

# Analyse Numérique II

## Équations de prédateurs de Lokta-Volterra

Rayane TROUDI, Jassiem ZOUGA, Florent GERBAUD

18 avril 2023

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Schémas d'Euler</b>	<b>2</b>
1.1	Lokta-Volterra d'ordre 2 . . . . .	2
1.2	Lokta-Volterra d'ordre 3 . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 :</b>	<b>3</b>
2.1	Lokta-Volterra d'ordre 2 et d'ordre 3 : . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Équilibres</b>	<b>4</b>
3.1	Équilibres Lokta-Volterra 2 : . . . . .	4
3.2	Équilibres Lokta-Volterra 3 : . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Interprétations</b>	<b>5</b>
4.1	Paramètres Lokta-Volterra 3 : . . . . .	5
4.2	Premières Visualisations : . . . . .	6
4.2.1	Lokta-Volterra 2 : . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Améliorations</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Limites</b>	<b>11</b>

# 1 Schémas d'Euler

## 1.1 Lokta-Volterra d'ordre 2

Dans cette section on commence par donner les schémas d'Euler Implicite pour le système de Lokta-Volterra d'ordre 2. Ce sont ces équations qui seront directement implémentées. On rappelle le schéma d'Euler : Soit  $z$  une équation différentielle et soit  $t$  le temps. Alors on a :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, z(t)) \text{ et } z(0) = z_0$$

Par une intégration de chaque côté aux temps  $t_n$  et  $t_{n+1}$  et une estimation de l'intégrale par la méthode des rectangles à droite, on obtient :

$$z_{n+1} = z_n + h \cdot f(t_{n+1}, z_{n+1})$$

Dans notre cas, nous avons un système d'équations tel que :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy & (f_1) \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y & (f_2) \end{cases}$$

On obtient donc un schéma d'Euler à 2 dimensions dont voici les 2 équations :

$$x_{n+1} = x_n + h f_1(t_{n+1}, x_{n+1})$$

et

$$y_{n+1} = y_n + h f_2(t_{n+1}, y_{n+1})$$

En remplaçant par les équations du système, on obtient :

$$x_{n+1} - x_n - h f_1(t_{n+1}, x_{n+1}) = 0$$

$$\iff x_{n+1} - x_n - h(\alpha x_{n+1} - \beta x_{n+1} y_{n+1}) = 0$$

et

$$y_{n+1} - y_n - h f_2(t_{n+1}, y_{n+1}) = 0$$

$$\iff y_{n+1} - y_n - h(\delta x_{n+1} y_{n+1} - \gamma y_{n+1}) = 0$$

Clairement, on identifie deux équations d'inconnues  $x_{n+1}$  et  $y_{n+1}$ . On se dirige naturellement vers une méthode de Newton pour résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n - h(\alpha x_{n+1} - \beta x_{n+1} y_{n+1}) = 0 \\ y_{n+1} - y_n - h(\delta x_{n+1} y_{n+1} - \gamma y_{n+1}) = 0 \end{cases}$$

On appelle  $F$  la matrice associée à ce système. On calcule alors le Jacobien de  $F$ , noté  $J$  défini par :

$$J(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 - h\alpha - h\beta y_{n+1} & h\beta x_{n+1} \\ -h\delta y_{n+1} & 1 - h\delta x_{n+1} + h\gamma \end{pmatrix}$$

C'est à partir de ces deux matrices qu'on implémente la méthode de Newton en dimension  $n$ . Puis on effectue cette même méthode sur chaque pas de temps d'un intervalle de temps donné avec un pas de discrétisation donné. On veillera à fixer la condition initiale.

