TRIGONOMÉTRIE

Table des matières

I Un peu d'histoire

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques.
Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie. On attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle. Le grec Claude Ptolémée (90 ? ; 160 ?) poursuit dans l'Almageste les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.
Plus tard, l'astronome et mathématicien Regiomontanus (1436 ; 1476), de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme sinus.
Au XVIe siècle, le français François Viète (1540 ; 1607), conseiller d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.
De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propogation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques .

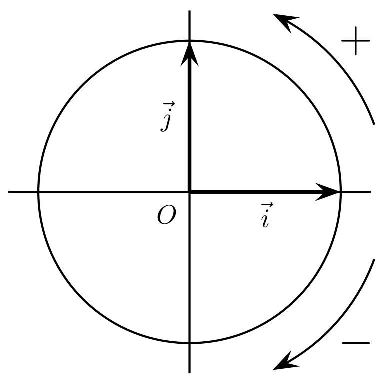
II Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

1 Le cercle trigonométrique

Définition

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, **le cercle trigonométrique** est le cercle C :

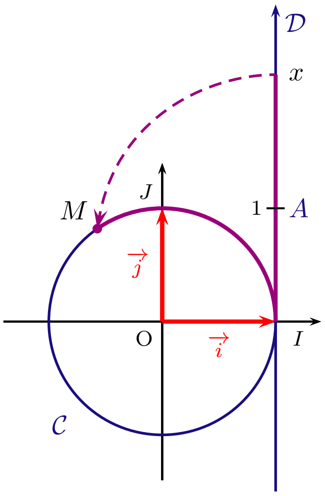
- de centre O et de **rayon** 1
- sur lequel on choisit un sens de parcours appelé **sens direct ou sens positif (le sens contraire des aiguilles d'une montre)**.

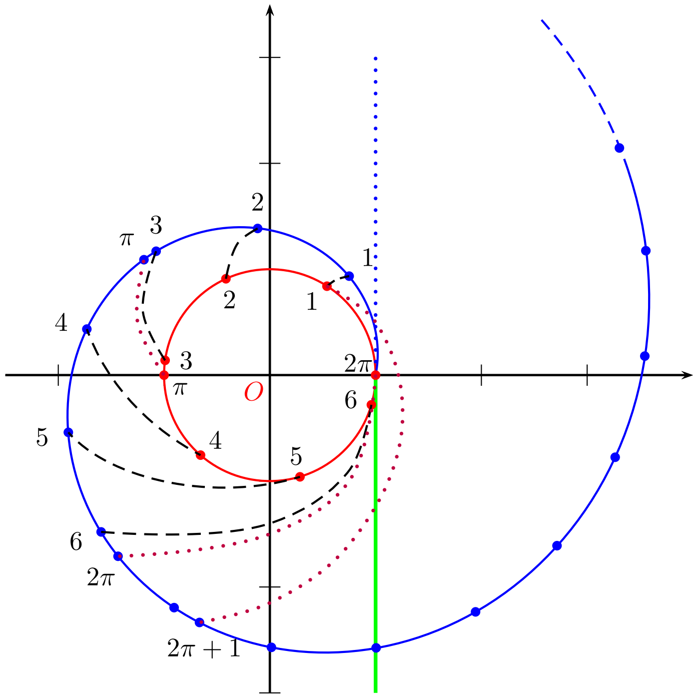


2 Enroulement de la droite réelle

Étant donné le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O, dans le repère orthonormé direct (O,I, J), on considère la droite (IA) tangente à $\mathcal{C}$ passant par I, A étant le point de coordonnées A(1 ;1).
Sur cette droite, on considère le repère (I,A), ce qui permet d'établir une graduation. A chaque point de cette droite correspond un nombre réel et à chaque nombre réel correspond un point de la droite (0 correspond au point I, 1 au point A).
La droite (IA) représente donc l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Ensuite, on « enroule » cette droite réelle (IA) sur le cercle trigonométrique soit dans le sens direct soit dans le sens indirect. (voir graphiques ci-dessous).





