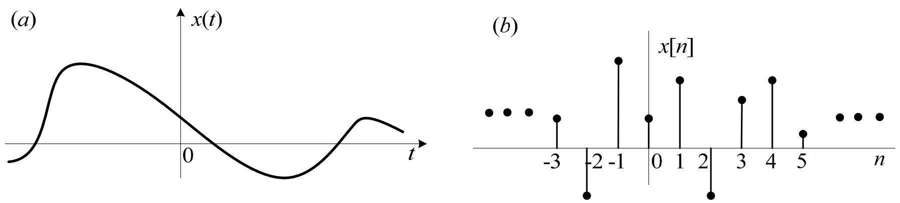
- Sinjalet e vazhduara
- Sinjalet diskrete

Sinjalet e vazhduara

- Sinjali i vazhduar (kontinual) $x(t)$ është funksion i variabëlit të vazhduar t.
- Nëse pos variabëlit t, edhe vlerat e sinjalit i përkasin numrave real, atëherë ky sinjal quhet *sinjal analog*.
- Përndryshe, sinjali mund të jetë i vazhduar në t, por diskret në vlera. Në këtë rast vlerat e sinjalit i përkasin një bashkësie të numërueshme, e jo asaj të numrave real.

Sinjalet diskrete

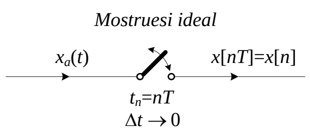
- Sinjali diskret $x[n]$ përkufizohet vetëm për vlera diskrete të kohës n, që do të thotë se n merr vlera nga bashkësia e numrave të plotë.
- Deri sa te sinjali i vazhduar koha ka njësi në sekonda, te sinjali diskret koha diskrete n është numërator i termit të sinjalit dhe është pa njësi.

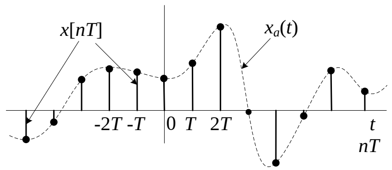


Paraqitja grafike e sinjalit të vazhduar (a) dhe sinjalit diskret (b)

Përfitimi i sinjalit diskret nga ai i vazhduar

- Sinjali diskret mund të përfitohet nga sinjali analog duke i veçuar vlerat e këtij të fundit në intervale të njëtrajtshme kohore.
- Procesi i veçimit të vlerave të sinjalit të vazhdueshëm në çaste të caktuara kohore quhet mostrim (kampionim).





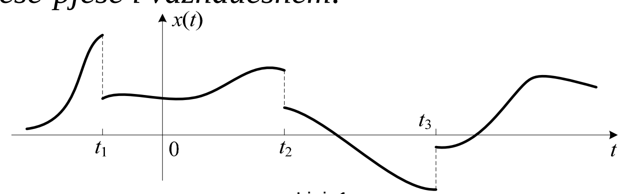
- Intervali kohor T në të cilin merren mostrat nga sinjali analog $x_a(t)$ quhet periodë e mostrimit.
- Vetëm një element i sinjalit diskret $x[n]$, për shembull $x[-1]$, quhet mostër (kampion) i sinjalit.

Sinjali digjital

- Në qoftë se vlerat e sinjalit diskret kuantizohen duke marrë vlera nga një bashkësi e fundme e numrave atëherë sinjali i tillë i diskretizuar jo vetëm në kohë por edhe në vlera quhet *sinjal digjital* (shifror).

Sinjali pjesë-pjesë i vazhdueshëm

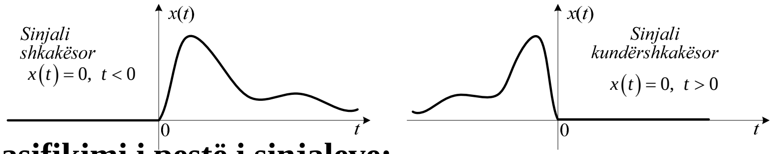
- Në qoftë se sinjali i vazhduar ka hope (diskontinuitete) në numër të numërueshëm të pikave të kohës t, atëherë ai sinjal quhet *pjësë-pjesë i vazhdueshëm*.



