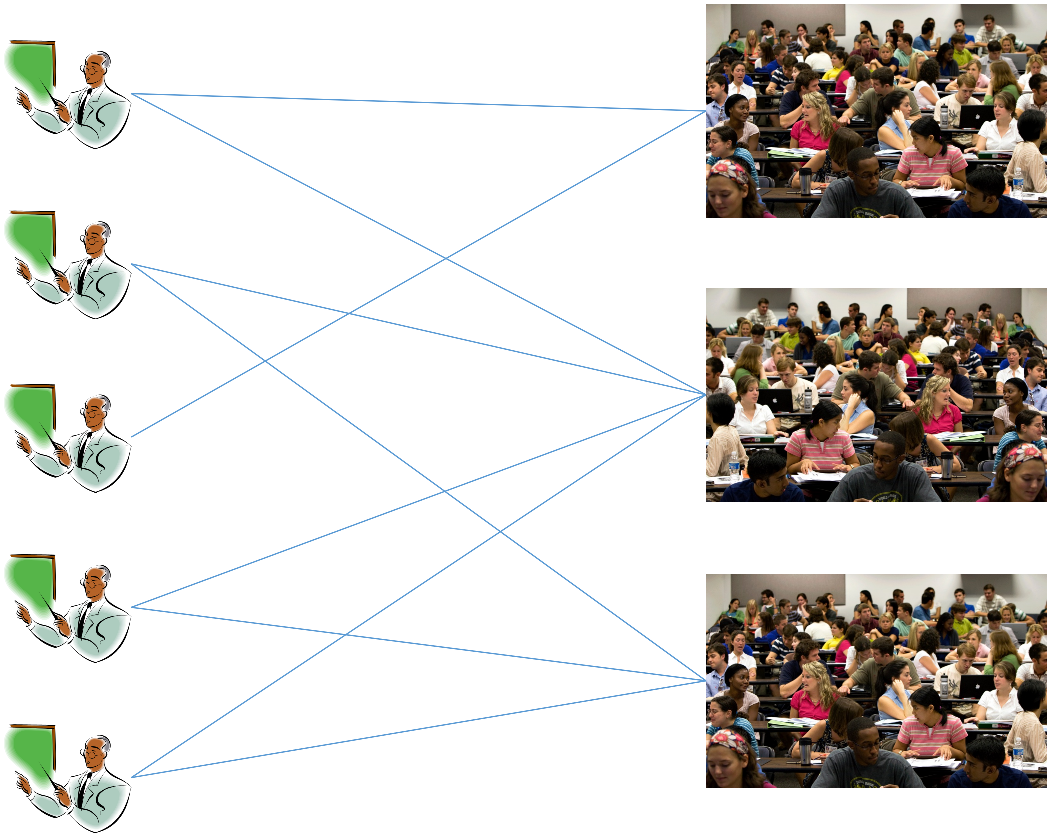
染色

程龚



http://news.jeebboo.com/wp-content/uploads/class_2012.gif

本节课的主要内容

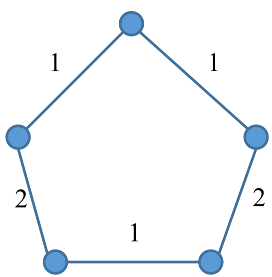
高随祥《图论与网络流理论》

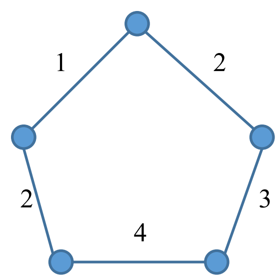
6.1 边染色
6.2 点染色
6.5 图的边染色算法和点染色算法

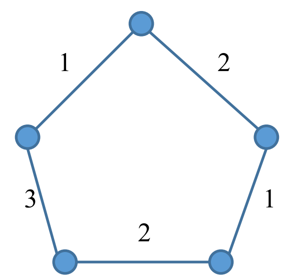
边染色

- **边k染色**
  - $E \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$
  - E_i：色为i的边集
- **边正常k染色**
  - 相邻的边不同色
- **边k色可染的**
  - 能找到一个边正常k染色
- **边色数**
  - 边k色可染的最小k
  - 记作$\chi'(G)$

我们只讨论无自环的图（允许重边）



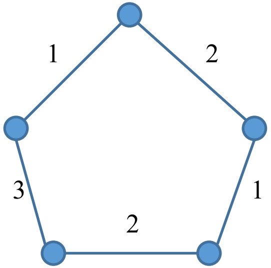


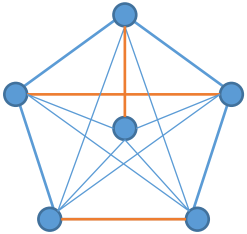


边色数的性质和意义

- 你能不能为χ'给出平凡的上下界？
  - $\Delta \le \chi' \le \varepsilon$
- χ'和匹配之间有什么联系？
  - E至少要被划分成$\chi'(G)$个匹配
  - 如果E能被划分成m个匹配，则$\chi'(G) \le m$

- 基于上述信息，你能不能求出$\chi'(K_{2n})$？
  - $\chi' \ge \Delta = 2n - 1$
  - K_{2n}恰含$2n-1$个边不重的完美匹配 $\Rightarrow \chi' \le 2n - 1$





最佳边k染色

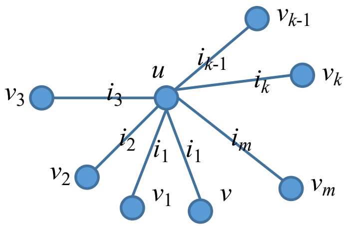
- 对于边k染色c，借用$c(v)$表示顶点v处出现的色数（即v关联的边的不同色数）。
- 若$\sum c'(v) > \sum c(v)$，则称c'是对c的一个改进。
- 不能改进的边k染色称作最佳边k染色。
  - 未必是边正常k染色