Propriété

- Pour tout réel x, le point d'abscisse x sur la droite (IA) vient s'appliquer sur un point M **unique** de C appelé **image du réel x sur le cercle.**

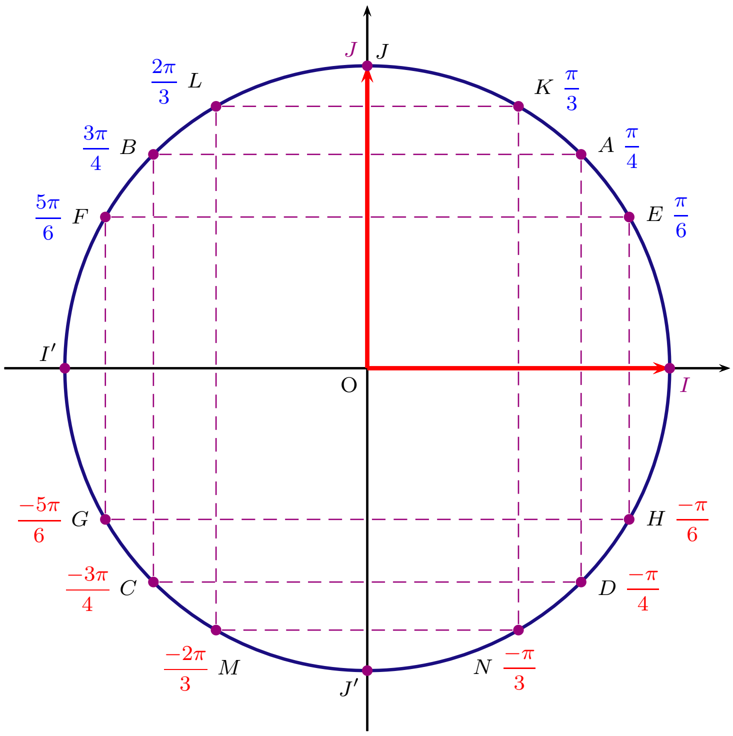
- Tout point N du cercle trigonométrique est l'image d'un réel x'. Il est alors aussi l'image de tous les réels $x' + 2\pi$, $x' + 4\pi$, ..., $x' - 2\pi$, $x' - 4\pi$ c'est à dire $x' + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. (2π étant la longueur d'un tour de cercle).

Exemple 1

- 0 a pour image $I(1;0)$,de même 2π 4π,6π ... ont aussi pour image I.

- $\frac{\pi}{2}$ a pour image $J(0;1)$, π a pour image $I'(-1;0)$, $\frac{3\pi}{2}$ a pour image $J'(0;-1)$, $-\frac{\pi}{2}$ a pour image $I'(0;-1)$
- Le point $J(0;1)$ est aussi l'image de $\frac{\pi}{2}$ mais aussi de $\frac{5\pi}{2}$ et de $-\frac{3\pi}{2}$.

Methode 1 (Repérage de points sur le cercle trigonométrique)
On a placer sur le cercle trigonométrique suivant des points.



1. Associer à chacun des points le nombre réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ dont il est le point image.
2. Associer à chacun des points le nombre réel de l'intervalle $[0;2\pi[$ dont il est le point image.
3. Placer sur le cercle les points M', N' et P' associés respectivement aux réels $\frac{19\pi}{3}$, $\frac{-21\pi}{4}$ et $\frac{53\pi}{3}$

***1 tour 2**π* / $\frac{4\pi}{2}$ / $\frac{6\pi}{3}$ / $\frac{8\pi}{4}$ / $\frac{12\pi}{6}$

- on cherche la mesure principale de : $\frac{19\pi}{3}$
  on commence par diviser le numérateur par le dénominateur sans π.
  $\frac{19}{3} \approx 6.3$ on encadre 6.3 par 2 chiffres pair ici 6 et 8 ; $6\pi < \frac{19\pi}{3} < 8\pi$
  $\frac{18\pi}{3} < \frac{19\pi}{3} < \frac{24\pi}{3}$ $\qquad \frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$
  Donc $\frac{\pi}{3}$ Est la mesure principale.

