FONCTIONS du SECOND et TROISIÈME DEGRÉ

Table des matières

I Trinôme du second degré

1 Fonction polynôme du second degré

Définition

Une fonction du second degré est une fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme d'un trinôme du second degré : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. ($ax^2 + bx + c$ est la **forme développée** de f et a, b et c s'appellent les **coefficients du trinôme**)

Methode 1

Dans chacun des cas préciser si la fonction est une fonction trinôme du second degré et si c'est le cas les valeurs des coefficients a, b et c.

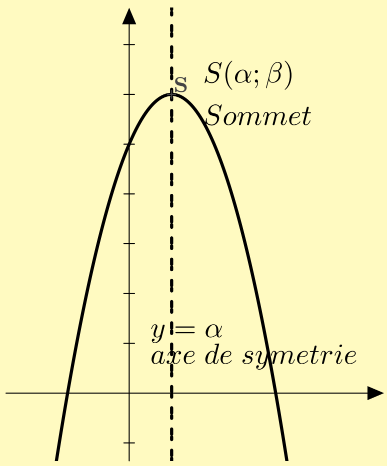
Fonctions	Trinôme ?	$a =$	$b =$	$c =$
$R(x) = -x^2 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}x$		$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$
$S(x) = 3x^2 - \left(1 - \sqrt{2}\right)x - \pi$		$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$
$T(x) = \dfrac{6x^2}{5} - 3$		$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$
$U(x) = (2x - 3)^2 - 4(x + 3)^2$		$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$
$V(x) = -3(x - 4)(x + 2)$		$a = \dots$	$b = \dots$	$c = \dots$

2 Représentation graphique d'une fonction du second degré

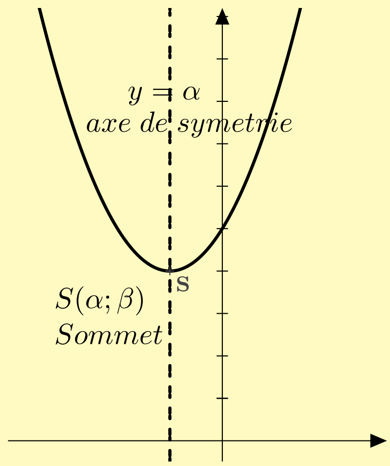
Parabole

- La courbe représentative d'une fonction du second degré est **une parabole** d'équation : $y = ax^2 + bx + c$
- Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(\alpha;\beta)$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$
- La parabole admet un axe de symétrie d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Suivant le signe de a la forme de la parabole est soit ouverte vers le haut soit vers le bas.

a<0



a>0



3 Variations

Variations

Pour toute fonction f du second degré définie par sa forme développé $f(x) = ax^2 + bx + c$ On envisage **deux cas** pour les variations de f qui dépendent du **signe de** a :

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\beta = f(-\dfrac{b}{2a})$	$\searrow$	

x	$-\infty$		$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\beta = f(-\dfrac{b}{2a})$	$\nearrow$	

- La fonction admet **un maximum** pour : $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$ qui vaut $\beta = f(-\dfrac{b}{2a})$
- La fonction admet un **minimum** pour : $x = \alpha = -\dfrac{b}{2a}$ qui vaut $\beta = f(-\dfrac{b}{2a})$

Methode 2
Parmi les fonctions k, i et j, lesquelles admettent un minimum ,un maximum ?
Préciser quand cela est possible pour quelle valeur il est atteint et ce qu'il vaut.
$k(x) = -6(x-3)+5$, $i(x) = -x^2 - 8x + 15$ et $j(x) = x^2 + 7$

4 Fonction de la forme $x \mapsto ax^2 + c$ avec $a \neq 0$ et $c \in \mathbb{R}$

Fonction paire

Les fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + c$ avec $a \neq 0$ et $c \in \mathbb{R}$ sont des fonctions paires.

