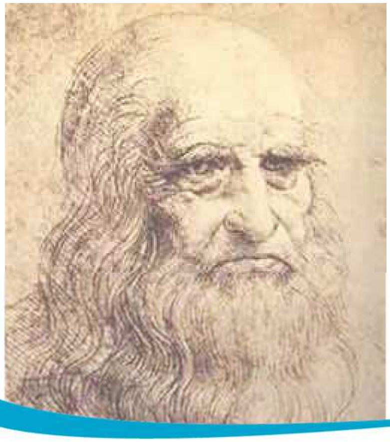
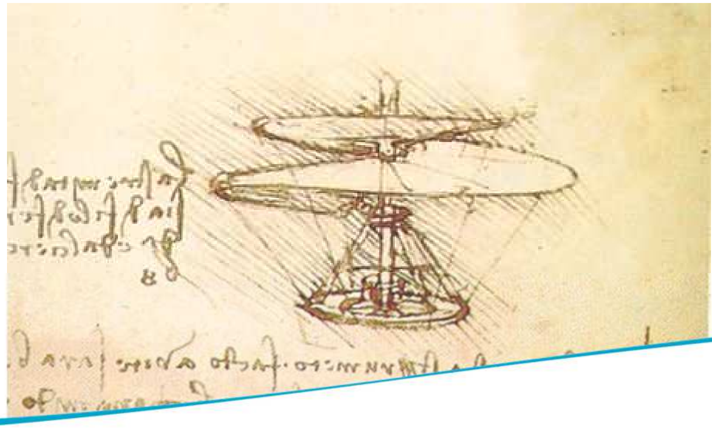
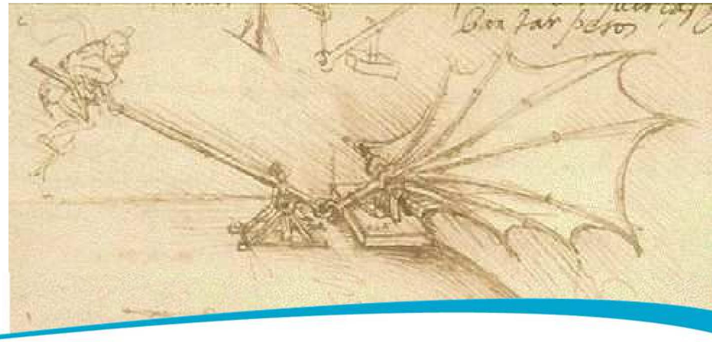






Calcul de transfert d’orbite optimale

Cours Polytech Sophia Satellite

T.Dargent

Corporate Communications

Février 2012

OBJECTIFS

- Connaître les bases théoriques du control optimal par application du principe du minimum
- Connaître l'application du principe du minimum au transfert d'orbite
- Maîtriser la formulation d'un problème de transfert, la définition des conditions limites et leur traduction en équation de contrainte initiale et finale

Programme 1/2

- Rappel théorique sur l’optimisation paramétrique
- Introduction au principe du minimum
- Application à la formulation d’un problème de transfert en temps minimum et en masse maximum
- Exemple de calcul de condition finale
- Mise en forme du problème comme un problème de type TPBVP

Optimisation sans contraintes:

- Soit $L(u_1,...,u_m)$ une fonction de coût dépendant de m paramètres de commande $u_1,...,u_m$ que l'on cherche à minimiser
- Posons $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ u_m \end{bmatrix}$ le vecteur de commande
- Les conditions nécessaires pour que L(u) soit minimum sont que :
  - ✓ $\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \quad c'est à dire \quad \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0 \quad pour\ i = 1,....., m$
  - ✓ $\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \geq 0 \quad c'est\ à\ dire\ la\ matrice\ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j}\right] \geq 0 \quad pour\ i, j = 1,....., m$

$\geq$ veut dire que la matrice est définie positive, c'est à dire que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

- Une condition nécessaire et suffisante d'optimalité est $\frac{\partial L}{\partial u} = 0\ et\ \frac{\partial^2 L}{\partial u^2} > 0$
- Tout point qui vérifie ces 2 équations simultanément est un minimum local.

N.B.Dans le cas ou une valeur propre est nulle, il faut regarder les dérivées partielles d'un ordre plus élevé pour s'assurer de la qualité de minimum local. On appelle un tel point un point singulier

Optimisation avec contraintes d'égalité:

- Soit $L(x_1,\dots,x_n\ ;\ u_1,\dots,u_m)$ une fonction de coût que l'on cherche à minimiser dépendant de m paramètres de commande $u_1,\dots,u_m$ et de n variable d'état $x_1,\dots,x_n$, ou les n variables d'état sont déterminées par les commandes par n équations $f_{i=1\dots n}(x_1,\dots,x_n\ ;\ u_1,\dots,u_m)=0$.
- Posons
  - $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ u_m \end{bmatrix}$ le vecteur de commande
  - $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ le vecteur de d'état
  - $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix}$ le vecteur de fonction de contrainte

Rappel sur l'optimisation paramétrique

Optimisation avec contraintes d'égalité:

- Le problème consiste à trouver le vecteur u tel que L(x,u) soit minimum et vérifiant f(x,u)=0.
  - La condition nécessaire pour que L(x,u) soit minimum est qu'il existe un point stationnaire tel que:
  - $dL=0=L_x dx + L_u du$ pour une valeur arbitraire de du tout en assurant $df=0=f_x dx+f_u du$
  - d'ou $dx=-f_x^{-1} f_u du$ et $dL=(L_u-L_x\, f_x^{-1} f_u)du = 0$ quelque soit du
- Conclusion : une condition nécessaire de minimum de L est :
  - $L_u - L_x f_x^{-1} f_u = 0$
- Autre méthode par introduction de multiplicateur de Lagrange

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ . \\ . \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

  - Augmentation de la fonction de coût:

$$H(x,u,\lambda) = L(x,u) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,u) = L(x,u) + \lambda^T f(x,u)$$

Optimisation avec contraintes d'égalité:

- Les conditions nécessaires pour avoir un point stationnaire pour H sont :

$$f(x,u)=0$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial H}{\partial u}=0$$

- Pour une solution de système d'équations la condition nécessaire pour que ce point soit un minimum est que la matrice suivante soit définie positive :

$$\frac{\partial^2 L}{\partial u^2}=H_{uu}-H_{ux}f_x^{-1}f_u-f_u^T\left(f_x^T\right)^{-1}H_{xu}+f_u^T\left(f_x^T\right)^{-1}H_{xx}f_x^{-1}f_u\geq 0$$

Optimisation de systèmes continus sans contrainte terminale et durée fixe :

- Soit le système dynamique : $\dot{x} = f\left(x(t), u(t), t\right) \quad avec \quad x(t_0) \quad donné,\ t_0 \leq t \leq t_f$
  - x est le vecteur d'état et u un vecteur de commande
- Soit J la fonction de coût : $J = \varphi\left[x(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} L\left[x(t), u(t), t\right] dt$
- On cherche à déterminer u(t) tel que J soit minimum (ou maximum)
  - Le principe du maximum de pontryagin est l'extension en dimension infinie des techniques de minimisation en dimension finie vue dans les planches précédentes
  - Pour cela on introduit des multiplicateurs de Lagrange sur le système dynamique et on transforme L par l'Hamiltonien H:

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,u,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t)$$

  - puis on augmente La fonction de coût J:

$$\overline{J} = \varphi\left[x(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} L[x,u,t] + \lambda^T \left(f(x,u,t) - \dot{x}\right) dt = \varphi\left[x(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} H[x,u,\lambda,t] - \lambda^T \dot{x}\, dt$$

Optimisation de systèmes continus sans contrainte terminale et durée fixe :

- Intégration par partie : $\bar{J} = \varphi\left[x(t_f), t_f\right] - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} H[x,u,\lambda,t] + \dot{\lambda}^T x dt$

- Condition nécessaire d'optimalité pour que $\bar{J}$ soit un extremum il faut que $\partial\bar{J} = 0$ ce qui donne après calcul :

  - équations de la dynamique

$$\dot{x} = f(x,u,t) \; avec \; x(t_0) \; donné, \; t_0 \le t \le t_f$$

$$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T$$

  - équations sur la commande u(t) :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^T = 0$$

  - les conditions aux limites :

$$x(t_0) \quad donné \; à \; t_0$$

$$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^T donné \; à \; t_f$$

EXERCICE:

$$\bar{J} = \varphi[x(t_f), t_f] - \lambda^T(t_f)x(t_f) + \lambda^T(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} H[x,u,\lambda,t] + \dot{\lambda}^T x dt$$

- Calculer $\partial \bar{J} = 0$ et retrouver les expressions des conditions nécessaires d'optimalité:
  - équations de la dynamique
    $$\dot{x} = f(x,u,t) \text{ avec } x(t_0) \text{ donné, } t_0 \le t \le t_f$$
    $$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T$$
  - équations sur la commande u(t) : $\frac{\partial H}{\partial u} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^T = 0$
  - les conditions aux limites :
    $$x(t_0) \quad \text{donné à } t_0$$
    $$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^T \text{donné à } t_f$$

N.b. On obtient ces équations en dérivant J par rapport aux variables libres,c'est à dire: $x(t_f)$, x et u. Pour x et u cela demande de dériver sous l'intégrale on supposera que H vérifie la règle dérivation sous le signe intégrale (règle de Leibniz)

Optimisation des systèmes continus avec des fonctions à variables d'état définies à l'instant final et à un temps final non spécifié (incluant le problème en temps minimum) :

- Soit ψ la fonction de contrainte sur l'état final: $\psi\left[x(t_f), t_f\right] = 0$
- Soit Fonction de coût augmenté : $\bar{J} = \phi\left[x(t_f), t_f\right] + \nu^T \psi\left[x(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} L[x,u,t] + \lambda^T \left(f(x,u,t) - \dot{x}\right) dt$
- Condition nécessaire d'optimalité $\partial \bar{J} = 0$ sont:
  - équations de la dynamique

    $$\dot{x} = f(x,u,t) \; avec \; x(t_0) \; donné, \; t_0 \le t \le t_f$$

    $$\dot{\lambda} = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T \lambda - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^T$$

  - équations sur la commande u(t) :

    $$\frac{\partial H}{\partial u} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^T \lambda + \left(\frac{\partial L}{\partial u}\right)^T = 0$$

  - les conditions aux limites :

    $$x_k(t_0) \; donné \; à \; t_0 ou \; \lambda_k(t_0) = 0$$

    $$\lambda(t_f) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) \quad donné \; à \; t_f$$

    $$\left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) f + L\right]_{t=t_f} = 0$$

Ce qu'il faut retenir pour formuler un problème quelconque de control optimal d'une dynamique continue :

- A partir du critère de coût initial
  - introduire dans la formulation du critère toute les contraintes ponctuelles multipliées par les multiplicateurs de Lagrange associés
  - Introduire la dynamique avec ses multiplicateurs associés dans un terme intégral du critère de coût,
  - faire disparaître par intégration par partie la dérivée de la trajectoire par rapport au temps
  - Exprimer la différentielle totale du critère augmenté par rapport aux paramètres libres
  - Puis écrire que la différentielle total est nulle: cela permet d'extraire les conditions nécessaire d'optimalité
- La résolution de ce système d'équations formulé comme la solution d'un problème aux 2 bouts permet de trouver une trajectoire admissible.