- on cherche la mesure principale de : $\frac{-21\pi}{4}$
  on commence par diviser le numérateur par le dénominateur sans π.
  $\frac{-21}{4} \approx -5.25$ on encadre -5.25 par 2 chiffres pair ici -6 et -4 ; $-6\pi < \frac{-21\pi}{4} < -4\pi$
  $\frac{-24\pi}{4} < \frac{-21\pi}{4} < \frac{-16\pi}{4}$ $\qquad \frac{-21\pi}{4} = \frac{-24\pi}{4} + \frac{3\pi}{4}$
  Donc $\frac{3\pi}{4}$ Est la mesure principale.

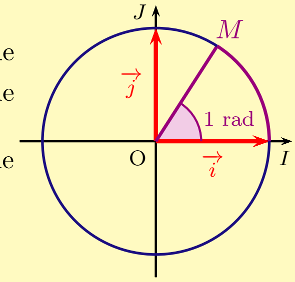
- on cherche la mesure principale de : $\frac{53\pi}{3}$
  on commence par diviser le numérateur par le dénominateur sans π.
  $\frac{53}{3} \approx 17.66666$ on encadre 17.6666 par 2 chiffres pair ici 16 et 18 ; $16\pi < \frac{53\pi}{3} < 18\pi$
  $\frac{48\pi}{3} < \frac{53\pi}{3} < \frac{54\pi}{3}$ $\qquad \frac{53\pi}{3} = \frac{54\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$
  Donc $\frac{\pi}{3}$ Est la mesure principale.

III Radian

1 Définition

Définition

Pour tout point M sur le cercle trigonométrique, on définit un angle géométrique $\widehat{IOM}$. Cet angle géométrique intercepte l'arc $\overset{\frown}{IM}$ du cercle trigonométrique.
La mesure de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ est de 1 radian lorsque la mesure de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ est de 1 rayon.



2 Conversion

Le périmètre d'un cercle de rayon 1 est 2π. Donc 2π radians équivaut à 360°.

Soit 1 radian correspond à $\dfrac{360°}{2\pi}$ ou 1 radian $\approx 57,30°$.
On retiendra : π radians correspond à 180°

Methode 2 (Convertir des mesures d'angle)
Convertir les mesures d'angles donnés en radians ou en degrés.

Mesures en degrés	15	30	45	60	90	125	135	180	270	300
Mesures en radians	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{25\pi}{36}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$

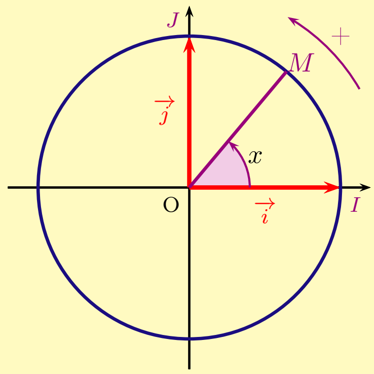
(Pour trouver facilement par la suite toutes les valeurs, on peut faire un produit en crois.)

IV Angle orienté

1 Mesures d'angle orienté

Définition

Soit x un réel et M un point du cercle trigonométrique repéré par x.
On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.



