15 平面图的染色

程龚

本次课的主要内容

高随祥《图论与网络流理论》

7.7 平面图的面染色和四色猜想

作业讲解、集中答疑

五色定理

- 定理6.2.4 除完全图和奇圈以外的连通简单图G满足$\chi \leq \Delta$。
- 定理7.7.3 对于任何平面图G，$\chi(G) \leq 5$。

五色定理 (续)

- 定理7.7.3 对于任何平面图G，$\chi(G) \le 5$。

证明：数学归纳法。

重边和自环不影响色数 $\Rightarrow$ 只需讨论简单图

- $v \le 5$时，显然成立。
- 假设$v = n - 1$时成立，则$v = n$时：努力的目标是什么？
  1. 定理7.2.8 设G是$v \ge 3$的简单平面图，则$\delta \le 5$
     $\Rightarrow G$中存在顶点v满足$\mathrm{d}(v) \le 5$
  2. 如果$\mathrm{d}(v) \le 4$，你能完成G的正常5染色吗？

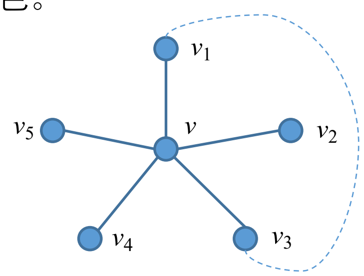
  归纳假设 $\Rightarrow G - v$是5色可染的 $\Rightarrow v$染上与所有邻点相异的颜色
  $\Rightarrow G$是5色可染的 $\Rightarrow$ 得证

五色定理 (续)

- 定理7.7.3 对于任何平面图G，$\chi(G) \le 5$。

证明：

3. 如果$d(v) = 5$：
   1. 将v的邻点按顺时针编号。
   2. 如果$G - v$的正常5染色中，这5个顶点存在撞色，你能完成G的正常5染色吗？
   3. 否则，这5个顶点颜色互不相同，设为色1至色5，然后你有思路吗？
   4. 考察染为色1和色3的所有顶点在$G - v$中的导出子图G_{13}。
   5. 如果其中v_1和v_3不在G_{13}的同一个连通分支中，你能完成G的正常5染色吗？
      » 在v_1所在的连通分支中，对换色1和色3（不影响其它4点）
   6. 否则，存在v_1到v_3的路（不经过v），接下来你能自己完成证明吗？
   7. ⇒ v_2和v_4在G_{24}的不同连通分支中，G可正常5染色。
      » 在v_2所在的连通分支中，对换色2和色4（不影响其它4点）

