

Théorie des Ensembles et Arithmétique

Florent Michel

,

Résumé

Ce document présente quelques bases de logique mathématique, théorie des ensembles, et arithmétique. Nous nous baserons essentiellement sur la logique du premier ordre et la théorie de Zermelo–Fraenkel avec axiome du choix (ZFC). L'objectif principal est de montrer une construction possible de certains objets mathématiques courants, notamment les nombres entiers, et l'obtention de quelques-unes de leur propriétés, à partir d'idées simples.

Table des matières

1 Théorie des Ensembles	1
1.1 Logique du premier ordre	1
2 Introduction	3
2.1 Welcome	3
2.2 Overview	3
3 Advanced Topics	4
3.1 Font Handling	4
3.2 Indexing	4
4 Conclusion	5
4.1 Summary	5
4.2 Next Steps	5
A Some C++ code	6
B Jeux avec les entiers	7
B.1 Liste des premiers nombres premiers	8
B.2 Décomposition des premiers entiers en produits de facteurs premiers	9
B.3 Une séquence de nombres pseudo-aléatoire	11
Index	12
Index des symboles	13

Chapitre 1 : Théorie des Ensembles

Cette partie présente quelques bases de logique mathématique et de théorie des ensembles.

1.1 Logique du premier ordre	1
1.1.1 Symboles logiques	2

1.1 Logique du premier ordre

La *logique du premier ordre*, aussi appelée *logique des prédicats* ou *calcul des prédicats du premier ordre*, est un cadre semi-formel¹ permettant de définir des théories. On peut la voir comme un langage, ou comme un ensemble d'éléments de langage. Elle est utilisée tant en mathématiques qu'en philosophie, linguistique et informatique. Nous l'aborderons ici principalement d'un point de vue mathématique. On considère ici une notion très basique du terme *langage*, que l'on considère formé de deux éléments :

- Un ensemble (au sens intuitif du terme) de *symboles*.
- Des règles de formations de *phrases* à partir des symboles.

Dans cette vision, les symboles constituent les fondations du langage, permettant de contruire les phrases, porteuses de sens.² On sépare parfois les symboles en deux catégories : *fondamentaux* s'ils forment un ensemble unsécable, ou *composites* s'ils sont formés d'autres symboles.

Intuitivement, la logique du premier ordre a pour symboles des variables (décrivant un domaine d'objets non logiques, c'est-à-dire non définis par la logique du premier ordre elle-même) quantifiées (par les quantificateurs « pour tout » et « il existe ») ou non, des symboles non logiques, ainsi que des connecteurs, utilisés pour construire des phrases, appelées *formules*. Ces dernières sont aussi appelées *propositions*, *énoncés* ou *prédicats*.

Elle est une extension de la *logique propositionnelle*, qui exprime des énoncés, ou *propositions*, aussi appelés *prédicats*, auxquels on attribue une valeur dite de *vérité* : vrai ou faux. Chaque proposition est soit vraie soit fausse, et ne peut être les deux simultanément. Ces énoncés peuvent être liés par conjonction, disjonction, implication, équivalence, ou modifiés par négation. La logique du premier ordre contient, en outre, des variables et quantificateurs, ce qui la rend plus expressive. On peut dire qu'elle contient la logique propositionnelle, au sens où cette dernière est équivalente à la logique du premier ordre élaguée des variables et quantificateurs.

Une théorie définie dans le cadre de la logique du premier ordre porte sur un domaine de discours spécifié que les variables quantifiées décrivent, permettant de définir des prédicats sur ce domaine, auxquels un ensemble d'axiomes tenus pour vrais permet d'associer une valeur de vérité. Un prédicat ne peut avoir pour arguments que des variables sur ce domaine, et seules les variables peuvent être quantifiés. Cela distingue la logique du premier ordre des logiques d'ordre supérieur, où un prédicat peut avoir un prédicat plus général comme argument ou des quantificateurs de prédicats peuvent être autorisés.

Plus formellement, une théorie définie dans le cadre de la logique du premier ordre se compose des éléments suivants :

- Un *alphabet*, c'est-à-dire un ensemble (au sens intuitif du terme) de symboles, dont certaines chaînes forment des *termes*. On divise généralement les symboles en deux catégories : les *symboles logiques*, dont la signification est fixée, et les *symboles non logiques*, dont le sens n'est pas univoquement défini par la théorie et doit être défini au cas par cas. Certains de ces symboles sont définis par la logique du premier ordre ; d'autres peuvent être propres à la théorie.
- Un *domaine de discours* non vide que les variables décrivent (si x désigne une variable, la formule $\exists x V$ est toujours vraie (voir ci-dessous pour la signification de cette formule)).
- Des *règles de formation*, exprimant comment construire les termes et formules. Là encore, certaines sont définies par la logique du premier ordre et d'autres peuvent être propres à la théorie.
- Des *formules* (aussi appelées *propositions*) obtenues à partir de ces règles, exprimant des prédicats. (Le terme *prédicat* est aussi utilisé pour désigner une formule elle-même.) Une proposition est toujours vraie ou fausse³, et ne peut être