Klasifikimi i katërt i sinjaleve:

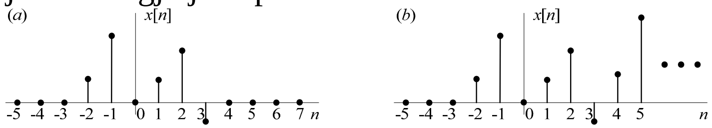
- Sinjalet shkakësore
- Sinjalet kundërshkakësore

- Sinjali është *shkakësor* (kauzal) në qoftë se të gjitha vlerat e tij janë zero për vlera negative të kohës t.
- Në të kundërtën, nëse vlerat jo zero të sinjalit paraqiten vetëm për $t<0$, atëherë sinjali do të jetë *kundërshkakësor* (antikauzal).



Klasifikimi i pestë i sinjaleve:

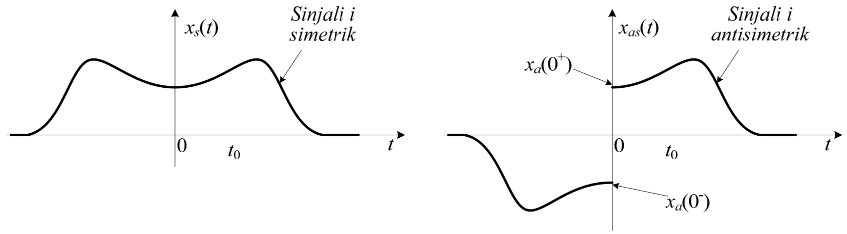
- Sinjalet me zgjatje të fundme
- Sinjalet me zgjatje të pafundme



Klasifikimi i gjashtë i sinjaleve:

- Sinjalet çifte
- Sinjalet teke

- Sinjali thuhet se është *çift* (simetrik) nëse grafiku i tij është simetrik ndaj boshtit vertikal.
- Ndërsa sinjali do të jetë *tek* (antisimetrik) nëse grafiku i tij është simetrik nda origjinës së sistemit koordinativ.



$$x_s(-t) = x_s(t) \qquad x_{as}(-t) = -x_{as}(t)$$

- Ngjashëm mund shënohet edhe për sinjalin diskret

$$x_s[-n] = x_s[n] \text{ dhe } x_{as}[-n] = -x_{as}[n]$$

- Çdo sinjal mund të zbërthehet në komponentin e vet çift dhe tek.

$$x(t) = x_s(t) + x_{as}(t) \text{ dhe } x[n] = x_s[n] + x_{as}[n]$$

- Të vërtetohet!

Klasifikimi i shtatë i sinjaleve:

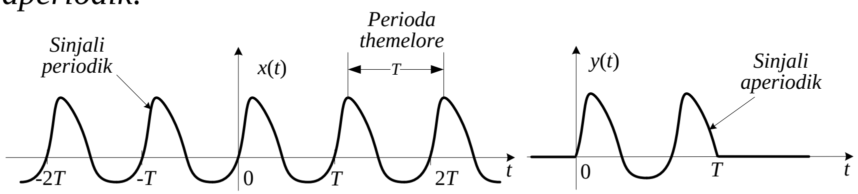
- Sinjalet periodike
- Sinjalet jo periodike (aperiodike)
- Sinjali i vazhduar $x(t)$ është *periodik* në qoftë se mund të gjendet së paku një $T\in\mathbb{R}$, për të cilin vlen

$$x(t) = x(t+T)$$

- Sinjali diskret $x[n]$ është periodik nëse mund të gjendet së paku një numër i plotë $N\in\mathbb{Z}$ ashtu që të vlej

$$x[n] = x[n+N]$$

- Nëse sinjali është periodik për një T, apo N, atëherë ai është periodik edhe për shumëfishin e tyre.
- Vlera më e vogël e T, apo N, quhet *periodë themelore* e sinjalit periodik.
- Nëse sinjalit nuk mund t'i caktohet perioda atëherë ai është *aperiodik*.



