

VARIABLE ALÉATOIRE, LOI de Bernoulli

Table des matières

I Un peu d'histoire

Le mot hasard vient de l'arabe , le mot aléatoire vient du latin aléa et le mot probabilité du latin et s'oppose au mot certitude .

probabilitas «vraisemblance», du lat. probabilis, v. probable.

Les probabilités sont aujourd'hui l'une des branches les plus importantes et les plus pointues des mathématiques. Pourtant, c'est en cherchant à résoudre des problèmes posés par les jeux de hasard que les mathématiciens donnent naissance aux probabilités.

Les archéologues ont montré que ces jeux ont été pratiqués dans de nombreuses sociétés antiques. Pourtant, on ne trouve nul part trace de leur étude.

En 1654, Blaise Pascal(1623 ; 1662) entretient avec Pierre de Fermat(1601 ; 1665) des correspondances sur le thème des jeux de hasard et d'espérance de gain qui les mènent à exposer une théorie nouvelle : les calculs de probabilités. Ils s'intéressent à la résolution de problèmes de dénombrement comme par exemple celui du Chevalier de Méré : « Comment distribuer équitablement la mise à un jeu de hasard interrompu avant la fin ? »

Un autre traité, plus complet, sur les probabilités, est l'oeuvre d'un mathématicien suisse, Jacques Bernoulli (1662-1716). Son oeuvre majeure est Ars Conjectandi publiée après sa mort à Bâle en 1713, avec une préface de son neveu Nicolas Bernoulli. Il y pose les principes du calcul des probabilités et introduit les nombres de Bernoulli.

Cet ouvrage aborde un aspect nouveau, le lien entre probabilités et fréquences en cas de tirages répétés (d'un jeu de pile ou face). Il énonce et démontre

On peut résumer ce théorème en le simplifiant : Pour un grand nombre de lancers de pièces (jeu de pile ou face) l'écart entre fréquence et probabilité tend vers zéro. C'est à dire que si l'on effectue beaucoup de lancers, la fréquence d'apparition du pile va tendre vers $1/2$, c'est assez intuitif.

II Variable aléatoire et loi de probabilité

1 Variable aléatoire

a Activité

Voir fiche 1 cahier exercices

b Variable aléatoire : définition

On lance une pièce trois fois de suite. On note P ou F suivant que « pile » ou « face » apparaît.

En considérant les issues équiprobables on a $\Omega = \{FFF; FFP; FPF; FPP; PFF; PFP; PPF; PPP\}$.

On associe à chaque issue un gain « algébrique » (positif ou négatif) d'argent.

- un gain de 5 € si l'on tire exactement 3 « pile » ;
- un gain de 3 € si l'on tire exactement 2 « pile » ;
- une perte de 4 € sinon.

On définit alors une autre fonction Y de Ω dans \mathbb{R} qui à toute issue de Ω associe le gain algébrique du joueur.

Y peut prendre 3 valeurs possibles : $y_1 = -4$; $y_2 = 3$ et $y_3 = 5$.

et la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

x_i	- 4	3	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$



Définition variable aléatoire

Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire (ensemble des issues de l'expérience aléatoire) et une loi de probabilité P sur Ω .

- On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans \mathbb{R} qui , à toute issue de Ω fait correspondre un réel x_i
- L'événement « X prend la valeur x_i » noté $(X = x_i)$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x_i par X .
- $X(\Omega) = \{x_1;x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

Remarque 1

Etant donné que la variable aléatoire X prend un **nombre fini de valeurs** puisque $Car(\Omega)$ est fini, on parlera de variable aléatoire **discrète**.

Plus tard, vous étudierez des variables aléatoires sur des univers infini . On parlera de variable aléatoire continue.

Exemple 1

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat et on considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2€
- Si le résultat est 1, on gagne 3€
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€

1. Quel est l'univers de cette expérience ? $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $\text{card}(\Omega)=6$
2. On appelle X la variable aléatoire correspondant au gain possible (il peut-être aussi négatif). Quelles sont les valeurs prises par X ?
 $X(\Omega)=\{2;3;-4\}$

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire**Définition loi de probabilité**

On considère un ensemble fini Ω et une loi de probabilité P sur Ω .

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω .

Soit $\{x_1; \dots; x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X .

Lorsqu'à chaque valeur x_i on associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit la **loi de probabilité de la variable aléatoire X**

On représente en général cette loi à l'aide d'un tableau du type :

Valeurs x_i	x_1	x_2	\dots	x_n	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n	1

Exemple 2

Reprendre l'exemple 1 et donner la loi de probabilité de X

x_i	2	3	-4
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$

3 Espérance**Définition espérance**

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une loi de probabilité P .

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci dessous :

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

L'**espérance mathématique de X** est le nombre $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

Exemple 3

Calculer l'espérance de X avec les données de l'exemple 1.

