DÉRIVÉE : Deuxième partie

Table des matières

I Rappel cours dérivation première partie

Rappel

- Le taux de variations de f en a est le nombre défini par $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Le nombre dérivé s'il existe est le nombre défini par : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \tau_a(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = l$
- Si f est dérivable en a , la **tangente** $\mathscr{T}_a$ à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f en a est la droite :
  1. qui a pour coefficient directeur $f'(a)$
  2. qui passe par le point A de coordonnées $(a; f(a))$.
  3. elle a pour équation $\boxed{y = f'(a)\,(x-a) + f(a)}$
- Lorsque le nombre dérivé de f existe pour toutes les valeurs x de I, on dit que f est dérivable sur I. La fonction qui à x associe son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f (ou la dérivée de f) et elle se note f'.
- Premières formules de dérivation (voir paragraphes II) et III) dérivée de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ de $u+v$ et de λu)
- L'étude du signe de la dérivée de la fonction f permet d'étudier les variations de f
  Soit f une fonction dérivable sur une intervalle I, alors :
  - Si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$ alors f est **croissante** sur I .
  - Si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$ alors f est **décroissante** sur I .
  - Si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I .

Méthode 1 (Rappel :Étude d'une fonction polynôme de degré 3)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Déterminer la dériver de f
   $f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
2. Étudier le signe de $f'(x)$
   Signe de $f'(x)$: $a = 3 > 0$
3. En déduire les variations de$f$
   On factorise $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$ f' est une fonction du 2^{nd} degré qui a 2 racines, 1 et -1 donc $f'(x)$ est du signe de $a = 3 > 0$ à l'exterieur des racines.

   Tableau de variations

x	$+\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	-6	$\nearrow$	

   $f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$ $f(1) = (1)^3 - 3 \times (1) - 4 = 1 - 3 - 4 = -6$
4. Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse -2
   Equation tengeante à C_f au point d'abscice
   $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
   Ici
   $T_{-2} : y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$
   $f'(-2) = 3 \times (-2)^2 - 3 = 3 \times 4 - 3 = 9$
   $f(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2) - 4 = -8 + 6 - 4 = -6$
   Donc
   $T_{-2} : y = 9(x+2) - 6$ $T_{-2} : y = 9x + 12$

II Fonction dérivée de fonctions de référence

Fonctions de référence

f désigne une fonction dérivable sur I et f' est la fonction dérivée de f. On a :

Fonction f	Fonction f'	Intervalle I
k	0	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

Remarque 1
Les quatre premières lignes sont des rappels de la partie 1 sur la dérivation. La 5ème est une généralisation des résultats obtenus avec x^2 et x^3 .

Exemple 1
Si f est définie par $f(x) = x^5$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4$.

Les quatre dernières lignes sont admises.

III Fonction dérivée et opérations

1 RAPPEL : Somme de deux fonctions, multiplication par un réel

Fonction $u + v$ et λu avec λ réeel

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et λ un réel non nul alors :

- $(u + v)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$

Méthode 2

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -3x^4 - \frac{5}{x}$

   $f'(x) = -3 \times (4x^3) - 5 \times (-\frac{1}{x^2}) = -12x^3 + \frac{5}{x^2}$

2. Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\cos(x) - 5\sin(x)$

   $g'(x) = -3(\sin(x)) - 5(\cos(x)) = 3\sin(x) - 5\cos(x)$

2 Produit de deux fonctions dérivables

Fonction $u \times v$

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$, alors $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Exemple 2 (Rédaction)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (4x^3 - 3)(-\frac{3}{2}x^2 - 4x)$
f est de la forme uv avec :

① $u(x) = 4x^3 - 3$	① $v(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x$
② u est dérivable sur $\mathbb{R}$	② v est dérivable sur $\mathbb{R}$
③ $u'(x) = 12x^2$	③ $v'(x) = -\frac{3}{2} \times 2x - 4 = -3x - 4$

f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = (12x^2)(-\frac{3}{2}x^2 - 4) + (-3x - 4)(4x^3 - 3)$
$\Leftrightarrow f'(x) = -16x^4 - 48x^3 - 12x^4 + 9x - 16x^3 + 12$
$\Leftrightarrow f'(x) = -28x^4 - 64x^3 + 9x + 12$

Méthode 3
Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\cos x$.

3 Inverse d'une fonction dérivable

fonction $\frac{1}{v}$

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Exemple 3 (Rédaction)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 2x + 1 \neq 0$) par :
$f(x) = \dfrac{1}{3x^2 + 2x + 1}$
f est de la forme $\frac{1}{u}$ avec :
$u(x) = 3x^2 + 2x + 1$
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
$u'(x) = 6x + 2$
f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = -\dfrac{6x + 2}{(3x^2 + 2x + 1)^2}$

Méthode 4
Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x - 10}$.

4 Quotient de deux fonctions dérivables

Fonction $\frac{u}{v}$

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de $\mathbb{R}$ et v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 4 (Rédaction)
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ par :
$f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+2}$
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec :

① $u(x) = 2x - 1$	① $v(x) = 3x + 2$
② u est dérivable sur $\mathbb{R}$	② v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v(x) \neq 0$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$
③ $u'(x) = 2$	③ $v'(x) = 3$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$:
$f'(x) = \dfrac{2(3x+2) - 3(2x-1)}{(3x+2)^2}$
$f'(x) = \dfrac{6x+4-6x+3}{(3x+2)^2}$
$f'(x) = \dfrac{7}{(3x+2)^2}$

Remarque 2
On ne développe pas le dénominateur car par la suite on va étudier le signe de $f'(x)$ et comme $(3x+2)^2$ est positif il suffira d'étudier le signe du numérateur.

Méthode 5
Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^2+1}$.

Méthode 6 (Étude de variations d'une fonction)
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f définies sur I suivantes puis établir leur tableau de variations :

1. $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$, $I = \mathbb{R}$
2. $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $I =]0; +\infty[$
3. $f(x) = x^2(-2x+3)$, $I = \mathbb{R}$
4. $f(x) = \dfrac{3x+4}{1-2x}$, $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$

IV Fonction dérivée d'une fonction composée

1 Dérivée des fonctions du type $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété

On définit sur un intervalle J une fonction g composée de la fonction affine $x \mapsto ax+b$ par une fonction f. On a le schéma de composition suivant g : $\left| \begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b & \longmapsto & f(ax+b) \end{array} \right.$.

Soient a et b deux réels et f une fonction dérivable sur I. Soit J un intervalle tel que pour tout x appartenant à I, $ax+b$ appartient à J.
Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur J et pour tout x dans J :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

Méthode 7
Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (3x-2)^4$.

2 Dérivée des fonctions trigonométriques composées

Propriété

Soient A, ω et φ des réels.
Les fonctions $f : t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $g : t \longmapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

- $$f'(t) = -A \times \omega \sin(\omega t + \varphi)$$
- $$g'(t) = A \times \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

<u>Méthode</u> 8
Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 10\cos(25t + \dfrac{\pi}{4})$.

‘