¹ On adopte ici le point de vue que la logique du premier ordre ne repose pas sur une théorie vue comme plus fondamentale. Ses concepts fondamentaux sont ainsi définis intuitivement (puisque nous n'avons aucun concept plus fondamental qui permettrait de les définir formellement), d'où le qualificatif de « semi-formel », et non « formel ».

² Ce sens étant défini, *in fine*, par un élément extérieur au langage, par exemple l'intuition de qui l'utilise.

³ À moins d'inclure la valeur de vérité indéfinie, voir section ??.

simultanément vraie et fausse. Deux formules seront dites *équivalentes* si elles prennent toujours la même valeur de vérité.

- Si f et g sont deux formules équivalentes, g et f sont équivalentes.
- Si f et g sont trois formules telles que f et g sont équivalentes et g et h sont équivalentes, alors f et h sont équivalentes.
- Un ensemble d'*axiomes*, ou propositions tenues pour vraies. Ces axiomes permettent en général de déterminer la valeur de vérité d'autres prédicats.

1.1.1 Symboles logiques

Les symboles logiques incluent :

- Le symbole de quantification universelle \forall (« pour tout »).
- Le symbole de quantification existentielle \exists (« il existe »).
- Le connecteur de conjonction \wedge (« et ») : si P et Q sont deux formules, $P \wedge Q$ est vraie si P et Q sont vraies et fausse sinon.
- Le connecteur de disjonction \vee (« ou ») : si P et Q sont deux formules, $P \vee Q$ est vraie si P est vraie ou si Q est vraie et fausse sinon.
- Le connecteur de négation \neg (« non ») : si P est une formule, $\neg P$ est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.
- Le connecteur d'implication \Rightarrow (« implique ») : si P et Q sont deux formules, $P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse et vraie sinon. La formule $P \Rightarrow Q$ est ainsi équivalente à $Q \vee \neg P$ (voir ci-dessous pour la signification des parenthèses et les règles d'évaluation).
- Le connecteur \Leftarrow : si P et Q sont deux formules, $P \Leftarrow Q$ est fausse si P est fausse et Q est vraie et vraie sinon. La formule $P \Leftarrow Q$ est ainsi équivalente à $P \vee \neg Q$.
- Le connecteur biconditionnel \Leftrightarrow (« est équivalent à ») : si P et Q sont deux formules, $P \Leftrightarrow Q$ est vraie si P et Q sont soit toutes deux vraies soit toutes deux fausses, et fausse sinon. La formule $P \Leftrightarrow Q$ est ainsi équivalente à $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$. Notons que, si P et Q sont deux prédicats, si $P \Leftrightarrow Q$ est vrai, alors $(\neg P) \Leftrightarrow (\neg Q)$ est vrai aussi.
- Un ensemble infini de *variables*, souvent notées par des lettres grecques ou latines, éventuellement avec des indices ou exposants. Les variables sont interprétées comme décrivant un domaine d'objets de base, qui ne peut être vide. Elles sont aussi parfois appelées *paramètres*.

On définit également les constantes de vérité V pour « vraie » et F pour « fausse ». Elles sont deux formules, et F est équivalente à $\neg V$.

Si f est une formule, ces deux constantes de vérité sont équivalentes, respectivement, aux formules $f \vee (\neg f)$ et $f \wedge (\neg f)$.

Chapitre 2: Introduction

2.1 Welcome

This is the first section of the introduction. We are demonstrating various ConTeXt features. We can refer to specific words like ConTeXt, document, and features. Let's include some mathematics: $E = mc^2$. This uses the $E = mc^2$ Einstein's mass-energy equivalence XITS Math font. Another equation: $a^2 + b^2 = c^2$.

2.1.1 Getting Started

Here's a subsection.

2.1.1.1 Installation

Details about installation.

2.2 Overview

This section provides an overview.

2.2.1 Structure

The document structure.

Chapitre 3: Advanced Topics

3.1 Font Handling

ConTeXt's font handling is very powerful. We're using XITS for text and math.

3.1.1 Font Features

Exploring OpenType features. Some more math: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. We can also index symbols like \int integral sign.

$$e = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

3.2 Indexing

This section is about creating indices. We can index more words, like LuaTeX and OpenType.

