

DÉRIVÉE : Deuxième partie

Table des matières

| | | |
|------------|--|----------|
| I | Rappel cours dérivation première partie | 1 |
| II | Fonction dérivée de fonctions de référence | 3 |
| III | Fonction dérivée et opérations | 3 |
| 1 | RAPPEL : Somme de deux fonctions, multiplication par un réel | 3 |
| 2 | Produit de deux fonctions dérivables | 4 |
| 3 | Inverse d'une fonction dérivable | 4 |
| 4 | Quotient de deux fonctions dérivables | 5 |
| IV | Fonction dérivée d'une fonction composée | 5 |
| 1 | Dérivée des fonctions du type $x \mapsto f(ax + b)$ | 5 |
| 2 | Dérivée des fonctions trigonométriques composées | 6 |

I Rappel cours dérivation première partie



Rappel

- Le taux de variations de f en a est le nombre défini par $\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- Le nombre dérivé s'il existe est le nombre défini par : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \tau_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$
- Si f est dérivable en a , la **tangente** \mathcal{T}_a à la courbe représentative \mathcal{C}_f de f en a est la droite :
 1. qui a pour coefficient directeur $f'(a)$
 2. qui passe par le point A de coordonnées $(a; f(a))$.
 3. elle a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
- Lorsque le nombre dérivé de f existe pour toutes les valeurs x de I , on dit que f est dérivable sur I . La fonction qui à x associe son nombre dérivé $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f (ou la dérivée de f) et elle se note f' .
- Premières formules de dérivation (voir paragraphes II) et III) dérivée de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$ de $u + v$ et de λu)
- L'étude du signe de la dérivée de la fonction f permet d'étudier les variations de f
Soit f une fonction dérivable sur une intervalle I , alors :
 - Si, pour tout x de I , $f'(x) \geq 0$ alors f est **croissante** sur I .
 - Si, pour tout x de I , $f'(x) \leq 0$ alors f est **décroissante** sur I .
 - Si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I .

Méthode 1 (Rappel : Étude d'une fonction polynôme de degré 3)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x - 4$

1. Déterminer la dérivée de f

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

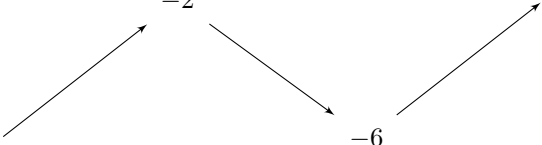
2. Étudier le signe de $f'(x)$

Signe de $f'(x)$: $a = 3 > 0$

3. En déduire les variations de f

On factorise $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$ f' est une fonction du 2^{nd} degré qui a 2 racines, 1 et -1 donc $f'(x)$ est du signe de $a = 3 > 0$ à l'extérieur des racines.

Tableau de variations

| x | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ | | |
|---------|--|------|-----|-----------|-----|-----|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ |  | | | | | |

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1) - 4 = -1 + 3 - 4 = -2 \quad f(1) = (1)^3 - 3 \times (1) - 4 = 1 - 3 - 4 = -6$$

4. Donner l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse -2

Equation tangente à C_f au point d'abscisse

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Ici

$$T_{-2} : y = f'(-2)(x - (-2)) + f(-2)$$

$$f'(-2) = 3 \times (-2)^2 - 3 = 3 \times 4 - 3 = 9$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3 \times (-2) - 4 = -8 + 6 - 4 = -6$$

Donc

$$T_{-2} : y = 9(x + 2) - 6 \quad T_{-2} : y = 9x + 12$$

II Fonction dérivée de fonctions de référence



Fonctions de référence

f désigne une fonction dérivable sur I et f' est la fonction dérivée de f . On a :

| Fonction f | Fonction f' | Intervalle I |
|---------------|------------------|--|
| k | 0 | \mathbb{R} |
| $ax + b$ | a | \mathbb{R} |
| x^2 | $2x$ | \mathbb{R} |
| x^3 | $3x^2$ | \mathbb{R} |
| x^n | nx^{n-1} | \mathbb{R} , avec $n \in \mathbb{N}^*$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | \mathbb{R}^* |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ | \mathbb{R} |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ | \mathbb{R} |

Remarque 1

Les quatre premières lignes sont des rappels de la partie 1 sur la dérivation. La 5ème est une généralisation des résultats obtenus avec x^2 et x^3 .

Exemple 1

Si f est définie par $f(x) = x^5$, f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = 5x^4$.

Les quatre dernières lignes sont admises.