Preuve 1

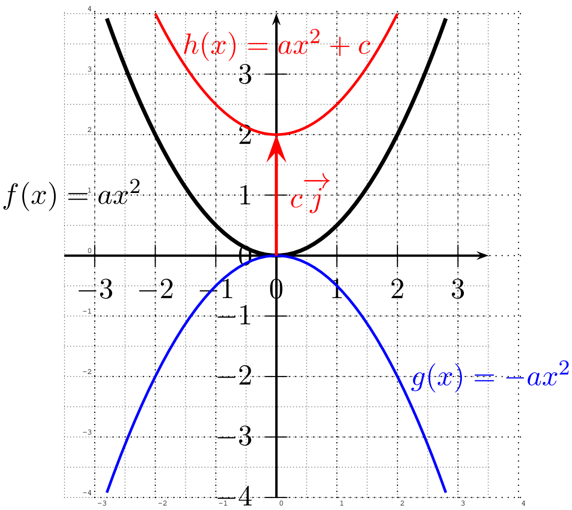
Courbe représentative

Les paraboles d'équation $y = ax^2 + c$ ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées et pour sommet le point de coordonnées $(0; c)$.

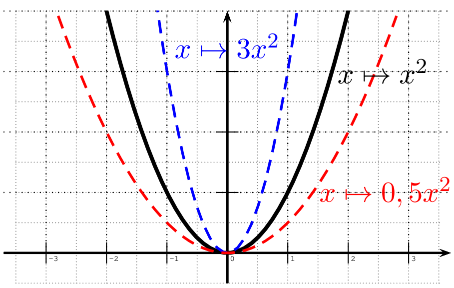
Proposition

Soient a un réel non nul et c un réel.
On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $f : x \mapsto ax^2$, $g : x \mapsto -ax^2$ et $h : x \mapsto ax^2 + c$.

- La courbe représentative de g s'obtient en effectuant une symétrique par rapport à l'axe des abscisses à partir de celle de f.
- La courbe représentative de h s'obtient en effectuant une translation de vecteur $c\overrightarrow{j}$ à partir de celle de f.

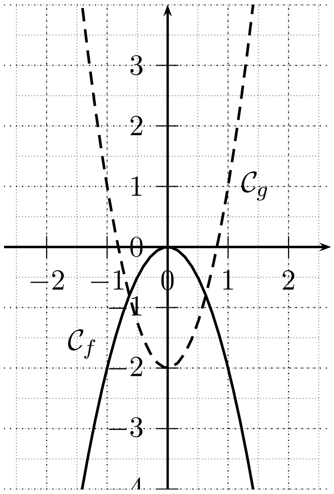


Remarque 1
Plus a est grand et plus la courbe « se contracte », plus a est proche de 0 et plus la courbe « s'étale ».



Methode 3

1. Déterminer les expressions des fonctions f et g représentées sur le graphique ci-dessous.



2. Sur le graphique ci-dessus tracer les courbes représentatives des fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par $h : x \mapsto 2x^2$ et $k : x \mapsto -2x^2 + 2$ en expliquant votre démarche.

5 Fonctions du second degré admettant deux racines distinctes ou confondues

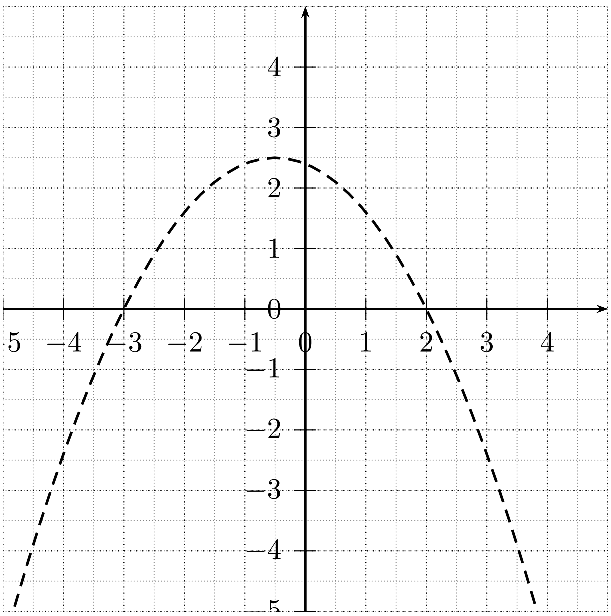
a Racine d'un polynôme

Racine d'un polynôme

On dit que le réel x_1 est une **racine de la fonction polynôme** f si et seulement si $f(x_1) = 0$

