SOUTENANCE PROJET

EQUATION DE PREDATION LOKTAVOLTERA

RÉALISÉ PAR :
ZOUGA JASSIEM
RAYANE TROUDI
FLORENT GERBAUD

SOMMAIRES

I)OBJECTIF DU PROJET:

RÉSOUDRE LE SYSTEM **LODKAVOLTERA** PROIE PREDATEUR :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha x - \beta x y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \delta x y - \gamma y \end{cases} \quad (1)$$

Deux méthodes a notre disposition :

1)Euler implicite

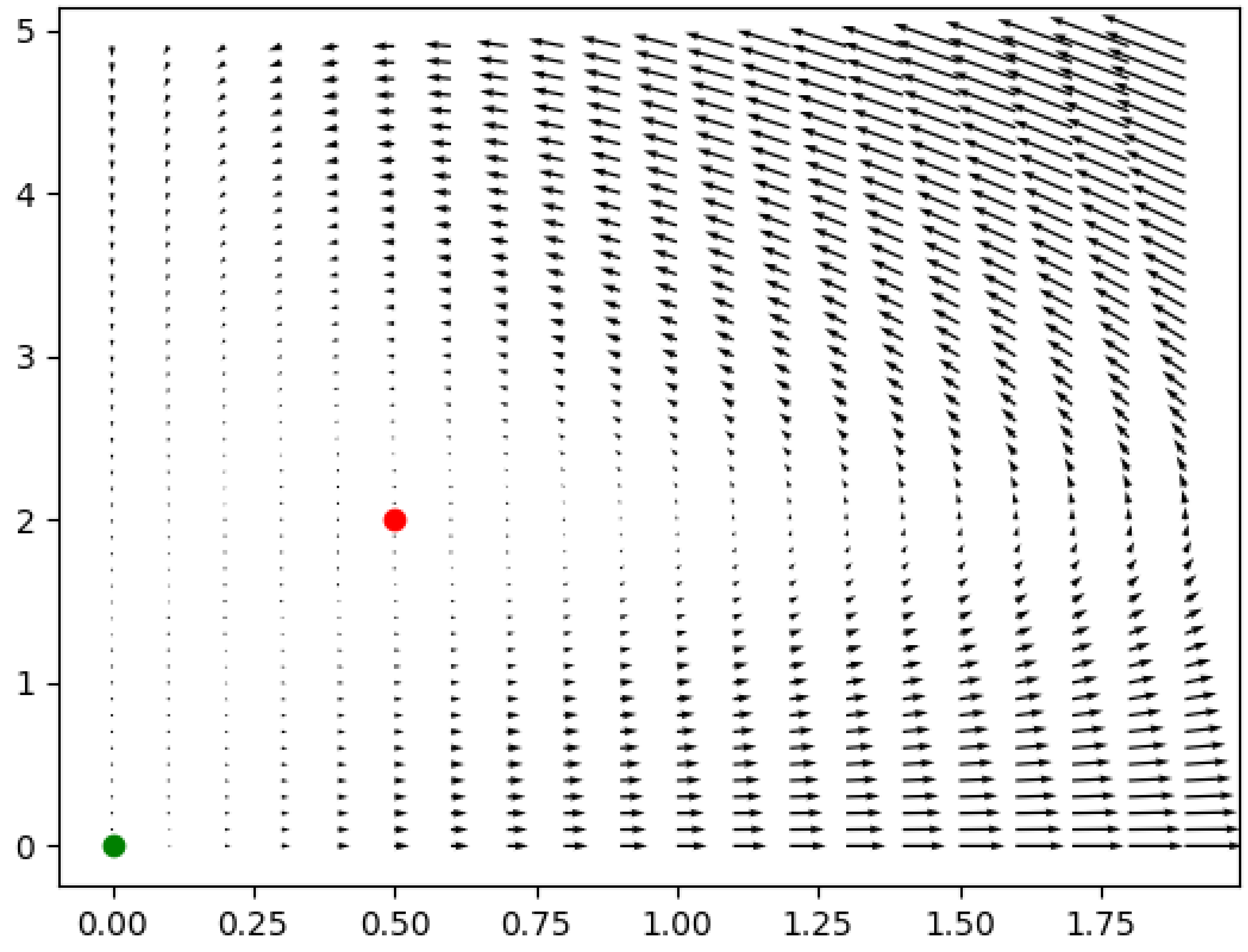
2)Runge kutta

2)VISUALISATION DES EQUILIBRES

Le point **rouge** représente l'équilibre (gamma/delta,alpha/beta).

Le point **vert** représente l'équilibre (0,0).

FIGURE 1 : CHAMP DE VECTEUR



3)ETUDES DES EQUILIBRES:

Calcul des Equilibres :

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} x = \frac{\gamma}{\delta} \\ y = \frac{\alpha}{\beta} \end{cases}$$

et l'équilibre triviale $(0,0)$:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Etude de la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$$

Etude de la matrice Jacobienne en (0,0):

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

Equilibre Instable + point col.

Etude de la matrice Jacobienne en (0,0):

$$J(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ 0 & \frac{\delta\alpha}{\beta} \end{pmatrix}$$

On peut pas conclure sur la stabilité (instabilité), mais c'est un point centre.

4)RESOLUTION EDO PAR EULER IMPLICITE:

Après résolution du system par la méthode D'Euler implicite
on obtient :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n - h(\alpha x_{n+1} - \beta x_{n+1} y_{n+1}) = 0 \\ y_{n+1} - y_n - h(\delta x_{n+1} y_{n+1} - \gamma y_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

On applique la methode de Newton en dimension N en calculant la matrice Jacobienne:

$$J(x_{n+1}, y_{n+1}) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 - h\alpha - h\beta y_{n+1} & h\beta x_{n+1} \\ -h\delta y_{n+1} & 1 - h\delta x_{n+1} + h\gamma \end{pmatrix}$$

On pose:

$$w_{n+1} = w_n - [J]^{-1} F(w_n)$$

5)RESOLUTION EDO PAR RUNGE KUTTA 2:

En posant :
pour le modèle à 2 espèces

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ \delta xy - \gamma y \end{pmatrix}$$

et en posant :
pour le modèle à 3 espèces

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x(\alpha - \beta x - \gamma y) \\ y(\delta - \epsilon y - \zeta x - \eta z) \\ z(\theta y - \iota z - \kappa) \end{pmatrix}$$

On résout récursivement la fonction de la manière suivante :

