关系的闭包、等价关系

离散数学一集合论

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 关系：笛卡尔积的子集
- 关系的运算
  - 集合运算；复合运算；逆
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质
  - 自反，反自反，对称，反对称，传递
  - 图特征；矩阵特征
- 函数的定义
- 子集的像
- 单射与满射
- 反函数
- 函数的复合
- 函数加法与乘法

提要

- 闭包的定义
- 闭包的计算公式
- 传递闭包的Warshall算法
- 等价关系
- 等价类
- 划分

“闭包”

一个对象

橘黄色圈满足：

１． 是圆的（性质）

２． 包含所给对象

３． 如果有个绿色圆也能包含该对象，就一定也能包含这个橘黄圈

青色框满足：

１． 是正方形的（性质）

２． 包含所给对象

３． 如果有个红色正方形也能包含该对象，就一定也能包含这个青色框

关系的闭包：一般概念

- 设R是集合A上的关系，P是给定的某种性质（如：自反、对称、传递），满足下列所有条件的关系R_1称为R的关于P的闭包:
  - $R \subseteq R_1$
  - R_1 满足性质P
  - 如果存在集合A上的关系R'，R'满足性质P 并包含R，则$R_1 \subseteq R'$
- 自反闭包r(R)、对称闭包s(R)、传递闭包t(R)

自反闭包的定义

- 设 R的是集合A上的关系，其自反闭包$r(R)$也是A上的关系，且满足：
  - $r(R)$满足自反性；
  - $R \subseteq r(R)$;
  - 对A上的任意关系R', 若R'也满足自反性，且也包含R，则$r(R) \subseteq R'$
- 例子
  - 令A={1,2,3}, R={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2)}。则$r(R)$={(1,1), (1,3), (2,3), (3,2), (2,2), (3,3)}。

自反闭包的计算公式

- $r(R) = R \cup I_A$, I_A是集合A上的恒等关系

  (证明所给表达式满足自反闭包定义中的三条性质)

  1. 对任意 $x \in A$, $(x,x) \in I_A$, 因此, $(x,x) \in R \cup I_A$
  2. $R \subseteq R \cup I_A$
  3. 设 R' 集合A 上的自反关系，且$R \subseteq R'$, 则对任意 $(x,y) \in R \cup I_A$, 有$(x,y) \in R$, 或者 $(x,y) \in I_A$。对两种情况，均有 $(x,y) \in R'$, 因此, $R \cup I_A \subseteq R'$

对称闭包的计算公式

- $s(R) = R\cup R^{-1}$, 这里R^{-1}是R的逆关系
  - $s(R)$是对称的。对任意 $x,y\in A$, 如果 $(x,y)\in s(R)$, 则$(x,y)\in R$ 或者$(x,y)\in R^{-1}$, 即$(y,x)\in R^{-1}$, 或者 $(y,x)\in R$, $\therefore$ $(y,x)\in s(R)$
  - $R\subseteq s(R)$
  - 设R'是集合A上的对称关系, 并且$R\subseteq R'$, 则对任意$(x,y)\in s(R)$, 有$(x,y)\in R$, 或者$(x,y)\in R^{-1}$.
    - 情况1: $(x,y)\in R$, 则 $(x,y)\in R'$
    - 情况2: $(x,y)\in R^{-1}$, 则 $(y,x)\in R$, 于是 $(y,x)\in R'$。根据R'的对称性：$(x,y)\in R'$

  因此, $s(R)\subseteq R'$

连通关系

- R是集合A上的关系
- 定义集合A上的“R连通”关系R^*如下：
  - 对任意$a,b\in A$, $a\,R^*b$ **当且仅当**：存在$t_1,t_2\ldots t_k\in A$(k是正整数)，满足$(a,t_1)\in R$; $(t_1,t_2)\in R$;…; $(t_k,b)\in R$。(可以表述为：从a到b之间存在长度至少为1的通路)
  - 显然：对任意$a,b\in A$, $a\,R^*b$ 当且仅当存在某个正整数k, 使得aR^kb。
  - 于是：$R^* = R^1\cup R^2\cup R^3\cup\ldots R^i\cup\ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$

传递闭包

$t(R)=R^*$

1. 若 $(x,y)\in R^*, (y,z)\in R^*$, 则有$s_1,s_2,\ldots,s_j$ 以及 $t_1,t_2,\ldots,t_k$,

   满足: $(x,s_1),\Lambda\ ,(s_j,y),(y,t_1),\Lambda\ ,(t_k,z)\in R$,

   因此, $(x,z)\in R^*$.