L'objectif est d'appliquer le principe du minimum pour le calcul du transfert d'orbite d'un satellite :

- Pour cela il faut expliciter:
  - Le système dynamique
  - Le critère de coût utilisé pour calculer le contrôle optimal
  - Les conditions de départ et d'arrivée de la trajectoire
  - Les conditions nécessaires d'optimalité
  - Formuler le problème comme un problème aux 2 bouts
- La résolution numérique du Système d'équation passe par:
  - La mise en forme des équations sous la forme d'un problème aux 2 (n) bouts:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{X} = F(X, t, param) \; avec \;\; t_0 \le t \le t_f \\ G\left(X(t_0), X(t_f), param\right) = 0 \end{array}}$$

  - L'utilisation d'un solver

Application du principe du minimum Dynamique satellite

Dynamique satellite :

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\delta\times F}{m}\vec{\beta} + \frac{\vec{F}_{pertubatrice}}{m}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{\delta\times F}{g_0\times Isp}$$

- $\vec{r}$ rayon vecteur du satellite par rapport au centre de la Terre
- $\vec{\beta}$ vecteur des cosinus directeurs de la poussée.
- F poussée du moteur ($F \geq 0$)
- δ booléen déterminant l'allumage du moteur
- Isp impulsion spécifique du moteur
- m masse du satellite
- μ Constante gravitationnelle 3,986005 E+14 m^3/s^2 pour la Terre
- g_0 Accélération terrestre normalisée 9.80665 m/s^2
- $F_{pertubatrice}$ ensemble des forces perturbatrices affectant la trajectoire du satellite : luni-solaire, pression de radiation, potentiel,….

Dans la plupart des cas les forces perturbatrices sont négligées le mouvement est alors purement Képlérien

Application du principe du minimum Dynamique satellite

L'équation de la dynamique satellite est transformée pour être mise sous la forme d'une équation différentielle du 1er ordre dx/dt=f(x,t,u): ou les variables d'état sont la position et la vitesse:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d\vec{r}}{dt} \\ \dfrac{d\vec{v}}{dt} \\ \dfrac{dm}{dt} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{v} \\ -\mu \dfrac{\vec{r}}{r^3} + \dfrac{\delta \times F}{m} + \dfrac{\vec{F}_{pertubatrice}}{m} \\ -\dfrac{\delta \times F}{g_0 \times Isp} \end{vmatrix}$$

Le logiciel interne Thales Alénia Space n'utilise pas pour la dynamique les coordonnées [position, vitesse] mais les coordonnées équinoxiale exprimées à partir des coordonnées képleriennes (a, e, i, ω, Ω, ν). Cette formulation a l'avantage, pour l'ingénieur, d'être directement interprétable car elle exprime des éléments géométriques de l'orbite et d'autre part 5 des 6 paramètres sont des intégrales premières du mouvement ce qui numériquement s'intègre très bien (de façon exacte en absence de perturbation) par contre la formulation est plus compliquée

Application du principe du minimum Dynamique satellite

L'équation de la dynamique satellite en coordonnée équinoxiale:

$$p = a\left|1-e^2\right|$$
$$e_x = e\times\cos(\omega+\Omega)$$
$$e_y = e\times\sin(\omega+\Omega)$$
$$h_x = \tan\left(\frac{i}{2}\right)\cos(\Omega)$$
$$h_y = \tan\left(\frac{i}{2}\right)\sin(\Omega)$$
$$l = \omega+\Omega+\nu$$

avec

- a le demi-grand axe
- e l'excentricité
- i l'inclinaison
- Ω la longitude du nœud ascendant
- ω l'argument du périgée
- ν l'anomalie vraie

Q, S et W sont les composantes radiale, tangentielle et normale de l'accélération délivrée par le moteur dans le repère orbital locale

$$\frac{dp}{dt} = 2\sqrt{\frac{p^3}{\mu}}\frac{1}{Z}S$$
$$\frac{de_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{1}{Z}\left(Z\times\sin(l)Q + A\times S - e_y F\times W\right)$$
$$\frac{de_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{1}{Z}\left(-Z\times\cos(l)Q + B\times S + e_x F\times W\right)$$
$$\frac{dh_x}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{X}{Z}\cos(l)W$$
$$\frac{dh_y}{dt} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{X}{Z}\sin(l)W$$
$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}}Z^2 + \sqrt{\frac{p}{\mu}}\frac{1}{Z}F\times W$$
$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{g_0\times Isp}$$

avec

$$Z = 1 + e_x\cos(l) + e_y\sin(l)$$
$$A = e_x + (1+Z)\cos(l)$$
$$B = e_y + (1+Z)\sin(l)$$
$$F = h_x\sin(l) - h_y\cos(l)$$
$$X = 1 + h_x^{\,2} + h_y^{\,2}$$

THALES

Application du principe du minimum au transfert en temps minimum

Critère de coût pour le problème du transfert en temps minimum :

$$\overline{J} = \chi(x(t_0),t_0) + \alpha^T.\varphi(x(t_0),t_0) + \phi\left[x(t_f),t_f\right] + \nu^T\psi\left[x(t_f),t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} L[x,u,t] + \lambda^T\left(f(x,u,t) - \dot{x}\right)dt$$

- χ=0, ϕ=0 définie qu'il n'y a pas de coût à t_0 et t_f
- L=1 détermine le temps minimum

$$H(x(t_f),u,t_f) = 1 + \lambda^T f(x,u,t)$$

les conditions aux limites :

condition optimalité sur les points de départ

$$\left[\lambda^T\right]_{t=t_0} = \left[-\alpha^T\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{t=t_0} \quad ou \quad x_0 \ fixé$$

7 conditions initiales

sur l'instant de départ

$$\left[\alpha^T\frac{\partial\varphi}{\partial t_0} - 1 - \lambda^T f\right]_{t=t_0} = 0 \quad ou \quad t_0 \ fixé$$

1 condition sur t_0 ou t_0 fixé

sur l'instant t_f

$$\left[\lambda^T\right]_{t=t_f} = \left[\nu^T\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{t=t_f} \quad ou \quad x_f \ fixé$$

7 conditions finales

$$\left[\nu^T\frac{\partial\psi}{\partial t_f} + 1 + \lambda^T f\right]_{t=t_f} = 0 \quad ou \quad t_f \ fixé$$

1 condition sur t_f ou t_f fixé

$$\dot{x} = f$$

7 équations différentielles

$$\dot{\lambda}^T = -\lambda^T\frac{\partial f}{\partial x}$$

7 équations différentielles adjointes

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda^T\frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

u(t) déterminé par la relation :
2 relations algébriques

Minimiser le Carburant

ThalesAlenia Space
a Thales / Leonardo company

Application du principe du minimum au transfert en Masse maximum

Critère de coût pour le problème du transfert en masse maximum :

pas de coût initiale

$$\bar{J} = \chi(x(t_0),t_0) + \alpha^T.\varphi(x(t_0),t_0) + \phi[x(t_f),t_f] + \nu^T\psi[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x,u,t] + \lambda^T(f(x,u,t) - \dot{x})dt$$

- χ=0 défini qu'il n'y a pas de coût à t_0
- ϕ=m(t_f) défini que la masse satellite doit être extremum à t_f
- L=0 défini qu'il n'y a pas de coût le long de la trajectoire

Par contre à la différence du temps minimum la commande moteur dépend non seulement de l'orientation de la direction de poussée mais aussi de δ le booléen déterminant l'allumage ou l'extinction du moteur. Il en résulte que la dynamique n'est plus une fonction continue par rapport à δ et donc on ne peut pas calculer δ comme la solution de :

$$\boxed{\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} = 0}$$

dans le cas où les variables de contrôle sont continues.

On résout ce problème en exprimant le fait que H est un extremum par rapport à la commande et donc δ peut-être calculé par résolvant:

Cette équation est la fonction de commutation

$$\max_{\delta}[H(\delta=0), H(\delta=1)]$$

variable de décision pour savoir si on allume ou éteint les moteurs

THALES

Application du principe du minimum au transfert en Masse maximum

Jeu d'équation pour résoudre le problème du transfert en masse maximum

$$\bar{J} = \chi(x(t_0),t_0) + \alpha^T.\varphi(x(t_0),t_0) + \phi\left[x\left(t_f\right),t_f\right] + \nu^T \psi\left[x\left(t_f\right),t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} L[x,u,t] + \lambda^T\left(f\left(x,u,t\right) - \dot{x}\right)dt$$

$$H(x(t_f),u,t_f) = \lambda^T f\left(x,u,t\right)$$

les conditions aux limites :

$$\left[\lambda^T\right]_{t=t_0} = \left[-\alpha^T \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_{t=t_0} \quad ou \quad x_0 \ fixé$$

7 conditions initiales

$$\left[\alpha^T \frac{\partial \varphi}{\partial t_0} - \lambda^T f\right]_{t=t_0} = 0 \quad ou \quad t_0 \ fixé$$

1 condition sur t_0 ou t_0 fixé

$$\left[\lambda^T\right]_{t=t_f} = \left[\frac{\partial m}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{t=t_f} \quad ou \quad x_f \ fixé$$

7 conditions finales

$$\left[\nu^T \frac{\partial \psi}{\partial t_f} + \lambda^T f\right]_{t=t_f} = 0 \quad ou \quad t_f \ fixé$$

1 condition sur t_f ou t_f fixé

$$\dot{x} = f$$

7 équations différentielles

pilotage directif

$$\dot{\lambda}^T = -\lambda^T \frac{\partial f}{\partial x}$$

7 équations différentielles adjointes

parsi

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \lambda^T \frac{\partial f}{\partial u} = 0$$

u(t) déterminé par la relation :
2 relations algébriques

allumage ou pas des moteurs

$$\max_\delta\left[H\left(\delta = 0\right), H\left(\delta = 1\right)\right]$$

Fonction de commutation moteur

Application du principe du minimum Exemple de formulation d'un RDV

Un rendez-vous est formulé comme une contrainte sur l'état final ou initial en fonction du lieu de RDV. Par exemple dans le cadre d'un transfert nous souhaitons réaliser un RDV sur les paramètres [a,e,i]

$$\psi\left[x_{\grave{a}\,t_f}, t_f\right] = \begin{bmatrix} a - a_f \\ e - e_f \\ i - i_f \end{bmatrix}_{t_f} = 0$$

← demi grand axe
excentricité
← inclinaison

Cette fonction est utilisée pour calculer les conditions d'optimalité du RDV pour cela on va devoir calculer les quantités $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial \psi}{\partial t_f}$

Il faut donc pouvoir exprimer [a,e,i] en fonction de l'état:

$x=[p, ex, ey, hx, hy, l, m]^T$

Pour cela on reformule les contraintes en fonction de l'état

$$\psi\left[x_{\grave{a}\,t_f}, t_f\right] = \begin{bmatrix} a - a_f \\ e - e_f \\ i - i_f \end{bmatrix}_{t_f} = 0 \Leftrightarrow \psi\left[x_{\grave{a}\,t_f}, t_f\right] = \begin{bmatrix} p - a_f \times \left|1 - e_f^{\,2}\right| \\ e_x^{\,2} + e_y^{\,2} - e_f^{\,2} \\ h_x^{\,2} + h_y^{\,2} - \tan\left(\frac{i_f}{2}\right)^2 \end{bmatrix}_{t_f} = 0$$

transformation page 16.

