# 离散数学第九次作业-基本计数原理

## Problem 1

长度为 $n(n > 5)$ 且以 000 开始或以 111 结尾的二进制串有多少个?

**答案:** $2^{n-3} + 2^{n-3} - 2^{n-6} = 15 * 2^{n-6}$

## Problem 2

从 1000 到 9999 之间, 包含多少个正整数

a) 被 9 整除? 1000

b) 被 5 或 7 整除? 2829

c) 是偶数? 4500

d) 不被 5 也不被 7 整除? 6171

e) 有不同的十进制数字? 4536

f) 被 5 整除但不被 7 整除? 1543

g) 不被 3 整除? 6000

h) 被 5 和 7 整除? 257

## Problem 3

给定 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 $A$ 的有多少个子集, 满足其中所有元素的乘积能被 10 整除?

**答案:** 必须要有 5, 和 (2 或 4). 共 12 种.

## Problem 4

长度为 12 且不包含 “11” 子串的二进制串有多少个?

**答案:** 由题知二进制串最多包含 6 个 “1”, 且包含 $k$ 个 “1” 的二进制串的集合 $A_k$ 的元素个数为 $|A_k| = \mathcal{C}(13-k, 13-2k)$, 则结果为

$$\mathcal{C}(13,13) + \mathcal{C}(12,11) + \mathcal{C}(11,9) + \mathcal{C}(10,7) + \mathcal{C}(9,5) + \mathcal{C}(8,3) + \mathcal{C}(7,1) = 377$$

## Problem 5

设 $x_1$、$x_2$、$x_3$、$x_4$、$x_5$ 和 $x_6$ 是正整数, 方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6<32$ 有多少个解?

**答案:** $\mathcal{C}(31,6)=736281($ 考虑 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7=32)$

## Problem 6

考虑用红, 蓝两种颜色着色 $3\times3$ 的方格棋盘, 在允许图形翻转和旋转的情况下, 一共有多少种不同的着色方案?

**答案:** 102 种.

## Problem 7

由一个正 $n$ 边形的顶点构成的三角形有多少个如果正 $n$ 边形的边不能是构成三角形的边, 这样的三角形又有多少个?

**答案:** 从 n 边中选三点的情况有 $\mathcal{C}(n,3)=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ 种.
如果三角形的边是正 n 边形的边有两种情况, 第一种是有一条边是正 $n$ 边形的边, 这种情况有 $(n-4)\times n$ 种, 第二种是有两条边是正 $n$ 边形的边, 这种情况有 $n$ 种,
则三角形的边不是正 n 边形的边的情况有 $\mathcal{C}(n,3)-(n-4)n-n=\frac{n(n-4)(n-5)}{6}$ 种.

## Problem 8

使用数学归纳法证明容斥原理.

**答案:** 基本步骤: $n=2$, 显然公式成立
归纳步骤: 假设 $n=k$ 时成立.
当 $n=k+1$ 时,
公式可写成 $|A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k\cup A_{k+1}|=|A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k|+|A_{k+1}|-|(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k)\cap A_{k+1}|$ (式 1)
$|(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k)\cap A_{k+1}|=|(A_1\cap A_{k+1})\cup(A_2\cap A_{k+1})\cup ...\cup(A_k\cap A_{k+1})|$
$=\sum_{i=1}^{k}|A_i\cap A_{k+1}|-\sum_{1\leq i\leq j\leq k}|A_i\cap A_j\cap A_{k+1}|+...+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{k+1}|$ (式 2)
$|A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k|=\sum_{i=1}^{k}|A_i|-\sum_{1\leq i\leq j\leq k}|A_i\cap A_j|+...+(-1)^{k+1}|A_1\cap A_2\cap ...\cap A_k|$ (式 3)
将式 2, 式 3 带入式 1 中,
$|A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k\cup A_{k+1}|=\sum_{i=1}^{k+1}|A_i|-\sum_{1\leq i\leq j\leq k+1}|A_i\cap A_j|+...+(-1)^{k}|A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{k+1}|$
得证.

## Problem 9

有 6 个集合, 如果知道其中任 3 个集合都是不相交的, 根据容斥原理写出关于这 6 个集合并集元素个数的显式公式.

**答案:**

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = \\
&\quad |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| + |A_6| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_1 \cap A_6| \\
&\quad - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_6| \\
&\quad - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_6| \\
&\quad - |A_4 \cap A_5| - |A_4 \cap A_6| \\
&\quad - |A_5 \cap A_6|
\end{aligned}
$$

## Problem 10

考虑一个 $N \times N$ 网格, 其中的每一个单元格可以取值 $+1$ 或 $-1$. 我们称这种网格为二进制网格 *(Binary grid)*. 任何行的行乘积 *(row product)* 都被定义为该单行中所有元素的乘积. 同样, 一列的列乘积 *(column product)* 被定义为该单个列中所有元素的乘积. 如果 $N$ 行的行乘积中, 有且只有一个结果为 $-1$, 而 $N$ 列的列乘积中, 有且只有一个结果为 $-1$, 则该 $N \times N$ 的二元网格称为魔术网格. 换句话说, 魔术网格要求其他 $N-1$ 个行乘积全部为 $+1$, 其他 $N-1$ 个列乘积应也全部为 $+1$. 试计算所有 $N \times N$ 的网格中, 魔术网格的数量.

**答案:** 1) 确定要使其行列乘积为 $-1$ 的行和列. 可以有 $n$ 种方式选择行, 对于选定的每一行, 可以有 $n$ 种方式选择列: 总共 $n^2$ 种方式.

2) 现在, 随机填充剩余的 $(n-1)^2$ 个单元格 (都不属于先前选择的行或列). 这可以有 $2^{(n-1)^2}$ 种方式.

3) 我们填充所选行和列的单元格. 请注意, 在第 2 步之后, 我们得到一个 $N \times N$ 的网格, 所有行和列乘积都已知. 此时, 填充第一步选中的行和列. 显然, 对于该行和列中的元素, 是可以唯一地确定要插入的数字的符号. 换句话说, 只有一种填充方式.

根据基本的计数原理, 魔方格子总数为 $n^2 \times 2^{(n-1)^2}$.