Kalkulus I

Tanush Shaska

Njehsimi diferencial

T. Shaska

First Edition: 2010

ISBN-13: 978-1-60985-000-5
ISBN-10: 1-60985-000-9

Second Edition: 2011

ISBN-13: 978-1-60985-000-5
ISBN-10: 1-60985-000-9

Parathënie

Kalkulusi i funksioneve me një ndryshore ndahet në dy pjesë kryesore kalkulusin diferencial dhe kalkulusin integral. Në shqip ne zakonisht përdorim termat njehsimi diferencial and njehsimi integral. Ky libër, i cili është pjesë e serisë së [14], [17], [15], është një hyrje në njehsimin integral. Qëllimi nuk është të jepet një studim i plotë i njehsimit integral, por thjesht një hyrje në nivelin elementar. Ky tekst mund të përdoret me sukses në shkollat e mesme apo në vitet e para të universiteteve.

Mësuesit e talentuar mund të përdorin shumë nga temat e këtij libri për ta prezantuar studentin tek disa tema mjaft të avancuara të matematikës; shih [12] për disa ide.

Duhet theksuar se nuk është qëllimi i lëtij libri që të japë një trajtim të plotë të subjektit dhe as të përqëndrohet tek vërtetimet rigoroze të gjithë rezultateve të kalkulusit integral. Lexuesi i interesuar ne një trajtim modern të kalkulusit integral duhet të konsultojë një libër të plotë të analizës matematike.

Historia e Kalkulusit

Kalkulusi (Latinisht (Calculus): gur, një gur i vogël përdorur për numërim) është një disiplinë në matematikë e përqëndruar në limitet, funksionet, derivatet, integralet, dhe seritë e pafundme. Kjo lëndë përbën një pjesë të madhe të arsimit universitar modern. Ajo ka dy degë kryesore, kalkulusin diferencial dhe atë integral, të cilat janë të lidhura nga Teorema Themelore e Kalkulusit. Kalkulusi është studimi i ndryshimit, në të njëjtën mënyrë që gjeometria është studimi i formës dhe algjebër është studimi i operacioneve dhe zbatimi i tyre për zgjidhjen e ekuacioneve. Një kurs në kalkulus është një portë hyrëse tek kurse të tjera më të përparuara në matematikë kryesisht e përkushtuar në studimin e funksioneve dhe limitet e quajtur analiza matematike. Kalkulusi ka aplikime të shumta në shkencë, ekonomi, dhe inxhinieri dhe mund të zgjidhë shumë probleme për të cilat algjebra vetëm është e pamjaftueshme.

Dy personalitetet kryesore të shkencës të cilëve ju jepet kredia kryesore për shpjikjen dhe zhvillimin e Kalkulusit janë Newton dhe Leibnitz.

Isaac Newton, (1643 - 1727)

Sir Isaac Newton, (4 Janar 1643 - 31 mars 1727) ishte një fizikan anglez, matematikan, astronom, filozof i lindur, alkimist, dhe teolog dhe një nga njerëzit më me ndikim në historinë njerëzore. Vepra e tij "Philosophić Naturalis Principia Mathematica", botuar në vitin 1687, është konsideruar të jetë libri më me ndikim në historinë e shkencës. Në këtë punë, Njutoni përshkroi gravitacionin universal dhe tre ligjet e lëvizjes, vendosi bazat për mekanikën klasike, e cila dominoi nga pikëpamje shkencore e universit fizik për tre shekujt në vazhdim dhe është baza për inxhinierinë moderne. Njutoni tregoi se levizjet e objekteve në Tokë dhe trupave qiellorë të qeverisen nga e njëjta bashkësi ligjesh natyrore duke treguar pajtueshmeri midis ligjeve të Keplerit të levizjes planetare dhe teorisë së tij të gravitetit, duke hequr dyshimet e fundit për heliocentrizmin dhe avancimin e revolucionit shkencor.

Në mekanikë, Njutoni futi parimet e konservimit të momentit dhe momenti këndor. Në optikë, ai ndërtoi teleskopin e parë me refleksion dhe zhvilloi një teori të ngjyrës së bazuar në vëzhgimin se një prizëm dekompozon dritën e bardhë në një spektër të dukshem. Ai gjithashtu formuloi një ligj empirik të ftohjes dhe studioi shpejtësinë e zërit.

Në matematikë, Njutoni së bashku me Gottfried Leibniz krijoi kalkulusin (njehsimin) diferencial dhe integral. Ai gjithashtu vërtetoi teoremën e përgjithësuar të binomit, zhvilloi të ashtu-quajturen "metodë e Njutonit"për përafrimin e zerove të një funksioni, dhe kontribuoi në studimin e serive fuqi.

Njutoni ishte gjithashtu fetar (edhe pse jo fanatik), duke prodhuar më shumë punë në teologji se sa në shkenca natyrore për të cilat ai kujtohet sot.

Statura e Njutonit në mesin e shkencëtarëve mbetet në shkallën më të lartë, siç u pa edhe nga një studim në 2005 i shkencëtarëve të Shoqërisë Mbretërore të Britanisë së Madhe, të cilëve ju kërkua se kush ishte shkencëtari i cili kishte ndikimin më të madh në historinë e shkencës. Njutoni u vlerësua me shumë më tepër ndikim se Albert Einstein.

Leibnitz, Gottfried Wilhelm (1646-1716)

Filozof dhe matematikan gjerman (bashkëkrijues i Kalkulusit), fizikant (ligji i ruajtjes së energjisë), gjeolog, etj. Fillimisht një materialist mekanik në filozofi, por në kundërshtim me empirizmin e Locke-s u zhvendos në një pozitë të racionalizmit dhe idealizëm objektiv me teorinë e tij të Monads - e pandashmja e substancave shpirtërore nga të cilat Universi është i përbërë; monads ishin të pajisur me vetë-aktivitet, por nuk kishte asnjë ndikim fizik, tek njëri-tjetri, vlerësonin se kriteri i së vërtetës është qartësia e njohurive, testuar nga zbatimi i Logjikës Formale të Aristotelit.

Leibniz është më i njohur si bashkë-themelues i Kalkulusit me Newton dhe themeluesi i logjikës matematikore dhe simbolike. Leibniz gjithashtu ka kontribute të rëndësishme në mekanikë, gjeologji, biologji, histori, linguistikë dhe inxhinieri. Ai ishte i mirënjohur në punët publike te ditës së tij, duke i dhënë një skemë për unifikimin e shteteve gjermane, e cila kishte qenë trashëgimia e Luftës Tridhjetëvjeçare, argumentoi për ribashkimin e Kishave Protestante dhe Katolike, themeloi Akademinë e Shkencave nën Frederickun I të Prusisë, dhe ka marrë pjesë në çdo sferë të shkencës, artit dhe jetës publike në Evropën e Habsburgëve dhe mbretit Lui XIV.

Kalkulusi përdoret në cdo degë të shkences si informatika, fizika, statistika, inxhinjeri, ekonomi, biznes, mjekësi, dhe cdo fushë tjetër ku nje problem mund te modelohet matematikisht dhe kërkohet nje zgjidhje optimale.

Fizika në vecanti përdor Kalkulusin. Të gjitha konceptet në mekaniken klasike janë të ndërlidhura nëpërmjet Kalkulusit. Masa e një objekti me densitet të njohur, momenti i inercisë së objektit, energjia totale e objektit, gjenden duke perdorur kalkulusin.

Kimia përdor kalkulusin në përcaktimin e shpërberjes radioaktive dhe raporteve te reaksioneve. Në algjebër lineare kalkulusi përdoret për të gjetur përafrimin linear "më të mirë"për një bashkësi pikash.

Simbolika:

Simbolika e mëposhtme do të përdoret në këtë libër pa shumë sqarime të mëtejshme. Gjithë konceptet e tjera janë sqaruar në detaje. Një ideks i termave kryesore është vënë në fund të librit. Suposohet se lexuesi i këtij libri ka përvetsuar në detaje njehsimin diferencial në [14].

$\mathbb{R}$	*bashkësia e numrave realë*
$\mathbb{C}$	*bashkësia e numrave kompleksë*
$\mathbb{Q}$	*bashkësia e numrave racionalë*
$\mathbb{Z}$	*bashkësia e numrave të plotë*
$\tan x$	*funksioni i tagentes*
$\sin x$	*funksioni sinusit*
$\ln x$	*funksioni i logaritmit natyror*
$\arccos x$	*ark-cosinusi*
$\arcsin x$	*ark-sinusi*
$\arctan x$	*ark-tangenti*
$\arg$	*argument*
$\cos x$	*funksioni i kosinusit*
$\cosh$	*kosinusi hiperbolik*
$\cot$	*funksioni i kotangentit*
$\coth$	*kotangenti hiperbolik*
$\sec$	*funksioni i sekantit*
$\csc$	*funksioni i ko-sekantit*
$\exp x$	*funksioni eksponencial*
$\ker$	*bërthama (kernel) i nje funksioni linear*
$\log$	*funksioni logaritmik*
$\max$	*maksimum*
$\det$	*determinanti*
$\sin x$	*funksioni i sinusit*
$\sinh x$	*sinusi hiperbolik*
$\tan x$	*funksioni i tangentit*
$\tanh x$	*tangenti hiperbolik*
∞	*infinit*
$\lim$	*limiti*
$\Rightarrow$	*sjell (implikim)*
$\Leftrightarrow$	*ekuivalente, atëherë dhe vetëm atëherë kur*
$\square$	*përfundon vertetimi*

Përmbajta

Tabelat

Figurat

Kapitulli 1

Funksioni matematik

Në këtë kapitull ne japim një përshkrim të funksioneve dhe modeleve matematike. Janë pikërisht këto funksione dhe modele ato që e bëjnë shkencën e matematikës një nga themelet më të rëndësishme të zhvillimit teknik dhe industrial të shoqërisë. Mbi bazën e këtyre modeleve matematike ne bëjmë një përshkrim sasior të fenomeneve të realitetit dhe mundësojmë zgjidhjen e shumë prej tyre.

Një **model matematik** është një përshkrim matematik i një fenomeni real siç është numri i popullatës, ose kërkesa për një produkt, shpejtësia e një objekti lëvizës, përqëndrimi i një produkti në një kërkim shkencor kimik, jetëgjatësia e një personi, etj.

Figura 1.1: Shpella e Piratëve, Karaburun, Vlorë.

Qëllimi i një studiuesi kur modelon nje fenomen te natyrës është të kuptojë fenomenin dhe ndoshta të bëjë parashikime për të ardhmen. Për shembull një model matematik do të na ndihmonte të kuptonim varësinë e jetës nënujore nga sasia e dritës në shpellën e Haxhi Aliut, një model i saktë matematik do të na ndihmonte të parashikonim rritjen apo rënien e ekonomisë, performancën e aksioneve në bursë, rezultatet e ndeshjeve të futbollit, etj.

Çfarë parashikimesh mund të realizohen nëpërmjet Kalkulusit? Mbahuni fort, do të jetë një det me dallgë!

1.1 Funksionet dhe modelet matematike

Në përpjekjet tona për përshkrimin matematik të fenomeneve të botës reale ne zakonisht ndjekim këto faza:

Faza e parë: Formulohet një model matematik që të identifikojë dhe emërtojë ndryshoret e varura dhe ato të pavarura dhe do të bëjë supozime të tilla që ta bëjnë problemin të thjeshtë dhe të pranueshëm nga ana matematike.

Faza e dytë: Të përdoren njohuritë matematike për modelin matematik në mënyrë që të arrihet në konkluzione matematike.

Faza e tretë: Interpretimi i këtyre konkluzione matematike si informacion për fenomenin origjinal real në mënyrë që të na ofrojë shpjegime ose parashikime.

Faza e katërt: Puna përfundimtare është të testojmë këto përfundime duke kërkuar të dhëna të reja. Në qoftë se këto nuk përputhen me realitetin, ne duhet ta rishqyrtojmë modelin tonë ose të formulojmë një model të ri dhe të fillojmë ciklin nga e para.

Një model matematik nuk është kurrë një paraqitje e plotë e një situate fizike, ky është idealizëm. Një model i mirë do ta thjeshtonte realitetin në mënyrë të mjaftueshme për llogaritjet matematike, por është korrekt për të dhënë konkluzione me vlerë. Eshtë e rëndësishme të kuptohen kufizimet e modeleve matematike në jetën e përditshme.

Ka disa tipe të ndryshëm funksionesh që mund të përdoren si modele të fenomeneve të botës reale. Në vazhdim ne do të diskutojmë sjelljen dhe grafikët e këtyre funksioneve dhe do të japim shembuj modelesh matematike prej funksioneve të tillë.

Objekti themelor i këtyre shënimeve janë funksionet. Ky kapitull përgatit rrugën për studimin e ideve bazë të funksioneve, grafeve të tyre dhe mënyrave të transformimit dhe kombinimit të tyre. Theksojmë se një funksion mund të paraqitet në mënyra të ndryshme, nëpërmjet një:

- *ekuacioni*,
- *tabele*,
- *grafiku*,
- *me fjalë*.

Ne do të shohim llojet kryesore të funksioneve dhe do të japim shembuj të përdorimit të tyre funksioneve si modele matematike të fenomeneve reale.

1.1.1 Mënyrat për të paraqitur një funksion

Funksionet lindin kur disa madhësi varen nga disa të tjera. Këto madhësi mund të përfaqsojnë fenomene të botës reale që njihen mirë, ose mund të jenë disi të panjohura për ne. Në kapitujt e parë të këtij libri ne do të përqendrohemi tek rasti kur një madhësi e caktuar varet nga një madhësi tjetër. Këta quhen **funksione me një ndryshore** dhe **me një vlerë**. Le të shohim shembujt e mëposhtëm të cilët paraqesin disa funksione elementare.

Përkufizim 1.1. Një **funksion** $f(x)$ është një treshe e renditur (A, B, f) ku A dhe B janë bashkësi të dhëna dhe

$$f : A \to B$$

një rregull sipas të cilit çdo elementi x nga bashkësia A i përgjigjet një dhe vetëm një element i quajtur $f(x)$ nga bashkësia B. Zakonisht kjo shënohet me simbolin $f : A \to B$.

Ne do të studiojmë funksionet për të cilat bashkësitë A dhe B janë bashkësi numrash realë. Bashkësia A quhet **bashkësi e përkufizimit të funksionit**. Numri $f(x)$ është **vlera** e $f(x)$ në x dhe lexohet "f e x-it".

Bashkësia e vlerave të funksionit është bashkësia e të gjithë $f(x)$ për x nga bashkësia e përkufizimit të funksionit. Një simbol që paraqet vlerat nga bashkësia e përkufizimit të funksionit quhet **ndryshore e pavarur**. Ndërsa simboli që paraqet vlerat nga bashkësia e vlerave të funksionit quhet **ndryshore e varur**.

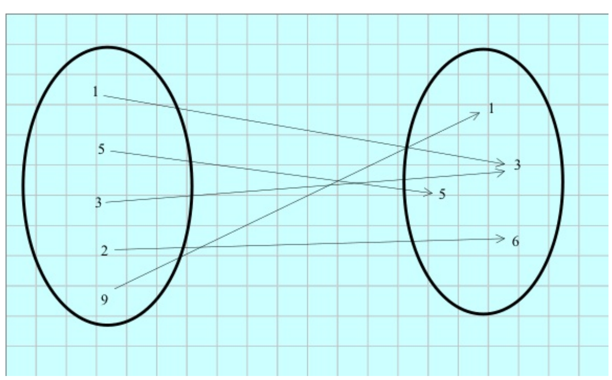


Figura 1.2: Mënyra e paraqitjes së funksionit me anë të diagramave

Një tjetër mënyrë për të pasqyruar një funksion është nëpërmjet diagramave. Çdo shigjetë lidh një element nga A me një element nga B. Shigjeta tregon se $f(x)$ është i shoqëruar me x-in, $f(a)$ me a-në e kështu me radhë.

Metoda më e përgjithshme për të paraqitur një funksion është ajo grafike. Në qoftë se $f(x)$ është një funksion me bashkësi përkufizimi A, ku ndryshorja e pavarur x dhe ndryshorja e varur $y = f(x)$ marrin vlera nga $\mathbb{R}$, atëherë grafiku i tij është bashkësia e çifteve të renditura:

$$G := \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, \text{ për } x \text{ në } A\right\}$$

Me fjalë të tjera grafiku i $f(x)$ konsiston në të gjitha pikat (x, y) të planit koordinativ të tilla që $y = f(x)$ dhe x është nga bashkësia e përkufizimit të $f(x)$.

Më poshtë shohim disa shembuj të tjerë funksionesh:

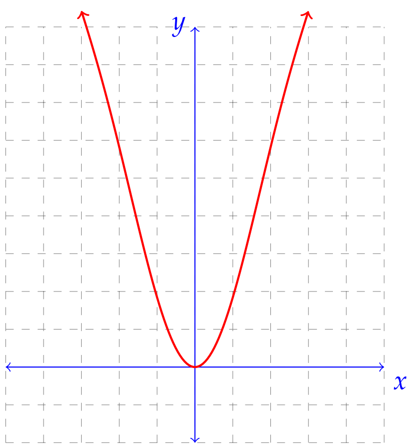


Figura 1.3: $f(x) = x^2 + x \sin x$.

Shembull 1.1. *Grafiku i një funksioni është treguar në Fig. 1.3.*

a) Gjeni vlerat e funksionit $f(-2)$ dhe $f(3)$.

b) Cila është bashkësia e përkufizimit si dhe bashkësia e vlerave të këtij funksioni?

Zgjidhje: a) Në grafik ne shohim se afërsisht pika $(-2, 5)$ ndodhet në të, kështu që vlera e $f(x)$ në $x = 5$ është afërsisht 5, pra $f(-2) \approx 5$. Me fjalë të tjera pika e grafikut për $x = -2$ është afërsisht 5 njësi mbi boshtin e x-ve. Kur $x = 3$, grafiku ndodhet rreth 9 njësi mbi boshtin e x-ve, kështu që pranojmë se $f(3) \approx 9$.

b) Shohim që $f(x)$ është i përkufizuar për $x \in [-10, 10]$. Kështu që bashkësia e përkufizimit të $f(x)$-së është segmenti $[-10, 10]$. Vërejmë se $f(x)$ merr të gjitha vlerat nga 0 deri tek 95, prandaj bashkësia e vlerave të tij është segmenti $[0, 95]$. Pra, për sa shohim në figurë,

$$f : [-10, 10] \to [0, 95]$$

□

Në vazhdim shohim një shembull tjetër.

Shembull 1.2. *Ndërtoni grafikun dhe gjeni bashkësinë e përkufizimit për funksionin $g(x) = x^2$.*

Zgjidhje: Meqënëse $g(2) = 4$ dhe $g(-1) = 1$ mund të bashkojmë pikat (2, 4) dhe (-1, 1) së bashku me pikat e tjera të grafikut dhe të marrim grafikun e $g(x) = x^2$ si në figurë. Ekuacioni i grafikut $y = x^2$ paraqet një parabolë. Bashkësia e përkufizimit të tij është $\mathbb{R}$. Bashkësia e vlerave të tij, është ajo e të gjithë numrave të tipit x në katror. Por këto vlera janë gjithmonë jonegative, kështu që bashkësia e vlerave të tij është $[0, +\infty)$. □

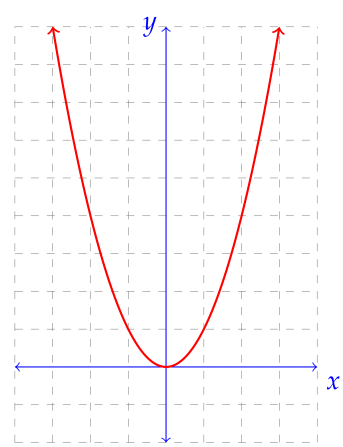


Figura 1.4: Grafiku i $g(x) = x^2$.

Më tej vazhdojmë me paraqitjen e funksioneve. Ka katër mënyra për të paraqitur një funksion:

1 **Verbalisht** (nëpërmjet një përshkrimi me fjalë)

2 **Numerikisht** (nëpërmjet një tabele vlerash)

3 **Vizualisht** (nëpërmjet një grafiku)

4 **Algjebrikisht** (nëpërmjet një formule të shtjellur)

Në qoftë se një funksion mund të paraqitet në të katër mënyrat, shpesh përdoret kalimi nga një forme paraqitjeje në një tjetër për të gjetur të reja për funksionin. Për disa funksione është më e lehtë t'i paraqesësh në një mënyrë se sa në një tjetër.

Shembull 1.3. *Gjeni bashkësinë e përkufizimit të secilit prej funksioneve*

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{dhe} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - x}.$$

Zgjidhje: a) Për faktin se rrënja katrore e një numri negativ nuk ekziston (si një numër real), bashkësia e përkufizimit të $f(x)$ konsiston në bashkësinë e të gjitha vlerave të x-it të tilla që $x+2 \geq 0$. Kjo është ekuivalente me $x \geq -2$, kështu që bashkësia e përkufizimit është gjysmë-segmenti $[-2, +\infty)$.

b) Meqënëse

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

dhe pjestimi me zeron nuk ka kuptim, ne shohim se $g(x)$ nuk është i përkufizuar përkufizuar uar kur $x = 0$ ose kur $x = 1$.

Prandaj, bashkësia e përkufizimit të $g(x)$-së është $\{x | x \neq 0, x \neq 1\}$ e cila gjithashtu mund të shkruhet ne trajtë intervalesh si $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. □

Grafiku i funksionit është një kurbë në planin xy. Por lind pyetja: Cilat kurba në planin xy përbëjnë grafik funksionesh? Kësaj pyetje i përgjigjet testi i mëposhtëm.

Testi i drejtëzës vertikale

Më poshtë japim një test gjeometrik që tregon në se një grafik i dhënë është ose jo funksion.

Një kurbë në planin xy përbën grafik të një funksioni atëherë dhe vetëm atëherë kur asnjë drejtëz vertikale nuk e pret kurbën më shumë se një herë.

Arsyetimi për vërtetësinë e testit të drejtëzes vertikale mund të shihet në Fig 1.5. Në qoftë se secila drejtëz vertikale $x = a$ do t'a priste kurbën vetëm në një pikë, pra vetëm një herë, atëherë vetëm një vlerë e funksionit është përcaktuar nga $f(a) = b$.

Por, në qoftë se një drejtëz $x = a$ e pret kurbën dy herë, në (a, b) dhe (a, c), atëherë kurba nuk përfaqson një funksion sepse funksioni s'mund t'i përgjigjet me dy vlera të ndryshme a-së. Në vijim japim përkufizimin e saktë matematik të funksionit.

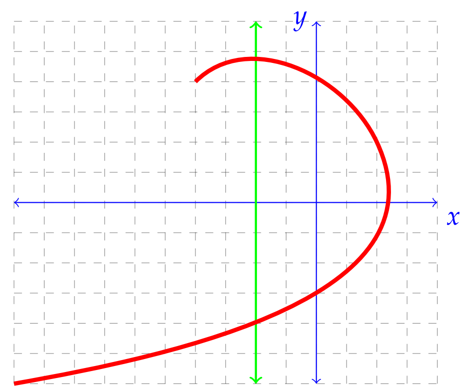


Figura 1.5: Testi i drejtezës vertikale.

Përkufizim 1.2. Jepen bashkësitë A, B. Rregulli $f : A \to B$ është **funksion** në qoftë se kenaq kushtet e méposhtme:
1) $\forall x \in A, \exists y \in B,$ *i tillë që* $y = f(x)$
2) $\forall x_1, x_2 \in A$, kemi që

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Vazhdojmë me një shembull tjetër.

Shembull 1.4. *Parabola $x = y^2 - 2$ nuk është funksion.*

Zgjidhje: Siç mund t'a shihni në Fig. 1.6, ka drejtëza vertikale që e presin parabolën dy herë. Pra, grafiku i parabolës nuk është grafiku i një funksioni.

Gjithsesi parabola përmban grafikët e dy funksioneve të x-it. Vërejmë se nga ekuacioni $x = y^2 - 2$ marrim se

$$y^2 = x + 2,$$

prej nga $y = \pm\sqrt{x+2}$. Pra, gjysma e sipërme dhe gjysma e poshtme e parabolës janë grafikët e funksioneve $f(x) = \sqrt{x+2}$ dhe $g(x) = -\sqrt{x+2}$.

Vërejmë që po qe se ndryshojmë vendet e x me y, atëherë ekuacioni

$$x = h(y) = y^2 - 2$$

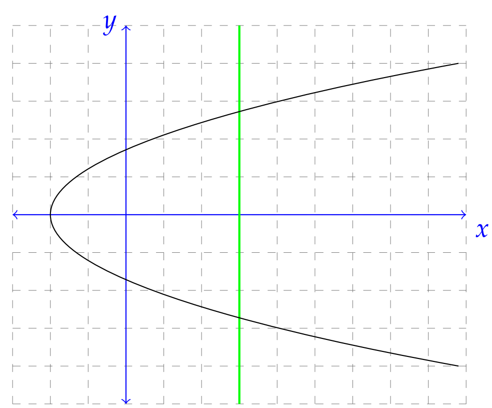


Figura 1.6: Parabola $x = y^2 - 2$

përkufizon x-in si funksion të y-it (pra me ndryshore të pavarur y dhe me ndryshore të varur x) dhe në këtë rast parabola paraqet grafikun e një funksioni. □

1.1.2 Injeksione, syrjeksione, dhe bijeksione

Në matematikë injeksionet, syrjeksionet, dhe bijeksionet janë klasa që dallohen nga njëra-tjetra nga mënyra se si argumenti dhe imazhi lidhen ose pasqyrohen tek njeri-tjetri.

Një funksion $f : A \to B$ është **injektiv** (**një-për-një**) në qoftë se

$$\forall x, y \in A, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

ose në mënyrë ekuivalente

$$\forall x, y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

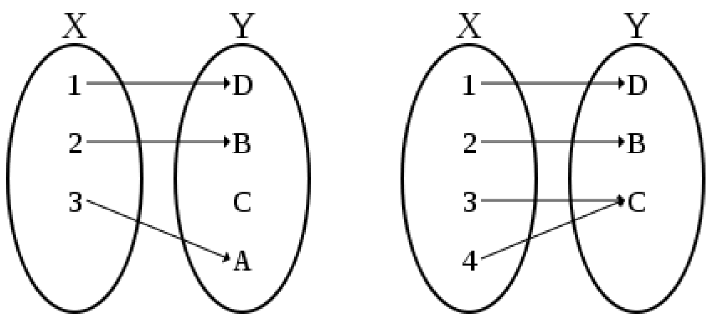
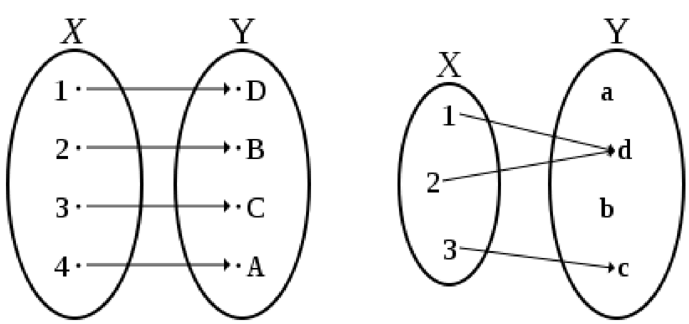


Figura 1.7: Nje funksion injektiv (në të majtë) dhe syrjektiv (në të djathtë)

Një funksion është **syrjektiv** në qoftë se tek çdo element i bashkësisë së vlerave pasqyrohet një argument nga bashkësia e përkufizimit. Në mënyrë matematike kjo shprehet si më poshtë:

$$\forall y \in B, \exists x \in A \text{ i tillë që } y = f(x).$$

Nje funksion është **bijektiv**atëherë dhe vetëm atëhere kur është edhe injektiv edhe syrjektiv. Kombinacionet kur një funksion është apo jo injektiv, syrjektiv ose bijektiv janë dhënë më poshtë.



,

Figura 1.8: Nje funksion bijektiv dhe një funksion që nuk është as injektiv dhe as syrjektiv.

1.1.3 Funksionet e pëkufizuara me pjesë, funksionet çift ose tek.

Shpesh ndodh që një funksion është i përkufizuar në mënyra të ndryshme në intervale të ndryshme. Këto funksione quhen **funksione të pëkufizuara me pjesë**.

Funksionet e përkufizuara me pjesë janë mjaft të rëndësishme në matematikë, por edhe në mjaft probleme reale të jetës. Ne do të shohim disa shembuj të këtyre funsioneve dhe do të studiojmë se si ndërtohen grafikët e tyre.

Funksioni në Fig. 1.9 është një funksion i përbërë nga dy funksione të ndryshme kuadratike në anë të ndryshme të x_0. Siç e shihni nga figura, pika $x = x_0$ i përket funksionit kuadratik në të djathtë. Siç e shihni grafiku i këtij funksioni ndërpritet kur $x = x_0$. Në leksionet në vijim ne do të shohim në detaje se çfarë do të thotë kjo nga ana teorike.

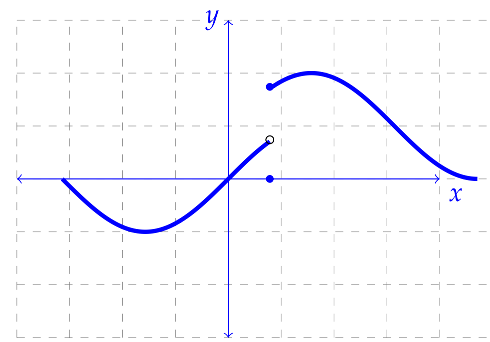


Figura 1.9: Nje funksion i përbërë nga dy funksione kuadratike dhe i përkufizuar me pjesë.

Le të shohim tani dy shembuj klasike funksionesh të përkufizuara me pjesë. Funksioni **dysheme** dhe funksioni **tavan** përkufizohen respektivisht si më poshtë

$$\lfloor x \rfloor = \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}, \quad \lceil x \rceil = \; min \; \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}.$$

Grafikët e tyre janë dhënë përkatësisht në Fig. 1.10.

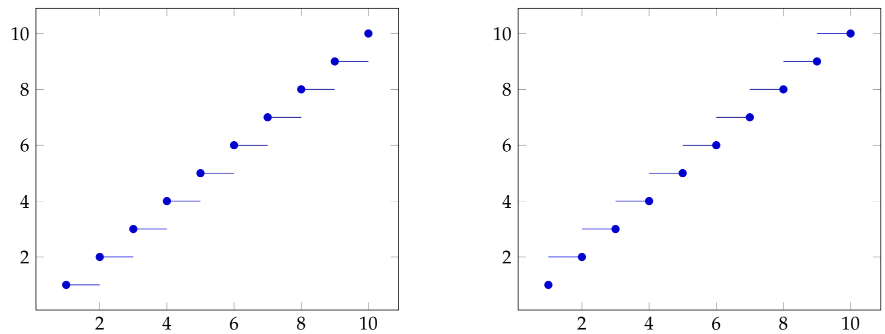


Figura 1.10: Grafikët e funksioneve dysheme dhe tavan

Shembulli që pason është funksioni i vlerës absolute. Rikujtojmë se **vlera absolute** e një numri a, e shënuar si $|a|$, është distanca nga pika a tek origjina në boshtin e numrave realë. Distancat janë gjithmonë pozitive, ose 0, kështu që kemi $|a| \geq 0$, për çdo numër a. Pra,

$$|a| = \begin{cases} a \text{ në qoftë se } a \geq 0 \\ -a \text{ në qoftë se } a < 0 \end{cases}$$

Mbani mend se në qoftë se a është negative, atëherë $-a$ është pozitive.

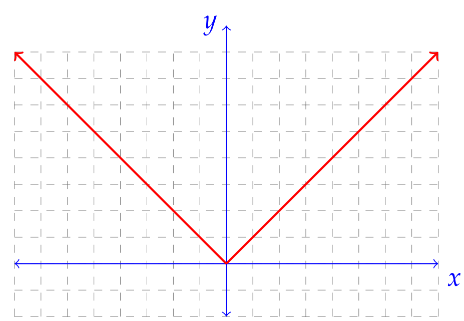


Figura 1.11: Grafiku i funksionit $g(x) = |x|$.

Grafiku i funksionit $f(x) = |x|$ përputhet me drejtëzën $y = x$ në të djathtë të boshtit të y-ve dhe përputhet me grafikun e drejtëzës $y = -x$ në të majtë të boshtit të y-ve, si ne Fig. 1.11.

Dy shembujt që pasojnë tregojnë se një funksion i përkufizuar me pjesë mund të krijohet nga çdo kombinim funksionesh. Nga ana matematike trajtimi i këtyre funksioneve është i njëjtë me ate të trajtimit të çdo pjese të veçantë.

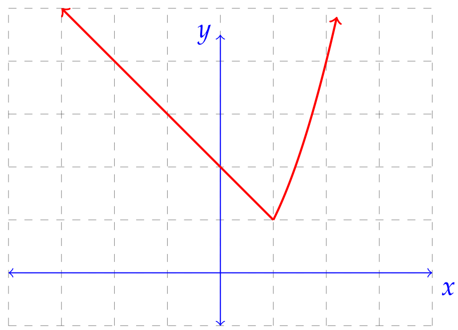


Figura 1.12: Ky është grafiku i funksionit të përkufizuar në Eq. 1.1.

Shembull 1.5. *Një funksion $f(x)$ është përkufizuar si më poshtë:*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \textit{për} \quad x \leq 1 \\ x^2 & \textit{për} \quad x > 1 \end{cases} \tag{1.1}$$

Llogarisni $f(0)$, $f(1)$, dhe $f(2)$ dhe skiconi grafikun e tij.

Zgjidhje: Në qoftë se ndodh që $x \leq 1$, atëherë vlera e $f(x)$ është $2 - x$ dhe në qoftë se $x > 1$, atëherë vlera e $f(x)$ është x^2. Meqënëse $0 \leq 1$, kemi $f(0) = 2 - 0 = 2$. Ndërsa $1 \leq 1$ jep $f(1) = 2 - 1 = 1$, dhe $2 > 1$ jep $f(2) = 2^2 = 4$.

Si do ta ndërtojmë grafikun e këtij funksioni? Vërejmë që në qoftë se $x \leq 1$, atëherë $f(x) = 2 - x$, kështu që pjesa e grafikut të $f(x)$ që ndodhet në të djathë të drejtëzës vertikale $x = 1$ përputhet me drejtëzën $y = 2 - x$, e cila ka koefiçent këndor -1 dhe pret boshtin e y-ve në $x = 2$. Në qoftë se $x > 1$, atëherë $f(x) = x^2$, kështu që pjesa e grafikut të $f(x)$ që ndodhet në të djathtë të drejtëzës $x = 1$ përputhet me grafikun e $y = x^2$, që është një parabolë. Kjo na jep mundësinë të skicojmë grafikun si në Fig. 1.12. □

Me poshtë po japim edhe një shembull të fundit të një funksioni të përkufizuar me pjesë. Grafikët e pjesëve për $x \leq -1$ dhe $-1 < x \leq 1$ janë elementare. Grafiku për pjesën $x > 1$ do të studiohet më në detaje në kapitujt e ardhshëm.

Shembull 1.6. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \textit{për } x \leq -1 \\ x^2, & \textit{për } -1 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}, & \textit{për } x > 1 \end{cases}$$

Zgjidhje: Grafiku pjesë-pjesë është si ne Fig. 1.13. Lexuesi të plotësojë detajet dhe të gjejë pikat ku grafiku ndërron formën. □

Më poshtë ne do të shohim dy klasa të veçanta funksionesh të cilat karakterizojnë disa veti të vecanta gjeometrike të funksioneve dhe pikërisht atë të simetrisë në lidhje me boshtin e y-ve ose me qendrën e sistemit koordinativ. Këta janë të ashtuquajturit funksione **çift** dhe **tek**.

Funksionet çift ose tek.

Në qoftë se $f(x)$ ka vetinë që për çdo numër x nga bashkësia e vetë e pëkufizimit

$$f(-x) = f(x),$$

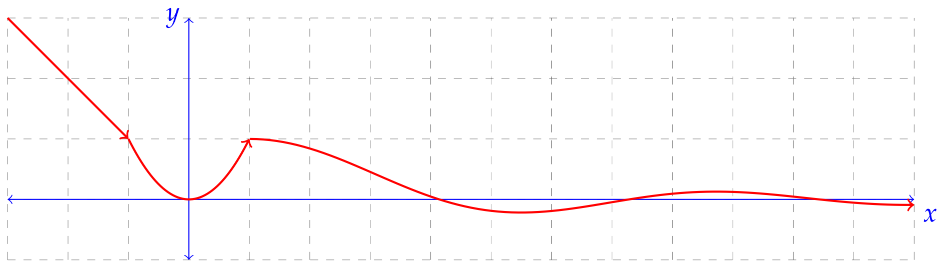


Figura 1.13: Grafiku i funksionit dhënë në Shemb. 1.6

atëherë quhet **funksion çift**. Për shembull, funksioni $f(x) = x^2$ është funksion çift sepse

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

Kuptimi gjeometrik i funksionit çift është se grafiku i tij është simetrik në lidhje me boshtin e y-ve. Kjo do të thotë se në qoftë se vendosim pikat e grafikut të $f(x)$ për $x \geq 0$ mund të përftojmë grafikun e plotë të $f(x)$ duke marrë simetrikun në lidhje me boshtin e y-ve.

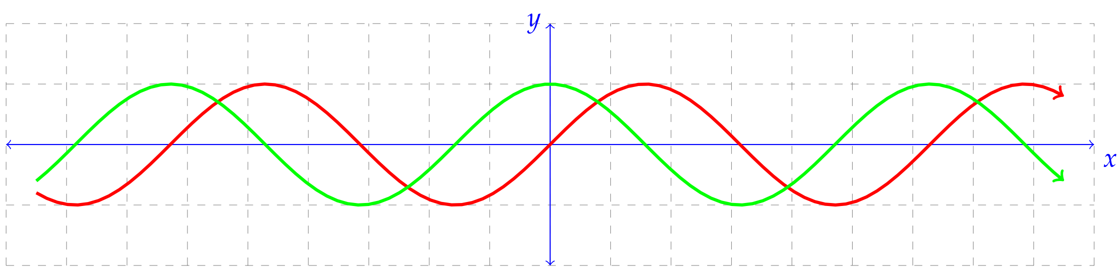


Figura 1.14: Funksionet $\cos x$ dhe $\sin x$ janë përkatesisht çift dhe tek.

Në qoftë se $f(x)$ plotëson barazimin $f(-x) = -f(x)$ për çdo numër x nga bashkësia e vet e përkufizimit, atëherë $f(x)$ quhet **funksion tek**. Për shembull, funksioni $f(x) = x^3$ është tek sepse:

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Grafiku i funksionit tek është simetrik në lidhje me origjinën e koordinatave. Dhe në qoftë se kemi grafikun e $f(x)$ për $x \geq 0$, ne mund të përftojmë grafikun e plotë duke e rrotulluar me $180°$ në lidhje me origjinën. Funksionet $\cos x$ dhe $\sin x$ janë shembuj klasikë të funksioneve çift dhe tek, respektivisht.

Shembull 1.7. *Përcaktoni se cili nga funksionet e mëposhtëm është çift, tek, apo as çift as tek;*

$$f(x) = x^5 + x, \quad f(x) = 1 - x^4, \quad h(x) = 2x - x^2.$$

Zgjidhje: Ne kemi që, $f(-x) = (-x)^5 + (-x) = -x^5 - x = -(x^5 + x) = -f(x)$. Pra, $f(x) = x^5 + x$ është tek. Për $g(x)$ kemi, $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$. Pra, ky funksion është çift. Për $h(x)$ kemi $h(x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$. Atëherë në këtë rast, arrijmë në përfundimin se ky funksion nuk është as çift as tek.

□

Ushtrime:

1. *Në qoftë se*
$$f(x) = 3x^2 - x + 2,$$
gjeni $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$, *dhe* $f(a+h)$.

Gjeni bashkësinë e përkufizimit të funksioneve

2. $f(x) = \frac{x}{3x-1}$

3. $f(x) = \frac{5x+4}{x^2+3x+2}$

4. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

5. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4-u}$

6. *Gjeni bashkësinë e përkufizimit, bashkësinë e vlerave dhe skiconi grafikun e funksionit* $h(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Gjeni bashkësinë e përkufizimit, bashkësinë e vlerave dhe skiconi grafikun e funksionit.

7. $f(x) = 5$

8. $F(x) = \frac{1}{2}(x+5)$

9. $f(t) = t^2 - 9t$

10. $H(t) = \frac{4-t^2}{6-t}$

11. $g(x) = \sqrt{x-6}$

12. $F(x) = |2x+3|$

13. $G(x) = \frac{3x+|x|}{x}$

14. $g(x) = \frac{|x|}{x^2}$

15.
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \textit{për} \quad x < 0 \\ 1-x & \textit{për} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

16.
$$f(x) = \begin{cases} 3 - \dfrac{1}{2}x & \textit{për} \quad x \leq 2 \\ 2 & \textit{për} \quad x > 2 \end{cases}$$

17.
$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \textit{për} \quad x \leq -1 \\ 2 & \textit{për} \quad x > -1 \end{cases}$$

18.
$$f(x) = \begin{cases} x+9 & \textit{për} \quad x < -3 \\ -2x & \textit{për} \quad |x| \leq 3 \\ -6 & \textit{për} \quad x > 3 \end{cases}$$

19. *Gjeni një formulë algjebrike për funksionin grafiku i të cilit është drejtëza që bashkon pikat* $(1, -3)$ *dhe* $(5, 7)$.

20. *Gjeni një formulë algjebrike për funksionin grafiku i të cilit është drejtëza që bashkon pikat* $(-5, 10)$ *dhe* $(7, -10)$.

21. *Gjeni një formulë algjebrike për funksionin grafiku i të cilit është gjysma e poshtme e parabolës* $x + (y-1)^2 = 0$.

22. *Gjeni një formulë algjebrike për funksionin grafiku i të cilit është gjysma e sipërme e rrethit* $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

23. *Gjeni një formulë si dhe bashkësinë e përkufizimit të funksionit të dhënë në vazhdim: Një drejtkëndësh ka perimetrin* $20m$. *Shprehni sipërfaqen e drejtkëndëshit si funksion i gjatësisë së njërës brinjë.*

24. *Gjeni një formulë si dhe bashkësinë e përkufizimit të funksionit të dhënë: Shprehni sipërfaqen e një trekëndëshi barabrinjës si funksion i gjatësisë së brinjës së tij.*

25. *Një kompani taksish merr dy dollarë për miljen e parë të udhëtimit dhe 20 qindarka për çdo një të dhjetën e miljes së mëpasshme. Shprehni koston e një udhëtimi C si funksion të distancës së përshkuar x për* $0 < x < 2$ *dhe ndërtoni grafikun e këtij funksioni.*

Përcaktoni në qoftë se funksioni është çift apo tek. Në qoftë se ju keni një makinë llogaritëse grafike përdoreni atë për ta gjetur përgjigjen tuaj vizualisht.

26. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

27. $f(x) = \frac{x}{x-1}$

28. $f(x) = \frac{x^2}{x^4-1}$

29. $f(x) = x|x|$

30. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

31. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^7$

1.2 Funksionet monotone

Në këtë pjesë ne përkufizojmë funksionet monotone, rritës dhe zbritës. Siç do të shohim ato janë një mjet i rëndësishëm në studimin e funksioneve.

Një funksion $f(x)$ quhet **monoton rritës** në një interval I në qoftë se $f(x_1) < f(x_2)$ sa herë që $x_1 < x_2$ në I.

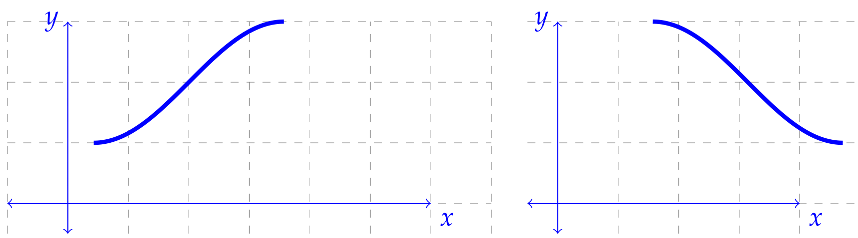


Figura 1.15: Një funksion monoton rritës dhe një funksion zbritës.

Për shembull, funksioni

$$f(x) = \lfloor x + 3 \rfloor$$

është funksion monoton rritës. Gjithashtu, dhe funksionet

$$f(x) = 2^x \text{ ose } f(x) = \ln x$$

janë funksione monotone rritës në intervalet $(-\infty, \infty)$ dhe $(0, \infty)$ respektivisht.

Një funksion $f(x)$ quhet **monoton zbritës** në një interval I në qoftë se $f(x_1) > f(x_2)$ sa herë që $x_1 < x_2 \in I$.

Për shembull, funksioni

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

është zbritës në intervalin $(0, \infty)$. Këto funksione quhen shpesh funksione **rigoroz monoton**.

Në përkufizimin e funksionit rritës është i rëndësishëm realizimi i mosbarazimit $f(x_1) < f(x_2)$ për çdo çift numrash x_1 dhe x_2 në I të tillë që $x_1 < x_2$.

Një funksion $f(x)$ quhet **monoton jozvogëlues** në një interval I në qoftë se $f(x_1) \leq f(x_2)$ sa herë që $x_1 < x_2$ në I. Një funksion $f(x)$ quhet **monoton jorritës** në një interval I në qoftë se $f(x_1) \geq f(x_2)$ sa herë që $x_1 < x_2$ në I. Këto funksione quhen gjithashtu funksione monotonë jorigorozë.

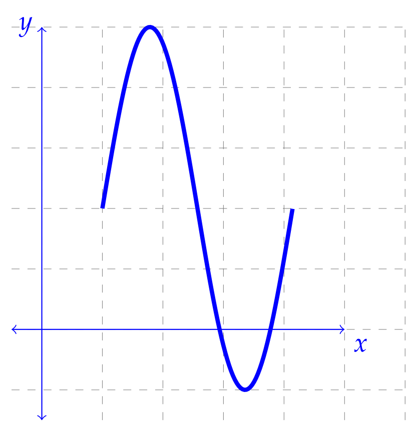


Figura 1.16: Një funksion jo-monoton.

Shembull 1.8. *Përcaktoni në qoftë se funksioni*

$$f(x) = |x| - \sin x, \text{ për } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

është monoton rritës apo zbritës.

Zgjidhje: Për çdo dy $x_1, x_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ të tilla që $x_1 < x_2$ kemi

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1 - \sin x_1 - x_2 + \sin x_2 = (x_1 - x_2) + (\sin x_2 - \sin x_1).$$

Përderisa $x_1 < x_2$ dhe $\sin x_2 < \sin x_1$ ($\sin x$ zvogëlohet kur x shkon nga 0 në $\frac{\pi}{2}$), atëherë $x_1 - x_2 < 0$ dhe $\sin x_2 - \sin x_1 < 0$. Pra,

$$f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

çfare do të thotë që $f(x)$ është rritës në $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. □

Natyrisht shumica e funksioneve nuk janë monotonë në gjithë bashkësinë e tyre të përkufizimit, siç shihet në Fig. 1.16. Në shumicën e rasteve ne ndajmë bashkësinë e përkufizimit të funksionit në intervale ku funksioni është monoton. Funksionet monotone janë me të thjeshta për t'u studiuar sepse ne mund të parashikojmë sjelljen e tyre në një interval të caktuar.

Siç do të shohim më vonë, ne do të kemi mënyra efektive, për një klasë të madhe funksionesh, ku të përcaktojmë se në çfarë intervalesh të bashkësisë së përkufizimit një funksion është monoton rritës ose zbritës.

Ushtrime:

1. *Përcaktoni intervalet ku funksioni*

$$f(x) = \sin x$$

është monoton rritës dhe monoton zbritës. Me çfarë quadrantesh korrespondojnë këto intervale në rrethin trigonometrik?

2. *Përcaktoni intervalet ku funksioni*

$$f(x) = \cos x$$

është monoton rritës dhe monoton zbritës. Me çfarë kuadrantesh korrespondojnë këto intervale në rrethin trigonometrik?

3. *Vërtetoni se për çfarë vlere të a-së funksioni $y = ax + b$ është monoton rritës, zbritës.*

Vërtetoni duke u nisur nga paraqitja grafike, në qoftë se funksionet e mëposhtëm janë monotone, si dhe intervalet e monotonisë së tyre.

4. $y = x^2$

5. $f(x) = \frac{1}{x}$

6. $g(x) = 3x^3$

7. $h(x) = 3^x$

8. $y = \sqrt{x}$

9. $y = c$, *ku c është një konstante reale e çfarëdoshme.*

10. $y = \tan x$

11. $y = 1 - x^2$

12. $y = \sqrt{3}x$

13. $y = \frac{1}{2}^x$

14. *Cila është vetia e përbashkët e funksioneve $f(x) = a(x + 2) + 3$? Ndërtoni grafikët e disa prej tyre.*

15. *Bashkësia e përkufizimit të një funksioni $y = f(x)$ është intervali (a, b), dhe c është një vlerë nga ky interval $a < c < b$. Vërtetoni në qoftë se funksioni i dhënë është monoton rritës në (a, b) në qoftë se ai është i tillë në (a, c), dhe (c, b).*

16. *Jepet $C(x)$ funksioni i ekonomise kombëtare të një vendi të caktuar. A mund të jete ky funksion monoton në intervalin $(-\infty, \infty)$. Argumentoni përgjigjen.*

17. *Jepet*

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

A është $f(x)$ monoton rritës, zbritës?

18. *Jepet*

$$f(x) = 2 + \cos x.$$

A është $f(x)$ monoton rritës, zbritës?

19. *Jepet*

$$f(x) = 2x + \tan x.$$

A është $f(x)$ monoton rritës, zbritës?

20. *Përcaktoni intervalet ku funksioni*

$$f(x) = 3x^2 + 2x + 3$$

është monoton rritës dhe monoton zbritës. Me çfarë kuadrantesh korrespondojnë këto intervale në rrethin trigonometrik?

21. *Përcaktoni intervalet ku funksioni*

$$f(x) = x^3 - 1$$

është monoton rritës dhe monoton zbritës. Me çfarë kuadrantesh korrespondojnë këto intervale në rrethin trigonometrik?

1.3 Disa klasa të rëndësishme funksionesh

Qëllimi i këtij kreu është të hedhim një vështrim të shpejtë mbi disa klasa të rëndësishme funksionesh të cilat hasen shpesh në aplikime. Disave prej tyre, si për shembull funksionet eksponenciale dhe logaritmike, ne do t'u kthehemi përsëri.

1.3.1 Funksionet Algjebrike

Një funksion $f(x)$ quhet **funksion algjebrik** në qoftë se vlera e $f(x)$ mund të shprehet si zgjidhje e një ekuacioni polinomial. Funksioni algjebrik mund të ndërtohet duke përdorur veprime algjebrike (si mbledhja, zbritja, shumëzimi pjestimi, rrënja) duke filluar nga polinomet. Çdo funksion racional është automatikisht algjebrik. Për shembull,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1},$$

ose

$$g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1},$$

janë funksione algjebrike. Më poshtë do të shohim disa klasa funksionesh algjebrike.

Modelet lineare

Kur themi se y është një **funksion linear** i x, nënkuptojmë që grafiku i funksionit është një drejtëz, kështu që mund të përdorim koefiçentin këndor dhe pikëprerjen me boshtin e y-ve për të dhënë ekuacionin e drejtëzës e kështu të shkruajmë një formulë për funksionin si:

$$y = f(x) = kx + b,$$

ku k është koefiçenti këndor dhe b është pikprerja me boshtin e y-ve.

Një tipar karakteristik i grafikut të funksionit linear është që ai rritet me një shkallë konstante. Tabela e vlerave na jep mundësinë të shikojmë se kur x rritet me $0,1$, vlera e funksionit rritet me $0,3$.

x	$f(x) = 3x - 2$
1.0	1.0
1.1	1.3
1.2	1.6
1.3	1.9
1.4	2.2
1.5	2.5

Tabela 1.1: Tabela e vlerave për $f(x) = 3x - 2$

Pra, $f(x)$ rritet tre herë më shpejt se x. Prandaj koefiçenti këndor që është 3 mund të interpretohet si raporti i ndryshimit të y në lidhje me x.

Shembull 1.9. *a) Ajri i thatë ngjitet lart, shpërndahet dhe ftohet. Në qoftë se temperatura e tokës është $20°C$ dhe temperatura në lartësinë $1km$ është $10°C$, shprehni temperaturën T (në°C) si një funksion i lartësisë h (në km), duke pranuar se modeli linear është ai i duhuri.*

b) Ndërtoni grafikun e funksionit të kërkesës a). Çfarë përfaqson koefiçenti këndor?

c) Cila është temperatura në lartësinë 2.5 km?

Zgjidhje: (a) Meqënëse pranuam se T është funksion linear i h ne mund të shkruajmë

$$T(h) = kh + b.$$

Na është dhënë $T = 20$ kur $h = 0$, kështu që:

$$T(0) = k \cdot 0 + b = b = 20.$$

Me fjalë të tjera, grafiku e pret boshtin e y-ve në $b = 20$. Gjithashtu kemi të dhënë se $T = 10$ kur $h = 1$, pra $10 = k \cdot 1 + 20$. Prej këtej del se $k = -10$ dhe formula e kërkuar për funksionin linear është,

$$T(h) = -10h + 20.$$

(b) Grafiku është skicuar në Figurën 1.17. Koefiçenti këndor është $-10°C/km$, dhe ky përfaqson raportin e ndryshimit të temperaturës në lidhje me lartësinë.

(c) Në lartësinë 2.5 km, temperatura është

$$T = (-10)2.5 + 20 = -5°C$$

Në qoftë se nuk do të kish ligj fizik apo parim për të na ndihmuar për të formuluar një model, ne do të ndërtonim një model empirik, që bazohet i tëri në të dhënat. Ne sajojmë një kurbë që bashkon të dhënat.

□

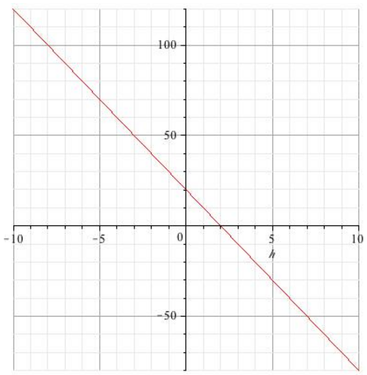


Figura 1.17: Grafiku i $T(h) = -10h + 20$

Polinomet

Një funksion P quhet **polinom** në qoftë se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a^x_1 1 + a_0$$

ku n është një numër i plotë jonegativ dhe numrat $a_0, a_1, ..., a_n$ janë konstante të quajtura koefiçentë të polinomit. Bashkësia e përkufizimit të çdo polinomi është $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Në qoftë se koefiçenti $a_n \neq 0$, atëherë **grada e polinomit** thuhet se është n.

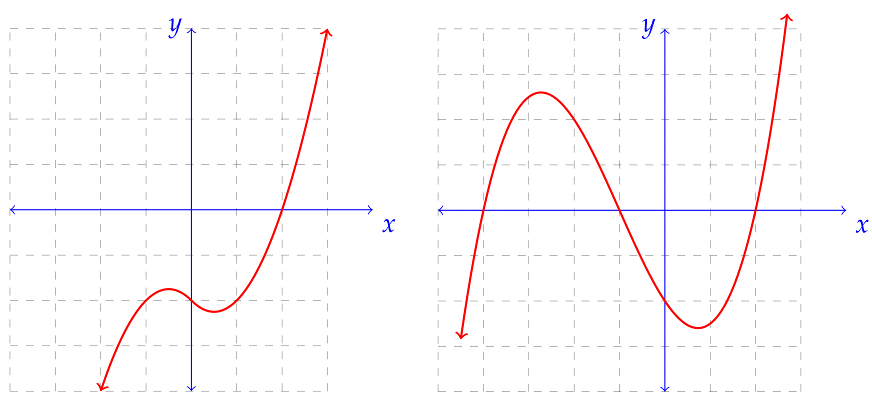


Figura 1.18: Grafikët e polinomeve të gradës 2, 3.

Në Fig. 1.18 po japim grafikët e polinomeve

$$f(x) = x^2 - x - 2, \qquad g(x) = \frac{1}{4}(x+4)(x+1)(x-2). \tag{1.2}$$

Për shembull, funksioni

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

është një polinom i gradës së gjashtë. Një polinom i gradës së parë është i trajtës $P(x) = kx + b$ që është një **funksion linear**. Një polinom i gradës së dytë është i trajtës $P(x) = ax^2 + bx + c$ dhe ai quhet **funksion kuadratik**. Grafiku i tij është gjithmonë një parabolë që merret nga zhvendosja e parabolës $y = ax^2$, siç do ta shohim në seksionin tjetër. Një polinom i gradës 3 është i trajtës

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

dhe quhet **funksion kubik**.

Polinomet shpesh përdoren për të modeluar fenomene që ndodhin në shkencat natyrore dhe shoqërore. Më vonë do të shpjegojmë pse ekonomistët shpesh përdorin një polinom për të paraqitur koston e prodhimit të x njësive të një produkti. Në shembullin në vazhdim ne përdorim një funksion kuadratik për të modeluar hedhjen e një topi nga një kullë.

Shembull 1.10. *Një top është hedhur nga një kullë vrojtimi nga një lartësi prej* $450m$ *drejt tokës dhe largësia nga toka është matur në intervale një-sekondëshe si në Tabelën 1.2. Gjeni një model të përshtatshëm për të lidhur të dhënat dhe për të parashikuar kohën në të cilën topi përplaset në tokë.*

Koha (në sek)	Lartësia (në metra)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

Tabela 1.2: Varësia e kohës me lartësinë.

Zgjidhje: Duke hedhur të dhënat në planin koordinativ si në Fig. 1.2, vërejmë se një model linear është i papërshtatshëm për përshkrimin e këtij fenomeni. Por duket se pikat e të dhënave vijnë sipas një parabole, kështu që ne përpiqemi ta përafrojmë me një model kuadratik. Duke përdorur një makinë llogaritëse grafike, ose një sistem kompjuterik algjebrik, marrim modelin e mëposhtëm kuadratik:

$$h = 449.36 + 0.96t - 4.90t^2 \tag{1.3}$$

Topi prek tokën kur $h = 0$, kështu që ne zgjidhim ekuacionin kuadratik

$$-4.90t^2 + 0.96t + 449.36 = 0$$

Formula kuadratike na jep

$$t = \frac{-0.96 \pm \sqrt{(0.96)^2 - 4(-4.90)(449.36)}}{2(-4.90)}$$

Rrënja pozitive është $t \approx 9.67$ kështu që ne parashikojmë se topi do ta prek tokën pas 9.7 sekondash.

□

Më poshtë ne do të përgjithsojmë konceptin e funksionit x^a për çdo $a \in \mathbb{R}$. Ky quhet funksioni fuqi dhe do të luajë një rol të rëndësishem në gjithë konceptet e Kalkulusit. Atëherë, polinomet mund të trajtohen thjesht si kombinime lineare të funksioneve fuqi.

Funksionet Racionalë

Një **funksion racional** është raport i dy polinomeve

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

ku $P(x)$ dhe $Q(x)$ janë polinome. Bashkësia e përkufizimit të tij konsiston në të gjitha vlerat e x të tilla që $Q(x) \neq 0$. Pra,

$$\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}.$$

Funksionet racionale janë mjaft të rëndësishme në matematikën teorike, vecanërisht në analizën komplekse, gjeometrinë algjebrike, etj. Një shembull i thjeshtë i një funksioni racional është funksioni $f(x) = \frac{1}{x}$, të cilin ne e pamë më lart.

Shembull 1.11. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$y = f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{x^3}$$

Ky është një funksion racional me bashkësi përkufizimi $\{x \,|\, x \neq 0\}$ dhe grafik në Fig. 3.2. Shihet qartë nga grafiku se në pikën $x = 0$ funksioni nuk është i përkufizuar. Kur të studiojmë limitet e funksionit ne do të shohim se si sillet ky funksion rreth pikës $x = 0$. Por nga grafiku duket se kur x i afrohet pikës $x = 0$ atëherë grafiku i afrohet drejtëzes $x = 0$. Kjo drejtëz $x = 0$ në këtë rast quhet **asimptotë vertikale** për funksionin.

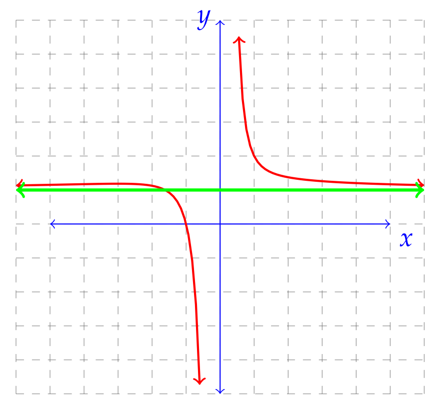


Figura 1.19: Grafiku i $f(x) = \frac{x^3+x^2-x+1}{x^3}$

Një tjetër dukuri e grafikut të këtij funksioni është se kur x rritet pambarimisht ose zvogelohet pambarimisht ky funksion në të dy rastet i afrohet numrit $y = 1$. Kjo drejtëz $y = 1$ në këtë rast quhet asimptotë horizontale për funksionin.

Nje tjetër funksion racional

$$f(x) = \frac{5x}{x^2 - 2x + 2}$$

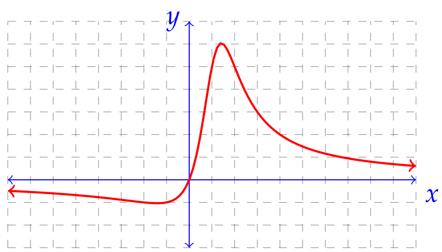


Figura 1.20: Grafiku i $f(x) = \frac{5x}{x^2-2x+2}$

ka grafik si në Fig. 1.20. Sic duket nga grafiku, ky funksion i afrohet $y = 0$ kur x rritet pambarimisht ose zvogëlohet pambarimisht. Drejtëza $y = 0$ në këtë rast quhet **asimptotë horizontale** për funksionin.

Ky funksion ka 2 asimptota vertikale në qoftë se emëruesi i ti ka rrënjë reale. Në fakt nga shkolla e mesme ne dimë se ekuacioni quadratik

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

nuk ka zgjidhje reale sepse dallori i til është $\Delta = -4 < 0$.

Funksioni $f(x) = x + \frac{1}{x}$ është paraqitur më poshtë. Nga grafiku i këtij funksioni shohim nje dukuri të vecantë; kur x rritet pambarimisht ose zvogëlohet pambarimisht atëherë grafiku i funksionit i afrohet drejtëzes $y = x$. Kjo drejtëz $y = x$ në këtë rast quhet **asimptotë e pjerrët** për funksionin.

Në Kap. 3 ne do të mësojmë se si të përcaktojmë asimptotat vertikale, horizontale, dhe ato të pjerrëta të funksioneve racionale. Në kurse më të avancuara të matematikes, si algjebra abstrakte, studiohen vetitë teorike të këtyre funksioneve dhe aplikimet e tyre në matematikën e lartë.

Vërejtje 1.1. *Në klasën e 3-të të shkollës fillore ju keni mësuar kalimin nga bashkësia e numrave të plotë $\mathbb{Z}$ tek bashkësia e thyesave $\mathbb{Q}$. Në algjebër, bashkësia $\mathbb{Q}$ quhet **fushë**. Eshtë i njëjti ndërtim kur kalojmë nga bashkësia e polinomeve me koefiçentë realë (e cila shënohet me $\mathbb{R}[x]$) tek bashkësia e funksioneve racionalë me koefiçentë reali (e cila shënohet me $\mathbb{R}(x)$). Për detaje mund të shihni* [21] *ose* [12].

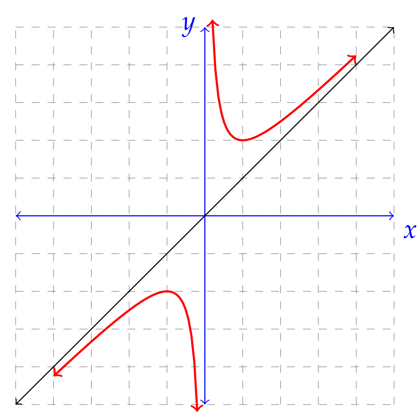


Figura 1.21: Grafiku i funksionit $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

1.3.2 Funksionet transhendentë

Këta janë funksionet vlerat e të cilëve nuk janë algjebrikë. Bashkësia e funksioneve transhendente përfshin funksionet trigonometrikë, të anasjelltët e funksioneve trigonometrike, funksionet eksponenciale, etj.

1.3.3 Funksionet Trigonometrike

Baza kryesore e trigonometrise drejtëkëndore është rrethi trigonometrik i cili studiohet në shkollën e mesme. Ne po paraqesim më poshtë një version të këtij rrethi i cili shpresojmë t'i kujtojë disa veti bazë studentit.

Funksionet trigonometrike bazë janë:

$$f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \tan x, \quad f(x) = \cot x,$$

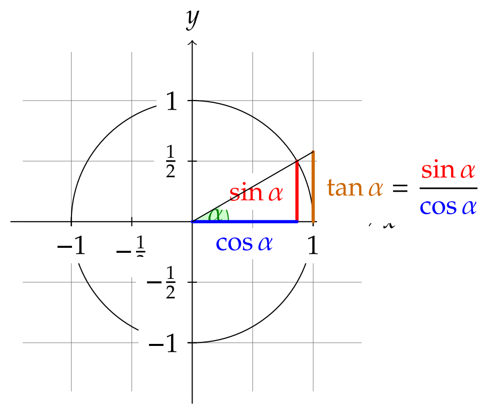
me të cilët jeni njohur edhe gjatë kursit të shkollës së mesme. Në rrethin njësi ato paraqiten si në figurën që vijon.

Në figurë këndi $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Funksioni $\sin\alpha$, i cili është gjatësia e vijes së kuqe, është $\sin\alpha = 1/2$. Nga Teorema e Pitagorës kemi $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Pra, gjatësia e vijës blu, e cila është funksioni $\cos\alpha$, duhet të jetë

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - 1/4} = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Kjo tregon se $\tan\alpha$, e cila është gjatesia e vijës portokalli, është

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



Kemi parasysh se në Kalkulus ndryshorja x merr vlera gjithmonë në radianë. Më poshtë po japim disa nga vlerat kryesore të këtyre funksioneve ($\sin x, \cos x$) në rrethin trigonometrik ku vlerat e këndit janë dhënë në radianë dhe në gradë.

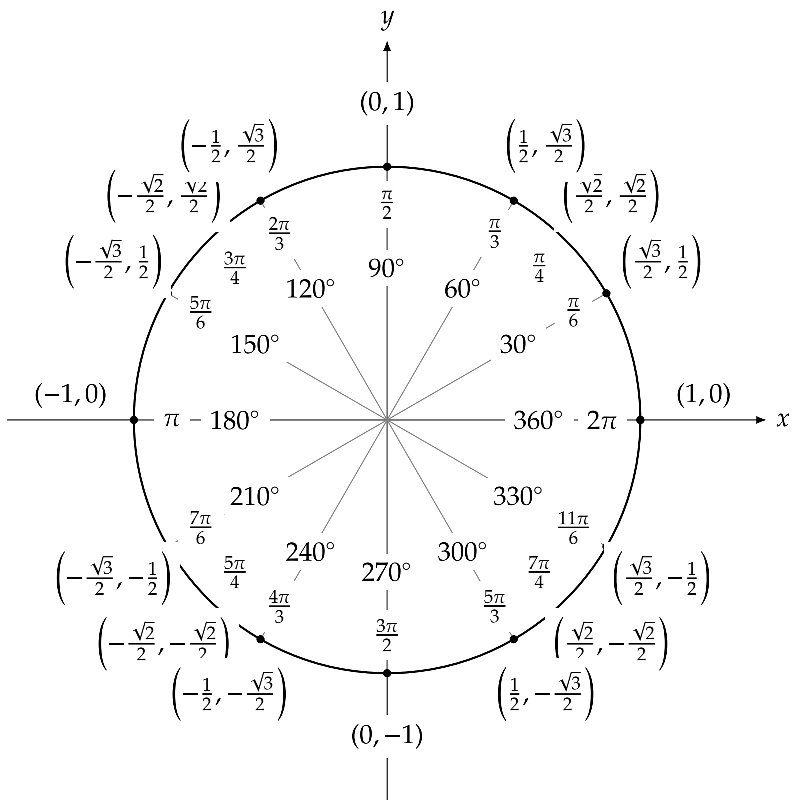


Figura 1.22: Rrethi trigonometrik në gradë dhe radianë

Nga trigonometria e shkollës së mesme ju duhet të mbani mend grafikët e funksioneve $\sin x$ dhe $\cos x$ të cilët ne i paraqesim në Fig.1.23. Kujtojmë se të dy funksionet $\sin x$ dhe $\cos x$ kanë si bashkësi përkufizimi bashkësinë e gjithë numrave realë dhe si bashkësi vlerash segmentin e mbyllur $[-1, 1]$. Kështu që për të gjitha vlerat e x kemi:

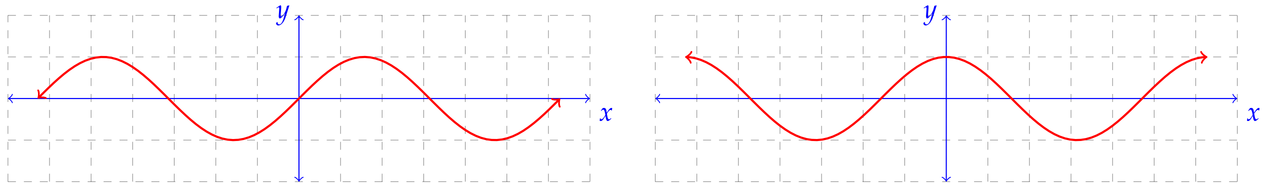


Figura 1.23: Grafikët e $\sin x$ dhe $\cos x$.

$$\sin x \in [-1, 1] \; dhe \; \cos x \in [-1, 1]$$

ose në termat e vlerës absolute:

$$|\sin x| \leq 1, \quad dhe \quad |\cos x| \leq 1$$

Gjithashtu $\sin x$ bëhet zero për të gjithë shumfishat e π, domethënë

$$\sin x = 0 \quad kur \quad x = n\pi,$$

ku n është numër i plotë.

Funksionet $\tan x, \cot x, \sec x$ dhe $\csc x$ përkufizohen si më poshtë:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} =, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

Grafikët e tyre tregohen në Fig. 1.24

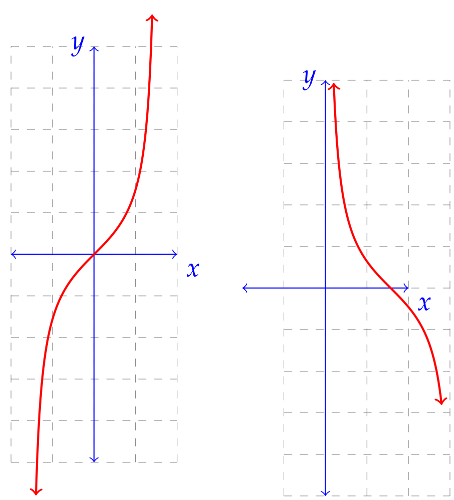


Figura 1.24: Grafikët e $\tan x$ dhe $\cot x$.

Për $\sec x$ dhe $\csc x$ kemi grafikët në Fig. 1.25.

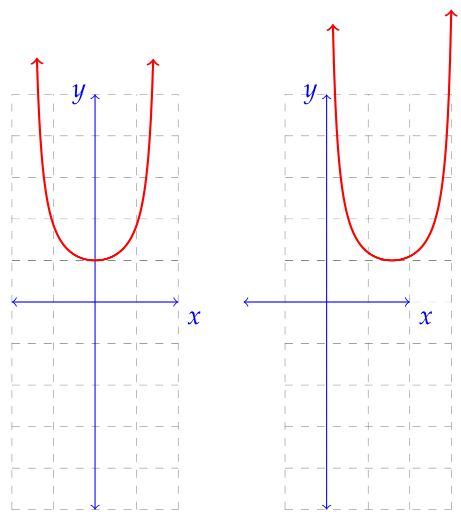


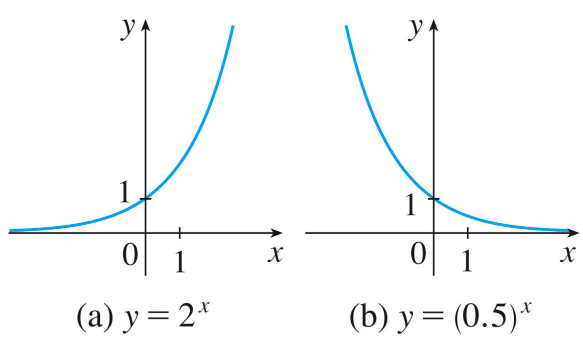
Figura 1.25: Grafikët e funksioneve $y = \sec x$ dhe $y = \csc x$.

Funksionet eksponenciale

Funksione eksponenciale janë funksionet e trajtës

$$f(x) = a^x,$$

ku baza a është një konstante pozitive. Bashkësia e përkufizimit është $(-\infty, \infty)$ dhe bashkësia e vlerave të funksionit $(0, \infty)$. Në figurë ne japim dy shembuj të funksioneve $f(x) = 2^x$ dhe $g(x) = (0.5)^x$.