Methode 4
Soit la fonction K définie sur $\mathbb{R}$ par $K(x) = -4x^2 + 1$ montrer que $x = -\dfrac{1}{2}$ est une racine de K.

Methode 5
On a représenté ci dessous une fonction H du second degré . Déterminer les racines de H.

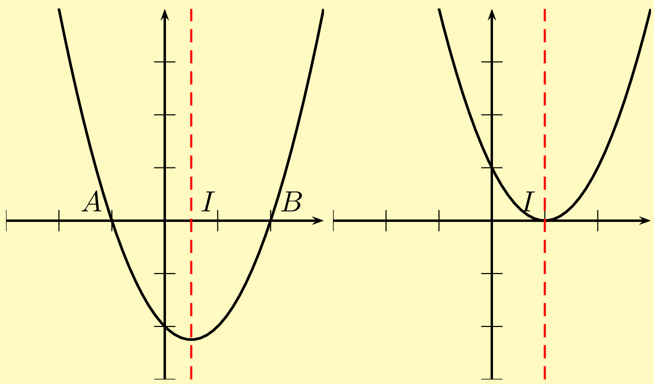


b Fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

Fonction second degré sous forme factorisée

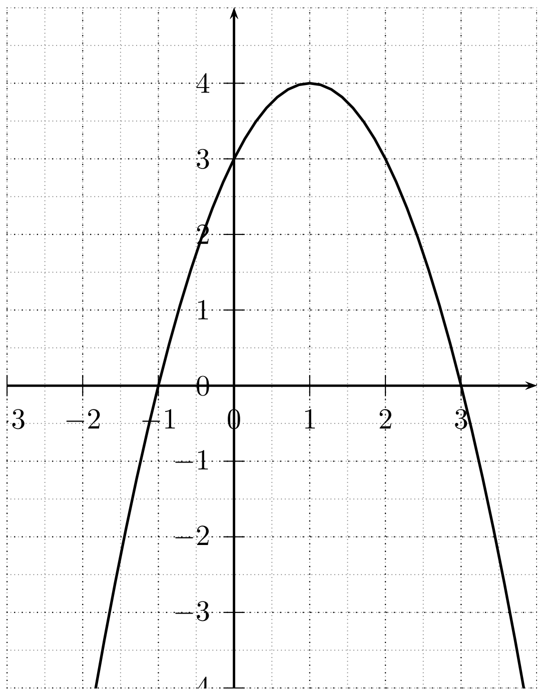
Soient a, x_1, x_2 des réels avec $a \neq 0$. On définit sur $\mathbb{R}$ une fonction $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.

- x_1 et x_2 sont les racines du polynôme f. Si $x_1 = x_2$, on dit qu'il y a une **racine double**.
- Les points d'intersection A et B de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$. Si $x_1 = x_2$, il n'y a qu'un seul point d'intersection.
- L'axe de symétrie de la courbe représentative de f a pour équation $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Il passe par le milieu I du segment $[AB]$.



Methode 6

On considère la parabole ci-dessous rapportée à un repère orthonormé.Déterminer la forme factorisée de f puis sa forme développée.