Application du principe du minimum Exemple de formulation d'un RDV

Après calcul nous obtenons:

$$\psi(x(t_f),t_f) = \left[p - p_f \quad e_x^2 + e_y^2 - e_f^2 \quad h_x^2 + h_y^2 - \tan\left(\frac{i_f}{2}\right) \right]^T$$

$$\frac{\partial \psi(x(t_f),t_f)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2e_x & 2e_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2h_x & 2h_y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \psi(x(t_f),t_f)}{\partial t_f} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Application du principe du minimum Exemple de formulation d'un RDV

Résolution de l'équation avec l'élimination de ν dans le cas masse maximum:

$$\left[\lambda^T\right]_{t=t_f} = \left[\frac{\partial m}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{t=t_f} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_{equi}{}^T = \nu^T \times \dfrac{\partial \psi}{\partial x_{equi}} \\ \lambda_m = 1 \end{array} \right|$$

$$soit\ D\ le\ noyau\ de\ \frac{\partial \psi}{\partial x_{equi}}\ c.à.d.\ D = null\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_{equi}}\right)\ et\ \ \frac{\partial \psi}{\partial x_{equi}} \times D = 0$$

alors

$$\lambda_{equi}{}^T \times D = 0$$

$$\lambda_m - 1 = 0$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_y & 0 & 0 \\ -e_x & 0 & 0 \\ 0 & h_y & 0 \\ 0 & -h_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Définissons

$$x = \begin{bmatrix} p & e_x & e_y & h_x & h_y & l & m \end{bmatrix}^T$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_p & \lambda_{e_x} & \lambda_{e_y} & \lambda_{h_x} & \lambda_{h_y} & \lambda_l & \lambda_m \end{bmatrix}^T$$

et

$$x_{equi} = \begin{bmatrix} p & e_x & e_y & h_x & h_y & l \end{bmatrix}^T$$

$$\lambda_{equi} = \begin{bmatrix} \lambda_p & \lambda_{e_x} & \lambda_{e_y} & \lambda_{h_x} & \lambda_{h_y} & \lambda_l \end{bmatrix}^T$$

Conclusion :

le problème d'un RDV en masse maximum et durée fixée (t_f-t_0=Cte) est mis sous la forme d'un problème aux 2 bouts pour une dynamique composée de la dynamique satellite +dynamique de l'état adjoint

Une partie de l'état final doit vérifier les 7 (8) équations de cette planche et une partie de l'état initial est inconnue à t0 (les multiplicateurs de Lagrange + t_0 si t_0 inconnue)

$$\psi_1 = p(t_f) - a_f(1 - e_f^{\,2}) = 0$$

$$\psi_2 = e_x(t_f)^2 + e_y(t_f)^2 - e_f^{\,2} = 0$$

$$\psi_3 = h_x(t_f)^2 + h_y(t_f)^2 - \tan\left(\frac{i_f}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda_{ex}(t_f)e_y - \lambda_{ey}(t_f)e_x = 0$$

$$\lambda_{hx}(t_f)h_y - \lambda_{hy}(t_f)h_x = 0$$

$$\lambda_l(t_f) = 0$$

$$\lambda_M(t_f) - 1 = 0$$

$$\left[\alpha^T \frac{\partial\varphi}{\partial t_0} - \lambda^T f\right]_{t=t_0} + \left[\lambda^T f\right]_{t=t_f} = 0 \quad ou \quad t_0 \ fix\acute{e}$$

Exercice:

Déterminer les équations qui définissent un RDV en a pour un problème en masse maximum

Application du principe du minimum Exemple de formulation d'un RDV

Solution

$$\left[\lambda^T\right]_{t=t_f} = \left[\frac{\partial m}{\partial x} + \nu^T \frac{\partial \psi}{\partial x}\right]_{t=t_f}$$

$$\lambda_{equi}{}^T = \nu^T \times \frac{\partial \psi}{\partial x_{equi}}, \; avec \; x_{equi} = \begin{bmatrix} p & e_x & e_y & h_x & h_y & l \end{bmatrix}^T$$

$$\lambda_m = 1$$

$$soit \; D \; le \; noyau \; de \; \frac{\partial \psi}{\partial x_{equi}}$$

$$c.à.d. \; D = null\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_{equi}}\right) \; et \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_{equi}} \times D = 0$$

$$alors$$

$$\lambda_{equi}{}^T \times D = 0$$

$$\lambda_m - 1 = 0$$

$$\psi(x(t_f), t_f) = \left[a - a_f\right] = \left[\frac{p}{1-e^2} - a_f\right]$$

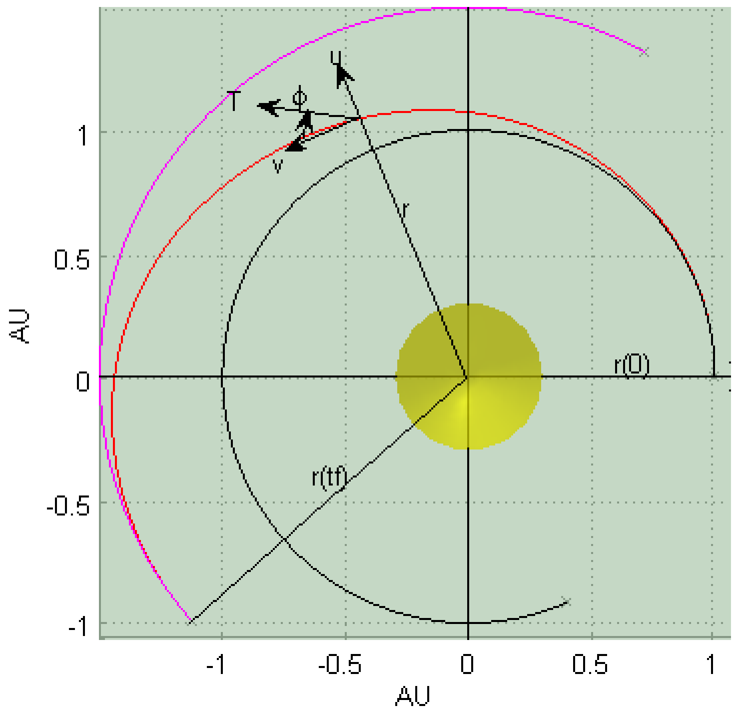
$$\frac{\partial \psi(x(t_f), t_f)}{\partial x_{equi}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-e^2} & \frac{2p \times e_x}{\left(1-e^2\right)^2} & \frac{2p \times e_y}{\left(1-e^2\right)^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -2p \times e^2 & 0 & 0 & 0 \\ e_y & e_x\left(1-e^2\right) & 0 & 0 & 0 \\ -e_x & e_y\left(1-e^2\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} tel \; que \; C.D = 0$$

$$\frac{\partial \psi(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} = [0]$$

Formulation d'un transfert plan

Soit un satellite possédant un propulseur à poussé constante, nous voulons établir l'historique de poussée pour transférer ce satellite d'une orbite circulaire initiale vers une autre orbite circulaire coplanaire en temps minimum



Formulation d'un transfert plan

Nomenclature

r = distance radiale satellite corps attracteur

u = vitesse radiale

v = vitesse tangentielle

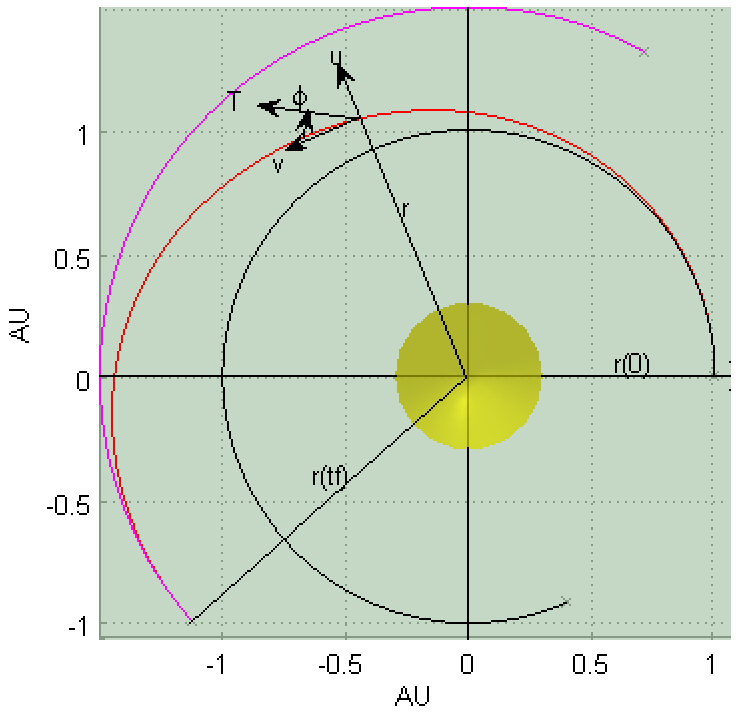
m = masse du satellite

Dm/dt= -T/(g0*Isp) débit massique du moteur

ϕ = angle de la direction de poussée avec r

μ = constante gravitationnelle du corps attracteur

θ = l'angle formé par r avec r(0)



Formulation d’un transfert plan

Établir la dynamique du satellite
Etablir les conditions initiales et finales
Etablir l’Hamiltonien
Etablir la dynamique de l’état adjoint
Etablir l’équation de la commande
Etablir les conditions nécessaires d’optimalité sur le temps final
Formuler le problème aux 2 bouts et le résoudre

Formulation d’un transfert plan

Dynamique satellite

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu\frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{T}{m}\vec{\beta}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{g_0 \times Isp}$$

$$\dot{r} = u$$

$$\dot{u} = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T}{m}\sin(\phi)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + \frac{T}{m}\cos(\phi)$$

$$m = m_0 + \dot{m} \times t = m_0 - \frac{T}{g_0 \times Isp} t$$

$$\boxed{x = \begin{bmatrix} r & u & v \end{bmatrix}^T}$$

$$\boxed{f(x,t,\phi) = \begin{bmatrix} u \\ \dfrac{v^2}{r} - \dfrac{\mu}{r^2} + \dfrac{T}{m_0 + \dot{m} \times t}\sin(\phi) \\ -\dfrac{uv}{r} + \dfrac{T}{m_0 + \dot{m} \times t}\cos(\phi) \end{bmatrix}}$$

Formulation d'un transfert plan

Conditions initiales et finales

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&r(0) = r_0 \\
&u(0) = 0 \\
&v(0) = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \\
&r(t_f) = r_f \\
&u(t_f) = 0 \\
&v(t_f) = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}}
\end{aligned}
}
$$

THALES

Formulation d'un transfert plan

Hamiltonien et dynamique de l'état adjoint

$$f(x,t,\phi)=\begin{bmatrix} u \\ \dfrac{v^2}{r}-\dfrac{\mu}{r^2}+\dfrac{T}{m_0+\dot{m}\times t}\sin(\phi) \\ -\dfrac{uv}{r}+\dfrac{T}{m_0+\dot{m}\times t}\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$\lambda^T=\begin{bmatrix}\lambda_r & \lambda_u & \lambda_v\end{bmatrix}$$

$$H=1+\lambda^T f=1+\lambda_r u+\lambda_u\left(\frac{v^2}{r}-\frac{\mu}{r^2}+\frac{T}{m_0+\dot{m}\times t}\sin(\phi)\right)+\lambda_v\left(-\frac{uv}{r}+\frac{T}{m_0+\dot{m}\times t}\cos(\phi)\right)$$

$$\dot{\lambda}=-\left(\lambda^T\frac{\partial f}{\partial x}\right)^T=-\frac{\partial f}{\partial x}^T\lambda=\begin{bmatrix} -\lambda_u\left(-\dfrac{v^2}{r^2}+\dfrac{2\mu}{r^3}\right)-\lambda_v\left(\dfrac{uv}{r^2}\right) \\ -\lambda_r+\lambda_v\dfrac{v}{r} \\ -\lambda_u\dfrac{2v}{r}+\lambda_v\dfrac{u}{r} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_r\\ \dot{\lambda}_u\\ \dot{\lambda}_v\end{bmatrix}$$

Formulation d'un transfert plan

Equation de la commande

$$H = 1 + \lambda^T f = 1 + \lambda_r u + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T}{m_0 + \dot{m} \times t} \sin(\phi) \right) + \lambda_v \left(-\frac{uv}{r} + \frac{T}{m_0 + \dot{m} \times t} \cos(\phi) \right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = \lambda_u \left(\cancel{\frac{T}{m_0 + \dot{m} \times t}} \cos(\phi) \right) - \lambda_v \left(\cancel{\frac{T}{m_0 + \dot{m} \times t}} \sin(\phi) \right) = 0$$

simplification des termes identiques

$$\boxed{\tan(\phi) = \frac{\lambda_u}{\lambda_v}}$$

$\frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$

$\lambda_u \cos(\phi) = \lambda_v \sin(\phi)$

$\lambda_u = \lambda_v \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}$

$\frac{\lambda_u}{\lambda_v} = \tan(\phi)$

Condition d'optimalité sur tf

$$\boxed{H = 1 + \lambda^T f = 1 + \lambda_r u + \lambda_u \left(\frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{T}{m_0 + \dot{m} \times t} \sin(\phi) \right) + \lambda_v \left(-\frac{uv}{r} + \frac{T}{m_0 + \dot{m} \times t} \cos(\phi) \right) = 0}$$