## 1.2 Lokta-Volterra d'ordre 3

On procède exatament de la même manière pour le système de Lokta-Volterra avec 3 équations. Le même raisonnement conduit à trouver :

$$F(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = \begin{pmatrix} x_{n+1} - x_n - hx_{n+1}(\alpha - \beta x_{n+1} - \gamma y_{n+1}) \\ y_{n+1} - y_n - hy_{n+1}(\delta - \epsilon y_{n+1} - \zeta x_{n+1} - \eta z_{n+1}) \\ z_{n+1} - z_n - hz_{n+1}(y_{n+1} - \iota z_{n+1} - \kappa) \end{pmatrix}$$

et son Jacobien associé, on note  $dt$  le pas de temps,  $dt = h$  :

$$J(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) = \begin{pmatrix} 1 - dt(\alpha + 2\beta x_{n+1} + \gamma y_{n+1}) & dt.c.x_{n-1} & 0 \\ dt.f.x_{n-1} & 1 - dt(\delta + 2\epsilon y_{n+1} + \zeta x_{n+1} + \eta z_{n+1}) & dt.g.y_{n-1} \\ 0 & dt.z_{n-1}.h & 1 - dt(y_{n+1} + 2\iota z_{n+1} + \kappa) \end{pmatrix}$$

On implemente ensuite l'algorithme de Newton tel que :

$$w_{n+1} = w_n - [J]^{-1}F(w_n)$$

où  $w_n$  est le vecteur au temps  $t_n$  tel que  $w_n = (x_n, y_n)$  dans le cas 2D et  $w_n = (x_n, y_n, z_n)$  dans le cas 3D.

## 2 Schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 :

Dans cette partie, on évoquera uniquement le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Celui-ci à l'avantage d'avoir une précision plus importante que Runge-Kutta d'ordre 2. Cependant, les calculs sont plus importants mais c'est un bon compromis entre précision et rapidité.

### 2.1 Lokta-Volterra d'ordre 2 et d'ordre 3 :

On considère une équation différentielle  $\dot{y} = f(t, y(t))$  alors le schéma de Runge-Kutta 4 est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 = hf_i(x_n, y_n) \\ k_2 = hf_i(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf_i(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf_i(x_n + h, y_n + k_3) \\ y_{i,n+1} = y_{i,n} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{array} \right.$$

Il suffit maintenant d'appliquer cette méthode sur le système de LV2 pour chaque équation  $f_i$  avec  $i \in [1, 2]$ . et  $f_i$  avec  $i \in [1, 3]$  pour LV3 Où les  $f_i$  représente la  $i$ -ème ligne du système.

### 3 Équilibres

#### 3.1 Équilibres Lokta-Volterra 2 :

On commence par résoudre  $\dot{x} = 0$  et  $\dot{y} = 0$ . On obtient après résolution :

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{array} \right. \\ \iff & \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\gamma}{\delta} \\ y = \frac{\alpha}{\beta} \end{array} \right. \end{aligned}$$

et l'équilibre triviale  $(0, 0)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

On peut maintenant s'intéresser à la nature de ces deux équilibres. On calcule le Jacobien du système et on trouve après calcul :

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$$

En évaluant ce Jacobien en  $(0, 0)$  on a :

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}$$

La matrice étant diagonale symétrique, les deux valeurs propres sont :  $\lambda_1 = \alpha$  et  $\lambda_2 = -\gamma$ . Elles sont de signe opposé donc l'équilibre est instable et il s'agit d'un point col : les solutions semblent se rapprocher de l'équilibre, mais elles l'évitent et finalement s'en éloignent.

Pour l'autre équilibre on a :

$$J\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ 0 & \frac{\delta\alpha}{\beta} \end{pmatrix}$$

$\det(J(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})) = \alpha\gamma > 0$  et  $\text{Tr}(J(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})) = 0$  donc les valeurs propres sont des imaginaires purs. L'équilibre est donc un centre. Mais on ne peut pas conclure sur sa stabilité ou instabilité.

