DM de Mathématiques

Exercice 1

La courbe $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. On peut lire graphiquement :
   (a) $f(0) = 1$ et $f'(0) = -3$;
   (b) $f(-1) = 3$ et $f'(-1) = 0$;
   (c) $f(2) = 3$ et $f'(2) = 9$;
   (d) L'équation de la tangente au point d'abscisse -1
   L'équation de la tengente,
   $y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1)$
   $y = 0(x + 1) + 3$
   $y = 0 + 3$
   Donc la tengente au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 3$
   (e) L'équation de la tangente au point d'abscisse 0
   $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
   $y = -3(x) + 1$
   $y = -3x + 1$
   Donc la tengente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = -3x + 1$

2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1; 26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
      i. On calcul m le coéficient directeur :
      $y = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \Leftrightarrow y = \dfrac{-1-26}{-2-1} \Leftrightarrow y = \dfrac{-27}{-3} \Leftrightarrow y = \dfrac{27}{3} \Leftrightarrow y = 9$
      ii. On calcul p l'ordonnée à l'origine :
      $y = 9x + p \Leftrightarrow -1 = 9 \times (-2) + p \Leftrightarrow -1 = -18 + p \Leftrightarrow p = -1 + 18 \Leftrightarrow p = 17$
      Donc l'équation de la tengente T à la courbe $\mathscr{C}$ est :
      $y = 9x + 17$
   (b) En déduire $f'(-2)$
   $f(x) = 9x + 17 \Leftrightarrow f'(x) = 9 \Leftrightarrow f'(-2) = 9$

Exercice 2

Un propriétaire propose à la location deux appartements notés T1 et T2. Le loyer mensuel net pour chacun des appartements se compose de trois parties :

- le loyer mensuel hors charges (loyer HC) ;
- les charges ;
- la taxe locative sur le ramassage des ordures ménagères.

Le tableau ci-après contient les informations en euros relatives à la location de ces deux appartements pour le mois de janvier.

	loyer HC	charges	taxe locative	loyer mensuel net
T1	360	65	36	461
T2	455	72,4	54,60	582
total	815	137,4	90,6	1043

La taxe locative représente 10 % du loyer HC de l'appartement T1 et 12 % de l'appartement T2.

1. (a) Calculer le montant du loyer HC de l'appartement T2.(On écrira les détails des calculs)
   On cherche la taxe locative de l'appartement T2, (54,60) ce résultat est égale à 12% du loyer HC.
   Donc on résout un produit en croix, $x = \dfrac{54,60 \times 100}{12} \Leftrightarrow x = 455$ (case verte)

   (b) Compléter le tableau en indiquant les opérations effectuées sur votre copie.
   Les charges du T1 sont égales a la soustraction du loyer mensuel net par l'addition du loyer HC et de la taxe locative. $461 - 360 + 36 = 65$ (case bleu)
   La taxe locative est égale à 10% du loyer donc $x = \dfrac{36 \times 10}{100} \Leftrightarrow x = 36$(case saumon)
   Pour trouver le loyer mensuel net du T2, on soustrait le loyer total et le loyer mensuel net du T1. $1043 - 461 = 582$ (case pistache)
   Les charges du T2 sont égales à la soustraction du loyer mensuel net et l'addition du loyer HC et de la taxe locative. $582 - 455 + 54,60 = 72,40$(case jaune)
   Le loyer HC total est égale à la somme du loyer HC du T1 et du T2. $360 + 455 = 815$(case magenta)
   Les charges totales sont égales à la somme des charges du T1 et du T2. $65+72,4 = 137,4$(case cyan)
   La taxe locative totale est égale à la somme des taxes du T1 et du T2. $36 + 54,6 = 90,6$ (case rouge)

   (c) Pour l'appartement T1, calculer la proportion des charges par rapport au loyer mensuel net, exprimée en pourcentage arrondi à 0,1 % près.
   La propotion de charges de l'appartement T1 est de $\dfrac{65}{461} \times 100 \Leftrightarrow 0,141 \times 100 \Leftrightarrow 14,1$
   Donc les charges représentent $14,1\%$ des charges mensuel.

