离散数学-第八次作业

Problem 1

设 $P(n)$ 是命题：$n! < n^n$，其中 n 是大于 1 的整数。

a) 命题 $P(2)$ 是什么？

b) 证明 $P(2)$ 为真，完成基础步骤的证明。

c) 归纳假设是什么？

d) 在归纳步骤中你需要证明什么？

e) 完成归纳步骤。

f) 解释为什么只要 n 是一个大于 1 的整数，则上述步骤就可以证明不等式为真。

答案：

a) $2! < 2^2$。

b) 命题 $2! < 2^2$ 的不等式左侧值为 2，右侧值为 4，$2 < 4$，故 $P(2)$ 为真。

c) 归纳假设是：对任意大于 1 的整数 k，$P(k)$ 为真。

d) 在归纳步骤中，需要证明对任意大于 1 的整数 k，如果 $P(k)$ 为真，那么 $P(k+1)$ 为真。

e) 由归纳假设，对任意大于 1 的整数 k，$k! < k^k$。不等式两边同时乘以 $k+1$，得 $(k+1)! < (k+1)k^k$。而 $(k+1)k^k < (k+1)(k+1)^k = (k+1)^{k+1}$，因此 $P(k+1)$ 成立。

f) 因为我们已经证明了 $P(2)$，又证明了对于大于 1 的整数 k，$\forall k(P(k) \to P(k+1))$，由正整数集合的良序性公理（或数学归纳法），结论可以推广到所有大于 1 的正整数。

Problem 2

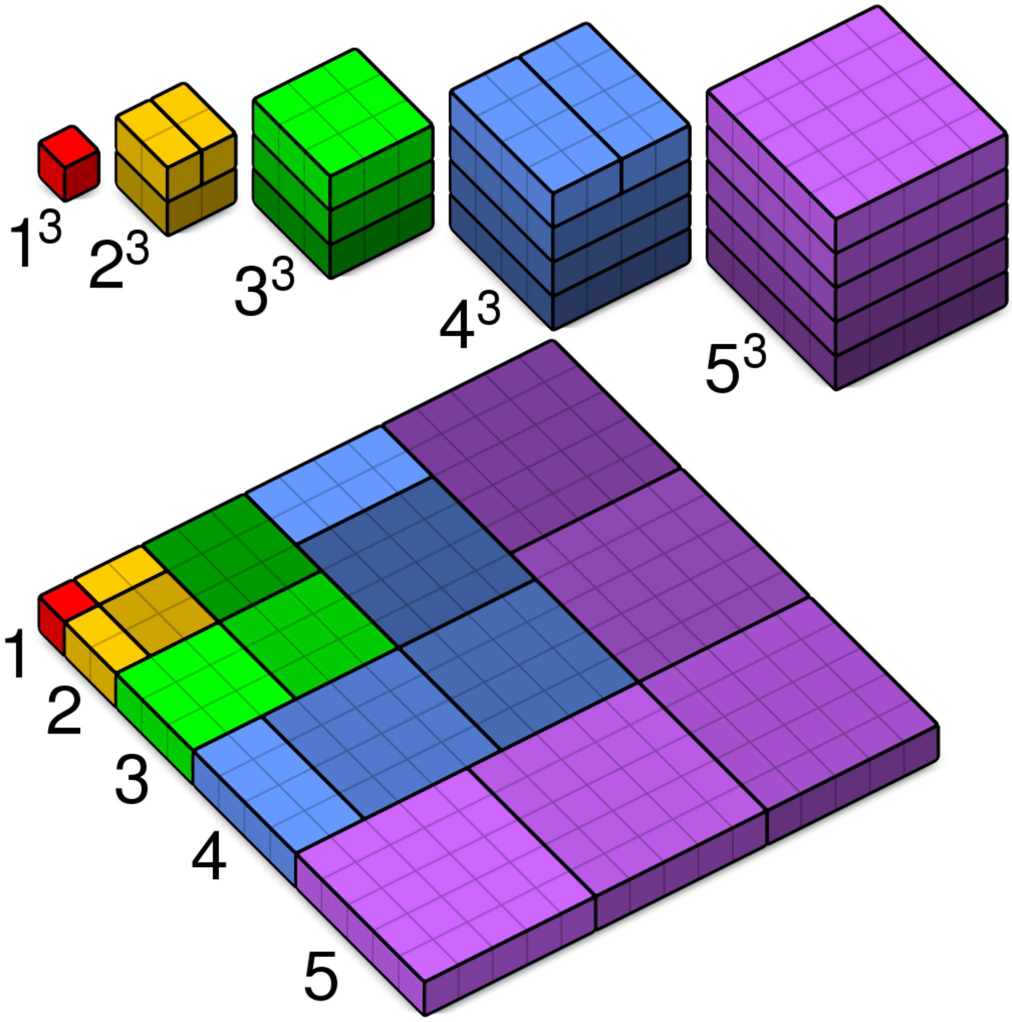
用数学归纳法证明平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域.

