

# DÉRIVÉE : Deuxième partie

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Rappel cours dérivation première partie</b>	<b>1</b>
<b>II</b>	<b>Fonction dérivée de fonctions de référence</b>	<b>2</b>
<b>III</b>	<b>Fonction dérivée et opérations</b>	<b>2</b>
1	RAPPEL : Somme de deux fonctions, multiplication par un réel . . . . .	2
2	Produit de deux fonctions dérivables . . . . .	2
3	Inverse d'une fonction dérivable . . . . .	3
4	Quotient de deux fonctions dérivables . . . . .	3
<b>IV</b>	<b>Fonction dérivée d'une fonction composée</b>	<b>4</b>
1	Dérivée des fonctions du type $x \mapsto f(ax + b)$ . . . . .	4
2	Dérivée des fonctions trigonométriques composées . . . . .	4

## I Rappel cours dérivation première partie



### Rappel

- Le taux de variations de  $f$  en  $a$  est le nombre défini par  $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Le nombre dérivé s'il existe est le nombre défini par :  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$
- Si  $f$  est dérivable en  $a$ , la **tangente**  $\mathcal{T}_a$  à la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de  $f$  en  $a$  est la droite :
  1. qui a pour coefficient directeur  $f'(a)$
  2. qui passe par le point  $A$  de coordonnées  $(a; f(a))$ .
  3. elle a pour équation  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
- Lorsque le nombre dérivé de  $f$  existe pour toutes les valeurs  $x$  de  $I$ , on dit que  $f$  est dérivable sur  $I$ . La fonction qui à  $x$  associe son nombre dérivé  $f'(x)$  s'appelle la fonction dérivée de  $f$  (ou la dérivée de  $f$ ) et elle se note  $f'$ .
- Premières formules de dérivation (voir paragraphes II) et III) dérivée de  $x \mapsto x^2$ ,  $x \mapsto x^3$  de  $u + v$  et de  $\lambda u$
- L'étude du signe de la dérivée de la fonction  $f$  permet d'étudier les variations de  $f$   
 Soit  $f$  une fonction dérivable sur une intervalle  $I$ , alors :
  - Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \geq 0$  alors  $f$  est **croissante** sur  $I$ .
  - Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) \leq 0$  alors  $f$  est **décroissante** sur  $I$ .
  - Si, pour tout  $x$  de  $I$ ,  $f'(x) = 0$ , alors  $f$  est **constante** sur  $I$ .

### Méthode 1 (Rappel : Étude d'une fonction polynôme de degré 3)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Déterminer la dérivée de  $f$
2. Étudier le signe de  $f'(x)$
3. En déduire les variations de  $f$
4. Donner l'équation de la tangente  $T$  à la courbe de  $f$  au point d'abscisse -2

## II Fonction dérivée de fonctions de référence



### Fonctions de référence

$f$  désigne une fonction dérivable sur  $I$  et  $f'$  est la fonction dérivée de  $f$ . On a :

Fonction $f$	Fonction $f'$	Intervalle $I$
$k$	$0$	$\mathbb{R}$
$ax + b$	$a$	$\mathbb{R}$
$x^2$	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^3$	$3x^2$	$\mathbb{R}$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ , avec $n \in \mathbb{N}^*$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$

### Remarque 1

Les quatre premières lignes sont des rappels de la partie 1 sur la dérivation. La 5ème est une généralisation des résultats obtenus avec  $x^2$  et  $x^3$ .

### Exemple 1

Si  $f$  est définie par  $f(x) = x^5$ ,  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = 5x^4$ .

Les quatre dernières lignes sont admises.

## III Fonction dérivée et opérations

### 1 RAPPEL : Somme de deux fonctions, multiplication par un réel



#### Fonction $u + v$ et $\lambda u$ avec $\lambda$ réel

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $\lambda$  un réel non nul alors :

- $(u + v)$  est dérivable sur  $I$  et  $(u + v)' = u' + v'$ .
- $\lambda u$  est dérivable sur  $I$  et  $(\lambda u)' = \lambda u'$ .

### Méthode 2

- Déterminer la dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = -3x^4 - \frac{5}{x}$
- Déterminer la dérivée de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 3\cos(x) - 5\sin(x)$

### 2 Produit de deux fonctions dérivables



#### Fonction $u \times v$

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , alors  $u \times v$  est dérivable sur  $I$  et  $(u \times v)' = u'v + uv'$ .