Remarque 1
L'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ a une infinité de mesures.
Si x est une de ses mesures alors $x+2\pi$, $x+4\pi$, $x-2\pi$ et plus généralement $x+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont aussi des mesures de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.
Par convention on note alors $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = x + 2k\pi$ où k est un entier relatif et on dit que $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ à pour mesure x radians à 2π près.
On peut aussi écrire : mes $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou plus simplement :
$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) \equiv \alpha\ [2\pi]$ qui se lit : **La mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est égal à α modulo 2π**

2 Mesure principale d'un angle orienté

Définition

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$, il existe une unique mesure de l'angle appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$. Cette mesure s'appelle appelée la **mesure principale** de $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Methode 3 (Savoir trouver une mesure principale d'un angle orienté :)

1. Parmi les nombres suivants quels sont ceux qui peuvent être des mesures principales d'angles.

   (a) $\frac{5\pi}{2}$ (b) $\boxed{-\frac{7\pi}{12}}$ (c) $\boxed{\frac{-11\pi}{12}}$ (d) $\frac{7\pi}{4}$

2. Déterminer la mesure principale associée à chacune des mesures suivantes :

   (a) $\frac{47\pi}{3} \to -\frac{\pi}{3}$ (b) $-\frac{61\pi}{6} \to -\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{-23\pi}{5} \to \frac{2\pi}{3}$ (d) $\frac{-131\pi}{4} \to \frac{-3\pi}{4}$

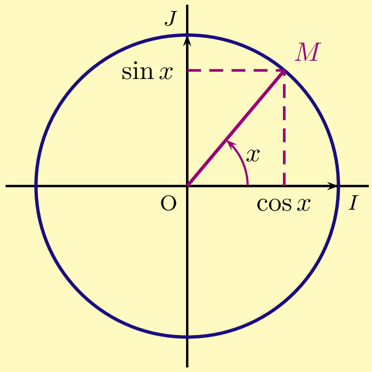
V Cosinus et sinus d'un nombre réel

1 Définition

Définition

Dans le plan rapporté a un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ soit M le point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ image du réel x. On définit :

- le cosinus de x qui est l'abscisse de M. Il est noté $\cos(x)$ ou $\cos x$.
- le sinus de x qui est l'ordonnée de M. Il est noté $\sin(x)$ ou $\sin x$.



2 Propriétés

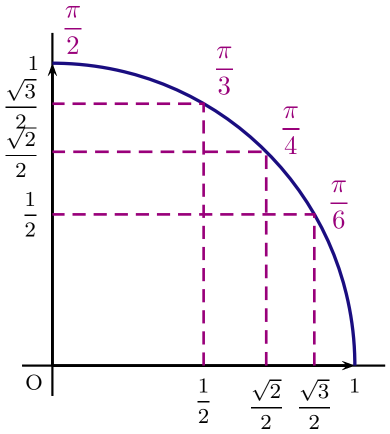
$\forall x \in \mathbb{R}$ on a les propriétés suivantes :

Propriétés

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

3 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Methode 4 (Savoir trouver la valeur exacte d'un sinus ou d'un cosinus)
Dans chacun des cas donner la valeur exacte des nombres suivants :

1. $\cos(2020\pi) \Rightarrow 1$
2. $\sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow$
3. $\cos(\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow$
4. $\sin(\frac{7\pi}{6}) \Rightarrow$

4 Relations trigonométriques et angles associés

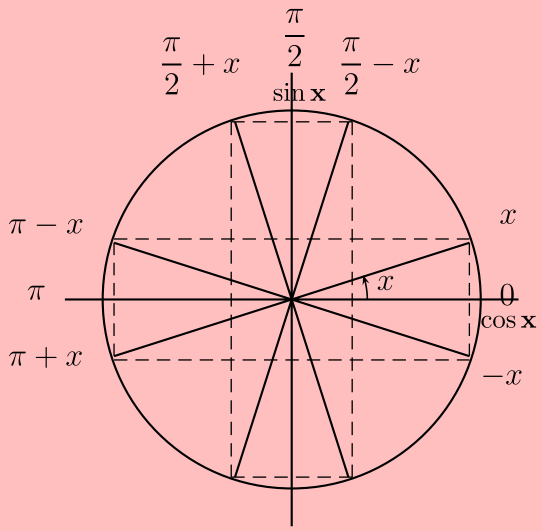
Propriétés

Pour tout nombre réel x,

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos x \\ \sin(\pi - x) = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x \\ \sin(\pi + x) = -\sin x \end{cases}$$



Remarque 2

- Il faut savoir retrouver ces formules à partir d'un dessin
- Les relations $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$ sont très importantes car elles permettent de transformer un sinus en cosinus et vice versa.