Funksionet eksponenciale do të studiohen më hollësisht në vazhdim, dhe do të shohim se janë mjaft të përshtatshëm për të modeluar shumë fenomene natyrore, siç është rritja e popullatës (në qoftë se $a > 1$) dhe shkatërimin radioaktv (në qoftë se $a < 1$).

Funksioni eksponencial është gjithashtu i rëndësishëm në informatikë, kriptografi, teori algoritmesh, teori kodesh, ekonomi, biologji, akumulim interesi në financë, studimi i valëve në fizikë, etj.

Funksionet logaritmike

Funksionet logaritmike

$$f(x) = \log_a x,$$

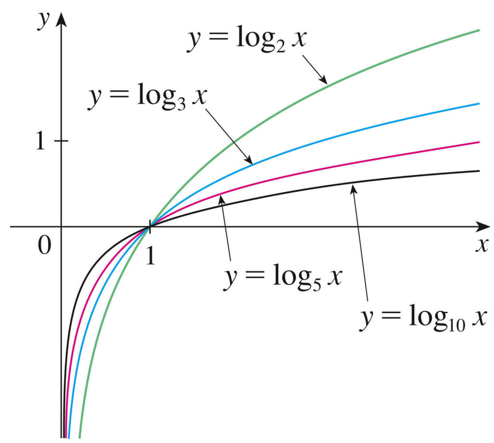
ku baza a është një konstante pozitive, janë funksionet e anasjellta të funksioneve eksponenciale. Figura karshi tregon grafikët e funksioneve logaritmike me baza të ndryshme. Në secilin rast bashkësia e përkufizimit është $(0, +\infty)$ dhe bashkësia e vlerave është $(-\infty, +\infty)$, dhe funksionet rriten ngadalë kur $x > 1$. Në figurë jepen disa shembuj të funksioneve logaritmikë.

Funksioni logaritmik jepet si një funksion i anasjelltë i funksionit eksponencial. Jepet

$$a^y = x,$$

atëherë

$$y = \log_a x.$$



Logaritmet kane aplikime në fusha të ndryshme të jetës si statistikë, kimi, biologji, fizikë, astronomi, informatikë, ekonomi, muzike, dhe inxhinjeri. Lexuesi duhet të jete familjar me vetitë elementare të funksionit eksponencial dhe logaritmik përpara se të vazhdojë më tej në kalkulus.

Shembull 1.12. *Klasifikoni funksionet sipas tipeve të funksioneve që pamë deri tani:*

i) $f(x) = 5^x$
ii) $g(x) = x^5$
iii) $h(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$
iv) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

Zgjidhje: Funksioni $f(x) = 5^x$ është funksion eksponencial me eksponent x. Kurse $g(x) = x^5$ është funksioni fuqi. Gjithashtu mund ta konsiderojmë si polinom të gradës 5. Funksioni $h(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ është funksion algjebrik, kurse $u(t) = 1 - t + 5t^4$ është një polinom i gradës 4.

□

Ushtrime:

Klasifikoni secilin nga funksionet e mëposhtëm në qoftë se është një funksion fuqi, funksion rrënjë, funksion algjebrik, funksion trigonometrik, funksion eksponencial ose logaritmik.

1. $f(x) = \sqrt[5]{x}$

2. $h(x) = x^9 + x^4$

3. $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

4. $R(x) = \frac{x^2+1}{x^3+x}$

5. $s(x) = \tan 2x$

6. $t(x) = \log_{10} x$

7. $y = \frac{x-6}{x+6}$

8. $y = x + \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$

9. $y = 10^x$

10. $y = x^{10}$

11. $y = 2t^6 + t^4 - \pi$

12. $y = \cos\theta + \sin\theta$

13. *a) Gjeni një ekuacion për familjen e funksioneve lineare me koefiçent këndor 2 dhe skiconi grafikët e disa prej funksioneve të kësaj familjeje.*

b) Gjeni një ekuacion për familjen e funksioneve linearë të tillë që $f(2) = 1$ dhe skiconi grafikët e disa prej tyre.

c) Cili funksion u përket të dyja familjeve?

14. *Çfarë kanë të përbashkët të gjithë funksionet lineare të familjes $f(x) = 1 + m(x + 3)$? Ndërtoni grafikët e disa prej tyre.*

15. *Çfarë kanë të përbashkët të gjithë funksionet lineare të familjes $f(x) = c - x$? Ndërtoni grafikët e disa prej tyre.*

16. *Gjeni një shprehje për funksionin kubik $f(x)$ në qoftë se $f(1) = 6$, $f(-1) = f(0) = f(2) = 0$*

17. *Studimet e tanishme kanë treguar se temperatura e sipërfaqes së tokës është rritur në mënyrë të vazhdueshme. Disa shkencëtarë e kanë modeluar temperaturën si një funksion linear $T = 0.02t + 8.50$, ku T është temperatura në °C dhe t përfaqson vitet qysh prej 1900.*

a) Çfarë përfaqson koefiçenti këndor i T?

b) Përdorni ekuacionin për të parashikuar temperaturën mesatare globale ne 2100.

18. *Në qoftë se doza e rekomanduar për një ilaç ndaj një të rrituri është D (në mg), atëherë për të përcaktuar dozën e duhur c për një fëmijë të moshës a, farmacistët përdorin ekuacionin $c = 0.0417D(a + 1)$. Supozojmë se doza për një të rritur është 200 mg.*

a) Gjeni koefiçentin këndor të grafikut të c. Çfarë përfaqson?

b) Cila do të ishte doza për një të porsalindur?

19. *Lidhja ndërmjet gradëve Fahrenheit(F) dhe Celcius (C) të temperaturës jepet nëpërmjet funksionit linear $F = \frac{9}{5}C + 32$.*

a) Ndërtoni grafikun e këtij funksioni.

b) Cili është koefiçenti këndor i grafikut dhe çfarë përfaqson ai? Cila është prerja me boshtet koordinative dhe çfarë përfaqson.

20. *Rinaldi le Vlorën nga ora 2 e mbasdites dhe udhëton me makinë me një shpejtësi konstante drejt veriut. Ai kalon Fierin, 35 kilometra në veri të Vlorës, në 2:50 mbasdite.*

a) Shprehni distancën e përshkuar në terma të kohës së kaluar.

b) Vizatoni grafikun e funksionit të mësipërm.

c) Cili është koefiçenti këndor i kësaj vije? Çfarë përfaqson ai?

1.4 Transformimet dhe kompozimi i funksioneve

Këtë leksion do ta nisim me funksionet bazë që pamë në paragrafin e mëparshëm dhe do të përftojmë funksione të reja, nëpërmjet zhvendosjes, shtrirjes, dhe simetrive të grafikëve të tyre. Ne gjithashtu do të tregojmë se si kombinohen çifte funksionesh nëpërmjet veprimeve aritmetike standarte dhe kompozimit.

1.4.1 Zhvendosjet vertikale dhe horizontale

Duke aplikuar transformime të veçanta ndaj grafikut të një funksioni të dhënë ne mund të përftojmë grafikë të disa funksioneve të tjera të ndërlidhura me funksionin e dhënë. Kjo do të na mundësojë skicimin e grafikëve të shumë funksioneve. Kjo do të na mundësojë gjithashtu që të shkruajmë ekuacionet e funksioneve të paraqitura në mënyrë vizive. Le të shohim fillimisht zhvendosjen. Në qoftë se c është një numër pozitiv, atëherë grafiku i $y = f(x) + c$ është njëlloj me grafikun e $y = f(x)$ të zhvendosur vertikalisht lart me c njësi (sepse secila ordinatë y rritet me të njëjtin numër c). Po ashtu, në qoftë se $g(x) = f(x - c)$, ku $c > 0$, atëherë vlera e $g(x)$ në x është e njëjtë me vlerën e $f(x)$ në $x - c$ (c njësi në të majtë të x). Prej nga grafiku i $y = f(x - c)$ është thjesht grafiku i $y = f(x)$ të zhvendosur c njësi në të djathtë.

Supozojmë se $c > 0$. Atëherë, për të përftuar grafikun e $y = f(x) \pm c$ dhe $y = f(x \pm c)$ ndjekim rregullat si me poshtë:

y = f(x)+ c:	zhvendosim grafikun e $y = f(x)$ në një distancë prej c njësish sipër
y = f(x) - c:	zhvendosim grafikun e $y = f(x)$ në një distancë prej c njësish poshtë
y = f(x - c):	zhvendosim grafikun e $y = f(x)$ në një distancë prej c njësish djathtas
y = f(x+ c);	zhvendosim grafikun e $y = f(x)$ në një distancë prej c njësish majtas

Shembull 1.13. *Jepet funksioni*

$$f(x) = x + \sin x$$

me grafik ne Fig. 1.26. Atëherë, grafiku i funksionit $f(x) + 2$ dhe $f(x + 2)$ janë dhënë në Fig. 1.26.

Pra, rregullat e mësipërme duken qartë në Fig. 1.26 ku grafiku i parë është zhvendosur 2 njësi në drejtimin pozitiv të boshtit të y-it dhe 2 njësi ne drejtimin negativ të boshtit të x-it.

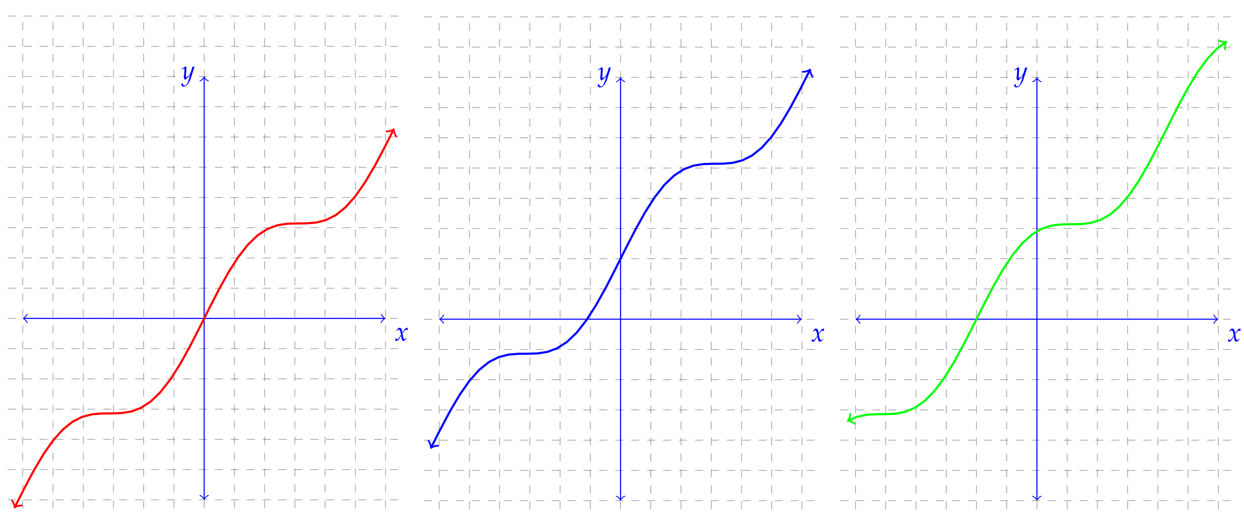


Figura 1.26: Grafikët e funksioneve $f(x)$, $f(x) + 2$ dhe $f(x + 2)$.

Tani le të shqyrtojmë transformimin e shtrirjes dhe të pasqyrimit. Në qoftë se $c > 1$, atëherë grafiku i $y = c \cdot f(x)$ është grafiku i $y = f(x)$ i shtrirë me një faktor c në drejtimin vertikal (sepse secila ordinatë y shumfishohet me të njëjtin numër c). Grafiku i $y = -f(x)$ është grafiku i $y = f(x)$ i përmbysur në lidhje me boshtin e x-ve, sepse pika (x, y) është zhvendosur te pika $(x, -y)$.

Zgjatimet vertikale, horizontale dhe pasqyrimet

Supozojmë se $c > 1$. Atëherë, për të përftuar grafikun e

$y = cf(x)$:	zgjatim (shtrijmë) grafikun e $y = f(x)$ vertikalisht me një faktor c
$y = \frac{1}{c} f(x)$:	ngushtojmë grafikun e $y = f(x)$ vertikalisht me një faktor c
$y = f(cx)$:	ngushtojmë grafikun e $y = f(x)$ horizontalisht me një faktor c
$y = f(x/c)$:	zgjatim grafikun e $y = f(x)$ horizontalisht me një faktor c
$y = -f(x)$:	e pasqyrojmë grafikun e $y = f(x)$ në lidhje me boshtin e x-ve
$y = f(-x)$:	e pasqyrojmë grafikun e $y = f(x)$ në lidhje me boshtin e y-ve

Për shembull që të gjejmë grafikun e $y = 2\cos x$ ne shumëzojmë ordinatën e secilës pikë të grafikut të $y = \cos x$ me 2. Kjo do të thotë që grafiku i $y = \cos x$ do të zgjatet vertikalisht me një faktor 2.

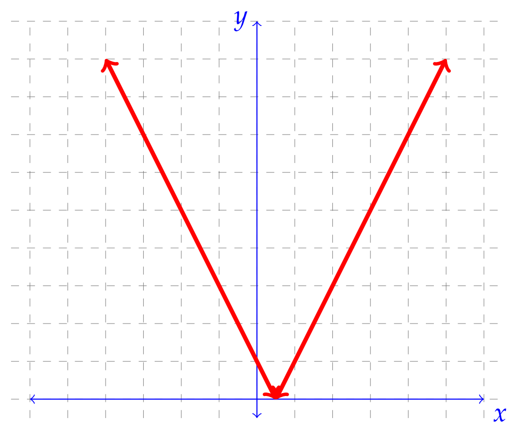


Figura 1.27: Grafiku i funksionit $f(x) = |2x - 1|$

Shembull 1.14. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$y = |2x - 1|.$$

Zgjidhje: Ne fillimisht ndërtojmë grafikun $y = |2x|$ dhe pastaj e zhvendosim 1 njësi djathtas si në Fig. 1.27.

□

Shembull 1.15. *Duke u nisur nga grafiku $y = \sqrt{x}$, përdorni transformimet për të përftuar grafikët e $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, si dhe $y = \sqrt{-x}$.*

Zgjidhje: Grafikët e $y = \sqrt{x} - 2$ që merret nga zhvendosja e grafikut të $y = \sqrt{x}$ me 2 njësi poshtë, $y = \sqrt{x-2}$ që merret nga zhvendosja 2 njësi djathtas e $y = \sqrt{x}$. Ndërsa $y = -\sqrt{x}$ merret nga pasqyrimi i $y = \sqrt{x}$ sipas boshtit të x-ve, $y = 2\sqrt{x}$ që merret nga zgjatja vertikale me faktor 2, dhe $y = \sqrt{-x}$ nga pasqyrimi në lidhje me boshtin e y-ve.

□

Shembull 1.16. *Ndërtoni grafikun e funksionit $f(x) = x^2 + 6x + 10$.*

Zgjidhje: Duke plotësuar katrorin e binomit, shkruajmë ekuacionin e grafikut si

$$y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

Kjo do të thotë se ne marrim grafikun e dëshiruar duke u nisur nga grafiku i parabolës $y = x^2$ me zhvendosje 3 njësi majtas dhe 1 njësi lart.

□

Shembull 1.17. *Ndërtoni grafikët e funksioneve $y = \sin 2x$ dhe $y = 1 - \sin x$*

Zgjidhje: (a) E përftojmë grafikun e $y = \sin 2x$ prej grafikut të $y = \sin x$ nëpërmjet ngushtimit horizontal me faktor 2. Prandaj kur perioda e $y = \sin x$ është 2π perioda e $y = \sin 2x$ është $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

(b) Për të përftuar grafikun e $y = 1 - \sin x$ ne gjithashtu nisemi nga grafiku i $y = \sin x$. Fillimisht pasqyrojmë në lidhje me boshtin e x-ve për të përftuar grafikun e $y = -\sin x$ e më pas e zhvendosim 1 njësi sipër.

□

1.4.2 Kompozimi i funksioneve

Dy funksione mund të kombinohen për të përftuar funksione të reja: $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$, në mënyrë të ngjashme si shuma, diferenca, prodhimi, pjestimi i dy numrave realë.

Në qoftë se përkufizojmë shumën $f + g$ si më poshtë:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

atëherë ana e djathtë e ekuacionit ka kuptim në qoftë se edhe $f(x)$ edhe $g(x)$ janë të përkufizuara, domethënë kur x i përket bashkësisë së përkufizimit të $f(x)$-së gjithashtu i përket edhe asaj të $g(x)$-së. Pra, në qoftë se bashkësia e përkufizimit të $f(x)$ është A dhe e $g(x)$ është B, atëherë bashkësia e përkufizimit të $(f + g)(x)$ është prerja e këtyre bashkësive A dhe B, pra $A \cap B$.

Vërejmë se shenja + në krahun e majtë të ekuacionit nënkupton mbledhjen e funksioneve, por shenja + në krahun e djathtë të ekuacionit ka vend për mbledhjen e numrave $f(x)$ dhe $g(x)$.

Në mënyrë të ngjashme përkufizojmë diferencën e dy funksioneve $f - g$ dhe prodhimin dhe bashkësitë e tyre të përkufizimit janë gjithashtu prerjet e bashkësive A dhe B $A \cap B$. Por në përkufizimin e funksionit raport $\frac{f}{g}$ ne duhet të kujtojmë se pjestimi me 0 s'ka kuptim, pra $\frac{f}{g}$ është i përkufizuar vetëm për $g(x) \neq 0$.

Le të jenë $f(x)$ dhe $g(x)$ dy funksione me bashkësi përkufizimi përkatësisht A dhe B. Atëherë, funksionet $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$ përkufizohen si më poshtë:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,	bashkësia e përkufizimit është prerja e A me B, $A \cap B$.
$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,	bashkësia e përkufizimit është prerja e A me B, $A \cap B$.
$(fg)(x) = f(x)g(x)$,	bashkësia e përkufizimit është prerja e A me B, $A \cap B$.
$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = f(x)/g(x)$,	bashkësia e përkufizimit është: të gjitha x nga prerja e A me B të tilla që $g(x) \neq 0$. Pra, $\{x \in A \cap B \,\vert\, g(x) \neq 0\}$

Shembull 1.18. *Në qoftë se $f(x) = \sqrt{x}$ dhe $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, përkufizoni funksionet $f + g$, $f - g$, fg, $\frac{f}{g}$.*

Zgjidhje: Bashkësia e përkufizimit të $f(x) = \sqrt{x}$ është $[0, +\infty)$. Bashkësia e përkufizimit të funksionit $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ konsiston në të gjithë numrat x të tillë që $4 - x^2 \geq 0$, pra $x^2 \leq 4$. Duke marrë rrënjën katrore të të dy anëve përftojmë mosbarazimin $|x| \leq 2$, ose $x \in [-2, 2]$. Pra, bashkësia e përkufizimit është $[-2, 2]$. Prerja e këtyre bashkësive të përkufizimit të $f(x)$ dhe $g(x)$ është

$$[0, +\infty) \cap [-2, 2] = [0, 2].$$

Prej nga mënyra se si u përkufizuan funksionet kemi:

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= \sqrt{x} + \sqrt{4-x^2}, \ \textit{me bashkësi përkufizimi } [0,2] \\
(f-g)(x) &= \sqrt{x} - \sqrt{4-x^2}, \ \textit{me bashkësi përkufizimi } [0,2] \\
(fg)(x) &= \sqrt{x}\cdot\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4x-x^3}, \ \textit{me bashkësi përkufizimi } [0,2] \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}, \ \textit{me bashkësi përkufizimi } [0,2)
\end{aligned}
$$

□

Jepen funksionet

$$f : X \to Y \ dhe \ g : Y \to Z$$

Funksioni kompozim, i cili shënohet me $g \circ f$, është funksioni

$$g \circ f := X \to Z, \ \textit{i tillë që}, \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Situata e mësipërme mund të paraqitet më mirë me diagramën e mëposhtme.

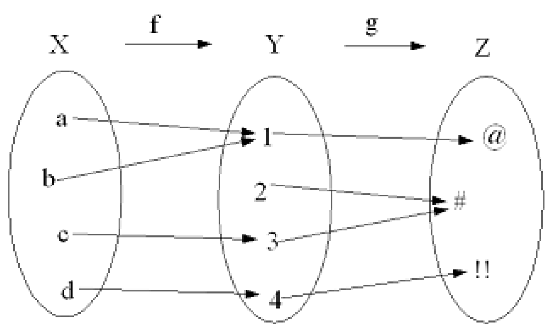


Figura 1.28: Kompozimi i funksioneve

Kjo proçedurë quhet kompozim sepse funksioni i ri është i përbërë nga dy funksionet e dhëna $f(x)$ dhe $g(x)$. Në përgjithësi për çdo dy funksione të dhëna $f(x)$ dhe $g(x)$ ne nisemi nga një vlerë x nga bashkësia e përkufizimit të $g(x)$ dhe gjejmë imazhin e saj $g(x)$. Në qoftë se ky numër është nga bashkësia e përkufizimit të $f(x)$, atëherë ne mund të llogarisim vlerën e $f(g(x))$. Rezultati i përket një funksioni të ri $h(x) = f(g(x))$ që merret nga zëvendësimi i $g(x)$ të $f(x)$. Ai quhet kompozim i $f(x)$ dhe $g(x)$ dhe shënohet $f \circ g$ (lexohet $f(x)$ rreth $g(x)$).

Për dy funksione të dhëna $f(x)$ dhe $g(x)$ funksion kompozim i $f(x)$ dhe $g(x)$, $f \circ g$ do të quhet funksioni i përkufizuar nga barazimi:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Bashkësia e përkufizimit të funksionit $f \circ g$ është bashkësia e të gjithë x-ve nga bashkësia e përkufizimit të $g(x)$-së të tilla që $g(x)$ t'i përkasë bashkësisë së përkufizimit të $f(x)$ -së. Me fjalë të tjera, $(f \circ g)(x)$ është e përkufizuar kur të dyja $g(x)$ dhe $(f(g(x))$ janë të përkufizuar.

Për shembull, supozojmë se $y = f(u) = \sqrt{u}$ dhe $u = g(x) = x^2 + 1$. Meqënëse y është funksion i u-së dhe u funksion i x-it, kjo sjell që y është funksion i x-it. Ne bëjmë këtë zëvendësim:

$$y = f(u) = f(g(x)) = f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1}$$

Shembull 1.19. *Në qoftë se $f(x) = x^2$ dhe $g(x) = x - 3$, gjeni funksionet kompozim $f \circ g$ dhe $g \circ f$.*

Zgjidhje: Atëherë, kemi

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x-3) = (x-3)^2 \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 3
\end{aligned}
$$

□

Shembull 1.20. *Në qoftë se $f(x) = \sqrt{x}$ dhe $g(x) = \sqrt{2-x}$, gjeni secilin nga funksionet e mëposhtëm dhe bashkësitë e tyre të përkufizimit i) $f \circ g$, ii) $g \circ f$, iii) $f \circ f$, iv) $g \circ g$.*

Zgjidhje: i) Kemi

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{2-x}) = \sqrt[4]{2-x}.$$

Bashkësia e përkufizimit të $f \circ g$ është $x \leq 2$ ose $(-\infty, 2]$.

ii)Për $(g \circ f)(x)$ kemi

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{2 - \sqrt{x}}.$$

Bashkësia e përkufizimit është

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{x} \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Pra, bashkësia e përkufizimit të $g \circ f$ është segmenti $[0, 4]$. Për dy funksionet e fundit kemi

$$f \circ f(x) = x^{\frac{1}{4}}, \text{ dhe } g \circ g(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$$

Bashkësia e përkufizimit të $(f \circ f)$ është $[0, +\infty)$, kurse për $g \circ g$ kemi

$$\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{2-x} \geq 0 \end{cases}$$

Bashkësia e përkufizimit të $g \circ g$ është segmenti $[-2, 2]$.

□

Është i mundur të bëhet edhe kompozimi i më shumë se dy funksioneve. Për shembull, funksioni kompozim $f \circ g \circ h$ gjendet duke aplikuar fillimisht h pastaj $g(x)$ dhe $f(x)$ të fundit si më poshtë:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

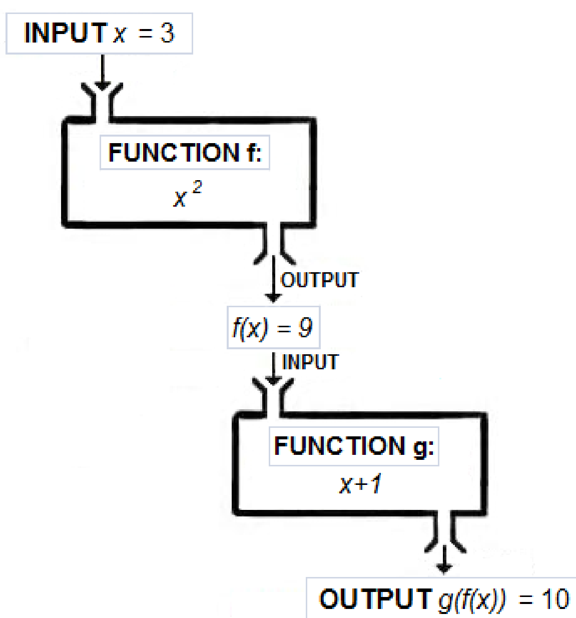


Figura 1.29: Diagrama e kompozimit të funksioneve

Shembull 1.21. *Gjeni $f \circ g \circ h$ në qoftë se $f(x) = x/(x+1)$, $g(x) = x^{10}$, dhe $h(x) = x+3$.*

Zgjidhje:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+3)) = f((x+3)^{10}) = \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1}$$

□

Më tej do të përdorim kompozimin e funksioneve për të përftuar funksione të komplikuara prej funksioneve të thjeshta. Por në Kalkulus shpesh përdoret zbërthimi i funksioneve të komplikuara në funksione më të thjeshta, si në shembullin në vazhdim.

Shembull 1.22. *Për funksionin e dhënë*

$$F(x) = \cos^2(x+9),$$

gjeni funksionet $f(x)$, $g(x)$, h, të tilla që $F = f \circ g \circ h$.

Zgjidhje: Meqënëse $F(x) = \cos^2(x+9)$, kjo na tregon se: fillimisht i shtojmë x -it 9, pastaj marrim kosinusin e rezultatit dhe në fund e ngremë në katror. Kështu që

$$h(x) = x+9, \quad g(x) = \cos x, \quad f(x) = x^2$$

Prej nga

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x+9)) = f(\cos(x+9)) = (\cos(x+9))^2 = F(x)$$

□

Ushtrime:

1. *Supozojmë se është dhënë grafiku i funksionit $f(x)$. Shkruani ekuacionet për grafikët që përftohen nga grafiku i $f(x)$ si më poshtë:*

a) Duke e zhvendosur grafikun e $f(x)$ tre njësi lart.

b) Duke e zhvendosur grafikun e $f(x)$ tre njësi poshtë.

c) Duke e zhvendosur grafikun e $f(x)$ tre njësi nga e djathta.

d) Duke e zhvendosur grafikun e $f(x)$ tre njësi nga e majta.

e) Duke e pasqyruar rreth boshtit të x-ve.

f) Duke e pasqyruar rreth boshtit të y-ve.

g) Duke e zgjatur vertikalisht me faktor 3.

h) Duke e shtypur vertikalisht me faktor 3.

2. *Shpjegoni se si përftohet secili nga grafikët prej grafikut të funksionit $y = f(x)$.*

a) $y = 5f(x)$

b) $y = f(x-5)$

c) $y = -f(x)$

d) $y = -5f(x)$

e) $y = f(5x)$

f) $y = 5f(x) - 3$

3. **a)** *Si është grafiku i $y = 2\sin x$ në lidhje me grafikun e $y = \sin x$? Ndërtoni grafikun e $y = 2\sin x$.*

b) *Si është grafiku i $y = 1 + \sqrt{x}$ në lidhje me grafikun e $y = \sqrt{x}$? Përdorni përgjigjen për të skicuar grafikun e $y = 1 + \sqrt{x}$.*

4. **a)** *Si është grafiku i $y = f(|x|)$ ne lidhje me grafikun e $f(x)$?*

b) *Ndërtoni grafikun e $y = \sin|x|$.*

c) *Ndërtoni grafikun e $y = \sqrt{|x|}$.*

5. *Gjeni $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ dhe përcaktoni bashkësinë e përkufizimit të tyre.*

a) $f(x) = x^3 + 2x^2$, $g(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = \sqrt{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x^2-1}$

Gjeni funksionet (a) $f \circ g$, (b) $g \circ f$, (c) $f \circ f$, dhe $g \circ g$ dhe bashkësitë e tyre të përkufizimit.

6. $f(x) = x^2 - 1 \quad g(x) = 2x + 1$

7. $f(x) = x - 2 \quad g(x) = x^2 + 3x + 4$

8. $f(x) = 1 - 3x \quad g(x) = \cos x$

9. $f(x) = \sqrt{x} \quad g(x) = \sqrt[3]{1-x}$

10. $f(x) = x + \frac{1}{x} \quad g(x) = \frac{x+1}{x+2}$

11. $f(x) = \frac{x}{1+x} \quad g(x) = \sin 2x$

Gjeni $f \circ g \circ h$.

12. $f(x) = x + 1 \quad g(x) = 2x \quad h(x) = x - 1$

13. $f(x) = 2x - 1 \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = 1 - x$

14. $f(x) = \sqrt{x-3} \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = x^2 + 2$

15. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \frac{x}{x-1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

Shprehni funksionin në trajtën $f \circ g$.

16. $F(x) = (x^2 + 1)^{10}$

17. $F(x) = \sin(\sqrt{x})$

18. $F(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

19. $G(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}$

20. $u(t) = \sqrt{\cos t}$

21. $u(t) = \frac{\tan t}{1+\tan t}$

22. *Shprehni funksionin në trajtën $f \circ g \circ h$.*

$$H(x) = 1 - 3^{x^2}$$
$$H(x) = \sqrt[8]{2 + |x|}$$
$$H(x) = \sec^4(\sqrt{x})$$

23. *Përdorni tabelën për të njehsuar secilën shprehje*

$$f(g(1)), g(f(1)), f(f(1)), g(g(1)), f \circ g(6), g \circ f(3).$$

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	1	4	2	2	5
$g(x)$	6	3	2	1	2	3

24. *Funksioni H është përkufizuar nga*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{në qoftë se} \quad t < 0 \\ 1 & \text{në qoftë se} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Ai përdoret në studimin e qarqeve elektrike për të prezantuar rrjedhjen e rrymës elektrike, ose tensionin kur çelsi ndizet në çast.

a) *Ndërtoni grafikun e këtij funksioni.*

b) *Ndërtoni grafikun e tensionit $V(t)$ në qark në qoftë se çelsi ndizet në kohën $t = 0$ dhe 120 volt aplikohen në çast në qark. Shkruani një formulë për $V(t)$ në varësi të $H(t)$.*

c) *Ndërtoni grafikun e tensionit $V(t)$ në qark kur çelsi ndizet në $t = 5$ sekonda dhe në çast aplikohet një tension prej 240 voltësh.*

25. *Le të jenë $f(x)$ dhe $g(x)$ funksione lineare me ekuacione $f(x) = m_1x + b_1$ dhe $g(x) = m_2x + b_2$. A është $f \circ g$ linear? Në qoftë se po cili do të ishte koefiçenti këndor i grafikut të tij?*

26. a) *Në qoftë se $g(x) = 2x + 1$ dhe $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, gjeni një funksion $f(x)$ të tillë që $f \circ g = h$*

b) *Në qoftë se $f(x) = 3x + 5$ dhe $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$, gjeni një funksion $g(x)$ të tillë që $f \circ g = h$*

27. *Në qoftë se $f(x) = x + 4$ dhe $h(x) = 4x - 1$, gjeni një funksion $g(x)$ të tillë që $g \circ f = h$*

28. a) *Supozojmë që $f(x)$ dhe $g(x)$ janë funksione çift. Çfarë mund të thoni për $f + g$ dhe fg?*

b) *Po në qoftë se këto do të ishin funksione tek ç'mund të thoni për $f + g$ dhe fg?*

29. *Supozojmë se $f(x)$ është çift dhe $g(x)$ është tek. Çfarë mund të thoni për fg?*

30. *Supozojmë se $g(x)$ është një funksion çift dhe le të jetë $h = f \circ g$. A është h gjithmonë çift?*

31. *Supozojmë se $g(x)$ është një funksion tek dhe le të jetë $h = f \circ g$. A është h gjithmonë një funksion tek? Çdo të ndodhte po qe se $f(x)$ është tek? po në qoftë se $f(x)$ është çift?*

32. *Përcaktoni në se funksioni $f(x) = x^2$ është funksion rritës ose zbritës në fushën e përkufizimit. Vërtetoni përgjigjen tuaj*

33. *Për ç'vlera të a, b, c, d është funksioni i mëposhtëm rritës, zbritës:*
i) $f(x) = ax + b$
ii) $f(x) = ax^2 + bx + c$
iii) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

1.5 Funksionet e anasjellta

Më poshtë kujtojmë edhe njëherë përkufizimin e funksionit injektiv.

Përkufizim 1.3. Një funksion $f : X \to Y$ quhet funksion **një për një** ose **injektiv** në qoftë se nuk merr të njëjtën vlerë dy herë, që do të thotë se

$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) \neq f(x_2) \text{ sa herë që } x_1 \neq x_2.$$

Në qoftë se një drejtëz horizontale pret grafikun e $f(x)$ më shumë se në një pikë, atëherë ekzistojne numrat x_1 dhe x_2 të tillë që $f(x_1) = f(x_2)$. Kjo do të thotë se $f(x)$ nuk është funksion një për një. Prej nga ne kemi metodën e mëposhtme gjeometrike për të përcaktuar se kur një funksion është një për një.

1.5.1 Testi i drejtëzës horizontale

Lexuesi të vërtetojë Lemën e mëposhtme e cila është elementare dhe njihet në literaturë si **testi i drejtëzës horizontale**.

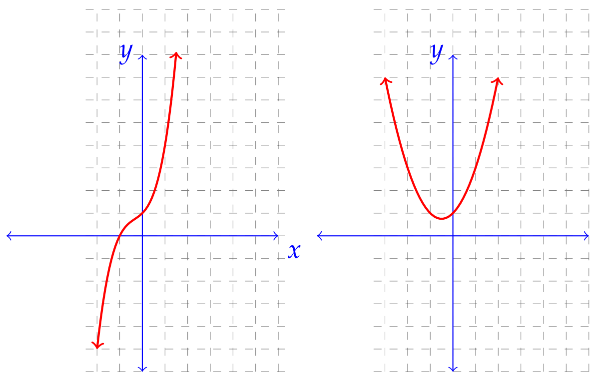


Figura 1.30: Grafiku i një funksioni injektiv (në të majtë) dhe jo-injektiv (në të djathtë).

Lema 1.1. *Një funksion është funksion* ***injektiv*** *atëherë dhe vetëm atëherë kur asnjë drejtëz horizontale nuk e pret grafikun e funksionit më shumë se një herë.*

Ne vazhdojmë me disa shembuj funksionesh një për një përpara se të kalojmë tek përkufizimi i funksionit invers.

Shembull 1.23. *A është funksioni $g(x) = x^2$ funksion një për një?*

Zgjidhje: Ky funksion nuk është funksion një për një sepse për shembull,

$$g(1) = 1 = g(-1)$$

pra 1 dhe -1 kanë të njëjtën dalje.

Gjithashtu, ka drejtëza horizontale që e presin grafikun e $g(x)$ më shumë se një herë. Pra, prej testit të drejtëzës horizontale del se $g(x)$ nuk është funksion një për një. □

Shembull 1.24. *A është funksioni $f(x) = x^3$ funksion një për një?*

Zgjidhje: Në qoftë se $x_1 \neq x_2$, atëherë $x_1^3 \neq x_2^3$ (dy numra të ndryshëm s'mund të kenë të njëjtin kub). Prandaj, nga përkufizimi $f(x) = x^3$ është funksion një për një.

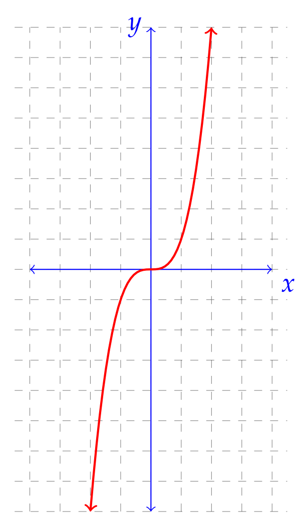


Figura 1.31: Grafiku i $f(x) = x^3$

Gjithashtu, nga Fig. 1.31 ne shohim se asnjë drejtëz horizontale nuk e pret grafikun më shumë se një herë. Pra, nga testi i drejtëzës horizontale $f(x)$ është funksion një për një. $\square$

Funksionet një për një janë të rëndësishëm sepse janë pikërisht ata që kanë funksione të anasjellta sipas përkufizimit. Më poshtë ne japim përkufizimin formal të funksionit të anasjelltë. Vini re se termi **invers** përdoret shpesh në vend të termit **të anasjelltë**.

Përkufizim 1.4. Le të jetë $f(x)$ një funksion një për një me bashkësi përkufizimi A dhe bashkësi vlerash B. Atëherë, **funksioni i anasjelltë** i tij, i cili shënohet me f^{-1}, quhet funksioni që ka bashkësi përkufizimi B dhe bashkësi vlerash A dhe për çdo $y \in B$ kemi

$$f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

Vërejtje 1.2. *Bëni kujdes mos e ngatërroni* -1 *tek* f^{-1} *me eksponentin. Prandaj* $f^{-1}(x)$ *nuk është* $\frac{1}{f(x)}$. *Në mënyrë reciproke* $1/f(x)$ *mund të shkruhet si* $[f(x)]^{-1}$.

Lexuesi të vërtetojë rezultatet e mëposhteme

Lema 1.2.

i) Funksioni f *ka invers atëherë dhe vetëm atëherë kur* f *është bijektiv.*

ii) Në qoftë se funksioni invers f^{-1} *i një funksioni* f *ekziston atëherë ai është unik.*

iii) $f \circ f^{-1} = id_y$ *dhe* $f^{-1} \circ f = id_x$

iv) $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$

v) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Vërtetim: Detyrë lexuesit. $\square$

Shkronja x tradicionalisht përdoret për të shënuar ndryshoren e pavarur, kështu që ne kur duam të përqendrohemi tek f^{-1}, ne zakonisht ndryshojmë rolet e x me y dhe shkruajmë

$$f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$$

Nga zëvendësimimi y në përkufizimin e funksionit invers ne përftojmë ekuacionet e thjeshtimit si më poshtë:

$$f^{-1}(f(x)) = x, \text{ për çdo } x \in A$$

dhe gjithashtu

$$f(f^{-1}(x)) = x, \text{ për çdo } x \in B$$

Për shembull, në qoftë se $f(x) = x^3$, atëherë $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ dhe kemi

$$f^{-1}(f(x)) = \left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} = x \quad \text{dhe} \quad f(f^{-1}(x)) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = x \tag{1.4}$$

Këto ekuacione na thonë se funksioni kubik dhe funksioni i rrënjës kubike thjeshtojnë njëri tjetrin kur aplikohen njëri pas tjetrit.

Tani le të shohim sesi mund t'i përftojmë funksionet inverse. Në qoftë se kemi funksionin $y = f(x)$ dhe jemi në gjendje të zgjidhim këtë ekuacion në lidhje me x në varësi të y, atëherë duke u nisur nga Përkufizimi 1.4 ne mund të kemi $x = f^{-1}(y)$. Në qoftë se ne duam ta quajmë ndryshore të pavarur x-in, atëherë ne ndërrojmë x me y dhe arrijmë në ekuacionin $y = f^{-1}(x)$.

1.5.2 Si të gjejmë funksionin e anasjelltë të funksionit injektiv.

Për të gjetur funksionin invers të një funksioni $f(x)$ ka një procedurë fare të thjeshtë e cila varet kryesisht nga zgjidhja e ekuacionit përkatës. Ne kalojmë nëpër këto hapa për të gjetur inversin e $f(x)$:

- **Hapi i parë:** Shkruajmë $y = f(x)$
- **Hapi i dytë:** Zgjidhim ekuacionin për x në lidhje me y (në qoftë se është e mundur).
- **Hapi i tretë:** Për të shprehur f^{-1} si funksion të x-it, ndryshojmë x me y. Ekuacioni rezulton të jetë $y = f^{-1}(x)$.

Shembull 1.25. *Gjeni inversin e funksionit $f(x) = x^3 + 2$.*

Duke u nisur nga ajo që përmendëm më sipër fillimisht shkruajmë $y = x^3+2$. Prej nga zgjidhim ekuacionin $x^3 = y - 2$ në lidhje me x, dhe kemi $x = \sqrt[3]{y-2}$. Përfundimisht, ndërrojmë x me y dhe marrim

$$y = \sqrt[3]{x-2}$$

Pra, inversi i funksionit është $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

Parimi i ndryshimit të x me y na jep gjithashtu metodën për të përftuar grafikun e f^{-1} nga grafiku i $f(x)$. Meqënëse $f(a) = b$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $f^{-1}(b) = a$, pika (a, b) ndodhet në grafikun e $f(x)$ vetëm kur pika (b, a) ndodhet në grafikun e f^{-1}. Por ne e marrim pikën (b, a) nga (a, b) nëpërmjet pasqyrimit në lidhje me drejtëzën $y = x$, shih Fig. 1.32.

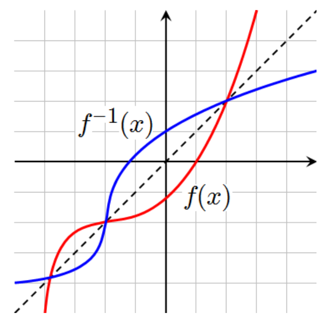


Figura 1.32: $f(x)$ dhe $f^{-1}(x)$

Lema 1.3. *Grafiku i f^{-1} përftohet nga pasqyrimi i grafikut të $f(x)$ në lidhje me drejtëzën $y = x$.*

Shembull 1.26. *Ndërtoni grafikun e $f(x) = \sqrt{-1-x}$ dhe të inversit të tij duke përdorur të njëjtin sistem koordinativ.*

Zgjidhje: Fillimisht skicojmë grafikun e kurbës $y = \sqrt{-1-x}$ (gjysma e sipërme e parabolës $y^2 = -1-x$ ose $x = -y^2 - 1$) dhe e pasqyrojmë në lidhje me drejtëzën $y = x$ për të përftuar kështu grafikun e inversit; shih Fig. **??**. Siç duket edhe në grafikun tonë shprehja për inversin është $f^{-1}(x) = -x^2 - 1$, për $x \geq 0$. Pra, grafiku i inversit është gjysmë parabola $y = -x^2 - 1$.

□

1.5.3 Funksionet inverse trigonometrike

Kur përpiqemi të gjejmë inversët e funksioneve trigonometrike, hasim një vështirësi. Ngaqë funksionet trigonometrike nuk janë funksione një për një, ato nuk kanë funksione inverse. Vështirësia kapërcehet duke ngushtuar bashkësinë e përkufizimit aq sa funksionet të jenë funksione një për një.

Ne kemi parë se funksioni $y = \sin x$, nuk është funksion një për një (duke përdorur testin e drejtëzës horizontale). Por funksioni $y = \sin x$, për x të tillë $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ është funksion një për një. Funksioni invers i këtij funksioni sinus të ngushtuar ekziston dhe **shënohet me** $\sin^{-1}$ **ose** arcsin. Ky quhet **inversi i sinusit** ose **funksioni arksinus**. Më poshtë do t'a pergjithësojmë këtë ide për gjithë funksionet trigonometrike:

Meqënëse përkufizimi i funksionit invers thotë se

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$$

do të kemi

$$\sin^{-1} x = y \iff \sin y = x \text{ dhe } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2$$

Në qoftë se $-1 \leq x \leq 1$, $\sin^{-1} x$ është numri ndërmjet $-\pi/2$ dhe $\pi/2$ sinusi i të cilit është x.

Shembull 1.27. *Llogarisni*

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(b) $\tan\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

Zgjidhje: (a) Kemi

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

sepse $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ dhe $\frac{\pi}{6}$ shtrihet midis $-\frac{\pi}{2}$ dhe $\frac{\pi}{2}$.

(b) Le të jetë $\theta = \arcsin\frac{1}{3}$, prej nga $\sin\theta = \frac{1}{3}$.

Pra, ne mund të vizatojmë trekëndëshin kënddrejtë me kënd θ dhe duke u nis nga teorema e Pitagorës del që brinja e tretë (kateti përbri këndit θ) ka gjatësi $\sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}$. Kjo na mundëson që të llogarisim duke lexuar nga trekëndëshi se

$$\tan\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ekuacionet e thjeshtimit për funksionet inverse në këtë rast kanë trajtën,

$$\sin^{-1}(\sin x) = x, \ \textit{për} \ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$
$$\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x, \ \textit{për} \ -1 \leq x \leq 1$$

Funksioni invers (i anasjelltë) i sinusit ka si bashkësi përkufizimi $[-1, 1]$ dhe bashkësi vlerash $[-\pi/2, \pi/2]$. Funksioni invers i kosinusit përftohet në mënyrë të ngjashme. Funksioni i kufizuar kosinus $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$ është funksion një për një dhe kështu ai ka funksion invers i cili shënohet me $\cos^{-1}$ ose arccos.

$$\cos^{-1} x = y \Longleftrightarrow \cos y = x \ \ \textit{dhe} \ \ \ 0 \leq y \leq \pi$$

Funksioni invers i funksionit kosinus, $\cos^{-1}$, ka si bashkësi përkufizimi $[-1, 1]$ dhe bashkësi vlerash $[0, \pi]$.

Funksioni tangent mund të bëhet funksion një për një në qoftë se e kufizojmë në intervalin $(-\pi/2, \pi/2)$. Prandaj inversi i funksionit tangent do përkufizohet si funksioni invers i $y = \tan x$, për $(-\pi/2 \leq x \leq \pi/2)$, ai shënohet me $\tan^{-1}$ ose arctan.

$$\tan^{-1} x = y \Longleftrightarrow \tan y = x \ \ pr \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Dimë se drejtëzat $x = \pm\frac{\pi}{2}$ janë asimptotat vertikale të funksionit tangent. Meqënëse grafiku i inversit merret nga pasqyrimi në lidhje me drejtëzën $y = x$, kjo na sjell se drejtëzat $y = \pi/2$ dhe $y = -\pi/2$ janë asimptotat horizontale të arktangentit. Përkufizimet e funksioneve të anasjellta trigonometrike janë përmbledhur në Tabelën 1.3.

Emërtimi	$y =$	$x =$	Bashkësia e përkufizimit	Vlera ne radian	Vlera ne grade
arcsine	$\arcsin x$	sin y	$-1 \leq x \leq 1$	$-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$	$-90 \leq y \leq 90$
arccosine	$\arccos x$	cos y	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$	$0 \leq y \leq 180$
arctangent	arctan x	tan y	$(-\infty, \infty)$	$-\pi/2 < y < \pi/2$	$-90 < y < 90$
arccotangent	arccot x	cot y	$(-\infty, \infty)$	$0 < y < \pi$	0 < y < 180
arcsecant	arcsec x	sec y	$x \leq -1$ ose $1 \leq x$	$0 \leq y < \pi/2$ ose $\pi/2 < y \leq \pi$	$0 \leq y < 90$ ose $90 < y \leq 180$
arccosecant	arccsc x	csc y	$x \leq -1$ ose $1 \leq x$	$-\pi/2 \leq y < 0$ ose $0 < y \leq \pi/2$	$-90 \leq y \leq 0$ ose $0 < y \leq 90$

Tabela 1.3: Funksionet inverse trigonometrike

Grafikët e arctangent, arccotangent, arcsecant dhe arccosecant në bashkësitë respektive të përkufizimit i kemi më poshtë:

Shembull 1.28. *Thjeshtoni shprehjen* $\cos\left(\tan^{-1} x\right)$.

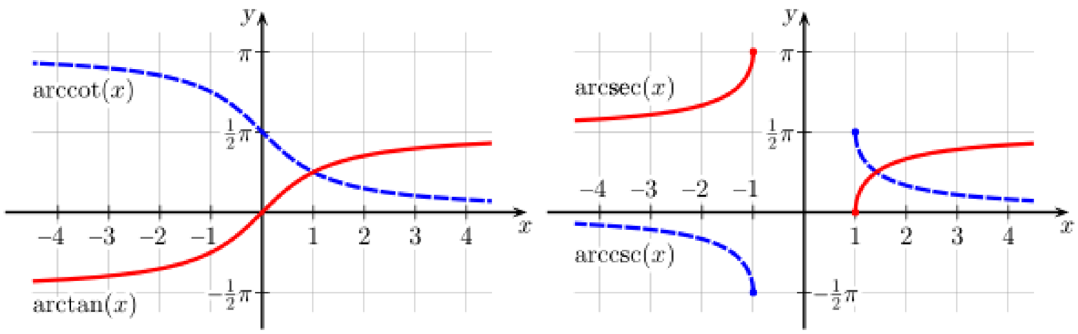


Figura 1.33: Grafikët e arctangent, arccotangent, arcsecant, dhe arccosecant

Zgjidhje: Le të jetë $y = \tan^{-1} x$. Atëherë, $\tan y = x$ dhe $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ Ne duam të gjejmë $\cos y$, por meqënë qoftë se $\tan y$ njihet është më e lehtë të gjendet fillimisht $1/\cos y$. Pra, kemi

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 y} &= 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 \\
\frac{1}{\cos y} &= \sqrt{1 + x^2}
\end{aligned}
$$

Prandaj,

$$\cos(\tan^{-1} x) = \cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

□

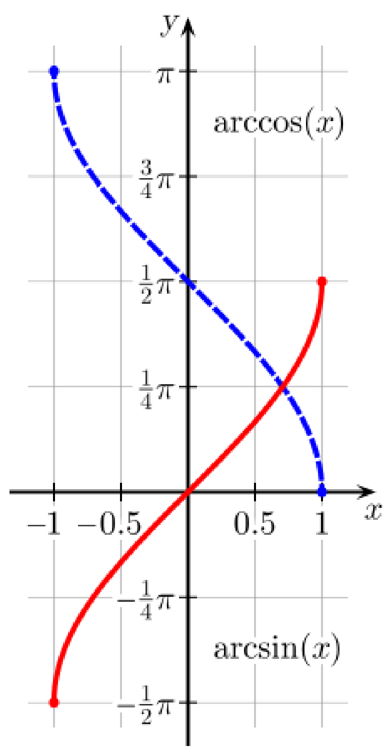


Figura 1.34: Grafikët e $\arcsin x$ dhe $\arccos x$.

1.5.4 Funksioni eksponencial dhe logaritmik

Në qoftë se $a > 0$ dhe $a \neq 1$, funksioni eksponencial $f(x) = a^x$ mund të jetë rritës ose zbritës, që do të thotë se është funksion një për një, kjo nga testi i drejtëzës horizontale. Pra, ka një funksion invers f^{-1} që quhet funksion logaritmik me bazë a dhe shënohet si $\log_a$. Në qoftë se ne përdorim formulimin e funksionit invers të dhënë nga

$$f^{-1}(x) = y \Longleftrightarrow f(y) = x$$

ne do të kemi:

$$\log_a x = y \Longleftrightarrow a^y = x$$

Prandaj, në qoftë se $x > 0$, atëherë $\log_a x$ është eksponenti në të cilin duhet ngritur a për të përftuar x. Për shembull, $\log_{10} 0,001 = -3$ sepse $10^{-3} = 0,001$.

Ekuacionet e thjeshtimit, kur aplikohen tek funksioni $f(x) = a^x$ dhe $f^{-1}(x) = log_a(x)$, del se:

$$\log_a(a^x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \; dhe \; a^{\log_a x} = x, \forall x > 0$$

Funksioni logaritmik $\log_a$ ka si bashkësi përkufizimi $(0, +\infty)$ dhe bashkësi vlerash$\mathbb{R}$. Grafiku i tij është pasqyrimi i grafikut $y = a^x$ në lidhje me drejtëzën $y = x$.

Vetitë e mëposhtme të funksionit logaritmik rrjedhin direkt nga vetitë respektive të funksionit eksponencial të dhëna në seksionin e mëparshëm.

i) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
ii) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
iii) $\log_a(x)^r = r \log_a x$

Shembull 1.29. *Përdorni rregullat e logaritmit për të llogaritur* $\log_2 80 - \log_2 5$.

Zgjidhje: Duke përdorur rregullin ii) kemi

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \left(\frac{80}{5}\right) = \log_2 16 = 4$$

sepse $2^4 = 16$.

□

Logaritmet natyrore

Nga të gjitha bazat e mundshme a për logaritmet, ne do të shohim në vazhdim se zgjedhja më e përshtatshme për bazën a është numri e. Logaritmi me bazë e quhet **logaritëm natyror** dhe ka një shënim të veçantë:

$$\log_e x = \ln x$$

Në qoftë se ne i zëvendësojmë $a = e$ dhe $\log_e$ me "ln"në ekuacionet e thjeshtimit të logaritmeve, atëherë vetitë përcaktuese të funksionit të logaritmit natyror marrin trajtën:

$$\ln x = y \Longleftrightarrow e^y = x \; dhe \; \ln(e^x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Gjithashtu,

$$e^{\ln x} = x, \forall x > 0$$

Në veçanti, në qoftë se marrim $x = 1$ do të kemi $\ln e = 1$.

Shembull 1.30. *Gjeni x në qoftë se* $\ln x = 5$.

Zgjidhje: Fillojmë me ekuacionin

$$\ln x = 5$$

dhe aplikojmë funksionin eksponencial në të dy anët e ekuacionit:

$$e^{\ln x} = e^5$$

Por nga ekuacioni i dytë i thjeshtimit kemi se $e^{\ln x} = x$. Prandaj, $x = e^5$.

Shembull 1.31. *Zgjidhni ekuacionin*

$$e^{5-3x} = 10$$

Zgjidhje: Ne marrim logaritmet natyrore të të dy anëve të ekuacionit dhe përdorim ekuacionin e thjeshtimit:

$$\ln(e^{5-3x}) = \ln 10 \textit{ na jep } 5 - 3x = \ln 10$$

Kështu që $x = \frac{1}{3}(5 - \ln 10)$. Meqënëse logaritmi natyror gjendet me makina llogaritëse shkencore, mund ta përafrojmë zgjidhjen me $x \approx 0.8991$.

□

Shembull 1.32. *Shprehni*

$$\ln a + \frac{1}{2} \ln b$$

si një logaritëm i vetëm.

Zgjidhje: Duke përdorur rregullin iii) dhe i) të logaritmeve do të kemi

$$\ln a + \frac{1}{2} \ln b = \ln a + \ln b^{1/2} = \ln a + \ln \sqrt{b} = \ln(a\sqrt{b})$$

□

Formula në vazhdim tregon se logaritmet me çfarëdo lloj baze mund të shprehen në termat e logaritmit natyror.

Lema 1.4 (Formula e ndryshimit të bazës). *Për çdo numër pozitiv a* ($a \neq 1$), *ne kemi*

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Vërtetim: Le të jetë $y = \log_a x$, prej nga ne kemi $a^y = x$. Duke marrë logaritmin natyror të të dy anëve të këtij ekuacioni, përftojmë $y \ln a = \ln x$. Atëherë,

$$y = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

□

Makinat llogaritëse shkencore kanë një buton për logaritmet natyrore, kështu që formula e mësipërme na mundëson të llogarisim një logaritëm të çfarëdo lloj baze siç tregohet në shembullin në vazhdim. Në mënyrë të ngjashme kjo formulë na ndihmon të ndërtojmë grafikun e çdo funksioni logaritmik në një makinë llogaritëse grafike apo kompjuter.

Shembull 1.33. *Llogaritni* $\log_8 5$ *me përafërsi deri gjashtë shifra pas presjes.*

Zgjidhje: Formula e ndryshimit të bazës na jep

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.773976$$

□

Së bashku me të gjithë funksionet e tjerë logaritmikë me bazë më të madhe se 1, logaritmi natyror është funksion rritës i përkufizuar në $(0, +\infty)$ dhe me boshtin e y-ve si asimptotë vertikale.

Ushtrime:

1. a *Shkruani një ekuacion i cili përcakton një funksion eksponencial me bazë* $a > 0$.

b *Cila është bashkësia e përkufizimit të këtij funksioni?*

c *Në qoftë se* $a \neq 1$, *cila është bashkësia e vlerave të këtij funksioni?*

d *Ndërtoni grafikun e funksionit eksponencal në secilin nga rastet:* $a > 1$, $a = 1$, $0 < a < 1$

2. a *Si është përkufizuar numri e?*

b *Cila është vlera e përafërt për e?*

c *Cili është funksioni eksponencial natyror?*

3. *Ndërtoni grafikët e funksioneve të dhënë në një sistem koordinativ të përbashkët. Ç'lidhje kanë këta grafikë me njëri-tjetrin?*

1. $y = 2x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$
2. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $y = 8^x$, $y = 8^{-x}$
3. $y = 3^x$, $y = 10^x$, $y = (\frac{1}{3})^x$, $y = (\frac{1}{10})^x$
4. 0.9^x, $y = 0.6^x$, $y = 0.3^x$, $y = 0.1^x$

4. *Duke u nisur nga grafiku i* $y = e^x$, *shkruani ekuacionin e grafikut që rezulton nga:*

a *Duke e zhvendosur dy njësi poshtë.*

b *Duke e zhvendosur dy njësi nga e djathta.*

c *Duke e pasqyruar në lidhje me boshtin e x-ve.*

d *Duke e pasqyruar në lidhje me boshtin e y-ve.*

e *Duke e pasqyruar në fillim në lidhje me boshtin e x-ve, e pastaj në lidhje me boshtin e y-ve.*

5. *Duke filluar nga grafiku i funksionit* $y = e^x$, *gjeni ekuacionin e grafikut i cili përftohet nga*

a *Pasqyrimi në lidhje me drejtëzën* $y = 4$.

b *Pasqyrimi në lidhje me drejtëzën* $x = 2$.

6. *Gjeni bashkësinë e përkufizimit për secilin nga funksionet.*

- $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$
- $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$
- $g(t) = \sin(e^{-t})$
- $g(t) = \sqrt{1-2^t}$

7. *Në qoftë se* $f(x) = 5^x$, *Vërtetoni se*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 5^x(\frac{5^h-1}{h})$$

8. *Krahasoni funksionet* $f(x) = x^5$ *dhe* $g(x) = 5^x$ *duke i ndërtuar grafikët e të dy funksioneve në disa drejtkëndësha pamjeje. Gjeni të gjitha pikat e prerjes të grafikëve me saktësi deri në një shifër pas presjes. Cili funksion rritet më shpejt?*

9. *Nën kushtet ideale një popullim i caktuar bakteriesh dihet se e dyfishon veten e vet çdo tri ore. Supozojmë se fillimisht janë 100 bakterie.*

a *Cili është numri i popullatës pas 15 orësh?*

b *Cili është numri i popullatës pas t orësh?*

c *Llogarisni numrin e popullatës pas 20 orësh.*

d *Ndërtoni grafikun e funksionit të popullatës dhe njehsoni kohën kur popullata arrin numrin 50, 000.*

10. *Një kulturë bakteriale fillon me 500 bakterie dhe e dyfishon numrin e vet çdo gjysmë ore.*

a *Sa bakterie janë bërë pas 3 orësh?*

b *Cili është numri i bakterieve pas t orësh?*

c *Llogarisni numrin e bakterieve pas 40 minutash.*

d *Ndërtoni grafikun e funksionit të popullatës dhe njehsoni kohën kur popullata arrin numrin 100, 000.*

11. *Në qoftë se ju ndërtoni grafikun e funksionit*

$$f(x) = \frac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$$

do të shihni se $f(x)$ *duket të jetë një funksion tek. Provojeni këtë fakt.*

12. *Ndërtoni grafikët e disa prej funksioneve të cilët janë pjesë e familjes*

$$f(x) = \frac{1}{1+ae^{bx}}$$

ku $a > 0$. *Si ndryshojnë grafikët kur ndryshon b-ja? Si ndryshojnë kur ndryshon a-ja?*

13. *Çfarë është një funksion një për një? Si mund të thoni duke u nisur nga grafiku i një funksioni në qoftë se ky është një funksion një për një?*

14. **a** *Supozojmë se* $f(x)$ *është një funksion një për një me bashkësi përkufizimi A dhe bashkësi vlerash B. Si përkufizohet funksioni i anasjelltë i tij* f^{-1}? *Cila është bashkësia e përkufizimit të* f^{-1}? *Po bashkësia e vlerave?*

b *Në qoftë se ju jepet një formulë për* $f(x)$, *si do ta gjenit një formulë për* f^{-1}?

c *Në qoftë se ju jepet grafiku i* $f(x)$, *si do ta gjenit grafikun e* f^{-1}?

15. *Në qoftë se* $f(x)$ *është një funksion një për një i tillë që* $f(2) = 9$, *kush do të jetë* $f^{-1}(9)$?

16. *Le të jetë* $f(x) = 3 + x^2 + \tan(\pi x/2)$, *ku* $-1 < x < 1$.

a *Gjeni* $f^{-1}(3)$.

b *Gjeni* $f(f^{-1}(5))$.

17. *Në qoftë se* $g(x) = 3 + x + e^x$, *gjeni* $g^{-1}(4)$.

18. *Në teorinë e relativitetit masa e një grimce me shpejtësi v është*

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

ku m_0 është masa në momentin fillestar e grimcës dhe c shpejtësia e dritës në boshllëk. Gjeni funksionin e anasjelltë të $f(x)$ dhe jepni kuptimin e tij.

19. *Gjeni një formulë për funksionin e anasjelltë të funksionit.*

1. $f(x) = \sqrt{10 - 3x}$
2. $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$
3. $f(x) = e^{x^3}$
4. $f(x) = 2x^3 + 3$
5. $y = \ln(x + 3)$
6. $y = \frac{e^x}{1+2e^x}$

20. *Gjeni një formulë eksplicite për f^{-1} dhe përdoreni atë për të ndërtuar grafikun e f^{-1}. Ndërtoni grafikun e $f(x)$ dhe $y = x$ në të njëjtin sistem koordinativ $f(x) = x^4 + 1$, $f(x) = 2 - e^x$*

21. **a** *Si përkufizohet funksioni logaritmik $y = \log_a x$?*

b *Cila është bashkësia e përkufizimit të këtij funksioni?*

c *Cila është bashkësia e vlerave të këtij funksioni?*

d *Ndërtoni grafikun e funksionit $y = \log_a x$ kur $a > 1$*

22. **a** *Çfarë është logaritmi natyror?*

b *Çfarë është logaritmi i zakonshëm?*

c *Ndërtoni grafikun e funksionit logaritëm natyror dhe të funksionit eksponencial natyror në të njëjtin sistem koordinativ.*

23. *Gjeni vlerën e saktë të secilës shprehje.*

a $\log_5 125$

b $\log_3 \frac{1}{27}$

c $\ln(1/e)$

d $\log_{10} \sqrt{10}$

e $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

f $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

g $a^{-2\ln 5}$

h $\ln(\ln e^{e^{10}})$

24. *Kalojeni shprehjen e dhënë në një logaritëm të vetëm*

1. $\ln 5 + 5\ln 3$
2. $\ln(a + b) + \ln(a - b) - 2\ln c$
3. $\ln(1 + x^2) + \frac{1}{2}\ln x - \ln\sin x$

25. *Përdorni formulën e ndërrimit të bazës për të njehsuar secilin logaritëm me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes.*
(a)$\log_{12} 10$, *(b)*$\log_2 8.4$

26. *Përdorni formulën e ndërrimit të bazës për të ndërtuar grafikët e funksioneve të dhënë në një sistem koordinativ të përbashkët. Si janë të lidhur këta grafikë?*

1. $y = \log_{1.5} x$, $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{50} x$
2. $y = \ln x$, $y = \log_{10} x$, $y = e^x$, $y = 10^x$

27. *Krahasoni funksionet $f(x) = x^{0.1}$ dhe $g(x) = \ln x$ duke ndërtuar grafikët e tyre në sisteme koordinative të përbashkëta. Kur grafiku i $f(x)$ e kalon përfundimisht grafikun e $g(x)$?*

28. *Zgjidhni secilin nga ekuacionet në lidhje me x.*

$$\begin{array}{ll} 2\ln x = 1 & e^{2x+3} - 7 = 0 \\ 2^{x-5} = 3 & \ln(\ln x) = 1 \\ e^{-x} = 5 & \ln(5 - 2x+) = -3 \\ \ln x + \ln(x-1) = 1 & e^{ax} = Ce^{bx}, \text{ ku } a \neq b \end{array}$$

29. *Zgjidhni secilin ekuacion ose inekuacion në lidhje me x.*

$$\begin{array}{l} e^x < 10 \\ \ln x \geq -1 \\ 2 < \ln x < 9 \\ e^{2-3x} > 4 \end{array}$$

30. *Gjeni fillimisht bashkësinë e përkufizimit të $f(x)$, gjeni f^{-1} si dhe bashkësinë e përkufizimit të tij.*

$$\begin{array}{l} f(x) = \sqrt{3 - e^{2x}} \\ f(x) = \ln(2 + \ln x) \end{array}$$

31. *Gjeni vlerën e saktë të secilës shprehje.*

$$\begin{array}{lrl} (a) & \sin^{-1}(\sqrt{3}/2) & (g)\ \cot^{-1}(-\sqrt{3}) \\ (b) & \cos^{-1}(-1) & (h)\ \arccos(-\frac{1}{2}) \\ (c) & \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) & (i)\ \tan(\arctan 10) \\ (d) & \sec^{-1} 2 & (j)\ \sin^{-1}(\sin(7\pi/3)) \\ (e) & \arctan 1 & (k)\ \tan(\sec^{-1} 4) \\ (f) & \sin^{-1}(1/\sqrt{2}) & (l)\ \sin(2\sin^{-1}(\frac{3}{5})) \end{array}$$

32. *Vërtetoni se* $\cos\left(\sin^{-1} x\right) = \sqrt{1 - x^2}$.

33. *Thjeshtoni shprehjet*

$$(i)\ \tan(\sin^{-1} x)$$
$$(ii)\ \sin(\tan^{-1} x$$
$$(iii)\ \cos(2\tan^{-1} x$$

34. *Gjeni bashkësinë e përkufizimit dhe bashkësinë e vlerave të funksionit*

$$g(x) = \sin^{-1}(3x+1)$$

35. *Ndërtoni grafikun e funksionit dhe shpjegoni paraqitjen grafike.*

i $f(x) = \sin(\sin^{-1} x)$

ii $g(x) = \sin^{-1}(\sin x)$

Ushtrime për përsëritje

Ne këtë seksion ne japim një listë ushtrimesh dhe problemash të Kap. 1. Një listë e tillë duhet të sherbejë si një guidë për studentët për provimin e parë.

36. *Ndërto grafikun e funksioneve që vazhdojnë:*
i) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$
ii) $f(x) = x + \sin x$

37. *Cili është funksioni invers i* $f(x) = e^x$*?*

38. *Është relacioni i mëposhtëm funksion*

$$x^2 + y^2 = 1?$$

39. *Përdorni makinën llogaritëse grafike për të përcaktuar se cili nga drejtkëndëshat e pamjes jep grafikun më të përshtatshëm për funksionin*

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 5x^2}$$

a $[-5,5]$ *me* $[-5,5]$

b $[0,10]$ *me* $[0,2]$

c $[0,10]$ *me* $[0,10]$

40. *Përdorni makinën llogaritëse grafike për të përcaktuar se cili nga drejtkëndëshat e pamjes jep grafikun më të përshtatshëm për funksionin*

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 16x^2 + 20}$$

a $[-3,3]$ *me* $[-3,3]$

b $[-50,50]$ *me* $[-50,50]$

c $[-10,10]$ *me* $[-10,10]$

d $-5,5]$ *me* $-50,50$

41. *Përcaktoni një drejtkëndësh pamjeje të përshtatshëm për funksionin e dhënë dhe përdoreni atë për të vizatuar grafikun.*

1. $f(x) = 5 + 20x - x^2$
2. $f(x) = x^3 + 30x^2 + 200x$
3. $f(x) = \sqrt[4]{81 - x^4}$
4. $f(x) = \sqrt{0.1x + 20}$
5. $f(x) = \sin\sqrt{x}$
6. $f(x) = \sin^2(100x)$
7. $f(x) = \cos(0.001x)$
8. $f(x) = \sec(20\pi x)$
9. $f(x) = 10\sin x + \sin 100x$
10. $f(x) = x^2 + 0.02\sin 50x$

42. *A priten grafikët në drejtkëndëshat e pamjes të dhënë ? Në qoftë se po sa pika prerjeje kanë?*

a $y = 3x^2 - 6x + 1$, $y = 0.23x - 2.25$; $[-1,3]$ *me* $[-2.5, 1.5]$

b $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6,2]$ *me* $[-5,20]$

43. *Gjeni të gjitha zgjidhjet e ekuacioneve me saktësi deri në dy shifra pas presjes dhjetore.*

1. $x^3 - 9x^2 - 4 = 0$
2. $x^3 = 4x - 1$
3. $x^3 = \sin x$

44. *Përdorni grafikët për të përcaktuar se cili nga funksionet* $f(x) = 10x^2$ *dhe* $g(x) = x^3/10$ *është eventualisht më i madh (domethënë më i madh kur vlerat e x-it janë shumë të mëdha).*

45. *Përdorni grafikët për të përcaktuar se cili nga funksionet $f(x) = x^4 - 100x^3$ dhe $g(x) = x^3$ është eventualisht më i madh.*

46. *Për cila vlera të x është e vërtetë që $|\sin x - x| < 0.1$?*

47. *Ndërtoni grafikët e polinomeve $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$ dhe $Q(x) = 3x^5$ në të njëjtin sistem koordinativ, fillimisht duke përdorur drejtkëndëshat e pamjes me përmasa $[-2, 2]$ me $[-2, 2]$ dhe më pas duke i ndryshuar me përmasa $[-10, 10]$ me $[-10, 000, 10, 000]$. Çfarë vëreni nga këto grafikë?*

48. *Le të shqyrtojmë familjen e funksioneve rrënjë $f(x) = \sqrt[n]{x}$, ku n është numër natyror.*

a) Ndërtoni grafikun e funksioneve $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, $y = \sqrt[6]{x}$ në të njëjtin drejtkëndësh pamjeje me përmasa $-1, 4$ me $[-1, 3]$.

b) Ndërtoni grafikët e funksioneve $y = x$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[5]{x}$ në të njëjtin sistem koordinativ duke përdorur drejtkëndëshin e pamjes $[-3, 3]$ me $[-2, 2]$

c) Ndërtoni grafikët e funksioneve $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = \sqrt[4]{x}$, dhe $y = \sqrt[5]{x}$ në të njëjtin sistem koordinativ duke përdorur drejtkëndëshin e pamjes $[-1, 3]$ me $[-1, 2]$.

d) Çfarë konkluzionesh mund të nxirrni nga këta grafikë?

49. *Le të shqyrtojmë familjen e funksioneve rrënjë $f(x) = 1/x^n$, ku n është numër natyror:*

a) Ndërtoni grafikun e funksioneve $y = 1/x^2$, $y = 1/x^4$, në të njëjtin drejtkëndësh pamjeje me përmasa $[-3, 3]$ me $[-3, 3]$.

b) Ndërtoni grafikët e funksioneve $y = 1/x$, $y = 1/x^3$, në të njëjtin sistem koordinativ duke përdorur drejtkëndëshin e pamjes $[-3, 3]$ me $[-3, 3]$

c) Ndërtoni grafikët e funksioneve të pikës (a) dhe (b) në të njëjtin sistem koordinativ duke përdorur drejtkëndëshin e pamjes $[-1, 3]$ me $[-1, 3]$.

d) Çfarë konkluzionesh mund të nxirrni nga këta grafikë?

50. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$f(x) = x^4 + cx^2 + x$$

për vlera të ndryshme të c. Si ndryshon grafiku kur ndryshon c-ja?

51. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$f(x) = \sqrt{1 + cx^2}$$

për vlera të ndryshme të c. Si ndryshon grafiku kur ndryshon c-ja?

52. *Ndërtoni grafikun e funksionit $f(x) = x^n 2^{-x}$, $x \geq 0$, për vlera të $n = 1, 2, 3, 4, 5$, dhe 6. Si ndryshon grafiku me rritjen e n?*

53. *Çfarë ndodh me grafikun e funksionit $y^2 = cx^3 + x^2$ me ndryshimin e c?*

Kapitulli 2

Limiti i funksionit

Në hyrje të këtij libri ne përmendëm idenë e lidhjes së ngushtë të limitit me koncepte të ndryshme të Kalkulusit. Eshtë pra e përshtatshme që ta nisim studimin tonë të Kalkulusit, duke studiuar limitet dhe vetitë e tyre. Koncepti i limitit do të përdoret në llogaritjen e koeficientit këndor të tangentes dhe në njehsimin e shpejtësisë së çastit, te përkufizimi i derivatit si dhe në kalkulusin diferencial.

Megjithëse përpjekjet e para për përkufizimin e limitit u duken në shekujt e XVII dhe XVIII, koncepti modern i limitit i dedikohet Bolzanos, në 1817, i cili futi bazat e simbolikës epsilon-delta për të përkufizuar funksionet e vazhdueshëm. Megjithatë, puna e tij nuk u vlerësua derisa ai ishte gjallë. Koshiu i trajtoi limitet në librin e tij *Cours d'analyse* (1821) dhe dha një përkufizim modern, por kjo zakonisht nuk u pranua si përkufizim i rregullt sepse nuk përdorej simbolika formale. Weierstrass ishte i pari që futi përkufizimin me delta-epsilon pak a shume si përdoret edhe sot. Ai gjithashtu futi edhe simbolet lim dhe $\lim(x \to a)$. Simbolika moderne, ku shigjeta vendoset nën limit, p.sh. $\lim_{x\to a}$ i dedikohet Hardy në librin e tij *A Course of Pure Mathematics* në (1908).