Formulation d'un transfert plan

Formulation du problème aux 2 bouts:

- Inconnues à t0=0: $\lambda^T = [\lambda_r \quad \lambda_u \quad \lambda_v]_{t_0}$
- Inconnue à tf: tf

4 inconnues donc 4 équations de contraintes:

$$g(\lambda_{r0},\lambda_{u0},\lambda_{v0},t_f)=\begin{bmatrix} r(t_f)-r_f \\ u(t_f) \\ v(t_f)-\sqrt{\dfrac{\mu}{r_f}} \\ \left[1+\lambda_r u+\lambda_u\left(\dfrac{v^2}{r}-\dfrac{\mu}{r^2}+\dfrac{T}{m_0+\dot{m}\times t}\sin(\phi)\right)+\lambda_v\left(-\dfrac{uv}{r}+\dfrac{T}{m_0+\dot{m}\times t}\cos(\phi)\right)\right]_{t_f}\end{bmatrix}=0$$

Formulation d'un transfert plan

Résolution numérique:

r0 = 1 AU = 149597870.69 km

rf = 1.5 AU

m0 = 1000 kg

mf = 737.63 kg

T = 0.3N

g0 = 9.80665 ms^{-2}

Isp = 3000s

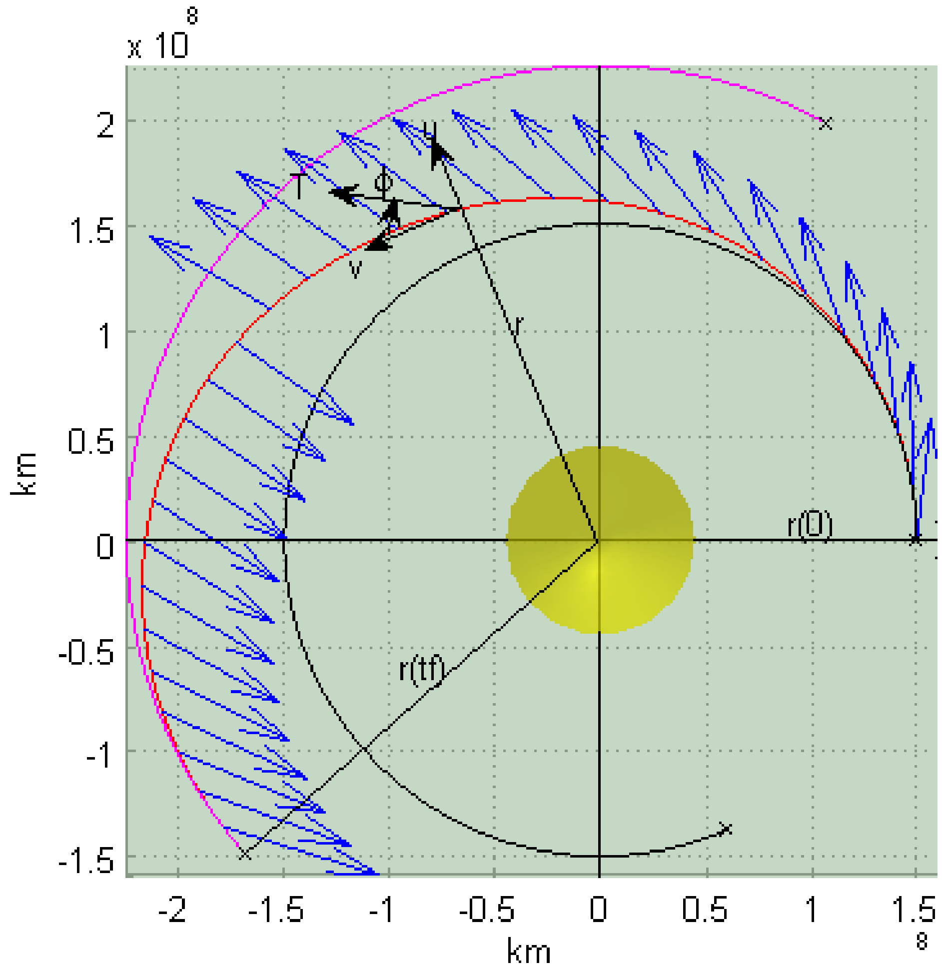
μ = 1.32712440018e20 m^{3}s^{-2}

Temps de transfert 297.8 jours

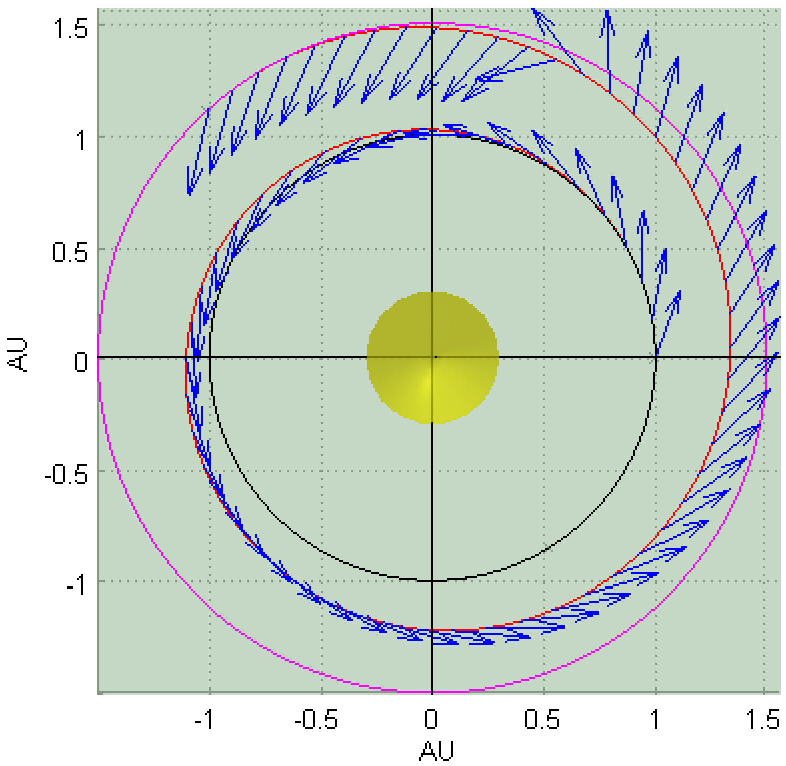
Sortir l'historique du contrôle

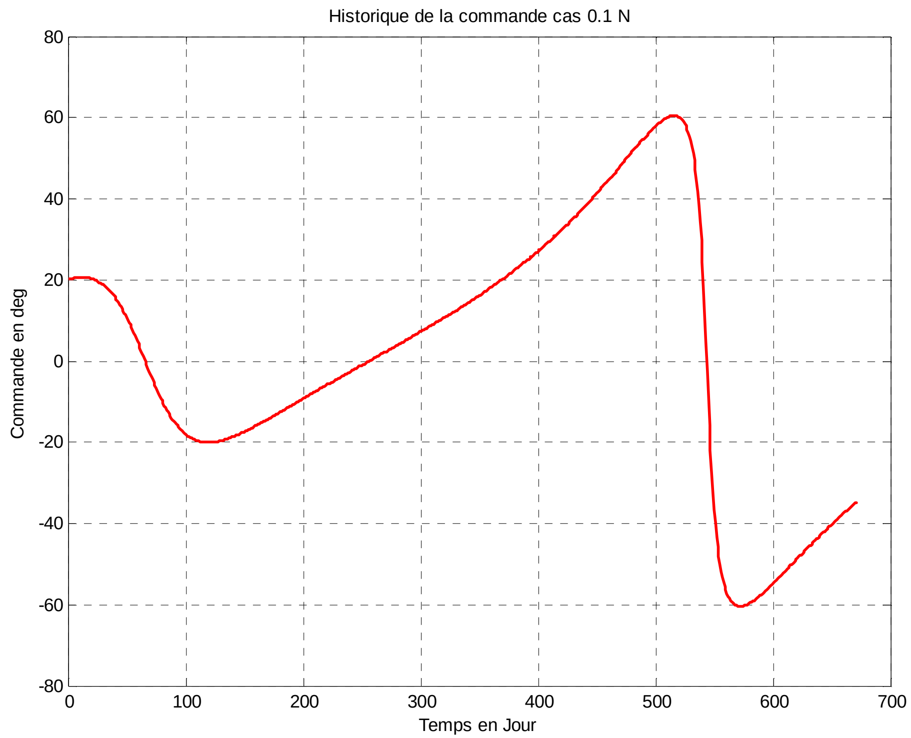
Faire le même calcul avec :