答案: 证明: 设 $P(n)$ 表示命题: 平面上过同一点的 n 条直线将平面分为 $2n$ 个区域. 基础步骤: $P(1)$ 为真，因为 1 条直线可以将平面分为 2 个区域. 归纳步骤: 归纳假设: $P(k)$ 为真, 过同一点的 k 条直线将平面分为 2 个区域. 在归纳假设的情形的基础上, 添加一条过交点的直线, 恰将原来的 2 个区域分为了 4 个区域. 因此共有 $2k+2=2(k+1)$ 个区域. $P(k+1)$ 为真. 归纳步骤完成. 基础步骤和归纳步骤均已完成, 根据数学归纳法知, 命题成立.

Problem 3

证明 (亦可不用数学归纳法):

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2.$$



答案:

Problem 4

正整数 n 的拆分是把 n 写成正整数之和的方式. 例如，$7=3+2+1+1$ 是 7 的拆分. 设 P_m 等于 m 的不同分拆的数目, 其中和式里项的顺序无关紧要, 并设 $P_{m,n}$ 是用不超过 n 的正整数之和来表示 m 的不同方式数.

a) 证明: $P_{m,m} = P_m$.

b) 证明: 下面的 $P_{m,n}$ 的递归定义是正确的.

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{m = 1} \\ 1 & \text{n = 1} \\ P_{m,m} & \text{m < n} \\ 1 + P_{m,m-1} & \text{m = n > 1} \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & \text{m > n > 1} \end{cases}$$

c) 用这个递归定义求出 5 和 6 的拆分数。

答案:

a) m 无法用于大于 m 的数参与分拆，因此 $Pm, m = Pm$.

b) 证明: 对定义逐条证明: $m = 1$ 时，只有一种拆分方法，即 1 本身，因此 $P_{1,n} = 1$. $n = 1$ 时，只有一种拆分方法，即拆成 m 个 1 的和，因此 $P_{m,1} = 1$. $m < n$ 时，由 (a) 中证明可知，此时 n 的大小不影响结果，因此等于 $P_{m,m}$. $m = n = 1$ 时，存在 $m = (m-1) + 1$ 这种拆分方式，以及其他 $P_{m,m-1}$ 种拆分方式，因此等于 $1 + P_{m,m-1}$. $m > n > 1$ 时，存在不含 n 的拆分 ($P_{m,n-1}$) 和包含 n 的拆分 ($P_{m-n,n}$) 两种情况，因此等于 $Pm, n-1 + Pm-n, n$.

c) $P_5 = 7, P_6 = 11$.

Problem 5

给出下述集合的递归定义:

a) 正偶数集合.

b) 3 的正整数次幂的集合.

c) 整系数多项式的集合.

答案:

a) 正偶数集合 S 可以定义为: 基础步骤: $2 \in S$. 递归步骤: 若 $x \in S$, 则 $x + 2 \in S$.

b) 3 的正整数次幂的集合 S 可以定义为: 基础步骤: $3 \in S$. 递归步骤: 若 $x \in S$，则 $3x \in S$.

c) 整系数多项式的集合 S 可以定义为: 基础步骤: S 包含整数集合及所有可能的变元: $Z \subset S$ $\{x1, x2, x3, \dots\} \subset S$. 递归步骤: 若 $a, b, c \in S$，则 $ab + c \in S$.

Problem 6

a) 对于表示十进制数字的非空字符串 s, 给出计算 s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义.

b) 用结构归纳法证明 $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$. (其中 $s \cdot t$ 表示位串 s 和位串 t 的连接)

答案:

a) s 中最小数字的函数 $m(s)$ 的递归定义: 基础步骤: $m(a) = a$ (a 为表示一个数字的单个字符) 递归步骤: $m(s \cdot a) = min(m(s), a)$.

b) 证明: 设命题 $P(st)$ 为: 当 s, t 均为十进制数字的非空字符串时, $m(s \cdot t) = \min(m(s), m(t))$. 基础步骤: $m(\lambda \cdot a) = a = \min(m(\lambda), m(a))$ (a 为表示一个数字的单个字符, λ 表示空串) 因此 $P(\lambda a)$ 为真, 基础步骤完成. 归纳步骤: 归纳假设: 假定命题 $P(xy)$ 为真, 即 $m(x \cdot y) = \min(m(x), m(y))$ 成立. 根据 m 函数的递归定义:

$$m(x \cdot y \cdot a) = \min(m(x), m(y), a) = \min(m(x), m(y \cdot a))$$

综上, 当 $P(xy)$ 为真时, 可推出 $P(xya)$ 为真, 由结构归纳法, 命题得证.

Problem 7

求出阿克曼函数值 $A(3,4)$。阿克曼函数的定义为:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1 & \text{m} = 0 \\ A(m-1, 1) & \text{m} > 0, \text{n} = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{m} > 0, \text{n} > 0 \end{cases}$$

答案: $A(3,4) = 125$

Problem 8

证明算术基本定理. 即: 每个大于 1 的自然数, 要么本身就是质数, 要么可以写为 2 个或以上的质数的积. 并且这些质因子按大小排列之后, 写法仅有一种方式.

答案: 利用强归纳可证, 注意不要遗漏唯一性的证明.