Figura 2.1: K. Weirstrass

Seksioni i parë i këtij kapitulli do të nis me dy konceptet bazë të kalkulusit, atë të tangentes dhe të shpejtesisë së çastit. Prej këtu ne do të kalojmë në konceptin e limitit. Fillimisht limitin do t'a studiojmë në mënyrë intuitive, pra nëpërmjet shembujve. Pasi të kemi parë disa shembuj dhe të kemi mësuar si të gjejmë disa limite të thjeshtë, atëhërë ne do të kalojmë tek përkufizimi i saktë i limitit. Do të vërtetojmë disa rregulla mbi limitet dhe prej ketej do të jemi ne gjendje të llogarisim limitet e shumicës së funksioneve elementare.

Në seksionin e ardhshëm do të shohim se si problemi i gjetjes së tangentes së një kurbe, apo i shpejtësisë së një objekti lëvizës na çojnë tek koncepti i limitit.

2.1 Problemi i tangentes dhe shpejtësisë

2.1.1 Problemi i tangentes

Fjala tangent vjen nga fjala latinisht "tangens", që do të thotë "të prekësh". Prandaj një tangente ndaj një kurbe është një drejtëz që prek kurbën. Lind pyetja, si mund të formulohet më saktë ideja e tagentes?

Për një rreth, ne thjesht mund të ndjekim Euklidin dhe të themi se një tangente është një drejtëz që e prek rrethin në një dhe vetëm një pikë. Për kurba më të komplikuara ky përkufizim nuk është shumë i përshtatshëm. Le të shohim problemin e gjetjes së tangentes ndaj parabolës $y = x^2$ në shembullin në vazhdim.

Shembull 2.1. *Gjeni një ekuacion për drejtëzën tangente ndaj parabolës $y = x^2$ në pikën $P = (1, 1)$.*

Zgjidhje: Ne do ta kemi më të lehtë të gjejmë një ekuacion për drejtëzën tangente në qoftë se njohim koefiçentin këndor të saj k. Vështirësia qëndron në faktin se ne kemi vetëm një pikë P të tagentes kur ne na nevojiten dy pika për të njehsuar koefiçentin këndor. Por, vërejmë se mund të përdorim një përafrim të k duke zgjedhur një pikë afër P, për shembull $Q = (x, x^2)$ në parabolë dhe njehsojmë koefiçentin këndor k_{PQ} të sekantes PQ. Ne e zgjedhim $x \neq 1$ kështu që $P \neq Q$. Atëherë, $k_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$. Për shembull, për pikën $Q = (1.5, 2.25)$ ne kemi $k_{PQ} = \frac{2.25-1}{1.5-1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$.

Dy tabelat na tregojnë vlerat e k_{PQ} për vlera të ndryshme të x rreth 1. Pikat Q janë rreth P, x rreth 1, atëherë siç duket edhe nga tabelat k_{PQ} është rreth 2. Kjo na sugjeron që koefiçenti këndor i tangentes të jetë $k = 2$.

x	k_{PQ}
2	3
1.5	2.5
1. 1	2. 1
1. 01	2. 01
1. 001	2. 001

x	k_{PQ}
0	1
0.5	1.5
0. 9	1. 9
0. 99	1. 99
0. 999	1. 999

Tabela 2.1: Vlerat e koeficentit këndor në varësi të x-it.

Ne themi se koefiçenti këndor i tangentes është limiti i koefiçentit këndor të sekantes dhe e shprehim simbolikisht këtë fakt me shënimin:

$$\lim_{Q\to P} k_{PQ} = k, \quad \textit{nga ku marrim,} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Duke pranuar se koefiçenti këndor i tangentes është 2, ne përdorim trajtën e ekuacionit të drejtëzës $y - y_\circ = k(x - x_\circ)$ ku $k = 2$ dhe $x_\circ = 1$, $y_\circ = 1$ dhe marrim ekuacionin $y - 1 = 2(x - 1)$ ose $y = 2x - 1$.

Sikurse Q i afrohet P nëpër parabolë, sekantja korresponduese afrohet drejt P dhe përafron tangenten.

□

2.1.2 Shpejtësia e castit.

Shpejtësia ka qene dicka që ka pushtuar imagjinaten e njeriut që në antikitet. Disa nga zbavitjet dhe aktivitetet me të cilat njerezimi është plotësisht i apasionuar edhe sot kanë të bëjnë me shpejtësinë. Po si llogaritet shpejtesia?

Në qoftë se ju shikoni shpejtësimatësin e një makine kur ju udhëtoni në një trafik qyteti, ju shihni se shigjeta nuk qëndron gjatë në një pozicion. Kjo do të thotë se shpejtësia e makinës nuk është konstante. Duke parë shpejtësimatësin ne themi se makina ka një shpejtësi të caktuar në një moment të caktuar kohe, por si përcaktohet shpejtësia e "çastit"?

Në historinë e shkencës koncepti i shpejtësisë lidhet ngushtë me një experiment të Galileo Galileit të bërë në kullën e Pizës në vitin 1642, me anë të të cilit shënohet përpjekja e parë për të dhënë një përkufizim të saktë të shpejtësisë.

Shembull 2.2. *Supozojmë se një gur hidhet nga një kullë vrojtimi 450 m e lartë drejt tokës. Gjeni shpejtësinë e gurit pas 5 sekondash.*

Nga eksperimentet e bëra katër shekuj më parë, Galileo zbuloi se distanca e përshkuar nga rënia e çdo trupi të lirë është në përpjestim të drejtë me katrorin e kohës që ka kaluar. Ky model i rënies së lirë nuk merr parasysh rezistencën e ajrit. Në qoftë se distanca e përshkuar pas t sekondash shënohet me $s(t)$ dhe matet me metër, atëherë rregulli i Galileos shprehet me ekuacionin

$$s(t) = 4.9t^2$$

Vështirësia në gjetjen e shpejtësisë pas 5 sekondash është se veprohet vetëm me një moment të kohës $t = 5$, pra nuk përfshihet një interval kohe. Megjithatë mund ta përafrojmë duke llogaritur shpejtësinë mesatare në intervale kohore të vogla nga $t = 5$ në $t = 5.1$:

$$
\begin{aligned}
v = \text{shpejtësia mesatare} &= \frac{\text{distanca e përshkuar}}{\text{koha e kaluar}} \\
&= \frac{s(5.1) - s(5)}{0.1} = \frac{4.9(5.1)^2 - 4.9(5)^2}{0.1} = 49.49 m/s^2
\end{aligned}
$$

Tabela në vazhdim tregon rezultatet e llogaritjeve të ngjashme për shpejtësinë mesatare kundrejt intervaleve të vogla të kohës.

intervalet e kohës	shpejtësia mesatare(m/s)
$5 \leq t \leq 6$	53. 9
$5 \leq t \leq 5.1$	49.49
$5 \leq t \leq 5.05$	49. 245
$5 \leq t \leq 5.01$	49. 049
$5 \leq t \leq 5.001$	49. 0049

Tabela 2.2: Shpejtësia mesatare sipas kohës.

Duket se sa më shumë shkurtojmë intervalin e kohës, shpejtësia mesatare i afrohet gjithnjë e më shumë 49 m/s. Shpejtësia e çastit kur $t = 5$ do të përkufizohet si vlerë limite e kësaj shpejtësie mesatare përkundër intervaleve kohore gjithnjë e më të vogla që nisin nga $t = 5$. Prandaj shpejtësia pas 5 sekondash është: $v = 49m/s$.

Ju mund të vëreni se llogaritjet e përdorura për të zgjidhur këtë problem janë të ngjashme me ato të përdorura në problemin e tangentes. Në fakt ka një lidhje të ngushtë ndërmjet problemit të tangentes dhe problemit të gjetjes së shpejtësisë. Në qoftë se marrim parasysh pikat $P = (a, 4.9a^2)$ dhe $Q = (a + h, 4.9(a + h)^2)$, atëherë koefiçenti këndor i sekantes PQ është

$$
k_{PQ} = \frac{4.9(a + h)^2 - 4.9a^2}{(a + h) - a}
$$

që është njëlloj si shpejtësia mesatare gjatë intervalit të kohës $[a, a + h]$. Prandaj shpejtësia në ëastin e kohës $t = a$ (limiti i kësaj shpejtësie mesatare kur h i afrohet 0) duhet të jetë e barabartë me koefiçentin këndor të tangentes në P (limiti i koefiçentit të sekantes).

□

Ushtrime:

1. *Pika $P = (1, \frac{1}{2})$ i takon kurbës*

$$
y = \frac{x}{1 + x}
$$

a) Në qoftë se Q është pika $\left(x, \frac{x}{1+x}\right)$, përdorni makinën llogaritëse për të gjetur koefiçentin këndor të prerëses PQ, më saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes dhjetore, për vlerat në vazhdim të $x = 0.5, 0.9, 0.99, 0.999, 1.5, 1.1, 1.01, 1.001$.

b) Duke përdorur të dhënat e pikës a) gjeni një vlerë të koeficentit këndor të tangentes në pikën $P = (1, \frac{1}{2})$.

c) Duke përdorur koeficentin këndor të pikës b), gjeni një ekuacion për tangenten ndaj kurbës në pikën $P = (1, \frac{1}{2})$.

2. *Pika $P = (3, 1)$ i takon kurbës $y = \sqrt{x - 2}$.*

a) Në qoftë se $Q = \left(x, \sqrt{x - 2}\right)$, përdorni makinën llogaritëse për të gjetur koefiçentin këndor të prerëses PQ, me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes dhjetore, për vlerat në vazhdim të $x = 2.5, 2.9, 2.99, 2.999, 3.5, 3.1, 3.01, 3.001$.

b) Duke përdorur të dhënat e a) gjeni një vlerë të koeficentit këndor të tangentes në pikën $P = (3, 1)$.

c) Duke përdorur koeficentin këndor të pikës b), gjeni një ekuacion për tangenten ndaj kurbës në pikën $P = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

d) Ndërtoni grafikun e kurbës, të dy prerëseve dhe të tangentes.

3. *Tabela tregon pozicionin e një çiklisti.*

t(sekonda)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
s(metra)	*0*	*1.4*	*5.1*	*10.7*	*17.7*	*25.8*

a) Gjeni shpejtësinë mesatare për secilën perudhë të kohës [1, 3], [2, 3], [3, 5], [3, 4].

b) Përdorni grafikun e s si funksion i t për të vlerësuar shpejtësinë e çastit kur $t = 3$.

4. *Zhvendosja (në centimetra) e një grimce e cila lëviz përgjatë* *një vije jepet me ekuacionin e lëvizjes*

$$s = 2\sin \pi t + 3\cos \pi t,$$

ku t matet në sekonda.

a) Gjeni shpejtësinë mesatare për secilën periudhë të kohës [1, 2], [1, 1.1], [1, 1.01], [1, 1.001].

b) Llogarisni shpejtësinë e çastit kur $t = 1$.

5. *Pika* $P = (1, 0)$ *i përket kurbës*

$$y = \sin\left(\frac{10\pi}{x}\right)$$

a) Në qoftë se Q është pika $\left(x, \sin\frac{10\pi}{x}\right)$*, gjeni koefiçentin e sekantes PQ, me saktësi deri në katër shifra pas presjes dhjetore, për* $x = 2, 1.5, 1.4, 1.3, 0.5, 0.6, 0.8, 0.9$.*. A duket sikur koefiçentët i afrohen një vlere limite?*

b) Përdorni grafikun e kurbës për të shpjeguar se pse koefiçentët këndorë të prerëseve në pikën (a) nuk janë afër koefiçentit këndor të tangentes në pikën P.

c) Duke zgjedhur prerësen e përshtatshme, vlerësoni koefiçentin këndor të tangentes në pikën P.

2.2 Limiti i funksionit

Kemi parë në seksionin paraardhës se si shkohet tek koncepti i limitit kur duam të gjejmë tangenten ndaj një kurbe apo shpejtësinë e një objekti lëvizës. Le ti kthejmë vëmendjen tonë konceptit të limitit në kuptimin e përgjithshëm si dhe metodave numerike dhe grafike për njehsimin e tij.

Le të shqyrtojmë sjelljen e funksionit $f(x) = x^2 - x + 2$ për vlerat e x afër 2. Tabela në vazhdim na jep vlerat e $f(x)$ për vlera të x rreth 2, por jo të barabarta me 2.

x	f(x)	x	f(x)
1. 0	2. 000000	3. 0	8. 000000
1.5	2. 750000	2.5	5. 750000
1. 8	3.440000	2. 2	4. 640000
1. 9	3. 710000	2. 1	4. 310000
1. 95	3. 852500	2. 05	4. 152500
1. 99	3. 970100	2. 01	4. 030100
1. 995	3. 985025	2. 005	4. 015025
1. 999	3. 997001	2. 001	4. 003001

Tabela 2.3: Vlerat e $f(x)$ për vlera të x

Nga Tabela e mësipërme dhe grafiku i $f(x)$ në Fig. 2.2 Shohim se kur x është shumë afër 2, $f(x)$ është shumë afër

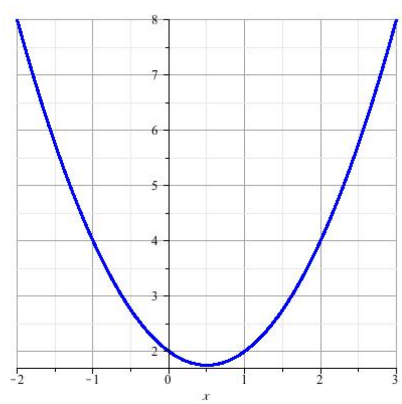


Figura 2.2: Grafiku i $f(x) = x^2 - x + 2$

4. Në fakt duket se mund të marrim vlera të $f(x)$ sa të duam afër 4 kur marrim x shumë afër 2. E shprehim këtë duke thënë "*limiti i funksionit* $f(x) = x^2 - x + 2$, *kur* x *i afrohet* 2 *është i barabartë me* 4". Këte e shënojmë me

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - x + 2) = 4$$

Le të perpiqemi që këtë koncept t'a bëjmë disi më formal.

Jepet funksioni

$$f : X \to Y.$$

dhe $a \in X$. Numri L quhet **limit i funksionit** $f(x)$ kur x shkon në a, shënohet me $\lim_{x\to a} f(x) = L$, në qoftë se bëjmë të mundur që vlerat e $f(x)$ t'i afrohen shumë vlerës L (aq afër sa ne të duam) duke marrë vlerat e x shumë afër a-së (në të dy anët e a-së) por jo të barabarta me a.

E thënë thjeshtë, kjo do të thotë se vlerat e $f(x)$ bëhen gjithnjë e më të afërta me numrin L ashtu sikurse x i afrohet a-së (nga të dy anët e a-së), pa qenë i barabartë me a $(x \neq a)$. Një përkufizim më i saktë do të jepet në vazhdim. Një shënim alternativ për

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

është

$$f(x) \to L \ \ kur \ \ x \to a$$

i cili zakonisht lexohet "$f(x)$ *shkon tek* L *sikurse* x *shkon tek* a".

Tërheqim vëmendjen për shprehjen $x \neq a$ në përkufizimin e limitit. Kjo do të thotë se në gjetjen e limitit të $f(x)$ kur x i afrohet a-së, ne kurrë nuk e marrim parasysh $x = a$. Në fakt nuk ka rëndësi në qoftë se funksioni është i përkufizuar në $x = a$, vetmja gjë që ka rëndësi është se si është përkufizuar rreth a-së.

Shembull 2.3. *Gjeni vlerën e limitit*

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right).$$

Zgjidhje: Vërejmë se funksioni $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ nuk është i përkufizuar kur $x = 1$, por kjo s'ka rëndësi sepse përkufizimi i limitit të funksionit thotë se konsiderojmë vlerat e x-it shumë afër a por jo të barabarta me a. Tabela e mëposhtme jep vlerat e $f(x)$ me saktësi deri në 6 shifra pas presjes, për vlera të x shumë afër 1 (por jo të barabarta me 1). Në

$x < 1$	f(x)	$x > 1$	f(x)
0.5	0. 666667	1.5	0.400000
0, 9	0.526316	1. 1	0.476190
0. 99	0.502513	1. 01	0.497512
0. 999	0.500250	1. 001	0.499750
0. 9999	0.500025	1. 0001	0.499975

Tabela 2.4: Vlerat e $f(x)$ në varësi të vlerave të x-it.

bazë të vlerave të tabelës, bëjmë supozimin se

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

Tani le ta ndryshojmë paksa $f(x)$ duke i dhënë vlerën 2 kur $x = 1$ dhe funksionin e ri ta quajmë $g(x)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1} & \textit{për} \quad x \neq 1 \\ 2 & \textit{për} \quad x = 1 \end{cases}$$

Ky funksion i ri $g(x)$ vazhdon të ketë të njëjtin limit kur x shkon tek njëshi si edhe funksioni $f(x)$.

□

Shembull 2.4. *Llogarisni vlerën e limitit:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

x	$\frac{\sin x}{x}$
±1.0	0. 84147098
±0.5	0. 95885108
±0.4	0. 97354586
±0.3	0. 98506736
±0.1	0. 99833417
±0.05	0. 99958339
±0.01	0. 99998333
±0.005	0. 99999583
±0.001	0. 99999983

Tabela 2.5: Vlerat me saktësi deri në 8 shifra pas pikes dhjetore.

Zgjidhje: Funksioni $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nuk është i përkufizuar kur $x = 0$. Duke përdorur një makinë llogaritëse ndërtojmë tabelën e mëposhtme të vlerave me saktësi deri në 8 shifra pas presjes.

Nga tabela dhe grafiku i Fig. 2.3 supozojmë se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Në fakt ky supozim është i saktë, siç do të vërtetohet me vonë.

□

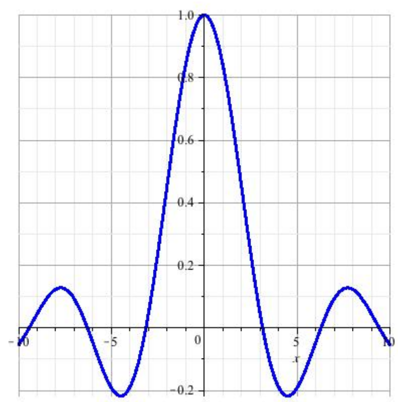


Figura 2.3: Grafiku i funksionit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Shembull 2.5. *Studioni* $\lim_{x\to 0} \sin \frac{\pi}{x}$.

Zgjidhje: Përsëri funksioni $\sin(\pi/x)$ është i papërcaktuar në $x = 0$. Duke vlerësuar funksionin për disa vlera të vogla të x, kemi Në mënyrë të ngjashme, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Në bazë të këtij informacioni ne tentojmë të

$f(1) = \sin \pi = 0$	$f(1/2) = \sin 2\pi = 0$
$f(1/3) = \sin 3\pi = 0$	$f(1/4) = \sin 4\pi = 0$
$f(0.1) = \sin 10\pi = 0$	$f(0.01) = \sin 100\pi = 0$

Tabela 2.6: Vlerat e funksionit $\sin(\pi/x)$

supozojmë se

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{\pi}{x} = 0$$

Por kësaj here supozimi jonë është i gabuar. Vërejmë se megjithëse $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{n}{p} i = 0$ për çdo numër të plotë n është e vërtetë gjithashtu se $f(x) = 1$ për një pafundësi vlerash të tjera të x që shkojnë në zero. Në fakt $\sin \frac{\pi}{x} = 1$ kur $\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$. Duke e zgjidhur në lidhje me x, marrim $x = \frac{2}{4n+1}$. Grafiku i $f(x)$ jepet në Fig. 2.4

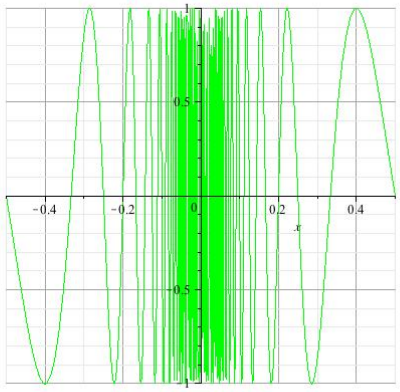


Figura 2.4: Grafiku i funksionit $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$

Nga grafiku duket se vlerat e $\sin \frac{\pi}{x}$ luhaten ndërmjet 1 dhe -1 pafundësisht sa më shumë x i afrohet 0. Meqë vlerat e $f(x)$ nuk i afrohen të njëjtit numër të fiksuar sikurse x i afrohet 0, themi se limiti i këtij funksioni nuk ekziston.

□

Shembull 2.6. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10,000}\right)$$

Zgjidhje: Si në shembujt e mësipërm ndërtojmë një tabelë vlerash. Nga tabela duket se

x	$x^3 + \frac{cos5x}{10,000}$
1	1. 000028
0.5	0. 124920
0. 1	0. 001088
0. 05	0. 000222
0. 01	0. 000101

Tabela 2.7: Vlerat e limitit kur $x \to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10,000}\right) = 0.$$

Por në qoftë se veprojmë me vlera akoma më të vogla të x tabela e dytë duket se

x	$x^3 + \frac{cos5x}{10,000}$
0. 005	0. 00010009
0. 001	0. 00010000

Tabela 2.8: Vlerat e limitit

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10,000}\right) = 0.0001001 = \frac{1}{10,000}.$$

Më vonë do të shohim se $\lim_{x\to 0} \cos 5x = 1$ që tregon se limiti është 0.0001.

□

Shembujt ilustrojnë disa raste gabimi në supozimin e vlerës së limitit. Është e lehtë të gabosh në vlerën e limitit në qoftë se zgjedh vlera të papërshtatshme për x, por është e vështirë të dish se kur duhet të ndalosh me llogaritjet e vlerave. Ndonjëherë makinat llogaritëse apo kompjuterat japin vlera të gabuara. Megjithatë në vazhdim do të japim metoda që mund të vërtetohen plotësisht për llogaritjen e limitit.

Shembull 2.7. *Funksioni $H(t)$ është përkufizuar nga*

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{për} \quad x < 0 \\ 1 & \text{për} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Ky funksion është emërtuar në mënyrë të tillë për shkak të emrit të inxhinjerit Oliver Heaviside (1850-1925) dhe mund të përdoret për të përshkruar rrymën elektrike e cila fillon kur $t = 0$.

Kur t i afrohet zeros nga e majta, $H(t)$ i afrohet zeros. Kur t i afrohet zeros nga e djathta, $H(t)$ i afrohet njëshit. Pra, nuk ka një numër të vetëm tek i cili të shkojë $H(t)$ sikurse t i afrohet zeros. Prandaj limiti i këtij funksioni nuk ekziston.

□

2.2.1 Limitet e njëanshme dhe limitet e pafundëm

Siç e pamë në shembullin e mësipërm $H(t)$ i afrohej 0 kur t i afrohej 0 nga e majta dhe $H(t)$ i afrohej 1 kur t i afrohej 0 nga e djathta. Këto dy situata i shkruajmë simbolikisht në trajtën

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \text{ dhe } \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

Simboli "$t \to 0^-$"tregon se marrim parasysh vetëm vlerat në të majtë të 0, pra më të vogla se zero. Njëlloj, "$t \to 0^+$"tregon se marrim parasysh vetëm vlerat në të djathtë të 0, pra më të mëdha se zero. Ne shkruajmë

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

dhe themi **limiti i majtë i** $f(x)$ kur x i afrohet a (ose limiti i $f(x)$ kur x i afrohet a nga e majta) është i barabartë me L, në qoftë se vlerat e $f(x)$ janë shumë afër L kur x është mjaft afër a, pa qenë i barabartë me a.

Vërejmë se ky përkufizim ndryshon nga i pari vetëm në atë që kërkojmë që x të jetë më i vogël se a. Në mënyrë të ngjashme duke kërkuar që x të jetë më i madh se a, përftojmë **limitin e djathtë të** $f(x)$ kur x i afrohet a, të barabartë me L dhe shkruajmë

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Prandaj simboli "$x \to a^+$"do të thotë se marrim parasysh vetëm vlerat e x, $x > a$. Duke krahasuar përkufizimin e limitit me përkufizimet e limitit të njëanshëm themi se ka vend pohimi

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ atëherë dhe vetëm atëherë kur } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ dhe } \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Ushtrime:

1. *Shpjegoni me fjalët tuaja se çfarë kuptoni me ekuacionin*

$$\lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = 5$$

A është e mundur që $f(2) = 3$? Sqarojeni.

2. *Spjegoni se çdo të thotë*

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \text{dhe} \quad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = 7$$

Në këto kushte a është e mundur të ekzistojë limiti $\lim_{x\longrightarrow 1} f(x)$? Sqarojeni.

3. *Gjeni vlerën e supozuar të limitit (po qe se ekziston) duke llogaritur vlerat e funksionit në numrat e dhënë (me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes dhjetore).*

$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^{-}2x}{x^2 - x - 2},$$

ku $x = 2.5, 2.1, 2.05, 2.01, 2.005, 2.001, 1.9, 1.95, 1.99, 1.995,$

1.999.

Gjeni limitet:

4.

$$\lim_{x \longrightarrow -1} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$$

per $x = 0, -0.5, 0.9, -0.95, -0.99, \quad -0.999, -2, -1.5, = -1.1, -1.01, -1.001$.

5.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2},$$

per $x = \pm 1, \pm 0.5, \pm 0.1, \pm 0.05, \pm 0.01$.

Përdorni tabelën e vlerave për të njehsuar vlerën e limitit. po qe se keni një makinë llogaritëse grafike përdoreni për të konfirmuar rezultatin tuaj grafikisht.

6.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$$

7.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\tan 5x}$$

8.

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$$

9.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{9^x - 5^x}{x}$$

10. *a) Përdorni evidencat numerike dhe grafike për të gjetur vlerën e limitit*

$$\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

b) Sa afër 1-shit duhet të jenë vlerat e x-it që të jemi të sigurtë se funksioni i pikës a) ndodhet brenda distancës 0.5 nga limiti i tij?

11. *Përdorni grafikun e funksionit* $f(x) = 1/(1 + e^{1/x})$ *për të vlerësuar secilin nga limitet, po qe se ato ekzistojnë. Në qoftë se nuk ekzistojnë shpjegoni pse.*

a) $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x)$

b) $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$

12. *Ndërtoni grafikun e funksionit në vijim dhe përdoreni atë për të përcaktuar vlerat e a-së për të cilat ekziston limiti* $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$*:*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{për} \quad x < -1 \\ x & \text{për} \quad -1 \leq x < 1 \\ (x-1) & \text{për} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

13. *Ndërtoni grafikun e ndonjë funksioni* $f(x)$ *i cili plotëson të gjitha kushtet e dhëna.*

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = 2, \\ \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = -2, \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

14. *Ndërtoni grafikun e ndonjë funksioni* $f(x)$ *i cili plotëson të gjitha kushtet e dhëna.*

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 1, \\ \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = -1, \\ \lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = 0, \\ \lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = 1, f(2) = 1, \\ f(0) \text{ është e papërcaktuar} \end{cases}$$

15. *Ndërtoni grafikun e ndonjë funksioni* $f(x)$ *i cili plotëson të gjitha kushtet e dhëna.*

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 2, \\ \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = 4, \\ \lim_{x \longrightarrow -2} f(x) = 2, \\ f(-2) = 1, \\ f(3) = 3 \end{cases}$$

16. *Ndërtoni grafikun e ndonjë funksioni* $f(x)$ *i cili plotëson të gjitha kushtet e dhëna.*

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 3, \\ \lim_{x \longrightarrow 4^-} f(x) = 3, \\ \lim_{x \longrightarrow 4^+} f(x) = -3, \\ f(1) = 1, \\ f(2) = 1, \\ f(4) = -1 \end{cases}$$

2.3 Limitet e pafundëm

Në kreun në vijim ne do të studiojmë limitet e pafundëm. Fillojmë me një shembull:

Shembull 2.8. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

në qoftë se ekziston.

Zgjidhje: Ashtu sikurse x i afrohet zeros edhe x^2 i afrohet 0, ndërsa $1/x^2$ bëhet gjithnjë edhe më e madhe; shihni tabelën në vazhdim. Në fakt duket nga grafiku i funksionit $f(x) = 1/x^2$ se vlerat e $f(x)$ mund të bëhen gjithnjë edhe më të mëdha kur merret x shumë afër 0. Prandaj vlerat e $f(x)$ nuk i afrohen ndonjë numri, kështu që limiti i këtij funksioni nuk ekziston.

x	$1/x^2$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	$10,000$
± 0.001	$1,000,000$

Tabela 2.9: Vlerat e $f(x) = 1/x^2$ afër zeros.

Për të paraqitur sjelljen e këtij funksioni përdorim shënimin

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Kjo nuk do të thotë se e shohim ∞ si një numër apo se ekziston limiti, por është thjeshtë një mënyre simbolike për të paraqitur faktin e mësipërm. Në përgjithësi simbolikisht shkruajmë:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

për të treguar se vlerat e $f(x)$ bëhen gjithnjë e më të mëdha (ose rriten pa kufi), kur x merret mjaft afër a-së, por jo a.

Përkufizim 2.1. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në të dy anët e a-së, me përjashtim ndoshta të a-së. Atëherë, **limiti i** $f(x)$ **rritet pambarimisht**, që shënohet me,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

kur vlerat e $f(x)$ mund të bëhen arbitrarisht të mëdha (aq të mëdha sa të duam) kur merret x mjaft afër a-së, por jo i barabartë me a.

Një tjetër shënim për $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ është

$$f(x) \to \infty \; kur \;\; x \to a$$

Edhe një herë ∞ nuk është një numër, ndërsa shprehja $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ shpesh lexohet "**limiti i** $f(x)$**, kur** x **shkon në** a **është infinit**"ose "$f(x)$ **rritet pa kufij kur** x **shkon në** a".

Përkufizim 2.2. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në të dy anët e a-së me përjashtim ndoshta të vetë a-së. Atëherë, **limiti i** $f(x)$ **zvogëlohet pambarimisht**, që shënohet me,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

do të thotë se vlerat e $f(x)$ bëhen arbitrarisht të vogla negative përë x mjaft afër a-së, por jo të barabartë me a. Ne themi që "**limiti i** $f(x)$ **kur** x **i afrohet** a **është minus infinit**"ose "$f(x)$ **zvogëlohet pa kufi kur** x **shkon tek** a".

Si shembull të kësaj kemi

$$\lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty.$$

Përkufizime të ngjashme mund të jepen për limitet e njëanshme infinit

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

duke ju kujtuar edhe një herë se $x \to a^-$ do të thotë se konsiderojmë vlerat e x më të vogla se a dhe $x \to a^+$ do të thotë se konsiderojmë vlerat e x më të mëdha se a.

Përkufizim 2.3. Drejtëza $x = a$ quhet **asimptotë vertikale** e kurbës $y = f(x)$ në qoftë se ka vend një nga barazimet e mëposhtme:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

Për shembull, boshti i y-ve është asimptotë vertikale për funksionin $y = \frac{1}{x^2}$ sepse

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty.$$

Shembull 2.9. *Gjeni limitet*

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2x}{x-3}\right),\ dhe\ \lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2x}{x-3}\right).$$

Zgjidhje: Në qoftë se x është afër 3, por më i madh se tre, atëherë emëruesi $x-3$ është një numër i vogël pozitiv, ndërsa $2x$ është afër 6. Kështu që raporti $2x/(x-3)$ është një numër i madh pozitiv. Prandaj intuitivisht ne themi se

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{2x}{x-3}\right) = \infty$$

Njëlloj, në qoftë se x i afrohet 3, por duke qenë më i vogël se 3, atëherë $x-3$ është një numër i vogël negativ, por $2x$ vazhdon të jetë një numër pozitiv (afër 6). Kështu që raporti $2x/(x-3)$ është një numër i shumë i vogël negativ. Prandaj intuitivisht ne themi se

$$\lim_{x\to 3^-}\left(\frac{2x}{x-3}\right) = -\infty$$

Drejtëza $x = 3$ është asimptotë vertikale.

Shembull 2.10. *Gjeni asimptotat vertikale të*

$$y = \tan x.$$

Zgjidhje: Meqë $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, atëherë asimptotë vertikale do ketë aty ku $\cos x = 0$. Në fakt, ngaqë $\cos x \to 0^+$ kur $x \to (\pi/2)^-$, ndërkohë që $\sin x$ është një numër pozitiv kur x është pranë $\frac{\pi}{2}$, kemi:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = \infty \ \ dhe \ \ \lim_{x\to(\pi/2)^+} \tan x = -\infty$$

Kjo tregon se drejtëza $x = \pi/2$ është asimptotë vertikale. Duke arsyetuar njëlloj tregohet se drejtëzat $x = (2n+1)\pi/2$, ku n është numër i plotë, janë asimptota vertikale të funkionit $y = \tan x$.

□

Ushtrime:

Përcaktoni limitet e pafundëm

1.

$$\lim_{x\longrightarrow -3^+} \frac{x+2}{x+3}$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow -3^-} \frac{x+2}{x+3}$$

3.
$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{2-x}{(x-1)^2}$$

4.
$$\lim_{x\longrightarrow 5^-} \frac{e^x}{(x-5)^3}$$

5.
$$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \ln(x^2-9)$$

6.
$$\lim_{x\longrightarrow \pi^-} \cot x$$

7.
$$\lim_{x\longrightarrow 2\pi^-} x\csc x$$

8.
$$\lim_{x\longrightarrow 2^-} \frac{x^{-}2x}{x^2-4x+4}$$

9. *Përcaktoni* $\lim_{x\longrightarrow 1^-} \frac{1}{x^3-1}$ *dhe* $\lim_{x\longrightarrow 1^+} \frac{1}{x^3-1}$

a) Duke llogaritur vlerat e $f(x) = 1/(x^3-1)$ *për vlera të* x *që i afrohen 1 nga e majta dhe nga e djathta.*

b) Nga grafiku i $f(x)$.

10. *a) Gjeni asimptotat vertikale të funksionit*

$$y = \frac{x^2+1}{3x-2x^2}$$

b) Konfirmoni përgjigjen tuaj në pikën a) duke ndërtuar grafikun e funksionit.

2.4 Përkufizimi i saktë i limitit

Përkufizimi intuitiv i limitit është i papërshtatshëm në disa raste sepse shprehjet si "x shumë afër 2"dhe "$f(x)$ **i afrohet gjithnjë e më shumë** L"janë jo të sakta. Në mënyrë që të jemi në gjendje të konkludojmë me saktësi vërtetimin e

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10,000}\right) = 0.0001 \quad \textit{ose} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

duhet të bëjmë një përkufizim më të saktë për limitin. Për ta motivuar përkufizimin e saktë të limitit le të shqyrtojmë funksionin:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \textit{në qoftë se} \quad x \neq 3 \\ 6 & \textit{në qoftë se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Intuitivisht është e qartë se kur x i afrohet 3 pa qenë i barabartë me 3, atëherë $f(x)$ i afrohet 5 dhe kështu $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$. Për të përftuar informacion më të detajuar se si varion $f(x)$ kur x skon tek 3, bëjmë pyetjen: sa afër 3 duhet të jetë x, që $f(x)$ të ndryshojë nga 5 me 0.1?

Distanca nga x tek 3 është $|x-3|$ dhe distanca nga $f(x)$ tek 5 është $|f(x)-5|$, kështu që problemi jonë është të gjejmë numrin δ të tillë që

$$|f(x)-5| < 0.1 \quad \textit{në qoftë se} \quad |x-3| < \delta \quad \textit{por} \quad x \neq 3$$

Në qoftë se $|x-3| > 0$, atëherë $x \neq 3$, kështu që një formulim ekuivalent i problemit tonë është: të gjendet numri δ i tillë që

$$|f(x)-5| < 0.1 \ \textit{në qoftë se}\ 0 < |x-3| < \delta.$$

Vërejmë se në qoftë se $0 < |x-3| < (0.1)/2 = 0.05$, atëherë

$$|f(x)-5| = |2x-1-5| = |2x-6| = 2|x-3| < 0.1.$$

Pra,

$$|f(x)-5| < 0.1 \quad \textit{në qoftë se} \quad 0 < |x-3| < 0.05.$$

Prandaj, përgjigja për problemin është $\delta = 0.05$, që do të thotë se në qoftë se x ndodhet brenda distancës 0.05 nga 3, atëherë $f(x)$ ndodhet brenda distancës 0.1 nga 5.

Në qoftë se ndryshojmë numrin 0.1 për të marrë një më të vogël, 0.01, atëherë nga përdorimi i të njëjtës metodë, do të gjejmë se $f(x)$ ndryshon nga 5 me jo më shumë se 0.01, kur x ndryshon nga 3 me jo më shumë se $(0.01)/2 = 0.005$:

$$|f(x)-5| < 0.01 \quad \textit{në qoftë se} \quad 0 < |x-3| < 0.005.$$

Në mënyrë të ngjashme,

$$|f(x)-5| < 0.001 \quad \textit{në qoftë se} \quad 0 < |x-3| < 0.0005$$

Numrat që ne morëm në konsideratë, 0.1, 0.01, 0.001 janë toleranca e gabimit, pë të cilën do të flasim më poshtë. Që 5 të jetë limiti i saktë i funksionit $f(x)$ kur x shkon tek 3, nuk na mjafton vetëm që diferenca e $f(x)$ nga 5 të jetë më e vogël se këta numra, por ajo duhet të jetë më e vogël se çdo numër pozitv (sado i vogël të jetë ky i fundit). Në qoftë se e shkruajmë ε një numër pozitiv, atëherë ne gjejmë si më parë se

$$|f(x)-5|<\varepsilon \quad \textit{në qoftë se} \quad 0<|x-3|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Vërejmë se nga përkufizimi i limitit kemi

$$5-\varepsilon<f(x)<5+\varepsilon \quad \textit{kur} \quad 3-\delta<x<3+\delta.$$

Duke marrë vlerat e $x\neq 3$ brenda intervalit $(3-\delta, 3+\delta)$ mund të marrim vlerat e $f(x)$ brenda intervalit $(5-\varepsilon, 5+\varepsilon)$. Më poshtë japim përkufizimin e saktë të limitit.

Përkufizim 2.4. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në ndonjë interval të hapur rreth pikës a, me përjashtim ndoshta të a. Numrin L e quajmë **limit i funksionit** $f(x)$ **kur** x **shkon në** a dhe simbolikisht këtë fakt e shënojmë me

$$\lim_{x\to a} f(x)=L,$$

në qoftë se për çdo numër $\varepsilon>0$ ekziston një numër $\delta>0$ i tillë që

$$|f(x)-L|<\varepsilon \quad \textit{kur} \quad 0<|x-a|<\delta.$$

Një tjetër mënyrë për të shkruar rreshtin e fundit të përkufizimit të mësipëm është: Në qoftë se

$$0<|x-a|<\delta \quad \textit{atëherë} \quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

Meqë $|x-a|$ është distanca nga x tek a dhe $|f(x)-L|$ distanca nga $f(x)$ tek L dhe meqënëse ε mund të jetë shumë e vogël, atëherë përkufizimi i limitit mund të shprehet me fjalë si më poshtë: $\lim_{x\to a} f(x)=L$ do të thotë se distanca ndërmjet $f(x)$ dhe L mund të bëhet arbitrarisht e vogël duke marrë distancën ndërmjet x dhe a mjaft të vogël (por jo zero), ose ndryshe $\lim_{x\to a} f(x)=L$ do të thotë se vlerat e $f(x)$ mund të bëhen aq afër L duke marrë x mjaft afër a (por jo a.

Ne gjithashtu mund ta riformulojmë përkufizimin në termat e intervaleve, duke pat parasysh njëvlershmërinë midis dy mosbarazimeve $|x-a|<\delta$ dhe $-\delta<x-a<\delta$ ose $a-\delta<x<a+\delta$. Gjithashtu $0<|x-a|$ është i vërtetë vetëm kur $x-a\neq 0$, domethënë $x\neq a$. Njëlloj, mosbarazimi $|f(x)-L|<\varepsilon$ është ekujvalent me mosbarazimin $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. Prandaj në termat e intervaleve përkufizimi merrë trajtën:

Përkufizim 2.5. Numri L quhet **limit i funksionit** $f(x)$ kur x shkon në a, shënohet me $\lim_{x\to a} f(x)=L$, kur për çdo $\epsilon>0$ (sado i vogël qoftë ai) mund të gjejmë $\delta>0$ të tillë që në qoftë se x shtrihet në intervalin e hapur $(a-\delta, a+\delta)$ dhe $x\neq a$, atëherë $f(x)$ shtrihet në intervalin e hapur $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Përkufizimi i limitit thotë se për çdo interval sado të vogël $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ të dhënë rreth L, mund të gjejmë një interval $(a-\delta, a+\delta)$ rreth a të tillë që f pasqyron të gjitha pikat e intervalit $(a-\delta, a+\delta)$ tek intervali $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

Tani mund të japim një tjetër interpretim gjeometrik të limitit në lidhje me grafikun e funksionit. Për $\varepsilon>0$ të dhënë, vizatojmë drejtëzat horizontale $y=L-\varepsilon$ dhe $y=L+\varepsilon$ dhe grafikun e $f(x)$. Në qoftë se $\lim_{x\to a} f(x)=L$, atëherë mund të gjejmë një numër $\delta>0$ të tillë që për x brenda intervalit $(a-\delta, a+\delta)$, por të ndryshëm nga a, që kurba $y=f(x)$ të shtrihet ndërmjet drejtëzave $y=L-\varepsilon$ dhe $y=L+\varepsilon$.

Shembull 2.11. *Vërtetoni se*

$$\lim_{x\to 3}(4x-5)=7.$$

Zgjidhje: Le të jetë ε një numër i dhënë pozitiv. Ne duam të gjejmë δ të tillë që

$$|(4x-5)-7|<\varepsilon \; \textit{kur} \; 0<|x-3|<\delta$$

Por $|(4x-5)-7|=|4x-12|=|4(x-3)|$. Pra, ne duam që

$$4|x-3|<\varepsilon \quad \textit{kur} \quad 0<|x-3|<\delta$$

ose
$$|x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \quad kur \quad 0 < |x-3| < \delta$$
Kjo na sugjeron ta zgjedhim $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Të tregojmë se kjo δ e zgjedhur funksionon. Për ε të dhëne pozitiv, zgjedhim $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Në qoftë se $0 < |x-3| < \delta$, atëherë
$$|(4x-5)-7| = |4x-12| = 4|x-3| < 4\delta = 4(\frac{\varepsilon}{4}) = \varepsilon.$$
Prandaj,
$$|(4x-5)-7| < \varepsilon \quad kur \quad 0 < |x-3| < \delta$$
dhe nga përkufizimi i limitit,
$$\lim_{x\to 3}(4x-5) = 7.$$
$\square$

Vërejmë se zgjidhja në këtë shembull kalon në dy hapa: supozimi dhe vërtetimi. Në bëmë një analizë paraprake që na mundësoi gjetjen e supozuar të vlerës për δ. Ndërsa në hapin e dytë përsëritëm të njëjtin veprim për të provuar me një mënyrë logjike dhe të kujdesshme supozimin e bërë. Përkufizimet intuitive të limiteve të njëanshme mund të formulohen saktë si më poshtë.

Përkufizim 2.6. Numri L quhet **limit i majtë i funksionit** $f(x)$ dhe shënohet me
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$
në qoftë se për çdo numër $\varepsilon > 0$ ekziston një numër $\delta > 0$ i tillë që
$$|f(x) - L| < \varepsilon kur\ a - \delta < x < a.$$

Përkufizim 2.7. Numri L quhet **limit i djathtë i funksionit** $f(x)$ dhe shënohet me
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
në qoftë se për çdo numër $\varepsilon > 0$ ekziston një numër $\delta > 0$ e tillë që
$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad kur \quad a < x < a + \delta.$$

Vërejmë se përkufizimi është i njëjtë me përkufizimin e saktë të limitit të zakonshëm, me përjashtim të faktit se x ndodhet në gjysmën e majtë $(a-\delta, a)$ të intervalit $(a-\delta, a+\delta)$. Në përkufizimin e djathtë, x ndodhet në gjysmën e djathtë $(a, a+\delta)$ të $(a-\delta, a+\delta)$.

Shembull 2.12. *Përdorni përkufizimin e limitit të djathtë për të treguar se*
$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0.$$

Zgjidhje: Le të jetë $\varepsilon > 0$ i dhënë. Këtu $a = 0$ dhe $L = 0$, kështu që duam të gjejmë një numër δ të tillë që
$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon \quad kur \quad 0 < x < \delta$$
pra
$$\sqrt{x} < \varepsilon \quad kur \quad 0 < x < \delta.$$
Duke ngritur në katror të dy anët e mosbarazimit $\sqrt{x} < \varepsilon$, ne marrim
$$x < \varepsilon^2 \quad kur \quad 0 < x < \delta.$$
Kjo na sugjeron që ne ta zgjedhim $\delta = \varepsilon^2$.

Të tregojmë se kjo δ funksionon. Për $\varepsilon > 0$ të dhënë, le ta marrim $\delta = \varepsilon^2$. Në qoftë se $0 < x < \delta$, atëherë

$$\sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

pra

$$|\sqrt{x} - 0| < \varepsilon.$$

Në përputhje me përkufizimin e limitit të djathtë kemi që $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

□

Shembull 2.13. *Vërtetoni se*

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 9.$$

Zgjidhje: Le të jetë $\varepsilon > 0$ i dhënë. Ne duhet të gjejmë një numër $\delta > 0$ të tillë që

$$|x^2 - 9| < \varepsilon \quad kur \quad 0 < |x - 3| < \delta.$$

Pra, ne duam

$$|(x+3)(x-3)| < \varepsilon \quad kur \quad 0 < |x-3| < \delta.$$

Vërejmë se po qe se mund të gjejmë një konstante pozitive C e tilë që $|x + 3| < C$, atëherë

$$|(x+3)(x-3)| < C|x-3|$$

dhe marrim $C|x - 3| < \varepsilon$ duke marrë $|x - 3| < \varepsilon/C = \delta$. Një numër i tillë C mund të gjendetë në qoftë se e ngushtojmë x të shtrihet në një interval me qendër 3. Në fakt meqenë qoftë se jemi të interesuar për x që janë shumë afër 3, atëherë është e arsyeshme të pranojmë që x të ketë një distancë 1 nga 3, domethënë $|x - 3| < 1$. Prej nga $2 < x < 4$ dhe prej këtej $5 < x + 3 < 7$, prandaj kemi $|x + 3| < 7$, pra $C = 7$ është një zgjedhje e përshtatshme për konstanten.

Por tani ka dy kufizime për $|x - 3|$,

$$|x-3| < 1 \quad dhe \quad |x-3| < \frac{\varepsilon}{C} = \frac{\varepsilon}{7}$$

Për të qenë të sigurt se të dy këto mosbarazime plotësohen e zgjedhim δ që të jetë më e vogël se secili nga numrat 1 dhe $\frac{\varepsilon}{7}$. Pra, shënojmë

$$\delta = min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}.$$

Të tregojmë se kjo delta funksionon. Për ε të dhënë, le të jetë $\delta = min\{1, \varepsilon/7\}$. Në qoftë se $0 < |x - 3| < \delta$, atëherë $|x - 3| < 1 \Longrightarrow 2 < x < 4 \Longrightarrow |x + 3| < 7$ (si në pjesën e parë). Ne gjithashtu kemi $0 < |x - 3| < \varepsilon/7$, prej nga

$$|x^2 - 9| = |x-3||x+3| < 7 \cdot \frac{\varepsilon}{7} = \varepsilon$$

Kjo tregon se $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$.

□

Siç e tregon shembulli jo gjithmonë është e lehtë të provohet vlera e limitit në bazë të përkufizimit me gjuhën e ε, δ. Në fakt, në qoftë se do kishim një funksion paksa më të komplikuar si $f(x) = (6x^2 - 8x + 9)/(2x^2 - 1)$ vërtetimi do të kërkonte akoma më shumë përpjekje. Për fat të mirë kjo zgjidhet ndryshe sepse vet rregullat e limitit mund të vërtetohen duke u bazuar tek përkufizimi i saktë i limitit. Në këtë mënyrë limitet e funksioneve të komplikuara mund të gjenden duke përdorur rregullat e kalimit në limit, pa qenë nevoja t'i drejtohemi përkufizimit të funksionit.

2.4.1 Limitet e pafundme

Limitet e pafundme gjithashtu mund të përkufizohen në mënyrë të saktë.

Përkufizim 2.8. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në një interval të hapur që përmban numrin a, me përjashtim ndoshta të a. Atëherë,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

do të thotë se për çdo numër pozitiv M, ekziston një numër pozitiv δ i tillë që

$$f(x) > M \quad kur \quad 0 < |x-a| < \delta.$$

Kjo do të thotë se vlerat e $f(x)$ bëhen shumë të mëdha (më të mëdha se një numër pozitv M, sado i madh qoftë ai) duke marrë x mjaft afër a. Për çdo drejtëz horizontale të dhënë $y = M$, ne mund të gjejmë një numër $\delta > 0$ të tillë që duke marrë vlerat e x brenda intervalit $(a-\delta, a+\delta)$, por jo të barabarta me a, atëherë kurba $y = f(x)$ shtrihet sipër drejtëzës $y = M$.

Shembull 2.14. *Përdorni përkufizimin e limitit të pafundëm për të treguar se*

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

Zgjidhje: Le të jetë dhënë$M > 0$, ne duam të gjejmë $\delta > 0$ të tillë që

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2} &> M \; kur \;\; 0 < |x-0| < \delta \\
x^2 &< \frac{1}{M} \; kur \;\; 0 < |x| < \delta \\
|x| &< \frac{1}{\sqrt{M}} \; kur \;\; 0 < |x| < \delta
\end{aligned}$$

Kjo na sugjeron se duhet ta marrim $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$.

Të tregojmë se kjo δ funksionon. Në qoftë se $M > 0$ është dhënë, le të jetë $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$. Për $0 < |x-0| < \delta$, atëherë

$$|x| < \delta \Longrightarrow x^2 < \delta^2 \Longrightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta^2} = M$$

Prandaj, $\frac{1}{x^2} > M$ kur $0 < |x-0| < \delta$. Kështu që nga përkufizimi del se

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

□

Në mënyrë të ngjashme themi:

Përkufizim 2.9. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në një interval të hapur që përmban numrin a, me përjashtim ndoshta të a. Atëherë

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

do të thotë se për çdo numër negativ N, ekziston një numër pozitiv δ i tillë që

$$f(x) < N \quad kur \quad 0 < |x-a| < \delta$$

Ushtrime:

1. *Përdorni grafikun për të gjetur një numër δ të tillë që në qoftë se $\left|x - \frac{\pi}{4}\right| < \delta$, atëherë $|\tan x - 1| < 0.2$.*

2. *Përdorni grafikun për të gjetur një numër δ të tillë që në qoftë se $|x-1| < \delta$, atëherë $\left|\frac{2x}{x^2+4} - 0.4\right| < 0.1$*

3. *Për limitin*

$$\lim_{x\longrightarrow 1} (4 + x - 3x^3) = 2$$

ilustroni përkufizimin e limitit duke gjetur vlerat e δ që ti korespondojnë $\varepsilon = 1$ dhe $\varepsilon = 0.1$.

4. *Për limitin*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

ilustroni përkufizimin e limitit duke gjetur vlerat e δ që ti korespondojnë $\varepsilon = 0.5$ dhe $\varepsilon = 0.1$.

5. *Është dhënë $\lim_{x\longrightarrow \pi/2} \tan^2 x = \infty$, ilustroni përkufizimin e limitit duke gjetur vlerat e δ të cilat i korrespondojnë (a) $M = 1000$ dhe (b) $M = 10,000$.*

Vërtetoni barazimet duke u nisur nga përkufizimi me gjuhën e ε, δ dhe ilustrojini ato.

6.

$$\lim_{x\longrightarrow 1} (2x + 3) = 5$$

7.
$$\lim_{x\longrightarrow -3}(1-4x)=13$$

8.
$$\lim_{x\longrightarrow -2}(\frac{1}{2}x+3)=2$$

9.
$$\lim_{x\longrightarrow 4}(7-3x)=-5$$

Vërtetoni barazimet duke u nisur nga përkufizimi me gjuhën e ε, δ

10.
$$\lim_{x\longrightarrow 3}\frac{x}{5}=\frac{3}{5}$$

11.
$$\lim_{x\longrightarrow 6}(\frac{x}{4}+3)=\frac{9}{2}$$

12.
$$\lim_{x\longrightarrow 2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=5$$

13.
$$\lim_{x\longrightarrow a}x=a$$

14.
$$\lim_{x\longrightarrow 0}x^2=0$$

15.
$$\lim_{x\longrightarrow 0}|x|=0$$

16.
$$\lim_{x\longrightarrow 1.5}\frac{9-4x^2}{3+2x}=6$$

17.
$$\lim_{x\longrightarrow a}c=c$$

18.
$$\lim_{x\longrightarrow 9^-}\sqrt[4]{9-x}=0$$

19.
$$\lim_{x\longrightarrow 3}(x^2+x-4)=8$$

20.
$$\lim_{x\longrightarrow 2}(x^2-4x+5)=1$$

21.
$$\lim_{x\longrightarrow -2}(x^2-1)=3$$

22.
$$\lim_{x\longrightarrow 2}x^3=8$$

23. *Vërtetoni duke u nisur nga përkufizimi se* $\lim_{x\longrightarrow -3}\frac{1}{x+3}^4=\infty$.

24. *Supozojmë se* $\lim_{x\longrightarrow a}f(x)=\infty$ *dhe* $\lim_{x\longrightarrow a}g(x)=c$, *ku* c *është një numër natyror. Vërtetoni secilin nga barazimet:*
(a) $\lim_{x\longrightarrow a}[f(x)+g(x)]=\infty$.
(b) $\lim_{x\longrightarrow a}[f(x)g(x)]=\infty$ *në qoftë se* $c>0$.
(a) $\lim_{x\longrightarrow a}[f(x)g(x)]=-\infty$ *në qoftë se* $c<0$.

2.5 Rregullat e kalimit në limit

Në seksionin e mëparshëm përdorëm makinat llogaritëse dhe grafikët për të llogaritur vlerat e limiteve, por pamë se metoda të tilla jo gjithmonë na shpien tek përgjigjja e saktë. Në këtë seksion do të përdorim vetitë e mëposhtme të limitit, të quajtura *Rregullat e limitit*, për të llogaritur limitet.

Lema 2.1. *Supozojmë se c është një konstante dhe limitet* $\lim_{x\to a}f(x)$ *dhe* $\lim_{x\to a}g(x)$ *ekzistojnë, atëherë barazimet që vijojnë janë të vërteta:*

i) $\lim_{x\to a}c=c$

ii) $\lim_{x\to a}x=a$

iii) $\lim_{x\to a}x^n=a^n$ *ku n është një numër natyror.*

iv) $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$

v) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$

vi) $\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)]=c\cdot\lim_{x\to a}f(x)$

vii) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x)$

viii) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}$ *në qoftë se* $\lim_{x\to a}g(x)\neq 0$

ix) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n=[\lim_{x\to a}f(x)]^n$ *ku n është një numër natyror.*

x) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ *ku n është numër natyror.*

Vërtetim: Le të jetë dhënë $\varepsilon > 0$. Ne duhet të gjejmë $\delta > 0$ të tillë që

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon kur \ \ 0 < |x - a| < \delta.$$

Duke përdorur mosbarazimin e trekëndëshit ne mund të shkruajmë:

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f(x) - L) + (g(x) - M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M|.$$

Prej nga përftojmë

$$|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon,$$

duke marrë secilin nga termat $|f(x) - L|$ dhe $|g(x) - M|$ më të vegjël se $\varepsilon/2$.

Meqë $\varepsilon/2 > 0$ dhe $\lim_{x\to a} f(x) = L$, atëherë ekziston një numër $\delta_1 > 0$ i tillë që

$$|f(x) - L| < \varepsilon/2 \ kur \ \ 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Në mënyre të ngjashme, meqënëse $\lim_{x\to a} g(x) = M$, atëherë ekziston një numër $\delta_2 > 0$ i tillë që

$$|g(x) - M| < \varepsilon/2 \quad kur \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Le ta marrim $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vërejmë se, po qe se $0 < |x - a| < \delta$, atëherë plotësohen njëherazi të dy mosbarazimet $0 < |x - a| < \delta_1$ dhe $0 < |x - a| < \delta_2$ dhe prej këtej edhe mosbarazimet:

$$|f(x) - L| < \varepsilon/2 \ dhe \ |g(x) - M| < \varepsilon/2.$$

Pra, kemi:

$$\begin{aligned}
&|f(x) + g(x) - (L + M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \\
&|f(x) + g(x) - (L + M)| < \varepsilon \quad kur \quad 0 < |x - a| < \delta
\end{aligned}$$

Pra,

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = L + M$$

□

Tani shohim disa shembuj limitesh duke përdorur rregullat e mësipërme.

Shembull 2.15. *Llogarisni limitet e mëposhtëm:*

a) $\lim_{x\to 5} (2x^2 - 3x + 4)$.

b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+3x^2-1}{5-3x}$.

Zgjidhje: Për a) kemi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 5} (2x^2 - 3x + 4) &= \lim_{x\to 5} (2x^2) - \lim_{x\to 5} (3x) + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 2 \lim_{x\to 5} (x^2) - 3 \lim_{x\to 5} (x) + \lim_{x\to 5} 4 \\
&= 39
\end{aligned}$$

Gjithashtu për b) kemi

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 1}{5 - 3x} &= \frac{\lim_{x\to -2} (x^3 + 2x^2 - 1}{\lim_{x\to -2} (5 - 3x)} \\
&= \frac{\lim_{x\to -2} x^3 + 2 \lim_{x\to -2} x^2 - \lim_{x\to -2} 1}{\lim_{x\to -2} 5 - 3 \lim_{x\to -2} x} \\
&= -\frac{1}{11}
\end{aligned}$$

□

Vërejtje 2.1. *Tek funksioni $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ llogarisnim $f(5) = 39$. Vëmë re se po aq ishte edhe limiti i tij kur x shkon tek 5. Njëlloj do rezultonte edhe tek shembulli (b). Kjo ndodh sepse kemi të bëjmë me funksione polinomiale dhe racionale respektivisht dhe përdorimi i rregullave të limitit provon se me to mund të punohet me zëvendësim të drejtpërdrejtë për të arritur tek vlera e limitit që kërkohet.*

Rregull: (Vetia e zëvendësimit të drejtpërdrejtë). Në qoftë se $f(x)$ është një funksion polinomial ose racional, dhe a një vlerë nga bashkësia e përkufizimit të tij, atëherë:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Funksionet që kanë vetinë e zëvendësimit të drejtpërdrejtë janë quajtur funksione të vazhdueshme në a dhe do të studiohen me tej. Megjithatë jo të gjitha limitet mund të njehsohen nëpërmjet zëvendësimit të drejtpërdrejtë, siç tregohet në shembujt në vazhdim.

Shembull 2.16. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}.$$

Zgjidhje: Për funksionin $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ne nuk mund ta gjejmë limitin me zëvendësim të drejtpërdrejtë, sepse ky nuk është i përkufizuar për $x = 1$, $f(1)$ nuk ekziston. Por as regullin e limitit të raportit s'mund ta përdorim sepse limiti i emëruesit është zero. Prandaj le t'i kthehemi veprimeve algjebrike. Zbërthejmë numëruesin si diferencë katrorësh:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

Numëuesi dhe emëruesi kanë një faktor të përbashkët $(x-1)$. Kur kalojmë në limit, kur x shkon në 1, ne kemi $x \neq 1$, kështu që edhe $x - 1 \neq 0$. Prandaj mund të thjeshtojmë faktorin e përbashkët dhe më pas të njehsojmë limitin:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1 + 1 = 2.$$

□

Vërejtje 2.2. *Në shembullin më sipër, për llogaritjen e limitit të funksionit $y = (x^2-1)/(x-1)$ e zëvendësuam atë me një funksion më të thjeshtë, $g(x) = x + 1$, i cili kishte të njëjtin limit. Kjo është e vlefshme sepse $f(x) = g(x)$, me përjashtim të $x = 1$ dhe kur llogaritim limitin kur x i afrohet 1 ne nuk marrim parasysh vlerën $x = 1$. Në përgjithësi, në qoftë se $f(x) = g(x)$ kur $x \neq a$, atëherë*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

Shembull 2.17. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x\to 1} g(x),$$

ku

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & \textit{në qoftë se} \quad x \neq 1 \\ \pi & \textit{në qoftë se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Zgjidhje: Këtu $g(x)$ është përkufizuar në $x = 1$ dhe $g(1) = \pi$, por vlera e limitit kur x i afrohet 1 nuk varet nga vlera e funksionit në 1. Meqë $g(x) = x + 1$ për $x \neq 1$, kemi

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

□

Vërejmë se vlerat e funksionit në shembujt e mësipërm janë identike me përjashtim të $x = 1$, pra ata kanë të njëjtin limit kur x shkon tek 1

Shembull 2.18. *Llogarisni*

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}.$$

Zgjidhje: Në qoftë se përcaktojmë

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h}$$

atëherë s'mund ta llogarisim $\lim_{h\to 0} F(h)$ duke marrë $h = 0$, meqënëse $F(0)$ është e papërcaktuar. Por, në qoftë se thjeshtojmë $F(h)$ algjebrikisht, gjejmë se

$$F(h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h.$$

Rikujtojmë se marrim parasysh vetëm vlerat $h \neq 0$ kur h i afrohet 0. Prandaj,

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0}(6 + h) = 6.$$

□

Shembull 2.19. *Gjeni* $\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

Zgjidhje: Ne s'mund ta përdorim rregullin e raportit menjëherë, meqënëse limiti i emëruesit është zero. Kështu që fillimisht veprojmë algjebrikisht, duke shumëzuar e pjestuar me të konjuguarin e numëruesit:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+9)-9}{t^2\sqrt{t^2+9}+3} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2(\sqrt{t^2+9}+3)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)}+3} \\
&= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

□

Disa limite gjenden më mirë duke llogaritur fillimisht limitet e njëanshme. Teorema në vazhdim është një kujtesë e asaj që u zbulua në paragrafin e mëparshem. Ajo thotë se limiti ekziston atëherë dhe vetëm atëherë kur të dy limitet e njëanshëm ekzistojnë dhe janë të barabartë.

Teorema 2.1. *Jepet funksioni* $f(x)$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Vërtetim: Detyrë lexuesit.

□

Kur llogarisim limitet e njëanshëm kemi parasysh se rregullat e limitit vlejnë gjithashtu edhe për këto limite.

Shembull 2.20. *Vërtetoni se*

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

Zgjidhje: Kujtojmë që

$$|x| = \begin{cases} x & \textit{në qoftë se} \quad x \geq 0 \\ -x & \textit{në qoftë se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Meqë $|x| = x$ për $x > 0$, kemi

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Për $x < 0$ kemi $|x| = -x$ dhe prej këtej

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$$

Prandaj nga Teorema 2.1, $\lim_{x \to 0} |x| = 0$.

□

Shembull 2.21. *Vërtetoni se* $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ *nuk ekziston.*

Zgjidhje: Përpiqemi të gjejmë njëherë limitet e njanëshme

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Meqë limiti i majtë është i ndryshëm nga ai i djathtë, atëherë nga Teorema 2.1 rrjedh se ky limit nuk ekziston.

□

Shembull 2.22. *Në qoftë se*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \textit{në qoftë se} \quad x > 4 \\ 8 - 2x & \textit{në qoftë se} \quad x < 4 \end{cases}$$

përcaktoni se kur ekziston limiti $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Zgjidhje: Meqë $f(x) = \sqrt{x-4}$ për $x > 4$, kemi

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0.$$

Meqë $f(x) = 8 - 2x$ për $x < 4$, ne kemi

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (8 - 2x) = 8 - 2 \cdot 4 = 0.$$

Limitet e majta dhe të djathta janë të barabarta. Prandaj limiti i funksionit ekziston dhe $\lim_{x \to 4} f(x) = 0$.

□

Shembull 2.23. *Vërtetoni se* $\lim_{x \to 3} [x]$ *nuk ekziston.*

Zgjidhje: Meqë $[x] = 3$ për $3 \leq x < 4$, kemi

$$\lim_{x \to 3^+} [x] = \lim_{x \to 3^+} 3 = 3.$$

Meqë $[x] = 2$ për $2 \leq x < 3$, kemi

$$\lim_{x \to 3^-} [x] = \lim_{x \to 3^-} 2 = 2.$$

Meqë limitet e njëanshme janë të ndryshme, atëherë ky funksion nuk ka limit kur x shkon tek 3.

□

Teoremat në vazhdim japin dy veti shtesë për limitin.

Teorema 2.2. *Në qoftë se* $f(x) \leq g(x)$ *kur* x *shkon tek* a *(me përjashtim ndoshta të* a*-së) dhe të dy limitet e* $f(x)$ *dhe* $g(x)$ *ekzistojnë kur* x *shkon tek* a*, atëherë*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Teorema 2.3. *Në qoftë se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ kur x është rreth a (me përjashtim ndoshta të a-së) dhe*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

atëherë

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Thuhet se në qoftë se $g(x)$ ndodhet ndërmjet dy funksioneve $f(x)$ dhe $h(x)$ për x afër a, ku $f(x)$ dhe h kanë të njëjtin limit L në a, atëherë detyrimisht $g(x)$ do ketëtë njëjtin limit, pra L.

Shembull 2.24. *Vërtetoni se*

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Zgjidhje: Fillimisht s'mund të përdorim

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} x^2 \cdot \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

sepse $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ nuk ekziston.

Përpiqemi të përdorim teoremën e mësipërme. Meqenese, $-1 \leq \sin x \leq 1$ kemi

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2.$$

Ne dimë se $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ dhe $\lim_{x \to 0}(-x^2) = 0$. Duke marrë $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \sin(1/x)$, dhe $h(x) = x^2$ nga teorema e mësipërme kemi

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

□

Ushtrime:

1. *Dihet se*

$$\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = 4 \quad \lim_{x \longrightarrow 2} g(x) = -2 \quad \lim_{x \longrightarrow 2} h(x) = 0.$$

Gjeni limitet që ekzistojnë. Po qe se nuk ekzistojnë shpjegoni përse.

2.
$$\lim_{x \longrightarrow 2} [f(x) + 5g(x)].$$

3.
$$\lim_{x \longrightarrow 2} [g(x)]^3.$$

4.
$$\lim_{x \longrightarrow 2} \sqrt{f(x)}.$$

5.
$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{3f(x)}{g(x)}.$$

6.
$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

7.
$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}.$$

Llogarisni limitet duke shpjeguar në çdo hap rregullin e përdorur.

8.
$$\lim_{x \longrightarrow -2} (3x^4 + 2x^2 - x - 1)$$

9.
$$\lim_{x \longrightarrow 2} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}.$$

10.
$$\lim_{x \longrightarrow 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3).$$

11.
$$\lim_{t \longrightarrow -1} (t^2 + 1)^3 (t + 3)^5.$$

12.
$$\lim_{x \longrightarrow 1} \left(\frac{1 + 3x}{1 + 4x^2 + 3x^4}\right)^3.$$

13.
$$\lim_{u \longrightarrow -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}.$$

14.
$$\lim_{x\longrightarrow 4^-} \sqrt{16-x^2}.$$

15.
$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}.$$

16.
$$\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2-x+6}{x-2}.$$

17.
$$\lim_{x\longrightarrow -4} \frac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}.$$

18.
$$\lim_{t\longrightarrow 3} \frac{t^2-9}{2t^2+7t+3}.$$

19.
$$\lim_{x\longrightarrow -1} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}.$$

20.
$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(4+h)^2-16}{h}.$$

21.
$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

22.
$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{2+x}{x^3+8}.$$

23.
$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(2+h)^2-8}{h}.$$

24.
$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}.$$

25.
$$\lim_{t\longrightarrow 9} \frac{9-t}{3-\sqrt{t}}.$$

26.
$$\lim_{x\longrightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}.$$

27.
$$\lim_{x\longrightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{x^4-1}.$$

28.
$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}.$$

29.
$$\lim_{x\longrightarrow -4} \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{x}}{x+4}.$$

30.
$$\lim_{x\longrightarrow 16} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}.$$

31.
$$\lim_{t\longrightarrow 0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right).$$

32.
$$\lim_{x\longrightarrow -4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}.$$

33. *a) Përdorni grafikun e funksionit $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ për të llogaritur vlerën e limitit $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$.*

b) Përdorni një tabelë të vlerave të $f(x)$ për të vlerësuar limitin.

c) Përdorni rregullat e kalimit në limit për të gjetur saktësisht vlerën e limitit.

34. *Përdorni teoremën e shoqëruesve për të treguar që*
$$\lim_{x\longrightarrow 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$$
Ilusrojeni këtë duke ndërtuar grafikët e funksioneve $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$, dhe $h(x) = x^2$ në të njëjtin drejtkëndësh pamjeje.

35. *Përdorni teoremën e shoqëruesve për të treguar që*
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \left(\sqrt{x^3+x^3}\,\sin\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$
Ilusrojeni këtë duke ndërtuar grafikët e funksioneve $f(x)$, $g(x)$, dhe h në të njëjtin drejtkëndësh pamjeje.

36. *Në qoftë se $4x-9 \le f(x) \le x^2-4x+7$ për $x \ge 0$, gjeni $lim_{x\longrightarrow 4} f(x)$.*

37. *Në qoftë se $2x \le g(x) \le x^4-x^2+2$ për të gjitha x, gjeni $lim_{x\longrightarrow 1} g(x)$.*

38. *Vërtetoni se* $\lim_{x\longrightarrow 0} x^4 \cos\frac{2}{x} = 0$.

39. *Vërtetoni se* $\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)} = 0$.

40. *Gjeni limitin po qe se ekziston. Në qoftë se nuk ekziston shpjegoni pse.* $\lim_{x\longrightarrow 3}(2x+|x-3|)$.

41.
$$\lim_{x\longrightarrow -6} \frac{2x+12}{|x+6|}.$$

42.
$$\lim_{x\longrightarrow 0.5^-} \frac{2x-1}{|2x^3-x^2|}.$$

43.
$$\lim_{x\longrightarrow -2} \frac{2-|x|}{2+x}.$$

44.
$$\lim_{x\longrightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{|x|}\right).$$

45. *Le të jetë dhënë funksioni*

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \textit{në qoftë se} \quad x \leq 2 \\ x - 1 & \textit{në qoftë se} \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Gjeni $\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x)$, *dhe* $\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x)$.
b) A ekziston limiti $\lim_{x \longrightarrow 2} f(x)$*?*
c) Ndërtoni grafikun e $f(x)$.

46. *Le të jetë dhënë funksioni* $F(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$.
a) Gjeni $\lim_{x \longrightarrow 1^+} F(x)$, *dhe* $\lim_{x \longrightarrow 1^-} F(x)$.
b) A ekziston limiti $\lim_{x \longrightarrow 1} F(x)$*?*
c) Ndërtoni grafikun e $f(x)$.

47. *Në qoftë se p është një polinom, tregoni që* $lim_{x \longrightarrow a} p(x) = p(a)$.

48. *Në qoftë se* $\lim_{x \longrightarrow 1} \frac{f(x)-8}{x-1} = 10$, *gjeni limitin* $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$.

49. *Në qoftë se* $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 5$, *gjeni limitet* $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$ *dhe* $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

50. *A ekziston ndonjë numër a i tillë që*

$$\lim_{x \longrightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

të ekzistoje? Në qoftë se po gjejeni vlerën e a-së dhe vlerën e limitit.

Kapitulli 3

Vazhdueshmëria dhe derivati i funksionit

Koncepti i vazhdushmërisë së funksionit është një nga konceptet themelore të kalkulusit.

3.1 Vazhdueshmëria

Ne kemi përmendur se limiti i një funksioni kur x shkon në a shpesh mund të gjendet duke llogaritur vlerën e funksionit në $x = a$. Funksionet me këtë cilësi janë quajtur të vazhdueshëm në $x = a$. Do të shohim se përkufizimi i vazhdueshmërisë, është i lidhur ngushtë me kuptimin e fjalës vazhdueshmëri në gjuhën e përditshme. Me poshtë ne do të perpiqemi t'a shprehim këtë me një përkufizim me formal.

Përkufizim 3.1. Një funksion $f(x)$ quhet i **vazhdueshëm** në $x = a$ në qoftë se

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Vërejmë se përkufizimi tregon se që një funksion të jetë i vazhdueshëm në $x = a$, duhet që ai të plotsojë tre kushte si më poshtë:

i) të ekzistojë $f(a)$, pra a t'i përkasë bashkësisë së përkufizimit të funksionit

ii) të ekzistojë $\lim_{x \to a} f(x)$

iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Përkufizimi thotë se $f(x)$ është i vazhdueshëm në $x = a$ në qoftë se $f(x)$ i afrohet $f(a)$ sikurse x i afrohet a. Pra, një funksion i vazhdueshëm ka cilësinë që për ndryshim të vogël të x prodhon vetëm ndryshim të vogël të $f(x)$. Në fakt ndryshimi tek $f(x)$ mund të bëhet aq i vogël sa duam kur kemi marrë ndryshimin e x-it mjaft të vogël. Kur $f(x)$ është i përkufizuar rreth $x = a$ (me fjalë të tjera është i përkufizuar në një interval të hapur që përmban $x = a$, me përjashtim ndoshta të $x = a$), themi se $f(x)$ nuk është i vazhdueshëm në $x = a$.