T=0.1, 0.2, 0.4, 0.5 et 0.6 N



Cas 0.1N

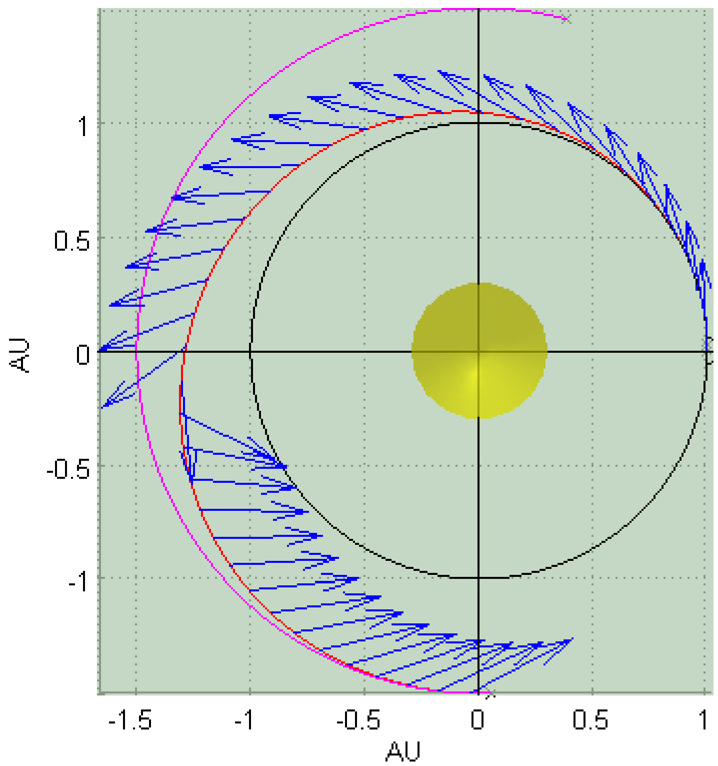


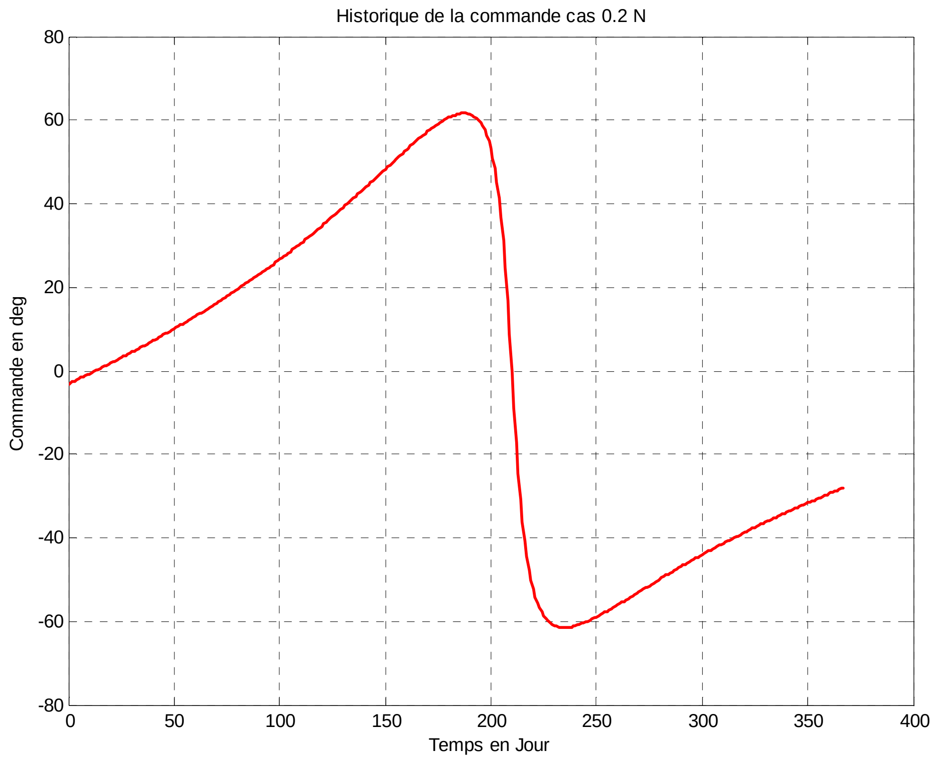


Masse finale=802.87 kg

Durée 671.23 J

Cas 0.2N

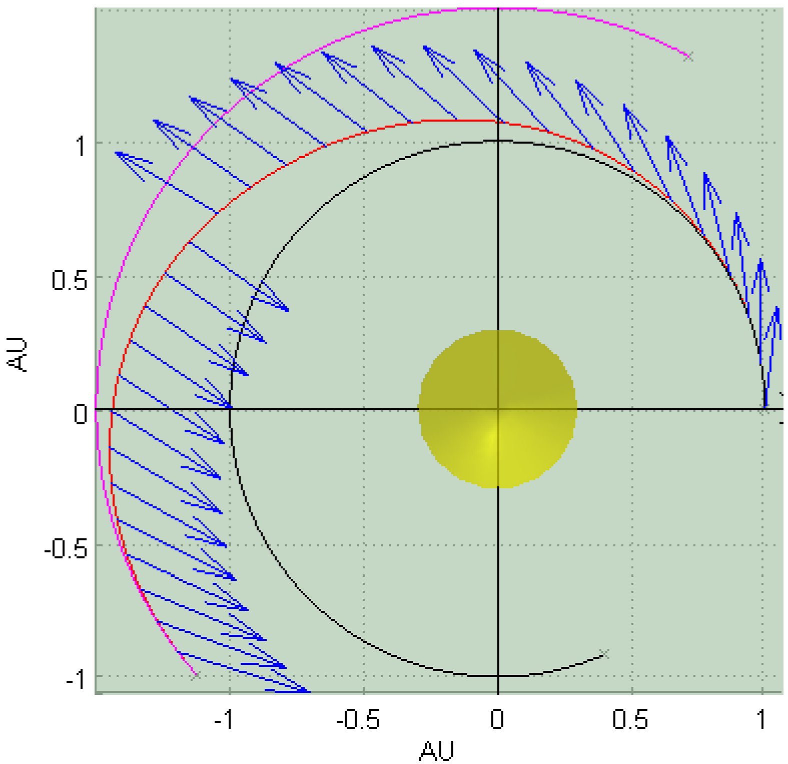


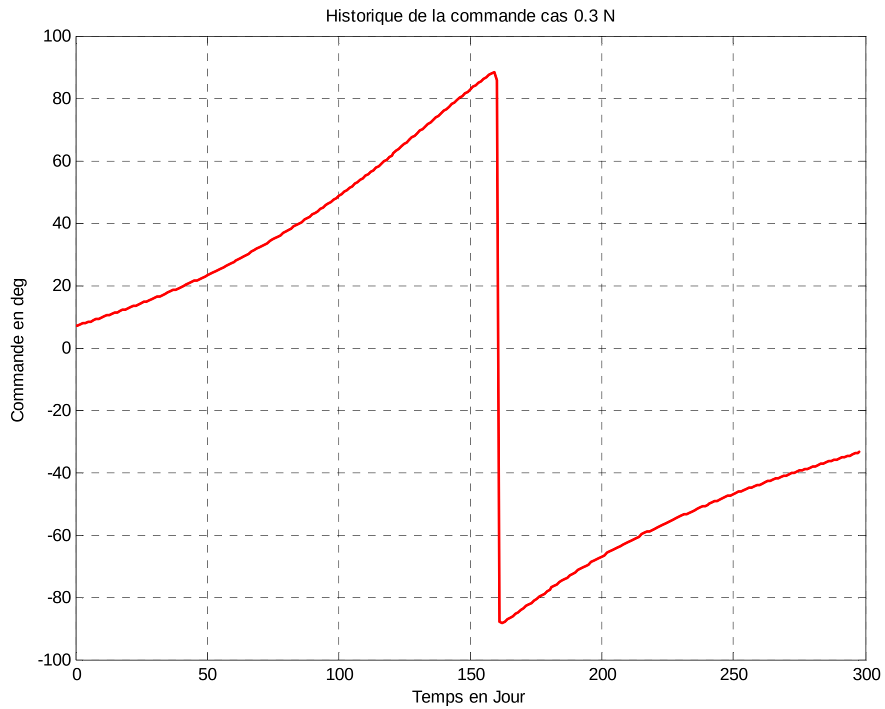


Masse finale=784.63 kg

Durée 366.67 J

Cas 0.3N

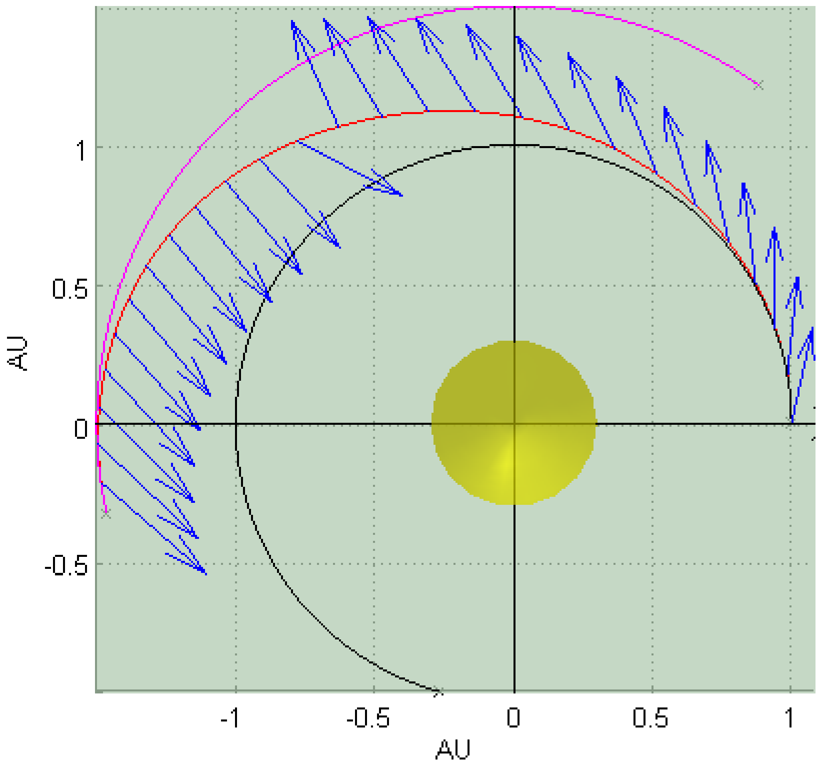


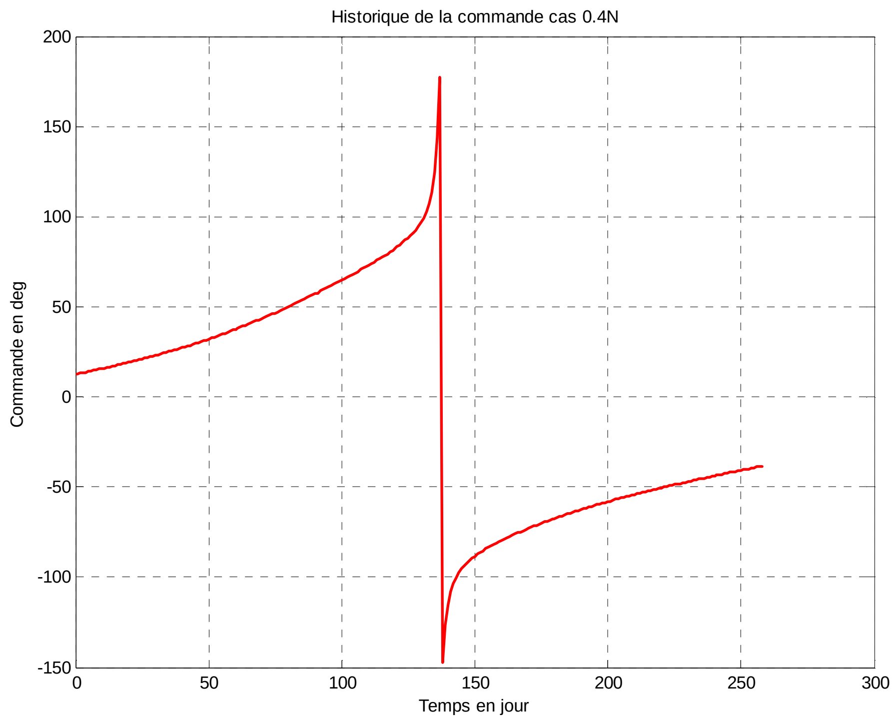


Masse finale=737.63 kg

Durée 297.80 J

Cas 0.4N

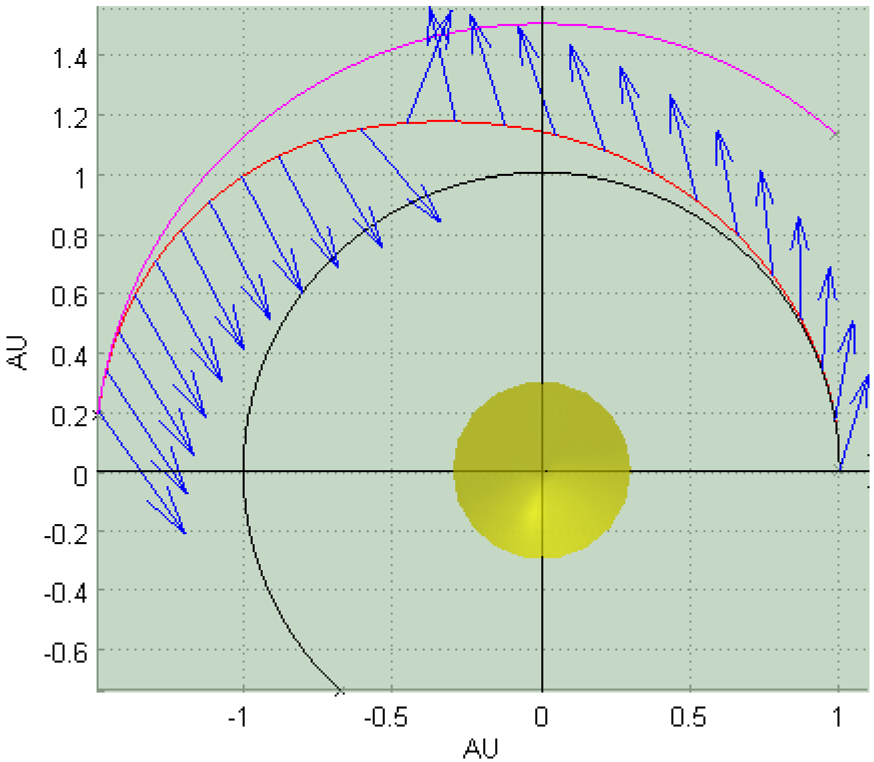


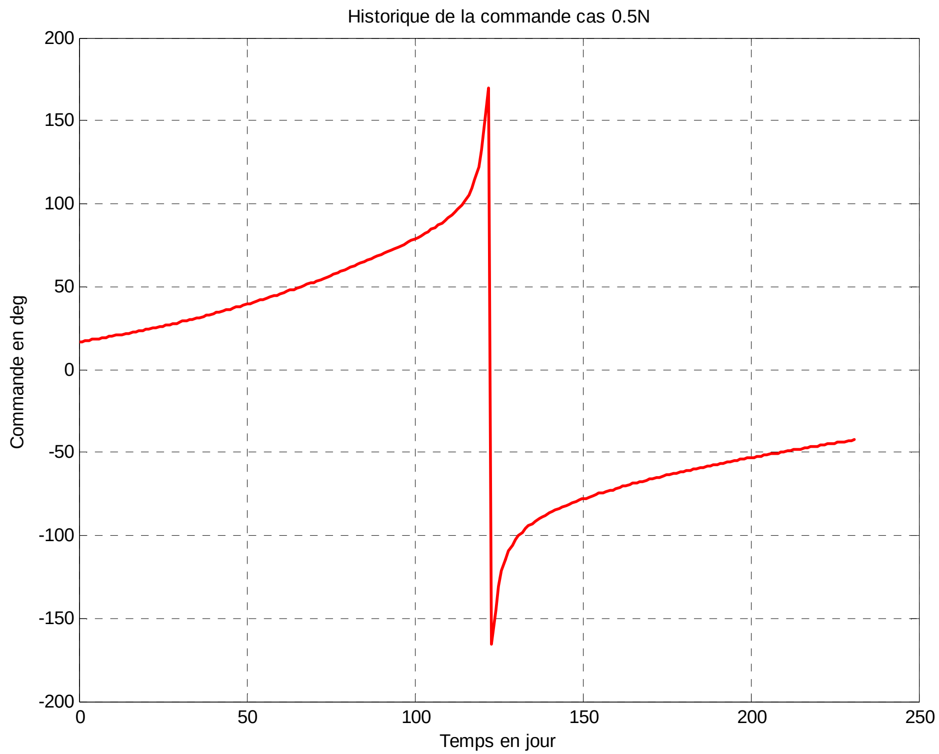


Masse finale=696.80 kg

Durée 258.10 J

Cas 0.5N

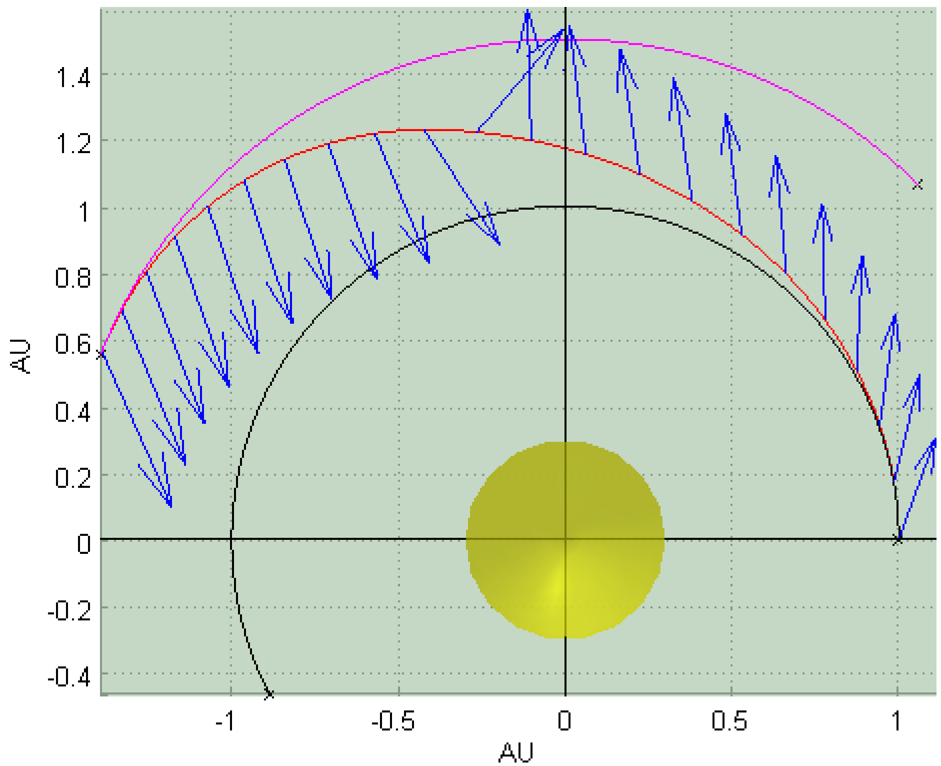


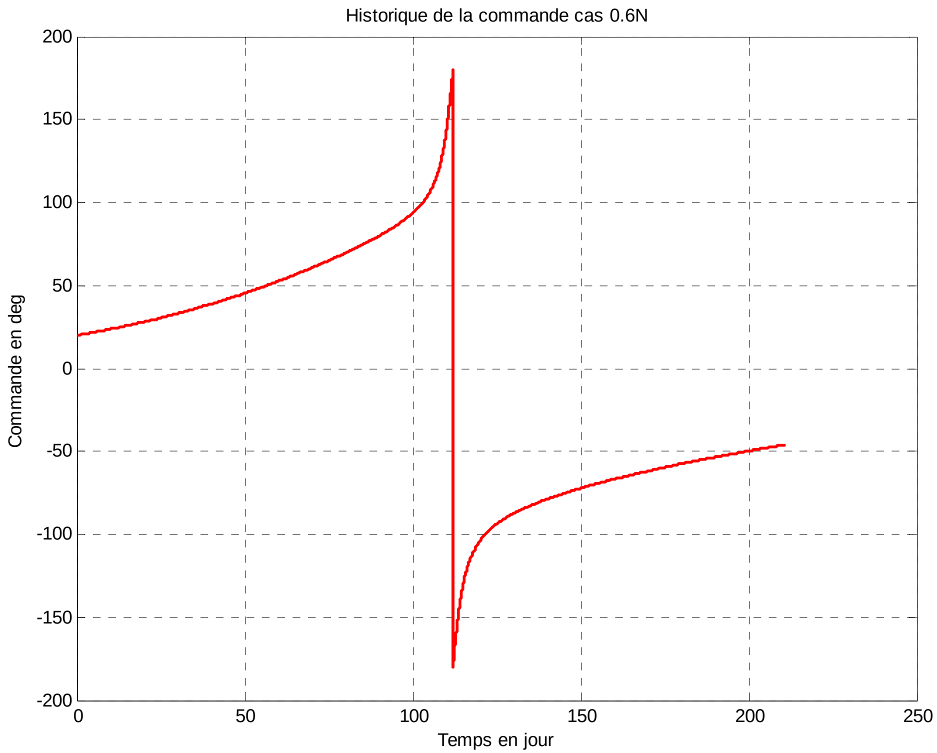


Masse finale=660.94 kg

Durée 230.90 J

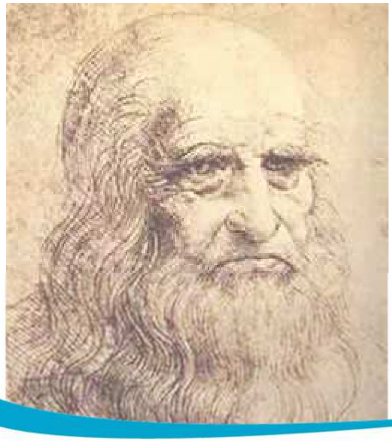
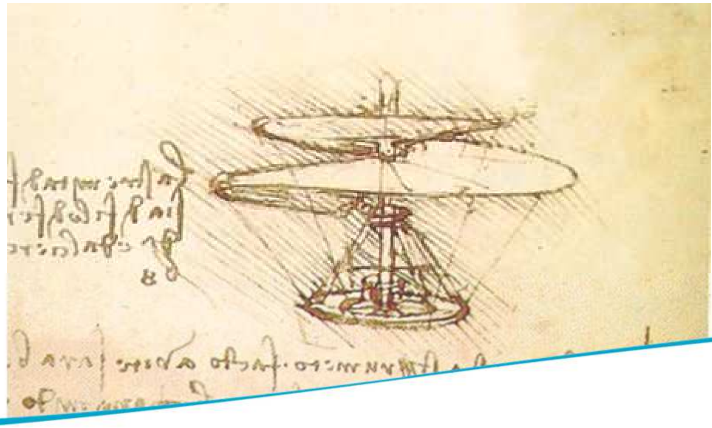
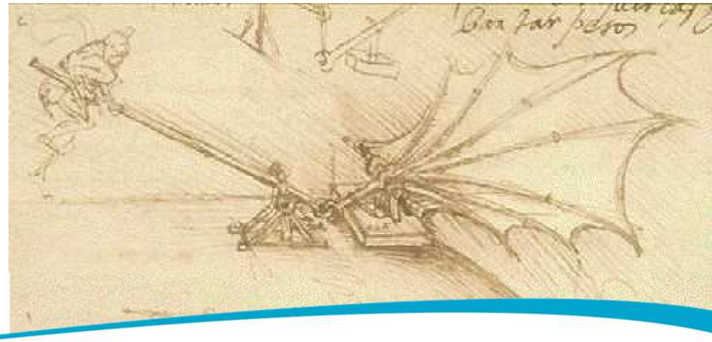
Cas 0.6N





Masse finale=628.92 kg

Durée 210.59 J

Rappel sur le mouvement Keplerien