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_1 &= & f(t_n, y_n) \\ k_2 &= & f(t_n + h, y_n + hk_1) \\ y_0 &= & y(0) \end{cases}$$

6)RESOLUTION EDO PAR RUNGE KUTTA 4:

En posant :
pour le modèle à 2 espèces

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ \delta xy - \gamma y \end{pmatrix}$$

et en posant :
pour le modèle à 3 espèces

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x(\alpha - \beta x - \gamma y) \\ y(\delta - \epsilon y - \zeta x - \eta z) \\ z(\theta y - \iota z - \kappa) \end{pmatrix}$$

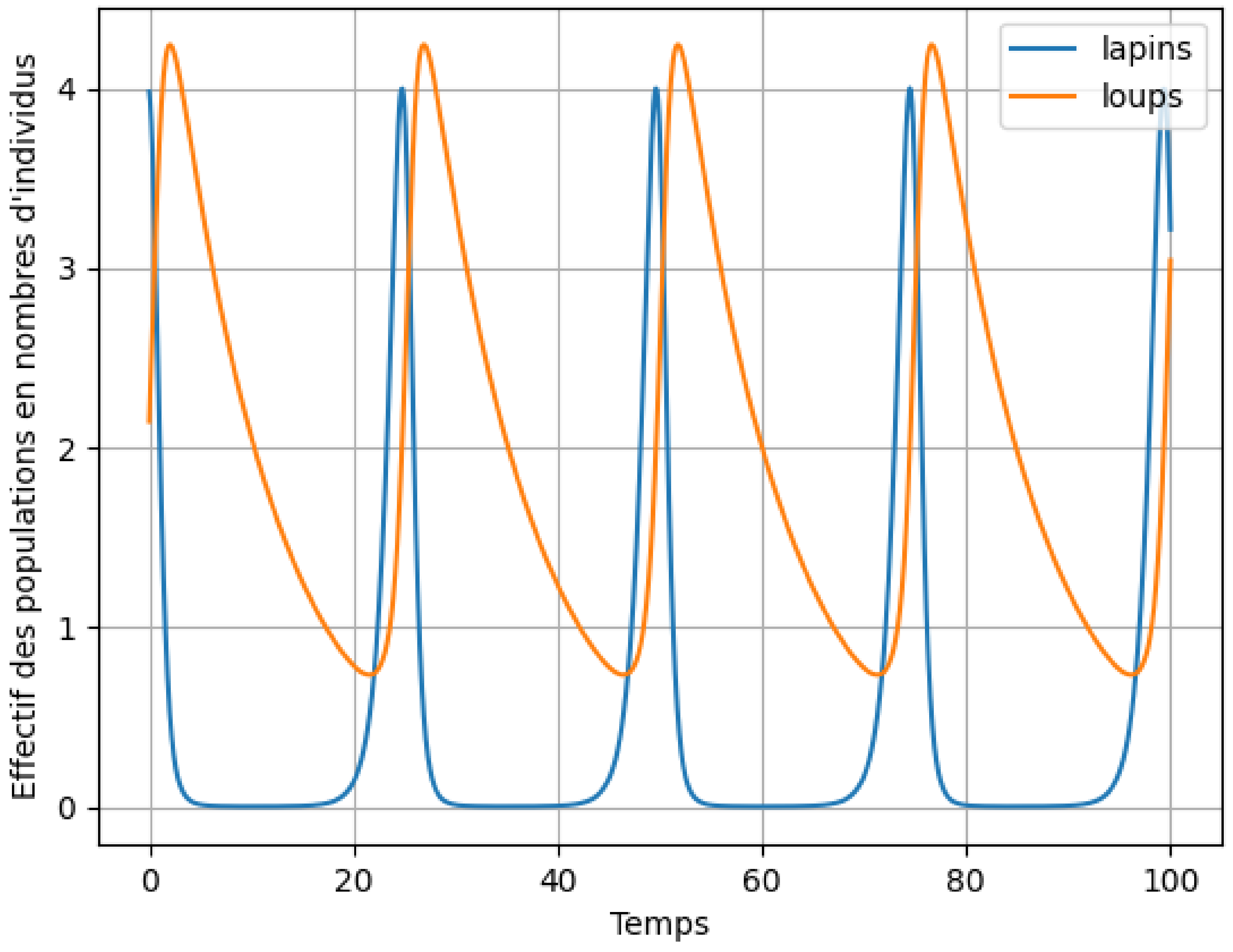
On applique la méthode de RungeKutta 4:

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases}$$

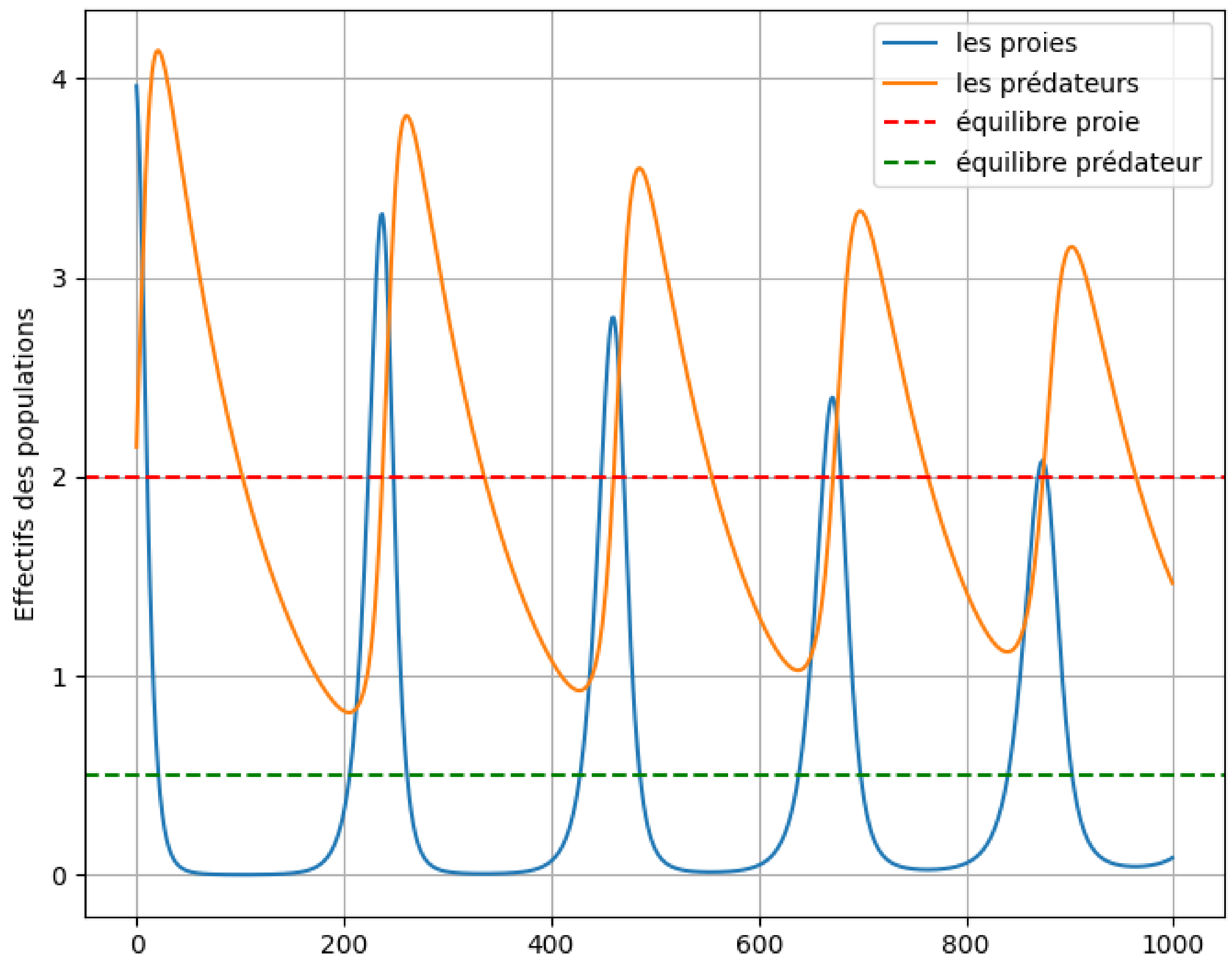
O(h^4)$

7) LES IMPRÉCISIONS DE EULER IMPLICITE

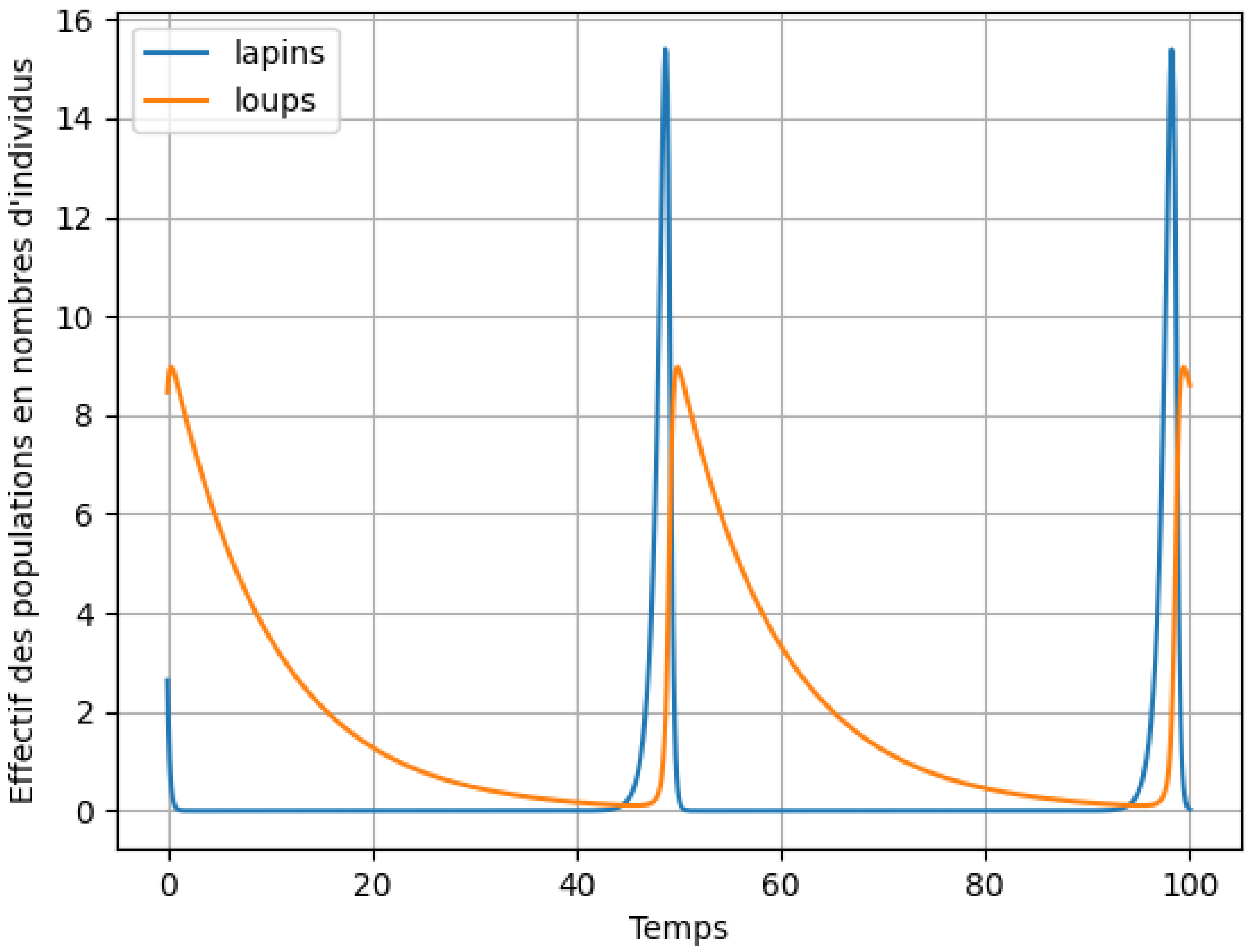