Chapitre 4: Conclusion

4.1 Summary

A brief summary of the document.

4.2 Next Steps

What to do next.

Appendice A : Some C++ code

```
void negacyclic_ntt_pow2_bit_reversed(
    const uint64_t* const input,
    uint64_t* const output,
    const uint64_t* const powers_root_unity,
    const uint64_t modulus,
    const size_t ntt_size,
    const size_t batch_size = 1);
```

Appendice B : Jeux avec les entiers

B.1 Liste des premiers nombres premiers	8
B.2 Décomposition des premiers entiers en produits de facteurs premiers	9
B.3 Une séquence de nombres pseudo-aléatoire	11

B.1 Liste des premiers nombres premiers

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149 151 157 163
167 173 179 181 191 193 197 199 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 307 311 313 317 331
337 347 349 353 359 367 373 379 383 389 397 401 409 419 421 431 433 439 443 449 457 461 463 467 479 487 491 499 503
509 521 523 541 547 557 563 569 571 577 587 593 599 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653 659 661 673 677 683 691
701 709 719 727 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859 863 877 881 883 887
907 911 919 929 937 941 947 953 967 971 977 983 991 997 1009 1013 1019 1021 1031 1033 1039 1049 1051 1061 1063
1069 1087 1091 1093 1097 1103 1109 1117 1123 1129 1151 1153 1163 1171 1181 1187 1193 1201 1213 1217 1223 1229
1231 1237 1249 1259 1277 1279 1283 1289 1291 1297 1301 1303 1307 1319 1321 1327 1361 1367 1373 1381 1399 1409
1423 1427 1429 1433 1439 1447 1451 1453 1459 1471 1481 1483 1487 1489 1493 1499 1511 1523 1531 1543 1549 1553
1559 1567 1571 1579 1583 1597 1601 1607 1609 1613 1619 1621 1627 1637 1657 1663 1667 1669 1693 1697 1699 1709
1721 1723 1733 1741 1747 1753 1759 1777 1783 1787 1789 1801 1811 1823 1831 1847 1861 1867 1871 1873 1877 1879
1889 1901 1907 1913 1931 1933 1949 1951 1973 1979 1987 1993 1997 1999 2003 2011 2017 2027 2029 2039 2053 2063
2069 2081 2083 2087 2089 2099 2111 2113 2129 2131 2137 2141 2143 2153 2161 2179 2203 2207 2213 2221 2237 2239
2243 2251 2267 2269 2273 2281 2287 2293 2297 2309 2311 2333 2339 2341 2347 2351 2357 2371 2377 2381 2383 2389
2393 2399 2411 2417 2423 2437 2441 2447 2459 2467 2473 2477 2503 2521 2531 2539 2543 2549 2551 2557 2579 2591
2593 2609 2617 2621 2633 2647 2657 2659 2663 2671 2677 2683 2687 2689 2693 2699 2707 2711 2713 2719 2729 2731
2741 2749 2753 2767 2777 2789 2791 2797 2801 2803 2819 2833 2837 2843 2851 2857 2861 2879 2887 2897 2903 2909
2917 2927 2939 2953 2957 2963 2969 2971 2999 3001 3011 3019 3023 3037 3041 3049 3061 3067 3079 3083 3089 3109
3119 3121 3137 3163 3167 3169 3181 3187 3191 3203 3209 3217 3221 3229 3251 3253 3257 3259 3271 3299 3301 3307
3313 3319 3323 3329 3331 3343 3347 3359 3361 3371 3373 3389 3391 3407 3413 3433 3449 3457 3461 3463 3467 3469
3491 3499 3511 3517 3527 3529 3533 3539 3541 3547 3557 3559 3571 3581 3583 3593 3607 3613 3617 3623 3631 3637
3643 3659 3671 3673 3677 3691 3697 3701 3709 3719 3727 3733 3739 3761 3767 3769 3779 3793 3797 3803 3821 3823
3833 3847 3851 3853 3863 3877 3881 3889 3907 3911 3917 3919 3923 3929 3931 3943 3947 3967 3989 4001 4003 4007