Cours Polytech Sophia Satellite

T.Dargent

Corporate Communications

Février 2012

a Thales / Leonardo company

Mouvement Keplerien autour d'un corps céleste

Hypothèse:

- le mobile (satellite, planète,…) est assimilé à un point matériel de masse m négligeable devant la masse M du corps céleste
- La seul force prise en compte est l'attraction newtonienne en $1/r^2$
- Le corps céleste est sphérique de masse homogène M

Loi de Kepler

Avec ces conditions la trajectoire du mobile dans un repère inertiel centré sur le corps céleste obéit au 3 lois de Kepler:

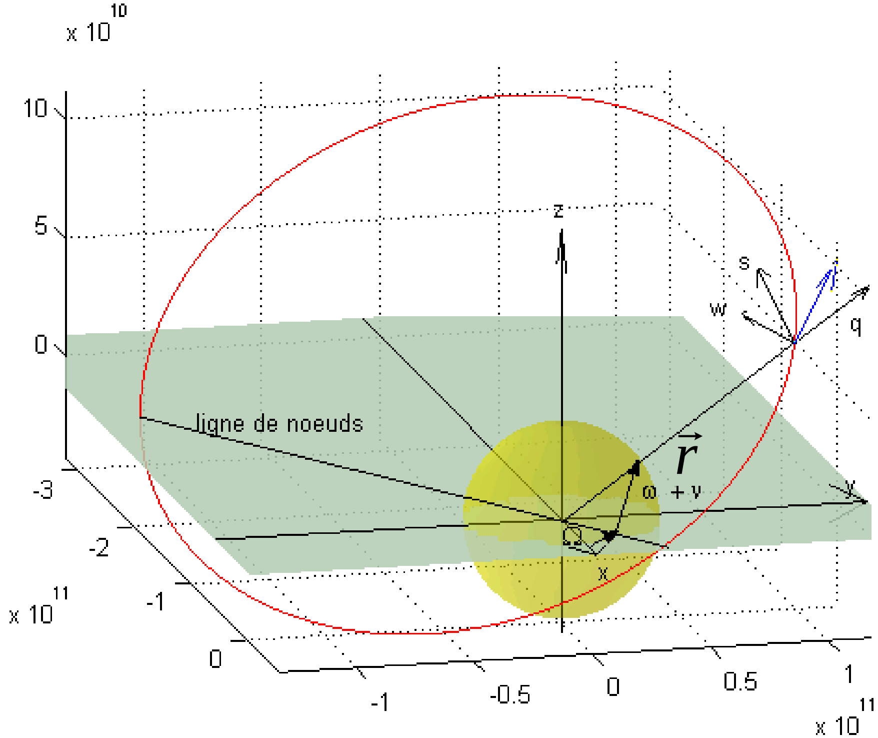
1. La trajectoire est une ellipse (ou une conique) dont un des foyers est le centre du corps céleste (ex le soleil,…)
2. L'aire balayée par le rayon « corps céleste - mobile » par unité de temps est constante
3. Dans le cas d'une orbite elliptique le carrée de la période varie proportionnellement au cube du demi grand axe