Fenomenet fizike janë zakonisht të vazhdueshme. Për shembull, shpejtësia e një mjeti varion në mënyrë të vazhdueshme në lidhje me kohën. Por jo-vazhdueshmëria ndodh në situata të tjera, si për shembull rryma elektrike. Gjeometrikisht ju mund ta shihni një funksion të vazhdueshëm në çdo pikë të një intervali, si një funksion grafiku i të cilit nuk ka shkëputje (grafiku mund të vizatohet pa e shkëputur lapsin nga letra).

Shembull 3.1. *Gjeni se ku nuk janë të vazhdueshëm secili nga funksionet:*

$$
\begin{aligned}
&a)\ f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}\\
&b)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{në qoftë se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{në qoftë se} \quad x = 0 \end{cases}\\
&c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{në qoftë se} \quad x \neq 2 \\ 1 & \text{në qoftë se} \quad x = 2 \end{cases}\\
&d)\ f(x) = [x]
\end{aligned}
$$

Zgjidhje: (a) Vërejmë se $f(2)$ nuk është i përcaktuar, pra funsioni nuk është i vazhdueshëm në $x = 2$. Më vonë do të shohim pse është i vazhdueshëm në gjithë pikat e tjera.

(b) Këtu $f(0) = 1$, pra është i përkufizuar por

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

nuk ekziston, kështu që nuk është i vazhdueshëm në 0.

(c) Këtu $f(2) = 1$, dhe

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 2} f(x) &= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}\\
&= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x - 2}\\
&= \lim_{x \to 2} (x + 1) = 3
\end{aligned}
$$

ekziston por

$$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2).$$

Pra, ky funksion nuk është i vazhdueshëm në $x = 2$.

(d) Funksioni i pjesës së plotë $f(x) = [x]$, nuk është i vazhdueshëm në asnjë vlerë të plotë, sepse nuk ekziston limiti $\lim_{x \to n} [x]$ kur n është numër i plotë. □

Përkufizim 3.2. Një funksion $f(x)$ quhet i **vazhdueshëm nga e djathta** tek një numër a në qoftë se

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

dhe $f(x)$ quhet **i vazhdueshëm nga e majta** tek a në qoftë se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Shembull 3.2. *Tek secili numër i plotë n funksioni* $f(x) = [x]$ *është i vazhdueshëm nga e djathta por jo nga e majta, sepse:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} [x] = n = f(n)$$

por

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} [x] = n - 1 \neq f(n).$$

□

Përkufizim 3.3. Një funksion $f(x)$ është i **vazhdueshëm në një interval**, në qoftë se është i vazhdueshëm në çdo pikë të atij intervali. Në qoftë se $f(x)$ është i përkufizuar vetëm nga njëra anë në pikat e skajeve të intervalit (segmentit, gjysmë-intervalit, gjysmë-segmentit), ne do kuptojmë me vazhdueshmëri në skaje, **vazhdueshmërinë nga e djathta**, ose nga **e majta** respektivisht.

Shembull 3.3. *Vërtetoni se funksioni* $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ *është i vazhdueshëm ne segmentin* $[-1, 1]$.

Zgjidhje: Në qoftë se $-1 < a < 1$, atëherë duke përdorur rregullat e kalimit në limit, ne kemi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}(1-\sqrt{1-x^2})\\ &= 1-\lim_{x\to a}\sqrt[n]{1-x^2}\\ &= 1-\sqrt{\lim_{x\to a}(1-x^2)}\\ &= 1-\sqrt{1-a^2} = f(a).\end{aligned}$$

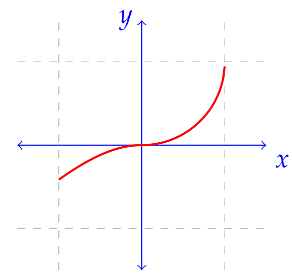


Figura 3.1: Grafiku i $f(x) = 1-\sqrt{1-x^2}$.

Prandaj nga përkufizimi $f(x)$ është i vazhdueshëm në a kur $-1 < a < 1$. Me llogaritje të ngjashme tregohet se

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \textit{ dhe } \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1)$$

Kështu që $f(x)$ është i vazhdueshëm nga e djathta tek -1, dhe i vazhdueshëm nga e majta tek 1. E prej këtej në bazë të përkufizimit $f(x)$ është i vazhdueshëm në $[-1, 1]$. □

Teorema 3.1. *Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë funksione të vazhdueshme në $x = a$ dhe c është një konstante, atëherë funksionet $f \pm g$, cf, fg, $\frac{f}{g}$ në qoftë se $g(a) \neq 0$, janë gjithashtu të vazhdueshëm në $x = a$.*

Vërtetim: Secila nga pesë pjesët e teoremës rrjedh nga rregullat e kalimit në limit. Për shembull, po japim vërtetimin e pjesës së parë. Meqënëse $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të vazhdueshëm në a kemi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \textit{ dhe } \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Prej nga

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a)+g(a) = (f+g)(a)$$

Kjo na tregon se $f + g$ është i vazhdueshëm në a.

□

Nga teorema e mësipërme rrjedh se në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të vazhdueshëm në një interval, atëherë të tillë janë edhe funksionet $f \pm g$, cf, fg, dhe $\frac{f}{g}$ (kur $g(x)$ nuk është zero). Teorema në vazhdim është prezantuar më parë si vetia e zëvendësimit të drejtpërdrejtë.

Teorema 3.2. *(a) Çdo funksion polinomial është kudo i vazhdueshëm; domethënë në $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$*

(b) Çdo funksion racional është kudo i vazhdueshëm në bashkësinë e vetë të përkufizimit.

Vërtetim: (a) Një polinom është një funksion i trajtës

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0$$

ku $c_0, c_1, ..., c_n$ janë konstante. Ne dimë se

$$\lim_{x\to a} c_0 = c_0$$

dhe

$$\lim_{x\to a} x^m = a^m$$

ku $m = 1, 2, 3..., n$.

Pra, funksioni $f(x) = x^m$ është funksion i vazhdueshëm. Keshtu që $g(x) = cx^m$ është i vazhdueshëm. Meqënëse $P(x)$ është shumë e funksioneve të kësaj forme dhe një funksioni konstant, del se $P(x)$ është i vazhdueshëm.

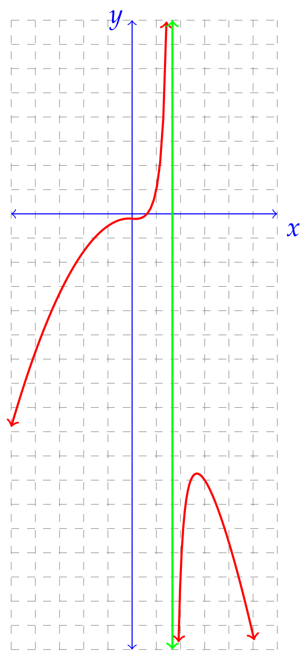


Figura 3.2: Grafiku i $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

(b) Një funksion racional është një funksion i formës

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

ku $P(x)$ dhe $Q(x)$ janë polinome. Bashkësia e përkufizimit të $f(x)$ është:

$$D = \{x \in R | Q(x) \neq 0\}.$$

Ne dimë tashmë nga pika (a) se $P(x)$ dhe $Q(x)$ janë funksione kudo të vazhdueshëm. Pra, $f(x)$ është i vazhdueshëm për çdo numër nga D.

□

Si ilustrim i teoremës se mësipërme vërejmë që vëllimi i një sfere ndryshon në mënyrë të vazhdueshme në lidhje me rrezen, sepse formula $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ tregon se V është një funksion polinomial i r. Po ashtu, në qoftë se një top hidhet vertikalisht në ajër me shpejtësi fillestare $50 m/s$, atëherë lartësia e topit pas t sekondash jepet nga formula

$$h = 50t - 16t^2.$$

Përsëri ky është një funksion polinom, prandaj lartësia në varësi të kohës është funksion i vazhdueshëm.

Njohja e funksioneve të vazhdueshëm na mundëson llogaritjen më shpejt të disa limiteve, si në shembujt në vijim.

Shembull 3.4. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

Zgjidhje: Funksioni

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

është racional, kështu që ai është i vazhdueshëm në bashkësinë e vetë të përkufizimit, e cila është $\{x | x \neq 5/3\}$. Prej nga

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \lim_{x \to -2} f(x) = f(-2) = \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

□

Teorema 3.3. *Klasat e mëposhtme të funksioneve janë të vazhdueshme në çdo pikë të bashkësisë së tyre të përkufizimit:*
- *polinomet,*
- *funksionet racionale,*
- *funksionet rrënjë,*
- *funksionet trigonometrike,*
- *funksionet inverse trigonometrike,*
- *funksionet eksponenciale,*
- *funksionet logaritmike.*

Vërtetim: Detyrë lexuesit.

□

Shembull 3.5. *Ku është i vazhdueshëm funksioni*

$$f(x) = \frac{\ln x + \tan^{-1} x}{x^2 - 1}?$$

Zgjidhje: Funksioni $y = \ln x$ është i vazhdueshëm për të gjithë $x > 0$ dhe $y = \tan^{-1} x$ i vazhdueshëm në $\mathbb{R}$. Pra, $y = \ln x + \tan^{-1} x$ është i vazhdueshëm për $x \in (0, \infty)$. Emëruesi, $y = x^2 - 1$ është polinom, prandaj është kudo i vazhdueshëm. Keshtu që $f(x)$ është i vazhdueshëm për të gjithë numrat pozitive me përjashtim të pikave ku $x^2 - 1 = 0$. Prandaj, $f(x)$ është i vazhdueshëm në intervalet $(0, 1)$ dhe $(1, \infty)$.

□

Një tjetër mënyrë përftimi funksionesh të vazhdueshëm prej funksioneve $f(x)$ dhe $g(x)$ të vazhdueshme është kompozimi $f \circ g$. Ky në fakt është si pasojë e teoremës në vazhdim.

Teorema 3.4. *Jepet $g(x)$ një funksion i vazhdueshëm ne $x = a$ i tillë që $\lim_{x \to a} g(x) = b$. Në qoftë se $f(x)$ është i vazhdueshëm në b atëherë*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim_{x \to a} g(x)) = f(b)$$

Vërtetim: Detyrë lexuesit.

□

Intuitivisht teorema është e vërtetë, sepse në qoftë se x është afër a, atëherë $g(x)$ është afër b, dhe meqënë qoftë se $f(x)$ është i vazhdueshëm në b, në qoftë se $g(x)$ është afër b, atëherë $f(g(x))$ është afër $f(b)$.

Shembull 3.6. *Logarisni*

$$\lim_{x \to 1} \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right).$$

Zgjidhje: Meqënëse arksinusi është funksion i vazhdueshëm, atëherë

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 1} \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right) &= \arcsin(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}) = \arcsin(\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})}) \\
&= \arcsin \left(\lim_{x \to 1} \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right) \\
&= \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□

Përdorim Teoremën 3.4 në rastin e veçantë kur $f(x) = \sqrt[n]{x}$, ku n është numër natyror. Atëherë,

$$f(g(x)) = \sqrt[n]{g(x)} \text{ dhe } f \lim_{x \to a} g(x) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Në qoftë se ne vendosim këtë shprehje në Teoremën 3.4, do të marrim

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Teorema 3.5. *Në qoftë se $g(x)$ është i vazhdueshëm në $x = a$ dhe $f(x)$ i vazhdueshëm në $g(a)$, atëherë funksioni kompozim $f \circ g$ i dhënë nga barazimi $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ është funksion i vazhdueshëm në a.*

Vërtetim: Meqënëse $g(x)$ është i vazhdueshëm në a, ne kemi

$$\lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Meqënëse $f(x)$ është i vazhdueshëm në $b = g(a)$, mund të përdorim Teoremën 3.4 për të përftuar

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a)),$$

që ka vend saktësisht për $h(x) = f(g(x))$ si funksion i vazhdueshëm në a. Keshtu që $f \circ g$ është i vazhdueshëm në a.

□

Shembull 3.7. *Gjeni se ku janë të vazhdueshëm funksionet?*

(a) $h(x) = \sin(x^2)$

(b) $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

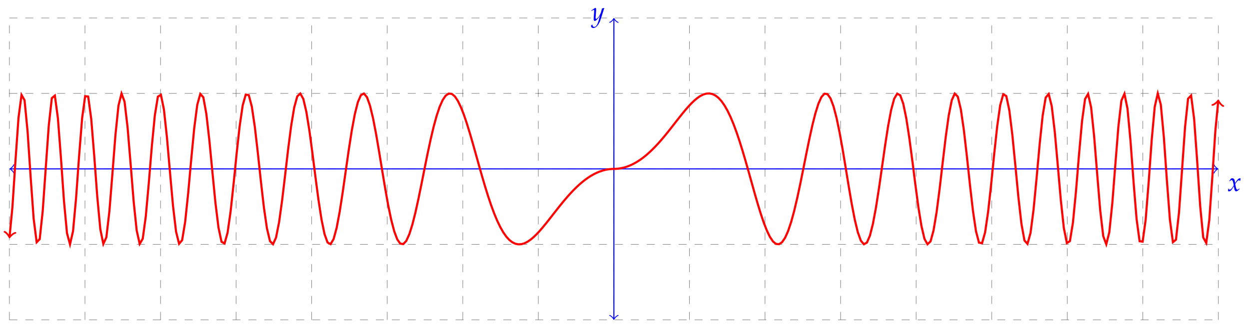


Figura 3.3: Grafiku i funksionit $f(x) = \sin\left(x^2\right)$

Zgjidhje: (a) Ne kemi $h(x) = f(g(x))$, ku

$$g(x) = x^2 \text{ dhe } f(x) = \sin x$$

Atëherë $g(x)$ është i vazhdueshëm në $\mathbb{R}$. Meqënëse është polinom, atëherë edhe $f(x)$ është gjithashtu kudo i vazhdueshëm. Prandaj, $h = f \circ g$ është i vazhdueshëm në $\mathbb{R}$.

(b) Ne dimë se $f(x) = \ln x$ është i vazhdueshëm dhe $g(x) = 1 + \cos x$ është i vazhdueshëm (sepse të dy $y = 1$ dhe $y = \cos x$ janë të vazhdueshëm). Prandaj nga teorema mbi vazhdueshmërinë e funksionit të përbërë, $F(x) = f(g(x))$ është i vazhdueshëm kudo ku është i përcaktuar. Tani $\ln(1 + \cos x)$ është i përkufizuar kur $1 + cosx > 0$. Pra, nuk është i përkufizuar kur $\cos x = -1$ dhe kjo ndodh kur $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \dots$. Prandaj $f(x)$ nuk ka vazhdueshmëri kur x është shumfish tek i π-së dhe është i vazhdueshëm në intervalet ndërmjet këtyre vlerave.

□

Një veti e rëndësishme e funksioneve të vazhdueshme, shprehet me teoremën në vazhdim.

Teorema 3.6 (Teorema mbi vlerën e ndërmjetme)**.** *Supozojmë se $f(x)$ është i vazhdueshëm në një interval të mbyllur $[a, b]$ dhe le të jetë u një numër ndërmjet $f(a)$ dhe $f(b)$, ku $f(a) \neq f(b)$. Atëherë, ekziston një numër c në (a, b) i tillë që $f(c) = u$.*

Kjo Teoremë pohon se një funksion i vazhdueshëm merr çdo vlerë ndërmjet dy vlerave të ndryshme të funksionit $f(a)$ dhe $f(b)$. Vërejmë se vlera N mund të merret një herë [si në pjesën (a)] ose më shumë se një herë [si në pjesën (b)].

Në qoftë se e mendojmë funksionin e vazhdueshëm si një funksion grafiku i të cilit nuk ka ndërprerje, atëherë është e lehtë të besosh vërtetësinë e teoremës. Në kuptimin gjeometrik thuhet se për çdo drejtëz horizontale $y = N$ e dhënë ndërmjet $y = f(a)$ dhe $y = f(b)$, grafiku i $f(x)$ s'mund ta kapërcejë drejtëzën. Ai mund ta presë $y = N$ diku.

Është e rëndësishme që funksioni $f(x)$ në Teoremën 3.6 të jetë i vazhdueshëm. Teorema e vlerave të ndërmjetme në përgjithësi nuk është e vërtetë për funksionet jo të vazhdueshme.

Një përdorim i Teoremes 3.6 është përkufizimi i rrënjëve të një ekuacioni si në shembullin që vijon.

Shembull 3.8. *Vërtetoni se për ekuacionin*

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$$

ka një rrënjë ndërmjet 1 *dhe* 2.

Zgjidhje: Le të jetë $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$. Ne po shohim për një zgjidhje të ekuacionit, që do të thotë të gjejmë një numër c ndërmjet $x = 1$dhe $x = 2$ i tillë që $f(c) = 0$. Pra, duke marrë $a = 1$ dhe $b = 2$ dhe $N = 0$ tek Teorema 3.6, kemi

$$f(1) = 4 - 6 + 3 - 2 = -1 < 0 \text{ dhe } f(2) = 32 - 24 + 6 - 2 = 12 > 0.$$

Prandaj, $f(1) < 0 < f(2)$; pra $N = 0$ është ndërmjet numrave $f(1)$ dhe $f(2)$. Atëherë, $f(x)$ është i vazhdueshëm si polinom, prandaj nga Teorema 3.6 ekziston një numër c ndërmjet 1 dhe 2 i tillë që $f(c) = 0$. Me fjalë të tjera ekuacioni $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ ka të paktën një rrënjë në intervalin $(1, 2)$.

Në fakt mund ta lokalizojmë një rrënjë në mënyrë akoma më të saktë duke përdorur Teoremën 3.6 përsëri. Meqënëse

$$f(1.2) = -1.128 < 0 \text{ dhe } f(1.3) = 0.548 > 0$$

një rrënjë mund të ndodhet ndërmjet 1.2 dhe 1.3

□

Ushtrime:

1. *Shkruani një ekuacion që të shprehë faktin se një funksion $f(x)$ është i vazhdueshëm në numrin 4.*

2. *Në qoftë se $f(x)$ është i vazhdueshëm në $(-\infty, \infty)$, çfarë mund të thoni për grafikun e tij?*

3. *Ndërtoni grafikun e një funksioni i cili është i vazhdueshëm kudo me përjashtim të $x = 3$ dhe i vazhdueshëm nga e majta në 3.*

4. *Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të vazhdueshëm me $f(3) = 5$ dhe*

$$\lim_{x\to 3} [2f(x) - g(x)] = 4,$$

gjeni $g(3)$.

5. *Përdorni përkufizimin dhe vetitë e limitit për të treguar se funksioni është i vazhdueshëm tek një numër i dhënë a.*

1. $f(x) = x^2 + \sqrt{7-x}, a = 4$
2. $f(x) = (x + 2x^3)^4, a = -1$
3. $f(x) = \frac{2t-3t^2}{1+t^3}, a = 1$

6. *Përdorni përkufizimin e vazhdueshmërisë dhe vetitë e limitit për të treguar se funksioni është i vazhdueshëm në intervalin e dhënë.*

1. $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}, (2, \infty)$
2. $g(x) = 2\sqrt{3-x}, (-\infty, 3]$

Shpjegoni pse funksionet nuk janë të vazhdueshëm në numrin e dhënë a. Ndërtoni grafikët e tyre.

7. $f(x) = \ln|x-2|$ *ne* $a = 2$

8.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \textit{në qoftë se} \quad x \neq 1 \\ 2 & \textit{në qoftë se} \quad x = 1 \end{cases}$$

në $a = 1$

9.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{në qoftë se} \quad x \geq 0 \\ e^x & \textit{në qoftë se} \quad x < 0 \end{cases}$$

në $a = 0$.

10.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{në qoftë se} \quad x = 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \textit{në qoftë se} \quad x \neq 1 \end{cases}$$

në $a = 1$.

11.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \textit{në qoftë se} \quad x < 0 \\ 0 & \textit{në qoftë se} \quad x = 0 \\ 1 - x^2 & \textit{në qoftë se} \quad x > 0 \end{cases}$$

në $a = 0$.

12.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \textit{në qoftë se} \quad x \neq 3 \\ 6 & \textit{në qoftë se} \quad x = 3 \end{cases}$$

në $a = 3$

Shpjegoni pse funksioni është i vazhdueshëm në çdo pikë të bashkësisë së përkufizimit.

13. $F(x) = \frac{x}{x^2+5x+6}$

14. $G(x) = \sqrt[3]{x}(1 + x^3)$

15. $H(x) = x^2 + \sqrt{2x-1}$

16. $L(x) = e^{-3x} \sin 2\pi t$

17. $F(x) = \frac{\sin x}{x+1}$

18. $f(x) = \frac{\sin x}{x+1}$

19. $g(x) = \sin^{-1}(x^2 - 1)$

20. $h(x) = \cos(e^{\sqrt{x}})$

21. *Përcaktoni pikat e këputjes së funksionit*
i) $y = \frac{1}{1+e^{1/x}}$
ii) $y = \ln(\tan^2 x)$

Përdorni vazhdueshmërinë për të njehsuar limitet

22. $\lim_{x\longrightarrow 4} \frac{5+\sqrt{x}}{\sqrt{5+x}}$

23. $\lim_{x\longrightarrow \pi} \sin(x + 2\sin x)$

24. $\lim_{x\longrightarrow 1} e^{x^2-x}$

25. $\lim_{x\longrightarrow 2} \arctan(\frac{x^2-4}{3x^2-6x})$

Vërtetoni se $f(x)$ është i vazhdueshëm në $(-\infty, \infty)$.

26.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \textit{në qoftë se} \quad x < 1 \\ \sqrt{x} & \textit{në qoftë se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

27.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \textit{në qoftë se} \quad x < \pi/4 \\ \cos x & \textit{në qoftë se} \quad x \geq \pi/4 \end{cases}$$

Gjeni numrat në të cilët funksioni nuk është i vazhdueshëm. Në cilat nga këto vlera funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm nga e majta, nga e djathta? Ndërtoni grafikun.

28.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \textit{në qoftë se} \quad x \leq 0 \\ 2 - x & \textit{në qoftë se} \quad 0 < x \leq 2 \\ (2 - x)^2 & \textit{në qoftë se} \quad x > 2 \end{cases}$$

29.

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & \textit{në qoftë se} \quad x \leq 1 \\ 1/x & \textit{në qoftë se} \quad 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \textit{në qoftë se} \quad x >\geq 3 \end{cases}$$

30.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \textit{në qoftë se} \quad x < 0 \\ e^x & \textit{në qoftë se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \textit{në qoftë se} \quad x > 1 \end{cases}$$

31. *Për çfarë vlerash të c funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm në $(-\infty, \infty)$?*

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \textit{në qoftë se} \quad x < 2 \\ x^3 - cx & \textit{në qoftë se} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

32. *Gjeni vlerat e a dhe të b, për të cilat funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm kudo.*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \textit{në qoftë se} \quad x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \textit{në qoftë se} \quad 0 \leq x \leq 3 \\ 2x - a + b & \textit{në qoftë se} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Duke u nisur nga Teorema mbi Vlerën e Ndërmjetme tregoni se ekuacioni i dhënë ka një rrënjë në intervalin e treguar.

33. $x^4 + x - 3 = 0$ *në* $(1, 2)$

34. $\cos x = x$ *në* $(0, 1)$

35. $\sqrt[3]{x} = 1 - x$ *në* $(0, 1)$

36. $\ln x = e^{-x}$ *në* $(1, 2)$

37. *Vërtetoni se $f(x)$ është i vazhdueshëm në a atëherë dhe vetëm atëherë kur*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} f(a + h) = f(a).$$

3.2 Limitet në pikat e pafundme, asimptotat horizontale

Deri tani kemi studiuar limitet e pafundme dhe asimptotat vertikale, pra kur x shkonte drejt një numri a, vlerat e y rriteshin pa kufi (ose zvogëloheshin pa kufi). Në këtë seksion le të jetë x që rritet pambarimisht (ose zvogëlohet pambarimisht) dhe do të shohim ç'ndodh në këtë rast me y.

Le ta fillojmë me sjelljen e funksionit $f(x)$ të përkufizuar nga

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

kur x rritet pambarimisht (zvogëlohet pambarimisht). Tabela në vazhim jep vlerat e funksionit me saktësi deri në 6 shifra pas presjes.

x	$f(x)$
0	-1
±1	0
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±100	0.999200
±1000	0.999998

Tabela 3.1: Vlerat e $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ kur $x \to \infty$.

Ju mund të shihni se sa më shumë largohen vlerat e x aq më afër 1 shkojnë vlerat e funksionit. Kjo situatë simboliksht shprehet kështu

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1.$$

Në përgjithësi, ne përdorim shënimin

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

për të treguar se vlerat e $f(x)$ i afrohen gjithnjë e më shumë L kur x i largohet gjithnjë e më shumë origjinës.

Përkufizim 3.4. Le të jetë dhënë funksioni $f(x)$ i përkufizuar në ndonjë interval të hapur (a, ∞) Atëherë,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

do të thotë se vlerat e $f(x)$ mund t'i afrohen pabarimisht L kur x merret mjaft i madh.

Një përkufizim më i saktë, me gjuhën ε, δ do jepet në fund të këtij seksioni. Theksojmë se ka disa mënyra, që grafiku i $f(x)$ t'i afrohet drejtëzës $y = L$ e cila quhet **asimptotë horizontale** e funksionit $f(x)$.

Duke ju referuar edhe një herë Tabelës së mësipërme, shohim se për vlera shumë të vogla negative të x, vlerat e $f(x)$ janë shumë afër 1. Duke e lënë x të zvogëlohet drejt vlerave negative pa kufi, ne mund ta afrojmë sa të duam $f(x)$ tek 1. Kjo shprehet duke shkruajtur

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Përkufizimi më i përgjithshëm jepet në vazhdim.

Përkufizim 3.5. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në një interval të hapur $(-\infty, a)$. Atëherë,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

do të thotë se vlerat e $f(x)$ mund t'i afrohen sa të duam L kur x zvogëlohet pa kufi.

Përsëri simboli $-\infty$ nuk përfaqson një numër, por shprehja $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ shpesh lexohet si: *limiti i $f(x)$ kur x shkon në minus infinit është L.*

Përkufizim 3.6. Drejtëza $y = L$ quhet **asimptotë horizontale** e funksionit $y = f(x)$ në qoftë se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

ose

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

Më poshtë shohim një fakt të rëndësishem.

Teorema 3.7. *Në qoftë se $r > 0$ është një numër racional, atëherë*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Në qoftë se $r > 0$ është një numër racional, i tillë që x^r është i përkufizuar për çdo x, atëherë

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Vërtetim: Detyrë lexuesit.

□

Shembull 3.9. *Llogarisni*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

dhe tregoni se cilat veti të limitit përdoren në secilin hap.

Zgjidhje: Kur x rritet shumë si emëruesi dhe numëruesi rriten shumë, kështu që nuk është e qartë se ç'ndodh me raportin. Na duhet të kryejmë disa veprime algjebrike.

Për të llogaritur limitin në infinit të çdo funksioni racional, ne fillimisht pjestojmë si numëruesin dhe emëruesin me fuqinë më të lartë të x për emëruesin (pranojmë se $x \neq 0$ Meqënëse ne interesohemi për vlera shumë të mëdha të x). Në këtë rast fuqia më e lartë e x në emërues është x^2, kështu që kemi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2-x-2}{x^2}}{\frac{5x^2+4x+1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}\\ &= \frac{\lim_{x\to\infty}(3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{\lim_{x\to\infty}(5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{\lim_{x\to\infty}3-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}-2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty}5+4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{3-0-0}{5+0+0} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Duke llogaritur në mënyrë të ngjashme tregohet se kur $x \to -\infty$ prapë limiti është $3/5$. □

Shembull 3.10. *Gjeni asimptotat horizontale dhe vertikale të grafikut të funksionit*

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$$

Zgjidhje: Duke pjestuar si emëruesin dhe numëruesin me x dhe duke përdorur vetitë e limitit, ne kemi

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}(3-\frac{5}{x})} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}3-5\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{2+0}}{3-5\cdot 0} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Prej nga drejtëza $y = \sqrt{2}/3$ është asimptota horizontale e grafikut të $f(x)$.

Në llogaritjen e limitit kur $x \to -\infty$, duhet të kujtojmë se kur $x < 0$, ne kemi $\sqrt{x} = |x| = -x$. Prandaj kur pjestojmë numëruesin me x, për $x < 0$ marrim

$$\frac{1}{x}\sqrt{2x^2+1} = -\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{2x^2+1} = \sqrt{2+\frac{1}{x^2}}.$$

Prej nga,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \frac{\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty}\left(3-\frac{5}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{2+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{3-5\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

Pra, drejtëza $y = -\sqrt{2}/3$ është gjithashtu asimptotë horizontale.

Asimptota vertikale kërkohet aty ku emëruesi bëhet zero. Kemi $3x - 5 = 0$ për $x = \frac{5}{3}$. Në qoftë se x është afër $5/3$ duke qenë më i madh se $x = 5/3$, atëherë emëruesi është afër zeros por duke qenë pozitiv. Numëruesi $\sqrt{2x^2+1}$ është gjithmonë pozitiv, kështu që $f(x)$ është pozitiv. Prej nga kemi

$$\lim_{x\to(5/3)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = \infty.$$

Në qoftë se x është afër $5/3$ por duke qenë më i vogël, atëherë $3x - 5 < 0$, kështu që $f(x)$ do jetë shumë i vogël negativ. Keshtu që

$$\lim_{x\to(5/3)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5} = -\infty$$

Pra, asimptota vertikale është $x = 5/3$.

□

Shembull 3.11. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$$

Zgjidhje: Meqënëse si $\sqrt{x^2+1}$ dhe x janë shumë të mëdha kur x është shumë i madh, është e vështirë të kuptohet se ç'ndodh me diferencën e tyre, prandaj i kthehemi veprimeve algjebrike, për ta rishkruar funksionin. Fillimisht shumëzojmë dhe pjestojmë me të konjuguarën e kësaj shprehjeje:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{0}{\sqrt{1+0}+1} = 0
\end{aligned}
$$

□

Shembull 3.12. *Llogarisni*

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}.$$

Zgjidhje: Në qoftë se e shënojmë $t=\frac{1}{x}$, dimë që $t\to-\infty$ kur $x\to 0^-$. Atëherë, kemi

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

□

Shembull 3.13. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x\to\infty}\sin x.$$

Zgjidhje: Kur x rritet vlerat e $\sin x$ oshilojnë ndërmjet 1 dhe -1 pafundësisht dhe gjihnjë e më shpesh, dhe pa pasur mundësi t'i afrohen një numri të caktuar. Prandaj ky limit nuk ekziston.

□

3.2.1 Limitet e pafundëm në pikat e pafundme

Shënimi

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

përdoret për të treguar se vlerat e $f(x)$ zmadhohen pambarimisht kur vlerat e x-it rriten pambarimisht. Një kuptim i ngjashëm u bashkangjitet simboleve të mëposhtëm:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Shembull 3.14. *Gjeni*

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \text{ dhe } \lim_{x\to-\infty} x^3$$

Zgjidhje: Kur x rritet, gjithashtu dhe x^3 rritet, për shembull $10^3=1000, 100^3=100000$ e kështu me radhë. Në fakt mund ta bëjmë x^3 sa të duam të madh duke marrë x mjaft të madh. Prej nga mund të shkruajmë

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Në mënyrë të ngjashme, kur x merret shumë i vogël negativ, i tillë do jetë edhe x^3, prandaj

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

□

Shembull 3.15. *Gjeni* $\lim_{x\to\infty}(x^2-x)$.

Zgjidhje: Vërejmë se nuk mund të shkruajmë

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x^2 - \lim_{x\to\infty} x = \infty - \infty$$

Rregullat e limitit nuk mund të aplikohen në limitet e pafundëm sepse ∞ nuk është një numër $(\infty - \infty)$ nuk mund të përcaktohet. Megjithatë ne mund të shkruajmë

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x) = \lim_{x\to\infty} x(x-1) = \infty$$

Sepse si x dhe $x-1$ bëhen gjithnjë e më të mëdha, e po ashtu dhe prodhimi i tyre.

$\square$

Shembull 3.16. *Gjeni* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3-x}$.

Zgjidhje: Si në shembullin e mësipërm, pjestojmë numëruesin dhe emëruesin me fuqinë më të lartë të x-it në emërues, që është x:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{3-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\frac{3}{x}-1} = -\infty$$

sepse $x+1 \to \infty$ dhe $3/x - 1 \to -1$ kur $x \to \infty$.

$\square$

Shembulli në vazhdim tregon se duke përdorur limitet e pafundme në pikat e pafundme, së bashku me pikëprerjet me boshtet mund të përftojmë një ide në vija të trasha të grafikut të polinomit pa pasur nevojë të marrim një numër të madh pikash.

Shembull 3.17. *Ndërtoni grafikun e* $y = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ *duke gjetur pikëprerjet me boshtet dhe limitet e tij kur* $x \to \infty$ *dhe kur* $x \to -\infty$.

Zgjidhje: Pikëprerjet me boshtin e y-ve janë $f(0) = -16$, me boshtin e x-ve gjenden duke bërë $y = 0$ dhe kemi $x = 2, -1, 1$. Vërejmë se meqënë qoftë se $(x-2)^4$ është pozitiv, funksioni nuk ndryshon shenjë duke kaluar nëpër $x = 2$; prandaj grafiku nuk e kalon boshtin e x-ve tek 2. Grafiku e kalon boshtin në 1 dhe -1.

Kur x është shumë i madh pozitiv, atëherë të tre faktorët janë shumë të mëdhenj, prandaj

$$\lim_{x\to\infty}(x-2)^4(x+1)^3(x-1) = \infty.$$

Kur x është shumë i vogël negativ, faktori i parë është shumë i madh pozitiv, ndërsa i dyti dhe i treti shumë të vegjël negativ, prandaj

$$\lim_{x\to-\infty}(x-2)^4(x+1)^3(x-1) = \infty.$$

$\square$

3.2.2 Përkufizimi i saktë i limiteve kur $x \to \infty$.

Përkufizimet e mësipërme mund të fomulohen më saktë në trajtën e mëposhtme.

Përkufizim 3.7. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në një interval (a, ∞). Atëherë,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

do të thotë se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një numër N i tillë që

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad kur \quad x > N$$

E thënë me fjalë të tjera vlerat e $f(x)$ bëhen arbitrarisht shumë afër L (brenda distancës ε, ku $\varepsilon > 0$) duke marrë x mjaft të madh (më të madh se N, ku varet nga ε). Grafikisht thotë se duke zgjedhur x mjaft të madh (më të madh se ndonjë numër N) ne bëjmë të mundur që grafiku i funksionit të shtrihet midis dy drejtëzave horizontale $y = L - \varepsilon$ dhe $y = L + \varepsilon$. Kjo duhet të jetë e vërtetë sado i vogël të jetë ε.

Përkufizim 3.8. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në një interval $(-\infty, a)$. Atëherë

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

do të thotë se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një numër N i tillë që

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad kur \quad x < N.$$

Me sipër llogaritëm që

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \frac{3}{5}.$$

Në shembullin që vijon do përdorim grafikun dhe përkufizimin për $L = 3/5$ dhe $\varepsilon = 0.1$.

Shembull 3.18. *Përdorni grafikun për të gjetur një numër N të tillë që*

$$\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - \frac{3}{5}\right| < 0.1$$

sa herë që $x > N$.

Zgjidhje: Ne e rishkruajmë mosbarazimin si

$$0.5 < \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} < 0.7$$

Na duhet të përcaktojmë vlerat e x për të cilat kurba e dhënë shtrihet ndërmjet dy drejtëzave horizontale $y = 0.5$ dhe $y = 0.7$. Nga e djathta e këtij numri kurba qëndron midis drejtëzave $y = 0.5$ dhe $y = 0.7$. Duke rrumbullakosur për të qenë të sigurtë, mund të themi se

$$\left|\frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} - \frac{3}{5}\right| < 0.1$$

kur $x > 0.7$. Me fjalë të tjera mund të themi se për $\varepsilon = 0.1$ mund të zgjedhim $N = 7$ (ose një numër më të madh se 7). □

Shembull 3.19. *Përdorni përkufizimin e limitit për të vërtetuar se*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Zgjidhje: Për $\varepsilon > 0$ të dhënë, duam të gjejmë N të tillë që

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon kur \;\; x > N$$

Në llogaritjen e limitit pranojmë se $x > 0$, e në këtë rast

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x}$$

prej nga duam

$$\frac{1}{x} < \varepsilon \; kur \;\; x > N.$$

Pra

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \; kur \;\; x > N$$

Kjo na sugjeron që ta marrim $N = 1/\varepsilon$.

Atëherë, për $\varepsilon > 0$ të dhënë zgjedhim $N = 1/\varepsilon$, le të jetë $x > N$. Kemi

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} = \frac{1}{x} < \frac{1}{N} = \varepsilon$$

Prandaj

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \; kur \;\; x > N$$

Pra,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

□

Përkufizim 3.9. Le të jetë $f(x)$ një funksion i përkufizuar në një interval (a, ∞). Atëherë

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

do të thotë se për çdo numër pozitiv M ekziston një numër pozitiv N i tillë që

$$f(x) > M, \qquad kur \qquad x > N$$

Përkufizime të ngjashme mund të merren kur në vend të simbolit ∞ marrim $-\infty$.

Ushtrime:

Shpjegoni me fjalët tuaja kuptimin e secilit prej barazimeve.

1. $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 5$

2. $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 3$

Ndërtoni grafikun e një funksioni $f(x)$ i cili plotëson të gjitha kushtet e dhëna.

3. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0$.

4. $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 1$,

5. $\lim_{x\longrightarrow 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

6. $\lim_{x\longrightarrow-2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = -3$

7. $f(0) = 3$, $\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 4$, $\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x) = \infty$

8. $\lim_{x\longrightarrow 3} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 2$, $f(0) = 0$, $f(x)$ *është çift.*

Llogarisni limitet e mëposhtme:

9.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{2x+3}$$

10.
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1-x-x^2}{2x^2-7}$$

11.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{3x+5}{x-4}$$

12.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4}$$

13.
$$\lim_{t\longrightarrow-\infty} \frac{t^2+2}{t^3+t^2-1}$$

14.
$$\lim_{u\longrightarrow\infty} \frac{4u^4+5}{(u^2-2)(2u^2-1)}$$

15.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$$

16.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$$

17.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{x+x^3+x^5}{1-x^2+x^4}$$

18.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} (\sqrt{9x^2+x}-3x)$$

19.
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} (x+\sqrt{x^2+2x})$$

20.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$$

21.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\cos x$$

22.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\sqrt{x^2+1}$$

23.
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}(x^4+x^5)$$

24.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3-2x+3}{5-2x^2}$$

25.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1-e^x}{1+2e^x}$$

26.
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(e^{-2x}\cos x)$$

27.
$$\lim_{x\longrightarrow(\pi/)^+} e^{\tan x}$$

Gjeni asimptotat horizontale dhe vertikale të secilit prej funksioneve të mëposhtëm:

28.
$$y=\frac{2x+1}{x-2}$$

29.
$$y=\frac{x^2+1}{2x^2-3x-2}$$

30.
$$y=\frac{2x^2+x-1}{x^2+x-2}$$

31.
$$y=\frac{x^3-x}{x^2-6x+5}$$

32.
$$y+\frac{1+x^4}{x^2-x^4}$$

33.
$$y=\frac{2e^x}{e^x-5}$$

34. *Për limitin*
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=2$$
ilustroni përkufizimin duke gjetur vlerat e N korresponduese të $\varepsilon=0.5$ *dhe* $\varepsilon=0.1$

35. *Për limitin*
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=-2$$
ilustroni përkufizimin duke gjetur vlerat e N korresponduese të $\varepsilon=0.5$ *dhe* $\varepsilon=0.1$

36. *Për limitin*
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{x+1}}=\infty$$
ilustroni përkufizimin duke gjetur vlerat e N korresponduese të $M=100$.

37. *Përdorni përkufizimin për të treguar se* $\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{x}=0$

38. *Përdorni përkufizimin për të treguar se* $\lim_{x\longrightarrow\infty}x^3=\infty$

39. *Përdorni përkufizimin për të treguar se* $\lim_{x\longrightarrow\infty}e^x=\infty$

40. *Vërtetoni se*
$$\lim_{x\longrightarrow\infty}f(x)=\lim_{t\longrightarrow0^+}f(1/t)$$
dhe
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}f(x)=\lim_{t\longrightarrow0^-}f(1/t)$$
në qoftë se këto limite ekzistojnë.

3.3 Tangentet, shpejtësitë dhe raportet e ndryshimit

Në fillim të Kap. 2 ne gjetëm vlerat e koefiçentit këndor të tangentes dhe të shpejtësisë së çastit në bazë të evidentimeve numerike. Ndërsa tani që kemi përkufizuar limitin dhe mësuam teknikat e llogaritjes së tij, po kthehemi problemeve të tangentes dhe shpejtësisë me mundësinë e llogaritjes së koefiçentit këndor të tangentes, shpejtësisë, dhe raporteve të tjera të ndryshimit.

3.3.1 Tangentet

Në qoftë se një kurbë C ka ekuacion $y = f(x)$ dhe duam të gjejmë drejtëzën tangente ndaj C në pikën $P(a, f(a))$, atëherë shqyrtojmë një pikë afër P, $Q(x, f(x))$, ku $x \neq a$, dhe llogarisim koefiçentin këndor të prerëses PQ:

$$k_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Atëherë le ta afrojmë Q tek P duke afruar x tek a. Në qoftë se k_{PQ} afrohet tek një numër k, atëherë e përcaktojmë tangenten t si drejtëza që kalon nga P me koefiçent këndor k. Kjo na lejon të themi se drejtëza tangente është pozicioni limit i prerëses PQ kur Q shkon tek P.

Përkufizim 3.10. Drejtëza **tangente** ndaj kurbës $y = f(x)$ në pikën $P(a, f(a))$, quhet drejtëza që kalon nga pika P me koefiçent këndor

$$k = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

në kushtet kur ky limit ekziston.

Shembull 3.20. *Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj parabolës $y = x^2$ në pikën $P(1, 1)$.*

Zgjidhje: Këtu kemi $a = 1$ dhe $f(x) = x^2$, prandaj koefiçenti këndor i tangentes është

$$k = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Atëherë ekuacioni për drejtëzën tangente që kalon nga pika $P(1, 1)$ me koefiçent këndor 2 do të jetë

$$y - 1 = 2(x - 1) ose\ y = 2x - 1$$

Ndonjëherë i drejtohemi koefçentit këndor të tangentes së një kurbe në një pikë si koefiçent këndor i kurbës në atë pikë. Ideja është se në qoftë se e zmadhojmë mjaft, ekranin e pamjes për kurbën, ajo do të duket si një vijë e drejtë.

Sa më shumë e zmadhojmë, aq më shumë parabola ngjan me një drejtëz. Me fjalë të tjera kurba bëhet e padallueshme nga tangentja.

Ka një shprehje tjetër për koefiçentin këndor të tangentes që ndonjëherë është më e lehtë për tu përdorur. Le të jetë

$$h = x - a$$

Atëherë,

$$x = a + h$$

prandaj koefiçenti këndor i sekantes PQ është

$$k_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Vërejmë se kur x i afrohet a, h shkon në zero (sepse $h = x - a$) dhe shprehja për koefiçentin këndor të tangentes në përkufizimin e mesiperm bëhet

$$k = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

□

Shembull 3.21. *Gjeni ekuacionin e tangentes së hequr ndaj grafikut të $y = 3/x$ (hiperbolë) në pikën* $(3, 1)$.

Zgjidhje: Le të jetë $f(x) = 3/x$. Atëherë, koefiçenti këndor i tangentes në $(3, 1)$ është

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h\to 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

Prej nga ekuacioni i tangentes në pikën $(3, 1)$ është

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

i cili duke thjeshtuar merr trajtën

$$x + 3y - 6 = 0.$$

□

Shembull 3.22. *Gjeni koefiçentin këndor dhe tangeten e hequr ndaj grafikut të funksionit $f(x) = \sqrt{x}$ në pikat* $(1, 1)$, $(4, 2)$, *dhe* $(9, 3)$.

Zgjidhje: Meqënëse kërkohen tre koefiçentë këndorë, le ta fillojmë me gjetjen e koefiçentit këndor për një pikë të çfarëdoshme $(a, \sqrt{a})$:

$$\begin{aligned}
k &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \cdot \frac{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \\
&\lim_{h\to 0} \frac{(a+h) - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}
\end{aligned}$$

Në pikën $(1, 1)$ kemi $a = 1$, prandaj koefiçenti këndor i tangentes është $k = 1/2\sqrt{1} = 1/2$. Në $(4, 2)$ kemi $a = 4$ prej nga $k = 1/2\sqrt{4} = 1/4$; në $(9, 3)$ kemi $k = 1/2\sqrt{9} = 1/6$.

□

3.3.2 Shpejtësitë

Ne studiuam lëvizjen e topit të hedhur nga një lartësi, dhe përcaktuam shpejtësinë e tij si limit i shpejtësisë mesatare për intervale kohore gjithnjë e më të shkurtra.

Në përgjithësi, supozojmë se një objekt lëviz përgjatë një vije të drejtë, dhe ekuacioni i lëvizjes jepet nga $s = f(t)$, ku s është distanca direkte e objektit nga origjina në kohën t. Funksioni $f(x)$ që përshkruan lëvizjen quhet **funksioni pozicion i objektit**. Në intervalin e kohës nga $t = a$ deri në $t = a + h$ ndryshimi i pozicionit është $f(a + h) - f(a)$. Shpejtësia mesatare gjatë këtij intervali është

$$v_m = \frac{s}{t} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

ku me v_m kemi shënuar shpejtësinë mesatare, dhe s pozicionin, dhe t kohën e cila është e njëjtë me koefiçentin këndor të prerëses PQ.

Tani supozojmë se llogaritëm shpejtësinë mesatare në intervale kohe gjithnjë e më të shkurtra $[a, a + h]$. Me fjalë të tjera h le t'i afrohet 0. Si në shembullin e topit të hedhur nga një lartësi, përcaktojmë shpejtësinë (ose shpejtësinë e çastit) $v(a)$ në kohën $t = a$ si limit i kësaj shpejtësie mesatare:

$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Kjo do të thotë se shpejtësia në çastin $t = a$, është e barabartë me koefiçentin këndor të tangentes në P. Tani që dimë se si llogariten limitet, le ta rishikojmë problemin e topit të hedhur nga një lartësi.

Shembull 3.23. *Supozojmë se një top hidhet nga një kullë vrojtimi* $450m$ *e lartë në drejtim të tokës.*
(a) Cila është shpejtësia e topit pas 5 sekondash?
(b) Me çfarë shpejtësie e prek ai tokën?

Zgjidhje: Fillimisht përdorim ekuacionin e lëvizjes $s = f(t) = 4.9t^2$ për të gjetur shpejtësinë $v(a)$ pas a sekondash:

$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} 4.9(2a + h) = 9.8a$$

(a) Shpejtësia pas 5 sekondash është $v(5) = 9.8(5) = 49m/s$.

(b) Meqenë qoftë se kulla e vrojtimit është $450m$ e lartë nga toka, topi do ta prek tokën në kohën t_1 kur $s(t_1) = 450$, që do të thotë

$$4.9t_1^2 = 450$$

Prej nga

$$t_1^2 = \frac{450}{4.9} \; dhe \; t_1 = \sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 9.6s$$

Dhe kështu që shpejtësia e topit në çastin kur prek tokën do të jetë

$$v(t_1) = 9.8\sqrt{\frac{450}{4.9}} \approx 94m/s.$$

□

3.3.3 Të tjera raporte ndryshimi

Supozojmë se y është një madhësi e cila varet nga një tjetër madhësi x. Prandaj, y është funksion i x dhe ne shkruajmë $y = f(x)$. Në qoftë se x ndryshon nga x_1 në x_2, atëherë ndryshimi në x është

$$\triangle x = x_2 - x_1$$

dhe ndryshimi korrespondues tek y është

$$\triangle y = f(x_2) - f(x_1)$$

Raporti

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

quhet **raporti mesatar i ndryshimit** të y në lidhje me x gjatë intervalit $[x_1, x_2]$ dhe mund të interpretohet si koefiçenti këndor i sekantes PQ në shembullin e mësipërm.

Për analogji në lidhje me shpejtësinë, e shqyrtojmë raportin mesatar të ndryshimit kundrejt intervaleve gjithnjë e më të vogla të x, duke afruar x_2 tek x_1, duke bërë kështu që $\triangle x$ t'i afrohet 0. Limiti i këtij raporti mesatar të ndryshimit quhet **raport i çastit i ndryshimit** të y në lidhje me x në $x = x_1$, dhe interpretohet si koefiçenti këndor i tangentes së kurbës $y = f(x)$ në pikën $P(x_1, f(x_1))$:

$$sh_c = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{x_2\to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Të gjitha këto raporte ndryshimi mund të interpretohen si koefiçent këndor të tangenteve. Kjo na jep një kuptim shtesë për problemin e tangentes. Megjithëse zgjidhim një problem që përfshin tangenten, nuk po zgjidhim thjesht një problem gjeometrik. Ne gjithashtu po zgjidhim një varietet problemesh përfshi këtu raportin e ndryshimit në shkenca dhe inxhinjeri.

Ushtrime:

1. *Një kurbë ka ekuacion $y = f(x)$.*

a) Shkruani një shprehje për koefiçentin këndor të sekantes e cila kalon nga pikat $P = (3, f(3))$ dhe $Q = (x, f(x))$.

b) Shkruani një ekuacion për koefiçentin këndor i tangentes në pikën P.

2. *a) Gjeni koefiçenin këndor të tangentes ndaj parabolës $y = 4x - x^2$ në pikën $(1, 3)$.*

b) Gjeni një ekuacion për tangenten e pikës a).

c) Ndërtoni grafikun e parabolës dhe tangentes ndaj saj në pikën $(1, 3)$.

3. *a) Gjeni koefiçenin këndor të tangentes ndaj kurbës $y = x - x^3$ në pikën $(1, 0)$.*

b) Gjeni një ekuacion për tangenten e pikës a).

c) Ndërtoni grafikun e kurbës dhe tangentes ndaj saj në pikën $(1, 0)$.

Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj kurbës në pikën e dhënë

4.

$$y = \frac{x-1}{x-2}, (3, 2)$$

5.

$$y = \frac{2x}{x+1}^{2}, (0, 0)$$

6.

$$y = 2x^3 - 5x, (-1, 3)$$

7.

$$y = \sqrt{x}, (1, 1)$$

8. *a) Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj kurbës $y = 3+4x^2-2x^3$ në pikën $x = a$*

b) Gjeni ekuacionet e tangenteve në pikat $(1, 5)$ dhe $(2, 3)$.

c) Ndërtoni grafikun e kurbës dhe tangentet në të njëjtin sistem koordinativ.

9. *(a) Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj kurbës $y = 1/\sqrt{x}$ në pikën ku $x = a$*

(b) Gjeni ekuacionet e tangenteve në pikat $(1, 1)$ dhe $(4, 1/2)$.

(c) Ndërtoni grafikun e kurbës dhe tangentet në të njëjtin sistem koordinativ.

10. *Zhvendosja (në metra) e një grimce e cila lëviz sipas një vije të drejtë, jepet me ekuacionin e lëvizjes $s = 1/t^2$, ku t matet me sekonda. Gjeni shpejtësinë e grimcës në çastet $t = a$, $t = 2$, dhe $t = 3$.*

11. *Zhvendosja (në metra) e një grimce e cila lëviz sipas një vije të drejtë, jepet me ekuacionin e lëvizjes $s = t^2 - 8t + 18$, ku t matet me sekonda.*

(a) Gjeni shpejtësinë mesatare të grimcës në secilin interval kohe: $[3, 4]$, $[3.5, 4]$, $[4, 5]$, $[4, 4.5]$

(b) Gjeni shpejtësinë e çastit kur $t = 4$

(c) Ndërtoni grafikun e s si funksion i t dhe vizatoni sekantet koefiçentët e të cilave janë shpejtësitë mesatare të pikës (a), si dhe grafikun e tangentes e koefiçenti këndor i së cilës është shpejtësia e çastit në pikën (b).

3.4 Përkufizimi i derivatit

Në seksionin e mëparshëm përcaktuam koefiçentin këndor të tangetes së hequr ndaj një kurbe me ekuacion $y = f(x)$ në pikën ku $x = a$ si

$$k = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Pamë gjithashtu se shpejtësia e një objekti me funksion pozicion $s = f(t)$ në kohën $t = a$ është

$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Në fakt limiti i formës

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

përdoret sa herë që duam të llogarisim raportin e ndryshimit në çdo fushë të shkencës apo inxhinjerisë, siç janë raporti i reaksionit në kimi apo kostoja margiale në ekonomi. Meqënëse ky tip limiti haset shpesh, atij i është dhënë një emër dhe shënim i veçantë.

Përkufizim 3.11. **Derivat** i një funksioni $f(x)$ në një pikë $x = a$, i shënuar me $f'(a)$, quhet limiti

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

në qoftë se ky limit ekziston.

Në qoftë se shkruajmë $x = a + h$, atëherë $h = x - a$ dhe h i afrohet 0 atëherë dhe vetëm atëherë kur x i afrohet a. Prandaj një mënyrë ekuivalente e përkufizimit të derivatit, siç e pamë tek tangentja, është

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Shembull 3.24. *Gjeni derivatin e funksionit $f(x) = x^2 - 8x + 9$ tek numri a.*

Zgjidhje: Nga përkufizimi i derivatit kemi:

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a + 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h\to 0}(2a + h - 8) = 2a - 8 \end{aligned}$$

□

Në seksionin e mëparshëm përkufizuam tangenten ndaj një kurbe $y = f(x)$ në pikën $P(a, f(a))$ si drejtëza që kalon nga pika P dhe ka si koefiçent këndor k. Meqënëse nga përkufizimi i derivatit del se është i njëjtë ma derivatin $f'(a)$ kemi

Lema 3.1. *Drejtëza tangente ndaj $y = f(x)$ në $(a, f(a))$ është drejtëza që kalon nga $(a, f(a))$ me koefiçent këndor të barabartë me $f'(a)$, pra derivatin e $f(x)$ në a.*

Në qoftë se përdorim ekuacionin e drejtëzës atëherë ekuacioni i tangentes në pikën $(a, f(a))$ është

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Shembull 3.25. *Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj parabolës $y = x^2 - 8x + 9$ në pikën $(3, -6)$.*

Zgjidhje: Derivati i funksionit $f(x) = x^2 - 8x + 9$ në pikën a është $f'(a) = 2a - 8$. Prandaj koefiçenti këndor i tangentes në $(3, -6)$ është $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Prej nga ekuacioni i tangentes është

$$y - (-6) = (-2)(x - 3)$$

ose

$$y = -2x$$

□

Shembull 3.26. *Le të jetë $f(x) = 2^x$. Llogaritni $f'(0)$.*

Zgjidhje: Nga përkufizimi kemi

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2^h - 1}{h}$$

Meqënëse nuk jemi në gjendje ta njehsojmë saktësisht këtë limit, përdorim makinën llogaritëse për të përafruar vlerën e $\frac{2^h-1}{h}$. Nga evidentimet numerike në tabelë shohim se kur h i afrohet 0, këto vlera i afrohen numrit 0.69. Prandaj vlerësimi yne është

$$f'(0) \approx 0.69.$$

Pra, vlerësimi jonë për derivatin është $f'(0) \approx 0.7$.

□

Ushtrime:

1. *(a) Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj grafikut të funksionit $y = g(x)$ në $x = 5$ në qoftë se $g(5) = -3$ dhe $g'(5) = 4$.*

(b)Në qoftë se tangentja ndaj grafikut të funksionit $y = f(x)$ në $(4, 3)$ kalon nga pika $(0, 2)$ gjeni $f(4)$ dhe $f'(4)$.

2. *Ndërtoni grafikun e funksionit $f(x)$ për të cilin $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = -1$, dhe $f'(2) = -1$.*

3. *Ndërtoni grafikun e funksionit $g(x)$ për të cilin $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, dhe $g'(1) = 3$, dhe $g'(2) = 3$.*

4. *Në qoftë se $f(x) = 3x^2 - 5x$, gjeni $f'(2)$ dhe përdoreni për të gjetur ekuacionin e tangentes ndaj parabolës $y = 3x^2 - 5x$ në pikën $(2, 2)$.*

5. *Në qoftë se $g(x) = 1 - x^3$, gjeni $g'(0)$ dhe përdoreni për të gjetur ekuacionin e tangentes ndaj kurbës $y = 1 - x^3$ në pikën $(0, 1)$.*

6. *(a) Në qoftë se $F(x) = 5x/(1+x^2)$, gjeni $F'(2)$ dhe përdoreni për të gjetur ekuacionin e tangentes ndaj kurbës $y = 5x/(1+x^2)$ në pikën $(2, 2)$.*

(b) Ilusrojeni pikën (a) duke ndërtuar grafikun e kurbës dhe tangenten ndaj saj në një sistem koordinativ.

7. *(a)Në qoftë se $G(x) = 4x^2 - x^3$, gjeni $G'(a)$ dhe përdoreni për të gjetur ekuacionet e tangenteve ndaj kurbës $y = 4x^2 - x^3$ në pikat $(2, 8)$, dhe $(3, 9)$.*

(b) Ilustroni pikën (a) duke ndërtuar grafikun e kurbës dhe tangenten ndaj saj në një sistem koordinativ.

Gjeni $f'(a)$.

8. $f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

9. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$

10. $f(t) = \frac{2t+1}{t+5}$

11. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+1}}$

12. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

13. $f(t) = t^4 - 5t$

Secili limit përfaqson derivatin e ndonjë funksioni $f(x)$ tek një numër a. Vërtetoni se cili është funksioni dhe numri a në secilin rast.

14. $\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(1+h)^{10}-1}{h}$

15. $\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$

16. $\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{2^x-32}{x-5}$

17. $\lim_{h\longrightarrow \pi/4} \frac{\tan x-1}{x-\pi/4}$

18. $\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\cos(\pi+h)+1}{h}$

19. $\lim_{t\longrightarrow 1} \frac{t^4+t-2}{t-1}$

Një grimcë lëviz përgjatë një vije të drejtë me ekuacion levizjeje $s = f(t)$, ku s matet me metra dhe t me sekonda. Gjeni Shpejtësinë kur $t = 5$ dhe $f(t)$ jepet si me poshtë:

20.

$$f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$$

21.

$$f(t) = t^{-1} - t$$

3.5 Interpretimi i derivatit si një raport ndryshimi

Në seksionin e mëparshëm përkufizuam raportin e ndryshimit të çastit të $y = f(x)$ në lidhje me x në $x = x_1$ si limit i shkallës mesatare të ndryshimit kundrejt intervaleve gjithnjë e më të vogla. Në qoftë se intervali është $[x_1, x_2]$, atëherë ndryshimi në x është $\triangle x = x_2 - x_1$, dhe ndryshimi korrespondues në y është

$$\triangle y = f(x_2) - f(x_1)$$

dhe

$$\textit{raporti i ndryshimit} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Nga përkufizimi ekuivalent i derivatit ne themi se ky limit është derivati i $f(x)$ në x_1, domethënë $f'(x_1)$ Kjo na jep një interpretim të dytë të derivatit:

Lema 3.2. *Derivati $f'(a)$ është raporti i ndryshimit i çastit për $y = f(x)$ në lidhje me x kur $x = a$.*

Lidhja me interpretimin e parë është se në qoftë se skicojmë grafikun e kurbës $y = f(x)$, atëherë raporti i ndryshimit të çastit është koefiçenti këndor i tangentes ndaj kësaj kurbe në pikën ku $x = a$. Kjo do të thotë se kur derivati është shumë i madh, vlerat e y ndryshojnë shumë shpejt. Kur derivati është shumë i vogël, atëherë kurba është relativisht e sheshtë dhe vlerat e y ndryshojnë shumë ngadalë.

Shembull 3.27. *Pozicioni i një grimce jepet me ekuacionin e lëvizjes $s(t) = f(t) = 1/(1+t)$ ku t matet me sekonda dhe s me metra. Gjeni shpejtësinë pas dy sekondash.*

Zgjidhje: Derivati i $f(x)$ kur $t = 2$ është

$$\begin{aligned}
f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+(2+h)} - \frac{1}{1+2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3(3+h)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{3(3+h)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3(3+h)} = \frac{-1}{9}
\end{aligned}$$

Prandaj shpejtësia pas dy sekondash është $f'(2) = -1/9 m/s$.

□

Ushtrime:

1. *(a) Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj grafikut të funksionit $y = g(x)$ në $x = 5$ në qoftë se $g(5) = -3$ dhe $g'(5) = 4$.*

(b)Në qoftë se tangentja ndaj grafikut të funksionit $y = f(x)$ në $(4, 3)$ kalon nga pika $(0, 2)$ gjeni $f(4)$ dhe $f'(4)$.

2. *Ndërtoni grafikun e funksionit $f(x)$ për të cilin $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = -1$, dhe $f'(2) = -1$.*

3. *Ndërtoni grafikun e funksionit $g(x)$ për të cilin $g(0) = g'(0) = 0$, $g'(-1) = -1$, dhe $g'(1) = 3$, dhe $g'(2) = 3$.*

4. *Në qoftë se $f(x) = 3x^2 - 5x$, gjeni $f'(2)$ dhe përdoreni për të gjetur ekuacionin e tangentes ndaj parabolës $y = 3x^2 - 5x$ në pikën $(2, 2)$.*

5. *Në qoftë se $g(x) = 1 - x^3$, gjeni $g'(0)$ dhe përdoreni për të gjetur ekuacionin e tangentes ndaj kurbës $y = 1 - x^3$ në pikën $(0, 1)$.*

6. *(a)Në qoftë se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, gjeni $F'(2)$ dhe përdoreni për të gjetur ekuacionin e tangentes ndaj kurbës $y = 5x/(1+x^2)$ në pikën $(2, 2)$.*

(b) Ilustrojeni pikën (a) duke ndërtuar grafikun e kurbës dhe tangenten ndaj saj në një sistem koordinativ.

7. *(a)Në qoftë se $G(x) = 4x^2 - x^3$, gjeni $G'(a)$ dhe përdoreni për të gjetur ekuacionet e tangenteve ndaj kurbës $y = 4x^2 - x^3$ në pikat $(2, 8)$, dhe $(3, 9)$.*

(b) Ilusrojeni pikën (a) duke ndërtuar grafikun e kurbës dhe tangenten ndaj saj në një sistem koordinativ.

8. *Gjeni $f'(a)$.*

$f(x) = 3 - 2x + 4x^2$

9. $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2}$

10. $f(t) = \frac{2t+1}{t+5}$

11. $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x+1}}$

12. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

13. $f(t) = t^4 - 5t$

14. *Secili limit përfaqson derivatin e ndonjë funksioni $f(x)$ tek një numër a. Vërtetoni se cili është funksioni dhe numri a në secilin rast.*

$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{(1+h)^{10}-1}{h}$

15. $\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{16+h}-2}{h}$

16. $\lim_{x\longrightarrow 5} \frac{2^x-32}{x-5}$

17. $\lim_{h\longrightarrow \pi/4} \frac{\tan x-1}{x-\pi/4}$

18. $\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{\cos(\pi+h)+1}{h}$

19. $\lim_{t\longrightarrow 1} \frac{t^4+t-2}{t-1}$

20. *Një grimcë lëviz përgjatë një vije të drejtë me ekuacion levizjeje $s = f(t)$, ku s matet me metra dhe t me sekonda. Gjeni shpejtësinë kur $t = 5$ dhe*

i) $f(t) = 100 + 50t - 4.9t^2$

ii) $f(t) = t^{-1} - t$

21. *Tabela e mëposhtme tregon përqindjen e llogaritur P të popullatës së Europës që përdor celularë.(Llogairtjet janë bërë në mes viti.)*

Viti	1998	1999	2000	2001	2002	2003
P	28	39	55	68	77	83

(a) Gjeni raportin mesatar të rritjes së numrit të celularëve:nga $1999-2000$, *nga* $2000-2001$, *nga* $2000-2002$.

(b) Llogarisni rritjen në vitin 2000.

22. *Kostoja e prodhimit të x njësive të një të mire të caktuar është* $C(x) = 5000 + 10x + 0.05x^2$.

(a) Gjeni raportin mesatar të ndryshimit të C në lidhje me xkur niveli i prodhimit ndryshon: nga $x = 100$ *në* $x = 105$ *dhe nga* $x = 100$ *në* $x = 101$

(b) Gjeni raportin e ndryshimit të çastit të C në lidhje me x, kur $x = 100$.*(Kjo quhet kostoja marxhinale)*

23. *Numri i bakterieve pas t orësh në një eksperiment laboratorik të kontroluar është $n = f(t)$.*

(a) Cili është kuptimi i derivatit $f'(5)$? Cila është njësia e tij?

(b) Supozojmë se ka një sasi të pakufizuar të hapësirës dhe ushqimit për bakteriet. Cili mendoni se është më i madh $f'(5)$ apo $f'(10)$? po qe se ushqimi është i kufizuar a do ndikoje kjo në konluzionin tuaj? Shpjegojeni.

24. *Le të jetë $T(t)$ temperatura (në ^oC) në një qytet të caktuar pas mesnate. Tabela tregon vlerat e këtij funksioni të regjistruara çdo dy orë. Cili është kuptimi i $T'(10)$? Llogariteni këtë vlerë.*

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	30	30	28	27	29	35	37	38

25. *Përcaktoni se kur ekziston $f'(0)$.*

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{në qoftë se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{në qoftë se} \quad x = 0 \end{cases}$$

26.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{në qoftë se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{në qoftë se} \quad x = 0 \end{cases}$$

3.6 Derivati si një funksion

Në seksionin e mëparshëm shqyrtuam derivatin e një funksioni $f(x)$ tek një pikë e caktuar a:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{3.1}$$

Në këtë paragraf do të ndryshojmë këndvështrimin tonë. Le të jetë a një pikë e çfarëdoshme. Në qoftë se e zëvendësojmë a me ndryshoren x, në ekuacionin e mësipërm përftojmë

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.2}$$

Për çdo vlerë të dhënë të x për të cilën ekziston ky limit, ne i vemë në korrespondencë x numrin $f'(x)$. Pra, mund ta shikojmë f' si funksion, të quajtur derivati i $f(x)$ dhe të përkufizuar në bazë të Ekuacionit (3.2). Dimë se vlera e f' në x, $f'(x)$ mund të interpretohet gjeometrikisht si koefiçenti këndor i tangentes ndaj grafikut të $f(x)$ në pikën $(x, f(x))$.

Funksioni f' quhet derivati i $f(x)$ sepse ka "derivuar"nga $f(x)$ nëpërmjet proçesit të limitit në Ek (3.2). Bashkësia e përkufizimit të f', është bashkësia $x|f'(x)ekziston$ dhe mund të jetë më e vogël se vetë bashkësia e përkufizimit të $f(x)$.

Shembull 3.28. *(a) Në qoftë se $f(x) = x^3 - x$, gjeni një formulë për $f'(x)$.*

(b) Ilustrojeni duke paraqitur grafikët e $f(x)$ dhe f'.

Zgjidhje: (a) Kur përdorim Ekuacionin (3.2) për të llogaritur derivatin, ne duhet të kujtojmë se ndryshorja është h dhe se x për momentin shihet si një konstante kur llogaritet limiti.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-(x+h)-(x^3-x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x-h-x^3+x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3-h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2-1) = 3x^2-1 \end{aligned} \tag{3.3}$$

(b) Vërejmë se $f'(x) = 0$ kur $f(x)$ ka tangente horizontale dhe $f'(x)$ është pozitiv kur tangentet ndaj grafikut të $f(x)$ kanë koefiçent këndor pozitiv.

□

Shembull 3.29. *Gjeni derivatin $f'(x)$ kur*

$$f(x) = \frac{1-x}{2+x}.$$

Zgjidhje: Nga përkufizimi kemi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \frac{1-x}{2+x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x)-(1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh)-(2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)} = \frac{-3}{(2+x)^2} \end{aligned}$$

□

3.6.1 Mënyra të tjera për shënimin e derivatit

Në qoftë se përdorim shënimin tradicional të $y = f(x)$ për të treguar se ndryshorja e pavarur është x dhe ndryshorja i varur është y, atëherë disa shënime alternative të përbashkëta për derivatin janë si më poshtë:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Simbolet D dhe d/dx quhen operatorë diferencialë sepse ata tregojnë veprimin e diferencimit, i cili është procesi i llogaritjes së derivatit.

Simboli dy/dx, i cili është përkufizuar nga Lajbnici, nuk duhet parë si raport; ai është thjesht një sinonim për $f'(x)$. Megjithatë mjaft i përdorshëm është shënimi i mëposhtëm:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

Në qoftë se ne duam të tregojmë vlerën e derivatit dy/dx sipas Lajbinicit në një numër plotësisht të përcaktuar a, përdorim shënimin

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

ose

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$$

që është sinonim i $f'(a)$.

Përkufizim 3.12. Një funksion $f(x)$ quhet **i diferencueshëm në** a në qoftë se $f'(a)$ ekziston. Ai quhet i **diferencueshëm në një interval të hapur** (a, b) në qoftë se ai është i diferencueshëm në çdo pikë të atij intervali.

Shembull 3.30. *Ku është i diferencueshëm funksioni $f(x) = |x|$?*

Zgjidhje: Në qoftë se $x > 0$, atëherë $|x| = x$ dhe ne mund të zgjedhim h aq të vogël saqë $x + h > 0$ dhe prej këtej $|x + h| = x + h$. Pra, për $x > 0$ ne kemi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

Kështu që $f(x)$ është i diferencueshëm për $x > 0$.

Në mënyrë të ngjashme, për $x < 0$ ne kemi $|x| = -x$ dhe h mund ta zgjedhim aq të vogël sa $x + h < 0$ dhe $|x + h| = -(x + h)$. Prej nga, për $x < 0$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0}(-1) = -1.$$

Pra, $f(x)$ është i diferencueshëm për çdo $x < 0$.

Për $x = 0$ na duhet të studiojmë

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0|}{h}$$

(në qoftë se ky limit ekziston).

Le të llogarisim limitet e njëanshme,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

dhe

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1.$$

Meqënëse këto limite janë të ndryshëm, $f'(0)$ nuk ekziston. Prandaj, $f(x)$ është i diferencueshëm për të gjitha x me përjashtim të $x = 0$. Një formulë për $f'(x)$ jepet nga

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \textit{në qoftë se} \quad x > 0 \\ -1 & \textit{në qoftë se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Fakti që $f'(0)$ nuk ekziston pasqyrohet gjeometrikisht me faktin se kurba $y = |x|$ nuk ka tangente në pikën $(0, 0)$.

Teorema 3.8. *Në qoftë se $f(x)$ është i diferencueshëm në a, atëherë ai është i vazhdueshëm në a.*

Vërtetim: Për të treguar se $f(x)$ është i vazhdueshëm në a, duhet të tregojmë se $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Për këtë mjafton të tregojmë se diferenca $f(x) - f(a)$ shkon në zero. Na është dhënë se $f(x)$ është i diferencueshëm në a, pra

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ekziston.

Shprehjen $f(x) - f(a)$ e shumëzojmë dhe e pjestojmë me $(x - a)$ [me kushtin që $x \neq a$]:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

Prandaj, duke përdorur rregullin e prodhimit, mund të shkruajmë

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}[f(x) - f(a)] &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)\\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x\to a}(x - a)\\ &= f'(a) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

Prej nga

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}[f(a) + (f(x) - f(a))]\\ &= \lim_{x\to a} f(a) + \lim_{x\to a} + \lim_{x\to a}[f(x) - f(a)]\\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

Kështu që $f(x)$ është i vazhdueshëm në a.

□

Vërejtje 3.1. *E anasjellta e Teoremës nuk është e vërtetë; domethënë ka funksione që janë të vazhdueshëm por jo të diferencueshëm. Për shembull, funksioni $f(x) = |x|$ është i vazhdueshëm në 0 sepse*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0).$$

Por ne dimë se $f(x)$ nuk është i diferencueshëm në 0.

Teorema 3.8 na jep një mënyrë tjetër për të thënë se funksioni nuk ka derivat. Ajo thotë se po qe se funksioni nuk është i vazhdueshëm në a, atëherë nuk është as i diferencueshëm në a. Pra, çdo jo-vazhdueshmëri e $f(x)$ tregon se ai nuk është as i diferencueshëm.

Një mundësi e tretë, është se kur një kurbë ka tangente vertikale kur $x = a$, pra $f(x)$ është i vazhdueshëm në a dhe

$$\lim_{x\to a} |f'(x)| = \infty$$

Ushtrime:

1. *Gjeni derivatet e funksioneve duke u nisur nga përkufizimi i derivatit. Përcaktoni bashkësinë e përkufizimit të funksionit dhe të derivatit,*

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}.$$

2. $f(x) = mx + b$

3. $f(t) = 5t - 9t^2$

4. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

5. $f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

6. $f(x) = x + \sqrt{x}$

7. $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

8. $f(x) = \frac{3+x}{1-3x}$

9. $f(t) = \frac{4t}{t+1}$

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

11. $f(x) = x^4$

12. *(a) Ndërtoni garfikun e $f(x) = \sqrt{6 - x}$ duke filluar nga grafiku i $y = \sqrt{x}$ dhe duke përdorur transformimet e funksoineve.*

(b) Përdorni grafikun e pikës (a)për të skicuar grafikun e f'.