4013 4019 4021 4027 4049 4051 4057 4073 4079 4091 4093 4099 4111 4127 4129 4133 4139 4153 4157 4159 4177 4201
4211 4217 4219 4229 4231 4241 4243 4253 4259 4261 4271 4273 4283 4289 4297 4327 4337 4339 4349 4357 4363 4373
4391 4397 4409 4421 4423 4441 4447 4451 4457 4463 4481 4483 4493 4507 4513 4517 4519 4523 4547 4549 4561 4567
4583 4591 4597 4603 4621 4637 4639 4643 4649 4651 4657 4663 4673 4679 4691 4703 4721 4723 4729 4733 4751 4759
4783 4787 4789 4793 4799 4801 4813 4817 4831 4861 4871 4877 4889 4903 4909 4919 4931 4933 4937 4943 4951 4957
4967 4969 4973 4987 4993 4999 5003 5009 5011 5021 5023 5039 5051 5059 5077 5081 5087 5099 5101 5107 5113 5119
5147 5153 5167 5171 5179 5189 5197 5209 5227 5231 5233 5237 5261 5273 5279 5281 5297 5303 5309 5323 5333 5347
5351 5381 5387 5393 5399 5407 5413 5417 5419 5431 5437 5441 5443 5449 5471 5477 5479 5483 5501 5503 5507 5519
5521 5527 5531 5557 5563 5569 5573 5581 5591 5623 5639 5641 5647 5651 5653 5657 5659 5669 5683 5689 5693 5701
5711 5717 5737 5741 5743 5749 5779 5783 5791 5801 5807 5813 5821 5827 5839 5843 5849 5851 5857 5861 5867 5869
5879 5881 5897 5903 5923 5927 5939 5953 5981 5987 6007 6011 6029 6037 6043 6047 6053 6067 6073 6079 6089 6091
6101 6113 6121 6131 6133 6143 6151 6163 6173 6197 6199 6203 6211 6217 6221 6229 6247 6257 6263 6269 6271 6277
6287 6299 6301 6311 6317 6323 6329 6337 6343 6353 6359 6361 6367 6373 6379 6389 6397 6421 6427 6449 6451 6469
6473 6481 6491 6521 6529 6547 6551 6553 6563 6569 6571 6577 6581 6599 6607 6619 6637 6653 6659 6661 6673 6679
6689 6691 6701 6703 6709 6719 6733 6737 6761 6763 6779 6781 6791 6793 6803 6823 6827 6829 6833 6841 6857 6863
6869 6871 6883 6899 6907 6911 6917 6947 6949 6959 6961 6967 6971 6977 6983 6991 6997 7001 7013 7019 7027 7039
7043 7057 7069 7079 7103 7109 7121 7127 7129 7151 7159 7177 7187 7193 7207 7211 7213 7219 7229 7237 7243 7247
7253 7283 7297 7307 7309 7321 7331 7333 7349 7351 7369 7393 7411 7417 7433 7451 7457 7459 7477 7481 7487 7489
7499 7507 7517 7523 7529 7537 7541 7547 7549 7559 7561 7573 7577 7583 7589 7591 7603 7607 7621 7639 7643 7649
7669 7673 7681 7687 7691 7699 7703 7717 7723 7727 7741 7753 7757 7759 7789 7793 7817 7823 7829 7841 7853 7867
7873 7877 7879 7883 7901 7907 7919 7927 7933 7937 7949 7951 7963 7993 8009 8011 8017 8039 8053 8059 8069 8081
8087 8089 8093 8101 8111 8117 8123 8147 8161 8167 8171 8179 8191 8209 8219 8221 8231 8233 8237 8243 8263 8269
8273 8287 8291 8293 8297 8311 8317 8329 8353 8363 8369 8377 8387 8389 8419 8423 8429 8431 8443 8447 8461 8467
8501 8513 8521 8527 8537 8539 8543 8563 8573 8581 8597 8599 8609 8623 8627 8629 8641 8647 8663 8669 8677 8681
8689 8693 8699 8707 8713 8719 8731 8737 8741 8747 8753 8761 8779 8783 8803 8807 8819 8821 8831 8837 8839 8849
8861 8863 8867 8887 8893 8923 8929 8933 8941 8951 8963 8969 8971 8999 9001 9007 9011 9013 9029 9041 9043 9049
9059 9067 9091 9103 9109 9127 9133 9137 9151 9157 9161 9173 9181 9187 9199 9203 9209 9221 9227 9239 9241 9257
9277 9281 9283 9293 9311 9319 9323 9337 9341 9343 9349 9371 9377 9391 9397 9403 9413 9419 9421 9431 9433 9437