Vers dynamique satellite

Équation du mouvement

Dynamique newtonienne

- $\vec{r}$ rayon vecteur du satellite par rapport au corps central
- μ Constante gravitationnelle (3,986005 E^{+14} m^3/s^2 pour la Terre)



Vitesse :	$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
Acelérations :	$\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = grad(V)$
potentiel :	$V = \frac{\mu}{r}$
dynamique :	$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$

Vers dynamique satellite

Démonstration loi des aires

Soit le moment cinétique: $\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{V}$

- Celui ci est constant car sa dérivé est nul par rapport au temps:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{V} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{V} \wedge \vec{V} + \vec{r} \wedge \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{0}$$

Conclusion:

- La trajectoire est plane car $\vec{r}$ est perpendiculaire à un vecteur constant $\vec{C}$

Passage en polaire dans le plan de la trajectoire

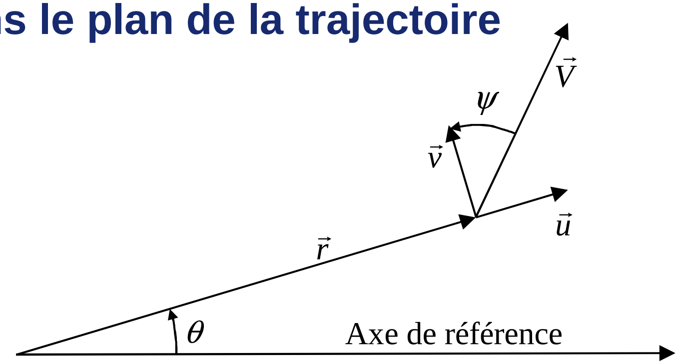
$$\vec{r} = r \times \vec{u}$$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \times \vec{u} + r \times \frac{d\theta}{dt}\vec{v}$$

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{V} = r^2 \times \frac{d\theta}{dt}\vec{u} \wedge \vec{v}$$

$$C = \left\|\vec{C}\right\| = r^2 \times \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) \times \vec{u} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2 \times \frac{d\theta}{dt}\right)\vec{v}$$



Géométrie du problème

Identification des termes

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \times \frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \Rightarrow r^2 \times \frac{d\theta}{dt} = C$$

Cette dernière équation démontre la loi des aires:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \times \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{2}}$$

Démonstration 1ère loi de Kepler

Soit le changement de variable $$u = \frac{1}{r}$$

De la loi des aire on obtient

$$\frac{d\theta}{dt} = Cu^2 \Leftrightarrow \frac{du}{dt} = Cu^2 \frac{du}{d\theta} \Leftrightarrow -u^2 \frac{dr}{dt} = Cu^2 \frac{du}{d\theta} \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = C \frac{du}{d\theta}$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -C \frac{d^2 u}{d\theta^2} \frac{d\theta}{dt} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

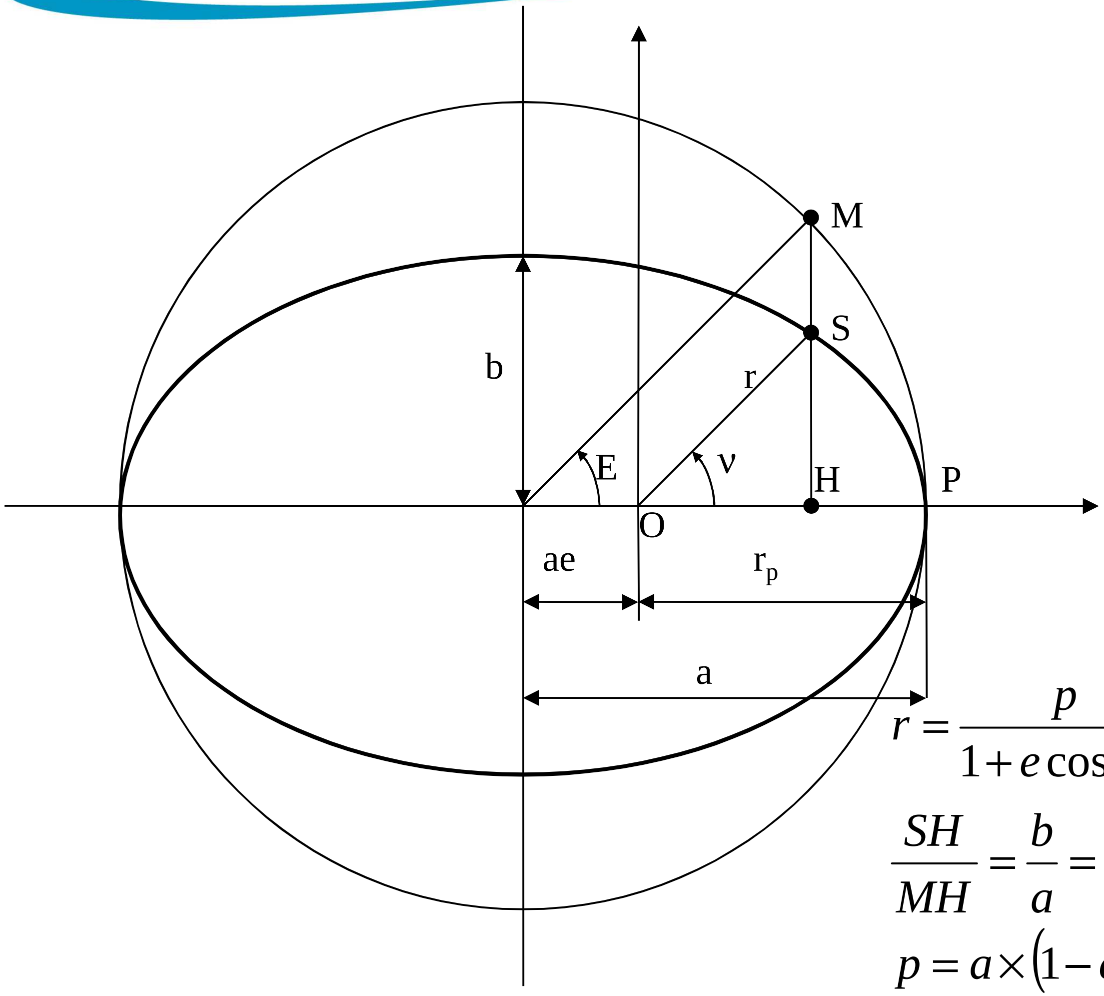
par substitution dans l'équation $\frac{d^2 r}{dt^2} - r \times \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{\mu}{r^2}$ **on obtient l'équation différentielle:**

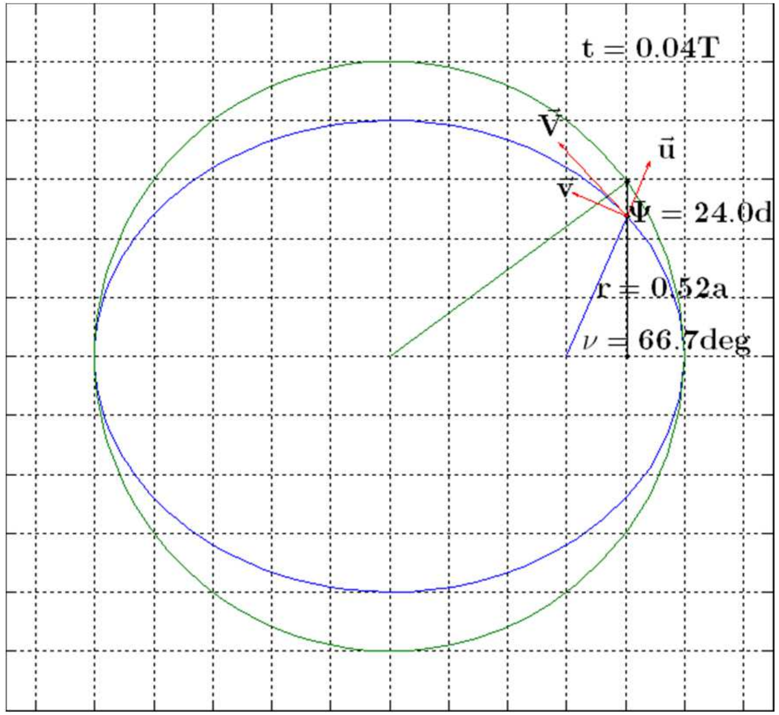
- $$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{C^2}$$
- C'est une équations du second ordre qui a pour solution générale: $u = A\cos(\theta - \theta_0) + \frac{\mu}{C^2}$

La solution en r est de la forme:

- $$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}}$$ **avec** $$p = \frac{C^2}{\mu}$$ $$e = Ap$$
- **C'est une conique**

Géométrie d'une ellipse



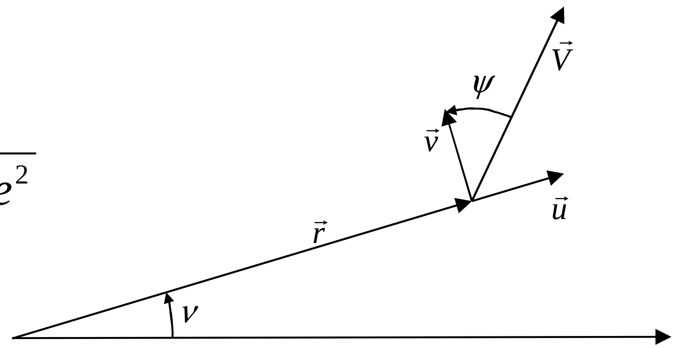


$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\nu)}$$

$$\frac{SH}{MH} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$

$$p = a \times (1 - e^2)$$

$$r_p = a \times (1 - e)$$



Démonstration 3ème loi de Kepler

Dans le cas d'une orbite elliptique:

- la période est le temps mis à faire de tour de l'ellipse.
- La surface balayée au cour de la période est donc la surface de l'ellipse:

$$\pi \times a \times b = \int_0^T \frac{dA}{dt}dt = \int_0^T \frac{C}{2}dt = \frac{C \times T}{2}$$

$$T = 2\pi \frac{ab}{C}$$

$$C = \sqrt{\mu p} = \sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}$$

$$b = a\sqrt{1-e^2}$$

$$T = 2\pi \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{\mu a\left(1-e^2\right)}} = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

D'ou la 3ème loi de Kepler:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}}$$

