Dm n^{o}3

Exercice 1

1. À l'aide de la calculatrice je calcule les 3 permiers termes de la suite.
   u$_n$ = $\dfrac{3 \times n - 1}{n - 2}$

   $$u_3 = \frac{3 \times 3 - 1}{3 - 2} \Leftrightarrow \frac{9 - 1}{1} \Leftrightarrow \frac{8}{1} \Leftrightarrow 8$$

   $$u_4 = \frac{3 \times 4 - 1}{4 - 2} \Leftrightarrow \frac{12 - 1}{2} \Leftrightarrow \frac{11}{2}$$

   $$u_5 = \frac{3 \times 5 - 1}{5 - 2} \Leftrightarrow \frac{15 - 1}{3} \Leftrightarrow \frac{14}{3}$$

   La suite(u_n) semble décroissante car u$_3$ $>$ u$_4$ $>$ u$_5$

2. On cherche pour $\forall\ n \geq 3\ u_{n+1} - $ u$_n$

   $$\mathrm{u}_{n+1} - \mathrm{u}_n = \frac{3 \times (n+1) - 1}{(n+1) - 2} - \frac{3 \times n - 1}{n - 2}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{(3n + 3 - 1)}{n + 1 - 2} - \frac{(3n - 1)}{n - 2}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{(3n + 2)(n - 2)}{(n - 1)(n - 2)} - \frac{(3n - 1)(n - 1)}{(n - 2)(n - 1)}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{3n^2 - 6n + 2n - 4}{(n - 1)(n - 2)} - \frac{3n^2 - 3n - n + 1}{(n - 1)(n - 2)}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{3n^2 - 6n + 2n - 4 - 3n^2 + 4n - 1}{(n - 1)(n - 2)}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{\cancel{3n^2 - 4n} - 4 \cancel{- 3n^2 + 4n} - 1}{(n - 1)(n - 2)}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{-5}{(n - 1)(n - 2)}$$

   Donc pour n$\geq$ 3 *on a bien* $u_{n+1} -$ u$_n$ = $\dfrac{-5}{(n - 1)(n - 2)}$

   n ne peut pas être égal à moins de 3 car si n=1 :$(1-1) = 0$, si n=2 :$(2-2) = 0$. Une multiplication par 0 fait toujours 0. Le numérateur ne peut être égal à 0.

3. Le numérateur est négatif, diviser un nombre positif par un nombre négatif est toujours négatif donc la suite u$_n$ = $\dfrac{3 \times n - 1}{n - 1}$ est toujours décroissante.

Exercice 2

1. $z = x + 2 + i(-ix + x) + 2i - 5ix$
   $z = x + 2 + (-i^2x) + ix + 2i - 5ix$
   $z = x + 2 + x + ix + 2i - 5ix$
   $z = 2x + 2 + 2i - 4ix$
   $z = 2x + 2 + i(2 - 4x)$

   Partie réelle : $2x + 2$ Partie imaginaire : $i(2 - 4x)$

   Pour que z soit un nombre réel il faut trouver quand $i(2 - 4x) = 0$.

   $0 = 2i - 4ix \Leftrightarrow 4ix = 2i$

   $x = \dfrac{2i}{4i} \Leftrightarrow \dfrac{i}{2i} \Leftrightarrow \dfrac{i(-2i)}{2i(-2i)} \Leftrightarrow \dfrac{-2i^2}{-4i^2} \Leftrightarrow \dfrac{2}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0.5$

   Donc z est un nombre réel pour $x = 0.5$.

2. Pour que z soit un nombre imaginaire il faut trouver quand $2x + 2 = 0$.

   $0 = 2x + 2 \Leftrightarrow -2x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{-2} \Leftrightarrow -1$

   Donc z est un nombre imaginaire pour $x = -1$.

Exercice 3

1. On doit démontrer que $z_1 = \overline{z_2}$

   $z_1 = \dfrac{3-i}{5+7i} \quad et \quad z_2 = \dfrac{3+i}{5-7i}$

   $z_2 = \dfrac{(3+i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)} \Leftrightarrow \dfrac{15+21i+5i+7i^2}{25-49i^2} \Leftrightarrow \dfrac{15+26i-7}{25+49} \Leftrightarrow \dfrac{8+26i}{74} \Leftrightarrow \dfrac{4}{37} + \dfrac{13}{37}i$

   $\overline{z_2} = \dfrac{4}{37} - \dfrac{13}{37}i$

   $z_1 = \dfrac{(3-i)(5-7i)}{(5+7i)(5-7i)} \Leftrightarrow \dfrac{15-21i-5i+7i^2}{25-49i^2} \Leftrightarrow \dfrac{15-26i-7}{25+49} \Leftrightarrow \dfrac{8-26i}{74} \Leftrightarrow \dfrac{4}{37} - \dfrac{13}{37}i$

   $z_1 = \dfrac{4}{37} - \dfrac{13}{37}i$

   Donc $z_1 = \overline{z_2}$

2. $z_1 + z_2$ est un réel car z_1 est négatif. On applique la règle des signes et donc les imaginaires s'anulent.

   $$\left(\frac{4}{37} + \frac{4}{37}\right) + \left(\frac{13}{37} - \frac{13}{37}\right)i = \frac{8}{37}$$

3. $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur car tout les réels sont positifs. On applique la règle des signes donc les réels s'anulent.

   $$\left(\frac{4}{37} - \frac{4}{37}\right) + \left(\frac{13}{37} + \frac{13}{37}\right)i = \frac{26}{37}i$$