Équations différentielles ordinaires et systèmes dynamiques

MAM3, année 2021-2022

Frédéric Grognard, Ludovic Mailleret

Cours 10

I. Méthode indirecte de Lyapunov - linéarisation

Theorem (Méthode indirecte de Lyapunov)

Soit $\bar{x}$ un équilibre de $\dot{x} = f(x)$ où $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^n)$ et D un voisinage de $\bar{x}$.

Soit $J_{\bar{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{|x=\bar{x}}$ la jacobienne de f évaluée en $\bar{x}$.

1. *Si $\forall\ \lambda_i$ valeurs propres de $J_{\bar{x}}$, on a $Re(\lambda_i) < 0$, alors $\bar{x}$ est Asymptotiquement Stable.*

2. *Si $\exists\ \lambda_i$ valeur propre de $J_{\bar{x}}$ telle que $Re(\lambda_i) > 0$, alors $\bar{x}$ est instable.*

On considére la variable d'écart $y = x - \bar{x}$ et le DL à l'ordre 1 de f:

$$\dot{y} = J_{\bar{x}} y + o(\|y\|)$$

On voit bien que, localement, la dynamique est régie par $\dot{y} = J_{\bar{x}} y$, un système linéaire pour lequel la stabilité de $y = 0$ (et donc $x = \bar{x}$) obéit a un théorème de stabilité vu précédemment (fin du cours 6).

Exemple: Si on considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 & = f_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2(1-x_2)(2-x_2) - 0.1x_1^2 & (= -x_2^3 + 3x_2^2 - 2x_2 - 0.1x_1^2) = f_2 \end{cases}$$

Pour avoir un équilibre, il faut $\dot{x}_1 = 0$ ET $\dot{x}_2 = 0$.

$$\dot{x}_1 = -x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 0$$

ET

$$\dot{x}_2 = -x_2(1-x_2)(2-x_2) - \underbrace{0.1x_1^2}_{x_1=0} = 0 \quad \Rightarrow -x_2(1-x_2)(2-x_2) - 0 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 0 \text{ OU } x_2 = 1 \text{ OU } x_2 = 2$$

On a trois équilibres: $(0,0)$, $(0,1)$ et $(0,2)$.

$$\Rightarrow J_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -0.2x_1 & -3x_2^2 + 6x_2 - 2 \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}$$

On l'évalue aux équilibres:

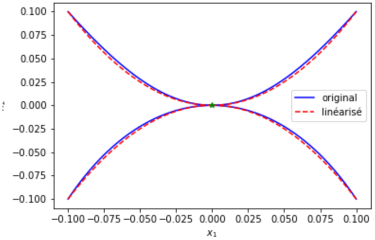
$$J_{(\underset{x_1}{0},\underset{x_2}{0})} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad J_{(\underset{x_1}{0},\underset{x_2}{1})} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J_{(\underset{x_1}{0},\underset{x_2}{2})} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$ thm

Les valeurs propres sont sur la diagonales $\Rightarrow$ $(0,0)$ et $(0,2)$ sont asymptotiquement stables et $(0,1)$ est instable. → thm

Près de $(0,0)$, $y = x - \bar{x} = x$ et le système original est équivalent à $\dot{x} = J_{(0,0)}x \rightarrow$

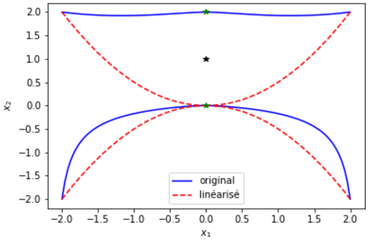
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2(1-x_2)(2-x_2) - 0.1x_1^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = -2x_2 \end{cases}$$

Pour des conditions initiales $(\pm 0.1, \pm 0.1)$ proches de $(0,0)$:



Très bonne concordance entre les deux solutions

Pour des conditions initiales $(\pm 2, \pm 2)$ éloignées de $(0,0)$:



Les solutions des deux systèmes sont très différentes, au point de ne pas converger vers le même équilibre.

On voit que le modèle linéarisé approxime bien le système original pour des conditions initiales proches de l'équilibre étudié. C'est pourquoi on peut en général en tirer des conclusions sur la stabilité de celui-ci.