(c) Përdorni përkufizimin e derivatit për të gjetur $f'(x)$. Cilat janë bashkësitë e përkufizimit të $f(x)$ dhe f'?

(d) Përdorni një makinë llogaritëse garfike për të skicuar grafikun dhe krahasojeni atë me grafikun e pikës (b).

13. *(a) Në qoftë se $f(x) = x^4 + 2x$, gjeni $f'(x)$.*
(b) Përpiquni të shihni në qoftë se përgjigjja juaj është e arsyeshme duke krahasuar grafikët e $f(x)$ dhe f'.

14. *(a) Në qoftë se $f(t) = t^2 - \sqrt{t}$, gjeni $f'(t)$.*
(b) Përpiquni të shihni në qoftë se përgjigjja juaj është e arsyeshme duke krahasuar grafikët e $f(x)$ dhe f'.

15. *Në qoftë se $f(x) = 2x^2 - x^3$, gjeni $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, dhe $f^{(4)}(x)$. Ndërtoni garfikët e tyre në një sistem koordinativ të përbashkët për të parë në qoftë se përgjigjet tuaja përputhen me interpretimin gjeometrik të këtyre derivateve.*

16. *Le të jetë $f(x) = \sqrt[3]{x}$.*
(a) Në qoftë se $a \neq 0$, gjeni $f'(a)$.
(b) Vërtetoni se $f'(0)$ nuk ekziston.
(c) Vërtetoni se $y = \sqrt[3]{x}$ ka një tangente vertikale në $(0, 0)$.

17. *Le të jetë $g(x) = x^{2/3}$.*
(a) Vërtetoni se $g'(0)$ nuk ekziston.
(b) Në qoftë se $a \neq 0$, gjeni $g'(a)$.
(c) Vërtetoni se $y = x^{2/3}$ ka një tangente vertikale në $(0, 0)$.

18. *Vërtetoni se funksioni $f(x) = |x - 6|$ nuk është i derivueshëm në $x = 6$. Gjeni një formulë për f' dhe skiconi grafikun e tij.*

19. *Ndërtoni grafikun e funksionit $f(x) = x|x|$.*
(a) Për çfarë vlerash të x $f(x)$ është i derivueshëm?
(b) Gjeni një formulë për f' dhe skiconi grafikun e tij.

20. *Derivatet e majta dhe të djathta të $f(x)$ përcaktohen nga barazimet*

$$f'_+(a) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

dhe

$$f'_-(a) = \lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

kur ata ekzistojnë. Atëherë, f' ekziston atëherë dhe vetëm atëherë kur këto derivate të njëanshëm ekzistojnë dhe janë të barabartë.
(a)Gjeni $f'_+(4)$ dhe $f'_-(4)$ për funksionin

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{në qoftë se} \quad x \leq 0 \\ 5 - x & \text{në qoftë se} \quad 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{në qoftë se} \quad x \geq 4 \end{cases}$$

(b) Ndërtoni grafikun e $f(x)$.
(c) Ku nuk është $f(x)$ i vazhdueshëm?
(d) Ku nuk është $f(x)$ i derivueshëm?

21. *Kujtojmë se një funksion $f(x)$ quhet çift në qoftë se $f(-x) = f(x)$ për të gjitha x nga bashkësia e vetë e përkufizimit, dhe quhet tek kur $f(-x) = -f(x)$ për të gjitha x nga bashkësia e vetë e përkufizimit. Vërtetoni se:*
(a) Derivati i një funksioni çift është funksion tek.
(b) Derivati i një funksioni tek është funksion çift.

Kapitulli 4

Rregullat e derivimit

Nga matja e koefiçentëve këndorë në pikat e kurbës së sinusit, përftojmë një pamje vizuale të qartë se derivati i funksionit sinus është funksioni kosinus. Kemi parë se si interpretohet derivati si koefiçent këndor i tangentes dhe si shkallë e ndryshimit, si llogaritet derivati i një funksioni të dhënë në trajtë tabelare, ose si të ndërtojmë grafikun e derivatit të funksionit të paraqitur grafikisht. Deri tani kemi përdorur përkufizimin e derivatit për të llogaritur derivatet e funksioneve të paraqitur në trajtë algjebrike, por jo-gjithmonë është shumë e përshtatshme të përdoret përkufizimi për të llogaritur derivatin. Në këtë kapitull do të zhvillojmë rregulla për të llogaritur derivatin pa pasur nevojën e përdorimit direkt të derivatit. Këto rregulla ne lejojnë të llogarisim më lehtë derivatet e polinomeve, funksioneve racionale, funksioneve algjebrike, eksponenciale dhe logaritmike, funksioneve trigonometrike dhe arkfunksioneve. E më pas i përdorim këto rregulla për të zgjidhur problemet që përfshijnë raportet e ndryshimit dhe funksionet përafruese.

Figura 4.1: Jean le Rond d'Alembert (1717–1783)

4.1 Derivatet e funksioneve elementare

Në këtë seksion do të mësojmë se si të derivojmë funksionet konstantë, funksionet fuqi, polinomet, dhe funksionet eksponenciale.

Le të fillojmë me funksionin më të thjeshtë, funksionin konstant $f(x) = c$. Grafiku i këtij funksioni është drejtëza horizontale $y = c$, e cila ka koefiçentin këndor të barabartë me 0. Prandaj, duhet të kemi $f'(x) = 0$. Duke u nisur nga përkufizimi, vërtetimi është i thjeshtë:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Sipas Lajbnicit e shkruajmë këtë rregull si vijon:

Derivati i funksionit konstant është
$$\frac{d}{dx}(c) = 0.$$

Shembull 4.1. *Një objekt lëviz me shpejtësi konstante $v(t) = 55$ km/h. Sa është nxitimi i këtij objekti?*

Nxitimi është rapoti i ndryshimit te shpejtësisë mbi ndryshimin e kohës. Pra, është derivati i shpejtësisë. Kështu që nxitimi i këtij objekti është 0. □

4.1.1 Funksionet fuqi

Tani le të shohim funksionet $f(x) = x^n$, ku n është numër natyror. Në qoftë se $n = 1$, grafiku i $f(x) = x$ është drejtëza $y = x$, e cila ka koefiçent këndor të barabartë me 1. Pra,

$$\frac{d}{dx}(x) = 1,$$

e cila verifikohet lehtë duke u nisur nga përkufizimi i derivatit.

Tashmë kemi parë rastet kur $n = 2$ dhe $n = 3$. Në fakt kemi gjetur se

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \ \ dhe \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2.$$

Për $n = 4$ e gjejmë derivatin e $f(x) = x^4$ si më poshtë

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3) = 4x^3 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pra, $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$.

Duke krahasuar rastet $n = 1, 2, 3$ shohim se kanë një cilësi të përbashkët. Duket e arsyeshme të mendosh se kur n është një numër natyror,

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}.$$

Del se kjo është e vërtetë. Mund ta vërtetojmë atë në dy mënyra, mënyra e dytë përdor Teoremën binomiale.

Rregull: (Rregulli i fuqisë). Në qoftë se n është një numër natyror, atëherë

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Vërtetim: Së pari, formula

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

mund të verifikohet lehtë duke bërë veprimet në të djathtë.

Në qoftë se $f(x) = x^n$, mund të përdorim trajtën e dytë të përkufizimit të derivatit për $f'(a)$ dhe ekuacionin e mësipërm për të shkruar

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a}(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Mënyra e dytë:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

Në gjetjen e derivatit të x^4 na u desh të zbërthenim $(x+h)^4$. Këtu na duhet të zbërthejmë $(x+h)^n$ dhe përdorim Teoremën binomiale. Pra,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + nxh^{n-1} + h^n\right] - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}\cdot x^{n-2}h^2 + \ldots + n\,x\,h^{n-1} + h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + nxh^{n-2} + h^{n-1}\right] \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

sepse çdo term me përjashtim të të parit ka h si faktor dhe kështu shkon në zero.

□

Le të ilustrojmë rregullin fuqi me disa shembuj:

Shembull 4.2. *Pohimet e mëposhtme janë të vërteta:*

(a) Në qoftë se $f(x) = x^6$ *atëherë* $f'(x) = 6x^5$.

(b) Në qoftë se $y = x^{1000}$ *atëherë* $y' = 1000x^{999}$.

(c) Në qoftë se $y = t^4$ *atëherë* $\frac{dy}{dt} = 4t^3$.

(d) $\frac{d}{dr}(r^3) = 3r^2$

□

Lind pyetja se ç'ndodh për funksionet fuqi me eksponent negativ. Vërtetohet nga përkufizimi i derivatit se

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Këtë ekuacion mund ta rishkruajmë

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = (-1)\cdot x^{-2}$$

dhe në këtë mënyrë rregulli fuqi është i vërtetë kur $n = -1$. Në fakt do të tregojmë se kjo vlen për të gjithë numrat negativë. Po kur eksponenti është racional? Në një nga shembujt pamë se

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

i cili mund të shkruhet si

$$\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2}$$

Kjo tregon se rregulli fuqi mbetet i vërtetë edhe kur $n = \frac{1}{2}$. Në fakt, do tregojmë se është i vërtetë për të gjithë numrat realë.

Rregull: (Rregulli fuqi). Në qoftë se r është numër real atëherë

$$\frac{d}{dx}(x^r) = r\cdot x^{r-1}$$

Shembull 4.3. *Derivoni funksionet e mëposhtme*

(a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

(b) $y = \sqrt[3]{x^2}$

Zgjidhje: Në secilin rast e rishkruajmë funksionin si fuqi e x.

(a) Meqë $f(x) = x^{-2}$ përdorim rregullin 4.1.1 për $n = -2$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$$

(b) Në këtë rast kemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

□

Shembull 4.4. *Gjeni ekuacionin e tangentes së hequr ndaj grafikut të funksionit $y = x\sqrt{x}$ në pikën $(1,1)$.*

Zgjidhje: Derivati i $f(x) = x\sqrt{x} = x \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$ është

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{(3/2)-1} = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Prandaj koefiçenti këndor i tangentes në pikën $(1,1)$ është $f'(1) = \frac{3}{2}$. Prej nga ekuacioni i tangentes është

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x-1)$$

ose $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.

□

Kur funksione të reja përftohen prej funksioneve të vjetër nëpërmjet mbledhjes, zbritjes, apo shumëzimit me një konstante, derivatet e tyre mund të llogariten në termat e derivateve të funksioneve të vjetër. Në veçanti formula e mëposhtme thotë se derivati i një funksioni shumëzuar me një konstante, është i barabartë me konstanten shumëzuar me derivatin e vetë funksionit.

4.1.2 Rregulli i shumëzimit me një konsante

Në qoftë se c është një konstante dhe $f(x)$ një funksion i diferencueshëm atëherë

$$\frac{d}{dx}\left[c \cdot f(x)\right] = c \cdot \frac{d}{dx}f(x)$$

Vërtetim: Le të jetë $g(x) = c \cdot f(x)$. Atëherë

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} c[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= c\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= cf'(x) \end{aligned}$$

□

Rregulli në vazhdim na tregon se derivati i shumës së dy funksioneve është sa shuma e derivateteve të atyre funksioneve.

Rregull: (Rregulli i shumës). Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të dy të diferencueshëm atëherë

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

Vërtetim: Le të jetë $F(x) = f(x) + g(x)$. Atëherë,

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} [\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}
$$

□

Rregulli i shumës mund të përgjithësohet për më shumë se dy funksione. Për shembull, duke përdorur këtë rregull dy herë marrim

$$(f + g + h)' = [(f + g) + h]' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$$

Duke shkruar $f - g$ si $f + (-1)g$ dhe duke zbatuar rregullin e shumës dhe të shumëzimit me një konstante, përftojmë formulën në vazhdim.

Rregull: (Rregulli i diferencës). Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të dy funksione të diferencueshëm, atëherë

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

Rregulli i shumëzimit me konstante, rregulli i shumës, dhe rregulli i diferencës mund të kombinohen me rregullin fuqi për të derivuar çdo polinom, si në shembujt në vazhdim.

Shembull 4.5. *Gjeni derivatin e funksionit*

$$f(x) = x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5$$

Zgjidhje:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) &= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4 + 10\frac{d}{dx}x^3 - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\
&= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\
&= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

□

Shembull 4.6. *Gjeni një pikë në kurbën $y = x^4 - 6x^2 + 4$ ku tangentja është horizontale.*

Zgjidhje: Tangentet horizontale ndodhin aty ku derivati bëhet zero. Kemi

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4) - 6\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4) \\
&= 4x^3 - 12x + 0 = 4x(x^2 - 3)
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Prej nga, $\frac{dy}{dx} = 0$ në qoftë se $x = 0$ ose $x^2 - 3 = 0$, domethënë $x = \pm\sqrt{3}$. Pra, kurba e dhënë ka tangente horizontale kur $x = 0$, $\sqrt{3}$ dhe $-\sqrt{3}$. Pikat korresponduese janë $(0, 4)$, $(\sqrt{3}, -5)$, dhe $(-\sqrt{3}, -5)$.

□

Ushtrime:

Derivoni funksionin

1. $f(x) = 324,5$

2. $f(t) = 2 - \frac{3}{5}t$

3. $f(x) = x^3 - 4x + 8$

4. $f(x) = \sqrt[4]{25}$

5. $f(x) = \frac{2}{5}x^9$

6. $f(x) = \frac{1}{4}x^8 - 5x^5 + x$

7. $f(x) = \frac{1}{4}((x^4 + 16))$

8. $f(x) = (x-2)(2x+6)$

9. $f(x) = x^{-3/5}$

10. $f(x) = cx^{-6}$

11. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

12. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

13. $f(x) = \sqrt{x}(x-1)$

14. $f(x) = \frac{-14}{x^5}$

15. $f(x) = ax^2 + bx + c$

16. $f(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^5$

17. $f(x) = \frac{x^2+6x+8}{\sqrt{x}}$

18. $f(x) = \sqrt{3}x^2 + \sqrt{3x}$

19. $f(x) = (x + x^{-1})^3$

20. $f(x) = \sqrt[7]{x} + 9\sqrt{x^7}$

21. $f(x) = \frac{A}{x^9} + Bx^3$

22. $f(x) = (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}})$

23. $f(x) = 4\pi^2$

24. $f(x) = cx^{-7}$

Gjeni një ekuacion të tangentes ndaj kurbës në pikën e dhënë

25.

$$y = \sqrt[4]{x}, \text{ në } (1,1).$$

26.

$$y = x^4 + 3x^2 - x, \text{ në } (1,3).$$

27. *Gjeni një ekuacion të tangentes ndaj kurbës në pikën e dhënë. Ilustrojeni duke ndërtuar grafikun e kurbës dhe tangenten në të njëjtin sistem koordinativ.*

$$y = 3x^2 - x^3, \ (1,2).$$

28. $x - \sqrt{x}$, $(1,0)$

Gjeni $f'(x)$. Krahasoni grafikët e $f(x)$ dhe f'.

29.

$$f(x) = 3x^5 - 14x^3 + 25x$$

30. $f(x) = 3x^{12} - 5x^2 + 5$

31. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

32. *Ekuacioni i lëvizjes së një grimce është $s = t^3 - 3t$, ku s matet në metra dhe t në sekonda. Gjeni*

(a) Shpejtësinë dhe nxitimin në varësi të t,

(b) Nxitimin pas $2s$

(c) Nxitimin kur shpejtësia është 0.

33. *Ekuacioni i lëvizjes së një grimce është $s = 2t^3 - 7t^2 + 4t + 1$, ku s matet në metra dhe t në sekonda. Gjeni*

(a) Shpejtësinë dhe nxitimin në varësi të t,

(b) Nxitimin pas $1s$, dhe

(c) Ndërtoni grafikun e funksioneve pozicion, shpejtësi dhe nxitim në të njëjtin sistem koordinativ.

34. *Gjeni pikat e kurbës $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ ku tangentja është horizontale*

35. *Për çfarë vlerash të x kurba $y = x^3 + 3x^2 + x + 3$ ka tangente horizontale?*

36. *Vërtetoni se kurba $y = 6x^3 + 5x - 3$ nuk ka tangente me koefiçent këndor 4.*

37. *Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj kurbës $y = x\sqrt{x}$, që është paralel me drejtëzën $y = 1 + 3x$.*

38. *Përdorni përkufizimin e derivatit për të treguar se kur $f(x) = 1/x$, atëherë $f'(x) = -1/x^2$*

39. *Gjeni një funksion kubik $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, grafiku i të cilit ka tangente horizontale në pikat $(-2,6)$ dhe $(2,0)$.*

40. *Le të jetë*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{në qoftë se} \quad x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{në qoftë se} \quad x > 1 \end{cases}$$

A është $f(x)$ i derivueshëm në 1? Ndërtoni grafikët e $f(x)$ dhe f'.

41. *Në cilat numra funksioni $g(x)$ është i derivueshëm?*

$$g(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{në qoftë se} \quad x < -1 \\ x^2 & \text{në qoftë se} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{në qoftë se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Jepni një formulë për g' dhe skiconi grafikun e $g(x)$ dhe të g'.

42. *Ku funksioni $f(x) = |x-1| + |x+2|$ është i derivueshëm? Jepni një formulë për f' dhe skiconi grafikun e $f(x)$ dhe f'.*

43. *Gjeni parabolën me ekuacion $y = ax^2 + bx + c$ tangetja ndaj grafikut të së cilës në pikën $(1,1)$ ka ekuacion $y = 3x - 2$.*

44. *Për çfarë vlerash të a dhe b drejtëza $2x + y = b$ është tangente me parabolën $y = ax^2$ kur $x = 2$.*

45. *Le të jetë*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{në qoftë se} \quad x \leq 2 \\ mx + n & \text{në qoftë se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Gjeni vlerat e m dhe n për të cilat funksioni është i derivueshëm kudo.

4.2 Funksionet eksponenciale

Le të përpiqemi të llogarisim derivatin e funksionit eksponencial

$$f(x) = a^x$$

duke përdorur përkufizimin e derivatit:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h} \end{aligned}$$

Faktori a^x nuk varet nga h prandaj mund ta nxjerrim nga shenja e limitit:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h}$$

Vëmë re se vlera e limitit është derivati i $f(x)$ në 0 pra

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h-1}{h} = f'(0)$$

Kështu që treguam se po qe se funksioni eksponencial $f(x) = a^x$ është i diferencueshëm në 0 atëherë ai është kudo i diferencueshëm dhe

$$f'(x) = f'(0)a^x \tag{4.6}$$

Ky ekuacion thotë se raporti i ndryshimit të çdo funksioni eksponencial është në përpjestim të drejtë me vetë funksionin. Evidentimi numerik për ekzistencën e $f'(0)$ jepet në tabelë për rastet $a = 2$ dhe $a = 3$.

h	$\frac{2^h-1}{h}$	$\frac{3^h-1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

Tabela 4.1: Shkalla e ndryshimit të funksionit eksponencial

Duket se limiti ekziston dhe

$$\begin{aligned} \text{për } a = 2,\ f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{2^h-1}{h} \approx 0.69 \\ \text{për } a = 3,\ f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{3^h-1}{h} \approx 1.10 \end{aligned}$$

Në fakt do të tregojmë në Kap. 5 se këto limite ekzistojnë dhe me saktësi deri në 6 shifra pas presjes vlerat janë $\frac{d}{dx}(2^x)\Big|_{x=0} \approx 0.693147$ $\quad \frac{d}{dx}(3^x)\Big|_{x=0} \approx 1.098612$. Prandaj nga Ekuacioni (4.6) kemi

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0.69)2^x, \ \frac{d}{dx}(3^x) \approx (1.10)3^x \tag{4.7}$$

Nga të gjitha rastet e mundshme për bazën a në Ekuacionin (4.6) formula më e thjeshtë e derivimit ndodh kur $f'(0) = 1$. Duke parë vlerësimet e $f'(0)$ për $a = 2$ dhe $a = 3$ duket me vend që të ketë një numër a midis 2 dhe 3 për të cilin $f'(0) = 1$. Është tradicional shënimi i këtij numri me shkonjën e. Prandaj kemi përkufizimin e mëposhtëm.

Përkufizim 4.1. Numri natyror e quhet numri i tillë që

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1.$$

Gjeometrikisht kjo do të thotë se ndër të gjithë funksionet eksponenciale $y = a^x$ funksioni $f(x) = e^x$ është ai tangentja e të cilit në $(0, 1)$ ka koefiçent këndor $f'(0)$ pikërisht të barabartë me 1.

Në qoftë se zëvendësojmë $a = e$ dhe prej këtej $f'(0) = 1$ në Ekuacionin (4.6) ai shndërohet në një formulë të rëndësishme të derivimit.

Derivati i funksionit eksponencial natyror

Derivati i funksionit eksponencial natyror jepet si më poshtë:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Prandaj funksioni eksponencial $f(x) = e^x$ ka vetinë se derivati i tij është sa vetë ai. Kuptimi gjeometrik i këtij fakti është se koefiçenti këndor i tangentes ndaj kurbës $y = e^x$ është i barabartë me ordinatën e pikës.

Shembull 4.7. *Në qoftë se*

$$f(x) = e^x - x,$$

gjeni $f'(x)$. Krahasoni grafikët e $f(x)$ dhe $f'(x)$.

Zgjidhje: Duke përdorur rregullin e diferencës kemi

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

Vëmë re se $f(x)$ ka tangente horizontale kur $x = 0$; kjo korrespondon me faktin se $f'(0) = 0$. Vëmë re gjithashtu se, për $x > 0$, $f'(x)$ është pozitiv dhe $f(x)$ është rritës. Kur $x < 0$, $f'(x)$ është negativ dhe $f(x)$ është zvogëlues.

Shembull 4.8. *Në cilën pikë të kurbës*

$$y = e^x$$

tangetia është paralele me drejtëzën $y = 2x$?

Zgjidhje: Meqë $y = e^x$ ne kemi $y' = e^x$. Le ta shënojmë abshisën e pikës së kërkuar me a. Atëherë, koefiçenti këndor i tangentes në këtë pikë është e^a. Kjo tangente do jetë paralele me drejtëzën $y = 2x$, në qoftë se kanë të njëjtin koefiçent këndor, pra 2. Duke barazuar koefiçentët marrim $e^a = 2 \quad a = \ln 2$. Pra, pika e kërkuar është $(a, e^a) = (ln 2, 2)$. □

Ushtrime:

1. *(a) Ndërtoni grafikun e funksionit $f(x) = e^x$.*
(b) Çfarë tipe funksionesh janë $f(x) = e^x$ dhe $g(x) = x^e$? Krahasoni formulat e derivimit për $f(x)$ dhe $g(x)$.
(c) Cili nga funksionet rritet më shpejt për x shumë të mëdhenj?

2. *Derivoni funksionet*
$f(x) = \sqrt{x} + 2e^x$

3. $f(x) = \frac{3}{x} + 10e^x$

4. $f(x) = e^{x+1} + 1$

5. $f(x) = 3e^{2x} + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}$

6. *Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj kurbës në pikën e dhënë. Ilusrojeni duke ndërtuar grafikun e kurbës dhe të tangentes në të njëjtin sistem koordinativ,*

$$y = x^4 + 2e^x, \text{ në } (0, 2).$$

7. $y = e^x - 5x$, *në* $(0, 0)$

8. *Gjeni derivatin e parë dhe të dytë të funksionit. Krahasoni grafikët e $f(x)$, f' dhe f'', kur $f(x) = e^x - x^3$.*

9. *Në çfarë pike të kurbës $y = 1 + 2e^x - 3x$, tangentja ndaj saj është paralele me drejtëzën $3x - y = 5$. Ilustrojeni duke ndërtuar grafikun e kurbës dhe të drejtëzave.*

4.3 Rregulla të tjera të derivimit

Formulat e këtij paragrafi do të na lejojnë të llogarisim derivatet e funksioneve të reja të përftuara prej funksioneve të vjetër nëpërmjet veprimeve të shumëzimit apo pjestimit.

4.3.1 Rregulli i prodhimit

Për analogji me rregullat e shumës dhe diferencës, ndonjëri mund të supozojë ashtu sikurse Lajbnici tre shekuj më parë, se dervati i prodhimit është i barabartë me prodhimin e derivateve. Do të shohim se ky supozim është i gabuar duke parë një shembull të veçantë. Le të jenë $f(x) = x$ dhe $g(x) = x^2$. Atëherë, rregulli fuqi jep $f'(x) = 1$ dhe $g'(x) = 2x$. Por $(fg)(x) = x^3$, prandaj $(fg)'(x) = 3x^2$. Kështu që $(fg)'(x) \neq f'g'$. Formula korrekte u zbulua nga Lajbnici (shumë shpejt nga nisja e gabuar e tij) dhe u quajt rregulli i prodhimit.

Para se të fillojmë me rregullin e prodhimit le të shohim fillimisht se si mund ta zbulojmë atë. E nisim duke pranuar se të dy funksionet $u = f(x)$ dhe $v = g(x)$ janë pozitiv dhe të diferencueshëm. Atëherë, mund ta interpretojmë prodhimin uv si sipërfaqen e një drejtëkëndëshi. Në qoftë se x ndryshon me një shtesë $\triangle x$ atëherë ndryshimet korresponduese në u dhe v janë

$$
\begin{aligned}
\triangle u &= f(x + \triangle x) - f(x) \\
\triangle v &= g(x + \triangle x) - g(x)
\end{aligned}
$$

Ndryshimi i sipërfaqes së drejtëkëndëshit është

$$
\triangle(uv) = (u + \triangle u)(v + \triangle v) - uv = u\triangle v + v\triangle u + \triangle u\triangle v \tag{4.8}
$$

Duke pjestuar me $\triangle x$ marrim

$$
\boxed{\frac{\triangle(uv)}{\triangle x} = u\frac{\triangle v}{\triangle x} + v\frac{\triangle u}{\triangle x} + \triangle u\frac{\triangle v}{\triangle x}}
$$

Në qoftë se kalojmë në limit kur $\triangle x \to 0$ përftojmë derivatin e uv:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(uv) &= \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle(uv)}{\triangle x} \\
&= \lim_{\triangle x\to 0} (u\frac{\triangle v}{\triangle x} + v\frac{\triangle u}{\triangle x} + \triangle u\frac{\triangle v}{\triangle x}) \\
&= u \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x} + v \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle u}{\triangle x} + (\lim_{\triangle x\to 0} \triangle u)(\lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle v}{\triangle x}) \\
&= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + 0 \cdot \frac{dv}{dx} \\
&= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

Kujtojmë se $\triangle u \to 0$ sikurse $\triangle x \to 0$ meqenë qoftë se $f(x)$ është i diferencueshëm e prej këtej i vazhdueshëm.

Megjithëse e nisëm duke pranuar se shtesat (nga interpretimi gjeometrik) janë pozitive, theksojmë që Ekuacioni (4.8) është gjithmonë i vërtetë. Kështu vërtetuam Ekuacionin (4.10), i cili njihet si rregulli i prodhimit për gjithë funksionet e diferencueshëm u dhe v.

Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të dy të derivueshëm atëherë

$$
\boxed{\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]} \tag{4.10}
$$

Rregulli i prodhimit thotë se dervati i prodhimit të dy funksioneve është i barabartë me funksionin e parë shumëzuar me derivatin e të dytit plus funksionin e dytë shumëzuar me derivatin e të parit.

Shembull 4.9. *Në qoftë se*

$$
f(x) = xe^x,
$$

gjeni $f'(x)$.

Zgjidhje: Nga rregulli i prodhimit kemi

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}(xe^x) = x\frac{d}{dx}(e^x) + e^x\frac{d}{dx}(x) \\
&= xe^x + e^x \cdot 1 = (x+1)e^x
\end{aligned}
$$

□

Shembull 4.10. *Derivoni funksionin* $f(t) = \sqrt{t}(1-t)$.

Zgjidhje: Duke përdorur rregullin e prodhimit kemi

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= \sqrt{t}\frac{d}{dt}(1-t) + (1-t)\frac{d}{dt}\sqrt{t} \\
&= \sqrt{t}(-1) + (1-t)\cdot\frac{1}{2}t^{-1/2} \\
&= -\sqrt{t} + \frac{1-t}{2\sqrt{t}} = \frac{1-3t}{2\sqrt{t}}
\end{aligned}
$$

Në qoftë se përdorim vetitë e eksponentëve fillimisht për ta rishkruar $f(t)$, më pas mund të procedojmë direkt pa pas nevojën e përdorimit të rregullit të prodhimit.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \sqrt{t} - t\sqrt{t} = t^{1/2} - t^{3/2} \\
f'(t) &= \frac{1}{2}t^{-1/2} - \frac{3}{2}t^{1/2}
\end{aligned}
$$

duket qartë se rezultati është ekuivalent me të parin. Shembulli i dytë tregon se ndonjëherë është më e lehtë të thjeshtohet prodhimi i funksioneve, se sa të zbatohet rregulli i prodhimit. Në shembullin e parë rregulli i prodhimit është i vetmi i mundshmi për tu përdorur.

□

Shembull 4.11. *Në qoftë se*

$$f(x) = \sqrt{x}\cdot g(x),$$

ku $g(4) = 2$ *dhe* $g'(4) = 3$, *gjeni* $f'(4)$.

Zgjidhje: Duke përdorur rregullin e prodhimit kemi

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\cdot g(x)\right] = \sqrt{x}\cdot\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\cdot\frac{d}{dx}\sqrt{x} \\
&= \sqrt{x}\cdot g'(x) + g(x)\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} = \sqrt{x}\cdot g'(x) + \frac{g(x)}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}
$$

Prandaj,

$$f'(4) = \sqrt{4}g'(4) + \frac{g(4)}{2\sqrt{4}} = 2\cdot 3 + \frac{2}{2\cdot 2} = 6.5$$

□

Shembull 4.12. *Një kompani telefonike kërkon të llogarisë numrin e linjave telefonike rezidente të reja që do t'i duhet të instalojë gjatë muajit që vjen. Në fillim të Janarit kompania ka 100, 000 nënshkrues, secili prej të cilëve ka 1.2 linja telefonike mesatarisht. Kompania vlerësoi se kontraktuesit rriten me shkallë 1000 në muaj. Duke bërë një sondazh, kompania gjeti se secili ka ndërmend të instalojë mesatarisht 0.01 linjë të re në fund të Janarit. Llogarisni numrin e linjave të reja që duhet të instalojë kompania në Janar duke llogaritur shkallën e rritjes së linjave në fillimm të muajit.*

Zgjidhje: Le të jetë $s(t)$ numri i nënshkruesve dhe $n(t)$ numri i linjave telefonike për nënshkrues në kohën t, ku t matet në muaj dhe $t = 0$ i korrespondon fillimit të Janarit. Atëherë, numri total i linjave jepet nga

$$L(t) = s(t) \cdot n(t)$$

dhe duam të gjejmë $L'(0)$. Duke patur parsysh rregullin e prodhimit kemi

$$L'(t) = [s(t)n(t)]' = s'(t)n(t) + s(t)n'(t)$$

Na është dhënë se $s(0) = 100,000$ dhe $n(0) = 1.2$. Vlerësimi i kompanisë tregon se raporti i rritjes është përkatësisht $s'(0) \approx 1000$ dhe $n'(0) \approx 0.01$. Prej nga,

$$L'(0) = s'(0)n(0) + s(0)n'(0) \approx 1.2 \cdot 1000 + 100,000 \cdot 0.01 = 2200$$

Kompanisë i duhet të instalojë afërsisht 2200 linja të reja në Janar.

Vëmë re se dy termat e prodhimit vijnë nga burime të ndryshme nënshkruesit e vjetër dhe nënshkruesit e rinj. Një kontribut tek L' është numri ekzistues i nënshkruesve (100, 000) shumëzuar me shkallën me të cilën do të porositen linja të reja (rreth 0. 01 për nënshkrues në muaj). Kontributi i dytë është numri mesatar i linjave për nënshkrues (1. 2 në fillim të muajit) shumëzuar me shkallën e rritjes për nënshkrues (1000 në muaj).

□

4.3.2 Rregulli i raportit

Do të gjejmë një rregull për derivimin e raportit të dy funksioneve të derivueshëm $u = f(x)$ dhe $v = g(x)$ në të njëjtën mënyrë si gjetëm rregullin e prodhimit. Në qoftë se x, u dhe v ndryshojnë me shtesë përkatësisht $\triangle x$, $\triangle u$, dhe $\triangle v$, atëherë ndryshimi korespondues në raportin u/v është

$$\begin{aligned} \triangle\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} \\ &= \frac{(u+\Delta u)v - u(v+\Delta v)}{v(v+\Delta v)} \\ &= \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v+\Delta v)} \end{aligned}$$

Kështu që

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{\triangle\left(\frac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \lim_{\triangle x\to 0} \frac{v \cdot \frac{\triangle u}{\triangle x} - u\frac{\triangle v}{\triangle x}}{v(v+\Delta v)}$$

Kur $\triangle x \to 0$, $\triangle v \to 0$ gjithashtu sepse g është i derivueshëm prej nga dhe i vazhdueshëm. Dhe duke përdorur rregullat e limitit marrim

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle u}{\triangle x} - u\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle v}{\triangle x}}{v\lim_{\triangle x\to 0}(v+\Delta v)} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të derivueshëm atëherë

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

ose

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

ose

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

I thënë me fjalë rregulli i raportit pohon se derivati i raportit është i barabartë me emëruesin shumëzuar me derivatin e numëruesit minus numëruesin shumëzuar me derivatin e emëruesit, e gjitha kjo pjestuar me katrorin e emëruesit. Rregulli i raportit dhe gjithë rregullat e tjera na mundësojnë llogaritjen e derivateve të të gjitha funksioneve racionale sikurse e ilustron shembulli në vazhdim.

Shembull 4.13. *Le të jetë*

$$y = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + 6}$$

Atëherë,

$$\begin{aligned} y\prime &= \frac{(x^3+6)(x^2+x-2)' - (x^2+x-2)(x^3+6)'}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{(x^3+6)(2x+1) - (x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{(2x^4+x^3+12x+6) - (3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)^2} \\ &= \frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Shembull 4.14. *Gjeni ekuacionin e tangentes së hequr ndaj kurbës*

$$y = \frac{e^x}{(1+x^2)}$$

në pikën $(1, \frac{e}{2})$.

Zgjidhje: Duke përdorur rregullin e raportit, gjejmë fillimisht derivatin e këtij funksioni.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+x^2)(e^x)' - e^x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{(1+x^2)e^x - e^x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{e^x(1-x)^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Kështu që koefiçenti këndor i tangentes në $(1, e/2)$ është $f'(1) = \frac{e(1-1)^2}{1+1)^2} = 0$. Kjo do të thotë se tangentja në $(1, e/2)$ është horizontale dhe ekuacioni i saj është $y = e/2$. Kujtojmë se funksioni është rritës dhe e kalon tangenten e tij në $(1, e/2)$.

□

Vërejtje 4.1. *Mos e përdorni rregullin e raportit sa herë që shihni raport. Ndonjëherë është më e lehtë ta rishkruash raportin fillimisht, në qoftë se është e mundur të thjeshtohet, e më pas të derivohet.*

Për shembull edhe pse është e mundur të derivohet funksioni

$$F(x) = \frac{3x^2 + 2\sqrt{x}}{x}$$

duke përdorur rregullin e raportit është shumë më e lehtë që fillimisht ta shkruash funksionin si

$$F(x) = 3x + 2x^{-1/2}$$

para se ta derivosh. Le t'i përmbledhim formulat e derivimit që mësuam deri tani.

$$
\begin{aligned}
(c)' &= 0 \\
(x^n)' &= nx^{n-1} \\
(e^x)' &= e^x \\
(cf)' &= cf' \\
(f+g)' &= f' + g' \\
(f-g)' &= f' - g' \\
(fg)' &= fg' + gf' \\
\left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{gf' - fg'}{g^2}
\end{aligned}
$$

Ushtrime:

4.4 Derivimi i funksioneve trigonometrike

Para se të fillojmë me këtë paragraf na duhet të rikujtojmë funksionet trigonometrike. Në veçanti është e rëndësishme të kujtojmë se kur folëm për funksionin $f(x)$ të përkufizuar për të gjithë numrat realë x me

$$f(x) = \sin x$$

nënkuptuam se $\sin x$ do të thotë sinusi i këndit masa e të cilit në radianë është x. Dhe kjo u përmend për të gjithë funksionet trigonometrike. Rikujtojmë që të gjithë funksionet trigonometrike janë funksione të vazhdueshme në bashkësinë e tyre të përkufizimit.

Në qoftë se skicojmë grafikun e funksionit $f(x) = \sin x$ dhe përdorim interpretimin e $f'(x)$ si koeficent këndor i tangentes ndaj grafikut të sinusit në mënyrë që të skicojmë grafikun e f' atëherë ai duket të jetë i njëjtë me grafikun e funksionit kosinus.

Le të përpiqemi ta konfirmojmë supozimin e bërë pra në qoftë se $f(x) = \sin x$ atëherë $f'(x) = \cos x$. Më parë shohim shembullin e mëposhtëm.

Shembull 4.15. *Vërtetoni se*

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Zgjidhje: Në një nga paragrafet e Kap. 2, ne bëmë supozimin, në bazë të evidencave numerike dhe grafike se

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1.$$

Tani përdorim argumentimin gjeometrik për ta vërtetuar këtë. Pranojmë fillimisht se θ shtrihet ndërmjet 0 dhe $\frac{\pi}{2}$.

Fig. **??** tregon një sektor qarku me qendër O, këndi qendror θ, dhe rrezja 1. Nga përkufizimi i masës së radianit kemi $\widehat{FB} = \theta$. Gjithashtu, $|FA| = \sin \theta$. Nga figura shohim që

$$|FA| < \widehat{FB}$$

Prej nga $\sin \theta < \theta$ dhe

$$\frac{\sin \theta}{\theta} < 1 \tag{4.12}$$

Gjithashtu,

$$\theta < \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = |CB|.$$

Me fjalë të tjera,

$$\frac{1}{\theta} > \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

ose duke shumëzuar te dy anët me $\sin\theta > 0$ kemi

$$\frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta. \tag{4.13}$$

Përfundimisht, duke bërë së bashku Ek. (4.12) dhe Ek. (4.13) kemi

$$\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1.$$

Dimë se,

$$\lim_{\theta\to 0} 1 = 1 \textit{ dhe } \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1,$$

prandaj nga teorema e shoqëruesve kemi

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

Por funksioni $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$, është funksion çift prandaj limitet e majta dhe të djathta duhet të jenë të barabarta. Prej nga kemi

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1.$$

pra u vërtua ajo që deshëm.

□

Tani përpiqemi të gjejmë derivatin e funksionit $f(x) = \sin x$. Nga përkufizimi i derivatit kemi

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos(h)+\cos x\sin(h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}[\frac{\sin x\cos(h)-\sin x}{h}+\frac{\cos x\sin(h)}{h}] \\
&= \lim_{h\to 0}[\sin x\frac{(\cos(h)-1)}{h}+\cos x\frac{\sin(h)}{h}] \\
&= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-\sin x}{h}+\lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Dy nga këto limite llogariten lehtë. Meqë e shohim x si konstante kur llogarisim limitin kur $h\to 0$ kemi

$$\lim_{h\to 0}\sin x = \sin x$$

dhe

$$\lim_{h\to 0}\cos x = \cos x.$$

Mund ta llogarisim vlerën e limitit të mbetur si më poshtë:

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} &= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\cos\theta - 1}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1}\right)\\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)}\\
&= \lim_{\theta\to 0} \frac{-\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)}\\
&= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{(\cos\theta + 1)}\\
&= -\lim_{\theta\to 0} \frac{sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{(\cos\theta + 1)}\\
&= -1\left(\frac{0}{1+1}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Kështu që,

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0. \tag{4.15}$$

Në qoftë se i zëvendësojmë këto limite tek Ek. (4.12) përftojmë

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= (\sin x)\cdot 0 + (\cos x)\cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

Kështu gjetëm formulën për derivatin e funksionit sinus:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x. \tag{4.16}$$

Shembull 4.16. *Derivoni funksionin*

$$y = x^2\sin x$$

Zgjidhje: Duke përdorur rregullin e prodhimit dhe formulën Ek. (4.16) kemi

$$\frac{dy}{dx} = x^2\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(x^2) = x^2\cos x + 2x\sin x$$

□

Duke përdorur të njëjtën metodë si në vërtetimin e formulës Ek. (4.16) kemi

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x. \tag{4.17}$$

Funksioni tangent gjithashtu mund të derivohet duke përdorur përkufizimin e derivatit por është më e lehtë të përdoret rregulli i raportit dhe formulat Ek. (4.16) dhe Ek. (4.17)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\\
&= \frac{\cos x\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}\\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\\
&= \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

Përfundimisht,

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{4.18}$$

Njëlloj veprohet edhe për funksionin kotagent. Marrim

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Shembull 4.17. *Derivoni funksionin*

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \tan x}$$

Zgjidhje: Rregulli i raportit na jep

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\sin x)'(1 + \tan x) - \sin x(1 + \tan x)'}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \frac{\cos x(1 + \tan x) - \sin x(\frac{1}{\cos^2 x})}{(1 + \tan x)^2} \\
&= \cos^3 x + \cos^2 x \sin x - \cos x \sin x \\
&= \cos x \left(\cos^2 x + \sin x \cos x - \sin x\right)
\end{aligned}$$

□

Funksionet trigonometrike shpesh janë modelime të fenomeneve reale. Në veçanti, vibrimet, valët, lëvizjet elastike dhe madhësi të tjera që variojnë në mënyrë periodike mund të përshkruhen duke përdorur funksionet trigonometrike. Në shembullin në vazhdim do të shqyrtojmë lëvizjen e thjeshtë harmonike.

Shembull 4.18. *Një objekt në fund të një suste vertikale është tërhequr 4 cm jashtë pozicionit të pushimit dhe është në pozicion të lirë në kohën $t = 0$. Pozicioni i tij në kohën t është*

$$s = f(t) = 4\cos t.$$

Gjeni shpejtësinë në kohën t dhe përdoreni për të analizuar lëvizjen e objektit.

Zgjidhje: Shpejtësia është

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4\cos t) = 4\frac{d}{dt}(\cos t) = -4\sin t.$$

Objekti oshilon nga pika më e ulët ($s = 4$cm) tek pika më e lartë ($s = -4$ cm). Perioda e oshilimit është 2π, perioda e $\cos t$.

Përshpejtimi është $|v| = 4|\sin t|$, i cili është më i madh kur $|\sin t| = 1$ pra kur $\cos t = 0$. Pra, objekti lëviz më shpejt kur kalon nëpër pozicionin e ekujlibrit ($s = 0$). Shpejtësia e tij është zero kur $\sin t = 0$, domethënë në pikën më të lartë dhe më të ulët.

□

Përdorimi ynë kryesor për limitin në ekuacionin Ek. (4.13) ishte për të vërtetuar formulën e derivimit për funksionin sinus. Por ky limit përdoret shumë për llogaritjen e disa limiteve të tjera trigonometrike, si në shembujt në vazhdim.

Shembull 4.19. *Gjeni limitn e funksionit*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x}$$

Zgjidhje: Fillimisht shumëzojmë dhe pjestojmë me 7 në mënyrë që të përdorim Ek. (4.13):

$$\frac{\sin 7x}{4x} = \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$$

Vëmë re se kur $x \to 0$ kemi $7x \to 0$ dhe kështu tek Ek. (4.13) duke marrë $\theta = 7x$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \lim_{7x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1$$

Prandaj

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{(\sin 7x)}{7x} \right) = \frac{7}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{4} \cdot 1 = \frac{7}{4}$$

$\square$

Shembull 4.20. *Llogarisni limitin e mëposhtëm*

$$\lim_{x\to 0} x \cot x.$$

Zgjidhje: Këtu kombinojmë $\sin x$ me x:

$$\lim_{x\to 0} x \cot x = \lim_{x\to 0} \frac{x \cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0} \cos x}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{\cos 0}{1} = 1$$

$\square$

Ushtrime:

1. *Gjeni derivatet e funksioneve* $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

2. $f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \cot x$

3. $f(x) = \sqrt{x} \sin x$

4. $f(x) = 2 \csc x + 5 \cos x$

5. $g(t) = t^3 \sin t$

6. $g(t) = 3 \sec t + \cot t$

7. $h(x) = \csc x + e^x \tan x$

8. $y = \frac{x}{3 - \cot x}$

9. $y = e^x(\cos x + cx)$

10. $y = \frac{1+\sin x}{x + \cos x}$

11. $y = \frac{\sec t}{1 + \sec t}$

12. $y = \frac{\sin x}{x^2}$

13. $y = \frac{1 - \sec x}{\tan x}$

14. $y = xe^x \csc x$

15. $y = \csc x(x + \cot x)$

16. $y = x^2 \sin x \tan x$

17. *Vërtetoni se* $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

18. *Vërtetoni se* $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

19. *Vërtetoni se* $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

20. *Vërtetoni duke u nisur nga përkufizimi i derivatit se kur* $f(x) = \cos x$ *atëherë* $f'(x) = -\sin x$

21. *Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj vijës në pikën e dhënë*

$y = \sec x$, $(\pi/3, 2)$

22. $y = e^x \cos x$, $(0, 1)$

23. $y = x + \cos x$, $(0, 1)$

24. $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$, $(0, 1)$

25. *Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj vijës* $y = 2x \sin x$ *në pikën* $(\pi/2, \pi)$. *Ilustrojeni duke ndërtuar grafikun e vijës dhe të tangentes në të njëjtin sistem koordinativ.*

26. *Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj vijës* $y = \sec x - 2\cos x$ *në pikën* $(\pi/3, 1)$. *Ilustrojeni duke ndërtuar grafikun e vijës dhe të tangentes në të njëjtin sistem koordinativ.*

27. *Gjeni derivatin e funksionit* $y = \sec x - x$. *Ilustrojeni duke ndërtuar grafikun e vijës dhe të derivatit në të njëjtin sistem koordinativ.*

28. *(a) Përdorni rregullin e raportit për të derivuar funksionin*

$$f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

(b) Thjeshtoni shprehjen për $f(x)$ *duke e shkruar në terma të* $\sin x$ *dhe* $\cos x$, *e më pas gjeni derivatin* $f'(x)$.

(c) Vërtetoni se përgjigjet në pikat (a) dhe (b) janë ekuivalente.

29. *Për çfarë vlerash të x grafiku i funksionit* $f(x) = x + 2\sin x$ *ka tangente horizontale.*

Derivoni secilin nga identitetet trigonometrike për të përftuar një identitet të ri.

30. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

31. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

32. $\sin x + \cos x = \frac{1 + \cot x}{\csc x}$

4.5 Dervimi i funksionit të përbërë. Rregulli zinxhir

Supozojmë se duam të derivojmë funksionin

$$F(x) = \sqrt{x^2+1}.$$

Formulat e derivimit që kemi mësuar deri tani nuk na e japin mundësinë ta llogarisim $F'(x)$. Vëreni se $f(x)$ është funksion kompozim. Në fakt, në qoftë se shënojmë $y = f(u) = \sqrt{u}$ dhe $u = g(x) = x^2 + 1$ atëherë mund të shkruajmë $y = F(x) = f(g(x))$ pra $F = f \circ g$. Dimë se si t'i derivojmë të dy $f(x)$ dhe $g(x)$. Prandaj do të ishte e përshtatshme të gjendej një rregull që të na tregojë se si derivohet $F = f \circ g$ në termat e derivateve të $f(x)$ dhe $g(x)$.

Del se derivati i funksionit kompozim është prodhim i derivateve të funksioneve $f(x)$ dhe $g(x)$. Ky fakt është rregulli më i rëndësishëm i derivimit dhe quhet rregulli zinxhir. Ai duket i besueshëm në qoftë se e interpretojmë derivatin si shkallë ndryshimi. E shohim du/dx si shkallë e ndryshimit të u në lidhje me x, dy/du si shkallë e ndryshimit të y në lidhje me u dhe dy/dx si shkallë e ndryshimit të y në lidhje me x. Në qoftë se u ndryshon dy herë më shpejt se sa x dhe y ndryshon tre herë më shpejt se sa u atëherë duket e arsyeshme që y të ndryshojë 6 herë më shpejt se sa x dhe ne presim që

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

4.5.1 Rregulli zinxhir:

Në qoftë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të dy të derivueshëm dhe

$$F = f \circ g$$

është funksioni kompozim i përkufizuar nga

$$F(x) = f\left(g(x)\right),$$

atëherë $f(x)$ është i derivueshëm dhe F' jepet nga prodhimi

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

Sipas shënimit të Leibnicit, në qoftë se $y = f(u)$ dhe $u = g(x)$ janë të dy të derivueshëm atëherë

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Komente të vërtetimit të rregullit zinxhir: Le të jetë $\triangle u$ ndryshimi në u korresponues i ndryshimt $\triangle x$ në x pra

$$\triangle u = g(x + \triangle x) - g(x)$$

Atëherë ndryshimi korrespondues në y është

$$\triangle y = f(u + \triangle u) - f(u)$$

Prej nga

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\ &= \lim_{\triangle u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \end{aligned}$$

Problemi i vetëm në këtë arsyetim është se mund të ndodhë që $\triangle u = 0$ (edhe kur $\triangle x \neq 0$) dhe me siguri s'mund të pjestojmë me 0. Megjithatë rregulli zinxhir mbetet i vërtetë. Një vërtetim i plotë do të jepet në fund të këtij seksioni.

Rregulli zinxhir mund të shkruhet

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{4.19}$$

ose, në qoftë se $y = f(u)$ dhe $u = g(x)$ në shënimin e Lajbnicit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \tag{4.20}$$

Ek. (4.15) mbahet mend lehtë sepse në qoftë se dy/du dhe du/dx ishin raporte atëherë mund të thjeshtojmë du. Mbani mend, megjithëse du nuk është e përkufizuar dhe du/dx nuk duhet të merret si një raport i thjeshtë.

Shembull 4.21. *Gjeni $F'(x)$ kur*

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Zgjidhje: (Duke përdorur Ek. (4.19)): Në fillim të këtij seksioni e shprehëm $f(x)$ si

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

ku $f(u) = \sqrt{u}$ dhe $g(x) = x^2 + 1$. Meqë

$$f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

dhe $g'(x) = 2x$, kemi:

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Zgjidhje: (duke përdorur Ek. (4.20)): Në qoftë se shënojmë $u = x^2 + 1$ dhe $y = \sqrt{u}$ atëherë

$$F'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Kur përdorim Ek. (4.20) duhet të kemi në mendje se dy/dx i referohet derivatit të y ku y konsiderohet funksion i x, ndërsa dy/du i referohet derivatit të y ku y konsiderohet si funksion i u. Si në shembullin e mësipërm, y mund të konsiderohet si funksion i x ($y = \sqrt{x^2 + 1}$) dhe gjithashtu si funksion i u ($y = \sqrt{u}$). Vëmë re që

$$\frac{dy}{dx} = F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

kurse

$$\frac{dy}{du} = f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

□

Shembull 4.22. *Derivoni funksionet:*

(a) $y = \sin(x^2)$

(b) $y = \sin^2 x$.

Zgjidhje: (a) Duke marrë $u = x^2$ dhe $y = \sin u$ nga rregulli zinxhir kemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \cdot (2x) = 2x \cdot \cos(x^2).$$

(b) Duke marrë $u = \sin x$ dhe $y = u^2$ nga rregulli zinxhir kemi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (2u) \cdot \cos x = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x.$$

□

Në pikën (a) të shembullit kombinuam rregullin zinxhir me rregullin e derivimit të funksionit sinus. Në përgjithësi, në qoftë se $y = \sin u$, ku u është një funksion i derivueshëm i x atëherë nga rregulli zinxhir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$$

Prandaj,

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}.$$

Në mënyrë të ngjashme, të gjitha formulat e dervimit të funksioneve trigonometrike mund të kombinohen me rregullin zinxhir.

Le të bëjmë të qartë rastin e veçantë të rregullit zinxhir ku funksioni f është funksioni fuqi. Në qoftë se $[g(x)]^n$ atëherë mund të shkruajmë $y = f(u) = u^n$ ku $u = g(x)$. Duke përdorur rregullin zinxhir dhe rregullin fuqi, marrim

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\frac{du}{dx} = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$$

4.5.2 Rregulli fuqi i kombinuar me rregullin zinxhir

Në qoftë se r është një numër real i çfarëdoshëm dhe $u = g(x)$ është i diferencueshëm atëherë

$$\frac{d}{dx}\,(u^r) = r \cdot u^{r-1}\,\frac{du}{dx}$$

ose ndryshe

$$\frac{d}{dx}\,[g(x)]^r = r \cdot [g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Shembull 4.23. *Derivoni funksionin*

$$y = (x^3 - 1)^{100}$$

Zgjidhje: Duke marrë $u = g(x) = x^3 - 1$ dhe $n = 100$ në kemi

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^3-1)^{100} = 100(x^3-1)^{99}\frac{d}{dx}(x^3-1)\\ &= 100(x^3-1)^{99} \cdot 3x^2 = 300x^2(x^3-1)^{99}\end{aligned}$$

□

Shembull 4.24. *Gjeni $f'(x)$ në qoftë se*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}.$$

Zgjidhje: Fillimisht rishkruajmë $f(x)$ si $f(x) = (x^2+x+1)^{-1/3}$. Atëherë

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-4/3} \cdot \frac{d}{dx}(x^2+x+1)\\ &= -\frac{1}{3}(x^2+x+1)^{-4/3} \cdot (2x+1)\end{aligned}$$

□

Shembull 4.25. *Gjeni derivatin e funksionit*

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

Zgjidhje: Duke kombinuar rregullin e fuqisë, rregullin zinxhir dhe rregullin e raportit marrim

$$\begin{aligned} g'(t) &= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right) \\ &= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{(2t+1)\cdot 1 - 2(t-2)}{(2t^2+1)^2} = \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}} \end{aligned}$$

□

Shembull 4.26. *Derivoni funksionin*

$$y = (2x+1)^5(x^3-x+1)^4.$$

Zgjidhje: Në këtë shembull duhet të përdorim rregullin e prodhimit para rregullit zinxhir:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (2x+1)^5 \frac{d}{dx}(x^3-x+1)^4 + (x^3-x+1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1)^5 \\ &= (2x+1)^5 \cdot 4(x^3-x+1)^3 \frac{d}{dx}(x^3-x+1) + (x^3-x+1)^4 \cdot 5(2x+1)^4 \frac{d}{dx}(2x+1) \\ &= 4(2x+1)^5(x^3-x+1)^3(3x^2-1) + 5(x^3-x+1)^4(2x+1)^4 \cdot 2 \end{aligned}$$

Shohim se kanë të përbashkët faktorin $2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3$ duke faktorizuar përgjigjia jonë për derivatin është

$$\frac{dy}{dx} = 2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3(17x^3+6x^2-9x+3)$$

□

Shembull 4.27. *Derivoni funksionin $y = e^{\sin x}$. Këtu $u = g(x) = \sin x$ dhe $y = f(u) = e^u$. Nga rregulli zinxhir,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\sin x}) = e^{\sin x}\cos x.$$

□

Mund ta përdorim rregullin zinxhir për të derivuar një funksion eksponencial me çfarëdo lloj baze $a > 0$. Rikujtojmë se $a = e^{\ln a}$. Kështu që,

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}$$

dhe rregulli zinxhir na jep

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,(a^x) &= \frac{d}{dx}\left(e^{(\ln a)x}\right) \\ &= e^{(\ln a)x}\frac{d}{dx}(\ln a)x \\ &= e^{(lna)x} \cdot \ln a = a^x \ln a \end{aligned}$$

sepse $\ln a$ është konstante. Prandaj, kemi formulën

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a. \tag{4.21}$$

Në veçanti për $a = 2$ marrim

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2 \tag{4.22}$$

Në fillim të këtij kapitulli vlerësuam

$$\frac{d}{dx}(2^x) \approx (0,69)2^x$$

Kjo përputhet me formulën ekzakte Ek. (4.22) sepse $\ln 2 \approx 0.693147$.

□

Në një nga shembujt e mëparshëm shqyrtuam popullimin e qelizave bakteriale që dyfishoheshin çdo një orë dhe pamë se popullimi pas t orësh është $n = n_0 2^t$, ku n_0 është popullimi fillestar. Formula Ek. (4.22) na lejon të gjejmë shkallën e rritjes së popullatës së bakterieve

$$\frac{dn}{dt} = n_0 \cdot 2^t \cdot ln2.$$

Arsyeja për emërtimin "rregulli zinxhir"bëhet më e qartë kur marrim një zinxhir më të gjatë. Supozojmë se $y = f(u)$, $u = g(x)$ dhe $x = h(t)$ ku $f(x)$ $g(x)$ dhe h janë funksione të derivueshëm. Atëherë, për të llogaritur derivatin e y në lidhje me t, përdorim rregullin zinxhir dy herë:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Shembull 4.28. *Në qoftë se*

$$f(x) = \sin(\cos(\tan x))$$

atëherë

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\cos(\tan x)) \cdot \frac{d}{dx}\cos(\tan x) = \cos(\cos(\tan x))\,[-\sin(\tan x)]\,\frac{d}{dx}(\tan x) \\ &= -\cos(\cos(\tan x)) \cdot \sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

Vëmë re se rregulli zinxhir është përdorur dy herë.

□

Si ta vërtetojmë rregullin zinxhir

Rikujtojmë se në qoftë se $y = f(x)$ dhe x ndryshon nga a në $a + \triangle x$, ne përcaktojmë ndryshimin në y si

$$\triangle y = f(a + \triangle x) - f(a).$$

Duke u nisur nga përkufizimi i derivatit ne kemi

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = f'(a).$$

Kështu që në qoftë se ne përcaktojmë me ε diferencën midis raportit të ndryshesave dhe derivatit ne përftojmë

$$\lim_{\triangle x \to 0} \varepsilon = \varepsilon \lim_{\triangle x \to 0}\left(\frac{\triangle y}{\triangle x} - f'(a)\right) = f'(a) - f'(a) = 0$$

Por,

$$\varepsilon = \frac{\triangle y}{\triangle x} - f'(a) \Longrightarrow \triangle y = f'(a)\triangle x + \varepsilon \triangle x.$$

Në qoftë se ne përcaktojmë se ε është 0 kur $\triangle x = 0$ atëherë ε bëhet i vazhdueshëm për $\triangle x$. Prandaj për një funksion të derivueshëm $f(x)$ mund të shkruajmë

$$\triangle y = f'(a)\triangle x + \varepsilon \triangle x \tag{4.23}$$

ku $\varepsilon \to 0$ kur $\triangle x \to 0$ dhe ε është funksion i vazhdueshëm i $\triangle x$. Kjo veti e funksioneve të derivueshme është ajo që na mundëson vërtetimin e rregullit zinxhir.

Supozojmë $u = g(x)$ është i derivueshëm në a dhe $y = f(u)$ është i derivueshëm në $b = g(a)$. Në qoftë se $\triangle x$ është shtesa në x dhe $\triangle u$ dhe $\triangle y$ shtesat përkatëse në u dhe në y atëherë mund të përdorim ekuacionin 7 për të shkruar

$$\triangle u = g'(a)\triangle x + \varepsilon_1 \triangle x = [g'(a) + \varepsilon_1]\triangle x. \tag{4.24}$$

ku $\varepsilon_1 \to 0$ sikurse $\triangle x \to 0$. Në mënyrë të ngjashme

$$\triangle y = f'(b)\triangle u + \varepsilon_2 \triangle u = [f'(b) + \varepsilon_2]\triangle u, \tag{4.25}$$

ku $\varepsilon_2 \to 0$ sikurse $\triangle u \to 0$. Në qoftë se zëvendësojmë shprehjen për $\triangle u$ nga Ekuacioni (4.24) në Ekuacionin (4.25) gjejmë

$$\triangle y = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]\triangle x$$

kështu që

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Ashtu sikurse $\triangle x \to 0$ Ekuacioni (4.24) tregon se $\triangle u \to 0$. Prandaj të dyja $\varepsilon_1 \to 0$ dhe $\varepsilon_2 \to 0$ kur $\triangle x \to 0$. Prej nga

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0}[f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1] \\ &= f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a) \end{aligned}$$

Kjo vërteton rregullin zinxhir.

□

Ushtrime:

1. *Shkruani funksionin në formën $f(g(x))$. (Përcaktoni funksionin e brendshëm $u = (g(x))$ dhe funksionin e jashtëm $y = f(u)$). Dhe më pas gjeni derivatin dy/dx.*
$y = \sin 6x$

2. $\sqrt{2x+5}$

3. $y = (1 - x^2)^8$

4. $y = \tan(\sin x)$

5. $y = \sin(e^x)$

6. $y = e^{\sqrt{x}}$

Gjeni derivatin e funksionit.

7. $f(x) = (x^3 + 2x^2 - 3)^7$

8. $f(x) = (4x - x^2)^{10}$

9. $y = (x + x^3)^{3/2}$

10. $y = \sin(x^2 - a^2)$

11. $y = \frac{1}{x^5+1}^2$

12. $y = x^2 e^{-x}$

13. $y = a^3 + \cos^3 x$

14. $y = (x^3 - 1)^4(x^4 + 1)^3$

15. $y = (3x - 2)^4(6x^2 - 5)^{-4}$

16. $y = (x^2 + 1)\sqrt[5]{x^3 + 2}$

17. $y = (\frac{x^2+1}{x^2-1})^3$

18. $y = e^{-3x}\cos 5x$

19. $y = e^{x \sin x}$

20. $y = 8^{1-x^3}$

21. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

22. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

23. $y = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

24. $y = \sin(\tan 3x)$

25. $y = e^(\sin 3x)$

26. $y = \tan^2(3x)$

27. $y = \tan^2 \sin x$

28. $y = x \sin \frac{1}{x}$

29. $y = \cos(\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}})$

30. $y = e^{\tan x}$

31. $y = \tan(e^t) + e^{\tan t}$

32. $y = \cos\sqrt{sin(\tan\pi x)}$

33. $y = [x + (x + \sin^2 x)^3]^4$

34. $y = 3^{2^{x^2}}$

Gjeni derivatin e parë dhe të dytë të funksionit.

35. $f(x) = \sqrt{x^1 + 1}$

36. xe^{cx}

37. $y = e^{e^x}$

38. $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj kurbës në pikën e dhënë.

39. $y = (1 + 2x)^{10}$ *në* $(0, 1)$

40. $y = \sin x + \sin^2 x$, *në* $(0, 0)$

41. $y = \sin(\sin x)$, *në* $(\pi, 0)$

42. *(a) Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj kurbës* $y = 2/(1 + e^{-x})$ *në pikën* $(0, 1)$.

(b) Ilustroni pikën (a) duke ndërtuar grafikun e kurbës dhe tangentes në të njëjtin sistem koordinativ.

43. *(a) Gjeni një ekuacion për tangenten ndaj kurbës* $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ *në pikën* $(1, 1)$.

(b) Ilustroni pikën (a) duke ndërtuar grfikun e kurbës dhe tangentes në të njëjtin sistem koordinativ.

44. *Gjeni të gjitha pikat në grafikun e funksionit* $f(x) = 2\sin x + \sin^2 x$, *ku tangentja është horizontale.*

45. *Gjeni të gjitha pikat në grafikun e funksionit* $f(x) = \sin 2x - 2\sin x$ *ku tangentia është horizontale.*

46. *Në qoftë se* $F(x) = f(g(x))$ *ku* $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$, $g'(5) = 6$ *gjeni* $F'(5)$.

47. *Në qoftë se* $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ *ku* $f(1) = 7$, *dhe* $f'(1) = 4$ *gjeni* $h'(1)$.

48. *Jepet tabela për vlerat e funksioneve* $f(x)$, $g(x)$, f', g'.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

(a) Në qoftë se $h(x) = f(g(x))$ *gjeni* $h'(1)$.

(b) Në qoftë se $H(x) = g(f(x))$ *gjeni* $H'(1)$.

49. *Supozojmë se* $f(x)$ *është i derivueshëm në* $\mathbb{R}$. *Le të jetë* $F(x) = f(e^x)$ *dhe* $G(x) = e^{f(x)}$. *Gjeni shprehjet për derivatet* $F'(x)$ *dhe* $G'(x)$

50. *Në qoftë se* $g(x)$ *është dy herë i derivueshëm dhe* $f(x) = xg(x^2)$, *gjeni* f'' *në termat e* $g(x)$, g', *dhe* g''.

51. *Në qoftë se* $F(x) = f(3f(4f(x)))$, *ku* $f(0) = 0$ *dhe* $f'(0) = 2$, *gjeni* $F'(0)$.

52. *Në qoftë se ekuacioni i lëvizjes së grimcës jepet si* $s = A\cos(\omega t + \delta)$, *thuhet se grimca i nënshtrohet lëvizjes harmonike të thjeshtë.*

(a) Gjeni shpejtësinë e grimcës në kohën t.

(b) Kur shpejtësia është zero?

53. *Një grimcë lëviz sipas një vije të drejtë me zhvendosje* $s(t)$, *shpejtësi* $v(t)$, *dhe nxitim* $a(t)$. *Vërtetoni se*

$$a(t) = v(t)\frac{dv}{ds}$$

Shpjegoni ndryshimin ndërmjet kuptimeve të derivateve dv/dt *dhe* dv/ds.

54. *Në qoftë se* $y = f(u)$ *dhe* $u = g(x)$ *ku* $f(x)$ *dhe* $g(x)$ *janë dy herë të derivueshëm, atëherë tregoni se*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^y}{du^2}(\frac{du}{dx})^2 + \frac{dy}{du}\frac{d^2u}{dx^2}$$

55. *Në qoftë se* $y = f(u)$ *dhe* $u = g(x)$, $f(x)$ *dhe* $g(x)$ *janë tre herë të derivueshëm, gjeni një formulë për* d^3y/dx^3 *të ngjashme me formulën e ushtrimit të mësipërm.*

4.6 Derivimi në mënyrë implicite

Funksionet që kemi parë deri tani mund të përshkruhen duke shprehur një ndryshore në mënyrë eksplicite në varësi të një ndryshorja tjetër për shembull,

$$y = \sqrt{x^3 + 1}$$

ose

$$y = x \cdot sinx$$

ose në përgjithësi $y = f(x)$. E megjithatë disa funksione janë përcaktuar në mënyrë implicite nëpërmjet një relacioni ndërmjet x dhe y si për shembull

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{4.26}$$

ose

$$x^3 + y^3 = 6xy \tag{4.27}$$

Në disa raste është e mundur të zgjidhen ekuacione të tilla për y si një funksion eksplicit (ose disa funksione) i x. Për shembull, në qoftë se zgjidhim Ek. (4.26) në lidhje me y gjejmë $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ pra dy nga funksionet e përcaktuara nga ekuacioni implicit Ek. (4.26) janë $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ dhe $g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$. Grafikët e $f(x)$ dhe $g(x)$ janë dy gjysmat e sipërme dhe të poshtme të rrethit $x^2 + y^2 = 25$.

Nuk është e lehtë të zgjidhet ekuacioni Ek. (4.27) në mënyrë eksplicite për y si funksion i x. Një sistem kompjuterik algjebrik nuk ka probleme por shprehjet e përftuara janë vërtet të komplikuara. Megjithatë, Ek. (4.26) është ekuacioni i një kurbe të quajtur "fleta e Dekartit"dhe në mënyrë implicite e përcakton y si funksione të ndryshme të x. Kur themi se $f(x)$ është një funksion i përcaktuar në mënyrë implicite nga Ek. (4.27) nënkuptojmë se ekuacioni

$$x^3 + (f(x))^3 = 6x \cdot f(x)$$

është i vërtetë për të gjitha vlerat e x nga bashkësia e përkufizimit të $f(x)$.

Për fat të mirë nuk na duhet të zgjidhim një ekuacion për y në termat e x në mënyrë që të gjejmë derivatin e y. Përkundrazi mund të përdorim metodën e **derivimit implicit**. Kjo konsiston në derivimin e të dy anëve të ekuacionit në lidhje me x dhe më pas zgjidhim ekuacionin e ri në lidhje me y'. Në shembujt dhe ushtrimet e këtij paragrafi gjithmonë pranojmë se ekuacioni i dhënë përcakton y në mënyrë implicite si funksion të derivueshëm në lidhje me x në mënyrë që metoda e derivimit implicit të gjejë zbatim.

Shembull 4.29. *(a) Në qoftë se $x^2 + y^2 = 25$, gjeni $\frac{dy}{dx}$.*
(b) Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj rrethit $x^2 + y^2 = 25$ në pikën $(3, 4)$.

Zgjidhje: (a) Derivojmë të dy anët e ekuacionit $x^2 + y^2 = 25$:

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Kujtoni se y është funksion i x dhe duke përdorur rregullin zinxhir, kemi

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Prandaj,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Tani zgjidhim këtë ekuacion në lidhje me dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(b) Në pikën $(3, 4)$ kemi $x = 3$ dhe $y = 4$ prandaj

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}.$$

Një ekuacion i tangentes ndaj rrethit në $(3, 4)$ do të jetë

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3)$$

ose $3x + 4y = 25$.

□

Zgjidhje: (b) Duke zgjidhur ekuacionin $x^2 + y^2 = 25$ gjejmë $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Pika $(3, 4)$ ndodhet në gjysmën e sipërme $y = \sqrt{25 - x^2}$ dhe kështu shqyrtojmë funksionin $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Derivojmë $f(x)$ duke përdorur rregullin zinxhir dhe kemi

$$f'(x) = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}(25 - x^2) = \frac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Kështu që $f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25-3^2}} = -\frac{3}{4}$ dhe ekuacioni i tangentes është $3x + 4y = 25$.

□

Vërejtje 4.2. *Shembulli i mësipërm ilustron faktin që edhe pse kur është e mundur të zgjidhet një ekuacion eksplicit për y në termat e x mund të jetë më e lehtë të përdoret derivimi implicit.*

Vërejtje 4.3. *Shpreja $dy/dx = -x/y$ jep derivatin në termat e të dy x dhe y. Kjo është korrekte pavarësisht se cili funksion y përcaktohet nga ekuacioni i dhënë. Për shembull për $y = \sqrt{25 - x^2}$ kemi*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

ndërsa për $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ kemi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Shembull 4.30. *(a) Gjeni y' në qoftë se $x^3 + y^3 = 6xy$.*
(b) Gjeni tangenten ndaj fletës së Dekartit *në pikën $(3, 3)$*
(c) Në cilën pikë të kurbës tangentja është horizontale?

Zgjidhje: (a) Derivojmë të dy anët e $x^3 + y^3 = 6xy$ në lidhje me x duke e parë y si funksion të x dhe duke përdorur rregullin zinxhir në termin e y^3 dhe rregullin e prodhimit në termin $6xy$ marrim

$$3x^2 + 3y^2y' = 6y + 6xy'$$

ose

$$x^2 + y^2y' = 2y + 2xy'$$

Tani e zgjidhim ekuacionin e ri në lidhje me y':

$$y^2y' - 2xy' = 2y - x^2$$

$$y' = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

(b) Kur $x = y = 3$,

$$y' = \frac{2 \cdot 3 - 3^2}{3^2 - 2 \cdot 3} = -1$$

kjo është vlera e duhur për koefiçentin këndor në $(3, 3)$. Kështu që një ekuacion për tangenten e fletës në $(3, 3)$ është

$$y - 3 = -1(x - 3)$$

ose

$$x + y = 6$$

(c) Tangentja është horizontale në qoftë se $y' = 0$. Duke përdorur shprehjen për y' nga pjesa (a) shohim se $y' = 0$ kur $2y - x^2 = 0$. Zëvendësojmë $y = \frac{1}{2}x^2$ në ekuacionin e kurbës dhe marrim

$$x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 = 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)$$

i cili thjeshtohet në $x^6 = 16x^3$. Kështu që $x = 0$ ose $x^3 = 16$. Në qoftë se $x = 16^{1/3} = 2^{4/3}$ atëherë $y = \frac{1}{2}(2^{8/3}) = 2^{5/3}$. Prandaj, tangentja është horizontale në $(0, 0)$ dhe në $(2^{4/3}, 2^{5/3})$, që është afërsisht $(2.5198, 3.1748)$.

□

Vërejtje 4.4. *Ka një formulë për rrënjën kubike të ekuacionit e cila ngjan me formulën e rrënjës katrore por akoma më e komplikuar.*

Në qoftë se përdorim formulën për të zgjidhur ekuacionin $x^3 + y^3 = 6xy$ në lidhje me y si funksion të x marrim tre funksionet e pëcaktuara nga ekuacioni:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + \sqrt{\frac{1}{4}x^6 - 8x^3}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 - \sqrt{\frac{1}{4}x^6 - 8x^3}}$$

dhe

$$y = \frac{1}{2}\left[-f(x) \pm \sqrt{-3}\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 + \sqrt{\frac{1}{4}x^6 - 8x^3}} - \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x^3 - \sqrt{\frac{1}{4}x^6 - 8x^3}}\right)\right].$$

Ju mund të shihni se metoda e derivimit implicit kursen një sasi të madhe pune në raste të tilla. Për më tepër derivimi implicit punon shumë thjesht për ekuacione të tilla si

$$y^5 + 3x^2y^2 + 5x^4 = 12$$

për të cilin është e pamundur të gjendet një shprehje e ngjashme për y në varësi të x.

Shembull 4.31. *Gjeni y' në qoftë se* $\sin(x + y) = y^2 \cos x$.