B.2 Décomposition des premiers entiers en produits de facteurs premiers

$2 = 2^1$	$52 = 2^2 \times 13^1$	$102 = 2^1 \times 3^1 \times 17^1$	$152 = 2^3 \times 19^1$	$202 = 2^1 \times 101^1$
$3 = 3^1$	$53 = 53^1$	$103 = 103^1$	$153 = 3^2 \times 17^1$	$203 = 7^1 \times 29^1$
$4 = 2^2$	$54 = 2^1 \times 3^3$	$104 = 2^3 \times 13^1$	$154 = 2^1 \times 7^1 \times 11^1$	$204 = 2^2 \times 3^1 \times 17^1$
$5 = 5^1$	$55 = 5^1 \times 11^1$	$105 = 3^1 \times 5^1 \times 7^1$	$155 = 5^1 \times 31^1$	$205 = 5^1 \times 41^1$
$6 = 2^1 \times 3^1$	$56 = 2^3 \times 7^1$	$106 = 2^1 \times 53^1$	$156 = 2^2 \times 3^1 \times 13^1$	$206 = 2^1 \times 103^1$
$7 = 7^1$	$57 = 3^1 \times 19^1$	$107 = 107^1$	$157 = 157^1$	$207 = 3^2 \times 23^1$
$8 = 2^3$	$58 = 2^1 \times 29^1$	$108 = 2^2 \times 3^3$	$158 = 2^1 \times 79^1$	$208 = 2^4 \times 13^1$
$9 = 3^2$	$59 = 59^1$	$109 = 109^1$	$159 = 3^1 \times 53^1$	$209 = 11^1 \times 19^1$
$10 = 2^1 \times 5^1$	$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$	$110 = 2^1 \times 5^1 \times 11^1$	$160 = 2^5 \times 5^1$	$210 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$
$11 = 11^1$	$61 = 61^1$	$111 = 3^1 \times 37^1$	$161 = 7^1 \times 23^1$	$211 = 211^1$
$12 = 2^2 \times 3^1$	$62 = 2^1 \times 31^1$	$112 = 2^4 \times 7^1$	$162 = 2^1 \times 3^4$	$212 = 2^2 \times 53^1$
$13 = 13^1$	$63 = 3^2 \times 7^1$	$113 = 113^1$	$163 = 163^1$	$213 = 3^1 \times 71^1$
$14 = 2^1 \times 7^1$	$64 = 2^6$	$114 = 2^1 \times 3^1 \times 19^1$	$164 = 2^2 \times 41^1$	$214 = 2^1 \times 107^1$
$15 = 3^1 \times 5^1$	$65 = 5^1 \times 13^1$	$115 = 5^1 \times 23^1$	$165 = 3^1 \times 5^1 \times 11^1$	$215 = 5^1 \times 43^1$
$16 = 2^4$	$66 = 2^1 \times 3^1 \times 11^1$	$116 = 2^2 \times 29^1$	$166 = 2^1 \times 83^1$	$216 = 2^3 \times 3^3$
$17 = 17^1$	$67 = 67^1$	$117 = 3^2 \times 13^1$	$167 = 167^1$	$217 = 7^1 \times 31^1$
$18 = 2^1 \times 3^2$	$68 = 2^2 \times 17^1$	$118 = 2^1 \times 59^1$	$168 = 2^3 \times 3^1 \times 7^1$	$218 = 2^1 \times 109^1$
$19 = 19^1$	$69 = 3^1 \times 23^1$	$119 = 7^1 \times 17^1$	$169 = 13^2$	$219 = 3^1 \times 73^1$
$20 = 2^2 \times 5^1$	$70 = 2^1 \times 5^1 \times 7^1$	$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$	$170 = 2^1 \times 5^1 \times 17^1$	$220 = 2^2 \times 5^1 \times 11^1$
$21 = 3^1 \times 7^1$	$71 = 71^1$	$121 = 11^2$	$171 = 3^2 \times 19^1$	$221 = 13^1 \times 17^1$
$22 = 2^1 \times 11^1$	$72 = 2^3 \times 3^2$	$122 = 2^1 \times 61^1$	$172 = 2^2 \times 43^1$	$222 = 2^1 \times 3^1 \times 37^1$
$23 = 23^1$	$73 = 73^1$	$123 = 3^1 \times 41^1$	$173 = 173^1$	$223 = 223^1$
$24 = 2^3 \times 3^1$	$74 = 2^1 \times 37^1$	$124 = 2^2 \times 31^1$	$174 = 2^1 \times 3^1 \times 29^1$	$224 = 2^5 \times 7^1$
$25 = 5^2$	$75 = 3^1 \times 5^2$	$125 = 5^3$	$175 = 5^2 \times 7^1$	$225 = 3^2 \times 5^2$
$26 = 2^1 \times 13^1$	$76 = 2^2 \times 19^1$	$126 = 2^1 \times 3^2 \times 7^1$	$176 = 2^4 \times 11^1$	$226 = 2^1 \times 113^1$