Methode 5 (Savoir utiliser les angles associés)

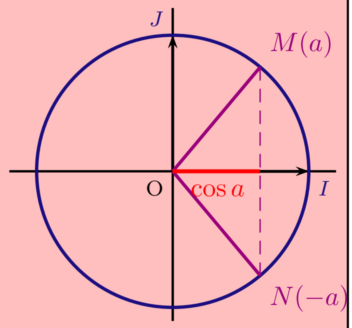
1. Soit x un nombre réel, exprimer les nombres suivants en fonction de $\cos(x)$ ou $sin(x)$
   (a) A$=\cos(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(2\pi + x) + 2\sin(\pi + x)$
   (b) $B = 3\cos(\pi + x) + 5sin(\frac{\pi}{2} - x) + 2\sin(-x)$
2. On admet que $\cos(\frac{\pi}{5}) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$
   (a) En déduire la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{5})$
   (b) Donner ensuite la valeur exacte de cosinus et sinus des nombres réels suivants :
      i. $\frac{4\pi}{5}$
      ii. $-\frac{\pi}{5}$
      iii. $\frac{6\pi}{5}$
      iv. $\frac{3\pi}{5}$
      v. $\frac{a\pi}{5}$

5 Équations trigonométriques

Propriétés

Le cercle trigonométrique et la configuration des angles associés nous permettent de résoudre des équations du type $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$ où a est un réel connu.

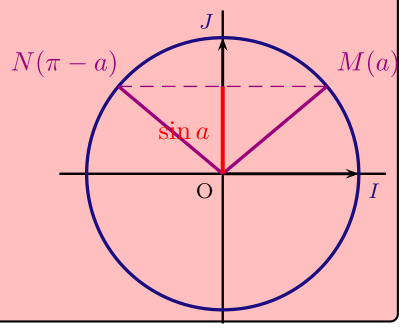
- Équation $\cos x = \cos a$



Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \cos a$ sont :

$$\begin{cases} x &= a + 2k\pi \\ x &= -a + 2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif.}$$

- Équation $\sin x = \sin a$



Soit a un réel donné. Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = \sin a$ sont :

$$\begin{cases} x &= a + 2k\pi \\ x &= \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \text{ est un entier relatif.}$$

Methode 6 (Savoir résoudre des équations trigonométriques)
Résoudre dans $]-\pi;\pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ et enfin dans $[0;2\pi[$ les équations suivantes :

1. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\sin x = -\dfrac{1}{2}$
3. $\cos(x) = \sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$
4. $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$
5. $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Methode 7
QCM (plusieurs réponses possibles)

1. Soit $x \in [\pi;2\pi]$ tel que $\cos(x) = -\dfrac{4}{5}$. Alors on a :

   $\sin(x) \leq 0$ $\qquad \sin^2(x) = \dfrac{1}{5}$ $\qquad \sin(x) = 0.6$ $\qquad \sin(x) = -\dfrac{3}{5}$

2. Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{21}{29}$. Alors on a :

   $\cos(x) \leq 0$ $\qquad \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ $\qquad \cos(x) = -\dfrac{20}{29}$ $\qquad \cos(x) = \dfrac{20}{29}$

3. Soit $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \dfrac{1}{4}$. Alors on a :

   $\cos(x) \leq 0$ $\qquad \cos(x) = \dfrac{3}{4}$ $\qquad \cos(x) = -\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ $\qquad \cos(x) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

VI Fonctions cosinus et sinus

1 Définitions

Définitions

- La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par cos : $x \mapsto \cos x$.
- La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par sin : $x \mapsto \sin x$.