Zgjidhje: Derivojmë në mënyrë implicite në lidhje me x duke patur parasysh se y është funksion i x dhe gjejmë

$$\cos(x + y) \cdot (1 + y') = 2yy' \cos x + y^2(-\sin x).$$

Vëreni se kemi përdorur rregullin zinxhir në të majtë dhe rregullin e prodhimit dhe zinxhir në të djathtë. Në qoftë se grupojmë termat që përmbajnë y' kemi

$$\cos(x + y) + y^2 \sin x = (2y \cos x)y' - \cos(x + y) \cdot y'$$

Kështu që,

$$y' = \frac{y^2 \sin x + \cos(x + y)}{2y \cos x - \cos(x + y)}.$$

□

4.6.1 Trajektoret ortogonale

Dy kurba quhen ortogonale në qoftë se në çdo pikë prerjeje të tyre tangentet janë pingule. Në shembullin në vazhdim do të përdorim derivimin implicit për të treguar se dy familje kurbash janë trajektore ortogonale të njëra-tjetrës, domethënë çdo kurbë nga një familje është ortogonale me çdo kurbë nga familja tjetër. Familjet ortogonale gjejnë vend në fusha të ndryshme të fizikës. Për shembull vijat e forcës në një fushë elektrostatike janë ortogonale me vijat e potencialit konstant. Në termodinamikë, izotermat janë ortogonale me vijat e fluksit të nxehtësisë.

Shembull 4.32. *Ekuacioni*

$$xy = c, \; c \neq 0 \tag{4.28}$$

përfaqson familjen e hiperbolave. Ekuacioni

$$x^2 - y^2 = k, \quad k \neq 0 \tag{4.29}$$

paraqet një tjetër familje hiperbolash me asimptota $y = \pm x$. Vërtetoni se çdo kurbë në familjen Ek. (4.28) është ortogonale me çdo kurbë në familjen Ek. (4.29), domethënë familjet janë trajektore ortogonale me njëra-tjetrën.

Zgjidhje: Derivimi implicit i ekuacionit Ek. (4.28) jep

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad pra \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \tag{4.30}$$

Derivimi implicit i ekuacionit Ek. (4.29) jep

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0, \quad pra \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \tag{4.31}$$

Nga Ek. (4.30) dhe Ek. (4.31) shohim se në çdo pikëprerje të kurbave nga secila familje, koefiçentët këndorë të tangenteve janë reciprokisht negativë me njëri tjetrin. Pra, kurbat priten në kënde të drejta; domethënë janë ortogonale.

□

4.6.2 Derivatet e funksioneve të anasjellta trigonometrike

Funksionet e anasjellta trigonometrike janë parë në Kapitullin I. Diskutuam vazhdueshmërinë e tyre në Kapitullin II si dhe asimptotat e tyre. Këtu përdorim derivimin implicit për të gjetur derivatet e funksioneve të anasjellta trigonometrike duke pranuar se këto funksione janë të derivueshme. Në fakt në qoftë se $f(x)$ është funksion një për një i derivueshëm, mund të provohet se inversi i tij f^{-1} është gjithashtu i derivueshëm përjashtuar aty ku tangentet janë vertikale. Kjo ka vend sepse grafiku i funksionit të derivueshëm nuk ka kënde dhe kështu e pasqyrojmë atë në lidhje me drejtëzën $y = x$ dhe grafiku i f^{-1} nuk ka se si të ketë kënde.

Rikujtojmë përkufizimin e funksionit arksinus:

$$y = \arcsin x = \sin^{-1} x \; domethënë \quad \sin y = x \; dhe \; -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

Duke derivuar $\sin y = x$ në mënyrë implicite në lidhje me x marrim

$$\cos y\frac{dy}{dx} = 1 \; ose \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Tani $\cos y \ge 0$ meqënëse $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ prandaj

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

E prej këtej

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Formula për derivatin e funksionit arktangent gjendet në mënyrë të ngjashme. Në qoftë se $y = \arctan x = \tan^{-1} x$ atëherë $\tan y = x$. Nga derivimi i këtij ekuacioni në mënyrë implicite në lidhje me x na sjell

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Shembull 4.33. *Derivoni*

(a) $y = \frac{1}{\arcsin x}$

(b) $f(x) = x \arctan \sqrt{x}$.

Zgjidhje: (a)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\arcsin x)^{-1} = -(\arcsin x)^{-2}\frac{d}{dx}(\arcsin x) = -\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

(b)

$$f'(x) = x\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}(\frac{1}{2}x^{-1/2}) + \arctan\ \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} + \arctan\ \sqrt{x}$$

□

Funksionet e anasjellta trigonometrike që hasen shpesh janë ato që sapo përmendëm. Derivatet e funksioneve të tjera jepen në vazhdim. Vërtetimi i këtyre formulave mbetet si ushtrim për t'u punuar në mënyrë të pavarur.

Derivatet e funksioneve të anasjella trigonometrike

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{d}{dx}(arccotx) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Ushtrime:

1. *(a)Gjeni y' nëpërmjet derivimit implicit.*

(b) Zgjidhni ekuacionin në mënyrë të shtjellur në lidhje me y dhe më pas derivoni për të gjetur y' në varësi të x.

(c) Shihni në qoftë se zgjidhjet tuaja në pikat (a) dhe (b) janë të sakta duke zëvendësuar shprehjen e y në pikën (a).

$xy + 2x + 3x^2 = 4$

2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

3. $4x^2 + 9y^2 = 36$

4. $\cos x + \sqrt{y} = 5$

Gjeni dy/dx nëpërmjet derivimit implicit.

5. $x^3 + y^3 = 1$

6. $2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$

8. $2x^3 + x^2y = xy^3 = 2$

9. $x^4(x+y) = y^2(3x-y)$

10. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

11. $x^2y^2 + x\sin y = 4$

12. $1 + x = \sin(xy^2)$

13. $4\cos x \sin y = 1$

14. $e^{x/y} = x - y$

15. $y\sin(x^2) = x\sin(y^2)$

16. $\sqrt{x+y} = 1 + x^2y^2$

17. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

18. $\tan(x-y) = \frac{y}{1+x^2}$

19. $e^y\cos x = 1 + \sin(xy)$

20. $\sin x + \cos x = \sin x \cos x$

21. *Në qoftë se* $f(x)+x^2[f(x)]^3 = 10$ *dhe* $f(1) = 2$, *gjeni* $f'(1)$.

22. *Në qoftë se* $g(x) + x\sin g(x) = x^2$ *gjeni* $g'(0)$.

Shikoni y si ndryshoren e pavarur dhe x si ndryshoren e varur dhe përdorni derivimin implicit për të gjetur dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

24. $y\sec x = x\tan y$

Përdorni derivimin implicit për të gjetur ekuacionin e tangentes në pikën e dhënë.

25. $x^2 + xy + y^2 = 3$, *në* $(1, 1)$

26. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, *në* $(1, 2)$

27. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$, *në* $(0, \frac{1}{2})$

28. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$, *në* $(-3\sqrt{3}, 1)$

29. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$, *në* $(3, 1)$

30. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$, *në* $(0, -2)$

Gjeni y'' nëpërmjet derivimit implicit.

31. $9x^2 + y^2 = 9$

32. $x^3 + y^3 = 1$

33. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

34. $x^4 + y^4 = a^4$

35. *Vërtetoni nëpërmjet derivimit implicit se tangentja ndaj elipsit*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

në pikën (x_0, y_0) *është*

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

36. *Gjeni ekuacionin e tangentes ndaj hiperbolës*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

në pikën (x_0, y_0).

37. *Gjeni derivatin e funksionit. Thjeshtoni ku keni mundësi.* $y = \tan^{-1}\sqrt{x}$

38. $y = \sqrt{tan^{-1} x}$

39. $y = \sin^{-1}(2x + 1)$

40. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1} x$

41. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arccos x$

42. $y = \tan^{-1}(x - \sqrt{1 + x^2})$

43. $h(t) = \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}(1/t)$

44. $F(\theta) = \arcsin\sqrt{\sin\theta}$

45. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$

46. $y = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Gjeni $f'(x)$ dhe krahasoni grafikët e $f(x)$ dhe f'.

47. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arcsin x$

48. $f(x) = \arctan(x^2 - x)$

Dy kurba quhen ortogonale kur tangentet e tyre janë pingule në pikat e prerjes. Vërtetoni se familjet e dhëna të kurbave janë trajektore ortogonale me njëra- tjetrën, pra secila kurbë e një familje është ortogonale me çdo kurbë të familjes tjetër. Ndërtoni familjet e kurbave në të njëjtin sistem koordinativ.

49. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0.$

50. $x^2 + y^2 = ax,\ x^2 + y^2 = by$

51. $y = cx^2,\ x^2 + 2y^2 = k$

52. $y = ax^3,\ x^2 + 3y^2 = b$

53. *Ekuacioni* $x^2 - xy + y^2 = 3$ *tregon një elips të rotulluar që do të thotë se boshtet e tij nuk përputhen me boshtet koordinative. Gjeni pikat në të cilat elipsi pret boshtin e x-ve dhe tregoni se tangentet ndaj elipsit në këto pika janë paralele.*

54. *Gjeni të gjitha pikat e kurbës* $x^2y^2 + xy = 2$ *ku koefiçenti këndor i tangentes është* -1.

55. *Gjeni ekuacionet e tangenteve ndaj elipsit* $x^2 + 4y^2 = 36$ *të cilat kalojnë nga pika* $(12, 3)$.

56. *(a) Supozojmë se* $f(x)$ *është funksion një për një dhe i derivueshëm. Gjithashtu funskioni i anasjelltë i tij* f^{-1} *është i derivueshëm. Përdorni derivimin implicit për të treguar se*

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

duke nënkuptuar se emëruesi është i ndryshëm nga zero.
(b) Në qoftë se $f(4) = 5$ *dhe* $f'(4) = \frac{2}{3}$*, gjeni* $(f^{-1})(5)$.

57. *(a) Vërtetoni se* $f(x) = 2x + \cos x$ *është funksion një për një.*
(b) Cila është vlera e $f^{-1}(1)$*?*
(c) Përdorni formulën e ushtrimit të mësipërm për të gjetur $(f^{-1})'(1)$.

4.7 Derivate të rendeve të larta

Në qoftë se $f(x)$ është një funksion i derivueshëm atëherë derivati i tij f' është gjithashtu funksion kështu që mund të ketë edhe ai vetë derivat, i cili po qe se ekziston shënohet $(f')' = f''$. Ky funksion i ri f'' quhet derivati i dytë i $f(x)$ sepse është derivati i derivatit të $f(x)$. Duke përdorur shënimin e Lajbnicit shkruajmë derivatin e dytë të $y = f(x)$ si

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Një shënim tjetër është $f''(x) = D^2 f(x)$.

Shembull 4.34. *Në qoftë se*

$$f(x) = x\cos x$$

gjeni dhe interpretoni $f''(x)$.

Zgjidhje: Duke përdorur rregullin e prodhimit, kemi

$$f'(x) = x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x) = -x\sin x + \cos x$$

Për të gjetur $f''(x)$ ne derivojmë $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx}(-x\sin x + \cos x) \\ &= -x\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(-x) + \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= -x\cos x - \sin x - \sin x \\ &= -x\cos x - 2\sin x \end{aligned}$$

Ne mund ta interpretojmë $f''(x)$ si koefiçenti këndor i tangentes ndaj grafikut të funksionit $y = f'(x)$ në pikën $(x, f'(x))$. Me fjalë të tjera është raporti i ndryshimit të koefiçentit këndor të tangentes së kurbës origjinale $y = f(x)$. Vëmë re se $f''(x) = 0$ sa herë që $y = f'(x)$ ka tangente horizontale. Gjithashtu $f''(x)$ është pozitiv kur $y = f'(x)$ ka koefiçent këndor të tangentes pozitiv dhe negativ kur $y = f'(x)$ ka koefiçent këndor të tangentes negativ.

□

Në përgjithësi, mund ta interpretojmë derivatin e dytë si shkallë e ndryshimit të raportit të ndryshimit. Shembulli më i përdorshëm i kësaj është nxitimi të cilin e përcaktojmë si më poshtë. Në qoftë se $s = s(t)$ është funksioni pozicion i një objekti që lëviz në një vijë të drejtë, dimë se derivati i parë i tij përfaqëson shpejtësinë $v(t)$ e objektit si funksion i kohës:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

Ndryshimi i shpejtësisë në lidhje me kohën quhet **nxitim** $a(t)$ i objektit. Prandaj, funksioni nxitim është derivati i shpejtësisë dhe prej këtej derivati i dytë i funksionit pozicion

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

ose sipas shënimit të Lajbnicit

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Shembull 4.35. *Pozicioni i një grimce jepet me ekuacionin*

$$s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$$

ku t matet me sekonda dhe s me metra.
(a) Gjeni nxitimin në kohën t. Sa është nxitimi pas 4sekondash?
(b) Kur e rrit shpejtësinë grimca? Kur ngadalëson lëvizjen ajo?

Zgjidhje: (a) Funksioni shpejtësi është derivat i funksionit pozicion:

$$\begin{aligned} s &= f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t \\ v(t) &= \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 \end{aligned}$$

Nxitimi është derivati i funksionit shpejtësi:

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \\ a(4) &= 6(4) - 12 = 12m/s^2 \end{aligned}$$

(b) Grimca e rrit shpejtësinë kur shpejtësia është pozitive dhe rritëse (v dhe a janë të dy pozitivë) dhe gjithashtu kur shpejtšia është negative dhe zvogëluese(v dhe a janë të dy negativë). Me fjalë të tjera grimca e rrit shpejtësinë kur shpejtësia dhe nxitimi kanë të njëjtën shenjë. Grimca ngadalëson kur v dhe a kanë shenja të kundërta, pra, kur $0 \leq t < 1$ dhe kur $2 < t < 3$.

Derivati i tretë f''' është derivati i derivatit të dytë. Kështu që $f'''(x)$ mund të interpretohet si koefiçent këndor i tangentes ndaj kurbës $y = f''(x)$ ose si shkallë e ndryshimit të $f''(x)$. Në qoftë se $y = f(x)$ atëherë shënimet alternatrive për derivatin e tretë janë

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \frac{d^3 y}{dx^3} = D^3 f(x).$$

□

Shembull 4.36. *Në qoftë se*

$$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$$

atëherë

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12x - 5 \\ y'' &= 6x - 12 \\ y''' &= 6 \\ y^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

dhe në fakt $y^{(n)} = 0$ për çdo $n \geq 4$.

Shembull 4.37. *Në qoftë se*

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

gjeni $f^{(n)}(x)$.

Zgjidhje:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
f'(x) &= -x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
f''(x) &= (-2)(-1)x^{-3} = \frac{2}{x^3} \\
f'''(x) &= -3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{-4} \\
f^{(4)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot x^{-5} \\
&\dots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n(n-1)(n-2)...2 \cdot 1 \cdot x^{-(n+1)}
\end{aligned}
$$

ose

$$
f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}
$$

□

Shembujt në vazhdim tregojnë se si mund të gjenden derivatet e dyta dhe të treta të një funksioni që është përcaktuar në mënyrë implicite.

Shembull 4.38. *Gjeni y'' kur*

$$
x^4 + y^4 = 16.
$$

Zgjidhje: Duke derivuar ekuacionin në mënyrë implicite në lidhje me x, marrim

$$
4x^3 + 4y^3 \cdot y' = 0
$$

Duke e zgjidhur në lidhje me y' kemi

$$
y' = -\frac{x^3}{y^3} \tag{4.32}
$$

Për të gjetur y'' derivojmë y' duke përdorur rregullin e raportit dhe duke patur parasysh se y është funksion i x:

$$
y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{y^3\left(\frac{d}{dx}\right)(x^3) - x^3\left(\frac{d}{dx}\right)(y^3)}{(y^3)^2} = -\frac{y^3 \cdot 3x^2 - x^3(3y^2y')}{y^6}
$$

Në qoftë se zëvendësojmë Ek. (4.32) në këtë shprehje, marrim

$$
y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y} = -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(y^4 + x^4)}{y^7}
$$

Por vlerat e x dhe y duhet të kënaqin ekuacionin origjinal $x^4 + y^4 = 16$. Prandaj përgjigja thjeshtohet në

$$
y'' = -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -48\frac{x^2}{y^7}
$$

□

Shembull 4.39. *Gjeni $D^{27} cosx$.*

Zgjidhje: Disa nga derivatet e para janë si më poshtë:

$$
\begin{aligned}
D\cos x &= -\sin x \\
D^2\cos x &= -\cos x \\
D^3\cos x &= \sin x \\
D^4\cos x &= \cos x \\
D^5\cos x &= -\sin x
\end{aligned}
$$

Shohim se derivatet në vazhdim përsëriten në një cikël me gjatësi 4 dhe në veçanti $D^n \cos x = \cos x$ sa herë që n është shumëfish i 4. Prej nga

$$D^{24} \cos x = \cos x$$

dhe duke derivuar edhe tre herë kemi

$$D^{27} \cos x = \sin x.$$

□

4.7.1 Derivatet e funksioneve logaritmike

Në këtë seksion do të përdorim derivimin implicit për të gjetur derivatet e funksioneve logaritmike $y = \log_a x$, dhe në veçanti, të funksionit të logaritmit natyror $y = \ln x$.

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a} \tag{4.33}$$

Vërtetim: Le të jetë $y = \log_a x$. Atëherë,

$$a^y = x.$$

Duke derivuar këtë ekuacion implicit në lidhje me x duke përdorur formulën $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a$, marrim

$$a^y \cdot (\ln a) \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

dhe prej këtej

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$$

Në qoftë se zëvendësojmë $a = e$ në formulën Ek. (4.33) atëherë faktori $\ln a$ në anën e djathtë bëhet $\ln e = 1$ dhe përftojmë formulën për derivatin e funksionit logaritmik natyror $\log_e x = \ln x$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \tag{4.34}$$

Shembull 4.40. *Derivoni* $y = \ln(x^3 + 1)$.

Zgjidhje: Shënojmë $u = x^3 + 1$ në mënyrë që të përdorim rregullin zinxhir. Atëherë, $y = \ln u$, prandaj

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3 + 1}(3x^2) = \frac{3x^2}{x^3 + 1}$$

Në përgjithësi në qoftë se ne kombinojmë formulën Ek. (4.34) me rregullin zinxhir si në shembullin më sipër përftojmë

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad ose \quad \frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{g'(x)}{g(x)} \tag{4.35}$$

Shembull 4.41. *Gjeni*

$$\frac{d}{dx} \ln(\sin x).$$

Zgjidhje: Duke përdorur Ek. (4.35) kemi

$$\frac{d}{dx} \ln(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cos x = \cot x$$

□

Shembull 4.42. *Derivoni* $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

Zgjidhje: Kësaj here funksioni logaritmik është në rolin e u, prandaj nga rregulli zinxhir kemi

$$f'(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

□

Shembull 4.43. *Derivoni* $f(x) = log_{10}(2 + \sin x)$.

Zgjidhje: Duke përdorur Ek. (4.33) për $a = 10$, kemi

$$f'(x) = \frac{d}{dx}log_{10}(2+\sin x) = \frac{1}{(2+\sin x)ln10} \cdot \frac{d}{dx} \cdot (2+\sin x) = \frac{\cos x}{(2+\sin x)\ln 10}$$

□

Shembull 4.44. *Gjeni derivatin*

$$\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right).$$

Zgjidhje: Duke zbatuar rregullat e derivimit kemi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\right) &= \frac{1}{\frac{x+1}{\sqrt{x-2}}} \cdot \frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\
&= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)(\frac{1}{2})(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\
&= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}
\end{aligned}$$

Në qoftë se thjeshtojmë fillimisht funksionin e dhënë duke përdorur vetitë e logaritmit atëherë derivimi bëhet më i thjeshtë:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-2)\right] = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}(\frac{1}{x-2})$$

□

Shembull 4.45. *Gjeni* $f'(x)$ *kur*

$$f(x) = \ln|x|.$$

Zgjidhje: Meqënëse

$$f(x) = \begin{cases} \ln x \text{ në qoftë se } x > 0 \\ \ln(-x) \text{ në qoftë se } x < 0 \end{cases}$$

kjo sjell që

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ në qoftë se } x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x} \text{ në qoftë se } x < 0 \end{cases}$$

Prandaj $f'(x) = 1/x$ për të gjithë $x \neq 0$. Rezultati i këtij shembulli duhet fiksuar si

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = \frac{1}{x} \tag{4.36}$$

4.7.2 Derivatet që llogariten më lehtë me anë të logaritmeve.

Llogaritja e derivateve të funksioneve të komplikuara që përfshijnë prodhime, raporte apo ngritje në fuqi shpesh mund të thjeshtohet duke përdorur metodën e logaritmeve. Metoda e përdorur në shembujt në vazhdim quhet derivimi logaritmik.

Shembull 4.46. *Derivoni*

$$y = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$$

Zgjidhje: Marrim logaritmin e të dy anëve të ekuacionit dhe përdorim vetitë e logaritmit për të thjeshtuar:

$$\ln y = \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)$$

Derivojmë në mënyrë implicite në lidhje me x dhe përftojmë

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} - 5\frac{3}{3x+2}$$

Duke e zgjidhur në lidhje me dy/dx ne gjejmë

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Meqë ne kemi një shprehje eksplicite për y ne mund ta zëvendësojmë dhe shkruajmë

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{3/4}\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

Hapat që ndiqen në derivimin logaritmik

1. Merret logaritmi natyror i të dy anëve të ekuacionit $y = f(x)$ dhe përdoren vetitë e logaritmit për të thjeshtuar.
2. Derivohet në mënyrë implicite në lidhje me x.
3. Zgjidh ekuacionin e përftuar në lidhje me y'.

Në qoftë se $f(x) < 0$ për ndonjë vlerë të x atëherë $\ln f(x)$ nuk ka kuptim por mund të shkruajmë $|y| = |f(x)|$ dhe të përdorim Ek. (4.36). E ilustrojmë këtë procedurë duke vërtetuar rregullin fuqi në versionin e përgjithshëm.

Vërtetimi i Rregullit Fuqi:

Në qoftë se r është një numër real i çfarëdoshëm dhe $f(x) = x^r$, atëherë

$$f'(x) = r\cdot x^{r-1}$$

Vërtetim: Le të jetë $y = x^r$. Përdorim derivimin logaritmik:

$$\ln|y| = \ln|x|^r = r\cdot\ln|x|, \quad x \neq 0$$

Prej nga

$$\frac{y'}{y} = \frac{r}{x}$$

Pra,

$$y' = r\cdot\frac{y}{x} = r\cdot\frac{x^r}{x} = r\cdot x^{r-1}$$

□

Vërejtje 4.5. *Ju duhet të kini kujdes që të dalloni rregullin fuqi*

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1},$$

ku baza është ndryshore dhe eksponenti konstant dhe rregulli i derivimit të funksionit eksponencial

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a,$$

ku baza është konstante dhe eksponenti ndryshore.

Në përgjithësi janë katër raste për eksponentët dhe bazat:

1. $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$ ku a dhe b janë konstante.
2. $\frac{d}{dx}\,[f(x)]^b = b \cdot [f(x)]^{b-1} \cdot f'(x)$
3. $\frac{d}{dx}\left[a^{g(x)}\right] = a^{g(x)} \cdot (\ln a) \cdot g'(x)$
4. Për të gjetur
$$\frac{d}{dx}\,[f(x)]^{g(x)}$$
derivimi logaritmik mund të përdoret si në shembullin në vazhdim.

Shembull 4.47. *Derivoni*

$$y = x^{\sqrt{x}}.$$

Zgjidhje: Duke përdorur derivimin logaritmik, kemi

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\ln x \\
\frac{y'}{y} &= \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} + (\ln x)\frac{1}{2\sqrt{x}} \\
y' &= y\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\right) = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{2 + lnx}{2\sqrt{x}}\right)
\end{aligned}$$

Zgjidhje: Një metodë tjetër është ta shkruash $x^{\sqrt{x}} = (e^{\ln x})^{\sqrt{x}}$:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{\ln x\sqrt{x}}\right) = e^{\ln x\sqrt{x}}\frac{d}{dx}(\ln x\sqrt{x}) = x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right)$$

□

4.7.3 Numri e i parë si limit

Kemi vërtetuar se kur $f(x) = \ln x$, atëherë $f'(x) = 1/x$. Prandaj, $f'(1) = 1$. Tani e përdorim këtë fakt për të shprehur numrin e si limit.

Nga përkufizimi i derivatit si limit kemi

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x) - f(1)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) \\
&= \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}
\end{aligned}$$

Meqë $f'(1) = 1$, kemi

$$\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x} = 1.$$

Nga teorema mbi vazhdueshmërinë e funksionit të përbërë dhe vazhdueshmëria e funksionit eksponencial, kemi

$$e = e^1 = e^{\lim_{x\to 0} \ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(1+x)^{1/x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$$

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \tag{4.37}$$

x	$(1+x)^{1/x}$
0.1	2.593742246
0.01	2.70481383
0.001	2.71692393
0.0001	2.71814593
0.00001	2.71826824
0.000001	2.71828047
0.0000001	2.71828169
0.00000001	2.71828181

Tabela 4.2: Vlerat e e për vlera të vogla të x-it.

Kjo ilustron faktin se, me saktësi deri në shtatë shifra pas presjes,

$$e \approx 2.7182818$$

Në qoftë se e zëvendësojmë $n = 1/x$ në (4.37) atëherë $n \to \infty$ sikurse $x \to 0$ dhe prej këtej një shprehje alternative për e është

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{4.38}$$

4.7.4 Funksionet hiperbolike

Disa kombinime të funksioneve eksponenciale e^x dhe e^{-x} përdoren shpesh në matematikë dhe aplikimet e saj, kështu që ato emërtohen në mënyrë të veçantë. Në shumë raste ato janë analoge me funksionet trigonometrike dhe kanë të njëjtën lidhje me hiperbolat si dhe funksionet trigonometrike që quhen rrethorë. Për këto arsye ato së bashku quhen funksione hiperbolike dhe në mënyrë individuale quhen sinusi hiperbolik, kosinusi hiperbolik, e kështu me radhë. Ne i përkufizojmë si më poshtë

$$\begin{aligned} \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} \end{aligned} \tag{4.39}$$

Vërejmë se sinusi hiperbolik ka si bashkësi përkufizimi $\mathbb{R}$ dhe bashkësi vlerash $\mathbb{R}$, ndërsa kosinusi hiperbolik ka si bashkësi përkufizimi $\mathbb{R}$ dhe si bashkësi vlerash $[1, \infty)$. Funksionet hiperbolike kënaqin një sërë identitetesh që janë të ngjashme me identitetet trigonometrike. Ne po paraqesim disa prej tyre. Vërtetimet ja lemë lexuesit.

Lema 4.1. *Identitet e mëposhtme janë të vërteta:*

1. $\sinh(-x) = -\sinh x$

2. $\cosh(-x) = \cosh x$
3. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
4. $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$
5. $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
6. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Shembull 4.48. *Vërtetoni se*
(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
(b) $1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$.

Zgjidhje: (a) Duke zëvendesuar në krahun e majtë kemi

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sin h^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1\end{aligned}$$

(b) E nisim me identitetin e vërtetuar në pjesën (a):

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Në qoftë se pjestojmë të dy anët me $\cosh^2 x$ marrim

$$1 - \frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

ose

$$1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

□

Derivatet e funksioneve hiperbolike llogariten lehtë. Për shembull

$$\frac{d}{dx}(\sin hx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cos hx.$$

Po rendisim tani formulat e derivimit të funksioneve hiperbolike. Vërtetimet mbeten për t'u zhvilluar si ushtrime nga lexuesi. Vëreni analogjinë me formulat e derivimit të funksioneve trigonometrike por kini kujdes se në disa raste ndryshojnë shenjat.

Derivatet e funksioneve hiperbolike

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad \frac{d}{dx}(\coth x) = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

Shembull 4.49. *Secili nga këta rregulla derivimi mund të kombinohet me rregullin zinxhir. Për shembull*

$$\frac{d}{dx}(\cosh \sqrt{x}) = \sinh \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{\sinh \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

4.7.5 Funksionet e anasjellta hiperbolike

Ju mund ta shihni lehtë se sinh dhe tanh janë funksione një për një, kështu që ata kanë funksione të anasjellta, që po i shënojmë me $\sinh^{-1}$ dhe $\tanh^{-1}$. Funksioni cosh nuk është funksion një për një por i ngushtuar në bashkësinë $[0, \infty)$ ai bëhet funksion një për një. I anasjellti i funksionit kosinus hiperbolik përkufizohet si i anasjellti i këtij funksioni të ngushtuar.

$$y = \sinh^{-1} x \Longleftrightarrow \sinh y = x$$

$$y = \cosh^{-1} x \Longleftrightarrow \cosh y = x \ \ dhe \ \ y \geq 0$$

$$y = \tanh^{-1} x \Longleftrightarrow \tanh y = x$$

$$y = \coth^{-1} x \Longleftrightarrow \cot y = x$$

Ne mund të skicojmë grafikun e $\sinh^{-1}$, $\cosh^{-1}$ dhe të $\tanh^{-1}$ duke përdorur grafikët e sinusit hiperbolik, kosinusit hiperbolik dhe tangentit hiperbolik duke patur parasysh faktin se ato janë respektivisht simetrikë në lidhje me drejtëzën $y = x$.

Meqë funksionet hiperbolike janë përkufizuar në termat e funksioneve eksponenciale nuk është çudi që edhe të anasjelltët e tyre të shprehen në termat e logaritmeve. Në veçanti kemi:

$$\sin h^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos h^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad x \geq 1$$

$$\tan h^{-1} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), \quad -1 < x < 1$$

Shembull 4.50. *Vërtetoni se*

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Zgjidhje: Le të jetë $y = \sinh^{-1} x$. Atëherë,

$$x = \sin hy = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Kështu që

$$e^y - 2x - e^{-y} = 0$$

ose duke shumëzuar me e^y,

$$e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Ky është një trinom i fuqisë së dytë në lidhje me e^y:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0$$

Duke e zgjidhur marrim

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

Kujtojmë se $e^y > 0$ por $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (sepse $x < \sqrt{x^2 + 1}$). Prandaj pranojmë vetëm rrënjën pozitive dhe kemi

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

E prej këtej

$$y = \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Derivatet e funksioneve të anasjellta hiperbolike

$$\frac{d}{dx}(\sin h^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\cos h^{-1}x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2+1}}$$
$$\frac{d}{dx}(\tan h^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\frac{d}{dx}(\cot h^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Funksionet e anasjellta hiperbolike janë quajtur të derivueshëm sepse funksionet hiperbolike janë të derivueshëm.

Shembull 4.51. *Vërtetoni se*

$$\frac{d}{dx}(sinh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Zgjidhje: Le të jetë $y = \sinh^{-1} x$. Atëherë, $\sinh y = x$. Në qoftë se derivojmë ekuacionin në mënyrë implicite në lidhje me x, marrim

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = 1$$

Meqë $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ dhe $\cosh y \geq 0$, ne kemi $\cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y}$, kështu që

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Zgjidhje: Nga ekuacionet e mësipërme kemi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sinh^{-1}) &= \frac{d}{dx}\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\frac{d}{dx}(x+\sqrt{x^2+1}) \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}) \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Shembull 4.52. *Gjeni*

$$\frac{d}{dx}\left[\tanh^{-1}(\sin x)\right].$$

Zgjidhje: Duke përdorur rezultatet e mësipërme dhe rregullin zinxhir kemi

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\tan h^{-1}(\sin x)\right] &= \frac{1}{1-(\sin x)^2}\frac{d}{dx}(\sin x) \\
&= \frac{1}{1-\sin^2 x}\cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}
\end{aligned}$$

Ushtrime:

1. *Çdo krah i një katrori rritet me shkallë* $6cm/s$. *Me çfarë shkalle rritet syprina e katrorit kur syprina është* $16cm^2$?

2. *Gjatësia e një drejtkëndëshi rritet me* $8cm/s$ *dhe gjerësia e tij rritet me* $3cm/s$. *Kur gjatësia është* $20cm$ *dhe gjerësia* $10cm$, *sa shpejt rritet syprina e drejtkëndëshit?*

3. *Rrezja e një sfere rritet me* $4mm/s$. *Sa shpejt rritet vëllimi i sferës kur diametri është* $80mm$?

4. *N.q.se* $y = x^3 + 2x$ *dhe* $dx/dt = 5$, *gjeni* dy/dt *kur* $x = 2$.

5. *N.q.se* $x^2 + y^2 = 25$ *dhe* $dy/dt = 6$, *gjeni* dx/dt *kur* $y = 4$.

6. *N.q.se* $z^2 = x^2 + y^2$, *dhe* $dx/dt = 2$, *dhe* $dy/dt = 3$. *Gjeni* dz/dt *kur* $x = 5$ *dhe* $y = 12$.

7. *Dy makina fillojnë lëvizjen nga e njëjta pikë. Njëra udhëton në drejtim të jugut me* $75km/h$ *dhe tjetra drejt perëndimit me* $40km/h$. *Me çfarë shkalle është rritur distanca ndërmjet makinave pas dy orësh?*

8. *Një njeri fillon të ecë drejt veriut duke u nisur nga pika P më shpejtësi* $2m/s$. *Pesë minuta më vonë një grua fillon të ecë drejt jugut duke u nisur nga një pikë* $500m$ *nga lindja e pikës P. Me çfarë shkalle lëizin njerzit* $15min$ *pasi gruaja ka filluar lëvizjen?*

9. *Një grimcë lëviz përgjatë kurbës* $y = \sqrt{x}$. *Kur grimca kalon pikën* $(4, 2)$, *abshisa* x *rritet me një shkallë prej* $3cm/s$. *Sa shpejt ndryshon distanca e grimcës nga origjina në këtë çast?*

10. *Dy brinjët e një trekëndëshi janë* $4m$ *dhe* $5m$ *dhe këndi ndërmjet tyre rritet me shkallë prej* $0.06rad/s$. *Gjeni shkallën me të cilën rritet syprina e trekëndëshit kur këndi ndërmjet brinjëve me gjatësi të fiksuar është* $\pi/3$.

11. *Dy brinjët e një trekëndëshi janë* $12m$ *dhe* $15m$ *dhe këndi ndërmjet tyre rritet me shkallë prej* $2°/min$. *Gjeni sa shpejt rritet brinja e tretë trekëndëshit kur këndi ndërmjet brinjëve me gjatësi të fiksuar është* $60°$?

12. *Dy njerëz nisen nga e njëjta pikë. Njëri ecën drejt lindjes me* $3m/s$ *dhe tjetri drejt verilindjes me* $2m/s$. *Sa shpejt ndryshon distanca ndërmjet tyre pas* 20 *minutash?*

13. *Akrepi i minutave të një ore është* $8mm$ *i gjatë, ndërsa akrepi i orës është* $4mm$ *i gjatë. Sa shpejt ndryshon distanca ndërmjet akrepave gjatë ndërrimit të orës?*

4.8 Përafrimet lineare dhe diferencialet

Kemi parë se kurbat janë shumë pranë tangenteve të tyre pranë pikave të tangenteve. Në fakt nga zmadhimi rrotull një pike të grafikut të një funksioni të derivueshëm vëmë re se grafiku duket gjithnjë e më shumë si tangentja e vet. Ky vëzhgim përbën bazën për metodën e gjetjes së vlerave të përafërta të funksionit.

Ideja është se mund të jetë e lehtë të llogaritet një vlerë $f(a)$ e një funsioni por e vështirë (ose edhe e pamundur) të llogariten vlerat e përafërta të $f(x)$. Kështu që ne e kemi më lehtë të llogarisim vlerat e funksionit linear L grafiku i të cilit është tangentja e $f(x)$ në pikën $(a, f(a))$; shih figurën 1. Me fjalë të tjera, përdorim tangenten në $(a, f(a))$ si një përafrim ndaj kurbës $y = f(x)$ kur x është afër a. Një ekuacion për këtë tangente është

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

dhe përafrimi

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \tag{4.40}$$

quhet **përafrim linear** ose **përafrim linear tangent** i $f(x)$ në a. Funksioni linear grafiku i të cilit është pikërisht tangentja pra,

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{4.41}$$

quhet linearizimi i $f(x)$ në a.

Shembulli në vazhdim është tipik i situatave në të cilat përdorim përafrimet lineare për të parashikuar sjelljen në të ardhmen të një funksioni të dhënë në trajtë empirike.

Shembull 4.53. *Gjeni linearizimin e funksionit* $f(x) = \sqrt{x+3}$ *në* $a = 1$ *dhe përdoreni atë për të përafruar numrat* $\sqrt{3.98}$ *dhe* $\sqrt{4.05}$. *A janë këto vlerësime të mëdha apo më të vogla se sa vlera e saktë?*

Zgjidhje: Derivati i $f(x) = (x + 3)^{1/2}$ është

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

Kështu që kemi $f(1) = 2$ dhe $f'(1) = \frac{1}{4}$. Duke vendosur këto vlera në Ek. (4.41), shohim se linearizimi është

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + \frac{1}{4}(x-1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

Përafrimi linear përkatës është

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

ku x është afër 1. Në veçanti kemi

$$\sqrt{3.98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0,98}{4} = 1.995 \; dhe \; \sqrt{4.05} \approx \frac{7}{4} + \frac{1.05}{4} = 2.0125$$

Sigurisht një makinë llogaritëse mund të japë një përafrim për $\sqrt{3.98}$ dhe $\sqrt{4.05}$ por përafrimi linear jep një përafrim përgjatë një intervali të tërë.

□

Në tabelën e mëposhtme krahasojmë vlerësimet e bëra nga përafrimi linear në shembullin e mësipërm me vlerat e sakta. Vëmë re nga kjo tabelë si se përafrimi linear tangent jep vlerësime të mira kur x është afër 1 ky përafrim nuk përkon kur x është larg nga 1.

	x	nga $L(x)$	vlera aktuale
$\sqrt{3.9}$	0. 9	1. 975	$1.97484176\cdots$
$\sqrt{3.98}$	0. 98	1. 995	$1.99499373\cdots$
$\sqrt{4}$	1	2	$2.00000000\cdots$
$\sqrt{4.05}$	1. 05	2. 0125	$2.01246117\cdots$
$\sqrt{4.1}$	1. 1	2. 025	$2.02484567\cdots$
$\sqrt{5}$	2	2. 25	$2.23606797\cdots$
$\sqrt{6}$	3	2.5	$2.44948974\cdots$

Tabela 4.3: Vlerat nga përafrimi linear.

Lind pyetja, sa i mirë është përafrimi që përftuam tek ky shembull? Shembulli tjetër tregon se duke përdorur makina llogaritëse grafike apo kompjutera që ne mund të përcaktojmë një interval brenda të cilit përafrimi është i përshtatshëm.

Shembull 4.54. *Për çfarë vlere të x përafrimi linear*

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$$

është i përshtatshëm brenda intervalit me gjerësi 0.5*? Po me gjerësi* 0.1*?*

Zgjidhje: Me gjerësi 0.5 do të thotë se funksioni duhet të ndryshojë nga përafrimi me më pak se 0.5:

$$\left| \sqrt{x+3} - \left(\frac{7}{4} + \frac{x}{4}\right) \right| < 0.5$$

Në mënyrë ekuivalente, mund të shkruajmë

$$\sqrt{x+3} - 0.5 < \frac{7}{4} + \frac{x}{4} < \sqrt{x+3} + 0.5$$

Kjo do të thotë se përafrimi linear duhet të shtrihet ndërmjet kurbave të përftuara nga zhvendosja paralele e kurbës $y = \sqrt{x+3}$ me 0.5 njësi.

Në mënyrë të ngjashme, shohim se përafrimi është i përshtatshëm brenda intervalit me gjerësi 0.1 kur $-1.1 < x < 3.9$.

□

4.8.1 Aplikimet në Fizikë

Përafrimet lineare përdoren shpesh në Fizikë. Në analizimin e konsekuencave të një ekuacioni, një fizikant ka nevojë ta theshtojë një funksion duke e zëvendësuar atë me përafrimin e vet linear. Për shembull, në derivimin e një formule për periodën e lavierrësit, librat e fizikës marrin shprehjen $a_t = -g\sin\theta$ për nxitimin tangencial dhe e zëvendësojnë $\sin\theta$ me θ duke patur parasysh se $\sin\theta$ është shumë afër θ kur θ nuk është e madhe. Ju mund të verifioni se linearizimi i funkionit $f(x) = \sin x$ në $a = 0$ është $L(x) = x$ dhe kështu përafrimi linear në 0 është

$$\sin x \approx x$$

Kështu që, derivimi i formulës për periodën e lavierrësit përdor përafrimin linear tangent për funksionin sinus.

Një tjetër shembull ndodh në teorinë e optikës, ku rrezet e dritës që mbërrijnë me kënd të pjerrët në boshtin optik janë quajtur rreze paraksiale. Në optikën paraxiale (ose Gausiane), si $\sin\theta$ dhe $\cos\theta$ janë zëvendësuar nga linearizimet e tyre. Me fjalë të tjera, përafrimet lineare

$$\sin\theta \approx \theta \;\; dhe \;\; \cos\theta \approx 1$$

janë përdorur sepse θ është shumë afër 0. Rezultatet e llogaritjeve të bëra me këto përafrime janë bërë mjeti teorik bazë i përdorur në dizenjimin e lenteve.

4.8.2 Diferencialet

Idetë në lidhje me përafrimet lineare shpesh janë formuluar në terminologjinë dhe shënimet e diferencialit. Në qoftë se $y = f(x)$, ku $f(x)$ është funksion i derivueshëm, atëherë **diferenciali** dx është ndryshore e pavarur; pra, dx mund t'i jepet vlera e çdo numri real. **Diferenciali** dy përkufizohet në termat e dx nga ekuacioni

$$dy = f'(x)dx \tag{4.42}$$

Prandaj dy është ndryshore i varur; ai varet nga vlerat e x dhe dx. Në qoftë se dx i është dhënë një vlerë e veçantë dhe x një vlerë nga bashkësia e përkufizimit të $f(x)$ atëherë vlera numerike e dy është përcaktuar.

Le të jetë $P(x, f(x))$ dhe $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ dy pika të grafikut të $f(x)$ dhe le të jetë $dx = \Delta x$. Ndryshimi korrespondues në y është

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Koefiçenti këndor i tangentes PR është derivati $f'(x)$. Prandaj distanca e drejtpërdrejtë nga S deri tek R është $f'(x)dx = dy$. Prej nga dy përfaqson ndryshimin e linearizimit, ku Δy përfaqson shtesën me të cilën kurba $y = f(x)$ rritet ose zvogëlohet kur x ndryshon me dx.

Shembull 4.55. *Krahasoni vlerat e Δy dhe dy në qoftë se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ dhe x ndryshon (a) nga 2 në 2.05 dhe (b) nga 2 në 2.01.*

Zgjidhje: (a) Kemi

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9 \\ f(2.05) &= (2.05)^3 + (2.05)^2 - 2(2.05) + 1 = 9.717625 \\ \Delta y &= f(2.05) - f(2) = 0.717625 \end{aligned}$$

Në përgjithësi, $dy = f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)dx$. Kur $x = 2$ dhe $dx = \Delta x = 0.05$, kjo bëhet

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.05 = 0.7$$

(b)

$$\begin{aligned} f(2.01) &= (2.01)^3 + (2.01)^2 - 2(2.01) + 1 = 9.140701 \\ \Delta y &= f(2.01) - f(2) = 0.140701 \end{aligned}$$

Kur $dx = \Delta x = 0.01$,

$$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0.01 = 0.14$$

Vëmë re se përafrimi $\Delta y \approx dy$ bëhet gjithnjë e më i mirë kur Δx bëhet gjithnjë e më i vogël. Shikojmë gjithashtu se është më e lehtë të llogaritet dy se sa Δy. Për funksione më të komplikuara mund të jetë e pamundur të llogaritet Δy në mënyrë të saktë. Në të tilla raste përafrimi me diferencialin është mjaft i përdorshëm.

Në shënimin e diferencialit, përafrimi linear mund të shkruhet si

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Për shembull, për funksionin $f(x) = \sqrt{x+3}$, ne kemi

$$dy = f'(x)dx = \frac{dx}{2\sqrt{x+3}}$$

Në qoftë se $a = 1$ dhe $dx = \Delta x = 0.05$, atëherë

$$dy = \frac{0.05}{2\sqrt{1+3}} = 0.0125$$

dhe $\sqrt{4.05} = f(1.05) \approx f(1) + dy = 2.0125$.

□

Shembulli ynë i fundit ilustron përdorimin e diferencialit në vlerësimin e gabimit që bëhet gjatë llogaritjeve të përafërta.

Shembull 4.56. *Rrezja e një sfere u mat dhe u gjet se është* 21*cm me gabim të mundshëm në matje të shumtën* 0.05*cm. Cili është gabimi maksimal në përdorimin e kësaj rrezeje për të llogaritur vëllimin e sferës?*

Zgjidhje: Në qoftë se rrezja e sferës është r atëherë vëllimi i sferës është $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Nëne gabimi në vlerën e llogaritur të r i shënuar me $dr = \Delta r$ atëherë gabimi korrespondues në vlerën e llogaritur të V është ΔV, i cili mund të përafrohet me diferencialin

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Kur $r = 21$ dhe $dr = 0.05$, ky gabim bëhet

$$dV = 4\pi(21)^2 0.05 = 277$$

Gabimi maksimal në llogaritjen e vëllimit është rreth $277 cm^3$.

□

Vërejtje 4.6. *Megjithëse gabimi në këtë shembull mund të duket i madh, një pamje më të mirë të gabimit e jep gabimi relativ, i cili njehsohet duke pjestuar gabimin me vëllimin total:*

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}$$

Prandaj gabimi relativ në llogaritjen e vëllimit është rreth tre herë më i madh se sa gabimi reativ i rrezes. Në shembullin e mësipërm gabimi relativ i rrezes është afërsisht $dr/r = 0.05/21 \approx 0.0024$ *dhe ky sjell një gabim relativ reth* 0.007 *për vëllimin. Gabimet gjithashtu mund të paraqiten edhe në përqindje.*

Ushtrime:

Gjeni linearizimin $L(x)$ të funksionit në a.

1.
$$f(x) = x^4 + 3x^2, \quad a = -1$$

2. $f(x) = \ln x$, $a = 1$

3. $f(x) = \cos x$, $a = \pi/2$

4. $f(x) = x^{3/4}$, $a = 16$

5. *Gjeni një përafrim linear të funksionit* $f(x) = \sqrt{1-x}$ *në* $a = 0$ *dhe përdoreni për të përafruar numrat* $\sqrt{0.9}$ *dhe* $\sqrt{0.99}$.

Ilustrojeni duke ndërtuar grafikun e $f(x)$ dhe të tangentes.

6. *Gjeni një përafrim linear të funksionit $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ në $a = 0$ dhe përdoreni për të përafruar numrat $\sqrt[3]{0.95}$ dhe $\sqrt[3]{1.1}$. Ilustrojeni duke ndërtuar grafikun e $f(x)$ dhe të tangentes.*

Verifikoni përafrimin linear në $a = 0$. Dhe përcaktoni më pas vlerat e x për të cilat përafrimi linear ndryshon nga vlera e vërtetë me jo më shumë se 0.1.

7.
$$\sqrt[3]{1-x} \approx 1 - \frac{1}{3}x$$

8. $\tan x \approx x$

9. $1/(1+2x)^4 \approx 1 - 8x$

10. $e^x \approx 1 + x$

Gjeni diferncialin e secilit funksion.

11. $y = x^2 \sin 2x$

12. $y = \ln \sqrt{1+t^2}$

13. $y = x/(1+2x)$

14. $y = e^{-t} sint$

15. $y = \frac{x-1}{x+1}$

16. $y = (1+x^2)^{-3}$

17. $y = e^{\cot x}$

18. $y = \sqrt{1 - \ln x}$

Gjeni diferencialin dy dhe më pas vlerësoni dy për vlerat e dhëna të x dhe dx.

19. $y = e^{x/5}$, $x = 0$, $dx = 0.1$

20. $y = 1/(x-1)$, $x = 2$, $dx = -0.01$

21. $y = \cot x$, $x = \pi/4$, $dx = -0.1$

22. $y = \sin x$, $x = \pi/6$, $dx = 0.05$

Llogarisni Δy dhe dy për vlerat e dhëna të x dhe $dx = \Delta x$.

23. $y = x + x^3$, $x = 2$, $\Delta x = -0.4$

24. $y = \sqrt[4]{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 1$

25. $y = 5/x$, $x = 3$, $\Delta x = 1$

26. $y = e^x$, $x = 0$, $\Delta x = 0.5$

Përdorni përafrimin linear (ose diferencial) për të vlerësuar numrat e dhënë.

27. $(2.001)^5$

28. $e^{-0.015}$

29. $\sqrt{99.8}$

Shpjegoni në termat e përafrmit linear apo diferencial se përse përafrimet e mëposhtme janë të arsyeshme.

30. $\sec 0.08 \approx 1$

31. $(1.01)^6 \approx 1.06$

32. $\ln 1.05 \approx 0.05$

33. *Le të jenë $f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = e^{-2x}$, $h(x) = 1 + \ln(1-2x)$.*
(a) Gjeni linearizimin për $f(x)$, $g(x)$ dhe h në $a = 0$. Çfarë vëreni? Si e shpjegoni?
(b) Ndërtoni grafikët e $f(x)$, $g(x)$, dhe h si dhe të përafrimeve lineare të tyre. Për cilin funksion përafrimi linear është me i miri? Po më i keqi? Arsyetojeni këtë.

34. *Rrezja e një disku rrethor jepet 24cm me një gabim maksimal në matje prej 0.2cm.*
(a) Përdorni diferencialin për të vlerësuar syprinën e diskut.
(b) Cili është gabimi relativ? Cila është përqindja e gabimit?

35. *Perimetri i një sfere është matur dhe është 84cm më një gabim të mundshëm prej 0.5cm.*
(a) Përdorni diferencialin për të vlerësuar gabimin maksimal në llogaritjen e syprinës së sferës. Cili është gabimi relativ?
(b) Përdorni diferencialin për të llogaritur gabimin maksimal në lloagaritjen e vëllimit të sferës. Cili është gabimi relativ?

36. *Një brinjë e një trekëndëshi të drejtë dihet se është 20cm e gjatë dhe këndi përballë është 30°, me gabim të mundshëm prej ±1°.*
(a) Përdorni diferencialin për të llogaritur gabimin e bërë në njehsimin e hipotenuzës.
(b) Cila është përqindja e gabimit?

37. *Supozojmë se nuk kemi një formulë për $g(x)$ por dimë se $g(2) = -4$ dhe $g'(x) = \sqrt{x^2+5}$ për të gjitha x.*
(a) Përdorni përafrimin linear për të vlerësuar $g(1.95)$ dhe $g(2.05)$.
(b) A janë vlerësimet e pikës (a) shumë të mëdha apo të vogla? Shpjegojeni.

Kapitulli 5

Aplikimet e Derivatit

Ne kemi parë disa nga aplikimet e derivatit, por tani që njohim rregullat e derivimit e kemi më të thjeshtë për të studiuar aplikimet e derivatit më thellësisht. Kështu ne do të mësojmë se si derivatet ndikojnë në sjelljen e grafikut të funksionit, dhe se si ndihmojnë në gjetjen e vlerës maksimale dhe minimale të funksionit. Shumë probleme praktike na kërkojnë minimizim ose maksimizimin e madhësive të ndryshme. Për shembull në ekonomi ne jemi të interesuar të minimizojmë koston dhe te maksimizojmë fitimin. Pra, problemi që na shtrohet është që të gjejmë një mënyrë zgjidhjeje sa më optimale për një situatë të caktuar. Për këtë ne duhet të saktësojmë nga ana matematike se çdo të thotë një situate optimale dhe si mund të behet kjo praktikisht.

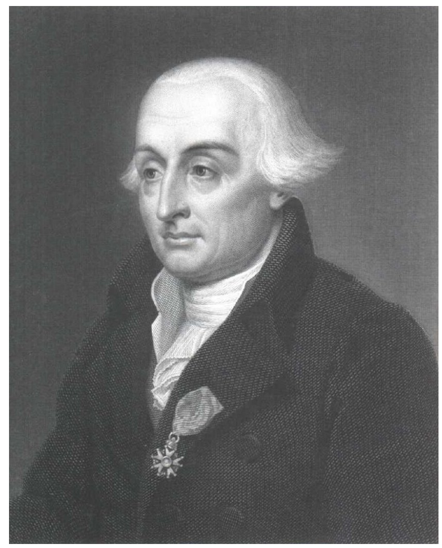


Figura 5.1: Joseph Louis Lagrange

5.1 Vlerat minimum dhe maksimum

Disa nga aplikimet më të rëndësishme të kalkulusit diferencial janë problemet e optimizimit. Pra, të gjejmë një mënyrën optimale për të bërë diçka. Këto probleme mund të reduktohen në gjetjen e vlerave maksimale dhe minimale të një funksioni në rastet ku ne njohim një funksion që përshkruan saktë situatën që po përpiqemi të optimizojmë. Le të shpjegojmë fillimisht se çdo të thotë vlerë minimum dhe maksimum për një funksion të caktuar.

Përkufizim 5.1. Një funksion $f(x)$ ka një **maksimum absolut** në pikën c në qoftë se $f(c) \geq f(x)$ për të gjitha x në D, ku D është bashkësia e përkufizimit të $f(x)$. Numri $f(c)$ quhet **vlera maksimum** e $f(x)$ në D. Në mënyrë të ngjashme, $f(x)$ ka një **minimum absolut** në pikën c në qoftë se $f(c) \leq f(x)$ për të gjithë x në D dhe numri $f(c)$ quhet **vlera minimum** e $f(x)$ në D. Vlerat maksimum dhe minimum të $f(x)$ quhen **vlerat ekstreme** të $f(x)$.

Për shembull, Fig. 5.2 tregon grafikun e një funksioni $f(x)$ me maksimum absolut në c dhe minimum absolut në d. Vëmë re se $(c, f(c))$ është pika më e lartë e grafikut dhe $(d, f(d))$ pika më e "ulët". Në Fig. 5.2, në qoftë se shqyrtojmë vetëm vlerat e x pranë c, atëherë $f(c)$ është vlera më e madhe ndër të gjitha $f(x)$ dhe quhet vlera **maksimum lokal** e $f(x)$. Në mënyrë të njëjtë, $f(d)$ quhet vlera **minimum lokal** e $f(x)$ sepse $f(d) \leq f(x)$ për x pranë d.

Përkufizim 5.2. Një funksion $f(x)$ ka **maksimum lokal** (ose **maksimum relativ**) në c në qoftë se

$$f(c) \geq f(x), \; \textit{kur } x \textit{ është pranë } c$$

(kjo do të thotë se $f(c) \geq f(x)$ për të gjitha x breda një intervali të hapur që përmban c.) Në mënyrë të ngjashme, $f(x)$ ka një **minimum lokal** në c në qoftë se

$$f(c) \leq f(x) \; \textit{për të gjitha } x \textit{ pranë } c\,.$$

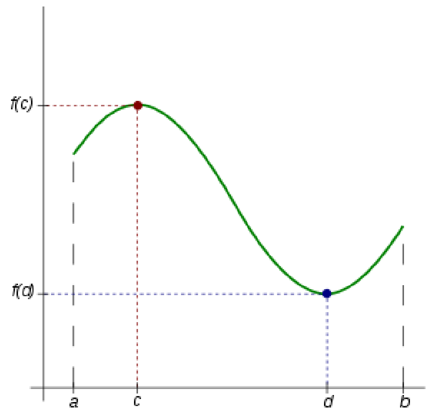


Figura 5.2: Vlerat ekstreme të funksionit

Shembull 5.1. *Funksioni*

$$f(x) = \cos x$$

merr vlerën e vet maksimale 1 *(lokale dhe absolute) në një numër të pafundëm pikash, meqënëse* $\cos 2n\pi = 1$ *për çdo numër të plotë n dhe* $-1 \leq \cos x \leq 1$ *për të gjitha x. Në mënyrë të ngjashme,* $\cos(2n+1)\pi = -1$ *është vlera minimale, ku n është një numër i plotë.*

□

Shembull 5.2. *Në qoftë se* $f(x) = x^2$*, atëherë* $f(x) \geq f(0)$ *sepse* $x^2 \geq 0$ *për të gjitha x. Atëherë,* $f(0) = 0$ *vlera minimum absolute (dhe lokal)e* $f(x)$*. Kjo korrespondon me faktin se origjina është pika më e ulët e parabolës* $y = x^2$*. Por nuk ka pikë më të lartë, kështu që ky funksion nuk ka vlerë maksimum.*

□

Shembull 5.3. *Nga grafiku i funksionit* $f(x) = x^3$*, shohim se ky funksion nuk ka as vlerë absolute minimumi as vlerë absolute maksimumi. Në fakt nuk ka as vlera ekstreme lokale.*

□

Kemi parë se disa funksione kanë vlera ekstreme dhe disa të tjerë jo. Teorema në vazhdim jep kushtet kur një funksion ka vlera ekstreme.

Teorema 5.1 (Teorema e vlerave ekstreme)**.** *Në qoftë se* $f(x)$ *është i vazhdueshëm në një interval të mbyllur* $[a, b]$*, atëherë* $f(x)$ *merr një vlerë maksimumi absolut* $f(c)$ *dhe një vlerë minimumi absolut* $f(d)$ *në numrat c dhe d në* $[a, b]$*.*

Vërtetim: Detyrë lexuesit.

□

Kjo teoremë është ilustruar në Fig. 5.2. Vëmë re se një vlerë ekstremumi mund të merret më shumë se një herë. Gjithashtu vërtetësia e kësaj teoreme është e qartë nga ana intuitive.

Teorema 5.2 (Teorema Ferma)**.** *Në qoftë se* $f(x)$ *ka një maksimum apo minimum në c, dhe* $f'(c)$ *ekziston, atëherë* $f'(c) = 0$

Vërtetim: Supozojmë se $f(x)$ ka maksimum lokal në c. Atëherë, në lidhje me përkufizimin, $f(c) \geq f(x)$ në qoftë se x është mjaft afër c. Pra, në qoftë se h është shumë afër 0, qoftë kjo pozitive apo negative, atëherë

$$f(c) \geq f(c+h)$$

e prej këtej

$$f(c+h) - f(c) \leq 0 \tag{5.1}$$

Ne mund të pjestojmë të dy anët e mosbarazimit me një vlerë pozitive. Prandaj në qoftë se $h > 0$ dhe shumë të vogël, kemi

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Duke marrë limitin e djathtë të të dy anëve të këtij mosbarazimi, marrim

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} 0 = 0$$

Por meqënëse $f'(c)$ ekziston, kemi

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

dhe kështu që kemi treguar se $f'(c) \leq 0$.

Në qoftë se $h < 0$, atëherë mosbarazimin (5. 1) ndryshon kah kur pjestojmë me h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad h < 0$$

Kështu që duke marrë limitin e majtë, kemi

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Kemi treguar se $f'(c) \leq 0$ dhe $f'(c) \geq 0$. Meqë të dy këto mosbarazime duhet të jenë të vërteta, e vetmja mundësi mbetet të jetë $f'(c) = 0$.

□

Ne vërtetuam teoremën Ferma në rastin e maksimumit lokal. Rasti i minimumit lokal mund të tregohet po njëlloj. Shembujt në vazhdim na tregojnë që teorema Ferma duhet lexuar me kujdes. Ne s'mund të presim të lokalizojmë vlerat ekstreme thjesht duke barazuar me zero derivatin e funksionit e më pas të zgjidhim ekuacionin $f'(x) = 0$ në lidhje me x.

Shembull 5.4. *Në qoftë se $f(x) = x^3$, atëherë $f'(x) = 3x^2$, prandaj $f'(0) = 0$. Por $f(x)$ nuk ka as maksimum as minimum në 0. Fakti që $f'(0) = 0$ thjesht do të thotë se kurba $y = x^3$ ka tangente horizontale në pikën $(0, 0)$. Në vend që të ketë minimum apo maksimum në $(0, 0)$, kurba e kalon tangenten horizontale pikërisht në atë pikë.*

□

Shembull 5.5. *Funksioni $f(x) = |x|$ ka vlerë minimumi (absolute dhe lokale) në 0, por ajo vlerë nuk mund të gjendet nga zgjidhja $f'(x) = 0$ sepse $f'(0)$ nuk ekziston.*

□

Vërejtje 5.1. *Dy shembujt e fundit na tregojnë se duhet të jemi shumë të kujdesshëm në përdorimin e teoremës Ferma. I pari nga këta tregon se edhe pse $f'(c) = 0$ kjo nuk mjafton që funksioni të ketë minimum apo maksimum në c. Me fjalë të tjera e anasjellta e teoremës Ferma nuk është e vërtetë. Për më tepër, mund të ketë vlerë ekstremumi edhe kur derivati nuk ekziston.*

Teorema Ferma na sugjeron që ta fillojmë kërkimin e ekstremeve në pikat ku derivati anullohet apo nuk ekziston. Të tilla pika kanë një emërtim të veçantë.

Përkufizim 5.3. **Pikë kritike** e një funksioni $f(x)$ quhet një numër $x = c$ nga bashkësia e përkufizimit të $f(x)$ e tillë që $f'(c) = 0$ ose $f'(c)$ nuk ekziston.

Shembull 5.6. *Gjeni pikat kritike të funksionit*

$$f(x) = x^{3/5}(4 - x).$$

Zgjidhje: Rregulli i prodhimit na jep

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-2/5}(4-x) + x^{3/5}(-1) = \frac{3(4-x)}{5x^{2/5}} - x^{3/5} = \frac{3(4-x)-5x}{5x^{2/5}} = \frac{12-8x}{5x^{2/5}}$$

Prej nga $f'(x) = 0$ kur $12 - 8x = 0$, domethënë, $x = \frac{3}{2}$, dhe $f'(x)$ nuk ekziston kur $x = 0$. Kështu që numrat kritikë janë $\frac{3}{2}$ dhe 0.

□

Teorema Ferma mund të riformulohet si më poshtë:

Teorema 5.3 (Ferma). *Në qoftë se $f(x)$ ka maksimum apo minimum lokal në c, atëherë c është numër kritik.*

Për të gjetur maksimumin absolut apo minimumin absolut të një funksioni të vazhdueshëm në një interval të mbyllur, vëmë re se gjithashtu mund të jetë edhe lokal apo një pike skajore e intervalit. Prandaj procedura e mëposhtme ka vend.

5.1.1 Vlerat kritike në një interval të mbyllur

Për të gjetur vlerën maksimum dhe minimum të një funksioni $f(x)$ në një interval të mbyllur $[a, b]$ veprojme si me poshtë:

1. Gjejmë vlerat e $f(x)$ në numrat kritikë të $f(x)$ në (a, b).
2. Gjejmë vlerat e $f(x)$ në skajet e intervalit.
3. Vlera më e madhe e llogaritur nga hapat 1 dhe 2 është vlera maksimum absolut; më e vogla e këtyre vlerave është vlera minimum absolut.

Shembull 5.7. *Gjeni vlerën minimum dhe maksimum absolut të funksionit*

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \;\textit{për}\; -\frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

Zgjidhje: Meqë $f(x)$ është i vazhdueshëm në $[-\frac{1}{2}, 4]$, atëherë

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, \;\textit{dhe}\; f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

Meqë $f'(x)$ ekziston për të gjitha x, të vetmit numra kritikë janë kur derivati anullohet, pra $f'(x) = 0$, domethënë $x = 0$ dhe $x = 2$. Vëmë re se secili nga numrat kritikë ndodhet në intervalin $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$. Vlerat e funksionit në këto numra kritikë janë

$$f(0) = 1 \;\textit{dhe}\; f(2) = -3$$

Vlerat e $f(x)$ në skajet e intervalit janë

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \;\textit{dhe}\; f(4) = 17.$$

Duke krahasuar këto katër vlera, shohim se vlera e maksimumit asolut është $f(4) = 17$ dhe vlera e minimumit absolut është $f(2) = -3$. Vëmë re se në këtë shembull maksimumi absolut ndodh në një skaj të intervalit të mbyllur ndërsa minimumi në një pikë kritike.

□

Në qoftë se ju keni një makinë llogaritëse grafike apo një kompjuter me software për grafikë, është e mundur të llogariten vlerat minimum dhe maksimum shumë lehtë. Por sikurse tregohet në shembullin në vazhdim, kalkulusi nevojitet për të gjetur vlerat e sakta.

Shembull 5.8. *Gjeni vlerat minimum dhe maksimum absolut të funksionit*

$$f(x) = x - 2\sin x, \;\textit{për}\; 0 \leq x \leq 2\pi$$

Zgjidhje: Funksioni $f(x) = x - 2\sin x$ është i vazhdueshëm në $[0, 2\pi]$. Meqë $f'(x) = 1 - 2\cos x$, ne kemi $f'(x) = 0$ kur $\cos x = \frac{1}{2}$ dhe kjo ndodh kur $x = \frac{\pi}{3}$ ose $\frac{5\pi}{3}$. Vlerat e $f(x)$ në këto pika kritike janë

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \approx -0.684853$$

dhe

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 6.968039$$

Vlerat e $f(x)$ në skaje janë

$$f(0) = 0 \textit{ dhe } f(2\pi) = 2\pi \approx 6.28$$

Duke krahasuar këto katër numra dhe duke përdorur metodën e intervalit të mbyllur, shohim se vlera minimum absolut është $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$ dhe vlera maksimum absolut është $f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3}$.

□

Ushtrime:

1. *Shpjegoni ndryshimin ndërmjet maksimumit absolut dhe maksimumit lokal.*

2. *Supozojmë se $f(x)$ është një funksion i vazhdueshëm në një interval të mbyllur $[a, b]$.*

(a) Cila teoremë siguron ekzistencën e një maksimumi absolut dhe të një minimumi absolut për $f(x)$?

(b) Çfarë hapash duhet të ndiqni për të gjetur këto minimum dhe maksimum absolut?

3. *Ndërtoni grafikun e një funksioni $f(x)$ i cili është i vazhdueshëm në $[1, 5]$ dhe ka minimum absolut në 2, maksimum absolut në 3, minimum lokal në 4.*

4. *Ndërtoni grafikun e një funksioni $f(x)$ i cili është i vazhdueshëm në $[1, 5]$ dhe ka minimum absolut në 1, maksimum absolut në 5, minimum lokal në 4.*

5. *Ndërtoni grafikun e një funksioni $f(x)$ i cili është i vazhdueshëm në $[1, 5]$ dhe ka minimum absolut në 2, maksimum absolut në 5, maksimum lokal në 3, dhe minimum lokal në 2 dhe 4.*

6. *Ndërtoni grafikun e një funksioni $f(x)$ i cili është i vazhdueshëm në $[1, 5]$ dhe nuk ka minimum apo maksimum lokal, por 2 dhe 4 janë pika kritike.*

7. *(a) Ndërtoni grafikun e një funksioni i cili ka maksimum lokal në 2 dhe është i derivueshëm në 2.*

(b) Ndërtoni grafikun e një funksioni i cili ka maksimum lokal në 2 dhe është i vazhdueshëm në 2 por jo i derivueshëm në 2.

(c) Ndërtoni grafikun e një funksioni që ka maksimum lokal në 2 dhe nuk është i vazhdueshëm në 2.

8. *(a) Ndërtoni grafikun e një funksioni në $[-1, 2]$ i cili ka një maksimum absolut por nuk ka maksimume lokale.*

(b) Ndërtoni grafikun e një funksioni në $[-1, 2]$ i cili ka një maksimum absolut por nuk ka minimum absolut.

9. *(a) Ndërtoni grafikun e një funksioni i cili ka dy maksimume lokale dhe një minimum lokal dhe jo minimum absolut.*

(b) Ndërtoni grafikun e një funksioni i cili ka tre minimume lokale, dy maksimume lokale, dhe shtatë numra kritikë.

Ndërtoni grafikun e funksionit të dhënë dhe përdoreni për të gjetur maksimumet lokale dhe absolut, si dhe minimumet lokale dhe absolut të tij.

10. $f(x) = 8 - 3x,\ x \geq 1$

11. $f(x) = 3 - 2x,\ x \leq 5$

12. $f(x) = x^2,\ 0 < x < 2$

13. $f(x) = x^2,\ 0 < x \leq 2$

14. $f(x) = x^2,\ 0 \leq x < 2$

15. $f(x) = x^2,\ 0 \leq x \leq 2$

16. $f(x) = x^2,\ -3 \leq x \leq 2$

17. $f(x) = 1 + (x + 1)^2,\ -2 \leq x < 5$

18. $f(x) = \ln x,\ 0 < x \leq 2$

19. $f(x) = \cos x,\ -3\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$

20. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

21. $f(x) = e^x$

22.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \textit{në qoftë se} \quad 0 \leq x < 2 \\ 2x - 4 & \textit{në qoftë se} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

23.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \textit{në qoftë se} \quad -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \textit{në qoftë se} \quad 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Gjeni numrat kritikë për funksionet.

24. $f(x) = 5x^2 + 4x$

25. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

26. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$

27. $f(x) = x^3 + x^2 + x$

28. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 6x^2$

29. $f(x) = |3x - 4|$

30. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$

31. $f(t) = \frac{t-1}{t^2+4}$

32. $h(x) = x^{3/4} - 2x^{1/4}$

33. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

34. $f(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

35. $f(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

36. $f(x) = 2\cos x + \sin^2 x$

37. $f(x) = 4x - \tan x$

38. $f(x) = x^2 e^{-3x}$

39. $f(x) = x^{-2} \ln x$

Është dhënë formula për derivatin e funksionit $f(x)$. Sa numra kritikë ka $f(x)$

40.

$$f'(x) = 5e^{-0.1|x|} \sin x - 1$$

41.

$$f'(x) = \frac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$$

Gjeni vlerat e maksimumit dhe minimumit absolut të $f(x)$ në intervalin e dhënë.

42. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ $[0, 3]$

43. $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $[0, 3]$

44. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2, 3]$

45. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, $[-1, 4]$

46. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$, $[-2, 3]$

47. $f(x) = (x^2 - 1)^3$, $[-1, 2]$

48. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $[0, 2]$

49. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$, $[-4, 4]$

50. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$, $[-1, 2]$

51. $f(x) = \sqrt[3]{x}(8 - x)$, $[0, 8]$

52. $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$, $[0, \pi/2]$

53. $f(x) = x + \cot(x/2)$, $[\pi/4, 7\pi/4]$

54. $f(x) = xe^{-x^2/8}$, $[-1, 4]$

55. $f(x) = x - \ln x$, $[\frac{1}{2}, 2]$

56. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$, $[-1, 1]$

57. $f(x) = e^{-x} = e^{-2x}$, $[0, 1]$

58. *Në qoftë se a dhe b janë dy numra pozitivë, gjeni vlerën maksimum të* $f(x) = x^a(1 - x)^b$, $0 \leq x \leq 1$.

59. *Përdorni grafikun për të vlerësuar numrat kritikë të* $f(x) = |x^3 - 3x^2 + 2|$ *me saktësi deri në një shifër pas presjes dhjetore.*

60. *(a) Përdorni grafikun për të vlerësuar vlerat maksimum dhe minimum të funksionit me saktësi deri në dy shifra pas presjes dhjetore.*

(b) Përdorni kalkulusin për të gjetur vlerat e sakta të maksimumit dhe minimumit.

$$f(x) = x^5 - x^3 + 2, \quad -1 \leq x \leq 1$$

61. $f(x) = e^{x^3-x}$, $-1 \leq x \leq 0$

62. $f(x) = x\sqrt{x - x^2}$

63. $f(x) = x - 2\cos x$, $-2 \leq x \leq 0$

64. *Vërtetoni se 5 është numër kritik për funksionin*

$$h(x) = 2 + (x - 5)^3$$

65. *Në qoftë se* $f(x)$ *ka një vlerë minimum në* c, *tregoni se funksioni* $g(x) = -f(x)$ *ka vlerë maksimum në* c.

66. *Një funksion kubik është një polinom i gradës së tretë; pra ka formën* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *ku* $a \neq 0$.

(a) Vërtetoni se funksioni kubik mund të ketë dy, një, ose asnjë numër kritik. Jepni shembuj për secilin rast.

(b) Sa vlera ekstreme lokale mund të ketë një funksion kubik?

5.2 Teorema e Vlerës së Mesme

Do të shohim se shumë nga rezultatet e këtij kapitulli varen nga teorema e Langranzhit. Por për të mbërritur në këtë teoremë na duhet fillimisht rezultati i mëposhtëm.

Teorema 5.4 (Teorema Role). *Le të jetë $f(x)$ një funksion i cili plotëson kushtet:*

1. *$f(x)$ është i vazhdueshëm në intervalin e mbyllur $[a, b]$.*

2. *$f(x)$ është i derivueshëm në intervalin e hapur (a, b).*

3. *$f(a) = f(b)$*

Atëherë ekziston një numër c në (a, b) i tillë që $f'(c) = 0$.

Vërtetim: Kemi tre raste,

Rasti I $f(x) = k$**, një konstante** Atëherë $f'(x) = 0$ prandaj numër c mund të merret secili nga numrat e intervalit (a, b).

Rasti II $f(x) > f(a)$ për ndonjë x në (a, b). Nga teorema e vlerave ekstreme $f(x)$ ka vlerë maksimum në $[a, b]$. Meqë $f(a) = f(b)$ duhet pritur që vlera maksimum të merret në një pikë c në intervalin e hapur (a, b). Atëherë, $f(x)$ ka maksimum lokal në c dhe nga kushti 2, $f(x)$ është i derivueshëm në c. E prej këtej nga Teorema Ferma, $f'(c) = 0$.