Vizing定理

- 定理6.1.2 对于简单图G，$\Delta \le \chi' \le \Delta + 1$。

证明：

1. $\Delta \le \chi'$：显然。
2. $\chi' \le \Delta + 1$：反证法。
   1. 假设$\chi' > \Delta + 1$：令c是一个最佳边$\Delta + 1$染色 $\Rightarrow$ c不是边正常$\Delta + 1$染色 $\Rightarrow \exists u \in V, c(u) < \mathrm{d}(u) \Rightarrow \exists$色$i_1$在$u$处出现至少2次，设为$uv$和$uv_1$
   2. c是边$\Delta + 1$染色 $\Rightarrow \exists$色i_0在u处未出现
   3. c是边$\Delta + 1$染色 $\Rightarrow \exists$色i_2在v_1处未出现
   4. c是最佳染色 $\Rightarrow$ i_2在u处出现，设为uv_2
      （否则可以用i_2给uv_1染色，得到c的一个改进，矛盾）
   5. 同理，i_3在v_2处未出现，在u处出现uv_3……
   6. 直至出现颜色重复：$i_{m+1} = \mathrm{i}_k$。



Vizing定理 (续)

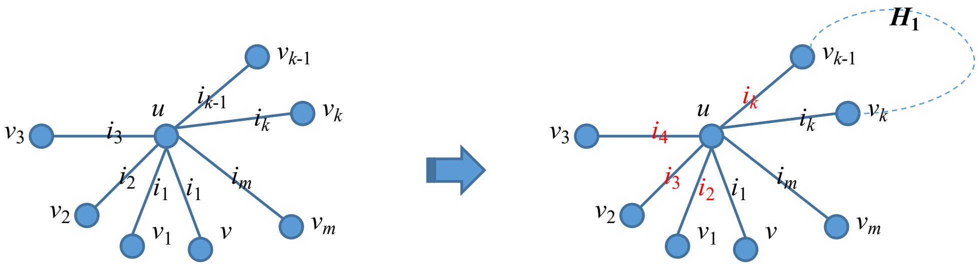
- 定理6.1.2 对于简单图G，$\Delta \leq \chi' \leq \Delta + 1$。

证明：

7. 用i_2给uv_1染色，i_3给uv_2染色，…，i_k给uv_{k-1}染色，得到一个新的边$\Delta + 1$染色c'：
   - 对于$v_1, \ldots, v_{k-1}$：$c' \geq c$，因为新色原来未出现。
   - 对于u：$c' = c$，因为出现的色不变。
   - 对于其它顶点：$c' = c$，因为未受影响。

   $\Rightarrow \sum c'(v) \geq \sum c(v) \Rightarrow c'$也是最佳染色
8. 此时：i_0在u处未出现，i_k在u处出现至少2次，由引理6.1.2 $\Rightarrow$ G$[E'_{i0} \cup E'_{ik}]$中含u的连通分支H_1是奇圈

引理6.1.2 设$c = (E_1, E_2, \ldots, E_k)$是$G$的一个最佳边$k$染色，且存在一个顶点$u$及两种颜色$i$和$j$，色$i$不在$u$处出现，而色$j$在$u$处出现了至少两次，则$G[E_i \cup E_j]$中含$u$的连通分支必是奇圈。



Vizing定理 (续)

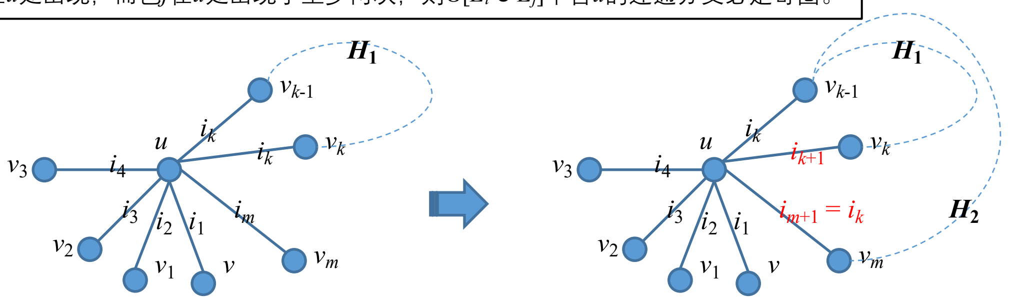
- 定理6.1.2 对于简单图G，$\Delta \le \chi' \le \Delta + 1$。

证明：

9. 同理，用i_{k+1}给uv_k染色，i_{k+2}给uv_{k+1}染色，…，i_m给uv_{m-1}染色，$i_{m+1} = i_k$给uv_m染色，得到一个新的边$\Delta + 1$染色c''：
   - 对于$v_k, \ldots, v_m$：$c'' \ge c$，因为新色原来未出现。
   - 对于u：$c'' = c$，因为出现的色不变。
   - 对于其它顶点：$c'' = c$，因为未受影响。

   $\Rightarrow \sum c''(v) \ge \sum c(v) \Rightarrow c''$也是最佳染色
10. 此时：i_0在u处未出现，i_k在u处出现至少2次，由引理6.1.2 $\Rightarrow G[E''_{i0} \cup E''_{ik}]$中含$u$的连通分支$H_2$是奇圈

引理6.1.2 设$c = (E_1, E_2, \ldots, E_k)$是$G$的一个最佳边$k$染色，且存在一个顶点$u$及两种颜色$i$和$j$，色$i$不在$u$处出现，而色$j$在$u$处出现了至少两次，则$G[E_i \cup E_j]$中含$u$的连通分支必是奇圈。

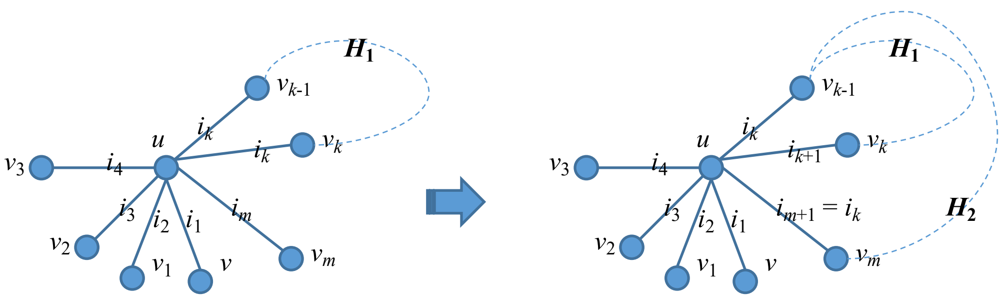


Vizing定理 (续)