- Sinjali periodik mund të formohet nga sinjali aperiodik, duke e përsëritur këtë të fundit me shumëfishet e periodës themelore nga të dy anët e boshit kohor.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t+kT)$$

- Kjo mënyre e përfitimit të sinjalit periodik $x(t)$ nga ai aperiodik $y(t)$ quhet *zgjatje periodike* e sinjalit $y(t)$.

- Vlen edhe anasjella, sinjali aperiodik mund të përfitohet me *cungim* të sinjali periodik brenda një periode

$$y(t)=\begin{cases} x(t), & 0\le t\le T \\ 0, & t<0 \text{ dhe } t>T \end{cases}$$

- Por gjithashtu, sinjali aperiodik mund të kuptohet si një sinjal periodik, përsëritja periodike e të cilit shtyhet në pafundësi

$$y(t)=\lim_{T\to\infty} x(t)=\lim_{T\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} y(t+kT)$$

- Komentet e ngjashme vlejnë edhe për sinjale diskrete.

Klasifikimi i tetë i sinjaleve:

- Sinjalet e energjisë
- Sinjalet e fuqisë
- Energjia (E) e sinjalit të vazhduar $x(t)$ përkufizohet me formulën:

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2 dt$$

- ndërsa fuqia e sinjalit (P) me relacionin:

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^2 dt$$

- Për sinjalet diskrete vlejnë shprehjet:

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2 \qquad P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left|x[n]\right|^2$$

- Në qoftë se sinjali ka energji E të fundme atëherë ai hyn në klasën e *sinjaleve të energjisë*.
- Në rast se sinjali ka fuqi P të fundme atëherë ai i takon *sinjaleve të fuqisë*.

Disa komente lidhur me sinjalet e energjisë dhe të fuqisë

- Sinjalet e energjisë kanë fuqi zero, P=0.
- Sinjalet e fuqisë kanë energji të pafundme, $E\to\infty$.
- Nuk mund të ndodhë që sinjali të jetë njëherazi i energjisë dhe i fuqisë.
- Ndërsa, mund të ndodhë që një sinjal të mos jetë as i energjisë, e as i fuqisë.
- Sinjalet periodike mund të jenë vetëm sinjale të fuqisë. Fuqia e tyre llogaritet brenda një periode me shprehjet:

$$P=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\left|x(t)\right|^2 dt \qquad P=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left|x[n]\right|^2$$

- ku T dhe N janë periodat themelore të sinjalit të vazhduar, përkatësisht e atij diskret.

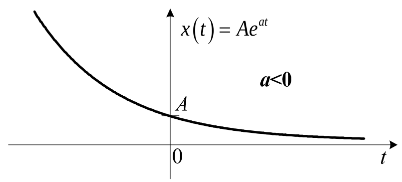
1.2. Sinjalet e vazhduara themelore

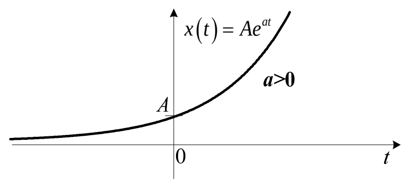
a. Sinjalet eksponenciale dhe sinusoidale

- Sinjali kompleks eksponencial, me zgjatje të pafundme nga të dy anët përkufizohet me

$$x(t)=Ae^{at},\quad -\infty<t<\infty$$

- Ku konstantat A dhe a, në rastin e përgjithshëm kanë vlera komplekse, $A,a\in\mathbb{C}$.
- Nëse të dy parametrat, A dhe a, marrin vlera reale, atëherë sinjali $x(t)$ quhet *eksponenciali real*.