2. $R\subseteq R^*$

3. 设 R' 是集合A上的传递关系, 且包含R。若$(x,y)\in R^*$,

   则有 $t_1,t_2,\ldots,t_k$, 满足: $(x,t_1),\Lambda\ ,(t_k,y)\in R$,

   于是 $(x,t_1),(t_1,t_2),\Lambda\ ,(t_k,y)\in R'$

   根据R'的传递性，$(x,y)\in R'$.

利用公式证明闭包相等

- 证明：$r(s(R)) = s(r(R))$
  - $r(s(R))$ $= r(R \cup R^{-1})$
    $= (R \cup R^{-1}) \cup I_A$
    $= (R \cup I_A) \cup (R^{-1} \cup I_A^{-1})$ (注意：$I_A = I_A^{-1}$, 并用等幂率)
    $= (R \cup I_A) \cup (R \cup I_A)^{-1}$
    $= s(R \cup I_A)$
    $= s(r(R))$

注意：$r(s(R))$一般省略为$rs(R)$

用定义证明有关闭包的性质

证明： $st(R) \subseteq ts(R)$

注意：左边是$t(R)$的对称闭包，根据定义，我们只需证明：

（1） $ts(R)$满足对称性；(2)$t(R) \subseteq ts(R)$

证明(2)，考虑到左边是R的传递闭包，我们只需要证明：

(i) $R \subseteq ts(R)$ (显然)，(ii) $ts(R)$满足传递性(显然)。

证明(1)：对任意$(x, y) \in ts(R), \exists t_1, t_2, \ldots, t_k$，满足

$(x, t_1) \in s(R), (t_1, t_2) \in s(R), \ldots, (t_k, y) \in s(R)$，而$s(R)$满足

对称性，$\therefore (y, t_k) \in s(R), \ldots, (t_2, t_1) \in s(R), (t_1, x) \in s(R)$，

于是：$(y, x) \in ts(R)$，$\therefore ts(R)$满足对称性。

注意：传递关系的对称闭包不一定是传递的。比如：{(1,3)}

关于P的闭包是否存在性？

- 令R是A上的关系
  - 若存在，则必是唯一的。
  - 存在性：
    - 令：　$R' = \bigcap\{X \mid R \subseteq X \wedge X\text{具有性质P}\}$
    - $A \times A$（自反、对称、传递）保证了R'存在
    - 易证：R' 具有性质 P
- 闭包计算可行性尚待讨论
  - 自反闭包和对称闭包显然存在
  - 传递闭包理论上存在

有限集合上的传递闭包

假如$|A|=n$, 则A上的关系R的传递闭包是：

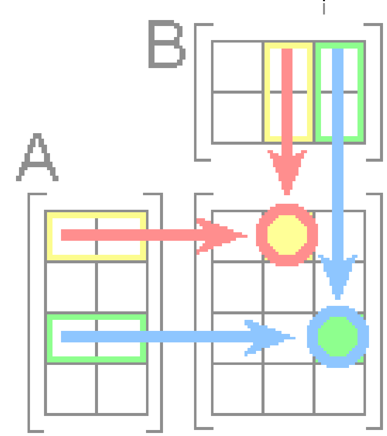
$$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n} R^i = R\cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$$

上述公式和: $t(R)=R^*=\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$有何差别？

A 中只有 n 个不同的元素，如果在R中存在一条从a到b的长度至少为1的通路，那么存在一条长度不超过n的从a到b的通路。

若 xR^*y, 则存在某个自然数 k, $1\le k\le n$, 满足 xR^ky.