- 定理6.1.2 对于简单图G，$\Delta \le \chi' \le \Delta + 1$。

证明：

11. $v_{k\text{-}1}$和v_k在H_1中 $\Rightarrow$ 有不经过u的色为i_0或i_k的路相连 $\Rightarrow$ v_k也在H_2中
12. 原先v_k恰关联两条色为i_0或i_k的边（因为在圈H_1中），现在其中一条uv_k变色了（i_{k+1}不同于i_0和i_k），所以只关联一条了，但却仍在一个圈H_2中 $\Rightarrow$ 矛盾



简单图的分类

- 简单图的分类
  - 第一类图：$\chi' = \Delta$
  - 第二类图：$\chi' = \Delta + 1$
- 以下这些图是第一类还是第二类
  - 路、偶圈、奇圈、树、K_{2n}、K_{2n+1}、二分图

随堂小测

- 绝大部分图都是第一类图
  - $v \le 6$的143种连通简单图中，只有8种是第二类图
  - $v \to \infty$时，第一类图的比例 $\to$ 100%
- 但是，一般意义上的边色数判断仍是NP完全问题

二分图的边色数

- 定理6.1.1 对二分图G，$\chi' = \Delta$。

证明：你能利用这个引理自己证明吗？

反证法，假设$\chi' > \Delta$：

1. 设c是一个最佳边Δ染色 $\Rightarrow$ c不是边正常Δ染色 $\Rightarrow$ $\exists u \in V$, $c(u) < \mathrm{d}(u) \Rightarrow \exists$色$i$在$u$处出现至少2次
2. $c(u) < \mathrm{d}(u) \leq \Delta \Rightarrow \exists$色$j$在$u$处未出现
3. 引理6.1.2 $\Rightarrow$ G中有奇圈 $\Rightarrow$ G不是二分图 $\Rightarrow$ 矛盾

> 引理6.1.2 设$c = (E_1, E_2, \ldots, E_k)$是$G$的一个最佳边$k$染色，且存在一个顶点$u$及两种颜色$i$和$j$，色$i$不在$u$处出现，而色$j$在$u$处出现了至少两次，则$G[E_i \cup E_j]$中含$u$的连通分支必是奇圈。

二分图的边正常Δ染色算法

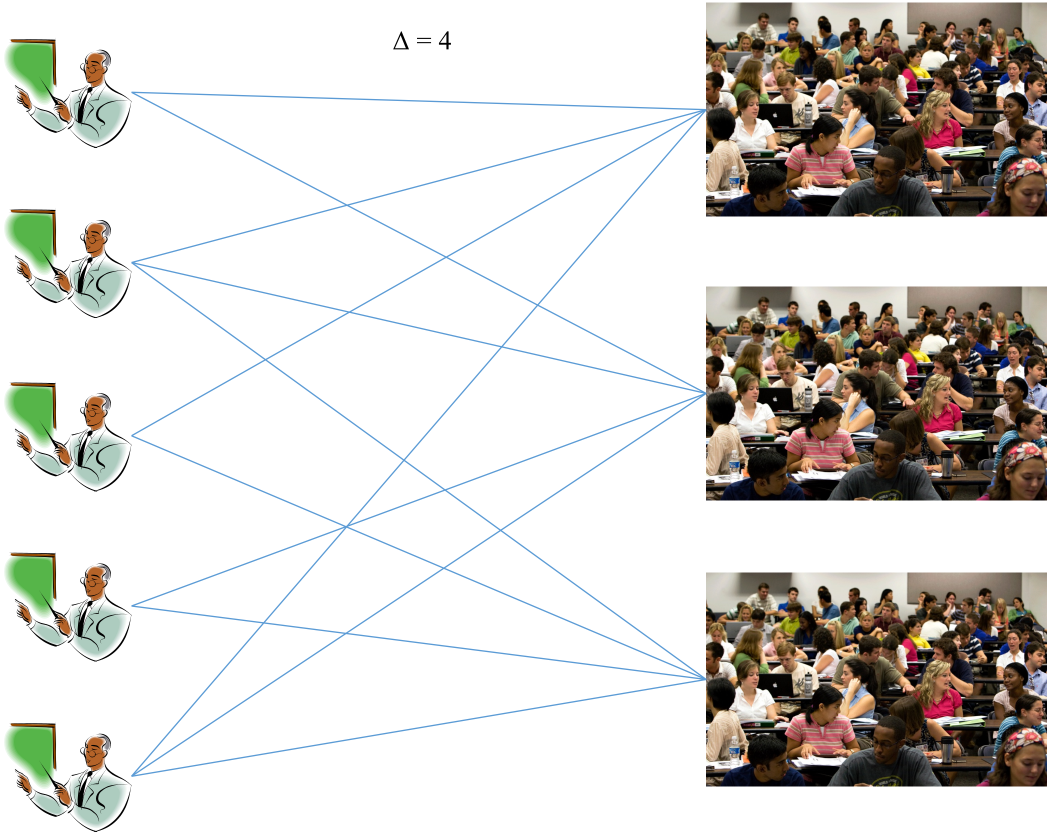
- 推论3.3.3 k正则二分图有k个边不重的完美匹配。
  - 证明思路：霍尔定理 + 数学归纳法

- 霍尔定理：对于二分图$G = <X \cup Y, E>$，G有饱和X中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集$S \subseteq X$，$|N(S)| \geq |S|$。
  - $N(S)$：S中所有顶点的所有邻点形成的集合