$27 = 3^3$	$77 = 7^1 \times 11^1$	$127 = 127^1$	$177 = 3^1 \times 59^1$	$227 = 227^1$
$28 = 2^2 \times 7^1$	$78 = 2^1 \times 3^1 \times 13^1$	$128 = 2^7$	$178 = 2^1 \times 89^1$	$228 = 2^2 \times 3^1 \times 19^1$
$29 = 29^1$	$79 = 79^1$	$129 = 3^1 \times 43^1$	$179 = 179^1$	$229 = 229^1$
$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$	$80 = 2^4 \times 5^1$	$130 = 2^1 \times 5^1 \times 13^1$	$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1$	$230 = 2^1 \times 5^1 \times 23^1$
$31 = 31^1$	$81 = 3^4$	$131 = 131^1$	$181 = 181^1$	$231 = 3^1 \times 7^1 \times 11^1$
$32 = 2^5$	$82 = 2^1 \times 41^1$	$132 = 2^2 \times 3^1 \times 11^1$	$182 = 2^1 \times 7^1 \times 13^1$	$232 = 2^3 \times 29^1$
$33 = 3^1 \times 11^1$	$83 = 83^1$	$133 = 7^1 \times 19^1$	$183 = 3^1 \times 61^1$	$233 = 233^1$
$34 = 2^1 \times 17^1$	$84 = 2^2 \times 3^1 \times 7^1$	$134 = 2^1 \times 67^1$	$184 = 2^3 \times 23^1$	$234 = 2^1 \times 3^2 \times 13^1$
$35 = 5^1 \times 7^1$	$85 = 5^1 \times 17^1$	$135 = 3^3 \times 5^1$	$185 = 5^1 \times 37^1$	$235 = 5^1 \times 47^1$
$36 = 2^2 \times 3^2$	$86 = 2^1 \times 43^1$	$136 = 2^3 \times 17^1$	$186 = 2^1 \times 3^1 \times 31^1$	$236 = 2^2 \times 59^1$
$37 = 37^1$	$87 = 3^1 \times 29^1$	$137 = 137^1$	$187 = 11^1 \times 17^1$	$237 = 3^1 \times 79^1$
$38 = 2^1 \times 19^1$	$88 = 2^3 \times 11^1$	$138 = 2^1 \times 3^1 \times 23^1$	$188 = 2^2 \times 47^1$	$238 = 2^1 \times 7^1 \times 17^1$
$39 = 3^1 \times 13^1$	$89 = 89^1$	$139 = 139^1$	$189 = 3^3 \times 7^1$	$239 = 239^1$
$40 = 2^3 \times 5^1$	$90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$	$140 = 2^2 \times 5^1 \times 7^1$	$190 = 2^1 \times 5^1 \times 19^1$	$240 = 2^4 \times 3^1 \times 5^1$
$41 = 41^1$	$91 = 7^1 \times 13^1$	$141 = 3^1 \times 47^1$	$191 = 191^1$	$241 = 241^1$
$42 = 2^1 \times 3^1 \times 7^1$	$92 = 2^2 \times 23^1$	$142 = 2^1 \times 71^1$	$192 = 2^6 \times 3^1$	$242 = 2^1 \times 11^2$
$43 = 43^1$	$93 = 3^1 \times 31^1$	$143 = 11^1 \times 13^1$	$193 = 193^1$	$243 = 3^5$
$44 = 2^2 \times 11^1$	$94 = 2^1 \times 47^1$	$144 = 2^4 \times 3^2$	$194 = 2^1 \times 97^1$	$244 = 2^2 \times 61^1$
$45 = 3^2 \times 5^1$	$95 = 5^1 \times 19^1$	$145 = 5^1 \times 29^1$	$195 = 3^1 \times 5^1 \times 13^1$	$245 = 5^1 \times 7^2$
$46 = 2^1 \times 23^1$	$96 = 2^5 \times 3^1$	$146 = 2^1 \times 73^1$	$196 = 2^2 \times 7^2$	$246 = 2^1 \times 3^1 \times 41^1$
$47 = 47^1$	$97 = 97^1$	$147 = 3^1 \times 7^2$	$197 = 197^1$	$247 = 13^1 \times 19^1$
$48 = 2^4 \times 3^1$	$98 = 2^1 \times 7^2$	$148 = 2^2 \times 37^1$	$198 = 2^1 \times 3^2 \times 11^1$	$248 = 2^3 \times 31^1$
$49 = 7^2$	$99 = 3^2 \times 11^1$	$149 = 149^1$	$199 = 199^1$	$249 = 3^1 \times 83^1$
$50 = 2^1 \times 5^2$	$100 = 2^2 \times 5^2$	$150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$	$200 = 2^3 \times 5^2$	$250 = 2^1 \times 5^3$
$51 = 3^1 \times 17^1$	$101 = 101^1$	$151 = 151^1$	$201 = 3^1 \times 67^1$	$251 = 251^1$