#### 3.2 Équilibres Lokta-Volterra 3 :

On considère le système de Lokta-Volterra avec 3 équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta x - \gamma y), \\ \frac{dy}{dt} = y(\delta - \epsilon y - \zeta x - \eta z), \\ \frac{dz}{dt} = z(\theta y - \iota z - \kappa). \end{array} \right.$$

On cherche les équilibres de ce système, on va procéder par disjonction de cas :

1. *cas* :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ On a donc une solution triviale qui correspond à l'extinction des 3 espèces.}$$

2. *cas* :  $x = 0$  et  $y = 0$  : Les deux premières équations s'annulent. Il reste :

$$\begin{aligned} z(\theta y - \iota z - \kappa) &= 0 \\ \Rightarrow z &= -\frac{\kappa}{\eta} \end{aligned}$$

3. *cas* :  $x = 0$  et  $z = 0$  : La première et troisième équation s'annulent. Il reste :

$$\begin{aligned} y(\delta - \epsilon y - \zeta x - \eta z) &= 0 \\ \Rightarrow y &= \frac{\delta}{\epsilon} \end{aligned}$$

4. *cas* :  $y = 0$  et  $z = 0$  : La deuxième et troisième équation s'annulent. Il reste :

$$\begin{aligned} x(\alpha - \beta x - \gamma y) &= 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}$$

5. *cas* :  $x = 0$  et  $y \neq z \neq 0$  :

$$\begin{cases} y(\delta - \epsilon y - \zeta x - \eta z), \\ z(\theta y - \iota z - \kappa). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon y + \eta z = \delta \\ \theta y - \iota z = \kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\delta \iota + \eta \kappa}{\epsilon \iota + \eta \theta} \\ z = \frac{-\eta \kappa + \delta \iota}{-(\epsilon \iota + \eta \theta)} \end{cases}$$

\* Note : On a une solution si le déterminant du système est non-nul.

6. *cas* :  $y = 0$  et  $x \neq z \neq 0$  :

$$\begin{cases} \alpha - \beta x = 0 \\ \iota - \kappa z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{\beta} \\ y = \frac{-\kappa}{\iota} \end{cases}$$

7. *cas* :  $z = 0$  et  $x \neq y \neq 0$  :

$$\begin{cases} \beta x + \gamma y = \alpha \\ \zeta x + \epsilon y = \delta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha \epsilon - \gamma \delta}{\beta \epsilon - \gamma \zeta} \\ y = \frac{\beta \delta - \alpha \zeta}{\beta \epsilon - \gamma \zeta} \end{cases}$$

\* Note : On a une solution si le déterminant du système est non-nul.

## 4 Interprétations

### 4.1 Paramètres Lokta-Volterra 3 :

Cette section est dédiée à expliquer le rôle de chaque paramètre du système de Lokta-Volterra avec 3 équations. Pour trouver le rôle de chacun de ces paramètres on utilise une méthode d'essais successifs et d'analyse logique du système. Voici une liste détaillée de leurs rôles après analyse :

- $\alpha$  : Taux de reproduction de x.
- $\beta$  : Taux de mortalité x
- $\delta$  : Taux de reproduction de y.
- $\gamma$  : Ressources que y prend à x
- $\epsilon$  : Taux de mortalité y
- $\theta$  : Taux de reproduction de z.

- $\eta$  : Taux de mortalité de y dû à la chasse de z
- $\kappa$  : ?
- $\iota$  : Taux de mortalité des z
- $\zeta$  : Ressource que x prend à y

## 4.2 Premières Visualisations :

### 4.2.1 Lokta-Volterra 2 :

Dans cette section, on commence par visualiser pour avoir une idée de la solution du système de LV2.