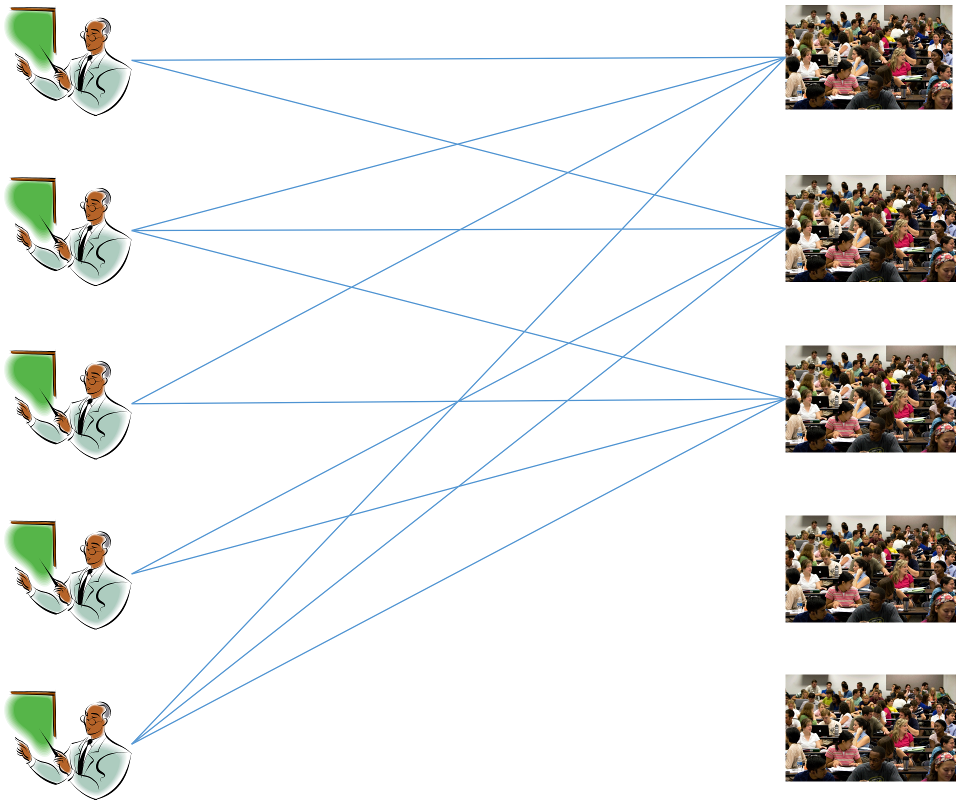
- 由此得出算法的基本思路
  1. 将二分图扩展成Δ正则二分图。
     1. 在顶点少的一侧添加顶点使两侧顶点数量相同。
     2. 添加边使所有顶点的度均为Δ。
  2. 反复地：求最大匹配（即完美匹配），染色后从图中删去。
  3. 忽略添加的顶点和边。

二分图的边正常Δ染色算法 (续)