Méthode de Runge et Kutta 4



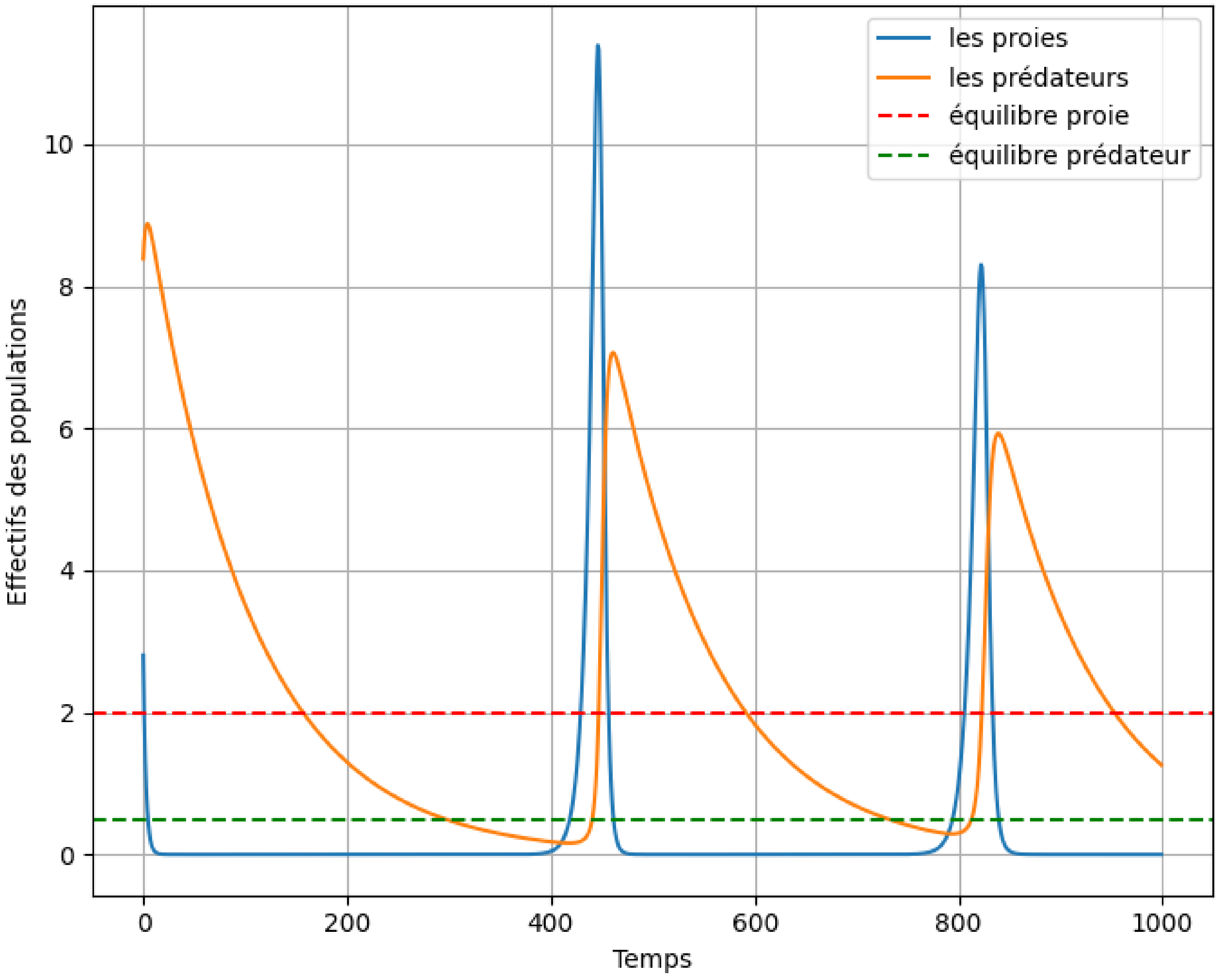
Méthode de Euler implicite



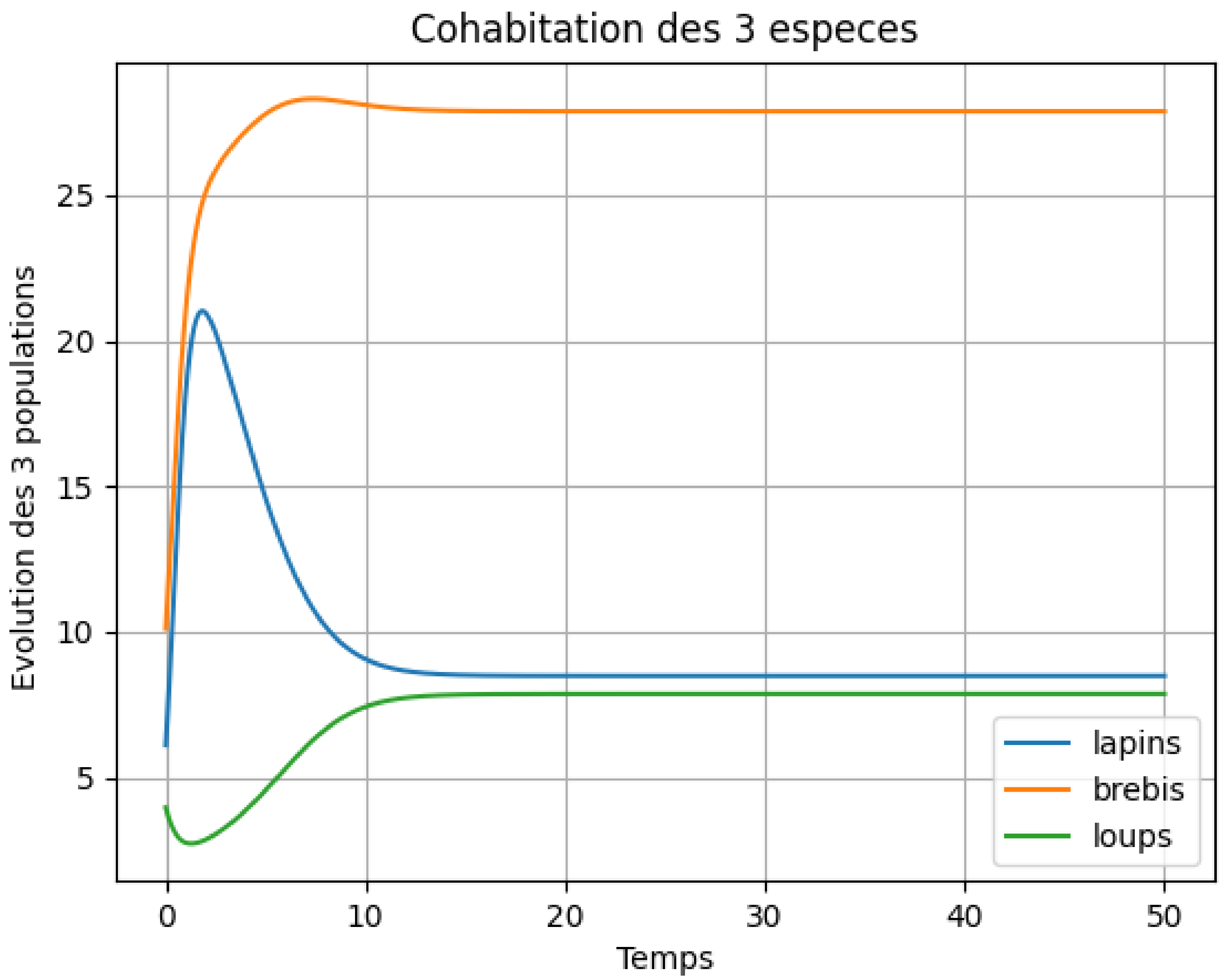
Simulation de LV2 via Runge Kutta 4



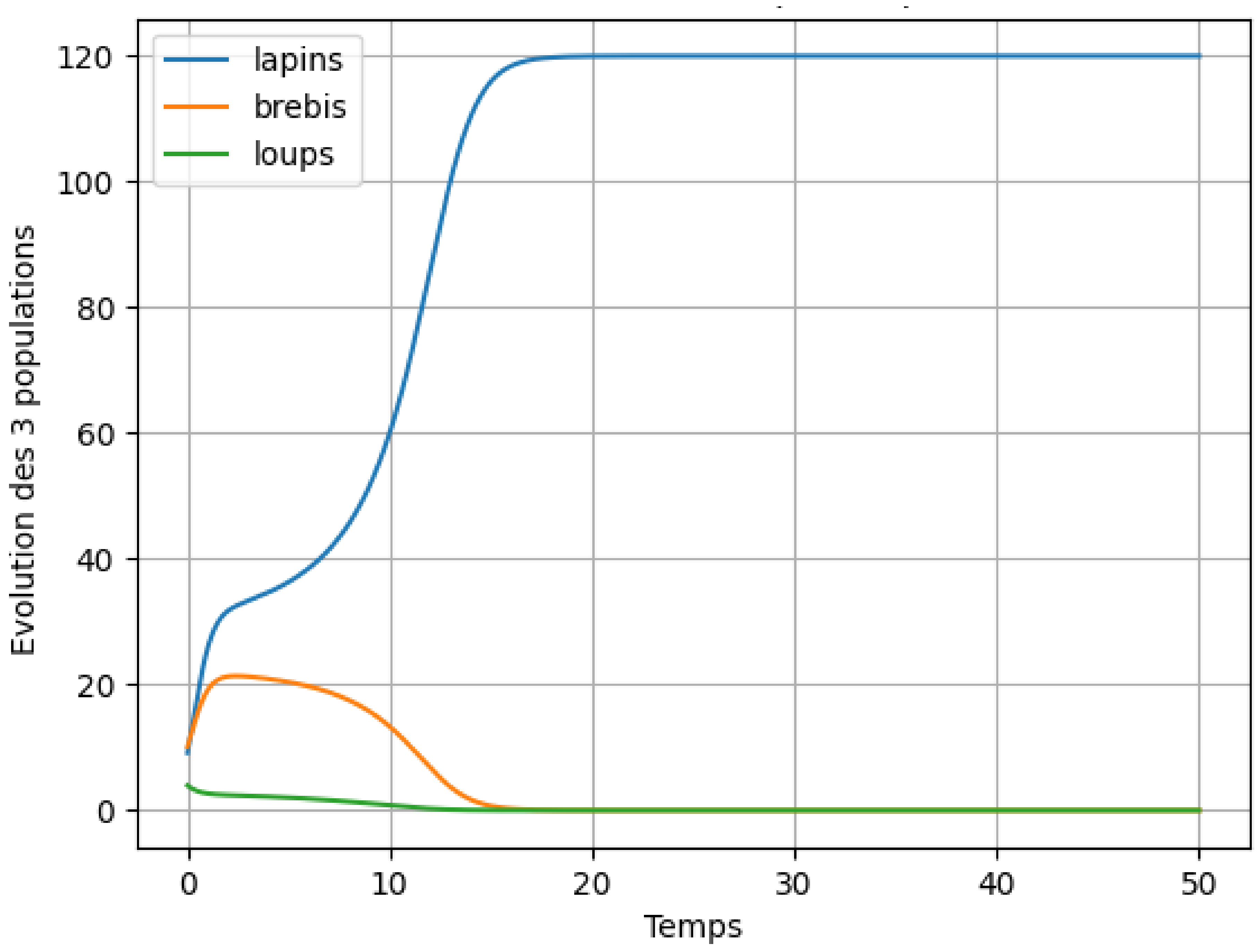
