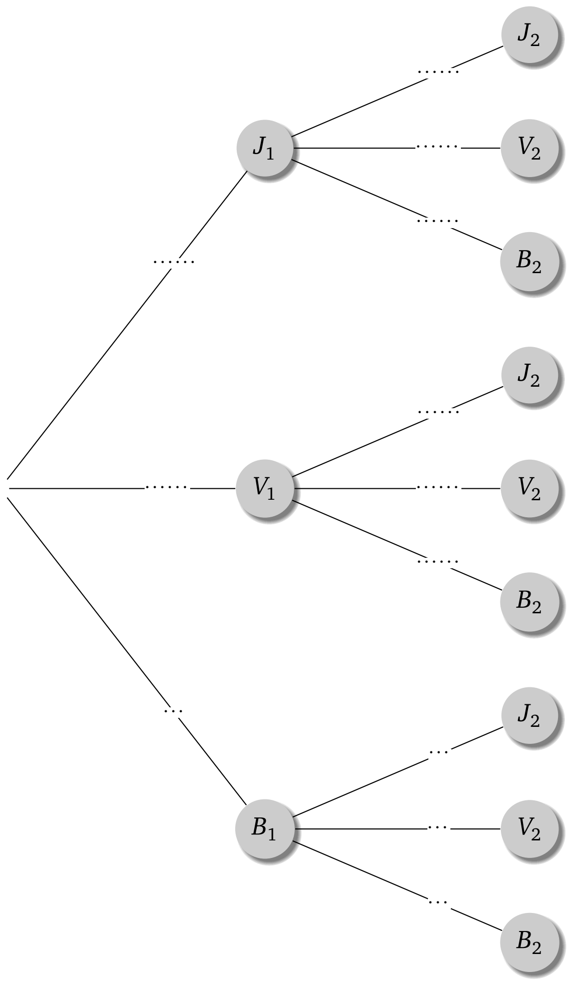
Activité:Variable Aléatoire,loi de probabilité et espérance

Une urne contient 8 billes jaunes , 4 billes vertes et 2 billes bleues Une jeu consiste à extraire une bille de l'urne et à noter sa couleur puis à la remettre dans l'urne.On tire alors une deuxième bille dont on note aussi la couleur. On suppose que les billes ne sont pas discernables au toucher.
On considère les évenements

- J_1 :"la première bille est jaune" et J_2 :"la deuxième bille est jaune"
- V_1 :"la première bille est verte" et V_2 :"la deuxième bille est verte"
- B_1 :"la première bille est bleue" et B_2 :"la deuxième bille est bleus"

I Variable aléatoire et loi de probabilité

1. Compléter l' arbre pondéré ci dessous et les probabilités associées à chaque issue.



$P(J_1 \cap J_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

$P(J_1 \cap V_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

$P(J_1 \cap B_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

$P(V_1 \cap J_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

$P(V_1 \cap V_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

$P(V_1 \cap B_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

$P(B_1 \cap J_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

$P(B_1 \cap V_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

$P(B_1 \cap B_2) = \cdots\cdots$ $gain : \cdots\cdots$

2. On décide que suivant la couleur de la bille tirée ,la personne va soit gagner de l'argent soit en perdre suivant la règle suivante :

   - Si la bille tirée est bleu elle gagne 3 euros
   - Si la bille tirée est verte elle gagne un euro.
   - Si la bille tirée est jaune elle perd 2 euros

   Compléter la colonne gain ci-dessus.

Remarque

A chaque issue, on associe donc un gain, on définit alors une variable aléatoire notée X.

Quelles sont les valeurs possibles que peut prendre X ?
$X(\Omega) = \{..\}$

3. Pour chacune des valeurs possibles $x_1, x_2...$ que peut prendre X déterminer la probabilité associée. Pour cela compléter le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i							Total
$P(X = x_i) = p_i$							

Remarque

Le tableau ci dessus s'appelle la loi de probabilité de X

Déterminer les probabilités suivantes :

(a) $P(X \geqslant 0) =$

(b) $P(X \leqslant 4) =$

(c) $P(1 \leqslant X \leqslant 4) =$

(d) P("d'obtenir un gain d'au plus deux euros")

(e) P("d'être perdant")

II Espérance

Soit X la variable aléatoire X prenant les valeurs $x_1, x_2, ...x_n$ avec les probabilités respectives X $p_1, p_2 \cdots p_n$.

On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le nombre $E(X)$ définie par :
$\boxed{E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \cdots + x_n \times p_n}$ .Le jeu semble t-il intéressant ?

Calculer l'espérance de la variable aléatoire X définie au I)

III Simulation de l'expérience aléatoire

On s'intéresse au gain moyen que le joueur peut espérer remporter.Pour cela on simule plusieurs fois l'expérience aléatoire définie par ce jeu à l'aide d'une feuille de tableur. Voici les résultats obtenus lorsque l'on simule 1000 fois l'expérience. On n'a affiché que les résultats de la première et de la dernière simulation, ainsi que le total des gains des 1000 simulations.
Dans le deuxième tableau on donne le nombre d'apparitions de chacun des gains possibles.

	premier tirage	gain 1er tirage	deuxième tirage	gain deuxième tirave	valeur de G
1	2	-2	4	-2	-4
1000	12	1	2	-2	-1
total des gains					-862

nbre de gains=-4	nbre de gain=-1	nbre gain=1	nbre de gains=2	nbre de gains=4	nb de gains =6
330	323	151	96	81	19

1. Calculer la fréquence en % d'apparition de chacun des gains.
Pour cela compléter le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i							Total
$f_i en en\%$							

2. Calculer la moyenne des gains .

3. Comparer à la valeur obtenue pour l'espérance $E(X)$