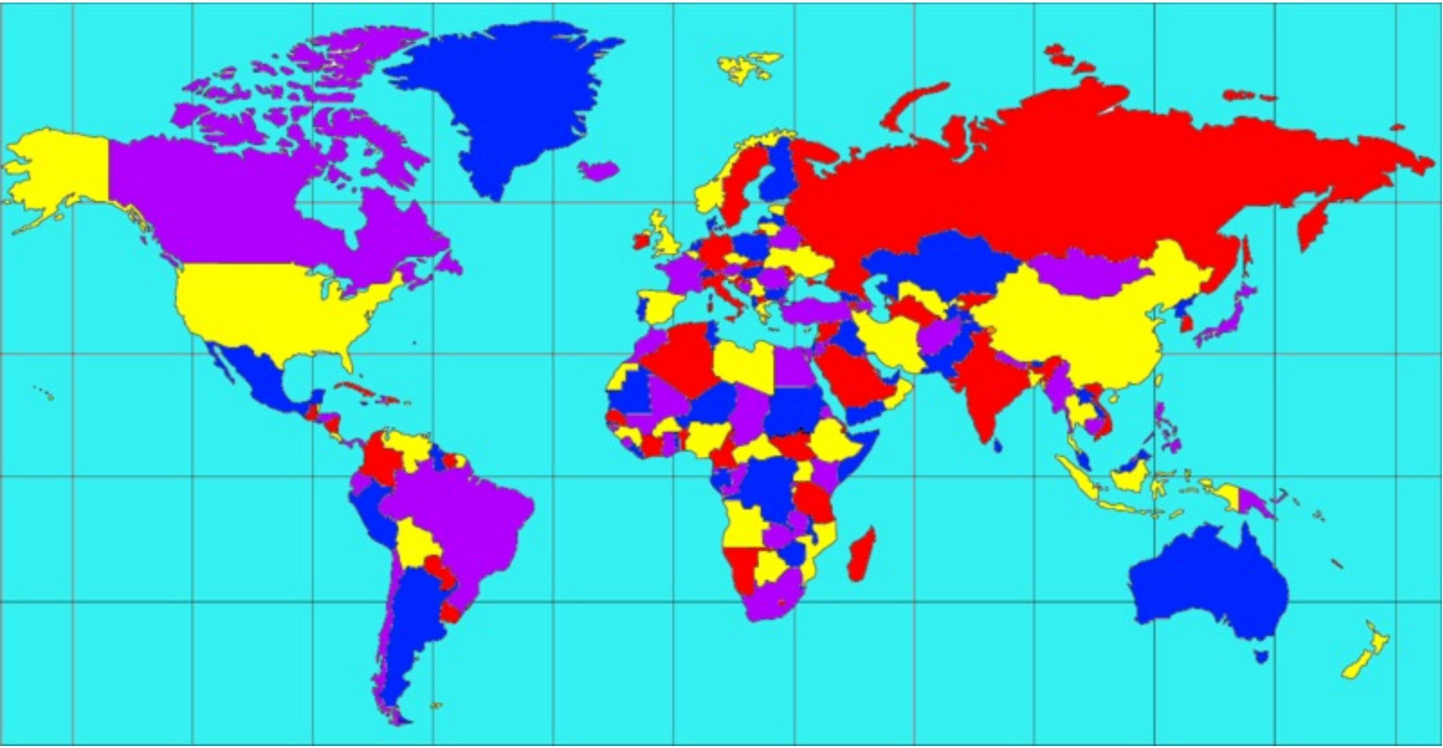


Percy John Heawood, 英国, 1861--1955

毕其一生研究四色定理，未遂，但推翻了前人的错误证明，并给出了五色定理

http://learn-math.info/history/photos/Heawood.jpeg

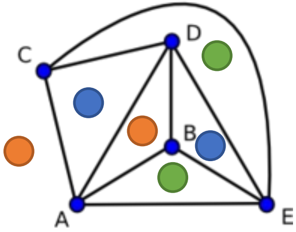
平面图的面染色



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b2/World_using_the_four_color_theorem.png/800px-World_using_the_four_color_theorem.png

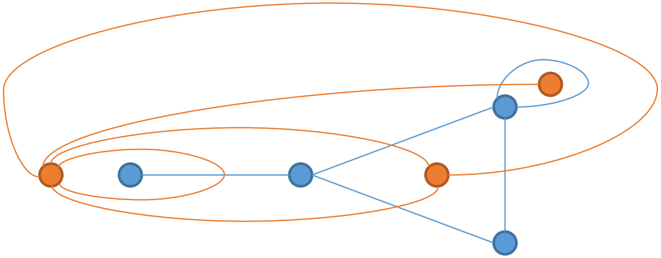
平面图的面染色 (续)

- 面k染色
- 面正常k染色
  - 边界有公共边的面不同色
- 面k色可染的
- 面色数



平面图的面染色 (续)

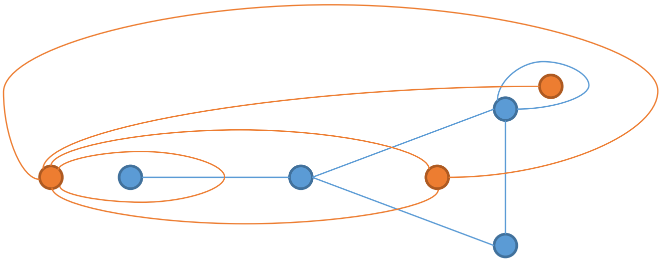
- 对偶图
  - 面 → 点
  - 公共边界上的边 → 连接两点的边
  - 割边 → 自环



平面图的面染色 (续)

- 你能不能借助对偶图来证明：平面图一定是面5色可染的？
  - 定理7.7.1：平面图的面色数 = 对偶图的色数，为什么？
  - 所有对偶图都是平面图
  - 定理7.7.3：平面图的色数 ≤ 5

你能就此给出一个平面图的面染色算法吗？

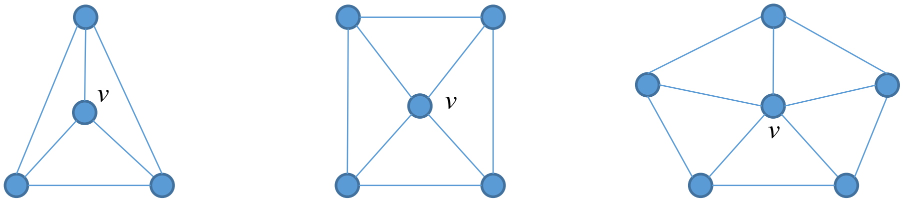


四色猜想

- 对于任何平面图G，$\chi(G) \leq 4$？

四色猜想 (续)