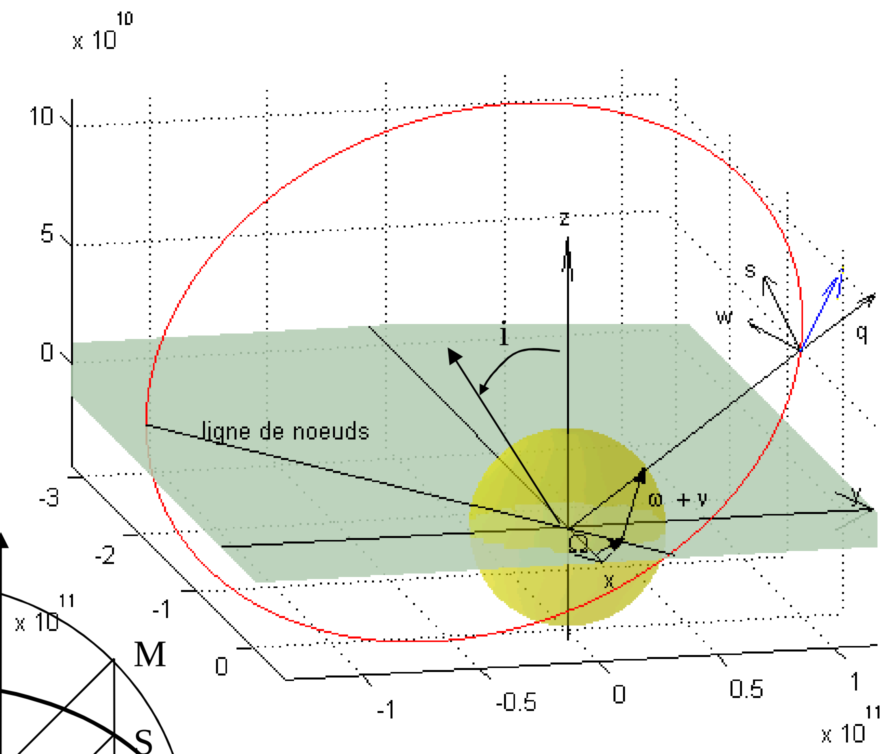
Éléments orbitaux Keplerien

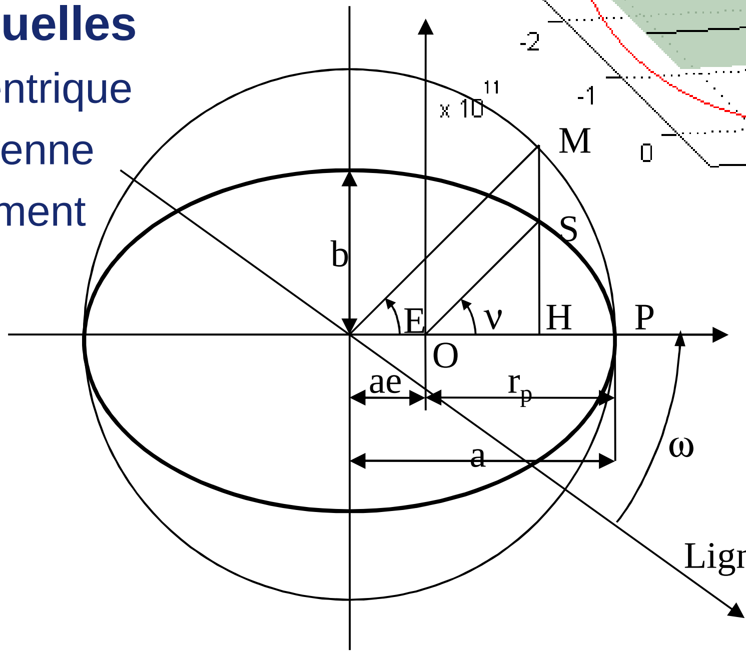
Définition:

- a demi grand axe
- e excentricité
- I inclinaison
- ω argument du périgée
- Ω longitude du nœud ascendant
- ν anomalie vrai : position sur orbite

Autres grandeurs usuelles

- E anomalie excentrique
- M anomalie moyenne
- n moyen mouvement
- $M=n*(t-t_p)$





Vers dynamique satellite

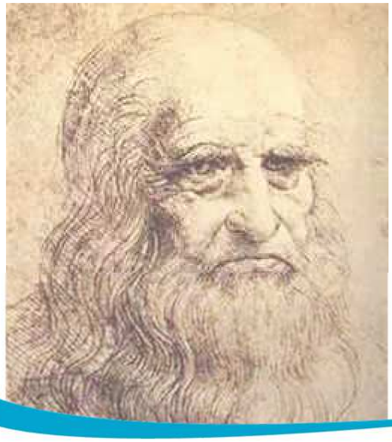
Formules fondamentales pour les ellipses

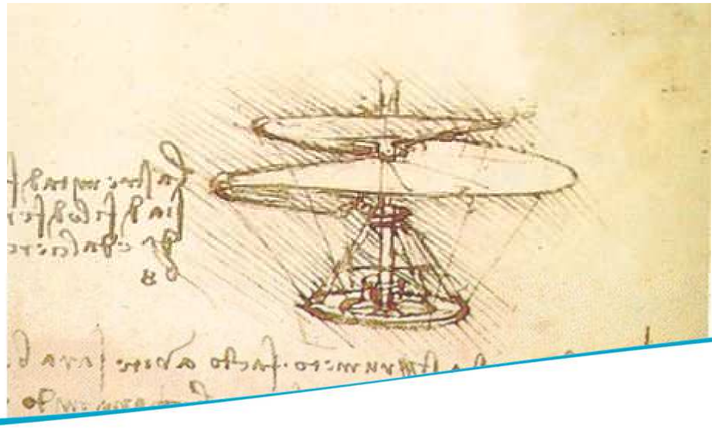
Rayon	$r = \frac{p}{1+e\cos(v)}$ $r = a(1-e\cos(E))$
Rayon apogée	$r_a = a\times(1+e)$
Rayon périgée	$r_p = a\times(1-e)$
Paramètres de la conique	$p = a\times(1-e^2)$ $b = a\sqrt{1-e^2}$
Energie	$E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$
Exentricité	$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{r_a - r_p}{2a} = \sqrt{1-\frac{C^2}{\mu a}}$
Constante loi des aires	$C = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = V_p r_p = V_a r_a$
Moyen mouvement	$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$
Anomalie moyenne	$M = n(t-t_p)$

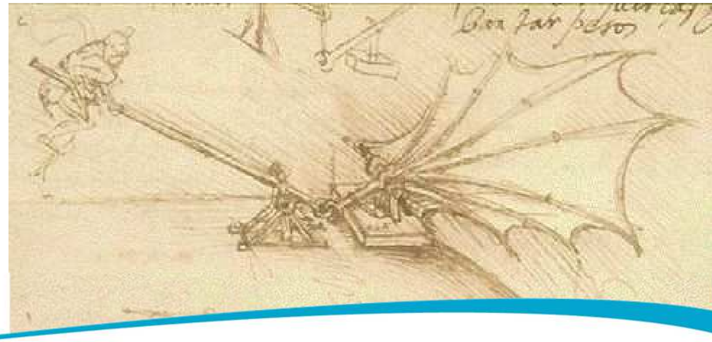
Equation de Kepler	$E - e\sin(E) = M = n\times(t-t_p)$
Période	$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$
Vitesse $\left(V = \lVert\vec{V}\rVert\right)$	$V = \sqrt{\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}$
Angle ψ *de* $\vec{V}$	$\cos(\psi) = \frac{C}{rV} = \frac{1+e\cos(v)}{\sqrt{1+2e\cos(v)+e^2}}$ $\sin(\psi) = e\sqrt{\frac{\mu}{p}} = \frac{e\sin(v)}{\sqrt{1+2e\cos(v)+e^2}}$
Anomalies vraies	$\cos(v) = \frac{\cos(E)-e}{1-e\cos(E)}$ $\sin(v) = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin(E)}{1-e\cos(E)}$
Anomalies exentrique	$\cos(E) = \frac{\cos(v)+e}{1+e\cos(v)}$ $\sin(E) = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin(v)}{1+e\cos(v)}$

Formulaire

Known parameters	Semi major axis [a]	Semi minor axis [b]	Apogee radius [Ra]	Perigee radius [Rp]	Excentricity [e]	Apogee Speed [Va]	Perigee Speed [Vp]	Angular Momentum [H]	Total energy [W]
a,e	a	$a\sqrt{1-e^2}$	a(1+e)	a(1-e)	e	$\sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}}$	$\sqrt{\mu a(1-e^2)}$	$\frac{-\mu}{2a}$
Ra,Rp	$\frac{R_a+R_p}{2}$	$\sqrt{R_a R_p}$	Ra	Rp	$\frac{R_a-R_p}{R_a+R_p}$	$\sqrt{\frac{2\mu}{R_a+R_p}\frac{R_p}{R_a}}$	$\sqrt{\frac{2\mu}{R_a+R_p}\frac{R_a}{R_p}}$	$\sqrt{\frac{2\mu R_a R_p}{R_a+R_p}}$	$\frac{-\mu}{R_a+R_p}$
a, Ra	a	$\sqrt{R_a(2a-R_a)}$	Ra	2a-Ra	$\frac{R_a-a}{a}$	$\sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{(2a-R_a)}{R_a}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{R_a}{(2a-R_a)}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{a}R_a(2a-R_a)}$	$\frac{-\mu}{2a}$
a, Rp	a	$\sqrt{R_p(2a-R_p)}$	2a-Rp	Rp	$\frac{a-R_p}{a}$	$\sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{R_p}{(2a-R_p)}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{a}\frac{(2a-R_p)}{R_p}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{a}R_p(2a-R_p)}$	$\frac{-\mu}{2a}$
e, Ra	$\frac{R_a}{1+e}$	$R_a\sqrt{\frac{(1-e)}{(1+e)}}$	Ra	$R_a\frac{1-e}{1+e}$	e	$\sqrt{\frac{\mu}{R_a}(1-e)}$	$\sqrt{\frac{\mu}{R_a}\frac{(1+e)^2}{1-e}}$	$\sqrt{\mu R_a(1-e)}$	$\frac{-\mu}{2R_a}(1+e)$
e, Rp	$\frac{R_p}{1-e}$	$R_p\sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}}$	$R_p\frac{1+e}{1-e}$	Rp	e	$\sqrt{\frac{\mu}{R_p}\frac{(1-e)^2}{1+e}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{R_p}(1+e)}$	$\sqrt{\mu R_p(1+e)}$	$\frac{-\mu}{2R_p}(1-e)$
Va,Vp	$\frac{\mu}{V_a V_p}$	$\frac{2\mu}{\sqrt{V_a V_p}\,(V_a+V_p)}$	$\frac{2\mu}{V_a(V_a+V_p)}$	$\frac{2\mu}{V_p(V_a+V_p)}$	$\frac{V_a-V_p}{V_a+V_p}$	Va	Vp	$\frac{2\mu}{V_a+V_p}$	$\frac{V_a V_p}{2}$
Va,Ra	$\frac{\mu R_a}{2\mu-R_a V_a^2}$	$R_a V_a\sqrt{\frac{R_a}{2\mu-R_a V_a^2}}$	Ra	$\frac{R_a^2 V_a^2}{2\mu-R_a V_a^2}$	$1-\frac{R_a V_a^2}{\mu}$	Va	$\frac{2\mu-R_a V_a^2}{R_a V_a}$	RaVa	$\frac{\mu}{R_a}-\frac{V_a^2}{2}$
Vp,Rp	$\frac{\mu R_p}{2\mu-R_p V_p^2}$	$R_p V_p\sqrt{\frac{R_p}{2\mu-R_p V_p^2}}$	$\frac{R_p^2 V_p^2}{2\mu-R_p V_p^2}$	Rp	$\frac{R_p V_p^2}{\mu}-1$	$\frac{2\mu-R_p V_p^2}{R_p V_p}$	Vp	RpVp	$\frac{\mu}{R_p}-\frac{V_p^2}{2}$







a Thales / Leonardo company

Annexe Mathématique

Corporate Communications

Février 2012

Dérivation sous le signe d'intégration

La règle de dérivation sous le signe d'intégration est connue sous le nom de règle de Leibniz:

- Sois f(x,t) une fonction de $x \in X$ et $t \in T$
  - f est intégrable par rapport à $t \in T$
  - f est dérivable par rapport à $x \in X$
- On définit $F(x) = \int_T f(x,t)\,dt$
  - F(x) est localement dérivable en $x=x_0$ si $\forall t \in T \quad \left\| \frac{\partial f(x_0,t)}{\partial x} \right\| \leq g(t)$ avec g une fonction intégrable par rapport à t
  - et $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = \int_T \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\,dt$
  - si l'on suppose de plus que $\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ est définie et continue pour tout x et t alors F(x) est globalement dérivable et de classe C1 sur X