Simulation de LV2 via Euler Implicite



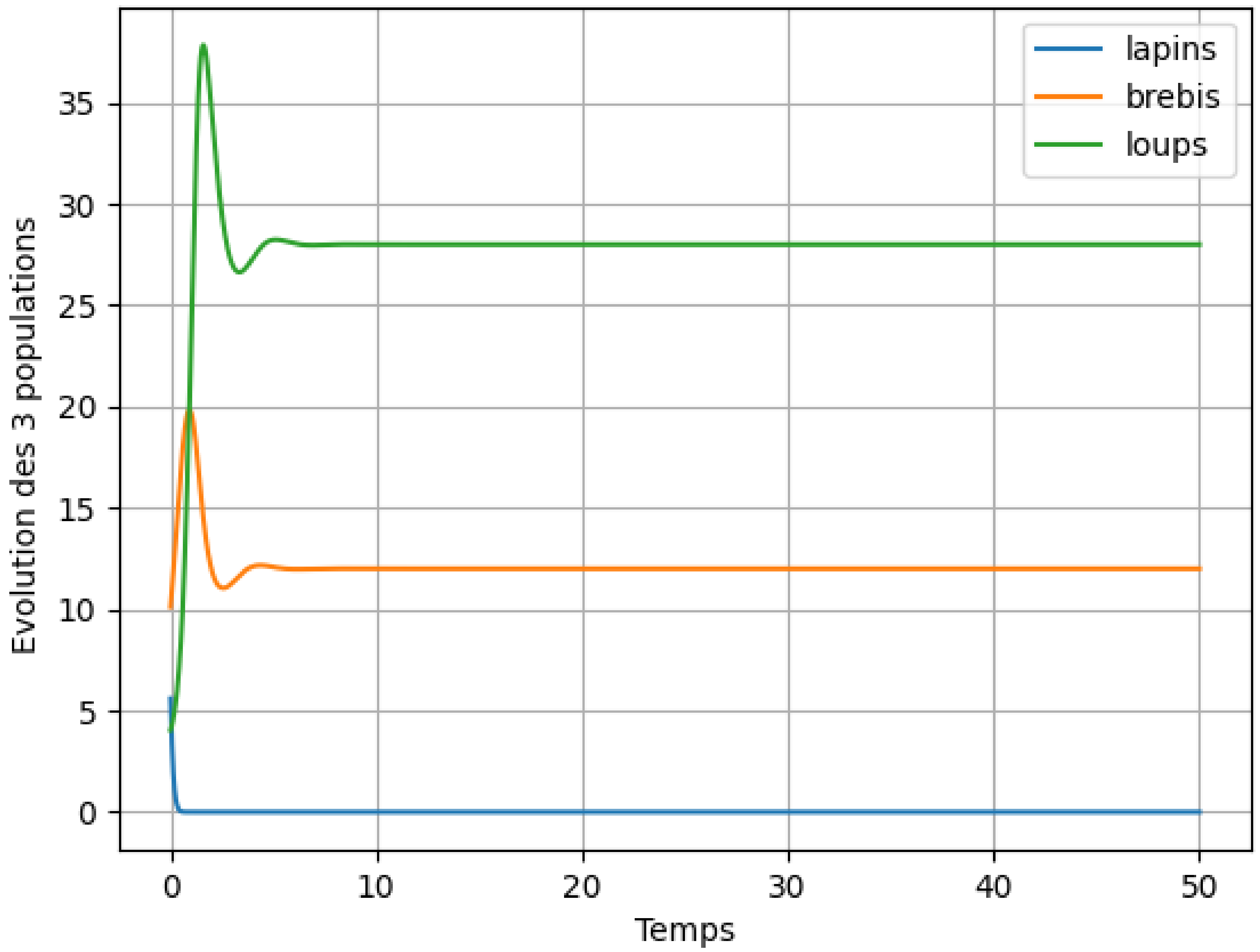
Simulation Lodka-Volterra avec les paramètres de base et (x0, y0, z0) = (4, 10, 6) - Cohabitation des 3 espèces