- Kur parametri a merr vlerë të pastër imagjinare, $a=j\omega_0$, nga sinjali eksponencial sajohet *sinusoida komplekse*.

$$x(t) = Ae^{j\omega_0 t}$$

- Përkundër eksponencialit real i cili qartazi është një sinjal aperiodik, sinusoida komplekse është sinjal periodik.

$$Ae^{j\omega_0 t} = Ae^{j\omega_0 (t+T)} = Ae^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 T}$$

- Ky barazim plotësohet për

$$e^{j\omega_0 T} = 1 = e^{j2\pi k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \;\Rightarrow\; T = \frac{2\pi}{\omega_0} k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

- Për k=1 fitohet vlera më e vogël e T përkatësisht perioda themelore e sinjalit sinusoidal

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Po të merret se edhe parametri A ka vlerë komplekse

$$A = |A| e^{j\varphi}$$

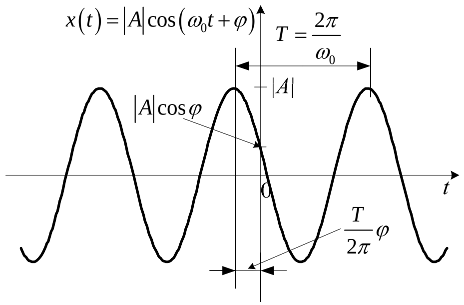
- Atëherë sinusoida komplekse zbërthehet në komponentët sinusoidalë, real dhe imagjinar,

$$Ae^{j\omega_0 t} = |A| e^{j(\omega_0 t + \varphi)} = |A| \cos(\omega_0 t + \varphi) + j|A| \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- *Sinjali real sinusoidal* i përkufizuar me

$$x(t) = |A| \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- e trashëgon periodicitetin e sinusoidës komplekse *T.*

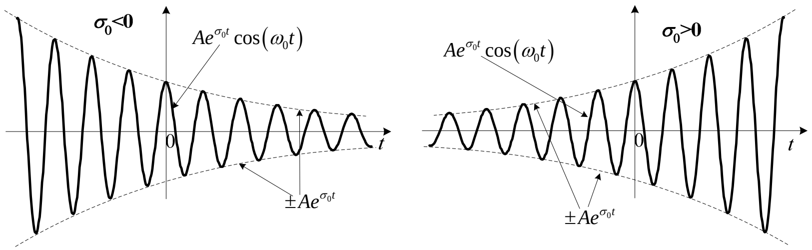


- Nëse parametrin a ka vlerë komplekse

$$a = \sigma_0 + j\omega_0$$

- atëherë eksponenciali kompleks merr trajtën

$$x(t) = Ae^{at} = Ae^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} = Ae^{\sigma_0 t} e^{j\omega_0 t} = Ae^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t) + jAe^{\sigma_0 t} \sin(\omega_0 t)$$

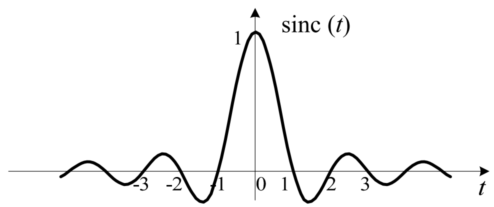


b. "Sinc" funksioni

- Sinc (lexo "sink") funksioni përfitohet si rezultat i integrimit të sinusoidës komplekse në domen të parametrit ω, në kufijtë [$-\pi,\pi$]

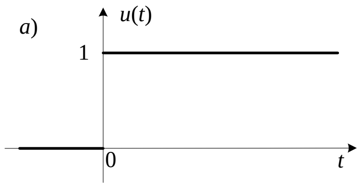
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jt}\left(e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}\right) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

$$x(t) = \text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad -\infty < t < \infty$$



c. Sinjali shkallë njësi

$$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

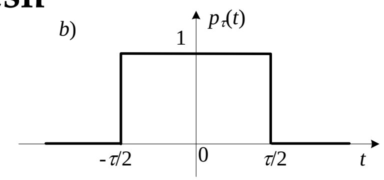


- Përmes sinjalit shkallë njësi mund të veçohet pjesa shkakësore e çfarëdo sinjali

$$x_{shk}(t)=x(t)u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ x(t), & t>0\end{cases}$$