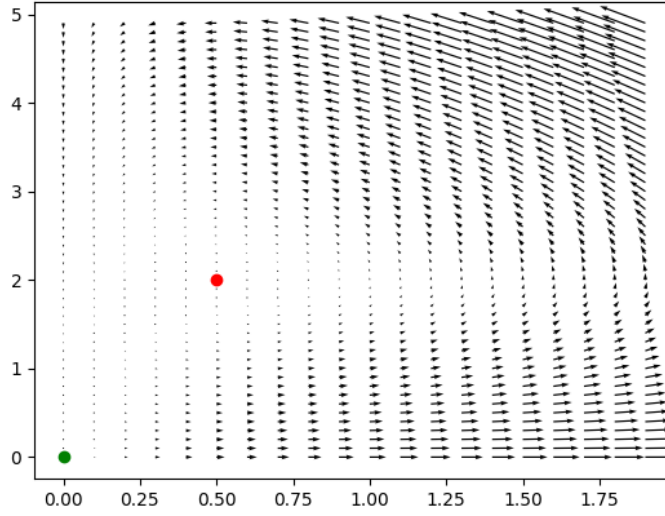


FIGURE 1 – Champs de vecteurs de LV2 pour  $\alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{2}{3}, \delta = 0.2, \gamma = 0.1$  en rouge et en vert les points d'équilibres

Ce premier graphique nous confirme bien le caractère de centre de la solution de l'équation différentielle pour le point rouge et de col pour le point vert. (*cf.* voir 3. Équilibres).

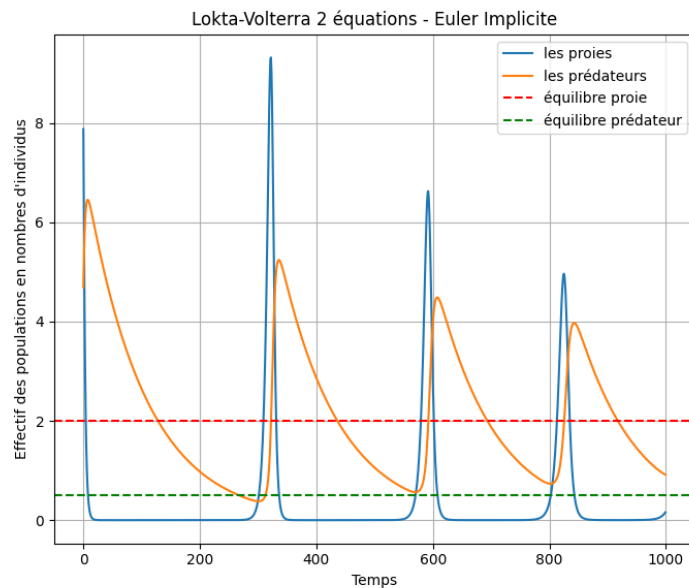


FIGURE 2 – Simulation de LV2 via Euler Implicite  $\alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{2}{3}, \delta = 0.2, \gamma = 0.1, x_0 = 10, y_0 = 4$

Les solutions sont périodiques mais décroissent en fonction du temps. Les solutions convergent vers les équilibres si on augmente l'intervalle de temps de la simulation :

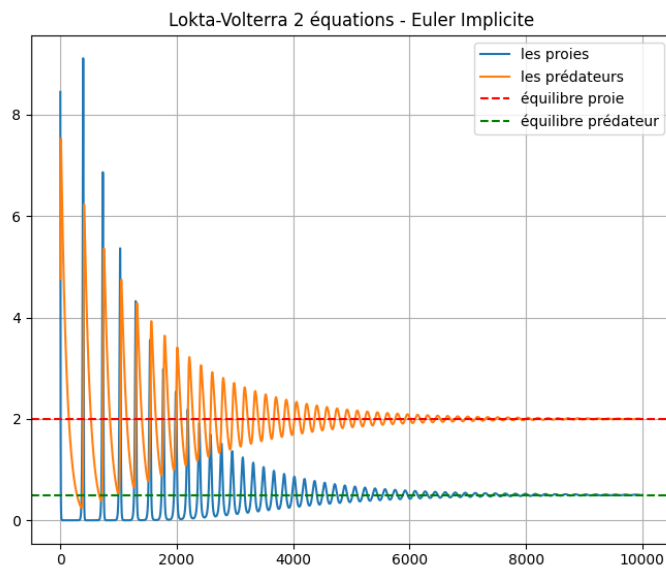


FIGURE 3 – Simulation de LV2 via Euler Implicite  $\alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{2}{3}, \delta = 0.2, \gamma = 0.1, x_0 = 10, y_0 = 4$