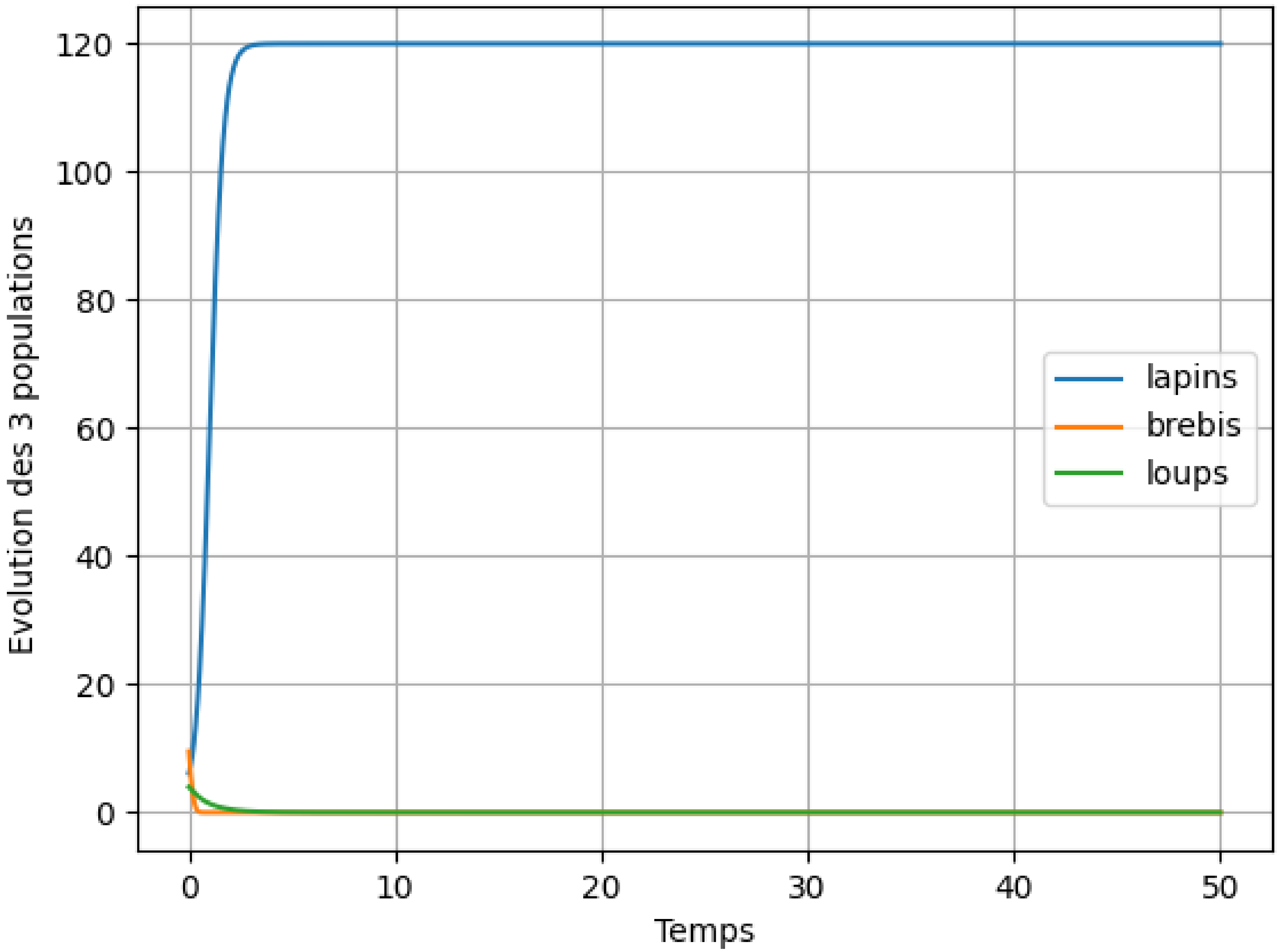
Simulation Lodka-Volterra avec les paramètres de base et (x0, y0, z0) = (12, 10, 8)