**Exemple 2 (Rédaction)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (4x^3 - 3)\left(-\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)$$

$f$  est de la forme  $uv$  avec :

$$\textcircled{1} u(x) = 4x^3 - 3$$

$\textcircled{2} u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\textcircled{3} u'(x) = 12x^2$$

$$\textcircled{1} v(x) = -\frac{3}{2}x^2 - 4x$$

$\textcircled{2} v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\textcircled{3} v'(x) = -\frac{3}{2} \times 2x - 4 = -3x - 4$$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (12x^2)\left(-\frac{3}{2}x^2 - 4\right) + (-3x - 4)(4x^3 - 3)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -16x^4 - 48x^3 - 12x^4 + 9x - 16x^3 + 12$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -28x^4 - 64x^3 + 9x + 12$$

**Méthode 3**

Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x \cos x$ .

**3 Inverse d'une fonction dérivable**

**fonction**  $\frac{1}{v}$

Si  $v$  est une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et qui ne s'annule pas, alors  $\frac{1}{v}$  est dérivable sur  $I$

et  $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$

**Exemple 3 (Rédaction)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  (car pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $3x^2 + 2x + 1 \neq 0$ ) par :

$$f(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1}$$

$f$  est de la forme  $\frac{1}{u}$  avec :

$$u(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

$u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $u(x) \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$u'(x) = 6x + 2$$

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f'(x) = -\frac{6x + 2}{(3x^2 + 2x + 1)^2}$$

**Méthode 4**

Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $]5; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{1}{2x - 10}$ .

**4 Quotient de deux fonctions dérivables**

**Fonction**  $\frac{u}{v}$

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $v$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors  $\frac{u}{v}$

est dérivable sur  $I$  et  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$

**Exemple 4 (Rédaction)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$  par :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{3x + 2}$$

$f$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec :

$$\textcircled{1} u(x) = 2x - 1$$

$\textcircled{2} u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\textcircled{3} u'(x) = 2$$

$$\textcircled{1} v(x) = 3x + 2$$

$\textcircled{2} v$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $v(x) \neq 0$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$

$$\textcircled{3} v'(x) = 3$$

donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$  :

$$f'(x) = \frac{2(3x+2) - 3(2x-1)}{(3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x+4-6x+3}{(3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{(3x+2)^2}$$

### Remarque 2

On ne développe pas le dénominateur car par la suite on va étudier le signe de  $f'(x)$  et comme  $(3x+2)^2$  est positif il suffira d'étudier le signe du numérateur.

### Méthode 5

Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 1}$ .

### Méthode 6 (Étude de variations d'une fonction)

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions  $f$  définies sur  $I$  suivantes puis établir leur tableau de variations :

1.  $f(x) = 3x^2 + 2x - 4, I = \mathbb{R}$

3.  $f(x) = x^2(-2x + 3), I = \mathbb{R}$

2.  $f(x) = \frac{3}{x}, I = ]0; +\infty[$

4.  $f(x) = \frac{3x+4}{1-2x}, I = ]\frac{1}{2}; +\infty[$

## IV Fonction dérivée d'une fonction composée

### 1 Dérivée des fonctions du type $x \mapsto f(ax+b)$



#### Propriété

On définit sur un intervalle  $J$  une fonction  $g$  composée de la fonction affine  $x \mapsto ax+b$  par une fonction  $f$ . On a le schéma de composition suivant  $g$  :

$$\begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax+b & \longmapsto & f(ax+b) \end{array}$$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ . Soit  $J$  un intervalle tel que pour tout  $x$  appartenant à  $I$ ,  $ax+b$  appartient à  $J$ .

Alors la fonction  $g : x \mapsto f(ax+b)$  est dérivable sur  $J$  et pour tout  $x$  dans  $J$  :

$$g'(x) = a \times f'(ax+b)$$

### Méthode 7

Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = (3x-2)^4$ .

### 2 Dérivée des fonctions trigonométriques composées



#### Propriété

Soient  $A, \omega$  et  $\varphi$  des réels.

Les fonctions  $f : t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$  et  $g : t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x$  dans  $\mathbb{R}$  on a :

•

$$f'(t) = -A \times \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

•

$$g'(t) = A \times \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

### Méthode 8

Déterminer la fonction dérivée de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = 10 \cos(25t + \frac{\pi}{4})$ .