Cette décomposition est utile pour calculer le nombre de diviseurs $\varphi(n)$ d'un entier naturel non nul n : $\varphi(1) = 1$ et, pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1, $\varphi(n)$ est égal au produit des puissances apparaissant dans la décomposition de n augmentées de 1. Cela est représenté [figure B.1](#) et [figure B.2](#). (Le code utilisé dans cette section se trouve dans le fichier [decomposition_prime_factors.rs](#).)

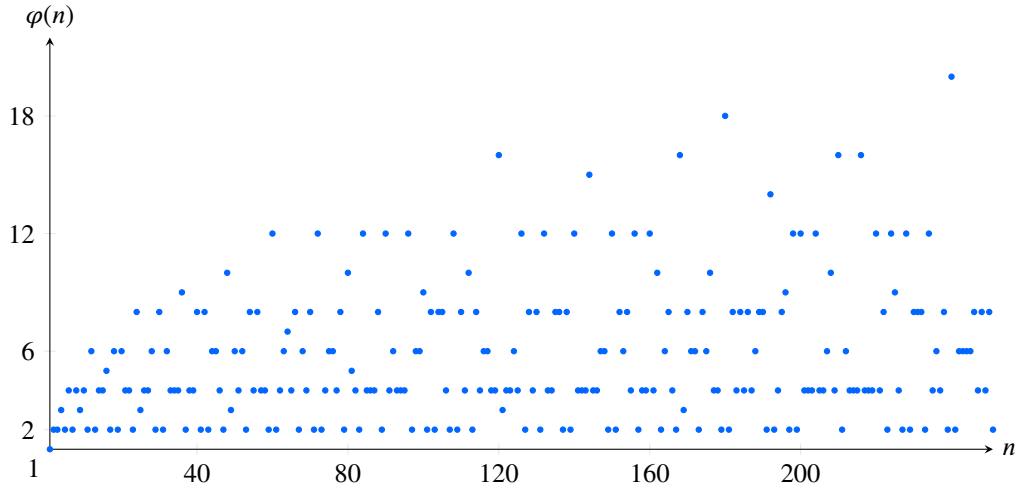


Figure B.1 Nombre de diviseurs d'un entier naturel non nul n , noté $\varphi(n)$, en fonction de n pour n allant de 1 à 251. Notons que $\varphi(1) = 1$ et, pour tout entier naturel non nul n , $\varphi(n) = 2$ si et seulement si n est premier.

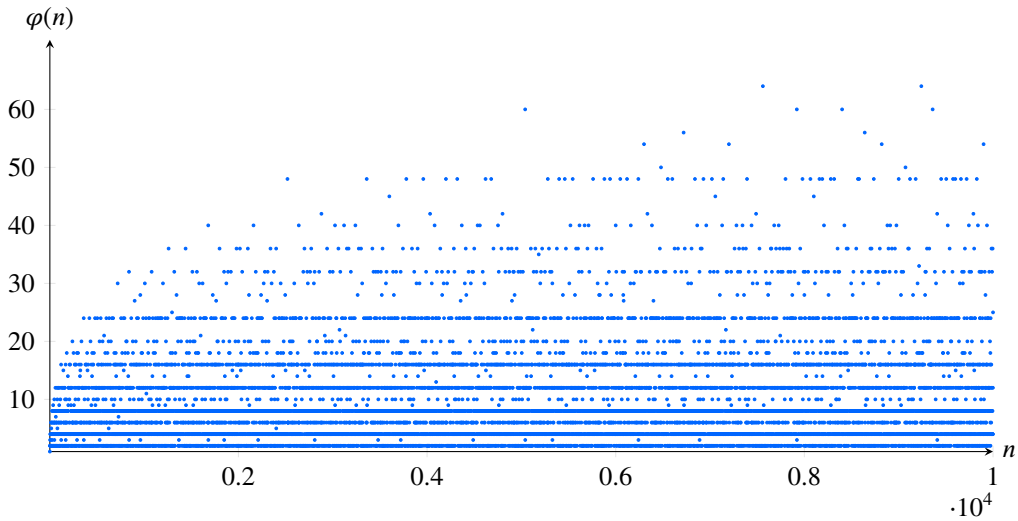


Figure B.2 Même plot que sur la [figure B.1](#) pour n allant de 1 à 10000.

B.3 Une séquence de nombres pseudo-aléatoire

La séquence de nombres suivante sera (avec une très haute probabilité) différent à chaque compilation de ce document. (Il y a 10^{4278} possibilités différentes.)