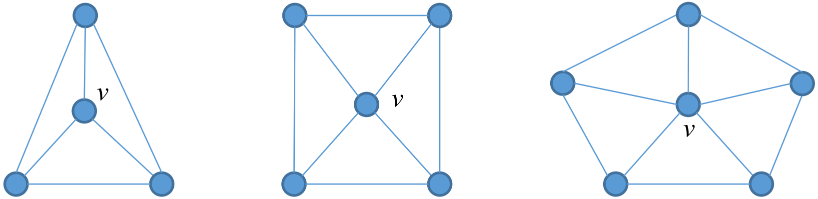
1. 三角剖分平面图 (triangulation)
   - 每个面的度数都为3的简单平面图
2. 构形 (configuration)
   - 每个内部面的度数都为3的简单平面图



四色猜想 (续)

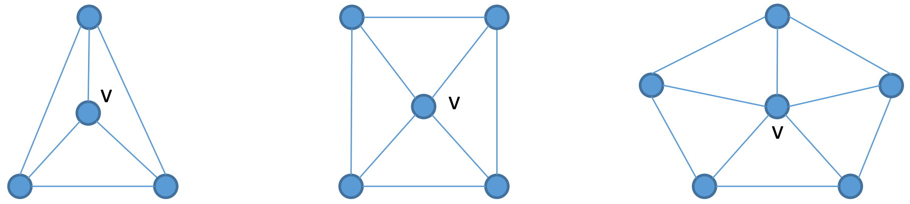
3. 极小反例 (minimal counterexample)
   - $\chi > 4$的简单平面图中阶最小的一个（$v > 4$）
   - 不失一般性，设其为三角剖分平面图
     - 否则：加边使其成为三角剖分平面图，且加边之后显然还是一个极小反例
4. 不可免集 (unavoidable set)
   - 构形的集合，任何一个极小反例至少包含其中一个构形
   - 例如，以下是一个不可免集，为什么？
     - 定理7.2.8 设G是$v \geq 3$的简单平面图，则$\delta \leq 5$

$\Rightarrow$ 如果找到一个不可免集，其中每个构形都不可能出现在极小反例中（称作可约的，reducible），就出现了矛盾，因此极小反例不存在，四色猜想得证



四色猜想 (续)

5. 1879年，Alfred Kempe “证明”了以下不可免集中的每个构形都是可约的。
   - 第一个很容易证明，你能看出来吗？
     - G是极小反例 $\Rightarrow$ $G-v$是4色可染的 $\Rightarrow$ $G-v$的正常4染色中，v的邻点最多只占用3种颜色 $\Rightarrow$ v可以染第四种颜色 $\Rightarrow$ G是4色可染的 $\Rightarrow$ G不是反例
   - 第二个也可以证明。
   - 但是1890年，Heawood发现第三个的证明存在漏洞。

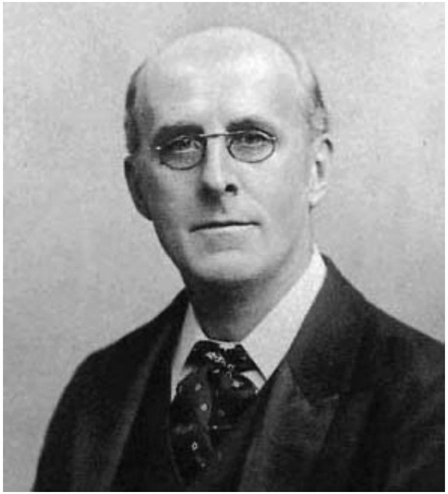


四色猜想 (续)

6. 人们试图寻找更多的可约构形，并组成不可免集。
7. 1970前后，Heinrich Heesch率先设计出算法让计算机来做这件事，眼看就要成功了。
   - 然而关键时刻，他的研究经费被砍掉了。
8. 1976-1977年，Kenneth Appel、Wolfgang Haken和John Koch，宣称经过计算机超过1000小时的计算，找到了一个由1936个可约构形组成的不可免集。
9. 之后，一些bug被陆续发现和修复。
10. 故事就此结束了吗？

四色猜想 (续)

11. 即使算法是正确的，如何保证计算机在运行（证明）的过程中没有出错呢？
    - 无法保证。
12. 但是，这个证明的工作量太大，以至于不可能人工验证，或者说，人工验证的过程中出错的概率更大。所以，我们选择相信计算机，正如我们选择相信人工证明一样。



Alfred Kempe, 英国, 1849--1922

尽管证错了，但他对于四色定理证明的推动仍然是巨大的

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ab/Alfred_Bray_Kempe.jpeg

Heinrich Heesch, 德国, 1906--1995

http://en.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Heesch#/media/File:Heesch,Heinrich_1930_Jena.jpg

Kenneth Appel, 美国, 1932--2013

Wolfgang Haken, 德国, 1928--

没有照片的John Koch是那个程序员

http://www.math.illinois.edu/People/ken-appel.jpg
http://www.las.illinois.edu/images/news/2009/haken.jpg