Valeurs propres à partie réelle nulle:

Si on a un système tel que toutes les valeurs propres de $J_{\bar{x}}$ ont leurs parties réelles strictement négatives, sauf quelques unes à partie réelle nulle, le théorème de Lyapunov indirect ne nous dit rien.

Pourtant le théorème sur la stabilité des systèmes linéaires a tendance à nous indiquer une forme de stabilité (bornitude).

Considérons $\dot{x} = f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ et un équilibre en $\bar{x}$ tel que $J_{\bar{x}}$ a toutes ses valeurs propres à partie réelle nulle sauf une égale à 0.

Soit v_0 le vecteur propre à gauche de $J_{\bar{x}}$ correspondant à $\lambda = 0$ ($v_0 J_{\bar{x}} = 0$); v_0 est un vecteur ligne.
On étudie la dynamique de la variable $z = v_0(x - \bar{x}) = v_0 y$:

$$\dot{z} = v_0 \dot{y} = v_0(J_{\bar{x}} y + o(\|y\|)) = v_0.o(\|y\|)$$

La dynamique de z est la dynamique de x dans la direction v_0. On voit que cette dynamique est indépendante de $J_{\bar{x}}$. La dynamique est donc déterminée par les termes $o(\|y\|)$ d'ordre supérieur qui peuvent stabiliser $\bar{x}$... ou le déstabiliser.

Si $Re(\lambda_i) \leq 0$ pour tout i avec au moins une telle que $Re(\lambda_i) = 0$, la méthode indirect de Lyapunov ne nous dit rien.

Exemple: $\dot{x} = x(x-1)^3$

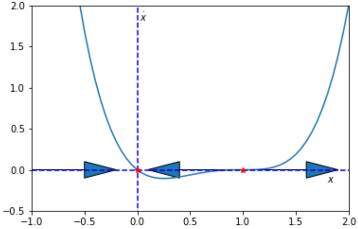
On a deux équilibres $\bar{x} = 0$ et $\bar{x} = 1$.

En dimension 1, $J_x = f'(x) = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$.

En $\bar{x} = 0$, $J_{\bar{x}} = -1 \Rightarrow$ équilibre asymptiquement stable.(la valeur propre est la valeur de $J_{\bar{x}}$ en dimension 1).

En $\bar{x} = 1$, $J_{\bar{x}} = 0 \Rightarrow$ on ne peut rien dire.

L'avantage de la dimension 1, c'est qu'on a l'analyse qualitative:



$\Rightarrow$ L'équilibre en $x = 1$ est instable.
Remarque: pour x proche de 1 la dynamique en $y = x - 1$, nous donne:
$\dot{y} = (y+1)y^3 = y^3 + y^4 \approx y^3$, qui déstabilise bien l'équilibre en $y = 0$, mais c'est l'ordre 3 et non l'ordre 1 qui nous le dit.

Trace et déterminant:

Pour un système en dimension 2, il n'est pas nécessaire de calculer les valeurs propres car:

$$\boxed{\begin{array}{c} Re(\lambda_1) < 0 \text{ et } Re(\lambda_2) < 0 \\ \Leftrightarrow \\ Trace(J_{\bar{x}}) < 0 \text{ et } det(J_{\bar{x}}) > 0 \end{array}}$$

a) $Trace(J_{\bar{x}}) = \lambda_1 + \lambda_2$. C'est la somme des éléments diagonaux.

$det(J_{\bar{x}}) = \lambda_1 \lambda_2$

b) Ce n'est pas valable au-delà de la dimension 2!!!!!

c) C'est inutile quand $J_{\bar{x}}$ est triangulaire car on a directement les valeurs propres!

d) En 2D:

1) $Trace(J_{\bar{x}}) < 0$ ET $det(J_{\bar{x}}) > 0 \Leftrightarrow \bar{x}$ est AS

2) $Trace(J_{\bar{x}}) > 0$ OU $det(J_{\bar{x}}) < 0 \Leftrightarrow \bar{x}$ est instable

3) $Trace(J_{\bar{x}}) = 0$ et $det(J_{\bar{x}}) > 0 \Leftrightarrow \lambda_i$ imaginaires pures

4) $Trace(J_{\bar{x}}) < 0$ et $det(J_{\bar{x}}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 = 0$

Le pendule avec amortissement: Exemple

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k\sin(x_1) - ax_2 \end{cases}$$

En un équilibre $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (j\pi, 0)$ avec $j \in \mathbb{Z}$:

$$J_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{(\bar{x}_1, \bar{x}_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos(x_1) & -a \end{pmatrix}_{(j\pi, 0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k\cos(j\pi) & -a \end{pmatrix}$$

1. Équilibres vers le bas: j pair:

$$J_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -a \end{pmatrix}$$

   $Trace(J_{\bar{x}}) = -a < 0$ et $det(J_{\bar{x}}) = k > 0 \Rightarrow$ l'équilibre est AS.