2 Périodicité

Périodicité

Pour tout réel x, $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Remarque 3
La fonction cosinus (ou la fonction sinus) est entièrement connue dès qu'on connaît ses valeurs sur un intervalle $[a; a+2\pi[$ d'amplitude 2π.

D'un point de vue graphique, les courbes représentatives des fonctions cosinus ou sinus sont inchangées par la translation de vecteur $2\pi\overrightarrow{i}$

3 parité

Parité

- Pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$. On dit que la fonction cosinus est paire.
  La courbe représentative de la fonction cosinus admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
- Pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$. On dit que la fonction sinus est impaire.
  La courbe représentative de la fonction sinus admet l'axe l'origine du repère pour centre de symétrie.

Remarque 4
Il suffit d'étudier les fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$ pour les connaître sur $[-\pi; \pi]$ à l'aide de la parité et enfin sur $\mathbb{R}$ à l'aide de la périodicité.

4 variation

Sur $[0; \pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

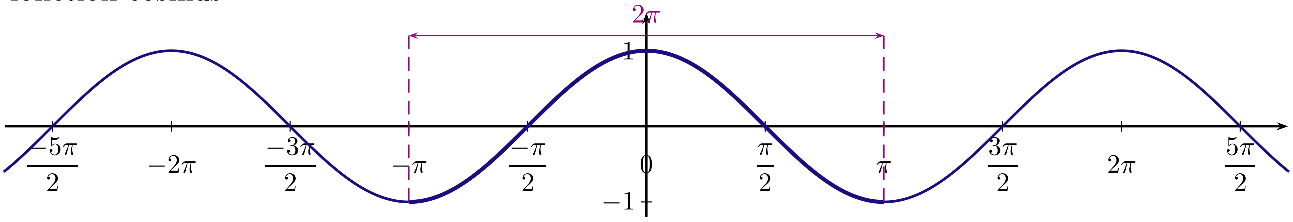
Sur $[-\pi; \pi]$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

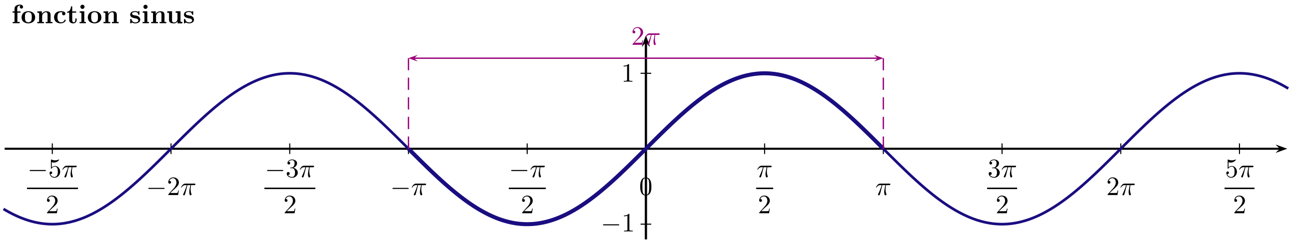
x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