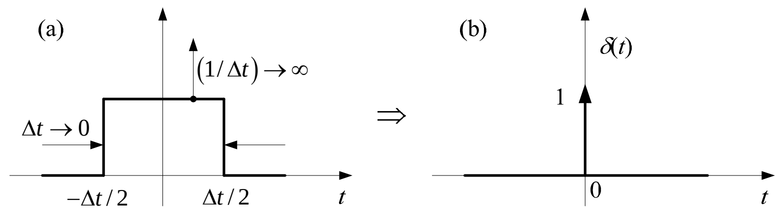
d. Sinjali puls drejtkëndësh

$$p_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\le \tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$$



d. Sinjali impulsi njësi

- Impulsi njësi ose delta impulsi, që shpesh quhet edhe impulsi i Dirakut, është njëri ndër sinjalet më të rëndësishme që përdoren në analizën e sinjaleve dhe të sistemeve.
- Ky sinjal nuk i takon klasës së funksioneve të zakonshme, si shumica e sinjaleve të tjera që kanë zbatim të gjerë.



$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)\,dt=\lim_{\Delta t\to 0}\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}x(t)\frac{1}{\Delta t}\,dt=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(\Delta t/2)-X(-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(\Delta t/2)-X(-\Delta t/2)}{\Delta t}=\left.\frac{dX(t)}{dt}\right|_{t=0}=x(0)$$

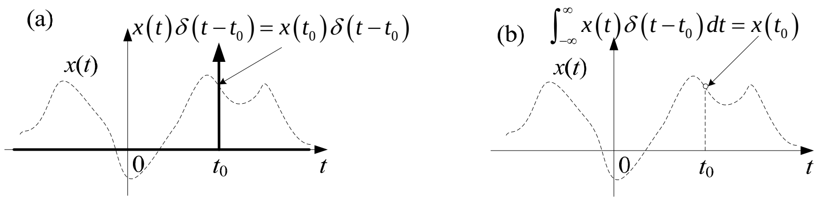
- Përkufizimi i $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t)\,dt=x(0)$$

- Sinjali impuls njësi mund të përkufizohet vetëm përmes integralit.
- Disa veti dhe relacione të rëndësishme të delta impulsit

$$\delta(-t)=\delta(t)\qquad x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)\qquad t\delta(t)=0$$

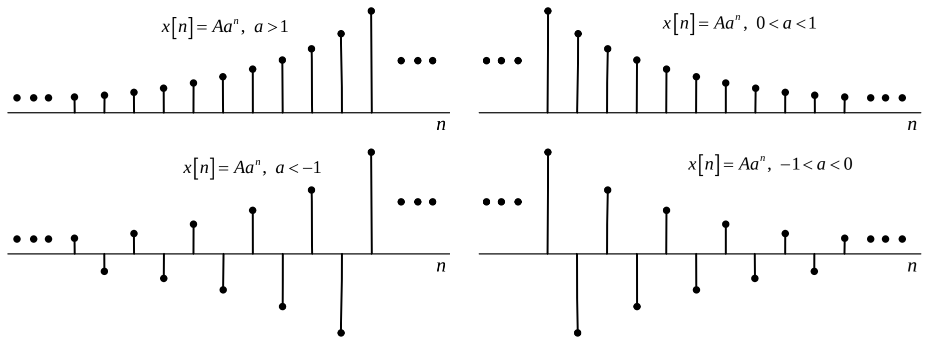
$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)\,dt=x(t_0)$$



1.3. Sinjalet diskrete themelore

- **Sinjalet eksponenciale dhe sinusoidale**
- Vlerat reale të parametrave A dhe a.

$$x[n]=Aa^n,\quad -\infty<n<\infty$$



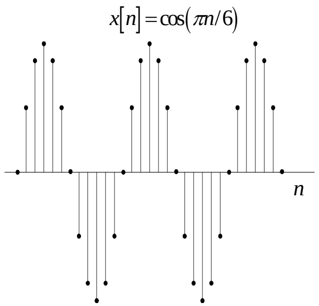
- Vlera e parametrit $a=\exp(j\Omega_0)$.