2329180848988170603800251911726899463733393787957510064193264989266730841959624358697344054084
3762797799412548699433761852432298986075416051145749506232743063464519064271149563213197897355
9762917747818230853297086931574646622252846620782298368790202317679003061191841428520236956094
8166217458780275800956738884918557807348385396762249495064520480301912904845027477448857593975
5926147778660102927590326530980141202390931716530861999538332405950182014894401269727005864508
4345416972533458064949933707131048792155640043363196518374140340388245894489251086949511200395
4489520240728488332607997512780294838262638174385170147882077437615386818341126791958215922994
3939375765489476881469473990465032397536400860533479185035083645810822170015809907762014533393
3019515245537412220052058440178044764325031569839727594650456827503652675921983307792316050115
9250354366045994383188605328678079052455946706672622558164164968708469197172096061585278679622
4883969022992975989946637691240979649135937584218205355162043073630925618612026089593503845365
2001198466220175590792484939750660240305299107812452506217461885858735352283886602595726446276
274901321983286229616816411860909892497017983509111737743775496988654888234922885779254630355
0093079515767094432465691212881702160092496858527920290138155387410867690009855557594031854953
1274493695942532831733914610820787938369098196005156798250543599744967860914493404456454064830
8846253163079443226256521490886731815741506033155333442806265150819900227886099971989635379183
1255468457810205451571979492504701941983747200059339160278277873403002056648623035395319843982
0817395456624592616911407922475773397381493395805202351175296602511775477459333024625008610716
0186598039444953898003883192926942436162344385737628158343105112834842292572062431954687613946
7796660988279512510182601409144205121887589315437058155466513945672388796107241484125171646682
4498287495753948688622439817955490478963575690512774845548245712086491544060920412725839910162
9760689503638745113990229786962907499862475696138069138344791303708529137311252087558561164495
8696914152891111412545579918902762126839275309632033163786982278139690395057042159367364011565
5952087158442875847511589449988933165472747958547129185705830945232220376339167177179156671498
4062047231945182801819717792505830758764259552895922286258513447868938137435206288167693034078
7155338380579767164080074667672846273647301241071225503540796133531188157034824723478997317288
6841911191035382255190145353869730389278987599601811123748997800395895524232293766953371645705
4283847494665472446068804353256468796229770823779047120406244974978243258924510971385006818850
7657416449633740778222612504804131536555935102038049560536553113966982652881705835786247394666
3090925384184902848890591637984329402165470951282044391440953758635800557488016877191455950630
7577679982613245483785345030811177146749021697737562575279868482888268119894259550800805347778
1099605704357002887774502570435855381092972157117525039483913529023757688154346754566176997379
1116931942951478011624280076359789922684442567739913147787404978405799930547159336119452824941
9035544807121328457065245908774858872798510282384576469898178034543372122396129601924725219701
7325140205754078334469495682573339063122592140493464974988772175793672938720886853156398894654
5700665597260311600497047344995403002327799254393509796050036344572691575906225899894331897121
4396531005544211423523807356296165728762345218036787764899046491318055572346556460473164229857
8962014469549547903907646895030978123050554859082600895045903491913860303834386936637388856167
9162913442663889825001068561259752951786939112233843494804345010442036571064728213449060048254
6126380719158615783131255973838721873495303754966223981116575669539966559224270776478936897282
6661065701302402280266273922478117272129508181024752708981183990181014344297254549537196674682
4977512157867525200082864751832986288823498244833283509537092908260257117049814895270752130970
1128291527981530112942404809674563111796317013160649500464039576002888395871826892788320175772
5061597666706899920085575264267131767878101931594356929417276891751515021041403766453654974653
2169791426802799567845914998362364700977473928534774845901569334615805790655927770794258166274
3143623292795033344476705445360015160598252122058825137980766239825133216489271462395435972675
1838911991046503037822896772448037992646024970289631530903878198727164094219359023551282848545

Index

A

Alphabet 1
Axiome 2

C

Connecteur 2
ConTeXt 3

D

Document 3

F

Faux 2
Features 3
Formule 1
Formules équivalentes 2

L

Logique du premier ordre 1
LuaTeX 4

O

OpenType 4

P

Paramètre 2
Proposition 1
Prédicat 1

Q

Quantificateur 1, 2

S

Symbole 1

V

Valeur de vérité 1
Variable 2
Vrai 2

X

XITS 4

E

Énoncé 1

Index des symboles

\forall	2	\vee	2	\Leftrightarrow	2	$E = mc^2$	3
\exists	2	\Rightarrow	2	∇	2	\int	4
\wedge	2	\Leftarrow	2	F	2		