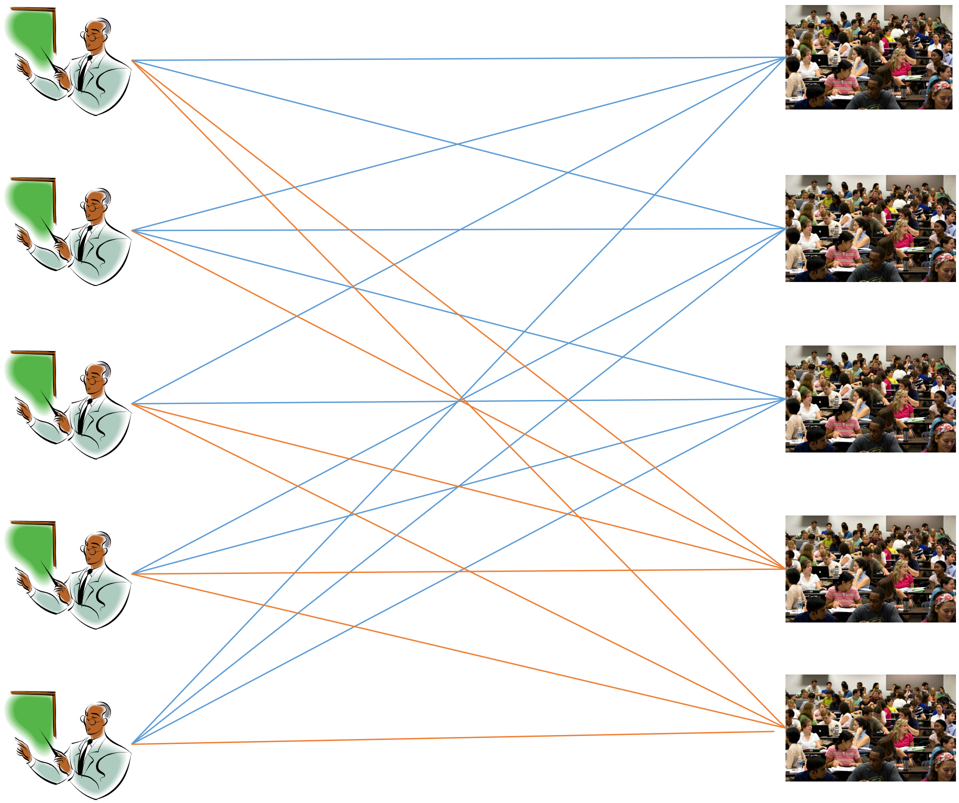
$\Delta = 4$



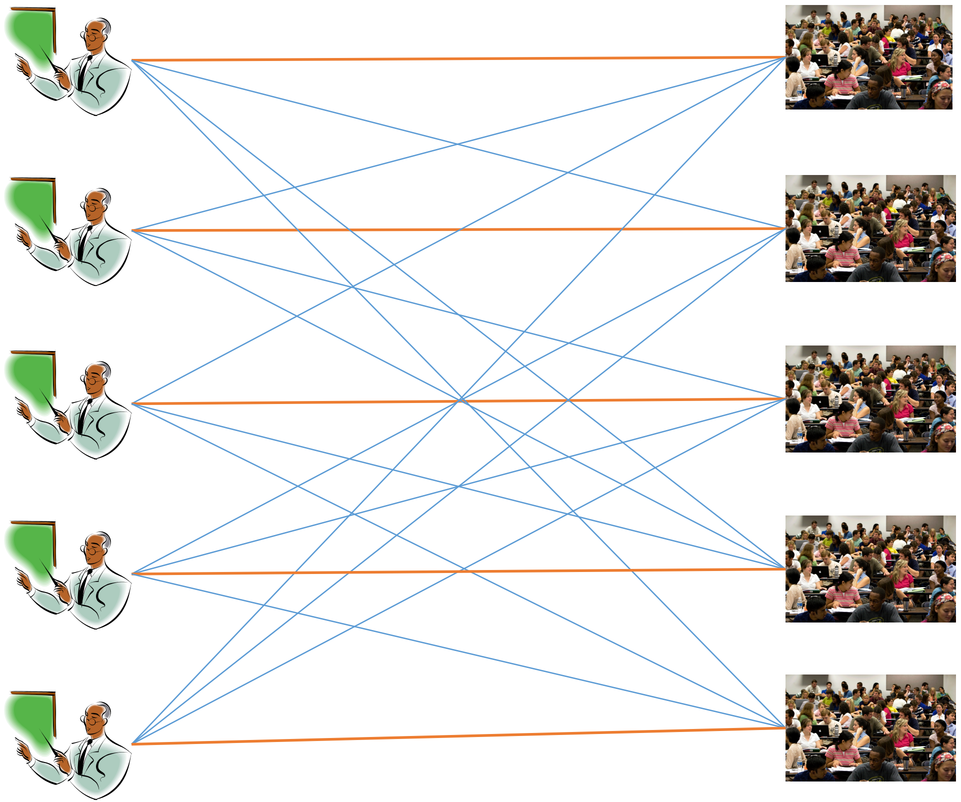
二分图的边正常Δ染色算法 (续)



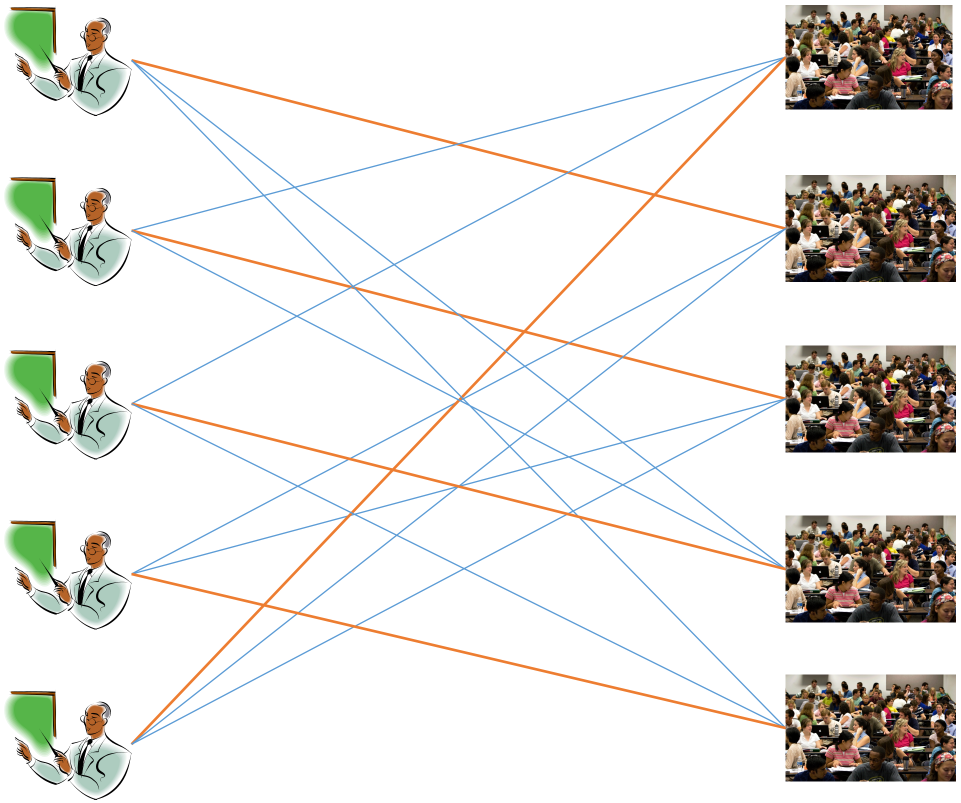
二分图的边正常Δ染色算法 (续)



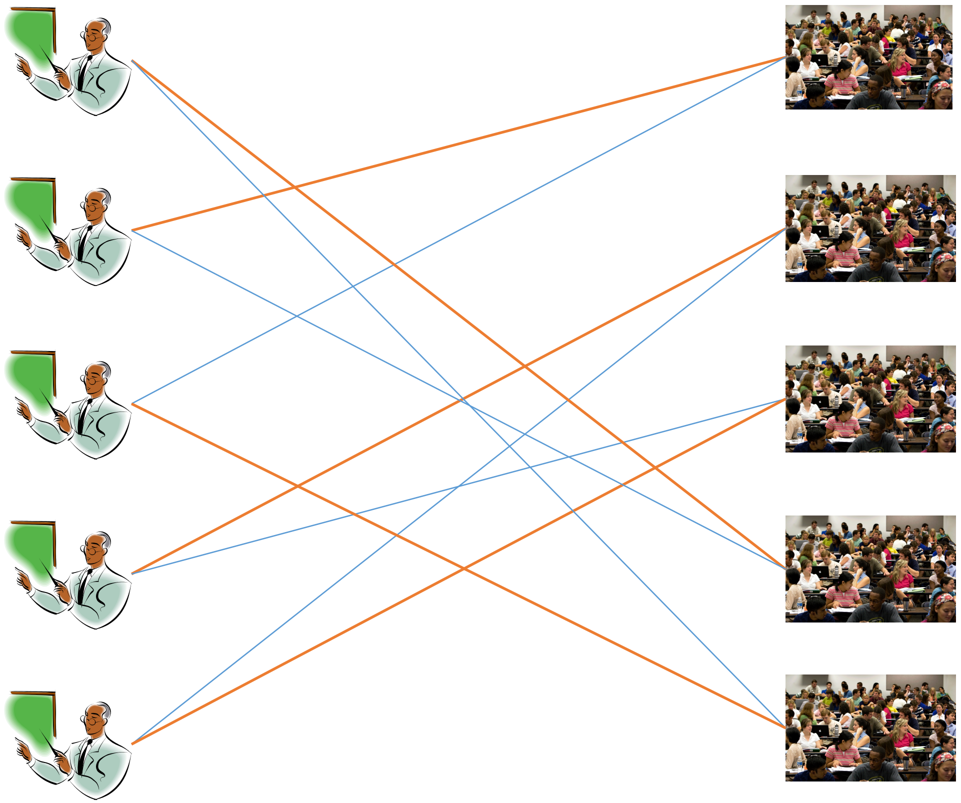
二分图的边正常Δ染色算法 (续)