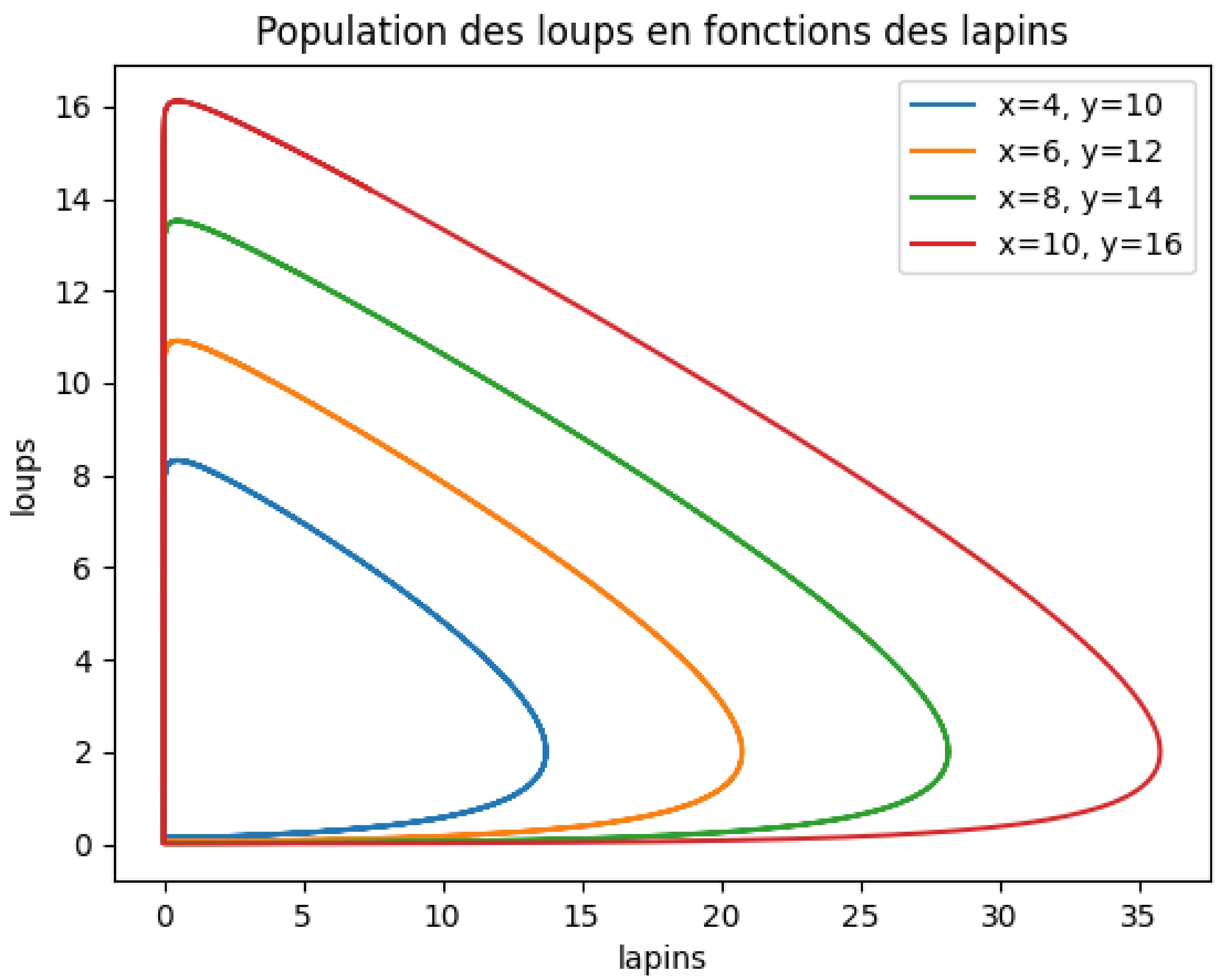


Simulation Lodka-Volterra avec les paramètres de base et (x0, y0, z0) = (12, 10, 8) Mise en évidence de la compétition entre les deux espèces.



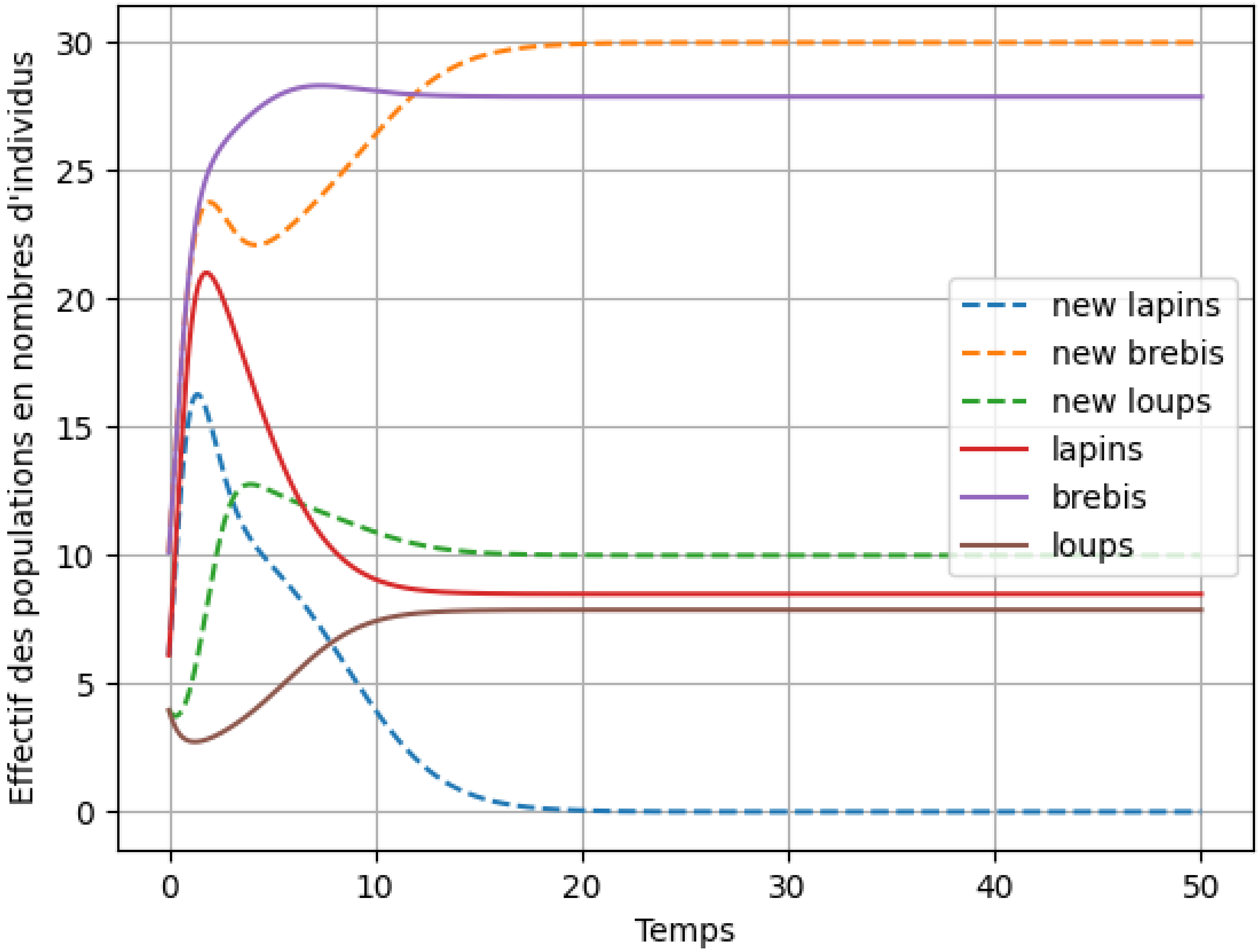
Simulation Lodka-Volterra avec les paramètres de base et (x0, y0, z0)= (12, 10, 8) Extinction des deux espèces (Brebis et Loups)



