II Variable aléatoire et loi de probabilité

1 Variable aléatoire

a Activité

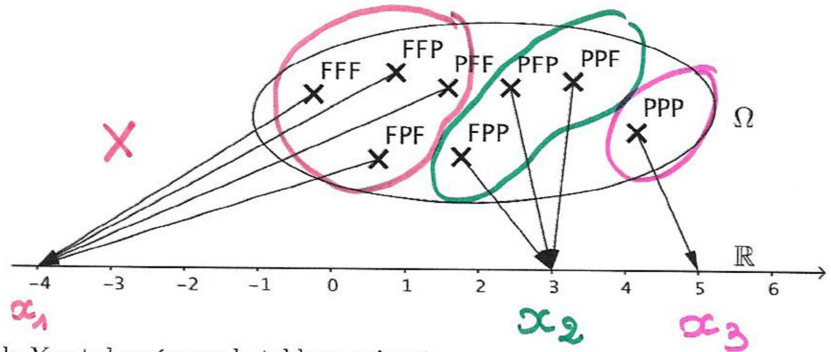
Voir fiche 1 cahier exercices

b Variable aléatoire : définition

On lance une pièce trois fois de suite. On note P ou F suivant que « pile » ou « face » apparaît.
En considérant les issues équiprobables on a $\Omega = \{FFF; FFP; FPF; FPP; PFF; PFP; PPF; PPP\}$. Card$(\Omega) = 8$
On associe à chaque issue un gain « algébrique » (positif ou négatif) d'argent.

- un gain de 5 €si l'on tire exactement 3 « pile » ;
- un gain de 3 €si l'on tire exactement 2 « pile » ;
- une perte de 4 €sinon.

On définit alors une autre fonction Y de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à tout issue de Ω associe le gain algébrique du joueur.
Y peut prendre 3 valeurs possibles : $y_1 = -4$; $y_2 = 3$ et $y_3 = 5$.



et la loi de probabilité de Y est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	3	5
$P(Y = y_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

⚠ Total $= \frac{8}{8} = 1$
→ laissez sous forme de fraction.

> **Définition variable aléatoire**
>
> Soit Ω l'univers fini d'une expérience aléatoire (ensemble des issues de l'expérience aléatoire) et une loi de probabilité P sur Ω.
>
> - On appelle **variable aléatoire** toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui , à toute issue de Ω fait correspondre un réel x_i
> - L'événement « X prend la valeur x_i » noté $(X = x_i)$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x_i par X.
> - $X(\Omega) = \{x_1; .....x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.

Remarque 1
Etant donné que la variable aléatoire X prend un **nombre fini de valeurs** puisque $Card(\Omega)$ est fini, on parlera de variable aléatoire **discrète.**.
Plus tard, vous étudierez des variables aléatoires sur des univers infini . On parlera de variable aléatoire continue.

Exemple 1

Soit l'expérience aléatoire : "On lance un dé à six faces et on regarde le résultat et on considère le jeu suivant :

- Si le résultat est pair, on gagne 2€
- Si le résultat est 1, on gagne 3€
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4€

issues de l'expérience

1. Quel est l'univers de cette expérience ? $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2. On appelle X la variable aléatoire correspondant au gain possible (il peut-être aussi négatif). Quelles sont les valeurs prises par X ?

$X(\Omega) = \{2; -3; -4\}$

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition loi de probabilité

On considère un ensemble fini Ω et une loi de probabilité P sur Ω.
Soit X une variable aléatoire définie sur Ω.
Soit $\{x_1; .....x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par X.
Lorsqu'à chaque valeur x_i on associe la probabilité de l'événement $(X = x_i)$, on définit la **loi de probabilité de la variable aléatoire X**
On représente en général cette loi à l'aide d'un tableau du type :

Valeurs x_i	x_1	x_2	...	x_n	Total
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n	1

Exemple 2

Reprendre l'exemple 1 et donner la loi de probabilité de X

l'ordre n'a pas d'importanc

x_i	2	-3	-4
$P(X = x_i)$	3/6	1/6	2/6

TOTAL $1 = \frac{6}{6}$

↳ pair : $\{2;4;6\}$ ↳ 1 : $\{1\}$ ↳ 3 ou 5 : $\{3;5\}$

3 Espérance

Définition espérance

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω muni d'une loi de probabilité P.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau ci dessous :

x_i	x_1	x_2	......	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	......	p_n

L'espérance mathématique de X est le nombre $E(X)$ définie par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$$

$E(X) = 2 \times 3/6 + (-3) \times 1/6 + (-4) \times \frac{2}{6}$

Exemple 3

Calculer l'espérance de X avec les données de l'exemple 1.

$E(x) = -\frac{5}{6} \approx -0,833$

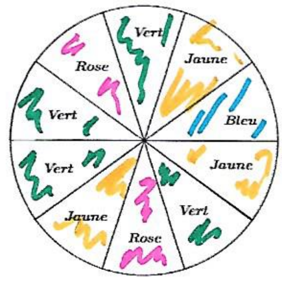
Remarque 2

- Lors d'un grand nombre d'expériences, le gain moyen d'un joueur se stabilise aux environs de $E(X)$.
- On interprète l'espérance comme le gain moyen que peut espérer un joueur par partie, s'il joue un grand nombre de fois. On parlera donc de jeu favorable, défavorable ou équitable en fonction du signe de $E(X)$.

↳ Interpretation : On peut "esperer" en moyenne perdre 0,883€
Donc le jeu n'est pas intéressant.

Methode 1 (Savoir étudier une variable aléatoire et déterminer sa loi de probabilité et son espérance)
Soit l'expérience suivante :

Une roue de loterie est partagée en dix secteurs de quatre couleurs différentes (bleu, jaune, vert et rose), comme représenté sur la figure ci-contre.
Quand on lance cette roue, elle tourne, puis s'arrête librement devant le repère .
On suppose que tous les secteurs ont la même probabilité de s'arrêter devant le repère.
Si la couleur de sortie est le bleu, on perçoit 15 €, si c'est le rose, on perçoit 10 €, si c'est le jaune, on perçoit 2 €et si c'est le vert, on ne perçoit rien.On appelle X la variable aléatoire correspondant au gain possible.



1. Quel est l'univers Ω de cette expérience. $\Omega =$
2. Donner $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles prises par X sa loi de probabilité.
3. Donner sous forme de tableau la loi de probabilité de x
4. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Methode 1

1) $\Omega = \{$bleu ; Rose ; Jaune ; Vert$\}$

2) $X(\Omega) = \{15 ; 10 ; 2 ; 0\}$

3)

x_i	15	10	2	0	Total
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{10}{10} = 1$

1 secteur parmi 10

4) $E(X) = 15 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 2 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{4}{10}$

$E(X) = \frac{25}{10} = 2,5$

On peut espérer en moyenne gagner 2,50 €