Rasti III $f(x) < f(a)$ për ndonjë x në (a, b). Nga Teorema e vlerës ekstreme, $f(x)$ ka një vlerë minimumi në $[a, b]$ dhe meqënëse $f(a) = f(b)$ pritet që ky minimum të arrihet në një pikë të (a, b). Përsëri nga Teorema Ferma $f'(c) = 0$.

Kjo përfundon vërtetimin e teoremës.

□

Më poshtë po japim dy ilustrime grafike të Teoremës Role.

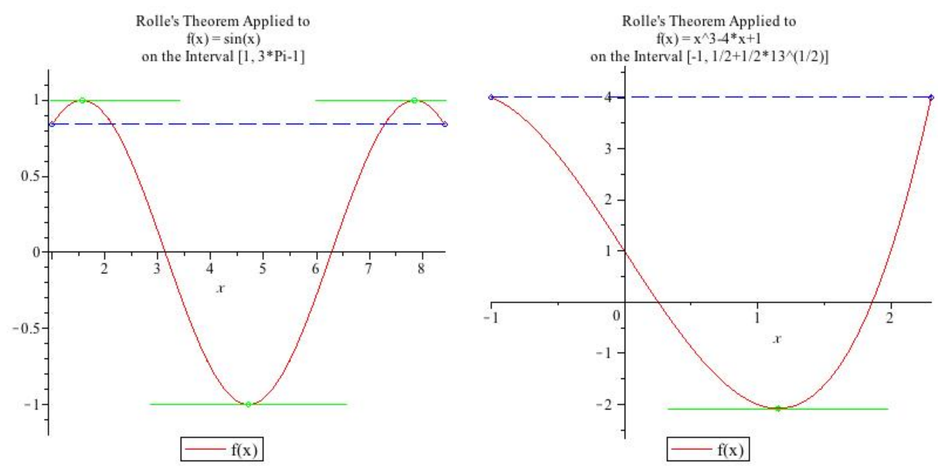


Figura 5.3: Ilustrime grafike të Teoremës Role.

Shembull 5.9. *Le të aplikojmë Teoremën Role ndaj funksionit pozicion $s = f(t)$ të një objekti lëvizës. Në qoftë se objekti është në të njëjtin pozicion në dy çaste të ndryshme $t = a$ dhe $t = b$, atëherë $f(a) = f(b)$. Teorema Role thotë se ka një çast kohe $t = c$ ndërmjet a dhe b ku $f'(c) = 0$; që do të thotë se shpejtësia është 0.*

□

Shembull 5.10. *Vërtetoni se ekuacioni*

$$x^3 + x - 1 = 0$$

ka vetëm një rrënjë reale.

Zgjidhje: Fillimisht përdorim Teoremën mbi të mesmen për të treguar se ekziston një rrënjë. Le të jetë

$$f(x) = x^3 + x - 1 \, .$$

Atëherë, $f(0) = -1 < 0$ dhe $f(1) = 1 > 0$. Meqë $f(x)$ është një funksion polinomial atëhëre ai është i vazhdueshëm dhe nga teorema mbi të mesmen del se ka një numër c ndërmjet 0 dhe 1 të tillë që $f(c) = 0$. Prandaj ekuacioni i dhënë ka një rrënjë.

Për të treguar se ekuacioni nuk ka rrënjë tjetër, ne përdorim Teoremën Role dhe arrijmë në një kontradiksion. Supozojmë se ai ka dy rrënjë a dhe b. Atëherë, $f(a) = f(b) = 0$ dhe meqënëse $f(x)$ është polinom, ai është i derivueshëm në (a, b) dhe i vazhdueshëm në $[a, b]$. Kështu që plotësohen të tre kushtet e teoremës Role. E pra ka një numër c ndërmjet a dhe b të tillë që $f'(c) = 0$. Por

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \geq 1 \;\; \textit{për çdo } x \in \mathbb{R}$$

Meqë $x^2 \geq 0$ del se $f'(x)$ s'mund të bëhet kurrë zero. Kjo na çon në një kontradiksion, i cili erdhi si rezulat i supozimit se polinomi ka dy rrënjë. Kështu që ekuacioni s'mund të ketë dy rrënjë reale.

□

Përdorimi kryesor i Teoremës Role është në vërtetimin e teoremës së rëndësishme e cila u vërtetua fillimisht nga një tjetër matematikan francez, Jozef-Louis Langranzh.

Teorema 5.5 (Teorema Langranzh ose Teorema e Vlerës së Mesme)**.** *Le të jetë $f(x)$ një funksion i cili plotëson kushtet*

1. *$f(x)$ është i vazhdueshëm në intervalin e mbyllur $[a, b]$.*
2. *$f(x)$ është i derivueshëm në intervalin e hapur (a, b).*

Atëherë ekziston një numër c në intervalin (a, b) i tillë që

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{5.2}$$

ose në mënyrë ekuivalente

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{5.3}$$

Vërtetim: Aplikojmë teoremën Role tek një funksion i ri h i ndërtuar si diferencë ndërmjet $f(x)$ dhe funksionit grafiku i të cilit është sekantja AB. Duke përdorur Ek. (5.3), shohim se ekuacioni i sekantes AB mund të shkruhet si

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

ose si

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Kështu që,

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{5.4}$$

Fillimisht duhet të verifikojmë në qoftë se h plotëson kushtet e Teoremës Role.

Së pari, funksioni h është i vazhdueshëm në intervalin e mbyllur $[a, b]$ sepse është shumë e $f(x)$ dhe një polinomi të gradës së parë, secili prej tyre është funksion i vazhdueshëm.

Së dyti, funksioni h është funksion i derivueshëm në intervalin e hapur (a, b) sepse dhe $f(x)$ dhe polinomi i gradës së parë janë të derivueshëm. Në fakt ne mund ta njehsojmë direkt h' dhe kemi:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Së treti,

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 \\ h(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - [f(b) - f(a)] = 0. \end{aligned}$$

Pra, $h(b) = h(a)$. Meqë h plotëson kushtet e Teoremës Role atëherë teorema thotë se ekziston një numër c në (a, b) i tillë që $h'(c) = 0$. Prej nga

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dhe prej këtej

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Kjo përfundon vërtetimin e teoremës.

□

Le të shohim tani disa ilustrime grafike të Teoremës së Vlerës së Mesme.

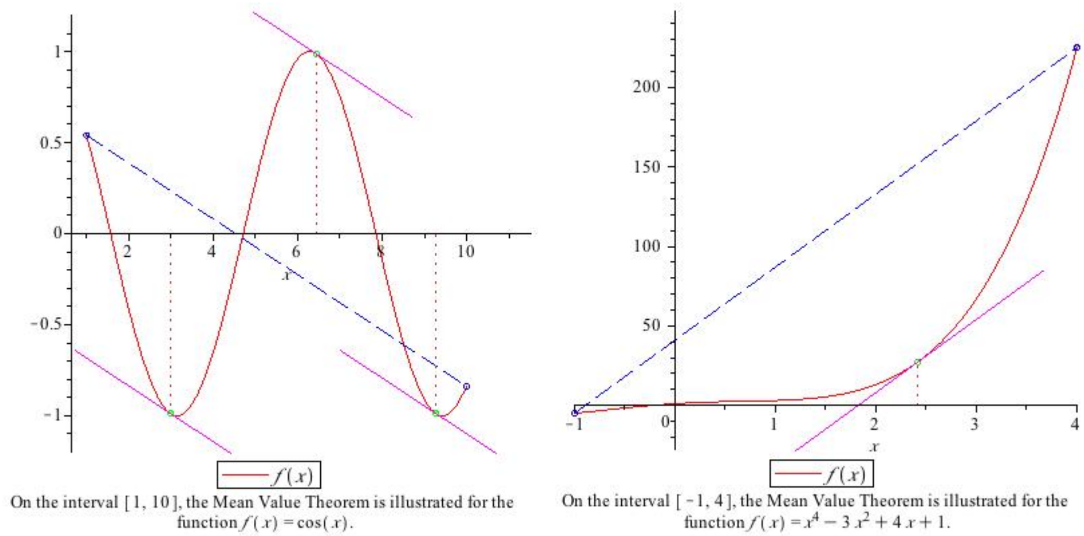


Figura 5.4: Ilustrime grafike të Teoremës së Vlerës së Mesme.

Shembull 5.11. *Për të ilustruar teoremën Langranzh me një funksion të veçantë, le të shqyrtojmë funksionin*

$$f(x) = x^3 - x, \text{ për } a = 0, \text{ dhe } b = 2\,.$$

Meqë $f(x)$ është një polinom, ai është i vazhdueshëm dhe i derivueshëm për të gjitha x, e kështu edhe në $[0, 2]$ dhe $(0, 2)$ përkatësisht. Nga teorema Langranzh ekziston një numër c në intervalin $(0, 2)$ i tillë që

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

Tani $f(2) = 6$ dhe $f(0) = 0$, dhe $f'(x) = 3x^2 - 1$, kështu që ekuacioni bëhet

$$6 = (3c^2 - 1)2 = 6c^2 - 2$$

i cili na jep $c^2 = \frac{4}{3}$, pra $c = \pm 2/\sqrt{3}$. Por c duhet të shtrihet në $(0, 2)$, kështu që $c = 2\sqrt{3}$.

□

Shembull 5.12. *Në qoftë se një objekt lëviz përgjatë një vije të drejtë me funksion të pozicionit $s = f(t)$, atëherë shpejtësia mesatare ndërmjet $t = a$ dhe $t = b$ është*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

dhe shpejtësia në $t = c$ është $f'(c)$. Prandaj teorema e Langranzhit na thotë se në një çast $t = c$ ndërmjet $t = a$ dhe $t = b$ shpejtësia e castit $f'(c)$ është e njëjtë me shpejtësinë mesatare. Për shembull, në qoftë se makina ka udhëtuar 180km në dy orë atëherë shpejtësi matësi duhet të ketë lexuar të paktën një herë 90km/h.

Në përgjithësi, Teorema Langranzh mund të interpretohet duke thënë se ekziston një numër tek i cili raporti i ndryshimit të çastit është e barabartë shkallën mesatare të ndryshimit gjatë një intervali. Kuptimi themelor i kësaj teoreme është të na mundësojë përftimin e informacionit për një funksion duke u nisur nga informacioni në lidhje me derivatin e tij.

Shembull 5.13. *Supozojmë se $f(0) = -3$ dhe $f'(x) \leq 5$ për të gjitha vlerat e x-it. Sa e madhe mund të jetë vlera $f(2)$?*

Zgjidhje: Na është dhënë se $f(x)$ është i derivueshëm kudo që do të thotë që është edhe i vazhdueshëm. Ne mund të aplikojmë teoremën Langranzh në intervalin $[0, 2]$. Ekziston një numër c i tillë që

$$f(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

kështu që $f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$. Na është dhënë $f'(x) \leq 5$ për të gjitha x, kështu që në veçanti ne e dimë se $f'(c) \leq 5$. Duke shumëzuar të dy anët e këtij mosbarazimi me 2, kemi $2f'(c) \leq 10$, prandaj

$$f(2) = -3 + 2f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

Pra, vlera më e madhe e mundshme për $f(2)$ është 7.

□

Kjo teoremë mund të përdoret për të sistemuar disa fakte bazë në kalkulusin diferencial. Një nga këto fakte bazë është teorema në vazhdim. Të tjera do shihen në paragrafet në vijim.

Teorema 5.6. *Në qoftë se $f'(x) = 0$ për të gjitha x në intervalin (a, b) atëherë $f(x)$ është konstant në (a, b).*

Vërtetim: Le të jenë x_1 dhe x_2 dy numra të çfarëdoshëm në (a, b) të tillë që $x_1 < x_2$. Meqë $f(x)$ është i derivueshëm në (a, b) ai është i derivueshëm edhe në (x_1, x_2) dhe i vazhdueshëm në $[x_1, x_2]$. Duke zbatuar teoremën Langranzh për $f(x)$ në intervalin $[x_1, x_2]$, ne gjejmë numrin c të tillë që $x_1 < c < x_2$ dhe

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{5.5}$$

Meqë $f'(x) = 0$ për të gjitha x, kemi $f'(c) = 0$, dhe kështu ekuacioni i mësipërm merr trajtën

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \;\; \textit{ose} \;\; f(x_2) = f(x_1)$$

Pra, $f(x)$ ka të njëjtën vlerë në çdo dy pika x_1 dhe x_2 në (a, b). Kjo do të thotë se $f(x)$ është konstant në (a, b).

□

Rrjedhim 5.1. *Në qoftë se $f'(x) = g'(x)$ për të gjitha x në intervalin (a, b), atëherë $f - g$ është funksion konstant në (a, b), pra këta funksione ndryshojn nga njëri tjetri me një konstante $f(x) = g(x) + c$.*

Vërtetim: Le të jetë $F(x) = f(x) - g(x)$. Atëherë

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

për të gjitha $x \in (a, b)$. Prandaj kemi që $F(x)$ është konstant, domethënë $f - g$ është konstant.

□

Vërejtje 5.2. *Le të jetë*

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \textit{në qoftë se} \quad x > 0 \\ -1 & \textit{në qoftë se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Bashkësia e përkufizimit të $f(x)$ është $D = \{x | x \neq 0\}$ dhe $f'(x) = 0$ për të gjitha x në D. Por është e dukshme se ky funksion nuk është konstant. Kjo nuk e kundërshton teoremën sepse D nuk është një interval. Vëmë re se $f(x)$ është konstant në intervalet $(0, \infty)$ dhe $(-\infty, 0)$.

Shembull 5.14. *Vërtetoni identitetin*

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2.$$

Zgjidhje: Edhe pse nuk është e nevojshme të përdoren teknika të kalkulusit për ta vërtetuar këtë identitet, vërtetimi duke përdorur kalkulusin është më i lehtë. Në qoftë se $f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x$ atëherë

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

për të gjitha vlerat e x. Prandaj është një funksion konstant, $f(x) = c$. Për të përcaktuar vlerën e c-së , ne zëvendësojmë $x = 1$ (sepse e llogarisim saktësisht $f(1)$). Atëherë

$$c = f(1) = \tan^{-1} 1 + \cot^{-1} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Prandaj, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$.

□

Ushtrime:

Verifikoni në qoftë se funksioni plotëson të tre kushtet e Teoremës Role në intervalin e dhënë. Atëherë, gjeni të gjithë numrat c që kënaqin konluzionin e Teoremës Role.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$

3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$

4. $f(x) = \cos 2x$, $[\pi/8, 7\pi/8]$

5. *Le të jetë* $f(x) = \tan x$. *Vërtetoni që* $f(0) = f(\pi)$, *por nuk ka asnjë numër* c *në* $(0, \pi)$ *të tillë që*

$$f'(c) = 0.$$

A plotësohen kushtet e Teoremës Role?

6. *Le të jetë*

$$f(x) = 1 - x^{2/3}.$$

Vërtetoni se $f(-1) = f(1)$, *por nuk ka asnjë numër* c *në* $(-1, 1)$ *të tillë që* $f'(c) = 0$. *A plotësohen kushtet e Teoremës Role?*

Verifikoni në qoftë se funksioni plotëson kushtet e Teoremës së Lagranzhit në intervalin e dhënë. Atëherë, gjeni të gjithë numrat c që plotësojnë konluzionin e Teoremës së Lagranzhit.

7. $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$, $[-1, 1]$

8. $f(x) = x^3 + x - 1$, $[0, 2]$

9. $f(x) = e^{-2x}$, $[0, 3]$

10. $f(x) = \frac{x}{x+2}$, $[1, 4]$

11. *Le të jetë* $f(x) = (x-3)^2$. *Vërtetoni se nuk ka asnjë numër* c *në* $(1, 4)$ *të tillë që*

$$f(4) - f(1) = f'(c)(4-1).$$

12. *Le të jetë* $f(x) = 2 - |2x - 1|$. *Vërtetoni se nuk ka asnjë numër* c *në* $(0, 3)$ *të tillë që*

$$f(3) - f(0) = f'(c)(3-0).$$

13. *Vërtetoni se ekuacioni*

$$1 + 2x + x^3 + 4x^5 = 0$$

ka saktësisht vetëm një rrënjë reale.

14. *Vërtetoni se ekuacioni*

$$2x - 1 - \sin x = 0,$$

ka saktësisht vetëm një rrënjë reale.

15. *Vërtetoni se ekuacioni*

$$x^3 - 15x + c = 0,$$

ka të shumtën një rrënjë reale në $[-2, 2]$.

16. *Vërtetoni se ekuacioni*

$$x^4 + 4x + c = 0,$$

ka të shumtën dy rrënjë reale.

17. *(a) Vërtetoni se një polinom i gradës së tretë ka të shumtën tre rrënjë reale.*

(b) Vërtetoni se një polinom i gradës n *ka të shumtën* n *rrënjë reale.*

18. *(a) Supozojmë se* $f(x)$ *është i derivueshëm në* $\mathbb{R}$ *dhe ka dy rrënjë. Vërtetoni se* f' *ka të paktën një rrënjë.*

(b) Supozojmë se $f(x)$ *është dy here i derivueshëm në* $\mathbb{R}$ *dhe ka tri rrënjë. Vërtetoni se* f'' *ka të paktën një rrënjë.*

(c) A mund ti përgjithësoni pikën (a) dhe (b).

19. *Në qoftë se $f(1) = 10$, $f'(x) \geq 2$ për $1 \leq x \leq 4$, sa e vogël mund të jetë $f(4)$?*

20. *Supozojmë se $3 \leq f(x) \leq 5$ për të gjitha vlerat e x. Vërtetoni se $18 \leq f(8) - f(2) \leq 30$.*

21. *A ekziston një funksion $f(x)$ i tillë që $f(0) = -1$, $f(2) = 4$, dhe $f'(x) \leq 2$ për të gjitha x?*

22. *Supozojmë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të vazhdueshëm në $[a, b]$ dhe të derivueshëm në (a, b). Supozojmë se $f(a) = g(a)$ dhe $f'(x) < g'(x)$ për $a < x < b$. Vërtetoni se $f(b) < g(b)$.*

23. *Vërtetoni se*

$$\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x,$$

në qoftë se $x > 0$.

24. *Supozojmë se $f(x)$ është funksion tek dhe i derivueshëm kudo. Vërtetoni se për çdo numër pozitiv b, ekziston një numër c në $(-b, b)$, i tillë që $f'(c) = f(b)/b$.*

25. *Përdorni Teoremën e Lagranzhit për të treguar se ka vend mosbarazimi*

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$$

për çdo a dhe b.

26. *Në qoftë se $f'(x) = c$ (c është konstante), për të gjitha x, tregoni se $f(x) = cx + d$ për ndonjë konstante d.*

27. *Le të jetë $f(x) = \frac{1}{x}$ dhe*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{në qoftë se} \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & \text{në qoftë se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Vërtetoni se $f'(x) = g'(x)$ për të gjitha x nga bashkësia e përkufizimit të tyre. A mund të dalim në përfundimin se $f - g$ është një konstante?

28. *Vërtetoni identitetin*

$$\arcsin \frac{x-1}{x+1} = 2 \arctan \sqrt{x} - \frac{\pi}{2}.$$

5.3 Përcaktimi i grafikut të një funksioni nëpërmjet derivatit

Shumë aplikime të kalkulusit janë të lidhura me studimin e funksioneve. Për më tepër me studimin e funksionit nëpermjet derivatit të tij. Pra, për funksione për te cilat llogaritja e derivatit nuk paraqet ndonje vështirsi, c'mund te themi për vetë funksionin. Kjo shprehet kryesisht me studimin e grafikut të funksionit i cili është paraqitja gjeometrike e funksionit. Kur ne ndërtojmë grafikun e një funksioni sa të sigurtë jemi që ky është vërtet grafiku i saktë? Në këtë leksion ne do të mësojmë se si të ndërtojmë me siguri grafikun e funksionit nëpërmjet studimit të derivateve të tij.

Figura 5.5: K. Runge

Për arsye se $f'(x)$ përfaqson koefiçentin këndor të tangentes ndaj kurbës $y = f(x)$ në pikën $(x, f(x))$, ai na tregon drejtimin sipas të cilit kurba përparon në çdo pikë. Kështu që është me vend që të presim që informacioni rreth $f'(x)$ të na sigurojë informacion për $f(x)$. Më poshtë do të shohim se jo vetëm derivati $f'(x)$ por edhe derivati i dyte $f''(x)$ na japim shumë informacion mbi funksionin $f(x)$. Fillojme me studimin e $f'(x)$ dhe se çfarë informacioni mund të nxjerrim mbi $f(x)$.

5.3.1 Çfarë na tregon $f'(x)$ për $f(x)$?

Të shohim tashmë se çfraë informacioni mund të përfitojmë për $f(x)$ duke studiuar $f'(x)$.

Teorema 5.7. **a** *Në qoftë se $f'(x) > 0$ në një interval, atëherë $f(x)$ është rritës në atë interval.*

b *Në qoftë se $f'(x) < 0$ në një interval, atëherë $f(x)$ është zbritës në atë interval.*

Vërtetim: (a) Le të jenë x_1 dhe x_2 dy numra çfarëdo në një interval të tillë që $x_1 < x_2$. Në përputhje me përkufizimin e funksionit rritës na duhet të vërtetojmë se $f(x_1) < f(x_2)$. Meqenë qoftë se na është dhënë se $f'(x) > 0$, ne dimë tashmë se $f(x)$ është i derivueshëm në $[x_1, x_2]$. Prandaj nga teorema Lagranzh ekziston një numër c ndërmjet x_1 dhe x_2 i tillë që

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{5.6}$$

Tani $f'(c) > 0$ dhe $x_2 - x_1 > 0$ sepse $x_1 < x_2$. Prandaj ana e djathtë e ekuacionit të mësipërm është pozitive, dhe kështu që

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \ \ ose \ \ f(x_1) < f(x_2)$$

Kjo tregon se $f(x)$ është rritës. Pjesa (b) vërtetohet po njëlloj.

□

Le të shohim tani disa ilustrime grafike të teoremës së mësipërme.

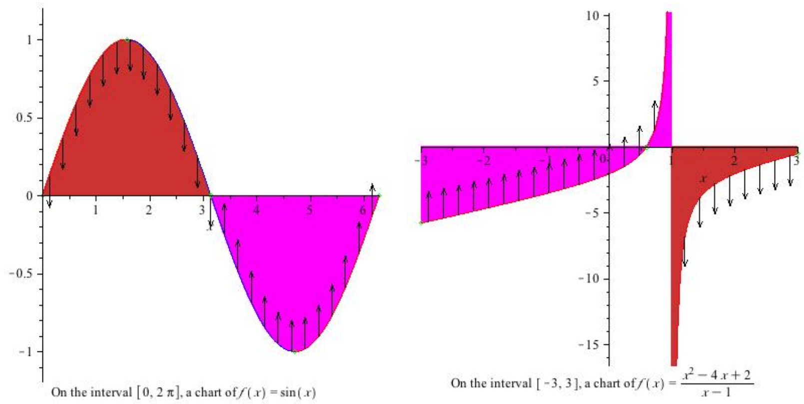


Figura 5.6: Ilustrime grafike të teoremës së mësipërme.

Shembull 5.15. *Gjeni se në çfarë intervalesh funksioni*

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5,$$

është rritës dhe zbritës.

Zgjidhje: Derivati i funksionit është

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x-2)(x+1).$$

Për të përdorur testin e mësipërm na duhet të dimë se ku $f'(x) > 0$ dhe ku $f'(x) < 0$. Kjo varet nga shenja e tre faktorëve të $f'(x)$ e pikërisht $12x$, $x-2$, dhe $x+1$. E ndajmë boshtin real në intervale skajet e të cilave janë numrat kritikë $-1, 0$ dhe 2. Dhe shkruajmë të dhënat në një tabelë, ku me shenjën + nënkuptojmë se shprehja është pozitive dhe me shenjën minus se shprehja është negative. Kolona e fundit e tabelës na jep konkluzionin e bazuar në testin e shqyrtuar më parë. Për shembull $f'(x) < 0$ për $0 < x < 2$, do të thotë se $f(x)$ është zbritës në $(0, 2)$.

intervali	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	$f(x)$
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	*zbritës në* $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	*rritës në* $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	*zbritës në* $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	*rritës në* $(2, \infty)$

Tabela 5.1: Vlerat e funksionit në intervalet përkatëse.

□

Rikujtojmë nga paragrafi i mëparshëm se në qoftë se $f(x)$ ka maksimum apo minimum lokal në $x = c$, atëherë $x = c$ duhet të jetë pikë kritike për $f(x)$. Por jo çdo pikë kritike mund të jetë minimum apo maksimum. Kështu që ne na nevojitet një test që të na tregojë se kur një funksion ka ose jo maksimum apo minimum në një pikë kritike.

Ju mund ta shihni nga Tabela 5.1 se $f(0) = 5$ është vlerë maksimumi lokal e $f(x)$ sepse $f(x)$ rritet në $(-1, 0)$ dhe zvogëlohet në $(0, 2)$. Ose në termat e derivatit, $f'(x) > 0$ për $-1 < x < 0$ dhe $f'(x) < 0$ për $0 < x < 2$. Me fjalë të tjera, shenja e $f'(x)$ ndryshon nga pozitive në negative kur kalon nëpër 0. Ky vëzhgim është baza e testit në vazhdim.

Lema 5.1 (Testi i derivatit të parë). *Supozojmë se c është një pikë kritike e një funksioni të vazhdueshëm $f(x)$.*

(a) *Në qoftë se f' ndryshon nga pozitiv në negativ kur kalon nëpër c, atëherë $f(x)$ ka maksimum lokal në c.*

(b) *Në qoftë se f' ndryshon nga negativ në pozitiv kur kalon nëpër c, atëherë $f(x)$ ka minimum lokal në c.*

(c) *Në qoftë se f' nuk ndryshon shenjë kur kalon nëpër c, atëherë $f(x)$ nuk ka as minimum as maksimum lokal në c.*

Testi i derivatit të parë vjen si rrjedhim i testit të monotonisë. Në pjesën (a) për shembull shenja e $f'(x)$ ndryshon nga pozitive në negative kur kalon nëpër c, $f(x)$ rritet nga e majta e c dhe zvogëlohet nga e djathta e c. Dhe del prej këtej se $f(x)$ ka maksimum lokal në c.

Shembull 5.16. *Gjeni vlerat minimum dhe maksimum lokal për funksionin e shembullit të mësipërm.*

Zgjidhje: Nga tabela në zgjidhjen e mësipërme shohim se $f'(x)$ ndryshon nga negativ në pozitiv në -1, kështu që $f(-1) = 0$ është minimum lokal në bazë të testit të derivatit të parë. Njëlloj derivati i parë ndryshon nga negativ në pozitiv në 2, prandaj $f(2) = -27$ është gjithashtu minimum lokal. Siç e pamë pak më parë $f(0) = 5$ është maksimum lokal sepse derivati i parë ndryshon nga pozitiv në negativ në 0.

□

Shembull 5.17. *Gjeni maksimumet dhe minimumet lokale për funksionin*

$$g(x) = x + 2\sin x \text{ për } \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

Zgjidhje: Për të gjetur pikat kritike derivojmë funksionin

$$g'(x) = 1 + 2\cos x$$

Pra, $g'(x) = 0$ për $\cos x = -\frac{1}{2}$. Zgjidhje të këtij ekuacioni janë $\frac{2\pi}{3}$ dhe $\frac{4\pi}{3}$. Meqë $g(x)$ është i derivueshëm kudo, të vetmit numra kritikë janë $\frac{2\pi}{3}$ dhe $\frac{4\pi}{3}$ dhe ne analizojmë $g(x)$ në tabelën në vazhdim.

intervali	$g'(x) = 1 + 2\cos x$	$g(x)$
$0 < x < 2\pi/3$	$+$	*rritës në* $(0, 2\pi/3)$
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	$-$	*zbritës në* $(2\pi/3, 4\pi/3)$
$4\pi/3 < x < 2\pi$	$+$	*rritës në*$(4\pi/3, 2\pi)$

Tabela 5.2: Vlerat e $g(x)$ dhe derivatit.

Meqë $g'(x)$ ndryshon nga pozitiv në negativ në $\frac{2\pi}{3}$ atëherë nga testi i derivatit të parë del se ka maksimum lokal në $\frac{2\pi}{3}$. Dhe vlera maksimum lokal është

$$g\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\sin 2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

Njëlloj $g'(x)$ ndryshon nga negativ në pozitiv në $4\pi/3$ dhe kështu

$$g\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

është vlera minimum lokal.

□

5.3.2 Cfarë na tregon $f''(x)$ për $f(x)$?

Siç do ta shohim në këtë pjesë derivati i dytë i funksionit mund të na tregojë shume mbi vetë funksionin. Për këtë më parë japim përkufizimet e mëposhtme:

Përkufizim 5.4. Në qoftë se grafiku i $f(x)$ qëndron mbi të gjitha tangentet e veta në intervalin I, ai quhet **i lugët** në I. Në qoftë se grafiku i $f(x)$ qëndron nën të gjitha tangentet e veta në intervalin I, ai quhet **i mysët** në I.

Le të shohim tani se si ndikon derivati i dytë në përkufizimin në se funksioni është i lugët apo i mysët. Duke parë Fig. 5.7, mund të shohim se duke shkuar nga e majta në të djathtë, koefiçenti këndor i tangentes zvogëlohet në pjesën e parë. Pra, derivati i parë është zbritës dhe kështu f'' është negativ. Në pjesën e dytë (në të djathtë) koefiçenti këndor rritet. Pra, f' rritet dhe kështu f'' është pozitiv.

Lema 5.2 (Testi i konkavitetit)**.** *Pohimet e mëposhtme janë të vërteta:*

(a) *Në qoftë se $f''(x) > 0$ për të gjithë x në I, atëherë grafiku i $f(x)$ është i lugët në I*

(b) *Në qoftë se $f''(x) < 0$ për të gjithë x në I, atëherë grafiku i $f(x)$ është i mysët në I*

Përkufizim 5.5. Një pikë P në një kurbë $y = f(x)$ quhet **pikë infleksioni** në qoftë se $f(x)$ është i vazhdueshëm në atë pikë dhe kurba ndryshon përkulshmërinë gjatë kalimit nëpër atë pikë.

Shembull 5.18. *Ndërtoni grafikun e mundshëm të një funksoni i cili plotëson kushtet:*

(i) $f'(x) > 0$ *në* $(-\infty, 1)$, $f'(x) < 0$ *në* $(1, \infty)$

(ii) $f''(x) > 0$ *në* $(-\infty, 2)$ *dhe* $(2, \infty)$, $f''(x) < 0$ *në* $(-2, 2)$

(iii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

Zgjidhje: Kushti (i) na thotë se $f(x)$ është rritës në $(-\infty, 1)$ dhe zbritës në $(1, \infty)$. Kushti (ii) thotë se $f(x)$ është i lugët në $(-\infty, 2)$ dhe $(2, \infty)$, dhe i mysët në $(-2, 2)$. Nga kushti (iii) kemi që $f(x)$ ka dy asimptota horizontale: $y = -2$ dhe $y = 0$.

Fillimisht vizatojmë asimptotat horizontale. Pas kësaj vizatojmë grafikun e $f(x)$ duke ju afruar gjithnjë e më shumë nga e majta drejtëzës $y = -2$, dhe duke ju larguar po asaj nga e djathta deri në pikën maksimum $x = 1$, e më pas duke ju afruar gjithnjë e më shumë drejtëzës $y = 0$ nga e djathta.

□

Një aplikim tjetër i derivatit të dytë është testi në vazhdim për vlerat maksimum dhe minimum. Ky vjen si rrjedhim i testit të përkulshmërisë.

Teorema 5.8 (Testi i derivatit të dytë)**.** *Supozojmë se f'' është i vazhdueshëm pranë $x = c$.*

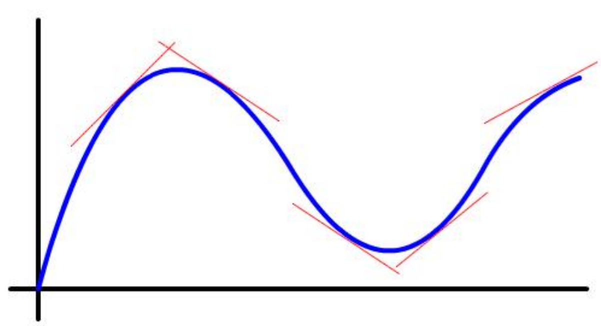


Figura 5.7: I mysët në të majtë dhe i lugët në të djathtë.

(a) *Në qoftë se $f'(c) = 0$ dhe $f''(c) > 0$, atëherë $f(x)$ ka minimum lokal në $x = c$.*

(b) *Në qoftë se $f'(c) = 0$ dhe $f''(c) < 0$, atëherë $f(x)$ ka maksimum lokal në $x = c$.*

Për shembull, pjesa (a) është e vërtetë sepse $f''(c) > 0$ pranë c dhe funksioni është i lugët pranë c. Kjo do të thotë se $f(x)$ shtrihet sipër tangentes së vetë horizontale në c dhe kështu $f(x)$ ka një minimum lokal në c.

Shembull 5.19. *Shqyrtoni kurbën*

$$y = x^4 - 4x^3$$

në lidhje me përkulshmërinë, pikat e infleksionit, dhe minimumet e maksimumet lokale.

Zgjidhje: Në qoftë se $y = x^4 - 4x^3$ atëherë

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$

Për të gjetur numrat kritikë barazojmë derivatin e parë me zero pra $f'(x) = 0$ dhe marrim $x = 0$ dhe $x = 3$. Për të përdorur testin e derivatit të dytë njehsojmë f'' në këto numra:

$$f''(0) = 0 \qquad f''(3) = 36 > 0$$

Meqë $f'(3) = 0$ dhe$f''(3) > 0$, $f(3) = -27$ është minimumi lokal. Meqë $f''(0) = 0$ testi i derivatit të dytë nuk jep përgjigje në këtë rast. Por meqënëse $f'(x) < 0$ për $x < 0$ dhe gjithashtu për $0 < x < 3$, testi i derivatit të parë na thotë se $f(x)$ nuk ka ekstremum në 0. Meqë $f''(x) = 0$ për $x = 0$ dhe $x = 2$, e ndajmë drejtëzën reale në intervale me skaje këto pika dhe plotësojmë tabelën e mëposhtme

intervali	$f''(x) = 12x(x-2)$	përkulshmeria
$(-\infty, 0)$	$+$	i luget
$(0, 2)$	$-$	i myset
$(2, \infty)$	$+$	i luget

Tabela 5.3: Vlerat e derivatit të $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Pika $(0, 0)$ është pikë infleksioni meqënëse kurba ndryshon përkulshmërinë. Gjithashtu $(2, -16)$ është pikë infleksioni për të njëjtën arsye.

□

Vërejtje 5.3. *Testi i derivatit të dytë nuk jep përgjigje kur $f''(x) = 0$, ajo pikë mund të jetë minimum mund të jetë maksimum ose asnjëra nga këto, por edhe në rastin kur ky derivat nuk ekziston testi nuk jep përgjigje. Në këto raste mund të përdoret testi i derivatit të parë. Në fakt edhe kur mund të përdoren të dy testet ai i derivatit të parë është më i thjeshtë në përdorim.*

Shembull 5.20. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$f(x) = x^{2/3}(6-x)^{1/3}.$$

Zgjidhje: Ju mund të përdorni rregullat e derivimit për të gjetur dy derivatet e para të funksionit që janë përkatësisht

$$f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}, \qquad f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$$

Meqë $f'(x) = 0$ për $x = 4$ dhe $f'(x)$ nuk ekziston për $x = 0$ ose për $x = 6$, numrat kritikë janë $0, 4, 6$.

Për të gjetur vlerat ekstreme lokale përdorim testin e derivatit të parë. Meqë f' ndryshon nga negativ në pozitiv në 0, $f(0) = 0$ është minimum lokal. Meqë f' ndryshon nga pozitiv në negativ në 4, $f(4) = 2^{5/3}$ është maksimum lokal. Shenja e f' nuk ndryshon në 6 prandaj nuk ka ekstremum në 6.

Duke parë shprehjen për $f''(x)$ dhe vërejtur se $x^{4/3} > 0$ për të gjitha x, ne shohim se $f''(x) < 0$ për $x < 0$ dhe $0 < x < 6$ si dhe $f''(x) > 0$ për $x > 6$. Prandaj $f(x)$ është i mysët në $(-\infty, 0)$ dhe në $(0, 6)$ dhe i lugët në $(6, \infty)$ dhe e vetmja pikë infleksioni është $(6, 0)$.

□ **Ushtrime:**

intervali	$4-x$	$x^{1/3}$	$(6-x)^{2/3}$	$f'(x)$	$f(x)$
$x<0$	+	−	+	−	*zbritës në* $(-\infty,0)$
$0<x<4$	+	+	+	+	*rritës në* $(0,4)$
$4<x<6$	−	+	+	−	*zbritës në* $(4,6)$
$x>6$	−	+	+	−	*zbritës në* $(6,\infty)$

Tabela 5.4: Vlerat e funksionit ne intervalet përkatëse.

1. *Supozojmë se ju është dhënë një formulë për një funksion $f(x)$.*

(a) Si e përcaktoni në qoftë se funksioni është rritës apo zbritës?

(b) Si e përcaktoni se ku grafiku i funksionit është i lugët dhe ku i mysët?

(c) Si i përcaktoni pikat e infleksionit?

(a) Gjeni intervalet në të cilat funksioni $f(x)$ është rritës ose zbritës.

(b) Gjeni vlerat maksimum dhe minimum lokal të $f(x)$.

(c) Gjeni intervalet e përkulshmërisë dhe pikat e infleksionit.

2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

3. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

4. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

5. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

6. $f(x) = \sin x + \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$

7. $f(x) = \cos^2 x - 2\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

8. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

9. $f(x) = (\ln x)/\sqrt{x}$

10. $f(x) = x^2 \ln x$

11. $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$

Gjeni vlerat maksimum dhe minimum lokal të $f(x)$ duke përdorur njëkohësisht testit e derivatit të parë dhe të dytë. Cilën metodë preferoni?

12. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

13. $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

14. $x + \sqrt{1-x}$

15. *(a) Gjeni numrat kritkë të $f(x) = x^4(x-1)^3$.*

(b) Çfarë na thotë testi i derivatit të dytë për sjelljen e $f(x)$ në këto numra kritikë?

(c) Çfarë na thotë derivati i parë për këtë?

16. *Supozojmë se f'' është i vazhdueshëm në $(-\infty,\infty)$.*

(a) Në qoftë se $f'(2) = 0$ dhe $f''(2) = -5$, çfarë mund të thoni për $f(x)$?

(b) Në qoftë se $f'(6) = 0$ dhe $f''(6) = 0$, çfarë mund të thoni për $f(x)$?

Ndërtoni grafikun e një funksioni i cili plotëson të gjitha kushtet e dhëna:

17. *$f'(x) > 0$ për të gjitha $x \neq 1$, ka asimptotë vertikale në $x = 1$, $f''(x) > 0$ për $x < 1$ ose $x > 3$, $f''(x) < 0$ për $1 < x < 3$.*

18. *$f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$, $f'(x) > 0$, për $x < 0$ ose $2 < x < 4$, $f'(x) < 0$ për $0 < x < 2$ ose $x > 4$, $f''(x) > 0$ për $1 < x < 3$, $f''(x) < 0$ për $x < 1$ ose $x > 3$*

19. *$f'(1) = f'(-1) = 0$, $f'(x) < 0$ për $|x| < 1$, $f'(x) > 0$ për $1 < |x| < 2$, $f'(x) = -1$ për $|x| > 2$, $f''(x) < 0$ për $-2 < x < 0$, pika e infleksionit është $(0,1)$*

20. *$f'(x) > 0$ për $|x| < 2$, $f'(x) < 0$ për $|x| > 2$, $f'(2) = 0$, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 1$, $f(-x) = f(x)$, $f''(x) < 0$ për $0 < x < 3$, $f''(x) > 0$ për $x > 3$*

21. *$f'(x) < 0$ dhe $f''(x) < 0$ për të gjitha x.*

22. *Supozojmë se $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$, dhe $f'(x) > 0$ dhe $f''(x) < 0$ për të gjitha x.*

(a) Ndërtoni grafikun e mundshëm të $f(x)$.

(b) Sa zgjidhje mund të ketë ekuacioni $f(x) = 0$? Pse?

(c) Është e mundur që $f'(2) = \frac{1}{3}$? Pse?

(a) Gjeni intervalet ku funksioni është rritës, zbritës.

(b) Gjeni vlerat e minimumeve dhe maksimumeve lokale.

(c) Gjeni intervalet e lugëtisë dhe të mystisë si dhe pikat e infleksionit.

(d) Përdoreni informacionin e marrë nga (a) tek (c) për të skicuar grafikun.

23. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

24. $f(x) = 2 + 3x - x^2$

25. $f(x) = 2 + 2x - x^4$

26. $f(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

27. $f(x) = (1+x)^5 - 5x - 2$

28. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$

29. $f(x) = x\sqrt{x-3}$

30. $f(x) = 3x^{2/3} - x$

31. $f(x) = x^{1/3}(x+4)$

32. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

33. $f(x) = 2\cos x + \cos^2 x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

34. $f(x) = x + \cos x$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

(a) Gjeni asimptotat vertikale dhe horizontale.

(b) Gjeni intervalet ku funksioni është rritës apo zbritës.

(c)Gjeni vlerat e minimumeve dhe maksimumeve lokale.

(d) Gjeni intervalet e përkulshmërisë dhe pikat e infleksionit.

(e) Përdorni informacionin nga pika (a) tek (d) për të skicuar grafikun e $f(x)$.

35.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

36. $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$

37. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

38. $f(x) = x\tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$

39. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

40. $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$

41. $f(x) = e^{-1/(x+1)}$

42. $f(x) = e^{arctan x}$

43. *Supozojmë se derivati i funksionit $f(x)$ është*

$$f'(x) = (x+1)^2(x-3)^3(x-6)^4.$$

Në cilin interval $f(x)$ është rritës?

44. *(a) Përdorni një grafik të $f(x)$ për të vlerësuar vlerat maksimum dhe minimum. Pas kësaj gjeni vlerat e sakta.*

(b) Njehsoni vlerën e x ku funksioni rritet më shpejt. Më pas gjeni vlerën e saktë.

i) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

ii) $f(x) = x^2 e^{-x}$

45. *Gjeni një funksion kubik $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ të tillë që ka vlerën e maskimumit lokal 3 në -2, dhe vlerën e minimumit lokal 0 në 1.*

46. *Për çfarë vlerash të a dhe të b funksioni*

$$f(x) = axe^{bx^2}$$

ka vlerën minimum $f(2) = 1$?

47. *Vërtetoni se kurba $y = (1+x)/(1+x^2)$ ka tre pika infleksioni të cilat ndodhen në të njëjtën drejtëz.*

48. *Vërtetoni se një funksion kubik ka gjithmonë saktësisht një pikë infleksioni. Në qoftë se grafiku i tij ka tre pikprerje me boshtin e x-ve x_1, x_2, x_3, tregoni se abshisa e pikës së infleksionit është $(x_1 + x_2 + x_3)/3$.*

49. *Për çfarë vlerash të c polinomi $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ ka dy pika infleksioni? Një pikë infleksioni? Asnjë? Ilustrojeni duke ndërtuar grafikun e P për vlera të ndryshme të c. Si ndryshon grafiku kur c zvogëlohet?*

50. *Vërtetoni se funksioni $f(x) = x|x|$ ka një pikë infleksioni në $(0,0)$ por $f''(0)$ nuk ekziston.*

51. *Supozojmë se f''' është i vazhdueshëm dhe $f'(c) = f''(c) = 0$ por $f'''(c) > 0$. A ka $f(x)$ maksimum apo minimum lokal në c? A ka funksioni $f(x)$ pikë infleksioni në c?*

5.4 Format e pacaktuara dhe rregulli i L'Hospitalit

Supozojmë se duam të analizojmë sjelljen e funksionit

$$F(x) = \frac{\ln x}{x-1}$$

Megjithëse $f(x)$ nuk është i përkufizuar kur $x = 1$, ne duhet të dimë se si sillet $f(x)$ afër 1. Pra, do të donim të dinim vlerën e limitit

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \tag{5.7}$$

Në llogaritjen e këtij limiti ne s'mund të zbatojmë rregullin e raportit sepse limiti i emëruesit është zero. Në fakt megjithëse limiti i mësipërm ekziston, vlera e tij nuk është e përcaktuar sepse si emëruesi edhe numëruesi shkojnë në zero dhe $\frac{0}{0}$ nuk është e përcaktuar.

5.4.1 Format e pacaktuara $\frac{0}{0}$ dhe $\frac{\infty}{\infty}$.

Në përgjithësi, në qoftë se kemi një limit të formës

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ku të dy funksionet $f(x)\to 0$ dhe $g(x)\to 0$ sikurse $x\to a$, atëherë limiti mund të ekzistojë ose jo dhe ai quhet **formë e pacaktuar e tipit $\frac{0}{0}$**. Ne pamë disa nga këto limite në kapitullin 2. Për funksionet racionale, ne mund të thjeshtojmë faktorët e përbashkët:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Ne përdorëm një argument gjeometrik për të treguar se

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Në këtë paragraf ne do shqyrtojmë një metodë sistematike të njohur me emrin "Rregulli i L'Hospitalit"(shqiptohet L'Opital) për llogaritjen e formave të pacaktuara.

Një tjetër rast në të cilin limiti nuk përcaktohet është kur duam të shohim për asimtotat horizontale të $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ dhe na duhet të llogarisim limitin

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x-1}. \tag{5.8}$$

Nuk është e qartë se si ta llogarisim këtë limit sepse edhe numëruesi edhe emëruesi bëhen gjithnjë edhe më të mëdhenj kur $x\to\infty$.

Në përgjithësi në qoftë se kemi një limit të formës

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

ku të dy funksionet $f(x)\to\infty$ (ose $-\infty$) dhe $g(x)\to\infty$ (ose $-\infty$) atëherë limiti mund të mos ekzistojë dhe quhet **formë e pacaktuar e tipit $\frac{\infty}{\infty}$**. Ne pamë në Kap. 2 se ky lloj limiti mund të llogaritet për disa tipe funksionesh, përfshirë funksionet racionale, duke pjestuar numëruesin dhe emëruesin me fuqinë më të lartë të x-it që përmban emëruesi. Për shembull,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Teorema 5.9 (Rregulli i L'Hospitalit)**.** *Supozojmë se $f(x)$ dhe $g(x)$ janë të derivueshëm dhe $g'(x)\neq 0$ pranë a (me përjashtim ndoshta të a). Supozojmë që*

$$\lim_{x\to a}f(x)=0 \quad \textit{dhe} \quad \lim_{x\to a}g(x)=0$$

ose që

$$\lim_{x\to a}f(x)=\pm\infty \quad \textit{dhe} \quad \lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$$

(Me fjalë të tjera, kemi një formë të pacaktuar të tipit $\frac{0}{0}$ ose $\frac{\infty}{\infty}$). Atëherë

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

në qoftë se limiti në të djathtë ekziston(ose është ∞ ose $-\infty$).

Vërejtje 5.4. *1. Rregulli i L'Hospitalit thotë se limiti i raportit të dy funksioneve është i barabartë me limitin e raportit të derivateve të tyre, duke pranuar se kushtet e dhëna qëndrojnë. Është mjaft e rëndësishme që të verifikohen kushtet në lidhje me limitet e $f(x)$ dhe $g(x)$ para se të zbatohet Rregulli i L'Hospitalit.*

2. *Rregulli i L'Hospitalit është gjithashtu i vërtetë edhe për limitet e njëanshme edhe për limitet në infinit apo minus infinit: pra $x \to a$ mund të zëvendësohet me $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, ose $x \to -\infty$.*

3. *Për rastin e vecantë në të cilin $f(a) = g(a) = 0$, f' dhe g' janë të vazhdueshëm, dhe $g'(a) \neq 0$, është e lehtë të shihet vërtetësia e Rregullit të L'Hospitalit. Në fakt duke përdorur formën alternative të përkufizimit të derivatit, ne kemi*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

Është disi më e vështirë të vërtetohet rasti i përgjithshëm i Rregullit të L'Hospitalit.

Shembull 5.21. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

Zgjidhje: Meqë

$$\lim_{x\to 1}\ln x = \ln 1 = 0 \;\; \textit{dhe} \;\; \lim_{x\to 1}(x-1) = 0$$

ne mund të zbatojmë rregullin e L'Hospitalit:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(\ln x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1}\frac{1/x}{1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

□

Shembull 5.22. *Njehsoni*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}$$

Zgjidhje: Kemi $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ dhe $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$, prandaj Rregulli i L'Hospitalit na jep

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}$$

Meqë $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ dhe $\lim_{x\to\infty} 2x = \infty$ limiti në të djathtë është përsëri formë e pacaktuar, dhe zbatimi përsëri i Rregullit të L'Hospitalit na jep

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2} = \infty$$

□

Shembull 5.23. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

Zgjidhje: Meqë $\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty$ dhe $\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{x} = \infty$ zbatimi i Rregullit të L'Hospitalit na jep

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(\sqrt[3]{x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}}$$

Vërejmë se limiti në të djathtë tani është formë e pacaktuar $\frac{0}{0}$. Por në vend që të zbatojmë Rregullin e L'Hospitalit për herë të dytë, ne thjeshtojmë shprehjen dhe shohim se një zbatim i dytë është i panevojshëm:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\frac{1}{3}x^{-2/3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

□

Shembull 5.24. *Gjeni*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}.$$

Zgjidhje: Vërejmë se $\tan x - x \to 0$ dhe $x^3 \to 0$ kur $x \to 0$, kështu që përdorim Rregullin e L'Hospitalit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2}$$

Meqë limiti në të djathtë vazhdon të jetë formë e pacaktuar $\frac{0}{0}$, e zbatojmë përsëri Rregullin e L'Hospitalit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 x} \cdot \tan x}{6x}$$

Meqë $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$ ne mund të thjeshtojmë veprimet duke shkruar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 x} \tan x}{6x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Dhe këtë limit të fundit mund ta llogarisim duke zbatuar për herë të tretë Rregullin e L'Hospitalit, nëpërmjet shënimit të $\tan x = \sin x / \cos x$ dhe duke përdorur njohuritë tona mbi limitet trigonometrike. Atëherë, përftojmë

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot \tan x}{6x} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

□

Shembull 5.25. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

Zgjidhje: Në qoftë se do përdornit Rregullin e L'Hospitalit, do përftonit

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to \pi^-} \frac{\cos x}{sinx} = -\infty$$

Kjo është e gabuar! Megjithëse numëruesi $\sin x \to 0$ kur $x \to \pi^-$, vërejmë se emëruesi $(1 - \cos x)$ nuk shkon në zero, prandaj Rregulli i L'Hospitalit nuk mund të përdoret këtu. Në fakt limiti i kërkuar është i lehtë për t'u gjetur sepse funksioni është i vazhduar dhe emëruesi është jo zero në π:

$$\lim_{x\to \pi^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin \pi}{1 - \cos \pi} = \frac{0}{1 - (-1)} = 0$$

□

Ky shembull tregon se mund të gabosh në zbatimin e Rregullit të L'Hospitalit në qoftë se nuk mendohesh. Të tjera limite mund të gjenden duke zbatuar Rregullin e L'Hospitalit, por mund të gjenden më thjeshtë nga metoda të tjera. Kështu që kur duam të llogarisim një limit duhet të marrim në shqyrtim metoda të tjera para se të përdorim Rregullin e L'Hospitalit.

5.4.2 Forma e pacaktuar prodhim.

Në qoftë se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ dhe $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ (ose $-\infty$), atëherë nuk është e qartë se cila do jetë vlera e limitit $\lim_{x\to a} f(x)g(x)$, në qoftë se ka një vlerë. Në qoftë se $f(x)$ shkon më shpejt në zero, përgjigjia për limitin do jetë zero. Por në qoftë se $g(x)$ shkon me shpejt në infinit, përgjigja do jetë infinit. Ose mund të ketë një kompromis në qoftë se përgjigja do jetë një numër i fundëm jozero. Kjo formë limiti quhet **formë e pacaktuar e tipit** $0 \cdot \infty$. Ne mund të veprojmë me të duke e shkruar prodhimin fg në trajtë raporti:

$$fg = \frac{f}{1/g} \quad \textit{ose} \quad fg = \frac{g}{1/f}$$

Kjo e transformon limitin e dhënë në një nga format e pacaktuara $\frac{0}{0}$ ose $\frac{\infty}{\infty}$, tek të cilat mund të zbatojmë Rregullin e L'Hospitalit.

Shembull 5.26. *Llogarisni*

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x$$

Zgjidhje: Limiti i dhënë është formë e pacaktuar sepse kur $x \to 0^+$ faktori i parë shkon në zero ndërsa i dyti ($\ln x$) shkon në $-\infty$. Duke e shkruar $x = \frac{1}{\frac{1}{x}}$, kemi $1/x \to \infty$ kur $x \to 0^+$. Prandaj Rregulli i L'Hospitalit jep

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

□

Vërejtje 5.5. *Në zgjidhjen e këtij shembulli ka një tjetër mundësi shënimi*

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1/\ln x}$$

Kjo jep një formë të pacaktuar të tipit $\frac{0}{0}$ por në qoftë se ne zbatojmë Rregullin e L'Hospitalit ne marrim një shprehje më të komplikuar se sa ajo me të cilën e nisëm. Në përgjithësi kur ne e rishkruajmë një prodhim të pacaktuar, përpiqemi çojm në një limit më të thjeshtë.

5.4.3 Forma e pacaktuar diferencë

Në qoftë se $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ dhe $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, atëherë limiti

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)]$$

quhet **formë e pacaktuar e tipit** $\infty - \infty$. Përsëri ka një diskutim për $f(x)$ dhe $g(x)$. Përgjigja do jetë ∞, apo do jetë $-\infty$, apo do ketë një kompromis tek një numër i fundëm? Për të gjetur këtë, përpiqemi të konvertojmë diferencën në raport, duke përdorur një emërues të përbashkët, apo racionalizim, apo faktorizim të një faktori të përbashkët, duke marrë kështu një formë të pacaktuar të tipit $\frac{0}{0}$ ose $\frac{\infty}{\infty}$.

Shembull 5.27. *Gjeni limitin*

$$\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right)$$

Zgjidhje: Fillimisht shohim se

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1}{\cos x} = \infty \ \textit{dhe} \lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty,$$

prandaj limiti është një formë e pacaktuar, këtu përdorim emëruesin e përbashkët:

$$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x \right) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \to (\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\sin x} = 0$$

Vërejmë se përdorimi i Rregullit të L'Hospitalit është me vend sepse $1 - \sin x \to 0$ dhe $\cos x \to 0$ kur $x \to (\pi/2)^-$.

□

5.4.4 Forma e pacaktuar fuqi

Forma të ndryshme të pacaktuara vijnë prej limitit

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}$$

1. $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ *dhe* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *tipi* 0^0

2. $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ *dhe* $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ *tipi* ∞^0

3. $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ *dhe* $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ *tipi* 1^∞

Secili nga këto tri raste mund të trajtohet edhe duke marrë logaritmin natyror të të dy anëve: le të jetë $y = [f(x)]^{g(x)}$, atëherë $lny = g(x)\ln f(x)$ ose duke e shkruar funksionin si eksponencial:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}$$

Rikujtojmë se të dy këto metoda janë përdorur në derivimin e funksioneve të tilla. Në secilën metodë jemi në kushtet e formave të pacaktuara prodhim $g(x)\ln f(x)$, e tipit $0\cdot\infty$.

Shembull 5.28. *Llogarisni*

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x}$$

Zgjidhje: Fillimisht vërejmë se kur $x \to 0^+$, ne kemi $1+\sin 4x \to 1$ dhe $\cot x \to \infty$, prandaj limiti i dhënë është formë e pacaktuar. Atëherë

$$\ln y = \cot x \ln(1+\sin 4x)$$

Prandaj Rregulli i L'Hospitalit jep

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{4\cos 4x}{1+\sin 4x}}{\frac{1}{cos^2 x}} = 4$$

Pra, ne llogaritëm limitin e $\ln y$, por ai që na intereson është limiti i y. Për të gjetur këtë përdorim faktin që $y = e^{\ln y}$;

$$\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 4x)^{\cot x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^4$$

□

Shembull 5.29. *Gjeni*

$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$

Zgjidhje: Vërejmë se ky limit është formë e pacaktuar sepse $0^x = 0$ për çdo $x > 0$, por $x^0 = 1$ për çdo $x \neq 0$. Ne mund të veprojmë si në shembullin e mëparshëm duke shkruar funksionin si eksponencial:

$$x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x\ln x}$$

Pak më sipër ne treguam se $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$, prej nga

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^0 = 1$$

□

Ushtrime:

Jepet limitet

$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\longrightarrow a} g(x) = 0$$
$$\lim_{x\longrightarrow a} h(x) = 1$$
$$\lim_{x\longrightarrow a} p(x) = \infty$$
$$\lim_{x\longrightarrow a} q(x) = \infty$$

Cili nga limitet e mëposhtëm është formë e pacaktuar? Për ato që nuk janë formë e pacaktuar, llogarsni limitin aty ku është e mundur.

1. $\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

2. $\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)}{p(x)}$

3. $\lim_{x\longrightarrow a} \frac{h(x)}{p(x)}$

4. $\lim_{x\longrightarrow a} \frac{p(x)}{f(x)}$

5. $\lim_{x\longrightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$

6. $\lim_{x\longrightarrow a}[f(x)p(x)]$

7. $\lim_{x\longrightarrow a}[h(x)p(x)]$

8. $\lim_{x\longrightarrow a}[p(x)q(x)]$

9. $\lim_{x\longrightarrow a}[f(x) - p(x)]$

10. $\lim_{x\longrightarrow a}[p(x) - q(x)]$

11. $\lim_{x\longrightarrow a}[p(x) + q(x)]$

12. $\lim_{x\longrightarrow a}[f(x)]^{g(x)}$

13. $\lim_{x\longrightarrow a}[f(x)]^{p(x)}$

14. $\lim_{x\longrightarrow a}[h(x)]^{p(x)}$

15. $\lim_{x\longrightarrow a}[p(x)]^{f(x)}$

16. $\lim_{x\longrightarrow a}[p(x)]^{q(x)}$

17. $\lim_{x\longrightarrow a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

Gjeni limitin. Përdorni rregullat e L'Hospitalit aty ku është e mundur. Në qoftë se ka një metodë më elementare, përdoreni. po qe se rregullat e L'Hospitalit nuk zbatohen, shpjegoni përse.

18. $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-x}$

19. $\lim_{x\longrightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

20. $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^a-1}{x^b-1}$

21. $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^9-1}{x^5-1}$

22. $\lim_{x\longrightarrow (\pi/2)^+} \frac{\cos x}{1-\sin x}$

23. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x}$

24. $\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{e^t-1}{t^3}$

25. $\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{e^{3t}-1}{t}$

26. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\tan px}{\tan qx}$

27. $\lim_{\theta\longrightarrow \pi/2} \frac{1-\sin\theta}{\csc\theta}$

28. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$

29. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{x+x^2}{1-2x^2}$

30. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

31. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2}{x^3}$

32. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\tan hx}{\tan x}$

33. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x-\tan x}$

34. $\lim_{t\longrightarrow 0} \frac{5^t-3^t}{t}$

35. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x-x}{x^3}$

36. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin^{-1}}{x}$

37. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x+\sin x}{x+\cos x}$

38. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{\tan^{-1}(4x)}$

39. $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{1-x+\ln x}{1+\cos\pi x}$

40. $\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{2x^2+1}}$

41. $\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^a-ax+a-1}{(x-1)^2}$

42. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

43. $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}$

44. $\lim_{x\longrightarrow a^+} \frac{\cos x\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$

45. $\lim_{x\longrightarrow \infty} x\sin(\pi/x)$

46. $\lim_{x\longrightarrow -\infty} x^2e^x$

47. $\lim_{x\longrightarrow 0}\cot 2x\sin 6x$

48. $\lim_{x\longrightarrow 0^+}\sin x\ln x$

49. $\lim_{x\longrightarrow 1^+}\ln x\tan(\pi x/2)$

50. $\lim_{x\longrightarrow \infty} x\tan(1/x)$

51. $\lim_{x\longrightarrow 1}(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$

52. $\lim_{x \longrightarrow 0} (\csc x - \cot x)$

53. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

54. $\lim_{x \longrightarrow 0} (\cot x - \frac{1}{x})$

55. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (x - \ln x)$

56. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (x e^{1/x} - x)$

57. $\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{x^2}$

58. $\lim_{x \longrightarrow 0^+} (\tan 2x)^x$

59. $\lim_{x \longrightarrow 0} (1 - 2x)^{1/x}$

60. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^{bx}$

61. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2})^x$

62. $\lim_{x \longrightarrow \infty} x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}$

63. $\lim_{x \longrightarrow \infty} x^(1/x)$

64. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (e^x + x)^{1/x}$

65. $\lim_{x \longrightarrow 0^+} (4x + 1)^{\cot x}$

66. $\lim_{x \longrightarrow 0^+} (2 - x)^{\tan(\pi x/2)}$

67. $\lim_{x \longrightarrow 0^+} (\cos x)^{1/x^2}$

68. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{2x-3}{2x+5})^{2x+1}$

[Përdorni grafikun për të vlerësuar limitin. Më pas përdorni rregullat e L'Hospitalit për të gjetur vlerën e saktë.

69. $\lim_{x \longrightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$

70. $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{5^x - 4^x}{3^x - 2^x}$

71. *Vërtetoni se* $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$, *për çdo numër natyror* n. *Kjo tregon se funksioni eksponencial i afrohet infinitit më shpejt se sa çdo fuqi e* x.

72. *Vërtetoni se* $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, *për çdo numër pozitiv* p. *Kjo tregon se funksioni logaritmik i afrohet infinitit më ngadalë se sa çdo fuqi e* x.

73. *Çfarë ndodh në qoftë se ju përpiqeni të zbatoni rregullin e L'Hospitalit për të vlerësuar* $\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$? *Llogariteni limitin me një mënyrë tjetër.*

74. *Në qoftë se* f' *është i vazhdueshëm,* $f(2) = 0$, *dhe* $f'(2) = 7$, *vlerësoni limitin* $\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x}$.

75. *Për çfarë vlerash të* a *dhe* b *është i vërtetë ekuacioni më poshtë?*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} (\frac{\sin 2x}{x^3} + a + \frac{b}{x^2}) = 0$$

76. *Në qoftë se* f' *është i vazhdueshëm, përdorni rregullin e L'Hospitalit për të treguar se*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

77. *Në qoftë se* f'' *është i vazhdueshëm, tregoni që*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

5.5 Studimi i plotë i një funksioni

Gjatë gjithë kësaj kohe ne kemi parë disa aspekte të veçanta të skicimit të grafikut të një kurbe si: bashkësia e përkufizimit, bashkësia e vlerave, simetria në kapitullin e parë; limitet, vazhdueshmëria, dhe asimptotat në kapitullin e dytë; derivatet dhe tangentet në Kapitujt 2 dhe 3; vlerat ekstreme, intervalet e monotonisë, përkulshmërisë, pikat e infleksionit, Rregullin e L'Hospitalit në këtë kapitull. E pra tani është pikërisht koha që të bashkojmë gjithë këtë informacion për të skicuar grafikun dhe nxjerrë të dhëna për të ardhmen e funksionit.

5.5.1 Etapat e studimit të plotë të funksionit

Skema e mëposhtme jep një procedurë të studimit të plotë të funksionit $y = f(x)$ së bashku me skicimin e grafikut. Jo çdo temë vlen për çdo funksion. Kjo skemë na siguron një informacion të plotë për skicimin e grafikut, që na jep aspektet më të rëndësishme të një funksioni.

1. **Bashkësia e përkufizimit.** Është mjaft e përdorshme që të niset me përkufizimin e bashkësisë së përkufizimit D të $f(x)$, pra bashkësinë e vlerave të x për të cilat ka kuptim $f(x)$.

2. **Pikëprerjet me boshtet.** Për të gjetur pikat e prerjes me boshtin e y i japim x vlerën 0, dhe gjejmë vlerën përgjegjëse të y. Për të gjetur pikat e prerjes me boshtin e x i japim y vlerën 0 dhe zgjidhim ekuacionin $y = 0$ në lidhje me x. (Mund të përjashtohet ky hap në qoftë se ky ekuacion është i vështirë për tu zgjidhur)

3. **Simetria (Çiftësia, Periodiciteti).**
(a) Në qoftë se $f(-x) = f(x)$ për të gjitha x në D, atëherë $f(x)$ është funksion çift, dhe kurba është simetrike në lidhje me boshtin e y. Kjo nënkupton se puna jonë është përgjysmuar. Në qoftë se ne dimë se si është grafiku i $f(x)$ për $x \geq 0$, atëherë mjafton ta pasqyrojmë atë në lidhje me boshtin e y për të përftuar kurbën e plotë.

(b) Në qoftë se $f(-x) = -f(x)$ për të gjitha x në D, atëherë $f(x)$ është funksion tek dhe kurba është simetrike në lidhje me origjinën e koordinatave. Përsëri ne mund ta përftojmë kurbën e plotë në qoftë se ne dimë pamjen e grafikut për $x \geq 0$. (E plotësojmë thjesht duke e rrotulluar 180^0 në lidhje me origjinën.)

(c) Në qoftë se $f(x + p) = f(x)$ për të gjitha x në D, ku p është një numër pozitiv, atëherë $f(x)$ quhet funksion periodik dhe numri më i vogël p quhet periodë e funksionit periodik. Për shembull, $y = \sin x$ ka periodë 2π dhe $y = \tan x$ ka periodë π. Në qoftë se ne e dimë se si duket grafiku i funksionit në një interval me gjatësi p, atëherë mund të përdorim zhvendosjen për të skicuar grafikun e plotë të funksionit.

4. **Asimptotat.** Asimptotat horizontale. Rikujtojmë nga Kapitulli i dytë se kur $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, ose $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$, atëherë drejtëza $y = L$ është asimptotë horizontale e kurbës $y = f(x)$. Por në qoftë se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$(ose $-\infty$), atëherë nuk kemi asimptotë horizontale nga e djathta, por prapëseprapë ky përbën një informacion për skicimin e grafikut të funksionit.
Asimptota vertikale. Rikujtojmë se drejtëza $x = a$ quhet asimptotë vertikale e grafikut të funksionit $y = f(x)$, në qoftë se ka vend një nga barazimet e mëposhtme:
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \; \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \tag{5.9}$$
(Për funksionet racionale ju mund të lokalizoheni në asimptotat vertikale duke barazuar emëruesin me zero pasi të keni thjetuar faktorët e përbashkët. Por për funksione të tjera kjo nuk mund të aplikohet) Për më tepër, në skicimin e grafikut është e zakonshme që të dihet me saktësi se cili nga barazimet e mësipërme ka vend. Në qoftë se $f(a)$ nuk është e përcaktuar, por pika a është pikë skajore në bashkësinë e përkufizimit të funksionit, atëherë shihen limitet $\lim_{x\to a^+} f(x)$, ose $\lim_{x\to a^-} f(x)$, në qoftë se ky limit është i fundëm apo i pafundëm.
Asimptotat oblike. Këto do të diskutohen në fund të këtij paragrafi.

5. **Intervalet e monotonisë.** Përdorni testin e monotonisë. Llogarisni $f'(x)$ dhe gjeni intervalet në të cilat $f'(x)$ është pozitiv($f(x)$ rritës) dhe intervalet ku $f'(x)$ është negativ (zbritës).

6. **Maksimumet lokale dhe minimuet lokale.** Gjeni pikat kritike të $f(x)$ [numrat c ku $f'(c) = 0$ ose ku $f'(c)$ nuk ekziston]. Pas kësaj përdorni testin e derivatit të parë. Në qoftë se f' ndryshon shenjë nga pozitive në negative në pikën kritike c, atëherë $f(c)$ është maksimumi lokal. Në qoftë se f' ndryshon shenjë nga negative në pozitive në c, atëherë $f(c)$ është minimum lokal. Megjithëse parapëlqehet të përdoret testi i derivatit të parë, ju mund të përdorni testin e derivatit të dytë në qoftë se c është pikë kritike e tillë që $f''(c) \neq 0$. Atëherë, $f''(c) > 0$ sjell që $f(c)$ është minimum lokal, ndërsa $f''(c) < 0$ sjell që $f(c)$ është maksimum lokal.

7. **Përkulshmëria dhe pikat e infleksionit.** Llogarisni $f''(x)$ dhe përdorni testin e përkulshmërisë. Kurba është e lugët kur $f''(x) > 0$, dhe është e mysët kur $f''(x) < 0$. Pikat e infleksionit ndodhin kur ndryshon përkulshmëria (nga e lugët në të mysët ose nga e mysët në të lugët).

8. **Skicimi i grafikut.** Duke përdorur informacioni nga pikat 1-7, mund të vizatojmë grafikun. Skicojmë fillimisht asimptotat, si vija drejtuese. Më pas pikat e prerjes me boshtet koordinativë. E prej këtej vizatimin e grafikut duke bashkuar këto pika sipas pikës 5 dhe 7 dhe duke ju afruar pambarimisht asimptotave.

Shembull 5.30. *Studioni dhe ndërtoni grafikun e funksionit*
$$y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

Zgjidhje: Ne do të kalojmë një nga një hapat e mësipërm:

1 Bashkësia e përkufizimit është

$$\{x|x^2 - 1 \neq 0\} = \{x|x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$$

2 Pikëprerjet me boshtet. $x = 0$ kur $y = 0$. Pra, e vetmja pikë prerje është $(0, 0)$.

3 Çiftësia. $f(-x) = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1} = f(x)$. Pra, funksioni është funksion çift dhe grafiku i tij është simetrik në lidhje me boshtin e y.

4 Asimptotat.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1-1/x^2} = 2$$

Pra, drejtëza $y = 2$ është asimptotë horizontale.

Meqë emëruesi bëhet zero kur $x = \pm 1$, ne llogarisim limitet:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x^2}{x^2-1} = -\infty \quad \lim_{x\to -1^-} \frac{2x^2}{x^2-1} = \infty$$

Prej nga drejtëzat $x = 1$ dhe $x = -1$ janë asimptotat vertikale.

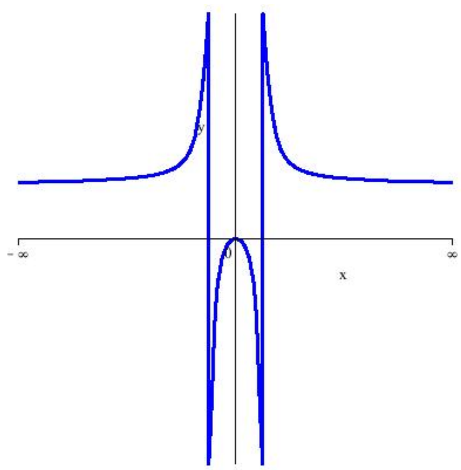


Figura 5.8: Grafiku i funksionit $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$.

5 Intervalet e monotonisë.

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)' = \frac{4x(x^2-1) - 2x^2(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Meqë $f'(x) > 0$ kur $x < 0 (x \neq -1)$ dhe $f'(x) < 0$ kur $x > 0 (x \neq 1)$, atëherë $f(x)$ është rritës në $(-\infty, -1)$ dhe $(-1, 0)$ dhe zbritës në $(0, 1)$ dhe në $(1, \infty)$.

6 Minimumet dhe maksimumet lokale. Meqë e vetmja pikë kritike është $x = 0$, dhe f' ndryshon shenjë nga pozitive në negative, $f(0) = 0$ është vlera maksimum lokal, kjo si rezultat i testit të derivatit të parë.

7 Përkulshmëria.

$$f''(x) = (f'(x))' = \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

Meqë $12x^2 + 4 > 0$ për të gjithë x, ne kemi

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow |x| > 1$$

dhe $f''(x) < 0 \Longleftrightarrow |x| < 1$. Prandaj kurba është e lugët në $(-\infty, -1)$ dhe $(1, \infty)$, dhe e mysët në $(-1, 1)$. Grafiku nuk ka pika infleksioni as -1 as 1 sepse ato nuk i përkasin bashkësisë së përkufizimit të $f(x)$.

8 Duke shfrytëzuar informacionin nga 1-7 ne skicojmë grafikun si në Fig. 5.8.

□

Më poshtë shohim një shembull tjetër:

Shembull 5.31. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$$

Zgjidhje: 1. Bashkësia e përkufizimit $D = \{x | x + 1 > 0\} = \{x | x > -1\} = (-1, \infty)$.

2. Pikëprerja me boshtet $(0, 0)$.

3. $f(-x) = \frac{(-x)^2}{\sqrt{(-x)+1}} = \frac{x^2}{\sqrt{-x+1}} \neq f(x)$ dhe $\neq -f(x)$, atëherë funksioni nuk është as çift as tek.

4. Meqë

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

ky grafik nuk ka asimtotë horizontale. Meqë $\sqrt{x+1} \to 0$ kur $x \to -1^+$ dhe $f(x)$ është githnjë pozitiv, kemi

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} = \infty$$

kështu që drejtëza $x = -1$ është asimptotë vertikale.

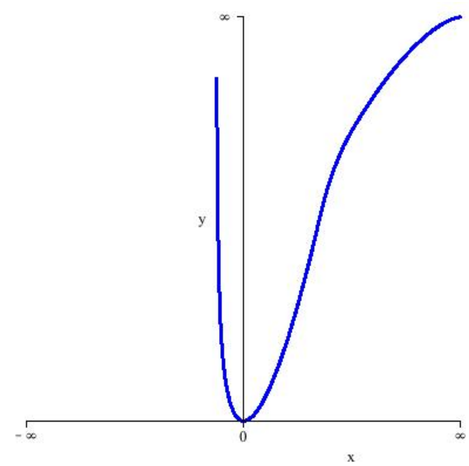


Figura 5.9: Grafiku i funksionit $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$.

