1 Dérivées des fonctions de référence

Fonctions usuelles

Fonction f	Fonction f'	Domaine de dérivabilité
k	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega t+\varphi)$	$\omega\cos(\omega t+\varphi)$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega t+\varphi)$	$-\omega\sin(\omega t+\varphi)$	$\mathbb{R}$

2 Opération sur les dérivées

Dans le tableau suivant, u et v désignent deux **fonctions** dérivables sur un intervalle I , k désigne un nombre réel et n est un entier relatif non nul.

Opérations et dérivation

Fonction f	Fonction dérivée f'	Domaine de dérivabilité	exemples
$u+v$	$u'+v'$	I	
uv	$u'v+v'u$	I	1
ku	ku'	I	3
$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$	5
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$	tout $x \in I$ tel que $v(x) \neq 0$	4

3 Tangente

Equation de la tangente en un point de la courbe

Soit f une fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$, dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et A le point d'abscisse a de $\mathscr{C}_f$. L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

4 Exemples

1. Produit de deux fonctions

   Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \left(2 + \frac{x^2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{x}\right)$. Calculer $f'(x)$.

   f est de la forme uv d'où $f' = u'v + uv'$ avec :

   $u(x) = 2 + \frac{x^2}{3} = 2 + \frac{1}{3}x^2$ $\quad v(x) = 1 - \frac{2}{x} = 1 - 2 \times \frac{1}{x}$

   $u'(x) = \frac{2x}{3}$ $\quad v'(x) = -2(-\frac{1}{x^2}) = \frac{2}{x^2}$

   Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$,

   $$f'(x) = \frac{2x}{3} \times \left(1 - \frac{2}{x}\right) + \frac{2}{x^2} \times \left(2 + \frac{x^2}{3}\right) = \frac{2x}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{3} = \frac{2x^3 - 2x^2 + 6}{3x^2}$$

   Ainsi, f' est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f'(x) = \frac{2x^3 - 2x^2 + 6}{3x^2}$.

2. Inverse d'une fonction

   Soit f la fonction définie sur $]0,5;+\infty[$ par $f(x) = \frac{5}{2x-1}$. Calculer $f'(x)$.

   f est de la forme $5 \times \frac{1}{u}$ d'où $f' = 5 \times (-\frac{u'}{u^2})$ avec :

   $u(x) = 2x - 1$ avec $u(x) \neq 0$ sur $]0,5;+\infty[$

   $u'(x) = 2$

   Donc f est dérivable sur $]0,5;+\infty[$ et pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,5;+\infty[$,

   $$f'(x) = 5 \times \left(-\frac{2}{(2x-1)^2}\right) = -\frac{10}{(2x-1)^2}$$

3. Quotient de deux fonctions

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x-3}{x^2+1}$. Calculer $f'(x)$.

   f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

   $u(x) = 4x - 3$ $\quad v(x) = x^2 + 1$

   $\quad v(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$

   $u'(x) = 4$ $\quad v'(x) = 2x$

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x appartenant à l'intervalle $\mathbb{R}$,

   $$f'(x) = \frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2 + 6x}{(x^2+1)^2} = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}$$

   Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \frac{-4x^2 + 6x + 4}{(x^2+1)^2}$.