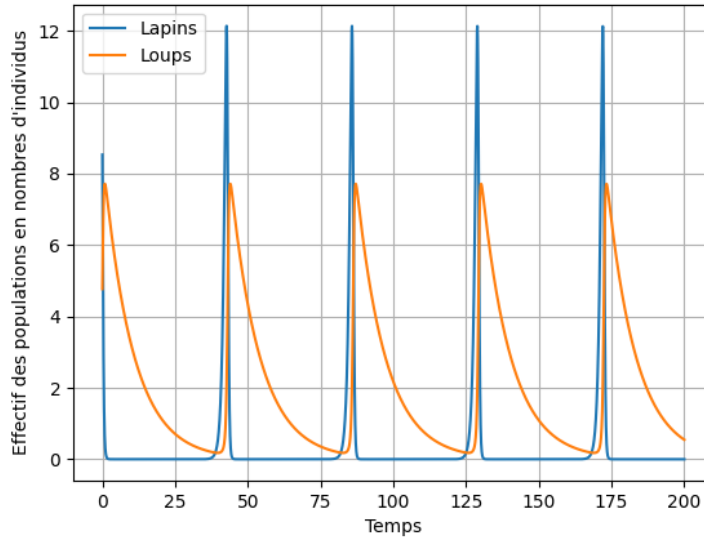


FIGURE 4 – Simulation de LV2 via Runge-Kutta 4  $\alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{2}{3}, \delta = 0.2, \gamma = 0.1, x_0 = 10, y_0 = 4$

Par la méthode Runge-Kutta, on obtient une évolution temporelle sans atténuation. Nous avons une explication d'un tel phénomène.

- On définit l'ordre de convergence d'une méthode par :  $z(t) - z(t_k) = o(h^k)$
- Or, la méthode d'Euler Implicite est une méthode en  $o(h)$  qui approxime la solution par une méthode des rectangles à gauche, or cette méthode commet une erreur par défaut !
- Ainsi à chaque itération, la nouvelle valeur estimée au pas de temps  $t_{n+1}$  diminue jusqu'à atteindre l'équilibre de l'EDO.

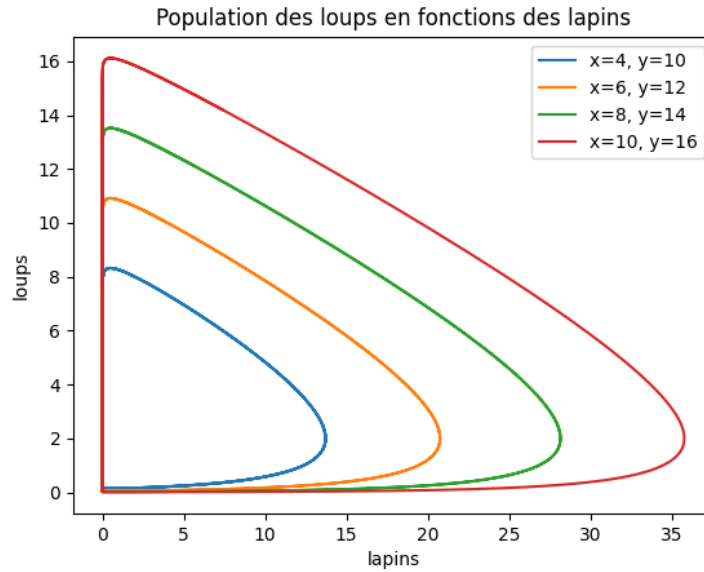


FIGURE 5 – Représentation des prédateurs en fonctions des proies avec des conditions initiales différentes.