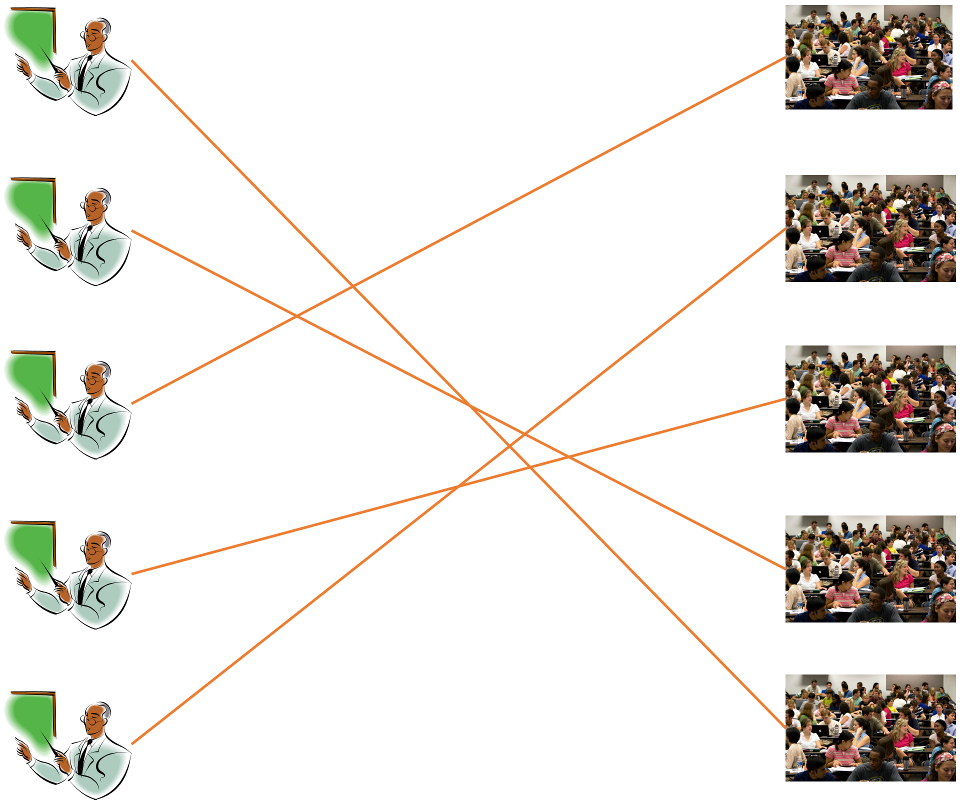
二分图的边正常Δ染色算法 (续)



二分图的边正常Δ染色算法 (续)



二分图的边正常Δ染色算法 (续)



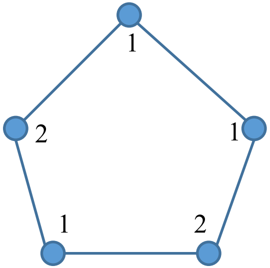
二分图的边正常Δ染色算法 (续)

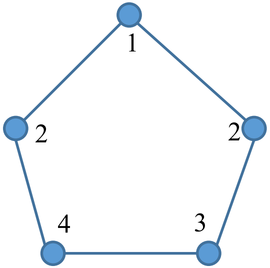
- 二分图的边染色
  - 目前最快算法的时间复杂度是$O(m \log\Delta)$
- 一般简单图的边染色
  - 多项式时间内可以做到$\Delta + 1$染色

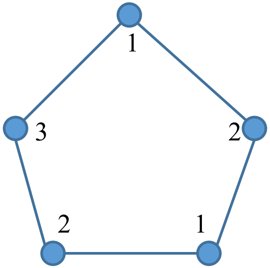
点染色

- k染色
  - $V \rightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$
  - V_i：色为i的顶点集
- 正常k染色
  - 相邻的顶点不同色
- k色可染的
  - 能找到一个正常k染色
- 色数
  - k色可染的最小k
  - 记作$\chi(G)$
- k色的
  - $\chi = k$

我们只讨论无自环的图（允许重边）







色数的性质和意义

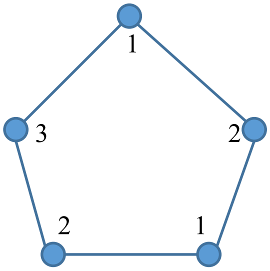
- χ的平凡上界是什么？
  - $\chi \le \nu$
- 如果说χ'对应匹配，那么χ对应什么？
  - V至少要被划分成$\chi(G)$个点独立集
  - 如果V能被划分成m个点独立集，则$\chi(G) \le m$

- 你能不能举出一些$\chi = 0$、1、2、3、ν的例子？
  - $\chi = 0$：零图
  - $\chi = 1$：空图（且非零图）
  - $\chi = 2$：二分图（且非空图）
  - $\chi \ge 3$：有奇圈
  - $\chi = \nu$：有子图K_ν

色临界图及其性质

- k临界的
  - $\chi = k$的极小图
- k色图一定包含一个k临界子图（为什么？）

- 色临界图一定是连通的简单图（为什么？）
- 你能不能举出一些1、2、3临界图的例子？
  - 1临界图：K_1
  - 2临界图：K_2
  - 3临界图：奇圈



色临界图及其性质 (续)

- 对于k临界图G中的任一顶点v，能找到一个正常k染色使得v的色独一无二且与其它$k-1$种色都相邻。*

证明：（你能构造出这个染色吗？）

在$G-v$的任一正常$k-1$染色基础上，给v另染一种色，构成G的正常k染色，此时v必与其它$k-1$种色相邻（否则可用其中一种给v染色，得到G的正常$k-1$染色，矛盾）。