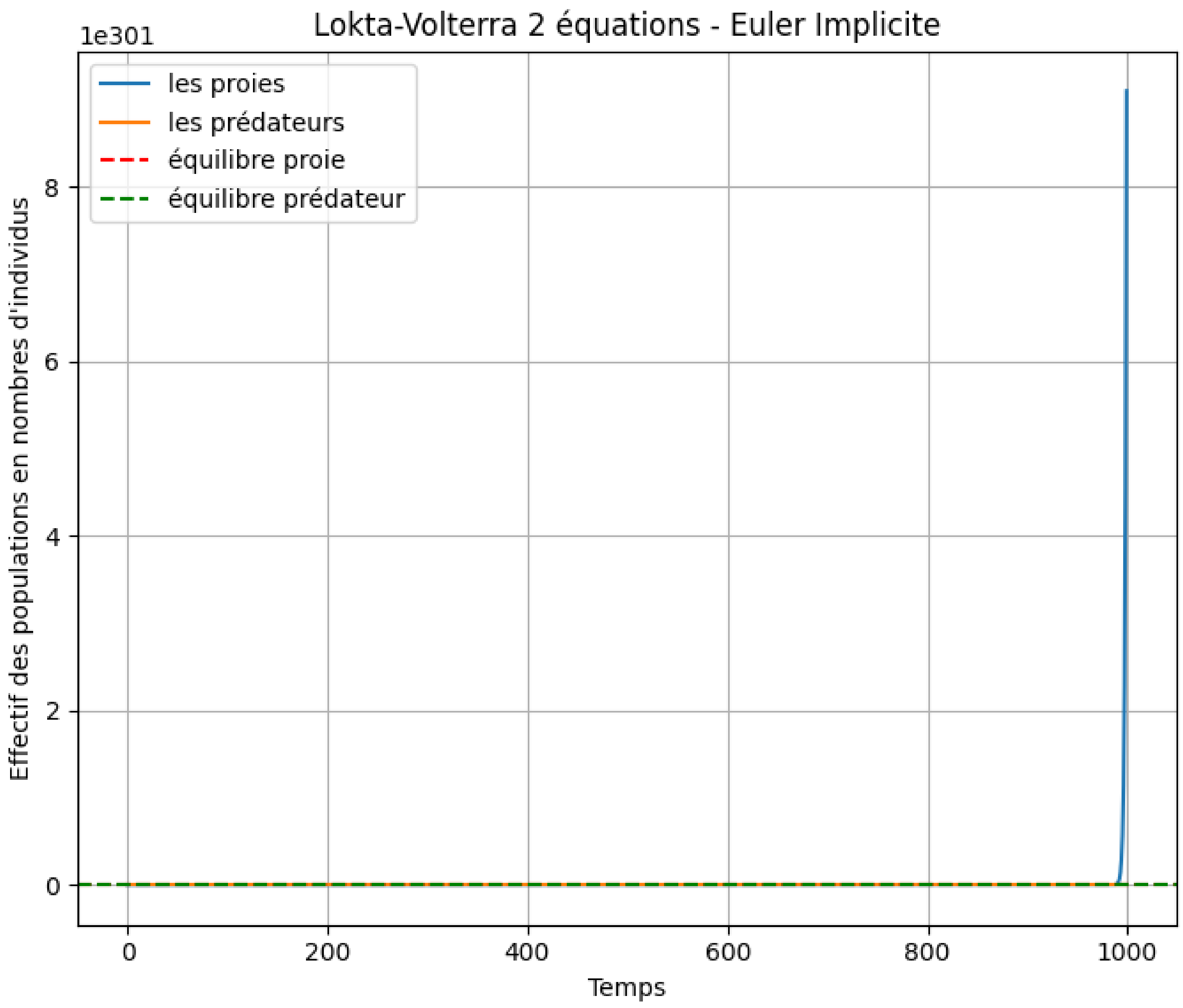


Population des loups en fonctions des lapins
x=4, y=10
x=6, y=12
x=8, y=14
x=10, y=16
loups
lapins
0
2
4
6
8
10
12
14
16
0
5
10
15
20
25
30
35

Comparaison du nouveau modèle avec l'ancien modèle



8)LIMITE DU MODELE



9) CARNET DE BORD

Tâches	Date	Responsable(s)
-Résolution de l'EDO a deux équations par la méthode d'EULER implicite sous format papier. -Etude du schéma numérique avec la méthode de Runge et Kutta 2,4 sur format papier.	12/04/2023	-Rayane Troudi -Zouga Jassiem & Florent Gerbaud
-Implémentation de la méthode Runge Kutta ordre 2,4 en python. -Implémentation de la méthode d'Euler implicite et la méthode de newton en dim N.	13/04/2023	-Zouga Jassiem & Florent Gerbaud -Rayane Troudi
-Etudes de la nature des équilibres des deux schémas. -Implémentation des codes python pour le schéma des 3 équations.	14/04/2023	-Zouga Jassiem -Rayane Troudi & Florent Gerbaud
-Analyse et Interprétation des résultats obtenue en modifiant les paramètres des équations.	15/04/2023	-Rayane Troudi -Florent Gerbaud -Zouga Jassiem
-Rédaction du rapport en Latex -Rédaction de la diapo de présentation	17/04/2023	-Rayane Troudi -Zouga Jassiem

10)CONCLUSION:

- Possibilité d'améliorer en prenant en compte l'action de pèche et de la chasse..
- Possibilité d'ajouter une super espèce comme l'homme.