DM de Mathématiques

Exercice 1

Deux machines A et B d'une usine fabriquent des puces électroniques. A en produit 40%; 5% des puces fabriquées par A sont défectueuses, 2% des puces produites par B sont défectueuses. On prélève une puce au hasard. Quelle est la probabilité qu'elle ait été produite par A sachant qu'elle est défectueuse?

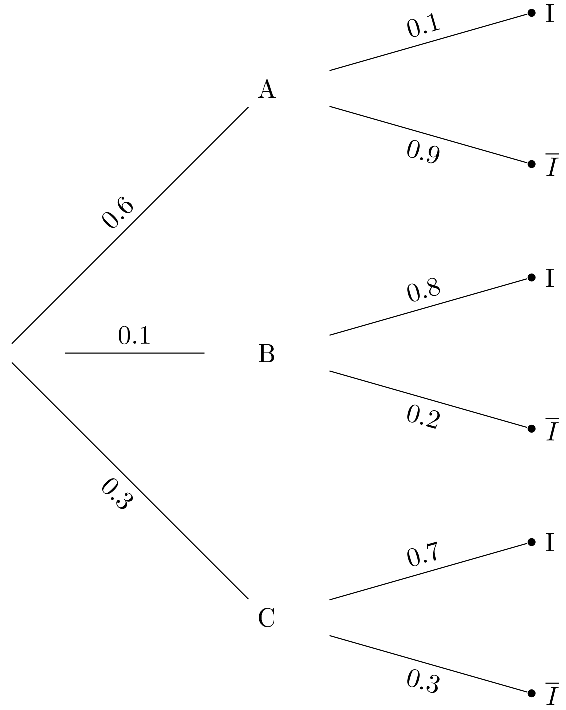
	A	B	Total
Deffectueux	0.020	0.012	0.032
$\overline{Defectueux}$	0.380	0.588	0.968
Total	0.4	0.6	1

La probabilité que la pièce choisie provienne de l'usine A et qu'elle soit déffectueuse est de: $P(A \cap D) = \dfrac{0.02}{1}$

Exercice 2

On se donne un arbre de probabilité pondéré :

1. Compléter l'arbre avec les valeurs manquantes.



2. Ici , $p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ sont les 3 premières branches de l'arbre. $p(A) = \dfrac{0.6}{1}$ $p(B) = \dfrac{0.1}{1}$ $p(C) = \dfrac{0.3}{1}$
3. On peut lire que
   $p_A(I) = 0.1$ $p_A(\overline{I}) = 0.9$ $p_B(I) = 0.8$ $p_C(I) = 0.7$
4. On en déduit donc que
   $p(A \cap I) = p(A) * p_A(I) = 0.6 * 0.1 = 0.06$
   $p(B \cap I) = p(B) * p_B(I) = 0.1 * 0.8 = 0.08$
   $p(C \cap I) = p(C) * p_C(I) = 0.3 * 0.7 = 0.21$
   $p(I)$ est égal à la somme des probabilitées de l'obtenir. Ici, $p(A \cap I)$,$p(B \cap I)$ et $p(C \cap I)$
   Donc $0.06 + 0.08 + 0.21 = 0.29 + 0.06 = 0.35$
5. Pour calculer $p_I(A)$, on utilise la formule:
   $p_I(A) = \dfrac{p(A \cap I)}{p(I)}$
   On connaît déjà $p(A \cap I)$ qui vaut 0.06 et $p(I)$ qui vaut 0.35 on applique la formule:
   $p_I(A) = \dfrac{0.06}{0.35} \approx 0.1714$

Exercice 3

L'iode 131 est très utilisé à petites doses dans l'imagerie médicale, par exemple la scintigraphie.

On étudie l'évolution au cours du temps d'un échantillon de noyaux d'iode 131 comportant $v_0 = 10^6$ noyaux à l'instant $t = 0$. On note (v_n) le nombre de noyaux au bout de n jours. Statistiquement le nombre de noyaux d'iode 131 diminue chaque jour de 8,3%.

1. On cherche v_1 et v_2

   On sait que il y a une baisse de 8.3% noyaux par jour. ➘ $1 - \frac{8}{100} = 1 - 0.083 = 0.917$

   $v_1 = v_0 * 0.917 \quad v_1 = 10^6 * 0.917 \quad v_1 = 917000$

   $v_2 = v_1 * 0.917 \quad v_2 = 917000 * 0.917 \quad v_2 = 840889$

2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (u_n).

   v_n est une suite géométrique de raison $r = 0.917$ et de premier terme $v_0 = 10$" car on multiplie toujours par le résultat précedent.

   Donc $\forall_n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{v}_{n+1} = v_n * 0.917$

3. Déterminer le nombre de noyaux d'iode 131 présents au bout de 5 jours. Au bout de 5 jours, donc v_4 il y aura 707094.310321 noyaux d'iode 131.

4. On considère la fonction Python ci-dessous:

```
def iode():
  n=0
  u=10**6
  while u>10**6/2:
    n=n+1
    u=0.917*u
  return(u)
```

   (a) À quoi correspond la valeur n retournée par cette fonction ?

   La valeur n correspond au nombre de jours écoulé. sachant que le 1^{er} jour est noté v_0 donc pour avoir le nombre de jour correct, on ajoute 1 à la valeure n.

   (b) Si on exécute cette fonction, quelle valeur obtient-on ?

   On obtient la valeur $v_8 = 499982.3636883308$

   (c) Déterminer à partir de combien de jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitié. Cette durée s'appelle la demi-vie de l'iode 131.

   À partir de $n = 8$ on dépasse la demi-vie de l'iode 131. Donc cela ignifie que au bout de 9 jours la population de noyaux aura diminué au moins de moitiée.

   (d) Pour le Césium 137, le nombre de noyaux diminue chaque année de 2,3 %.

   Quelles modifications faut-il apporter à l'algorithme précédent pour trouver la demi-vie du césium 137 sachant que la population au départ est de 10^8 noyaux ?

   Il faut changer le poucentage de baisse des noyaux, ➘ $0.23 = 1 - 0.023 = 0.977$ et la valeur de départ de u.

```
def iode137():
  n=0
  u=10**8
  while u>10**8/2:
    n=n+1
    u=0.977*u
  print(u)
```

   Au bout de 229 jours, le césium 137 aura ateint sa demi-vie.