- 推论6.2.3：k临界图满足$\delta \geq k-1$。

- 对于k临界图G中的任一边e，$G-e$的任一正常$k-1$染色都使得e的两个端点同色。*

证明：

如果异色，向$G-e$中添加回e直接得到G的正常$k-1$染色，矛盾。

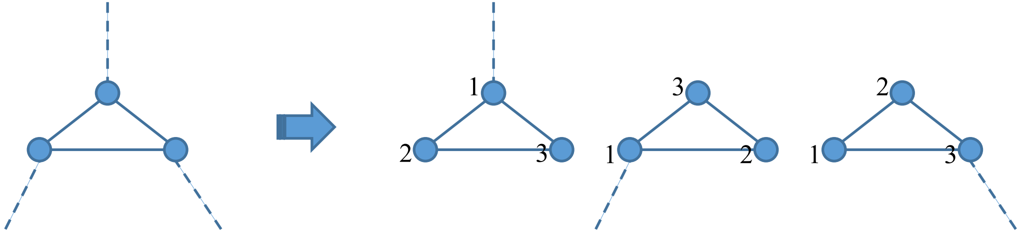
色临界图及其性质 (续)

- 定理6.2.1 色临界图的点割集不是团。

证明：

反证法：

1. 假设k临界图G的一个点割集S是团，$G-S$的连通分支记作 $G_1, G_2, \ldots, G_n$。
2. G是k临界图 $\Rightarrow G[S \cup V(G_i)]$是$k-1$色可染的
   （你能完成后续的证明吗？）
3. S是团 $\Rightarrow$ 在这每种$k-1$染色中两两顶点色不同
4. 通过色的置换，可使这n种$k-1$染色都为S中的顶点按同样的方式染色 $\Rightarrow$ 这n种染色合起来构成G的$k-1$染色 $\Rightarrow$ 矛盾



色临界图及其性质 (续)

- 推论6.2.1 每个色临界图都是块。

证明：你能自己证明吗？

- $v = 1$或2时：显然成立。
- $v \geq 3$时：如果不是块 $\Rightarrow$
  - 不连通 $\Rightarrow$ 色临界图不连通 $\Rightarrow$ 矛盾
  - 有割点 $\Rightarrow$ 点割集只含一个顶点 $\Rightarrow$ 点割集是团 $\Rightarrow$ 与定理6.2.1矛盾

色临界图及其性质 (续)

- 推论6.2.2 色临界图若有2-点割集$\{u, v\}$，则u和v不相邻。

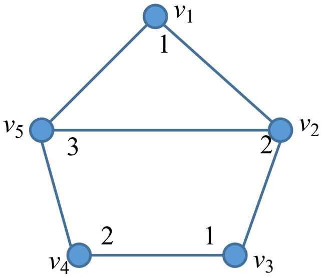
证明：

否则2-点割集是团，与定理6.2.1矛盾。

色数的界与正常染色算法

- 贪心算法1
  - 假设可以染的色为1, 2, …
  - 对于顶点$v_1, v_2, \ldots, v_n$按任意序染色
    - 总是选择不冲突的下标最小的色

- 最多需要多少种颜色？
- 推论：$\chi \leq \Delta + 1$



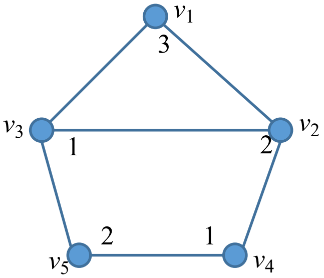
色数的界与正常染色算法 (续)

- 贪心算法2
  - 假设可以染的色为1, 2, …
  - 对于顶点$v_1, v_2, \ldots, v_n$按度降序染色
    - 总是选择不冲突的下标最小的色

- 推论：

$$\chi \le \max_i \min\{d(v_i) + 1, i\} = 1 + \max_i \min\{d(v_i), i - 1\} \le 1 + \Delta$$

  - 初期i较小，后期$d(v_i)$较小，因此总体较小。



色数的界与正常染色算法 (续)

- 定理6.2.4 除完全图和奇圈以外的连通简单图G满足$\chi \leq \Delta$。

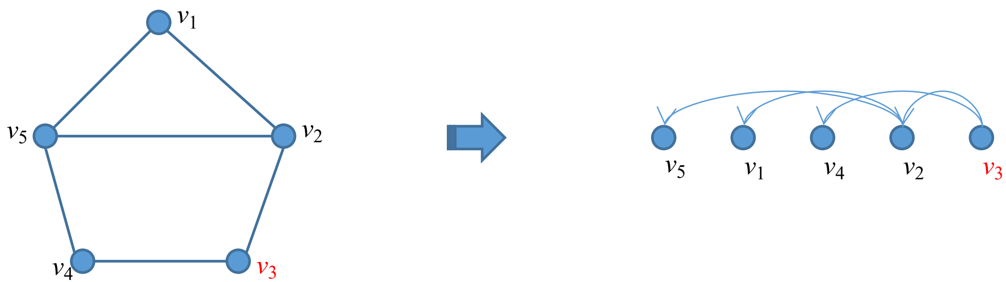
证明：

- $\Delta = 0$时：G是K_1，即完全图，不考虑。
- $\Delta = 1$时：G是K_2，即完全图，不考虑。
- $\Delta = 2$时：G有两种可能：
  - G是奇圈：不考虑。
  - G是偶圈或路：即二分图，$\chi = 2 = \Delta$，成立。
- $\Delta \geq 3$时：证明的目标是找到一种顶点的序，使得每个顶点在它之前最多只有$\Delta - 1$个邻点，于是只要选择不冲突的下标最小的色，最终可得正常Δ染色，即$\chi \leq \Delta$。
  - 实际上已知最多只有Δ个邻点，只需设法再扣除一个点即可。

色数的界与正常染色算法 (续)