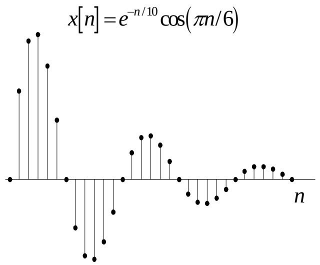
$$x[n]=Ae^{j\Omega_0 n}=|A|e^{j\varphi}e^{\Omega_0 n}=|A|\cos(\Omega_0 n+\varphi)+j\sin(\Omega_0 n+\varphi)$$

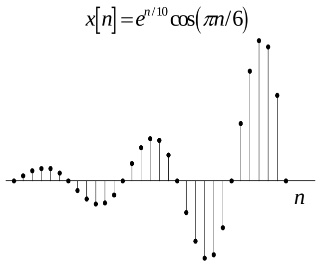
- Vlerat komplekse të parametrave A dhe a.

$$a=e^{\sigma_0+j\Omega_0} \quad \text{dhe} \quad A=|A|e^{j\varphi}$$

$$x[n]=|A|e^{j\varphi}e^{(\sigma_0+j\Omega_0)n}=|A|e^{\sigma_0 n}\cos(\Omega_0 n+\varphi)+j|A|e^{\sigma_0 n}\sin(\Omega_0 n+\varphi)$$







- **Sinjali shkallë njësi**

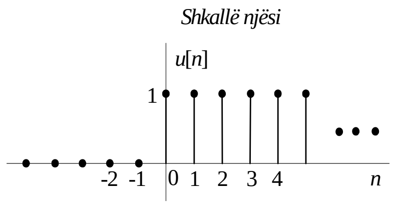
$$u[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\geq 0\end{cases}$$

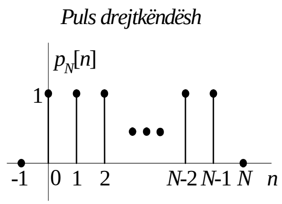
- **Sinjali drejtkëndësh**

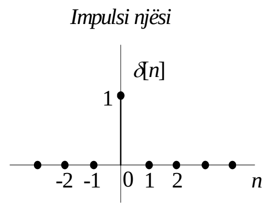
$$p_N[n]=\begin{cases}1, & 0\leq n<N-1\\ 0, & \text{për } n \text{ të tjera}\end{cases}$$

- **Sinjali impuls njësi**

$$\delta[n]=\begin{cases}1, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}$$







- **Disa relacione me sinjalin impuls njësi**

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

$$u[n]=\sum_{m=0}^{\infty}\delta[n-m]$$

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$

- Çfarëdo sinjali mund të përshkruhet përmes $\delta[n]$.

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\delta[n-k]$$

- **Periodiciteti i sinjaleve sinusoidale**

- Sinjali i vazhduar sinusoidal është periodik për çdo vlerë të ω_0.

$$x(t)=e^{j\omega_0 t}$$

$$x(t+T)=e^{j\omega_0(t+T)}=e^{j\omega_0 t}\underbrace{e^{j\omega_0 T}}_{1}=x(t)$$

$$\omega_0 T=2\pi k \;\Rightarrow\; T=\frac{2\pi}{\omega_0}k$$

- Sinjali diskret sinusoidal nuk është periodik për çdo vlerë të Ω_0.