5 courbes

a fonction cosinus

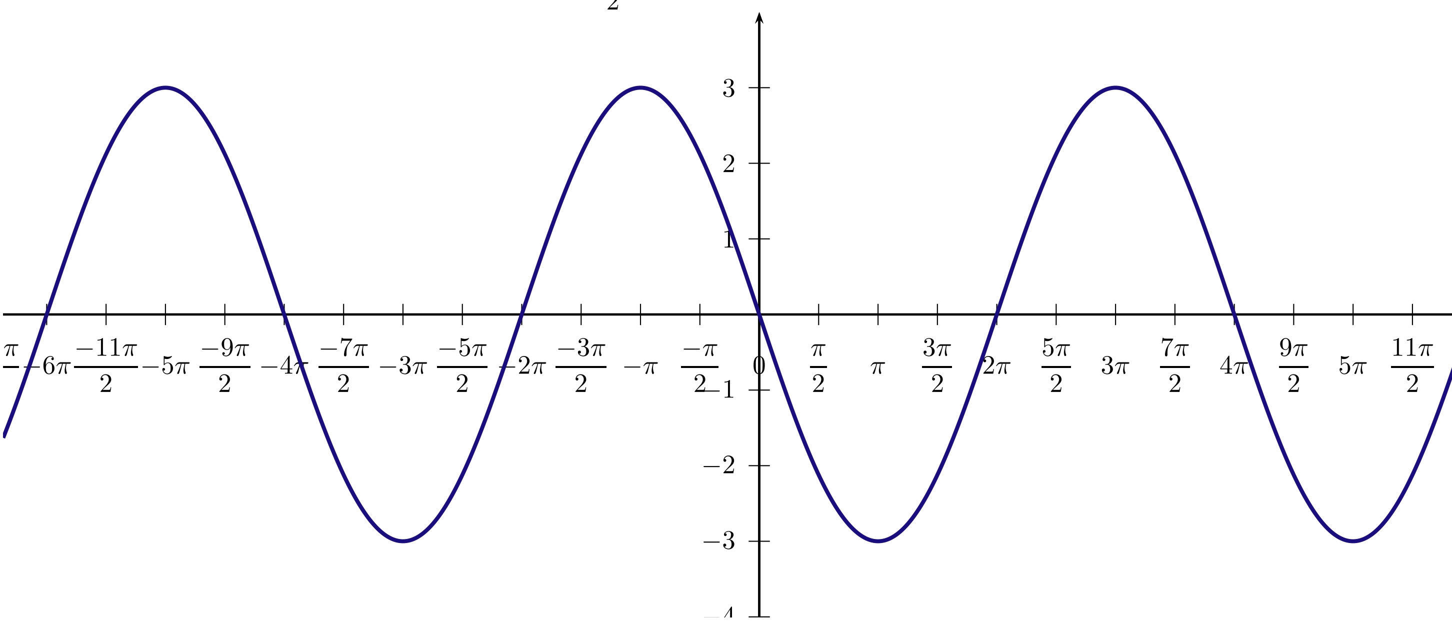


b fonction sinus



VII Fonction $t \mapsto A\cos(\omega t+\varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t+\varphi)$

En physique, de nombreux phénomènes sont liés à la propagation d'onde : le son, la lumière, ...Les grandeurs associées à ces ondes peuvent être mathématisées par des fonctions sinusoïdales du type $t \mapsto A\cos(\omega t+\varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t+\varphi)$
On a représenté ci dessous la fonction $t \mapsto 3\cos(0.5t+\frac{\pi}{2})$



1 Amplitude

Définition

L'amplitude d'une fonction périodique est sa valeur maximale.

Propriété

L'amplitude des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t+\varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t+\varphi)$ est A.

2 Phase

Définition

$\omega t + \varphi$ est appelé la **phase instantanée du signal**.
Si $t = 0$, φ est appelée **la phase à l'origine du signal**.
ω est appelée **la pulsation du signal**

Remarque 5
En physique, la phase s'exprime en radians et la pulsation en radians par seconde.

.

3 Période et fréquence

Définition

La période T d'une fonction est l'intervalle pour lequel la courbe de la fonction se reproduit à l'identique.
La fréquence f est le nombre de périodes par seconde . On a $f = \dfrac{1}{T}$

Remarque 6
En physique, la période T s'exprime en secondes et la fréquence f en Hertz(Hz)

.

Propriété

La période T des fonctions $t \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A\sin(\omega t + \varphi)$ est $\dfrac{2\pi}{\omega}$

Methode 8 (Savoir déterminer les valeurs ω, φ et A à partir d'un graphique)
Déterminer la fonction $f \mapsto A\cos(\omega t + \varphi)$ dont la courbe est donnée ci dessous
On précise que l'ordonnée à l'origine est $\sqrt{2}$ et que $\varphi \in [0; \pi]$