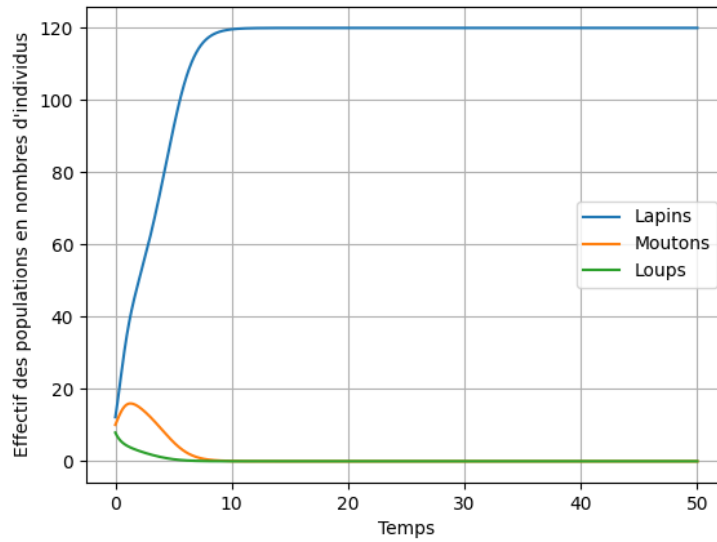


FIGURE 6 – Simulation Lodka-Volterra avec les paramètres de base et  $(x_0, y_0, z_0) = (12, 10, 8)$

Les Loups ne mangent que les moutons. Or les lapins ne se font pas manger par les loups et en les lapins mangent la même nourriture que les moutons. Mais comme ils sont plus nombreux de base avec un coefficient de reproduction plus élevé ils prospèrent pendant que les moutons s'éteignent car moins de nourriture ce qui entraîne aussi l'extinction des loups.

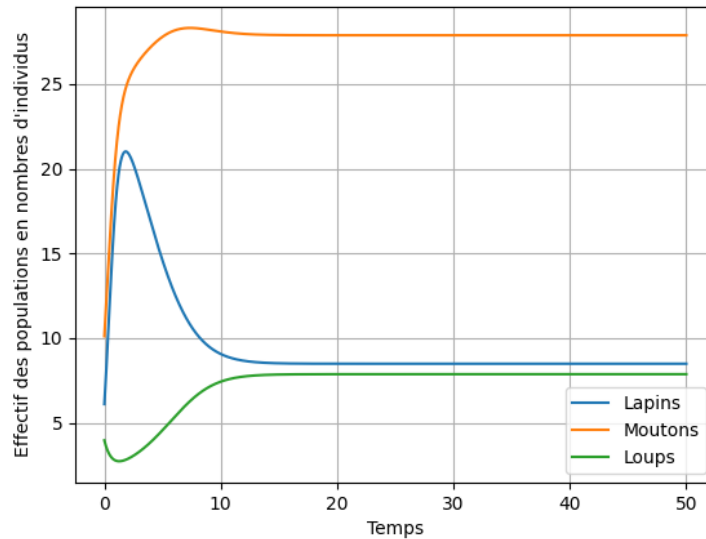


FIGURE 7 – Simulation Lodka-Volterra avec les paramètres de base et  $(x_0, y_0, z_0) = (4, 10, 6)$  - Cohabitation des 3 espèces

Comme le graphique précédent, une espèce ici les moutons est en supériorité numérique dès le début de la simulation. Ils ont un coefficient de reproduction moins important mais sont plus nombreux et mangent une partie des ressources des lapins. Donc leur population augmente ce qui profite aussi aux loups. Les lapins quant subissent une baisse de leur population jusqu'à atteindre un équilibre comme les loups.

## 5 Améliorations

On propose dans cette section de prendre en compte un nouveau comportement : Les prédateurs modélisés par la variable  $z$  chassent désormais aussi les proies  $x$  en plus des proies  $y$ . On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta x - \gamma y - p_2 z), \\ \frac{dy}{dt} = y(\delta - \epsilon y - \zeta x - \eta z), \\ \frac{dz}{dt} = z(\theta y - \iota z - \kappa + p_1 x). \end{cases}$$

$p_2$  représente le coefficient de mortalité des proies  $x$  dû à la chasse de  $z$  et  $p_1$  est le coefficient représentant la quantité de proies  $x$  chassée par  $z$ . On propose donc un graphique comparant les deux modèles en utilisant les mêmes paramètres que précédemment.