2. Si un locataire de l'appartement T2 reçoit une aide de 260 €par mois, quelle est, en pourcentage arrondi à 0,01 % près, la part de cette aide par rapport au loyer HC ?
   La part de cette aide est de $\dfrac{260}{455} \times 100 \Leftrightarrow 0,5714 \times 100 \Leftrightarrow 57,14\%$
   L'aide que le locataire reçoit est de $57,14\%$ du prix qu'il paye pour son loyer HC.

Exercice 3

Partie a

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 250$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,72u_n + 420$.

1. Calculer u_2.

   On cherche u_1 pour pouvoir trouver u_2.

   $u_1 = 0.72 \times 250 + 420 \Leftrightarrow u_1 = 180 + 420 \Leftrightarrow u_1 = 600$

   $u_2 = 0.72 \times 600 + 420 \Leftrightarrow u_2 = 432 + 420 \Leftrightarrow u_2 = 852$

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 1500$.

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géometrique dont on précisera le premier terme et la raison. La suite (v_n) est une suite géométrique car :
   On fait une multiplication toujours d'un même terme.
   $v_n = u_n - 1500 \Leftrightarrow u_n = (0,72u_n + 420) - 1500$
   $v_n = 0,72u_n - 1080$
   $v_n = u_n - 1500 \Leftrightarrow u_n = v_n + 1500$
   $v_{n+1} = 0,72(v_n + 1500) - 1080 \Leftrightarrow v_{n+1} = 0,72v_n + 0,72 \times 1500 - 1080 \Leftrightarrow v_{n+1} = 0,72v_n$
   $v_0 = 250 - 1500 \Leftrightarrow v_0 = -1250$
   Le premier terme de la suite géométrique (v_n) est $v_0 = -1250$ et de raison $q = 0,72$

   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   $v_n = 0,72^n \times -1250$

   (c) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 1500 - 1250 \times 0,72^n$.
   $v_n = u_n - 1500 \Leftrightarrow u_n = v_n + 1500 \Leftrightarrow u_n = 1500(-1250 \times 0,72^n) \Leftrightarrow u_n = 1500 - 1250 \times 0,72^n$
   Donc $\forall n \in$ N, u$_n = 1500 - 1250 \times 0,72^n$

Partie b

Une municipalité a décidé de proposer un abonnement mensuel à un service de location de vélos.

Au mois de janvier 2018, 250 personnes se sont abonnées à ce service.

Une étude statistique a permis de modéliser l'évolution du nombre d'abonnements pour les prochains mois à l'aide de la suite (u_n) définie dans la partie A.

1. On considère l'algorithme suivant :

   $U \leftarrow 250$
   $N \leftarrow 0$
   Tant que $U \leqslant 1\,435$
       $U \leftarrow 0,72 \times U + 420$
       $N \leftarrow N + 1$
   Fin Tant que

   (a) Donner une interprétation de la valeur $N = 9$ obtenue à la fin de l'exécution de cet algorithme.

   N indique le nombre de mois, ici $N = 9$ donc le nombre de mois pour que plus de 1435 abonnements soient achetés est de 9 mois.

   (b) Écrire cet algorithme en Python.

```
n=0
u=250
while u<=1435:
  n=n+1
  u=0.72*u+420
print(u)
```

2. Selon ce modèle, donner une estimation du nombre d'abonnés au bout de 12 mois.

   Au bout de 12 mois, donc $N = 12$, d'après la modélisation, il y aura environ 1476 abonnés.

3. Est-il possible d'envisager nombre d'abonnés supérieur à 2 000 ?

   Non il est impossible d'envisager un nombre d'abonnés supérieur a 2 000, car plus N vas tendre vers de grands nombres, plus la quantitée d'abonnés vas tendre ves 1 500 sans jamais les atteindres.