5.

$$f'(x) = \frac{2x\sqrt{x+1} - x^2 \cdot 1/(2\sqrt{x+1})}{x+1} = \frac{x(3x+4)}{2(x+1)^{3/2}}$$

Ne shohim se $f'(x) = 0$ kur $x = 0$ ($x = -3/4$ nuk i përket bashkësisë së përkufizimit të $f(x)$), prandaj e vetmja pikë kritike është 0. Meqë $f'(x) < 0$ kur $-1 < x < 0$ dhe $f'(x) > 0$ kur $x > 0$, $f(x)$ është zbritës në $(-1, 0)$ dhe rritës në $(0, \infty)$.

6. $f'(0) = 0$ dhe f' ndryshon nga negativ në pozitiv në 0, $f(0) = 0$ është minimumi lokal (dhe absolut) në bazë të testit të derivatit të parë.

7.

$$f''(x) = \frac{2(x+1)^{3/2}(6x+4) - (3x^2+4x)3(x+1)^{1/2}}{4(x+1)^3} = \frac{3x^2+8x+8}{4(x+1)^{5/2}}$$

Vërejmë se emëruesi është gjithmonë pozitiv. Po ashtu edhe numëruesi është githmonë pozitiv sepse dallori i tij është $b^2 - 4ac = -32$, dhe trinomi ka shenjën e koeficentit pranë x^2, pra pozitiv. Prandaj $f''(x) > 0$ për të gjitha x nga bashkësia e përkufizimit të funksionit, që do të thotë se grafiku është kudo i lugët e prej këtej nuk ka pika infleksioni. Grafiku i saj është skicuar në Fig. 5.9.

□

Shembull 5.32. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$y = xe^x$$

Zgjidhje: 1. Bashkësia e përkufizimit është $\mathbb{R}$.

2. Pikëprerja me boshtet (0.0).

3. Nuk është simetrik.

4. Meqë edhe x edhe e^x rriten pambarimisht kur $x \to \infty$, ne kemi $\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$, Ndërsa kur $x \to -\infty$ kështu që kemi formën e pacaktuar prodhim dhe llogaritja e limitit kërkon zbatimin e Rregullit të L'Hospitalit

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} (-e^x) = 0$$

Prandaj boshti i x është asimptotë horizontale.

5. $f'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$

Meqë e^x është gjithmonë pozitive, ne shohim se $f'(x) > 0$ kur $x + 1 > 0$, dhe $f'(x) < 0$ kur $x + 1 < 0$. Pra, $f(x)$ është rritës në $(-1, +\infty)$ dhe zbritës në $(-\infty, -1)$.

6. Meqë $f'(-1) = 0$ dhe f' ndryshon nga negativ në pozitiv në -1 atëherë $f(-1) = -e^{-1}$ është minimumi lokal (dhe absolut).

7.
$$f''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$$

Meqë $f''(x) = (x+2)e^x > 0$ kur $x > -2$ dhe $f''(x) < 0$ kur $x < -2$, atëherë $f(x)$ është i lugët në $(-2, \infty)$ dhe i mysët në $(-\infty, -2)$. Pika e infleksionit është $(-2, -2e^{-2})$.

8. Duke përdorur informacionin e përftuar skicojmë grafikun.

□

Shembull 5.33. *Ndërtoni grafikun e funksionit*

$$y = 2\cos x + \sin 2x$$

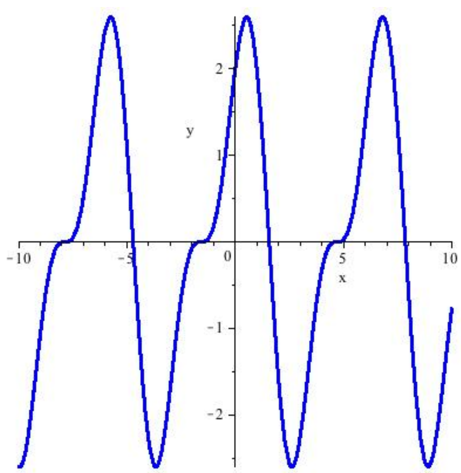


Figura 5.10: Grafiku i $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$

Zgjidhje: 1. Bashkësia e përkufizimit është $\mathbb{R}$.

2. pikëprerja me boshtin e y është $f(0) = 2$. Boshti i x pritet kur

$$\begin{aligned} 2\cos x + \sin 2x &= 2\cos x + 2\sin x \cos x \\ &= 2\cos x(1 + \sin x) = 0 \end{aligned}$$

pra, kur $\cos x = 0$ ose kur $\sin x = -1$. Prandaj në intervalin $[0, 2\pi]$ pikëprerjet me boshtin e x janë $(\pi/2, 0)$ dhe $(3\pi/2, 0)$.

3. $f(x)$ nuk është as çift as tek por $f(x + 2\pi) = f(x)$ për të gjitha x, prandaj funksioni është periodik me preiodë 2π. Kështu që ne e studiojmë sjelljen e tij në intervalin $[0, 2\pi]$ dhe e shtrijmë kurbën nëpërmjet zhvendosjes.

4. Nuk ka asimptota.

5. Duke llogaritur derivatin e parë kemi

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sin x + 2\cos 2x \\ &= -2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x) \\ &= -2(2\sin^2 x + \sin x - 1) \\ &= -2(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0, \end{aligned}$$

kur $\sin x = \frac{1}{2}$ ose $\sin x = -1$, kështu që në $[0, 2\pi]$ kemi $x = \pi/6, 5\pi/6$, dhe $3\pi/2$. Në përkufizimin e shenjës së $f'(x)$ ne përdorim faktin se $\sin x + 1 \geq 0$ për të gjitha x.

Atëherë grafiku është si ne Fig. 5.10. □

Ushtrime:

Studioni dhe ndërtoni grafikun e funksioneve:

1. $y = x^3 + x$

2. $y = 2 - 5x + 3x^2 - x^3$

3. $y = x^4 + 4x^3$

4. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

5. $y = 8x^2 - x^4$

6. $y = x(x+2)^3$

7. $y = (4 - x^2)^5$

8. $y = \frac{x}{x-1}$

9. $y = \frac{x^2-4}{x^2-2x}$

10. $y = \frac{x}{x^2+9}$

11. $y = \frac{x^2}{x^2+9}$

12. $y = \frac{x-1}{x^2}$

13. $y = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

14. $y = \frac{x^2}{x^2+3}$

15. $y = \frac{x}{x^3-1}$

16. $y = x\sqrt{5-x}$

17. $y = 2\sqrt{x} - x$

18. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

19. $y = \frac{x}{x^3-1}$

20. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

21. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

22. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

23. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

24. $y = 3\sin x - \sin^3 x$

25. $y = x + \cos x$

26. $y = x\tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2$

27. $y = \frac{1}{2}x - \sin x,\ 0 < x < 3\pi$

28. $y = \sec x + \tan x,\ 0 < x < \pi/2$

29. $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

30. $y = \frac{\sin x}{2+\cos x}$

31. $y = e^{\sin x}$

32. $y = e^{-x}\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

33. $y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

34. $y = e^{2x} - e^x$

35. $y = x - \ln x$

36. $y = e^x/x$

37. $y = (1 + e^x)^{-2}$

38. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

39. $y = \ln(\sin x)$

40. $y = \frac{\ln x}{x^2}$

41. $y = xe^{-x^2}$

42. $y = (x^2 - 3)e^{-x}$

43. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

44. $y = \tan^{-1}(\frac{x-1}{x+1})$

Gjeni një ekuacion për asimptotën oblike të kurbës:

45. $y = \frac{x^2+1}{x+1}$

46. $y = \frac{2x^3+x^2+x+3}{x^2+2x}$

47. $y = \frac{4x^3-2x^2+5}{2x^2+x-3}$

48. $y = \frac{5x^4+x^2+x}{x^3-x^2+2}$

49. *Vërtetoni se kurba*

$$y = \sqrt{x^2 + 4x}$$

ka dy asimptota oblike: $y = x + 2$ *dhe* $y = -x - 2$. *Përdoreni këtë fakt për të ndërtuar grafikun.*

50. *Vërtetoni se drejtëzat*

$$y = \frac{b}{a}x \text{ dhe } y = -\frac{b}{a}x.$$

janë asimptotat oblike të hiperbolës

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

51. *Le të jetë*

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x}.$$

Vërtetoni se

$$lim_{x\longrightarrow\infty}[f(x) - x^2] = 0.$$

Kjo tregon se grafiku i $f(x)$ *i afrohet grafikut të* $y = x^2$, *dhe themi se kurba* $y = f(x)$ *është asimptotike me parabolën* $y = x^2$. *Përdoreni këtë fakt për të skicuar grafikun e* $f(x)$.

52. *Përdorni sjelljen asimptotike të*

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{x^2},$$

për të skicuar grafikun e tij pa qenë nevoja të kalohet nëpër gjithë etapat e studimit të funksionit.

5.6 Problemet e optimizimit

Metodat që kemi mësuar në këtë kapitull për gjetjen e ekstreme ve gjejnë aplikime praktike në shumë fusha të jetës. Një biznesmen kërkon të minimizojë kostot dhe të maksimizojë fitimet. Një udhëtar kërkon të minimizojë kohën e udhëtimit. Në këtë paragraf dhe në vazhdim ne do të zgjidhim probleme të tilla si maksimizimi i sipërfaqeve, vëllimeve, dhe përfitimeve, si dhe minimizimi i distancave, kohës dhe kostos.

Në zgjidhjen e problemeve të tilla praktike problemi më i rëndësishëm është shpesh konvertimi i tyre në probleme të optimizimit matematik duke ndërtuar një funksion që duhet maksimizuar apo minimizuar.

Hapat në zgjidhjen e problemeve të optimizimit

1. **Të kuptuarit e problemit:** Hapi i parë është të lexuarit me kujdes i problemit derisa ai të behet i qartë për lexuesin. Pyesni veten: Çfarë është e panjohur? Cilat janë të dhënat? Cilat janë kushtet e dhëna?

2. **Vizatimi i një diagrame:** Në shumë probleme është e përdorshme që të vizatohet një diagramë dhe të identifikohen të dhënat dhe ato që kërkohen në atë diagramë.

3. **Konvertimi i të dhënave:** Shënojmë me një simbol madhësinë e cila duhet maksimizuar apo minimizuar(le ta quajmë Q tani për tani). Gjithashtu zgjedhim simbolet $(a, b, c, \cdots, x, y)$ për madhësitë e tjera të panjohura dhe e lidhim diagramën me të panjohurat me këto simbole. Mund të jetë me vend përdorimi i inicialeve si simbole - për shembull, S për sipërfaqen, h për lartësinë, t për kohën.

4. Shprehim Q në termat e ndonjë prej simboleve të hapit 3.

5. Në qoftë se Q është shprehur si funksion i më shumë se dy variblave në hapin 4, përdorni informacionin e dhënë për të gjetur lidhje në formën e ekuacioneve midis këtyre ndryshoreve. Atëherë, përdorini këto ekuacione për t'i eleminuar këto ndryshore me përjashtim të njërit në shprehjen e Q. Në këtë mënyrë Q do shprehet si funksion i një ndryshorja x, të themi $Q = f(x)$. Shkruajmë bashkësinë e përkufizimit të këtij funksioni.

6. Përdorim metodat e dy paragrafeve të mëparshëm për të gjetur maksimumin apo minimumin absolut të $f(x)$. Në qoftë se bashkësia e përkufizimit të $f(x)$ është një interval i mbyllur, atëherë metoda e intervalit të mbyllur mund të përdoret.

Shembull 5.34. *Një fermer ka 2400m tel dhe kërkon të rrethojë një fushë drejtkëndore e cila kufizohet nga njëra anë nga lumi. Ai kërkon të rrethojë përgjatë lumit. Cilat janë përmasat e fushës që ajo të ketë sipërfaqen më të madhe?*

Zgjidhje: Do të donim të maksimizonim sipërfaqen S të drejtëndëshit. Le të jenë x dhe y gjerësia dhe gjatësia e drejtëndëshit (në metra). Atëherë, shprehim S në termat e x dhe y:

$$S = xy$$

por duam ta shprehim S në varësi vetëm të një variabli, prandaj ne eleminojmë y duke e shprehur në varësi të x. Për të bërë këtë, përdorim informacionin e dhënë se gjatësia në total është 2400m. Prandaj

$$2x + y = 2400$$

Nga ky ekuacion kemi $y = 2400 - 2x$, që jep

$$S = x(2400 - 2x) = 2400x - 2x^2$$

Vërejmë se $x \geq 0$ dhe $x \leq 1200$ (në të kundërt $S < 0$). Kështu që funksioni që duam të maksimizojmë është

$$S(x) = 2400x - 2x^2 \quad 0 \leq x \leq 1200$$

Derivati është $S'(x) = 2400 - 4x$, prandaj për të gjetur pikat kritike ne zgjidhim ekuacionin

$$2400 - 4x = 0$$

i cili na jep $x = 600$. Vlera maksimum e S mund të ndodhë ose në pikën kritike ose në skajet e intervalit. Meqë $S(0) = 0$, $S(600) = 720,000$, dhe $S(1200) = 0$, metoda e intevalit të mbyllur jep vlerën maksimum $S(600) = 720,000$.

Pra, fusha drejtkëndore duhet të jetë $600m$ e gjerë dhe $1200m$ e gjatë.

□

Shembull 5.35. *Një enë cilindrike është bërë për të mbajtur* 1*L vaj. Gjeni përmasat që minimizojnë koston e metalit që duhet për prodhimin e enës së vajit.*

Zgjidhje: Le të jetë r rrezja dhe h lartësia e cilindrit (të dyja në centimetra). Në mënyrë që të minimizohet kostoja e metalit, ne minimizojmë sipërfaqen totale të cilindrit. Sipërfaqja anësore është një drejtkëndësh me përmasa $2\pi r$ dhe h. Prandaj sipërfaqja është

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

për të eleminuar h përdorim faktin se vëllimi është $1L$, që i bie të jetë $1000cm^3$. Prandaj

$$\pi r^2 h = 1000$$

e prej këtej $h = 1000/(\pi r^2)$. Duke zëvendësuar këtë në shprehjen e sipërfaqes do të kemi

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r(\frac{1000}{\pi r^2}) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

Atëherë funksioni që duem të minimizojmë është

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \quad r > 0$$

Për të gjetur pikën kritike, derivojmë:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4(\pi r^3 - 500)}{r^2}$$

Atëherë $S'(r) = 0$ kur $\pi r^3 - 500 = 0$, prandaj e vetmja pikë kritike është $r = \sqrt[3]{500/\pi}$. Meqë bashkësia e përkufizimit të S është $(0, \infty)$, ne s'mund të përdorim testin e intervalit të mbyllur. Por mund të vërejmë se $S'(r) < 0$ për $r < \sqrt[3]{500/\pi}$ dhe $S'(r) > 0$ për $r > \sqrt[3]{500/\pi}$. Kështu që $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ përbën pikën e minimumit lokal. Vlera korresponduese e h në lidhje me r është

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi(500/\pi)^{2/3}} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

Prandaj për të minimizuar koston e prodhimit të enës cilindrike duhet që rrezja e bazës të jetë $r = \sqrt[3]{500/\pi}$ cm dhe lartësia sa dyfishi i rrezes.

□

Vërejtje 5.6. *Argumenti i përdorur në shembullin e mësipërm për minimumin absolut vjen si rrjedhojë e testit të derivatit të parë (i cili përdoret për ekstreme t lokale) dhe ne do t'i referohemi në të ardhmen.*

Lema 5.3 (Testi i derivatit të parë për vlerat ekstreme absolute)**.** *Supozojmë se c është një pikë kritike e një funksioni të vazhdueshëm $f(x)$ të përkufizuar në një interval.*

(a) *Në qoftë se $f'(x) > 0$ për të gjitha $x < c$ dhe $f'(x) < 0$ për të gjitha $x > c$, atëherë $f(c)$ është vlera maksimum absolut e $f(x)$.*

(b) *Në qoftë se $f'(x) < 0$ për të gjitha $x < c$ dhe $f'(x) > 0$ për të gjitha $x > c$, atëherë $f(c)$ është vlera minimum absolut e $f(x)$.*

Vërejtje 5.7. *Një metodë alternative për zgjidhjen e problemit të optimizimit është përdorimi i derivimit implicit. Le ta shohim edhe një herë shembullin e mësipërm për të këtë metodë. Punojmë me të njëjtin ekuacion.*

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \quad \pi r^2 h = 1000$$

Por në vend që të eleminojmë h ne derivomë në mënyrë implicite të dy ekuacionet në lidhje me r:

$$S' = 4\pi r + 2\pi h + 2\pi rh' \quad 2\pi rh + \pi r^2 h' = 0$$

Minimumi ndodh në pikat kritike, kështu që marrim $S' = 0$ thjeshtojmë dhe arrijmë në ekuacionet

$$2r + h + rh' = 0 \quad 2h + rh' = 0$$

dhe nga faktorizimi kemi $2r - h = 0$, ose $h = 2r$.

Shembull 5.36. *Gjeni pikën e parabolës $y^2 = 2x$ e cila është më afër pikës $(1, 4)$.*

Zgjidhje: Distanca ndërmjet pikës $(1, 4)$ dhe (x, y) është

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

Por në qoftë se (x, y) ndodhet në parabolë, atëherë $x = y^2/2$, kështu që shprehja për d bëhet

$$d = \sqrt{(\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y-4)^2}$$

(ose ndryshe mund të zëvendësonim $y = \sqrt{2x}$ për të nxjerrë d në terma vetëm të x.) Në vend që të minimizojmë d ne minimizojmë d^2:

$$d^2 = f(y) = (\frac{1}{2}y^2 - 1)^2 + (y-4)^2$$

Duke derivuar përftojmë

$$f'(y) = 2(\frac{1}{2}y^2 - 1)y + 2(y-4) = y^3 - 8$$

prandaj $f'(y) = 0$ për $y = 2$. Vërejmë se $f'(y) < 0$ kur $y < 2$ dhe $f'(y) > 0$ kur $y > 2$, kështu që nga testi i derivatit të parë dhe nga testi i vlerave ekstreme absolute, minimumi absolut ndodh për $y = 2$. Vlera korresponduese e x është $x = \frac{y^2}{2} = 2$. Pra, pika në parabolën $y^2 = 2x$ që ndodhet më afër pikës $(1, 4)$ është $(2, 2)$.

□

Shembull 5.37. *Një njeri leshoi barkën e vet në një breg lumi me gjerësi 3km në pikën A dhe kërkon të mbërrijë në pikën B, 8km larg nga pika korresponduese e A në anën tjetër të lumit, sa më shpejt të jetë e mundur. Ai mund ta drejtojë barkën drejt tek pika C e më pas të shkojë në B, por mund t'i drejtohet direkt pikës B, por edhe mund t'i drejtohet fillimisht një pike D ndërmjet C dhe B e prej këtej tek B. Në qoftë se ai vozit me 6km/h dhe vrapon me 8km/h, ku duhet të drejtohet që të arrijë tek B sa më shpejt të jetë e mundur? (Pranojmë se shpejtësia e lumit është e papërfillshme në krahasim me shpejtësinë me të cilën vozit njeriu.)*

Zgjidhje: Le të jetë x distanca nga C në D, kështu që distanca e vrapimit është $|DB| = 8 - x$ dhe nga teorema e Pitagorës distanca e lundrimit është $|AD| = \sqrt{x^2 + 9}$. Përdorim ekuacionin

$$koha = \frac{distancë}{shpejtësi}$$

Atëherë koha e lundrimit është $\sqrt{x^2 + 9}/6$ dhe koha e vrapimit $(8 - x)/8$, dhe koha në total T si funksion i x është

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

Bashkësia e përkufizimit të funksionit T është $[0, 8]$. Vërejmë se po qe se $x = 0$ ai vozit tek C dhe në qoftë se $x = 8$ ai vozit drejtpërdrejt tek B. Derivati i T është

$$T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$$

Prandaj duke përdorur faktin se $x \geq 0$, kemi

$$T'(x) = 0 \iff \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} = \frac{1}{8} \iff 4x = 3\sqrt{x^2+9} \iff 16x^2 = 9(x^2+9) \iff 7x^2 = 81 \iff x = \frac{9}{\sqrt{7}}$$

E vetmja pikë kritike është $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$. Për të parë se ku ndodh minimumi, tek pika kritike apo në skajet e bashkësisë së përkufizimit $[0, 8]$, ne llogarisim T në të tre pikat:

$$T(0) = 1.5 \quad T\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \quad T(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Meqë më e vogla nga këto vlera ndodh për $x = \frac{9}{\sqrt{7}}$, minimumi absolut ndodh pikërisht këtu. □

Shembull 5.38. *Gjeni sipërfaqen e drejtëkëndëshit më të madh që mund t'i brendashkruhet një gjysmërrethi me rreze r.*

Zgjidhje: Le të jetë gjysmërrethi i rrethit me rreze r, $x^2 + y^2 = r^2$ me qendër origjinën e koordinatave. Fjala i nënshkruar do të thotë se drejtkëndëshi ka dy kulme në gjysmërreth dhe dy kulme të tjera në boshtin e x. Le të jetë (x, y) një kulm që ndodhet në kuadrantin e parë. Atëherë, drejtkëndëshi ka brinjët me gjatësi $2x$ dhe y, kështu që sipërfaqja e tij do jetë

$$S = 2xy$$

Për të eleminuar y përdorim faktin se (x, y) ndodhet në rrethin $x^2 + y^2 = r^2$ dhe prej këtej $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Prandaj

$$S = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Bashkësia e përkufizimit të këtij funksioni është $0 \leq x \leq r$. Derivati i tij është

$$S' = 2\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2(r^2 - 2x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

i cili është zero kur $2x^2 = r^2$, pra $x = r/\sqrt{2}$. Kjo vlerë e x jep vlerën maksimum të S meqënëse $S(0) = 0$ dhe $S(r) = 0$. Prej nga sipërfaqja e drejtkëndëshit më të madh të brendashkruar është

$$S\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{r}{\sqrt{2}}\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = r^2$$

□

Ushtrime:

1. *Gjeni sipërfaqen e drejtëkëndëshit më të madh që mund ti brendashkruhet nje trekëdëshi këndëdrejte me katete 3 dhe 4 cm, kur dy brinjë të drejtëkëndëshit shtrihen mbi katete.*

2. *Një drejtëkendësh është brendashkruar në një sferë me reze r. Gjeni volumin më të madh të mundshëm të këtij cilindri.*

3. *Gjeni sipërfaqen e drejtëkëndëshit më të madh që mund ti brendashkruhet elipsit*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4. *Na jepet 1200 cm^3 material për të ndërtuar nje kuti me bazë katrore dhe kapak te hapur. Gjeni volumin më të madh të mundshëm të kutisë.*

5. *Gjeni dy numra diferenca e të cilëve është 100 dhe produkti minimum.*

6. *Gjeni dy numra pozitovë produkti i të cilëve është 100 dhe shuma është minimum.*

7. *Gjeni një numër pozitiv të tille që shuma e atij numri me të anasjelltin e tij të jetë sa më e vogël që të jetë e mundur.*

8. *Gjeni dimensionet e një drejtëkëndëshi me perimeter 100 m sipërfaqja e të cilit është sa më e madhe.*

9. *Një ekip futbolli loz në një stadium me 55 000 vende. Çmimet e biletave janë 10 Euro dhe stadiumi eshte mbushur mesatarisht me 27 000 spektatorë. Kur çmimet e biletave u ulën tek 8 Euro atehere stadiumi mbushej mesatarisht me 33 000 spektatorë.*

i) Gjeni funksioni e kërkesës (demand function) duke supozuar se është linear.

ii) Sa duhet te jenë çmimet e biletave që të maksimizojmë revenue?

10. *Në cilën pikë të kurbës*

$$y = 1 + 40x^3 - 3x^5$$

tangjentja ka koefiçentin këndor më të madh?

11. *Vërtetoni se nga të gjithë trekëndëshat dybrinjishëm me nje perimetër fiks, ai me sipërfaqe më të madhe është trekëndëshi barabrinjës.*

5.7 Metoda e përafrimit të Njutonit

Supozojmë se një shitës makinash ju ofron për të shitur një makinë për 18, 000 dollarë me pagesa me këste prej 375 dollarë në muaj për pesë vjet. Ju do të donit të dinit se me cfarë interesi mujor janë këstet. Për të gjetur përgjigjen, juve ju duhet të gjeni zgjidhjen e ekuacionit

$$48x(1+x)^{60} - (1+x)^{60} + 1 = 0 \tag{5.10}$$

Si do ta zgjidhnit ju një ekuacion të tillë? Për një ekuacion kuadratik $ax^2 + bx + c = 0$ ka një formulë të njohur për rrënjët. Për ekuacionet e gradës së tretë dhe të katërt ka gjithashtu formula për rrënjët, por ato janë më të ndërlikuara. Në qoftë se $f(x)$ është një polinom i gradës së pestë, ose më të lartë, në përgjithësi nuk ka formula të tilla. Po njëlloj nuk ka formula që të na mundësojnë gjetjen e rrënjëve të sakta të ekuacioneve transhendente si $\cos x = x$.

Ne mund të gjejmë një zgjidhje të përafërt të ekuacionit të mësipërm duke përdorur grafikun e anës së majtë të ekuacionit.

Ne shohim se së bashku me zgjidhjen $x = 0$ që nuk paraqet interes për ne, ka një tjetër zgjidhje ndërmjet 0.007 dhe 0.008. Duke zmadhuar drejtëkëndëshin e pamjes, na del se rrënja është afërsisht 0.0076. Në qoftë se duam ta saktësojmë akoma më shumë ne mund të zmadhojmë në mënyrë të përsëritur, por kjo është e bezdisshme. Një alternativë më e shpejtë është përdorimi i një makine llogaritëse për gjetjen e rrënjëve apo i një sistemi kompjuterik algjebrik. Në qoftë se ne veprojmë në këtë mënyrë, ne gjejmë se rrënja me saktësi deri në nëntë shifra pas presjes është 0.007628603

Si punojnë këto sisteme numerike? Ato përdorin një mori metodash por shumica e tyre përdorin metodën e Njutonit, e cila quhet gjithashtu metoda Njuton - Raphson. Ne do të shpjegojmë se si funksionon kjo metodë, pjesërisht duke treguar se c'ndodh brenda makinës llogaritëse apo kompjuterit dhe pjesërisht si një zbatim i idesë së përafrimit linear.

Ne e fillojmë me përafrimin e parë x_1. Shqyrtojmë tangenten L ndaj grafikut $y = f(x)$ në pikën $(x_1, f(x_1))$ dhe shohim se L pritet me boshtin e x-ve në x_2. Ideja më pranë metodës së Njutonit është që tangentja është shumë afër kurbës dhe kështu pikëprerja me boshtin e x-ve x_2 është afër me pikëprerjen e kurbës me boshtin e x-ve (pra me rrënjën r). Meqë tangentja është drejtëz, ne mund ta gjejmë lehtë pikëprerjen me boshtin e x-ve.

Për të gjetur një formulë për x_2 në termat e x_1 përdorim faktin se koefiçenti këndor i L është $f'(x)$, kështu që ekuacioni i saj është

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Meqë pikëprerja me L është x_2, ne marrim $y = 0$ dhe do të kemi

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Në qoftë se $f'(x_1) \neq 0$ ne mund të zgjidhim këtë ekuacion në lidhje me x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Ne përdorim x_2 si përafrim të dytë në lidhje me r.

E më pas ne përsërisim këtë procedurë me x_1 duke e zëvendësuar me x_2, duke përdorur tangenten në pikën $(x_2, f(x_2))$. Kjo jep një përafrim të tretë:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Në qoftë se ne e vazhdojmë përsëritjen e këtij procesi, përftojmë një varg përafrimesh $x_1, x_2, x_3, \cdots$. Në përgjithësi në qoftë se përafrimi i n-t është x_n dhe $f'(x_n) \neq 0$, atëherë përafrimi tjetër jepet nga

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Në qoftë se numrat x_n bëhen gjithnjë e më të afërt me r kur n bëhet shumë e madhe, atëherë ne themi se vargu konvergjon tek r dhe shkruajmë

$$\lim_{n\to\infty} x_n = r$$

Shembull 5.39. *Duke u nisur nga $x_1 = 2$, gjeni përafrimin e tretë x_3 të rrënjës së ekuacionit*

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Zgjidhje: Përdorim metodën e Njutonit me $f(x) = x^3 - 2x - 5$ dhe $f'(x) = 3x^2 - 2$

Vetë Njutoni e ka përdorur këtë ekuacion për të ilustruar metodën e tij dhe zgjodhi $x_1 = 2$ pas disa eksperimentimeve sepse $f(1) = -6$, $f(2) = -1$, dhe $f(3) = 16$. Atëherë

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

për $n = 2$ kemi

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2} = 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2.1$$

Atëherë, me $n = 2$ ne përftojmë

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2} = 2.1 - \frac{(2.1)^3 - 2(2.1) - 5}{3(2.1)^2 - 2} \approx 2.0946$$

Pra, del se përafrimi i tretë $x_3 \approx 2.0946$ është me saktësi deri në katër shifra pas presjes dhjetore.

□

Supozojmë se duam të arrijmë në saktësinë e duhur deri në të themi tetë shifra pas presjes dhjetore, duke përdorur metodën e Njutonit. Si mund ta dimë se kur duhet të ndalojmë? Rregulli që përdoret në përgjithësi është ai: kur përafrimet e njëpasnjëshme x_n dhe x_{n+1} përputhen deri në tetë shifra pas presjes dhjetore. Shohim se proçedura e kalimit nga n në $n+1$ është e njëjtë për të gjitha n. Kjo do të thotë se proçedura është mjaft e përshtatshme për përdorim në një makinë llogaritëse apo kompjuter.

Shembull 5.40. *Përdorni metodën e Njutonit për të gjetur $\sqrt[6]{2}$ me saktësi deri në tetë shifra pas presjes.*

Zgjidhje: Fillimisht vërejmë se gjetja e $\sqrt[6]{2}$ është ekuivalente me gjetjen e rrënjës pozitive të ekuacionit

$$x^6 - 2 = 0$$

kështu që marrim $f(x) = x^6 - 2$ dhe $f'(x) = 6x^5$ dhe formula e Njutonit bëhet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^6 - 2}{6x_n^5}$$

Në qoftë se zgjedhim $x_1 = 1$si përafrim fillestar, atëherë përftojmë

$$x_2 \approx 1.16666667$$

$$x_3 \approx 1.12644368$$
$$x_4 \approx 1.12249707$$
$$x_5 \approx 1.12246205$$
$$x_6 \approx 1.12246205$$

Meqë x_5 dhe x_6 përputhen deri në tetë shifra pas presjes, konludojmë se

$$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$$

deri në tetëshifra pas presjes.

□

Shembull 5.41. *Gjeni rrenjët e*

$$f(x) = x^3 - 2x^2,$$

me pikë fillestare $x = \frac{1}{2}$.

Zgjidhje: Një paraqitje grafike është dhënë në Fig. 5.11. Lexuesi të kryejë llogaritjet dhe të vërtetpjë se pas 10 hapash ne marrim

$$x_{10} = 0.0003501180175$$

dhe pas 100 hapash kemi

$$x_{100} = 2.82773566410^{-31}.$$

□

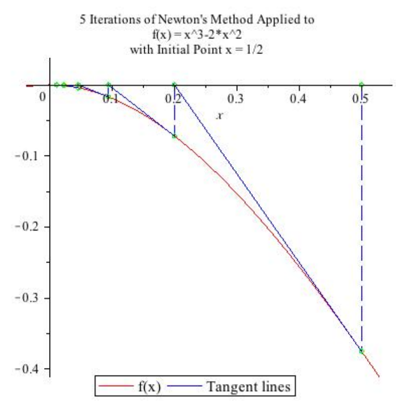


Figura 5.11: Metoda e Njutonit për $f(x) = x^3 - 2x^2$.

Shembull 5.42. *Gjeni deri me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes rrënjën e ekuacionit*

$$\cos x = x$$

Zgjidhje: Fillimisht e rishkruajmë ekuacionin në trajtën standarte:

$$\cos x - x = 0$$

prej nga $f(x) = \cos x - x$ dhe $f'(x) = -\sin x - 1$, dhe formula e Njutonit bëhet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos x_n - x_n}{-\sin x_n - 1} = x_n + \frac{\cos x_n - x_n}{\sin x_n + 1}$$

Në mënyrë që të supozojmë një vlerë të përshtatshme për x_1 studjojmë grafikun e $y = \cos x$ dhe $y = x$. Duket se ata priten në një pikë abshisa e të cilës është diçka më pak se 1, kështu që le ta marrim $x_1 = 1$ si prafrim fillestar. Atëherë, marrim

$$x_2 \approx 0.75036387$$
$$x_3 \approx 0.73911289$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$
$$x_5 \approx 0.73908513$$

Meqë x_4 dhe x_5 përputhen deri në gjashtë shifra pas presjes (tetë në fakt) ne arrijmë në përfundimin se rrënja me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes, është 0.73908513.

□

Ne mund të përdorim grafikun e dhënë nga një makinë llogaritëse grafike ose një kompjuter. Një grafik me kalkulator sugjeron që të përdorim $x_1 = 0.75$ si përafrim fillestar. Dhe prej këtej metoda e Njutonit na jep

$$x_2 \approx 0.73911114$$
$$x_3 \approx 0.73908513$$
$$x_4 \approx 0.73908513$$

pra ne përftojmë të njëjtën përgjigje por më shpejt se më parë. Ju mund të pyesni se pse nuk përdret gjithmonë metoda e Njutonit duke u nis nga paraqitja grafike në një kompjuter? Por përgjigja është sepse kur kërkohet saktësia deri në një ose dy shifra pas presjes jemi në rregull me përdorimin e grafikut, por kur kërkohet saktësi më e madhe, zmadhimi herë pas here i grafikut është i bezdisshëm.

Ushtrime:

1. *Supozojmë se drejtëza $y = 5x - 4$ është tangente me kurbën $y = f(x)$ kur $x = 3$. Në qoftë se përdoret metoda e Njutonit për të lokalizuar rrënjën e ekuacionit $f(x) = 0$ dhe pvrafrimi fillestar është $x_1 = 3$, gjeni përafrimin e dytë x_2.*

2. *Përdorni metodën e Njutonit me përafrim fillestar të fiksuar x_1, për të gjetur x_3, përafrimin e tretë të rrënjës së ekuacionit të dhënë.*

$x^3 + 2x - 4 = 0$, $x_1 = 1$

3. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3 = 0$, $x_1 = -3$

4. $x^5 - x - 1 = 0$, $x_1 = 1$

5. $x^5 + 2 = 0$, $x_1 = -1$

6. *Përdorni metodën e Njutonit me përafrim fillestar $x_1 = -1$ për të gjetur x_2 përafrimin e dytë të rrënjës së ekuacionit $x^3+x+3 = 0$. Shpjegoni sesi funksionon metoda duke ndërtuar fillimisht grafikun e funksionit dhe tnagentes në $(-1, 1)$*

7. *Përdorni metodën e Njutonit për të përafruar numrat e dhënë ma saktësi deri në tetë shifra pas presjes dhjetore.*

$\sqrt[5]{20}$, $\sqrt[100]{100}$

8. *Përdorni metodën e Njutonit për të përafruar rrënjën e ekuacionit të dhënë ma saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes dhjetore.*

$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 6 = 0$ *në intervalin* $[1, 2]$

9. $2.2x^5 - 4.4x^3 + 1.3x^2 - 0.9x - 4.0 = 0$ *në intervalin* $[-2, -1]$

10. *Rrënjën pozitive të* $\sin x = x^2$

11. *Rrënjën pozitive të* $2 \cos x = x^4$

12. *Përdorni metodën e Njutonit për të gjetur të gjithë rrënjët e ekuacionit me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes dhjetore.*

$x^4 = 1 + x$

13. $e^x = 3 - 2x$

14. $(x - 2)^2 = \ln x$

15. $\frac{1}{x} = 1 + x^3$

16. $\cos x = \sqrt{x}$

17. $\tan x = \sqrt{1 - x^2}$

18. *Përdorni metodën e Njutonit për të gjetur të gjitha rrënjët e ekuacionit me saktësi deri në tetë shifra pas presjes dhjetore. Niseni duke vizatuar grafikun për të përcaktuar përafrimin fillestar.*

$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 10 = 0$

19. $x^2(4 - x^2) = \frac{4}{x^2+1}$

20. $x^2 \sqrt{2 - x - x^2} = 1$

21. $3 \sin(x^2) = 2x$

22. $4e^{-x^2} \sin x = x^2 - x + 1$

23. $e^{\arctan x} = \sqrt{x^3 + 1}$

24. *Shpjegoni pse nuk funksionon metoda e Njutonit në gjetjen e rrënjës së ekuacionit $x^3 - 3x + 6 = 0$, në qoftë se përafrimi fillestar është zgjedhur të jetë $x_1 = 1$.*

25. *(a) Përdorni metodën e Njutonit me $x_1 = 1$ për të gjetur rrënjën e $x^3 - x = 1$ me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes dhjetore.*

(b) Zgjidheni ekuacionin e pikës (a) duke përdorur $x_1 = 0.6$ si përafrim fillestar.

(c) Zgjidheni ekuacionin e pikës (a) duke përdorur $x_1 = 0.57$ si përafrim fillestar.

(d) Ndërtoni grafikun e $f(x) = x^3 - x - 1$ dhe tangentes së tij në $x_1 = 1$, $x_1 = 0.6$, dhe $x_1 = 0.57$ për të shpjeguar pse metoda e Nutonit është kaq e ndjeshme ndaj vlerës së përafrimit fillestar.

26. *(a) Përdorni metodën e Njutonit për të gjetur numrat kritikë të funksionit $f(x) = x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x$ me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes.*

(b)Gjeni vlerën e minimumit absolut të $f(x)$ me saktësi deri në katër shifra pas presjes dhetore.

27. *Përdorni metodën e Njutonit për të gjetur vlerën e maksimumit absolut të funkionit $f(x) = x \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes.*

28. *Në pafundësinë e drejtëzave që janë tangente ndaj kurbës $y = -\sin x$ dhe që kalojnë nga origjina njëra prej tyre ka koeficentin këndor më të madh. Përdorni etodën e Njutonit për të gjetur koefiçentin këndor të kësaj drejtëze me saktësi deri në gjashtë shifra pas presjes dhjetore.*

5.8 Antiderivatet

Një fizikant i cili njeh shpejtësinë e lëvizjes së një grimce, mund t'i nevojitet të dijë pozicionin e saj në një moment të caktuar kohe. Një inxhinjer i cili mund të masë shpejtësinë me të cilën rrjedh uji nga një rezervuar, mund t'i nevojitet të dijë sasinë e ujit që ka rrjedhë gjatë një periudhe të caktuar kohe. Një biolog i cili njeh shpejtësinë me të cilën rritet një popullim bakteriesh mund të dojë të dijë se sa do të jetë popullimi në një kohë në të ardhmen. Në secilin rast, problemi është të gjendet një funksion $f(x)$ derivati i të cilit dihet se është $f(x)$.

Përkufizim 5.6. Një funksion $f(x)$ quhet antiderivat (primitivë) i $f(x)$ në një interval I në qoftë se $F'(x) = f(x)$ për të gjithë x në I.

Për shembull, le të jetë $f(x) = x^2$. Nuk është e vështirë të gjesh një antiderivat (primitivë) të këtij funksioni duke kujtuar rregullin fuqi të derivimit. Në fakt, në qoftë se $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, atëherë $F'(x) = x^2 = f(x)$. Por funksioni $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100$ gjithashtu kënaq barazimin $G'(x) = x^2$. Prej nga të dy funksionet $f(x)$ dhe G janë primitivë të $f(x)$. Për më tepër çdo funksion i formës $H(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$, ku C është një konstante, është një primitivë e funksionit $f(x)$. Lind pyetja: A ka të tjera primitiva?

Për t'ju përgjigjur kësaj pyetjeje, rikujtojmë se në fillim të këtij kapitulli ne përdorëm teoremën Langranzh për të vërtetuar se dy funksione që kanë në një interval të njëjtin derivat, atëherë ata ndryshojnë nga njëri tjetri me një konstante. Prandaj në qoftë se $f(x)$ dhe G janë dy primitivë të $f(x)$, atëherë

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

kështu që $G(x) - F(x) = C$, ku C është një konstante. Mund ta shkruajmë këtë si $G(x) = F(x) + C$, kështu që kemi rezultatin e mëposhtëm.

Teorema 5.10. *Në qoftë se $f(x)$ është një primitivë e $f(x)$ në intervalin I, atëherë primitivi i përgjithshëm e $f(x)$ në I është*

$$F(x) + C$$

ku C është një konstante e çfarëdoshme.

Duke u kthyer tek funksioni $f(x) = x^2$, ne shohim se primitivi i përgjithshëm e $f(x)$ është $\frac{x^3}{3} + C$. Duke i dhënë vlera të veçanta konstantes C, ne përftojmë një familje funksionesh grafikët e të cilëve janë të zhvendosur vertikalisht nga njëri tjetri.

Më poshtë po japim antiderivatet e disa funksioneve elementare.

Funksioni	*Primitivë e vecantë*	*Funksioni*	*Primitive e vecante*
$cf(x)$	$cF(x)$	$\sin x$	$-\cos x$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$	$1/\cos^2 x$	$\tan x$
$x^n (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\frac{1}{\cos x}\tan x$	$\tan x$
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\sin^{-1} x$
e^x	e^x	$\frac{1}{1+x^2}$	$\tan^{-1} x$
$\cos x$	$\sin x$		

Tabela 5.5: Funksioni dhe primitivet

Shembull 5.43. *Gjeni primitivin e përgjithshëm të secilit prej funksioneve në vazhdim.*
(a) $f(x) = \sin x$
(b) $f(x) = 1/x$
(c) $f(x) = x^n$, $n \neq -1$

Zgjidhje: (a) Në qoftë se $F(x) = -\cos x$, atëherë $F'(x) = \sin x$, kështu që një primitivë e $\sin x$ është $-\cos x$. Dhe nga teorema e mësipërme primitivi i përgjithshëm do jetë $G(x) = -\cos x + C$.

(b) Rikujtojmë se $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Kështu që në intervalin $(0, \infty)$ primitivi i përgjithshëm $1/x$ është $\ln x + C$. Ne gjithashtu kemi mësuar se

$$\frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

për të gjitha $x \neq 0$. Teorema e mësipërme na thotë se primitivi i përgjithshëm i $f(x) = 1/x$ është $\ln |x| + C$ në çdo interval që nuk përmban 0. Në veçanti, kjo është e vërtetë në secilin nga intervalet $(-\infty, 0)$ dhe $(0, \infty)$. Kështu që primitivi i përgjithshëm i $f(x)$ është

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \textit{në qoftë se} \quad x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \textit{në qoftë se} \quad x < 0 \end{cases}$$

(c) Ne përdorim rregullin fuqi për të gjetur një primitiv të x^n. Në fakt, në qoftë se $n \neq -1$, atëherë

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n$$

kështu që primitivi i përgjithshëm për $f(x) = x^n$ është

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Kjo është e vlefshme për $n \geq 0$ duke qenë se $f(x) = x^n$ është përkufizuar në një interval. Në qoftë se n është negative (por $n \neq -1$), kjo ka vlerë për çdo interval që nuk përmban 0.

□

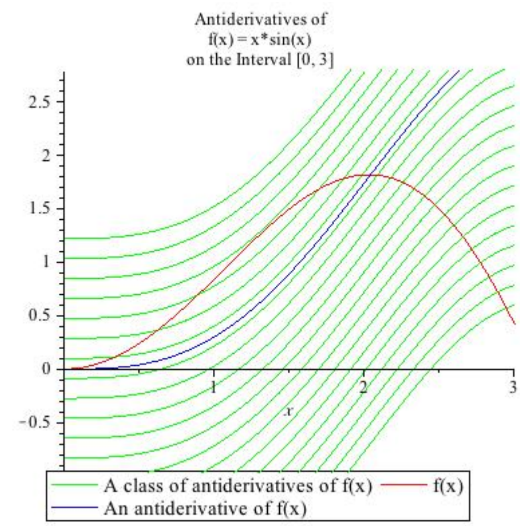


Figura 5.12: Antiderivativët e funksionit $f(x) = x \sin x$ në intervalin $[0, 3]$.

Ashtu si në shembullin e mësipërm, çdo formulë derivimi, kur lexohet nga e djathta në të majtë, na jep një formulë për gjetjen e primitivave. Në tabelën e mëposhtme ne po shënojmë disa primitivë të veçanta. Çdo formulë në tabelë është e vërtetë sepse derivati i funksionit në kollonën e djathtë është në kollonën e majtë. Në veçanti formula e parë thotë se primitivë e një funksioni shumëzuar me një konstante është e barabartë me konstanten shumëzuar me primitivën e vetë funksionit. Formula e dytë thotë se primitivë e shumës së dy funksioneve është e barabartë me shumën e primitivave të atyre funksioneve (përdorim shënimin $F' = f$ dhe $G' = g$).

Shembull 5.44. *Gjeni nje antiderivat të funksionit $f(x) = x \sin x$. Ndërtoni grafikun e këtij antiderivati në intervalin $[0, 3]$.*

Zgjidhje: Antiderivatët e $f(x) = x \sin x$ janë

$$\int x \sin x = \sin x - x \cos x + C.$$

Grafi i njërit prej tyre është dhënë në Fig. 5.13. Një klasë antiderivatesh është dhënë ne Fig. 5.12.

□

Në shembujt që vazhdojnë ne ndërtojmë grafikët e disa klasa antiderivatesh.

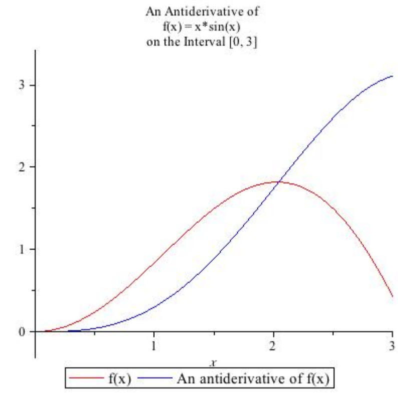


Figura 5.13: Një antiderivativët i funksionit $f(x) = x \sin x$ në intervalin $[0, 3]$.

Shembull 5.45. *Gjeni antiderivatët e funksionit*

$$f(x) = x^2 \sin x$$

në intervalin $[-3, 3]$.

Zgjidhje: Antiderivatët e $f(x) = x^2 \sin x$ janë

$$\int x^2 \sin x = -x^2 \cos x + 2 \cos x + 2x \sin x + C.$$

Grafi i njërit prej tyre është dhënë në Fig. 5.14.

□

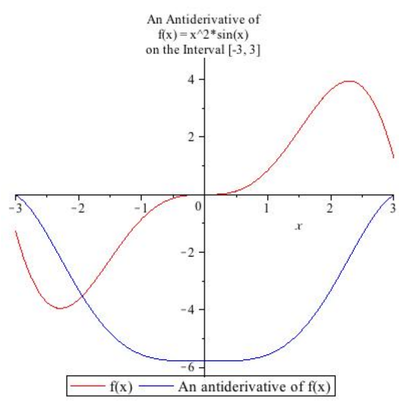


Figura 5.14: Antiderivativët e funksionit $f(x) = x^2 \sin x$ në intervalin $[-3, 3]$.

Shembull 5.46. *Gjeni antiderivativët e funksionit*

$$f(x) = x \cos x$$

në intervalin $[0, 2\pi]$.

Zgjidhje: Antiderivatët e $f(x) = x \cos x$ janë

$$\int x \cos x = \cos x + x \sin x + c$$

Grafi i tyre është dhënë në Fig. 5.15.

□

Shembull 5.47. *Gjeni të gjitha funksionet* $g(x)$ *të tilla që*

$$g'(x) = 4 \sin x + \frac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$$

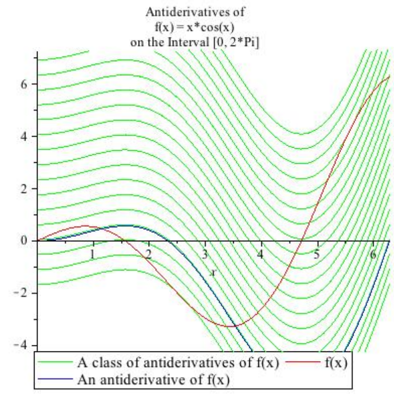


Figura 5.15: Antiderivativët e funksionit $f(x) = x \cos x$ në intervalin $[0, 2\pi]$.

Zgjidhje: Fillimisht e rishkruajmë funksionin e dhënë si më poshtë:

$$g'(x) = 4 \sin x + \frac{2x^5}{x} - \frac{\sqrt{x}}{x} = 4 \sin x + 2x^4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Kështu që ne duam të gjejmë një primitivë të funksionit

$$g'(x) = 4 \sin x + 2x^4 - x^{-1/2}$$

Duke përdorur formulat e tabelës së mësipërme së bashku me teoremën, përftojmë

$$g(x) = 4(-\cos x) + 2(\frac{x^5}{5}) - \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$
$$= -4 \cos x + \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + C$$

□

Në zbatimin e Kalkulusit është mjaft e zakonshme paraqitja e një situate të tillë si në këtë shembull, ku kërkohet të gjendet një funksion, kur njihen të dhëna për derivatin e tij. Një ekuacion që përfshin derivatin e funksionit quhet **ekuacion diferencial**. Një zgjidhje e përgjithshme e një ekuacioni diferencial përfshin një konstante të çfarëdoshme sikurse në shembullin e mësipërm. Megjithatë, mund të ketë disa kushte ekstra të dhëna, që mund të përcaktojmë konstanten e prej këtej të specifikojnë një zgjidhje të veçantë.

Shembull 5.48. *Gjeni $f(x)$ në qoftë se*

$$f'(x) = e^x + 20(1 + x^2)^{-1}$$

dhe $f(0) = -2$.

Zgjidhje: Primitivi i përgjithshëm e

$$f'(x) = e^x + \frac{20}{1 + x^2}$$

është

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1} x + C$$

Për të përcaktuar C përdorim faktin se $f(0) = -2$:

$$f(0) = e^0 + 20 \tan^{-1} 0 + C = -2$$

prej nga kemi $C = -2 - 1 = -3$, në veçanti zgjidhja është

$$f(x) = e^x + 20 \tan^{-1} x - 3$$

□

Shembull 5.49. *Gjeni $f(x)$ në qoftë se*
$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$$
dhe $f(0) = 4$, dhe $f(1) = -1$.

Zgjidhje: Primitivi i përgjithshëm e $f''(x) = 12x^2 + 6x - 4$ është
$$f'(x) = 12\frac{x^3}{3} + 6\frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^3 + 3x^2 - 4x + C$$
Duke përdorur rregullin e primitivës edhe një herë, gjejmë se
$$f(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + Cx + D = x^4 + x^3 - 2x^2 + Cx + D$$
Për të përcaktuar C dhe D përdorim kushtet e dhëna se $f(0) = 4$, dhe $f(1) = -1$. Meqë $f(0) = 0 + D$, kemi $D = 4$. Meqë
$$f(1) = 1 + 1 - 2 + C + 4 = 1$$
marrim $C = -3$. E prej këtej funksioni i kërkuar është
$$f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x + 4$$
□

5.8.1 Gjeometria e primitivave.

Në qoftë se na është dhënë grafiku i një funksioni $f(x)$, është e mundur që të skicohet edhe grafiku i një primitive të tij $f(x)$. Supozojmë për shembull se na është dhënë $F(0) = 1$. Atëherë, kemi një vend nga duhet të nisemi, pika $(0, 1)$, dhe drejtimin sipas të cilit duhet të lëvzim lapsin në letër që na e jep në çdo hap derivati $F'(x) = f(x)$. Në shembullin në vazhdim përdorim parimet e këtij kapitulli për të treguar se si ndërtohet grafiku i $f(x)$ edhe pse nuk kemi një formulë për $f(x)$. Mund të jetë një rast kur, për shembull $f(x)$ është përkufizuar sipas të dhënave eksperimentale.

Shembull 5.50. *Në qoftë se $f(x) = \sqrt{1 + x^2} - x$, skiconi grafikun e primitivës $f(x)$ që kënaq kushtin $F(-1) = 0$.*

Zgjidhje: Ne mund të përpiqemi gjithë ditën për të menduar për formulën e primitivës së $f(x)$, dhe të mos kemi sukses. Një mundësi e dytë do të jetë vizatimi i grafikut të $f(x)$ fillimisht dhe më pas duke përdorur atë skicimi i grafikut të $f(x)$ si në shembullin e mëparshëm. Kjo funksionon, por le të shohim një grafik më të përshtatshëm që merret nga i e ashtuquajtura **fushë e drejtimit**.

Meqë $f(0) = 1$, grafiku i $f(x)$ ka koefiçent 1 kur $x = 0$. Kështu ne vizatojmë segmente të shkurtra tangentesh me koefiçent 1, të gjitha të qendërzuara në $x = 0$. Bëjmë të njëjtën gjv me vlera të ndryshme të x. Quhet fusha e drejtimit sepse secili segment tregon drejtimin sipas së cilit kurba $y = F(x)$ procedon në atë pikë.

Tani ne përdorim fushën e drejtimit për të skicuar grafikun e $f(x)$. Meqë kushti fillestar është $F(-1) = 0$, ne nisemi nga pika $(-1, 0)$ dhe vizatojmë grafikun duke ndjekur drejtimin e segmenteve të tangenteve. Çdo primitivë tjetër mund të merret nga zhvendosja e grafikut të $f(x)$ lart ose poshtë.

□

5.8.2 Lëvizja drejtëtvizore

Primitivat janë përdorur zakonisht në analizimin e lëvizjes së një objekti përgjatë një vije të drejtë. Rikujtojmë se në qoftë se një objekt ka si funksion pozicion $s = f(t)$, atëherë funksioni shpejtësi është $v(t) = s'(t)$. Kjo do të thotë se funksioni pozicion është primitivë e funksionit shpejtësi. Në mënyrë të ngjashme funksioni nxitim është $a(t) = v'(t)$, prandaj funksioni shpejtësi është primitivë e funksionit nxitim. Në qoftë se nxitimi dhe vlerat fillestare $s(0)$ dhe $v(0)$ njihen, atëherë funksioni pozicion mund të gjendet duke përdorur rregullin e primitivës dy herë.

Shembull 5.51. *Një grimcë lëviz sipas një vije të drejtë dhe ka nxitim të dhënë nga $a(t) = 6t + 4$. Shpejtësia fillestare e saj është $v(0) = -6cm/s$ dhe pozicioni fillestar është $s(0) = 9cm$. Gjeni funksioni pozicion $s(t)$.*

Zgjidhje: Meqë $v'(t) = a(t) = 6t + 4$, kemi

$$v(t) = 6\frac{t^2}{2} + 4t + C = 3t^2 + 4t + C$$

Meqë $v(0) = C$ dhe na është dhënë se $v(0) = -6$ atëherë $C = -6$ dhe

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 6$$

Meqë $v(t) = s'(t)$, s është primitiv i v:

$$s(t) = 3\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} - 6t + D = t^3 + 2t^2 - 6t + D$$

Kjo jep $s(0) = D$. Na është dhënë $s(0) = 9$, kështu që $D = 9$ dhe funksioni pozicion i kërkuar është

$$s(t) = t^3 + 2t^2 - 6t + 9$$

□

Një objekt pranë sipërfaqes së tokës është subjekt i forcës gravitacionale që prodhon nxitimin e rënies së lirë të shënuar me $g(x)$. Për lëvizjen pranë tokës pranojmë se $g(x)$ është konstant, vlera e tij është rreth $9.8m/s^2$.

Ushtrime:

Gjeni primitivin e përgjithshëm të funksionit. Kontrolloni përgjigjen tuaj nëpërmjet derivimit.

1. $f(x) = x - 3$

2. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$

3. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x^3$

4. $f(x) = 8x^9 - 3x^6 + 12x^3$

5. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$

6. $f(x) = x(2 - x)^2$

7. $f(x) = 5x^{1/4} - 7x^{3/4}$

8. $f(x) = 2x + 3x^{1.7}$

9. $f(x) = 6\sqrt{x} - \sqrt[6]{x}$

10. $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[3]{x^4}$

11. $f(x) = \frac{10}{x^9}$

12. $f(x) = \frac{x^4+3\sqrt{x}}{x^2}$

13. $f(x) = 3e^x + 7\sec^2 x$

14. $f(x) = \cos x - 5\sin x$

15. $f(t) = \frac{\sin}{t} + 2\sinh t$

16. $f(x) = 5e^x - 3\cosh x$

17. $f(x) = \frac{x^5-x^3+2x}{x^4}$

18. $f(x) = \frac{2+x^2}{1+x^2}$

Gjeni primitivin $f(x)$ të $f(x)$ e cila kënaq kushtet e dhëna. Kotrolloni përgjigjen tuaj duke krahasuar grafikët e $f(x)$ dhe $f(x)$.

19. $f(x) = 5x^4 - 2x^5$, $F(0) = 4$

20. $f(x) = 4 - 3(1 + x^2)^{-1}$, $F(1) = 0$

Gjeni $f(x)$.

21. $f''(x) = 6x + 12x^2$

22. $f''(x) = 2 + x^3 + x^6$

23. $f''(x) = \frac{2}{3}x^{2/3}$

24. $f''(t) = e^t$

25. $f'''(t) = t - \sqrt{t}$

26. $f'(x) = 1 - 6x$, $f(0) = 8$

27. $f'(x) = 8x^3 + 12x + 3$, $f(1) = 6$

28. $f'(x) = \sqrt{x}(6 + 5x)$, $f(1) = 10$

29. $f'(x) = 2x - 3/x^4$, $x > 0$, $f(1) = 3$

30. $f'(x) = \frac{x^1-1}{x}$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(-1) = 0$

31. $f'(x) = x^{-1/3}$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$

32. $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, $f(\frac{1}{2}) = 1$

33. $f''(x) = 24x^2 + 2x + 10$, $f(1) = 5$, $f'(1) = -3$

34. $f''(x) = 4 - 6x - 10x^3$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 1$

35. $f''(x) = 2 - 12x$, $f(0) = 9$, $f(2) = 15$

36. $f''(x) = 20x^3 + 12x^2 + 4$, $f(0) = 8$, $f(1) = 5$

37. $f''(x) = 2 + \cos x$, $f(0) = -1$, $f(\pi/2) = 0$

38. $f''(t) = 2e^t + 3\sin t$, $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$

39. $f''(x) = x^{-2}$, $x > 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 0$

40. $f'''(x) = \cos x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f''(0) = 3$

41. *Është dhënë që grafiku i $f(x)$ kalon nga pika $(1, 6)$ dhe se koefiçenti këndor i tangentes në pikën $(x, f(x))$ është $2x + 1$, gjeni $f(2)$.*

42. *Gjeni një funksion $f(x)$ të tillë që $f'(x) = x^3$, dhe drejtëza $x + y = 0$ është tangente ndaj grafikut të $f(x)$.*

Ndërtoni grafikun e $f(x)$ dhe përdoreni për të skicuar primitivin që kalon nga origjina.

43. $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

44. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} - 1$, $-1.5 \leq x \leq 1.5$

Një grimcë lëviz sipas të dhënave të mëposhtme. Gjeni pozicionin e grimcës.

45. $v(t) = \sin t - \cos t$, $s(0) = 0$

46. $v(t) = 1.5\sqrt{t}$, $s(4) = 10$

47. $a(t) = t - 2$, $s(0) = 1$, $v(0) = 3$

48. $a(t) = \cos t + \sin t$, $s(0) = 0$, $v(0) = 5$

49. $a(t) = 10\sin t + 3\cos t$, $s(0) = 0$, $s(2\pi) = 12$

50. $a(t) = t^2 - 4t + 6$, $s(0) = 0$, $s(1) = 20$

51. *Vërtetoni se për lëvizjen drejtëvizore me nxitim konstant a, shpejtësi fillestare v_0, dhe zhvendosje fillestare s_0, zhvendosja pas kohës t është*

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0$$

52. *Çfarë nxitimi konstant kërkohet për të rritur shpejtësinë e një makine nga $30 km/h$ në $50 km/h$ në $5s$?*

Indeksi

Tabelat e integraleve

Formulat bazë:

1. $\int u dv = uv - \int v du$

2. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq 1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u du = e^u + C$

5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\int \sin u du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u du = \sin u + C$

8. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u du = \ln|\sin u| + C$

14. $\int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$

19. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{u+a}{u-a}| + C$

20. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln|\frac{u-a}{u+a}| + C$

Formulat që përmbajnë $\sqrt{a^2 + u^2}$**,** $a > 0$

21. $\int \sqrt{a^2 + u^2} = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + C$

22. $\int u^2 \sqrt{a^2+u^2} = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

23. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}| + C$

24. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

25. $\int \frac{u^2du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2\ln(u+\sqrt{a^2+u^2})} + C$

26. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln(u+\sqrt{a^2+u^2}) + C$

27. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}| + C$

28. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$

29. $\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

Formulat që përmbajnë $\sqrt{a^2-u^2}$, $a>0$

30. $\int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} - \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}| + C$

33. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\int \frac{u^2du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}| + C$

36. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2} + C$

37. $\int (a^2-u^2)^{3/2}du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\sin^{-1}\frac{u}{a} + C$

38. $\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$

Formulat që përmbajnë $\sqrt{u^2-a^2}$, $a>0$

39. $\int \sqrt{u^2-a^2}du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

40. $\int u^2\sqrt{u^2-a^2}du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

41. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{|u|} + C$

42. $\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

43. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

44. $\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

45. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u} + C$

46. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}} + C$

Formulat që përmbajnë $a + bu$

47. $\int \frac{udu}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a + bu - a\ln|a + bu|) + C$

48. $\int \frac{u^2du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}[(a + bu)^2 - 4a(a + bu) + 2a^2\ln|a + bu|] + C$

49. $\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln|\frac{u}{a+bu}| + C$

50. $\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2}\ln|\frac{a+bu}{u}| + C$

51. $\int \frac{udu}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2}\ln|a + bu| + C$

52. $\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)} - \frac{1}{a^2}\ln|\frac{a+bu}{u}| + C$

53. $\int \frac{u^2du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}(a + bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a\ln|a + bu|) + C$

54. $\int u\sqrt{a + bu}du = \frac{2}{15b^2}(3bu - 2a)(a + bu)^{3/2} + C$

55. $\int \frac{udu}{\sqrt{(a+bu)}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a + bu} + C$

56. $\int \frac{u^2du}{\sqrt{(a+bu)}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2 + 3b^2u^2 - 4abu)\sqrt{a + bu} + C$

57. $\int \frac{du}{u\sqrt{(a+bu)}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}| + C$, *në qoftë se* $a > 0$

$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C$, *në qoftë se* $a < 0$

58. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}du = 2\sqrt{a + bu} + a\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\int u^n\sqrt{a + bu}du = \frac{2}{b(2n+3)}[u^n(a + bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}du]$

61. $\int \frac{u^ndu}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)}\int \frac{u^{n-1}du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int \frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

63. $\int \sin^2 udu = \frac{1}{2}u - \frac{1}{4}\sin 2u + C$

64. $\int \cos^2 udu = \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sin 2u + C$

65. $\int \tan^2 udu = \tan u - u + C$

66. $\int \cot^2 udu = -\cot u - u + C$

67. $\int \sin^3 udu = -\frac{1}{3}(2 + \sin^2 u)\cos u + C$

68. $\int \cos^3 udu = \frac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\sin u + C$

69. $\int \tan^3 udu = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\int \cot^3 udu = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\sin u| + C$

71. $\int \sec^3 udu = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

72. $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\int \sin^n u du = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} u du$

74. $\int \cos^n u du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u du$

75. $\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u du$

76. $\int \cot^n u du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u du$

77. $\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u du$

78. $\int \csc^n u du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u du$

79. $\int \sin au \sin bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu du = \frac{\sin(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \sin au \cos bu du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \sin u du = \sin u - u \cos u + C$

83. $\int u \cos u du = \cos u + u \sin u + C$

84. $\int u^n \sin u du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u du$

85. $\int u^n \cos u du = u^n \sin u - n\int u^{n-1}\sin u du$

86. $\int \sin^n u \cos^m u du = \frac{\sin^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \sin^{n-2} u \cos^m u du$
$= \frac{\sin^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \sin^n u \cos^{m-2} u du$

Formulat trigonometrike të anasjellta

87. $\int \sin^{-1} u du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

88. $\int \cos^{-1} u du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

89. $\int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

90. $\int u \sin^{-1} u du = \frac{2u^2-1}{4}\sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

91. $\int u \cos^{-1} u du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

92. $\int u \tan^{-1} u du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

93. $\int u^n \sin^{-1} u du = \frac{1}{n+1}[u^{n+1}\sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}}],\ n \neq -1$

94. $\int u^n \cos^{-1} u du = \frac{1}{n+1}[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}}],\ n \neq -1$

95. $\int u^n \tan^{-1} u du = \frac{1}{n+1}[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2}],\ n \neq -1$

Formulat eksponenciale dhe logaritmike

96. $\int u e^{au} du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

97. $\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au} du$

98. $\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \sin bu - b \cos bu) + C$

99. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \cos bu + b \sin bu) + C$

100. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$

101. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

102. $\int \frac{1}{u \ln u} du = \ln|\ln u| + C$

Formulat hiperbolike

103. $\int \sinh u\, du = \cosh u + C$

104. $\int \cosh u du = \sinh u + C$

105. $\int \tanh u du = \ln \cosh u + C$

106. $\int \coth u du = \ln|\sinh u| + C$

107. $\int \sec hu du = \tan^{-1}|\sinh u| + C$

108. $\int \csc hu du = \ln|\tanh \frac{1}{2} u| + C$

109. $\int \sec h^2 u du = \tanh u + C$

110. $\int \csc h^2 u du = -\coth u + C$

111. $\int \sec hu \tanh u du = -\sec hu + C$

112. $\int \csc hu \coth u du = -\csc hu + C$

Formulat që përmbajnë $\sqrt{2au - u^2}$, $a > 0$

113. $\int \sqrt{2au - u^2} du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}(\frac{a-u}{a}) + C$

114. $\int u\sqrt{2au - u^2} du = \frac{2u^2-au-3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}(\frac{a-u}{a}) + C$

115. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u} du = \sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}(\frac{a-u}{a}) + C$

116. $\int \frac{\sqrt{2au-u^2}}{u^2} du = -\frac{2\sqrt{2au-u^2}}{u} - \cos^{-1}(\frac{a-u}{a}) + C$

117. $\int \frac{du}{\sqrt{2au-u^2}} = \cos^{-1}(\frac{a-u}{a}) + C$

118. $\int \frac{udu}{\sqrt{2au-u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a\cos^{-1}(\frac{a-u}{a}) + C$

119. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{u+3a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}(\frac{a-u}{a}) + C$

120. $\int \frac{du}{u\sqrt{2au-u^2}} = -\frac{\sqrt{2au-u^2}}{au} + C$

Bibliografia

[1] Lubjana Beshaj, Tony Shaska, and Eustrat Zhupa (eds.), *Advances on superelliptic curves and their applications*, NATO Science for Peace and Security Series D: Information and Communication Security, vol. 41, IOS Press, Amsterdam, 2015. Including papers based on the NATO Advanced Study Institute (ASI) on Hyperelliptic Curve Cryptography held in Ohrid, August 25–September 5, 2014. MR3495135

[2] A. Bialostocki and T. Shaska, *Galois groups of prime degree polynomials with nonreal roots*, Computational aspects of algebraic curves, 2005, pp. 243–255. MR2182043

[3] A. Elezi and T. Shaska, *Quantum codes from superelliptic curves*, Albanian J. Math. **5** (2011), no. 4, 175–191. MR2945762

[4] ———, *Baza të argumentimit matematik*, AulonnaPress, 2015.

[5] Artur Elezi and Tony Shaska, *Weight distributions, zeta functions and Riemann hypothesis for linear and algebraic geometry codes*, Advances on superelliptic curves and their applications, 2015, pp. 328–359. MR3525583

[6] J. Gutierrez and T. Shaska, *Hyperelliptic curves with extra involutions*, LMS J. Comput. Math. **8** (2005), 102–115. MR2135032

[7] Ruben Hidalgo, Saul Quispe, and Tony Shaska, *On generalized superelliptic Riemann surfaces*, arXiv preprint arXiv:1609.09576 (2016).

[8] Andreas Malmendier and Tony Shaska, *The satake sextic in elliptic fibrations on k3*, arXiv preprint arXiv:1609.04341 (2016).

[9] James S Milne, *Fields and galois theory*, Courses Notes, Version **4** (2003).

[10] E. Previato, T. Shaska, and G. S. Wijesiri, *Thetanulls of cyclic curves of small genus*, Albanian J. Math. **1** (2007), no. 4, 253–270. MR2367218

[11] R. Sanjeewa and T. Shaska, *Determining equations of families of cyclic curves*, Albanian J. Math. **2** (2008), no. 3, 199–213. MR2492096

[12] Bedri Shaska and Tanush Shaska, *Mësimdhënia e matematikës nëpërmjet problemeve klasike*, Vol. 10, Albanian Journal of Mathematics, 2016.

[13] T. Shaska, *Some remarks on the hyperelliptic moduli of genus 3*, Comm. Algebra **42** (2014), no. 9, 4110–4130. MR3200084

[14] T Shaska, *Njehsimi diferencial*, AulonaPress, 2016.

[15] T. Shaska, *Hyrje në analizën e funksioneve me shumë ndryshore*, AulonnaPress, 2017.

[16] ———, *Kurbat algjebrike*, AulonaPress, 2017.

[17] ———, *Njehsimi integral*, AulonnaPress, 2017.

[18] T. Shaska, W. C. Huffman, D. Joyner, and V. Ustimenko (eds.), *Advances in coding theory and cryptography*, Series on Coding Theory and Cryptology, vol. 3, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2007. Papers from the Conference on Coding Theory and Cryptography held in Vlora, May 26–27, 2007 and from the Conference on Applications of Computer Algebra held at Oakland University, Rochester, MI, July 19–22, 2007. MR2435341

[19] Tanush Shaska (ed.), *Computational aspects of algebraic curves*, Lecture Notes Series on Computing, vol. 13, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005. Papers from the conference held at the University of Idaho, Moscow, ID, May 26–28, 2005. MR2182657

[20] ———, *Algjebra lineare*, AulonaPress, 2008.

[21] Tanush Shaska and Lubjana Beshaj, *Algjebra abstrakte*, AulonaPress, 2011.

[22] ———, *Algjebra abstrakte: Për studentët e degës së matematikës*, AulonaPress, 2017.

[23] Tanush Shaska and Engjell Hasimaj (eds.), *Algebraic aspects of digital communications*, NATO Science for Peace and Security Series D: Information and Communication Security, vol. 24, IOS Press, Amsterdam, 2009. Papers from the Conference "New Challenges in Digital Communications" held at the University of Vlora, Vlora, April 27–May 9, 2008. MR2605610

[24] Tony Shaska, *Genus two curves with many elliptic subcovers*, Comm. Algebra **44** (2016), no. 10, 4450–4466. MR3508311

[25] Helmut Voelklein and Tanush Shaska (eds.), *Progress in Galois theory*, Developments in Mathematics, vol. 12, Springer, New York, 2005. MR2150438

Indeksi

About the author

Tanush Shaska was born in Vlora (Albania) on December 3, 1967. Shortly after, his family was sent to Kocul (a village of Vlora) by the communist government. Both his parents were teachers who taught in Selenica and then Kocul in the region of Vlora. They were later fired by the communist government of Albania and forced to work in the government farm in Kocul.

Tanush finished elementary and middle school in Kocul and in the Fall 1981 enrolled in the high school of Selenica. He would walk to school for about 2 hours each way. In the Fall 1983 he transfered to "Gjimnazi Halim Xhelo"in Vlora where he graduated with high honors in 1985. During his senior year in high school won the first place in the mathematical olympiad in the city of Vlora, but was not allowed to represent the city in the national olympiad because his family was considered 'kulaks' by the communists. During the years 1988-89 did the mandatory service in the Albanian army.

In the Fall 1990, was allowed to attend the University of Tirana as a student veterinary but changed to mathematics. In March 1991, after the university was closed due to the unrest against the communists he left the country and fled to Italy.

After spending a few months in Italy, he emmigrated to United States and in January 1992 enrolled at the University of Michigan. Tanush graduated with highest distinction from the University of Michigan in December 1994, majoring in mathematics. After working for about a year as a programmer in industry, he enrolled in the PhD program at the University of Florida in September 1996. He graduated with a PhD in Spring 2001, working under the direction of Helmut Völklein and John Thompson.

After his degree, he held a postdoctorate position at the University of California at Irvine (2001-2003) and a tenure track position at the University of Idaho (2003-2005), until he moved to Oakland University in 2005 where he continues to this day.

His research combines questions of moduli spaces of algebraic curves, computational algebraic geometry, interactions of group theory and algebraic geometry, Galois theory, arithmetic geometry, and applications of these areas in cryptography and coding theory.

Prof. Shaska founded the Albanian Journal of Mathematics in 2007. He has been the Principal Investigator for two NATO Advanced Study Institutes (2008, 2014), and organized many other conferences receiving support from NSF, NSA and other agencies. He has had several PhD students, edited several books, and written many research papers.