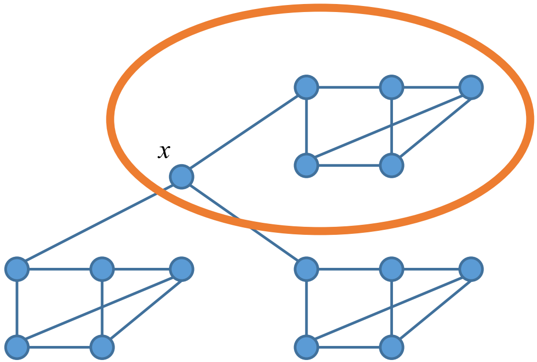
- $\Delta \geq 3$时：
  - 如果G不是Δ-正则的：存在度小于Δ的一点v_n，从v_n开始做广度优先遍历，将顶点按照遍历访问的逆序排序，则：
    - v_n以外的每个顶点在其之后必有至少1个邻点，因此在其之前至多有$\Delta - 1$个邻点。
    - v_n本身至多有$\Delta - 1$个邻点。

    $\Rightarrow$ 得证。



色数的界与正常染色算法 (续)

- $\Delta \geq 3$时：
  - 如果G是Δ-正则的，且有割点x：
    1. 在每个$\{x\}$-lobe中，$d(x) < \Delta$。
    2. 对每个$\{x\}$-lobe，与之前类似，从x开始广度优先遍历并按访问逆序排序顶点，可得该$\{x\}$-lobe的一个正常Δ染色。
    3. 通过色的置换，使得上述每个染色给x染的色相同，则合并这些染色构成G的正常Δ染色，得证。



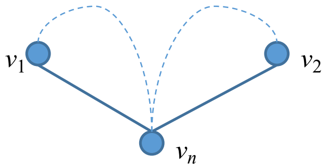
色数的界与正常染色算法 (续)

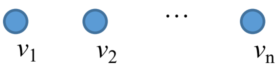
- $\Delta \geq 3$时：
  - 如果G是Δ-正则的，且无割点，即G是2-连通的。如果G中存在顶点v_n满足：
    - 有两个邻点v_1和v_2。
    - v_1和v_2不相邻。
    - $G - \{v_1, v_2\}$是连通的。
  - 那么：
    1. 对$G - \{v_1, v_2\}$，$d(v_n) < \Delta \Rightarrow$ 与之前类似，从v_n开始广度优先遍历并按访问逆序排序顶点。
    2. 将v_1和v_2放到最前，并染相同的色（因为不相邻）。则：

    » v_n以外的每个顶点在其之后必有至少1个邻点，因此在其之前至多有$\Delta - 1$个邻点。

    » v_n之前虽有Δ个邻点，但v_1和v_2的色相同，因此不必动用额外的色。

    $\Rightarrow$ 得证

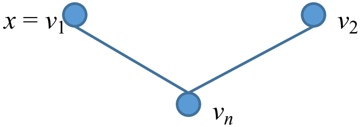




色数的界与正常染色算法 (续)

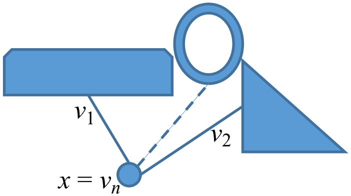
- 欲证能找到v_n满足：
  - 有两个邻点v_1和v_2。
  - v_1和v_2不相邻。
  - $G-\{v_1, v_2\}$是连通的。
- 任取一点x，由G是2-连通的 $\Rightarrow G-x$是连通的，则：
  - 如果$\kappa(G-x)\geq 2$：
    - 令v_1为x。
    - G不是完全图且是连通的正则图 $\Rightarrow$ 每个顶点都与至少一个点不相邻且距离为2 $\Rightarrow$ 与v_1不相邻且距离为2的点记作v_2
    - v_1和v_2的公共邻点记作v_n。

    $\Rightarrow$ 可验证满足上述三个条件



  - 如果$\kappa(G-x)=1$：
    - 令v_n为x。
    - $\kappa(G-x)=1 \Rightarrow G-x$有不止一个块。
    - G没有割点 $\Rightarrow G-x$的每个“叶块”内都有v_n的邻点，取两个分别记作v_1和v_2。
    - G是$\Delta\geq 3$-正则的 $\Rightarrow v_n$还有别的邻点。

    $\Rightarrow$ 可验证满足上述三个条件



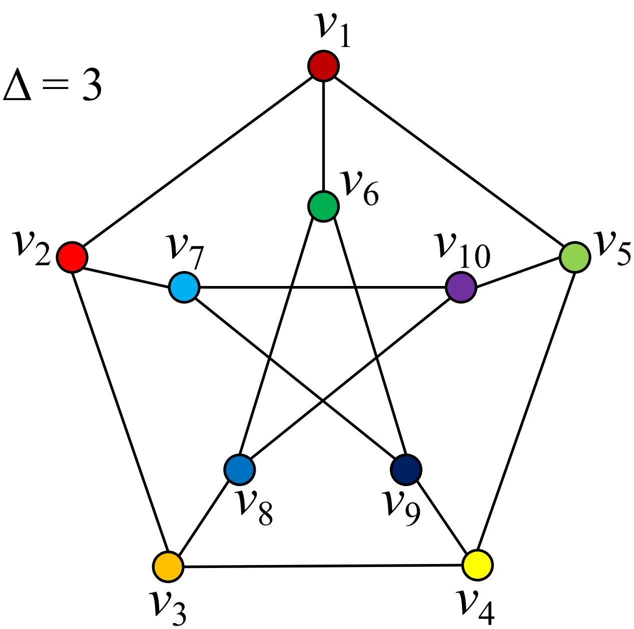
色数的界与正常染色算法 (续)

- 例6.2.1 求彼得森图的色数。

解：

- 有奇圈 $\Rightarrow \chi \geq 3$
- 不是奇圈也不是完全图 $\Rightarrow \chi \leq \Delta = 3$

$\Rightarrow \chi = 3$



色数的界与正常染色算法 (续)

- 对于$k > 2$，判断一个图是否k色可染是NP完全问题。
- 一般意义上的求色数更是NP难问题。
- 甚至，找一个近似比为常数的近似算法同样困难。
  - For all $\varepsilon > 0$, approximating the chromatic number within $n^{1-\varepsilon}$ is NP-hard.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/ff/Sudoku-by-L2G-20050714.svg/500px-Sudoku-by-L2G-20050714.svg.png

书面作业

高随祥《图论与网络流理论》

- 练习6.7
- 练习6.16
- 练习6.26
- 练习6.35