Methode 7

Montrer que $x = 2$ est une racine de l'expression $B(x) = 3x^2 - 2x - 8$ et en déduire une factorisation de $B(x)$

c Signe de $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$

Signe fonction second degré sous forme factorisée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
Le signe de $f(x)$ dépend du signe de a. f est du signe de a à l'extérieur des racines.
On suppose que $x_1 \leqslant x_2$

- Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque 2
Cette proposition reste valable si $x_1 = x_2$ on a alors $f(x) = a(x-x_1)^2$ et les tableau de signes suivants :

- Si $a > 0$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

- Si $a < 0$

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Methode 8 (Résolution inéquation)
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 9x - 30$

1. Montrer que -2 et 5 sont les racines de f
2. En déduire la forme factoriser de $f(x)$
3. Déterminer le signe de f sur $\mathbb{R}$ puis résoudre $f(x) \geqslant 0$

II Fonction polynôme de degré 3

1 Définitions

Définition

On appelle fonction polynôme de degré 3, ou du troisième degré, toute fonction f dont l'expression peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c et d sont des nombres réels, et $a \neq 0$.

Exemple 1

1. La fonction cubique $f(x) = x^3$ est une fonction polynôme de degré 3 avec $a = \ldots$, $b = \ldots$, $c = \ldots$ et $d = \ldots$.
2. La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x$ est une fonction polynôme de degré 3 avec $a = \ldots$, $b = \ldots$, $c = \ldots$ et $d = \ldots$.
3. La fonction h définie par $h(x) = -3(x-2)(x+2)^2$ est une fonction polynôme de degré 3 avec $a = \ldots$, $b = \ldots$, $c = \ldots$ et $d = \ldots$.

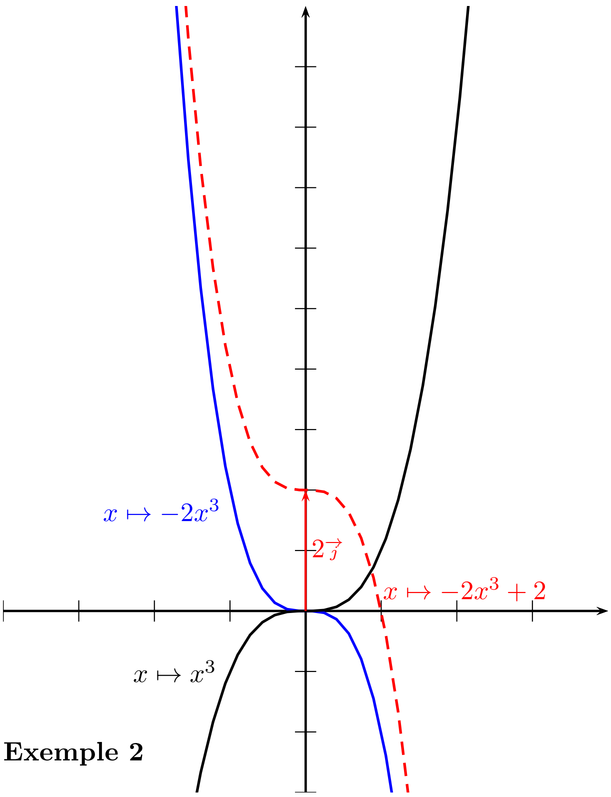
2 Fonctions de la forme $x \mapsto ax^3 + d$ avec $a \neq 0$ et d réel

Proposition

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^3 + d$ où a est un réel non nul et d un réel. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Cette fonction est une fonction polynôme de degré 3.

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f s'obtient à partir de celle de la fonction $x \mapsto ax^3$ par translation de vecteur $d\vec{j}$.

- Si $a > 0$, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.



Exemple 2

Remarque : d est l'ordonnée du point d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des ordonnées.