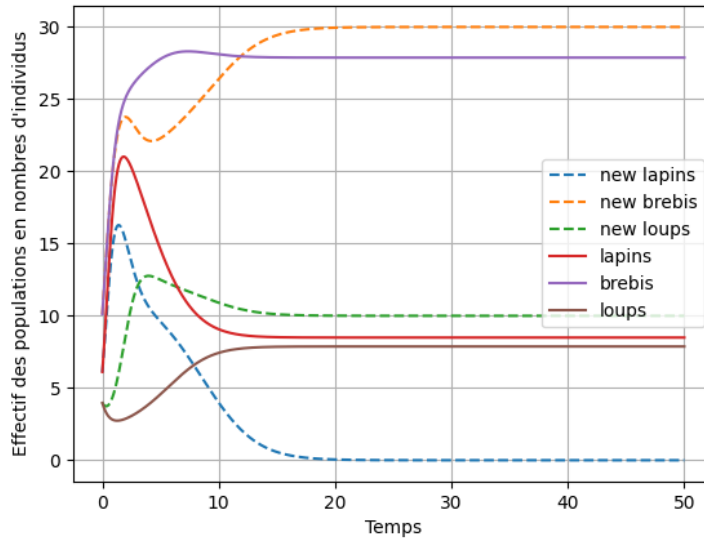


FIGURE 8 – Simulation Lodka-Volterra avec les paramètres de base et  $(x_0, y_0, z_0) = (6, 10, 4)$  - et  $p_1 = \frac{1}{20} = p_2$ . En pointillé le nouveau modèle et en continue l'ancien.

Désormais les lapins sont chassés par les loups et en concurrence avec les moutons. Or , les moutons sont plus nombreux au début de la simulation ce qui explique une courbe quasi-similaire entre les deux modèles. Mais lapins finissent par s'éteindre car ils sont en compétition plus chassés. Une fois les lapins éteints, il y équilibre entre les brebis et les loups. Car les brebis se reproduisent suffisamment.

## 6 Limites

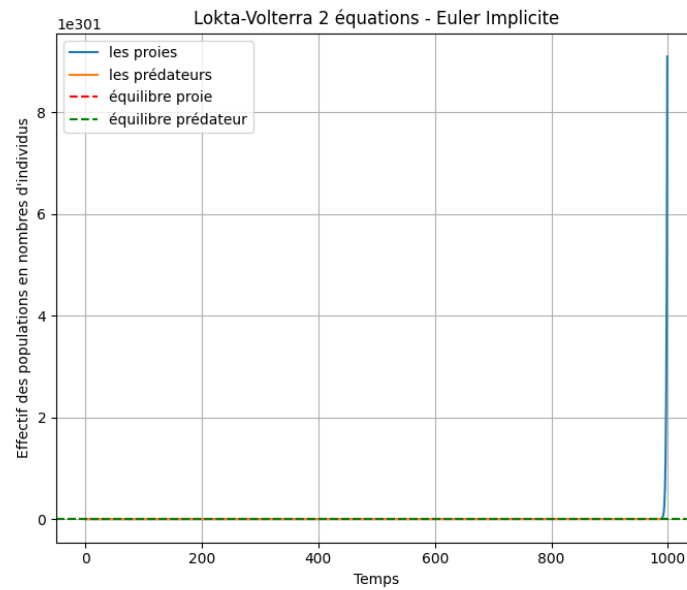


FIGURE 9 – Simulation Lotka-Volterra 2 avec les paramètres :  $\alpha = 5, \beta = \frac{1}{10}, \delta = \frac{1}{100}, \gamma = \frac{1}{10}, x_0 = 10, y_0 = 4$

Cette simulation illustre parfaitement le cas limite du modèle. La population des lapins grandit exponentielle ment alors que les ressources terrestres sont dans la réalité limitées.