2. Équilibres vers le haut: j impair:

$$J_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & -a \end{pmatrix}$$

   $Trace(J_{\bar{x}}) = -a < 0$ et $det(J_{\bar{x}}) = -k < 0 \Rightarrow$ l'équilibre est instable.

Exemple

Le pendule sans amortissement: $a = 0$

1. Équilibres vers le bas: j pair:

$$J_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}$$

$Trace(J_{\bar{x}}) = 0$ et $det(J_{\bar{x}}) = k > 0 \Rightarrow$ valeurs propres imaginaires $\Rightarrow$ on ne peut rien dire.

En fait l'équilibre est simplement stable: pour rester proche de l'équilibre, il suffit de partir proche de l'équilibre. Mais on ne va pas s'en rapprocher.

2. Équilibres vers le haut: j impair:

$$J_{\bar{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}$$

$Trace(J_{\bar{x}}) = 0$ et $det(J_{\bar{x}}) = -k < 0 \Rightarrow$ l'équilibre est instable.

II. Méthode directe de Lyapunov

Exemple pendule

La méthode indirecte de Lyapunov est très locale: il existe un voisinage autour de l'équilibre, voisinage qui peut être très petit...

On veut avoir une vision plus globale ⇒ on étudie l'énergie totale du pendule: énergie potentielle + énergie cinétique (divisée par ml):

formule de l'énergie

$$E(x_1(t), x_2(t)) = k(1 - \cos(x_1)) + \frac{1}{2}x_2^2$$

énergie selon les composantes

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & -k\sin(x_1) - ax_2 \end{cases}$$

frottement

1. Sans amortissement ($a = 0$):

$$\frac{d}{dt}E(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial E}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial E}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = k\sin(x_1)\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$$

$$= k\sin(x_1)x_2 + x_2(-k\sin(x_1)) = 0$$

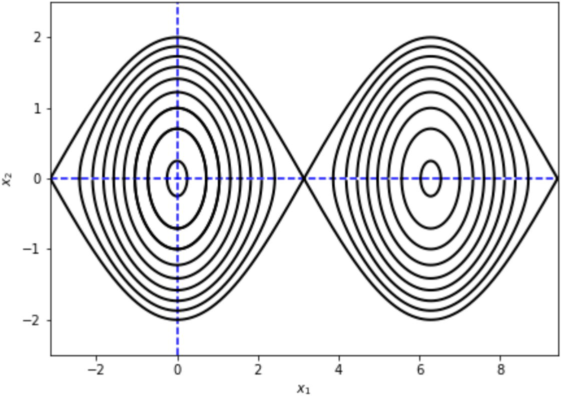
⇒ L'énergie reste constante

2. Avec amortissement:

$$\frac{d}{dt}E(x_1(t), x_2(t) = k\sin(x_1)x_2 + x_2(-k\sin(x_1) - ax_2) = -ax_2^2 \leq 0$$

⇒ L'énergie décroit tant que la vitesse de rotation est non nulle.

Sur le plan de phase: (sans amortissement).

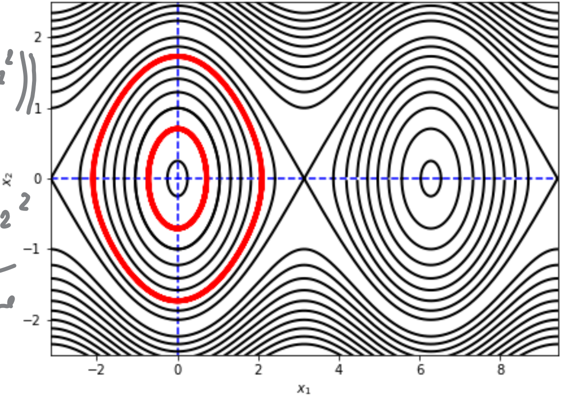


Par la périodicité du cos et donc de l'énergie, les courbes de niveaux se répètent.