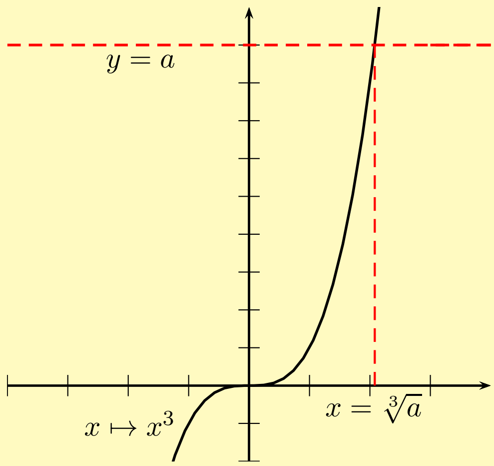
3 Racine cubique

Racine cubique

L'équation $x^3 = a$ admet une unique solution qui s'écrit

$$x = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$$

. Cette unique solution s'appelle **racine cubique** de a.



Methode 9 (Résolution équations)
Résoudre les équations, et donner une valeur approchée de la solution :

- $E_1 : x^3 = 27$
- $E_2 : x^3 = -729$
- $E_3 : x^3 = 0,8$
- $E_4 : 3x^3 = 24$
- $E_5 : -2x^3 + 8 = -120$

4 Forme factorisée

5 Définitions

Propriété

Soit f une fonction de degré définie par sa forme développée $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

- Si f admet trois racines x_1, x_2 et x_3, alors f peut s'écrire sous la forme factorisée :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

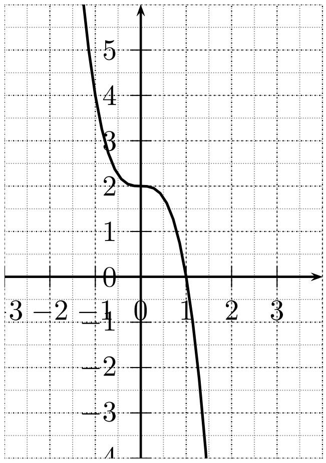
- Réciproquement si f peut s'écrire sous forme factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ alors x_1, x_2 et x_3 sont des racines de f.

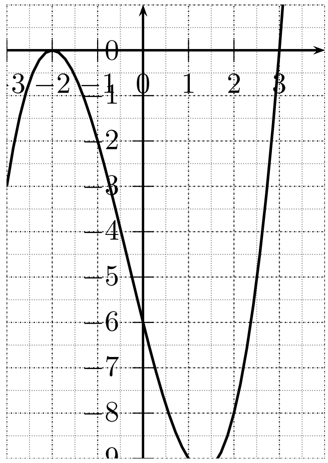
Remarque 3
Les racines x_1, x_2 et x_3 ne sont pas forcement distinctes.

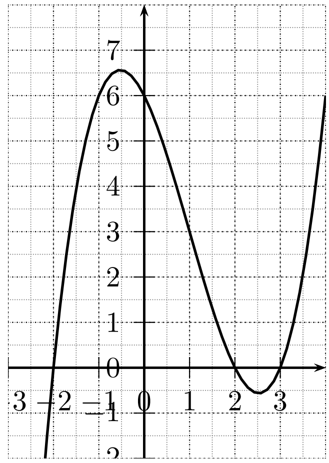
- Si $x_1 = x_2 = x_3$:
on a alors :
$f(x) = a(x - x_1)^3$.
La courbe de f coupe l'axe des abscisses une fois au point de coordonnée $(x_1; 0)$

- Si $x_2 = x_3$ avec $x_1 \neq x_2$:
on a alors :
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)^2$.
La courbe de f coupe l'axe des abscisses 2 fois aux points de coordonnées $(x_1; 0)$ et $(x_2; 0)$

- x_1, x_2 et x_3 sont distincts :
on a alors :
$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
La courbe de f coupe l'axe des abscisses 3 fois aux points de coordonnées $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ et $(x_3; 0)$







Methode 10 (Détermination graphique d'une fonction polynôme du 3^{me} degré)
Déterminer les expressions des 3 fonctions représentées ci-dessus

Methode 11 (Déterminer les racines d'une fonction polynôme de degré 3)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 2(x - 1)(x + 1)(x - 3)$
2. En déduire les racines de f
3. Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$