III Fonction dérivée et opérations

1 RAPPEL : Somme de deux fonctions, multiplication par un réel



Fonction $u + v$ et λu avec λ réel

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de \mathbb{R} et λ un réel non nul alors :

- $(u + v)$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- λu est dérivable sur I et $(\lambda u)' = \lambda u'$

Méthode 2

1. Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -3x^4 - \frac{5}{x}$

$$f'(x) = -3 \times (4x^3) - 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -12x^3 + \frac{5}{x^2}$$

2. Déterminer la dérivée de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = 3 \cos(x) - 5 \sin(x)$

$$g'(x) = -3(\sin(x)) - 5(\cos(x)) = -3 \sin(x) - 5 \cos(x)$$

2 Produit de deux fonctions dérivables



Fonction $u \times v$

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de \mathbb{R} , alors $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Exemple 2 (Rédaction)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (4x^3 - 3)\left(-\frac{3}{2}x^2 - 4x\right)$$

f est de la forme uv avec :

| | |
|--|---|
| $\begin{aligned} \textcircled{1} \quad u(x) &= 4x^3 - 3 \\ \textcircled{2} \quad u &\text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \textcircled{3} \quad u'(x) &= 12x^2 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \textcircled{1} \quad v(x) &= -\frac{3}{2}x^2 - 4x \\ \textcircled{2} \quad v &\text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \\ \textcircled{3} \quad v'(x) &= -\frac{3}{2} \times 2x - 4 = -3x - 4 \end{aligned}$ |
|--|---|

f est donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (12x^2)\left(-\frac{3}{2}x^2 - 4\right) + (-3x - 4)(4x^3 - 3)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -16x^4 - 48x^3 - 12x^4 + 9x - 16x^3 + 12$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = -28x^4 - 64x^3 + 9x + 12$$

Méthode 3

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \cos(x)$.

f est définie sur \mathbb{R} f est de la forme uv avec

| | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| $u(x) = x$ | $v(x) = \cos$ |
| u dérivable sur \mathbb{R} | v dérivable sur \mathbb{R} |
| $u'(x) = 1$ | $v'(x) = -\sin(x)$ |

Donc f est dérivable sur \mathbb{R} avec

$$f'(x) = 1 \otimes \cos(x) \oplus (-\sin(x) \otimes x)$$

$$f'(x) = 1 \times \cos(x) \oplus (-\sin(x) \times x)$$

On développe,

$$f'(x) = \cos - x \sin(x)$$

3 Inverse d'une fonction dérivable



fonction $\frac{1}{v}$

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et qui ne s'annule pas, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I

et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Exemple 3 (Rédaction)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} (car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 2x + 1 \neq 0$) par :

$$f(x) = \frac{1}{3x^2 + 2x + 1}$$

f est de la forme $\frac{1}{u}$ avec :

$$u(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

u est dérivable sur \mathbb{R} et $u(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$u'(x) = 6x + 2$$

f est donc dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{6x + 2}{(3x^2 + 2x + 1)^2}$$

Méthode 4

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2x-10}$.

Soit la fonction f définie sur $]5; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2x-10}$

f est de la forme $\frac{1}{u}$ avec

$$u(x) = 2x - 10$$

u est dérivable sur $]5; +\infty[$ et non nul

$$u'(x) = 2$$

Donc f est dérivable sur $]5; +\infty[$ et $\forall x \in]5; +\infty[$

$$f'(x) = \ominus \frac{2}{(2x-10)^2}$$

4 Quotient de deux fonctions dérivables**Fonction $\frac{u}{v}$**

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un même intervalle I de \mathbb{R} et v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 4 (Rédaction)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$\textcircled{1} u(x) = 2x - 1$$

$$\textcircled{1} v(x) = 3x + 2$$

$$\textcircled{2} u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} v \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } v(x) \neq 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$$

$$\textcircled{3} u'(x) = 2$$

$$\textcircled{3} v'(x) = 3$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$:

$$f'(x) = \frac{2(3x+2) - 3(2x-1)}{(3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x+4-6x+3}{(3x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{7}{(3x+2)^2}$$

Remarque 2

On ne développe pas le dénominateur car par la suite on va étudier le signe de $f'(x)$ et comme $(3x+2)^2$ est positif il suffira d'étudier le signe du numérateur.

Méthode 5

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+1}$.

Méthode 6 (Étude de variations d'une fonction)

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions f définies sur I suivantes puis établir leur tableau de variations :

$$1. f(x) = 3x^2 + 2x - 4, I = \mathbb{R}$$

$$3. f(x) = x^2(-2x+3), I = \mathbb{R}$$

$$2. f(x) = \frac{3}{x}, I =]0; +\infty[$$

$$4. f(x) = \frac{3x+4}{1-2x}, I =]\frac{1}{2}; +\infty[$$

IV Fonction dérivée d'une fonction composée

1 Dérivée des fonctions du type $x \mapsto f(ax + b)$



Propriété

On définit sur un intervalle J une fonction g composée de la fonction affine $x \mapsto ax + b$ par une fonction f . On a le schéma de composition suivant g :

$$\left| \begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + b & \longmapsto & f(ax + b) \end{array} \right.$$

Soient a et b deux réels et f une fonction dérivable sur I . Soit J un intervalle tel que pour tout x appartenant à I , $ax + b$ appartient à J .

Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J et pour tout x dans J :

$$g'(x) = a \times f'(ax + b)$$

Méthode 7

Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (3x - 2)^4$.

2 Dérivée des fonctions trigonométriques composées



Propriété

Soient A , ω et φ des réels.

Les fonctions $f : t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$ et $g : t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$ sont dérivables sur \mathbb{R} et pour tout x dans \mathbb{R} on a :

•

$$f'(t) = -A \times \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

•

$$g'(t) = A \times \omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Méthode 8

Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = 10 \cos(25t + \frac{\pi}{4})$.