Remarque 2

- Lors d'un grand nombre d'expériences, le gain moyen d'un joueur se stabilise aux environs de $E(X)$.
- On interprète l'espérance comme le gain moyen que peut espérer un joueur par partie, s'il joue un grand nombre de fois. On parlera donc de jeu favorable, défavorable ou équitable en fonction du signe de $E(X)$.

Methode 1 (Savoir étudier une variable aléatoire et déterminer sa loi de probabilité et son espérance)

Soit l'expérience suivante :

Une roue de loterie est partagée en dix secteurs de quatre couleurs différentes (bleu, jaune, vert et rose), comme représenté sur la figure ci-contre.

Quand on lance cette roue, elle tourne, puis s'arrête librement devant le repère .

On suppose que tous les secteurs ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère.

Si la couleur de sortie est le bleu, on perçoit 15 €, si c'est le rose, on perçoit 10 €, si c'est le jaune, on perçoit 2 € et si c'est le vert, on ne perçoit rien. On appelle X la variable aléatoire correspondant au gain possible.

1. Quel est l'univers Ω de cette expérience. $\text{card}(\Omega) = \{4\}$
2. Donner $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles prises par X sa loi de probabilité. $X(\Omega) = \{15; 10; 2; 0\}$
3. Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de x

x_i	15	10	2	0	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

4. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

III Expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes

1 Activité

Voir Activité 3 page 147 cahier exercices

2 Expériences indépendantes



Définition expériences indépendantes

Deux expériences sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'a aucune influence sur le résultat de l'autre.

Préciser dans chacun des cas si les 2 expériences sont indépendantes :

Exemple 4

Léa tente l'expérience suivante avec ses vêtements : Elle dépose dans un panier 4 chemisiers indiscernables au toucher : 1 blanc, 1 rouge et 2 verts. Dans un autre panier, elle y dépose 2 jupes également indiscernables au toucher : 1 blanche et 1 noire. Elle tire successivement et au hasard, un chemisier du premier panier et une jupe du deuxième panier.

Exemple 5

Un sac contient 10 boules jaunes et 5 boules vertes . Alice tire une première boule dans le sac et note sa couleur puis une seconde et note aussi sa couleur.

Exemple 6

Un sac contient 10 boules jaunes et 5 boules vertes . Pierre tire une première boule et note sa couleur puis la remet puis une seconde et note aussi sa couleur.

3 Modélisation par un arbre pondéré

Exemple 7

Lire exemple 3 page 151 du livre



Rappel Propriétés Arbre pondéré

Soit une expérience aléatoire que l'on modélise par un arbre pondéré : **Un arbre pondéré se construit et se lit de gauche à droite.** Les traits partant de la racine sont appelés branches primaires de l'arbre ; elles mènent à des nœuds. Les branches joignant deux nœuds sont dites secondaires.

- Règle 1 : La somme des probabilités issues d'un même nœud est égale à 1.
- Règle 2 : Principe multiplicatif : La probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités portées par les branches de ce chemin.
- Règle 3 : La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à sa réalisation.

Methode 2 (Savoir traduire une situation par un arbre et calculer des probabilités)

Une urne contient 2 boules gagnantes et 8 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 2 fois de suite une boule en la remettant à chaque fois dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules gagnantes.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré
2. Calculer la probabilité $P(X = 2)$ d'obtenir 2 boules gagnantes.
3. Calculer la probabilité $P(X \geq 1)$ d'obtenir au moins 1 boules gagnantes.

IV Loi de Bernoulli

1 Activité

Voir activité 4 p 147 cahier exercices

2 Épreuve de Bernoulli



Définition épreuve de Bernoulli

On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire qui n'a que **2 issues possibles**. L'une est appelée « succès » noté S et l'autre « échec » noté E ou \bar{S}

Exemple 8

- On lance une pièce biaisée. La probabilité de faire pile est égale à $1/4$; celle de faire face est égale à $3/4$ On décide d'appeler succès l'événement S : « obtenir pile ». Comme il n'y a que 2 issues possibles : « pile » et « face », cette expérience aléatoire est une épreuve de Bernoulli. $p(S) = \frac{1}{4}$ et $p(\bar{S}) = \frac{3}{4}$
- On lance un dé parfait à 6 faces et on s'intéresse à l'obtention du nombre 5. Bien qu'il y ait a priori 6 issues possibles à cette expérience, on peut considérer comme univers $\Omega = \{S; \bar{S}\}$, où S désigne l'événement « obtenir 5 ». On a $P(S) = \frac{1}{6}$ et $P(\bar{S}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

3 Schéma de Bernoulli.

Considérons une épreuve de Bernoulli. Notons p la probabilité de l'événement « succès ». La probabilité de l'événement « échec » est donc $q = 1 - p$.



