Décomposition LU Pivot

vendredi 3 mars 2023 11:37

L'objectif du TP est de mettre en oeuvre la méthode LU avec et sans changement de pivot. On rappelle que cette méthode consiste de changer à chaque étape k le pivot $a_{k,k}^{(k)}$ par $a_{i_0,k}^{(k)} = max_{i=k,n}|a_{i,k}^{(k)}|$, ce qui revient à échanger les lignes i_0 et k de la matrice $A^{(k)}$.
D'un point de vu matriciel, la première étape de l'algorithme de Gauss s'écrit :

$$A^{(2)} = L^{(1)}P^{(1)}A^{(1)},\ b^{(2)} = L^{(1)}P^{(1)}b^{(1)}$$

où $P^{(1)}$ est une matrice de permutation et où $A^{(1)} = A$.
La deuxième étape s'écrit

$$A^{(3)} = L^{(2)}P^{(2)}A^{(2)} = L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)}A^{(1)},\ b^{(3)} = L^{(2)}P^{(2)}L^{(1)}P^{(1)}b^{(1)}$$

où $P^{(2)}$ est une matrice de permutation. De manière générale, on a

$$A^{(k)} = L^{(k-1)}P^{(k-1)}A^{(k-1)} = L^{(k-1)}P^{(k-1)}...L^{(1)}P^{(1)}A^{(1)},\ b^{(k)} = L^{(k-1)}P^{(k-1)}...L^{(1)}P^{(1)}b^{(1)}$$

ce qui se réécrit

$$A = [L^{(k-1)}P^{(k-1)}...L^{(1)}P^{(1)}]^{-1}A^{(n)}.$$

En définissant

$$M = (P^{(1)})^{-1}(I_n + B^{(1)})....(P^{(n-1)})^{-1}(I_n + B^{(n-1)})$$

on a

$$A = MA^{(n)}$$

avec

$$(P^{(i)})^{-1} = (P^{(i)})^T$$

En posant

$$P = P^{(n-1)}...P^{(1)}$$

la décomposition s'écrit

$$PA = LU$$

où $U = A^{(n)}$ est une matrice triangulaire supérieure et $L = PM$ est une matrice triangulaire inférieure (avec des 1 sur la diagonale).

$A^{(n)}$ Construction par pivot boucle

$P = P^{(n-1)} \dots P^{(1)}$, $P^{(k)}$ Construit par permutation de $A^{(k)}$

$L = PM$

$M = (P^{(1)})^t (I_n + B^{(1)}) \dots (P^{(n-1)})^{-1} (I_n + B^{(n-1)})$

$(I_n + B^{(k)})$ la k-ième étape pour le pivot

Construire $M_p^{(k)} = (I_n + B^{(k)})$

$M = (P^{(1)})^t M_p^{(1)} \dots (P^{(n-1)})^t M_p^{(n-1)}$ tq $M_p^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & \alpha_{k+1} & \\ & \vdots & \\ & \alpha_n & 1 \end{pmatrix}$

essayer de construire M de manière à avoir $M = M^{(1)} M^{(2)} \dots M^{(n-1)}$. par récurrence

$\cancel{M^{(k)} = M^{(k-1)} (P^{(k)})^t M_p^{(k)}}$

$M^{(1)} = (P^{(1)})^t M_p^{(1)}$

$M^{(2)} = M^{(1)} (P^{(2)})^t M_p^{(2)}$

$M^{(n-1)} = M^{(n-2)} (P^{(n-1)})^t M_p^{(n)}$

$M \quad = M \quad (P \quad) \, M_p$

au final On construit $\boxed{M^{(n)} = M^{(n-1)} (P^{(n)})^t M_p^{(n)}}$

↳ à l'aide d'une boucle