$$x[n]=e^{j\Omega_0 n}$$

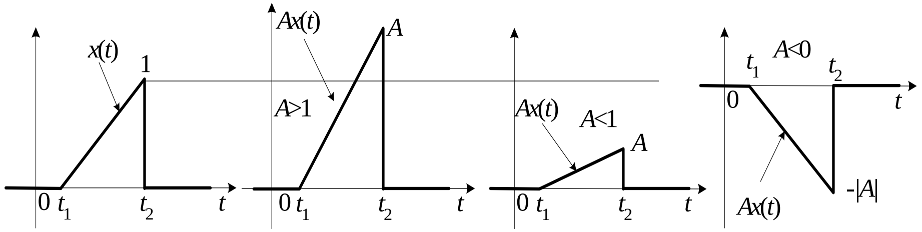
$$x[n+N]=e^{j\Omega_0(n+N)}=e^{j\Omega_0 n}\underbrace{e^{j\Omega_0 N}}_{1}=x[n]$$

$$\Omega_0 N=2\pi k \;\Rightarrow\; N=\frac{2\pi}{\Omega_0}k$$

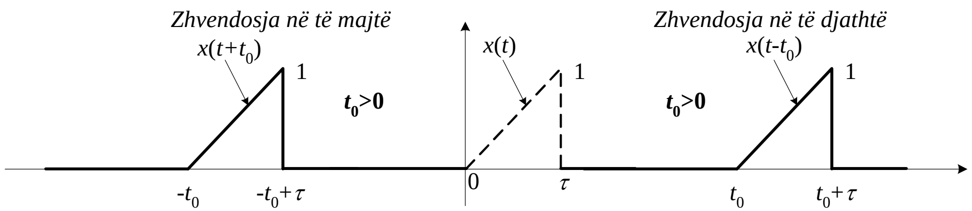
$$\frac{\Omega_0}{2\pi}=\frac{k}{N} \quad \text{(numër racional)}$$

1.4. Veprime themelore me sinjale

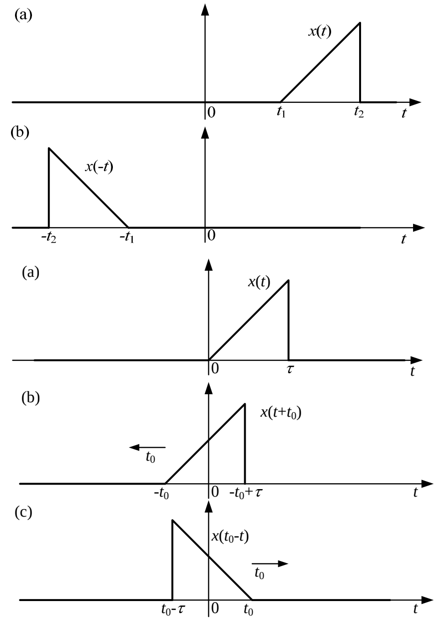
- **Shkallëzimi i amplitudës** $x_1(t) = Ax(t)$



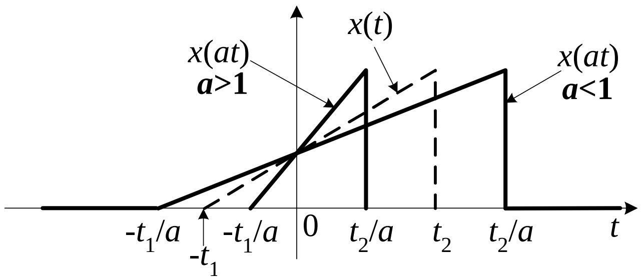
- **Zhvendosja në kohë** $x_1(t) = Ax(t - t_0)$



- **Pasqyrimi në kohë** $x_p(t) = x(-t)$



- **Shkallëzimi i boshtit kohor** $x_{sh}(t) = x(at)$



- **Shembull:** Është i dhënë $x(t)$, të përcaktohet $-x(-2t+1)$