Définition schéma de Bernoulli

Un schéma de Bernoulli est la répétition, dans les mêmes conditions, d'une même épreuve de Bernoulli ; ces épreuves étant identiques et indépendantes.

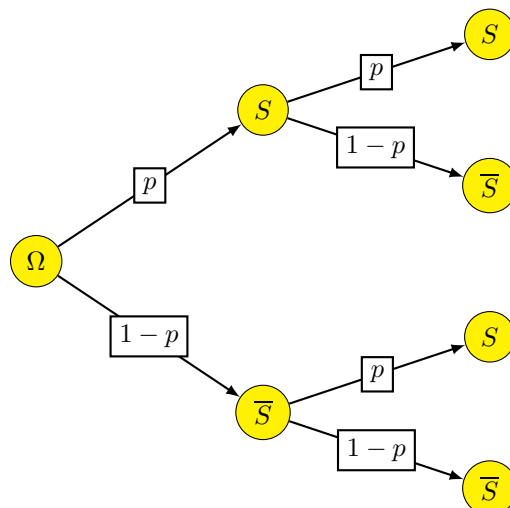
Exemple 9

- Lancer n fois un dé ou une pièce.
- Les tirages successifs, et avec remise dans une urne.
- Un seul lancer simultané de n pièces (ou de n dés).

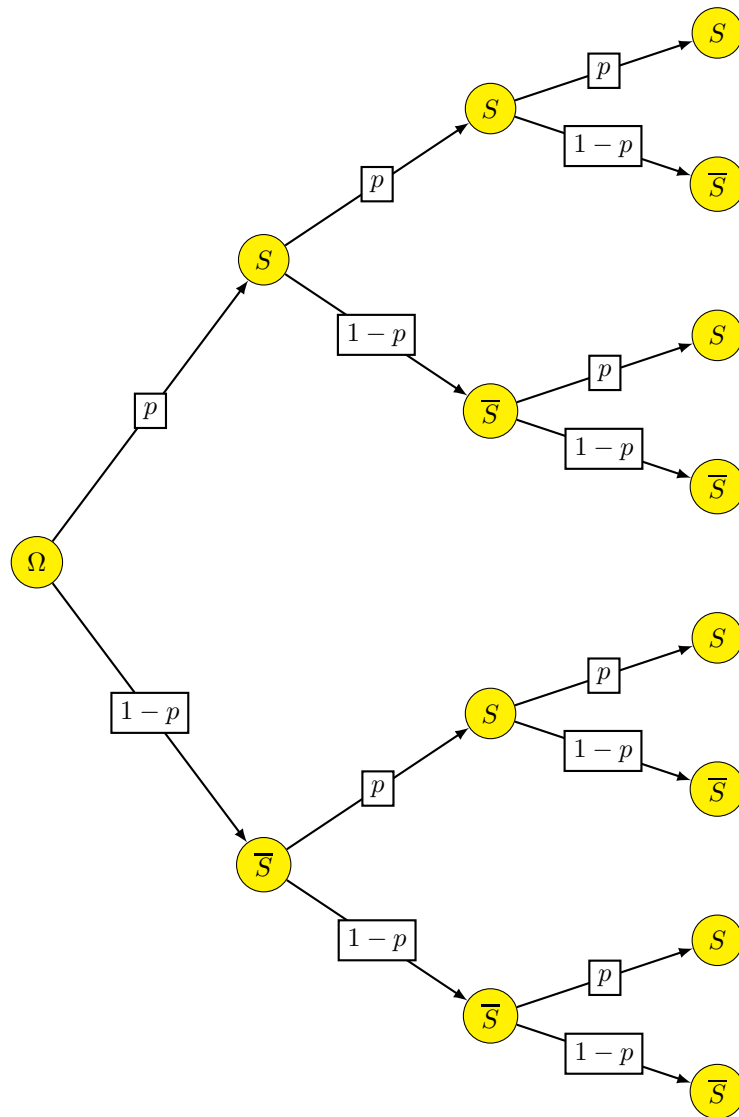
Remarque 3

Une façon de représenter un schéma de Bernoulli est d'utiliser un arbre pondéré.

Exemple d'arbre représentant un schéma de Bernoulli pour $n = 2$



On considère un schéma de Bernoulli avec $n = 3$. La représentation de la situation avec un arbre est :



Methode 3 (Reconnaitre un schéma de Bernoulli)

Pour chacune des expériences aléatoires suivantes dites si elle constitue une épreuve de Bernoulli ? Si c'est le cas proposez un succès S et sa probabilité $\mathbb{P}(S)$.

1. Un stock contient 1 % de pièces défectueuses. On y prélève une pièce et on regarde si elle présente un défaut.
2. Selon l'INSEE, 45 % des familles française ont un seul enfant, 38 % en ont deux et 17 % en ont trois ou plus. On interroge au hasard un élève du lycée et on lui demande le nombre d'enfants de sa famille.