Sur le plan de phase: (sans amortissement).

$E(x_1, x_2) = h(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$, quand x_1 petit

$$h\left(1 - \left(1 - \frac{x_1^2}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} x_2^2 = \underbrace{h \frac{x_1^2}{2} + \frac{1}{2} x_2^2}_{\text{équation d'une ellipse}}$$



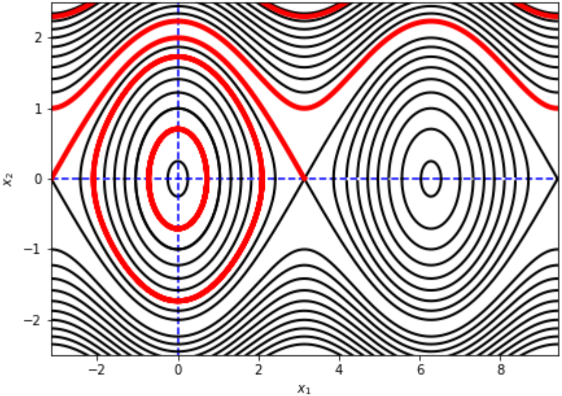
Par la périodicité du cos et donc de l'énergie, les courbes de niveaux se répètent.

Pour des niveaux d'énergie plus élevés, les courbes de niveau ne sont pas fermées.

Sans amortissement, les solutions suivent les courbes de niveau.

Et les oscillations sont plus importantes aux niveaux d'énergie plus élevés.

Sur le plan de phase: (sans amortissement).

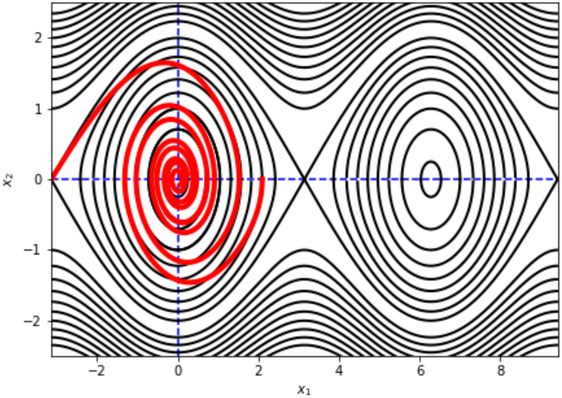


Quand le pendule part infiniment proche de l'équilibre vertical haut, il fait une oscillation complète pour retourner vers la verticale, en un temps infini.

Quand le pendule est lancé depuis la verticale haute avec une vitesse non nulle, il fait un tour complet et se retrouve dans la même situation, et donc il continue à tourner.

Et d'autant plus que la vitesse initiale est élevée.

Sur le plan de phase: (AVEC amortissement).

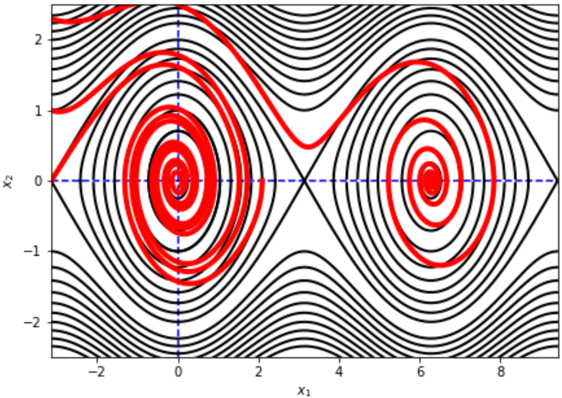


L'amortissement fait converger le pendule vers l'équilibre vertical bas.

Quand le pendule est lancé avec un angle un peu plus important, on voit que la solution traverse les courbes de niveau vers les niveaux plus bas.

On voit néanmoins que quand $x_2 = 0$, la solution suit la courbe de niveau d'énergie.

Sur le plan de phase: (AVEC amortissement).



Même quand le pendule part de la verticale avec une vitesse non nulle, il finit par converger

Si la vitesse initiale est plus importante, la convergence ne peut avoir lieu qu'après que le pendule a fait un tour complet.

La solution converge vers $(2\pi, 0)$ plutôt que vers $(0, 0)$.