用矩阵乘法计算传递闭包



传递闭包：$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n$

$$\therefore \quad M_{t(R)} = M_R \vee M_R^2 \vee M_R^3 \vee \ldots \vee M_R^n$$

算法Tranclosure

$A := M_R$

$B := A$

For i:=2 to n

Begin

$A := A \odot M_R$

$B := B \vee A$

End.(B为M_{R^*})

n×n矩阵相乘，结果中每1项，要做(2n-1次)布尔运算(积与和)，总共需要计算n^2项。

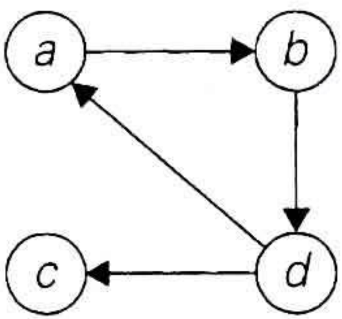
n×n矩阵相加,要做n^2次布尔运算(和)

本算法共进行n-1次矩阵乘和加。

总运算量$(n^2(2n-1)+n^2)(n-1)=2n^3(n-1)$

Warshall算法

- 算法实例：
  - (a) 为关系图，(b) 为关系矩阵A，(c) 为$t(A)$的关系矩阵



(a)

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(b)

$$T = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

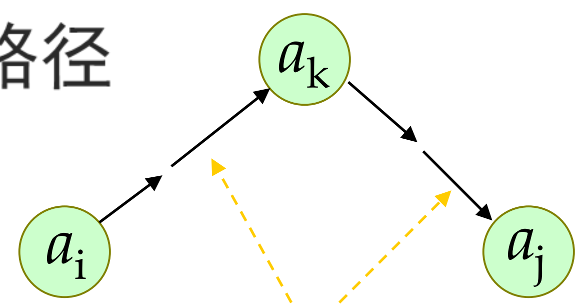
(c)

求传递闭包的Warshall算法

- Warshall算法通过关系图模型更容易理解：
  - 要确定传递闭包的关系矩阵中的每一项，对应于确定关系图中任意两顶点之间是否存在路径
  - 这实际上就是把传递闭包运算通过图模型转换为找路径的运算

求传递闭包的Warshall算法（续）

- Warshall算法高效的根源在于可以直接利用上一步计算结果中的有效信息简化当前步的计算过程
- 如图，上一轮计算已经产生了$a_i \to a_k$以及$a_k \to a_j$的路径，当新一轮计算加入a_k点作为中间点时，立即可知道存在$a_i \to a_k \to a_j$的路径



中间点，在集合$\{a_1,\ldots,a\ a_{k-1}\}$中

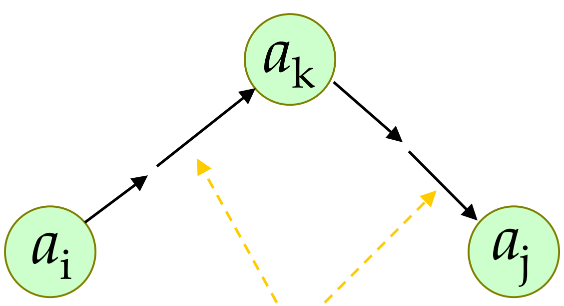
求传递闭包的Warshall算法（续）

不直接计算M_R的乘幂, Warshall算法迭代式地用W_{i-1}计算W_i

这里： 1. W_0即为R的关系矩阵, M_R。

2. 对$k=1,2,\ldots,n$, $W_k[i,j]=1$ 当且仅当 从a_i到a_j存在中间节点均在集合$\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$内的通路。

3. W_n即$M_{t(R)}$, 也就是所需的结果。



all interior vertices in $\{a_1,\ldots,a\ a_{k-1}\}$

$W_k[i,j]=1$ if and only if:
$W_{k-1}[i,j]=1$, or
$W_{k-1}[i,k]=1$ and $W_{k-1}[k,j]=1$

Warshall算法的过程

- $R^{(0)}$ 是原关系的关系矩阵
- $R^{(1)}$ 包含可以用第一个顶点作为中间点的路径信息

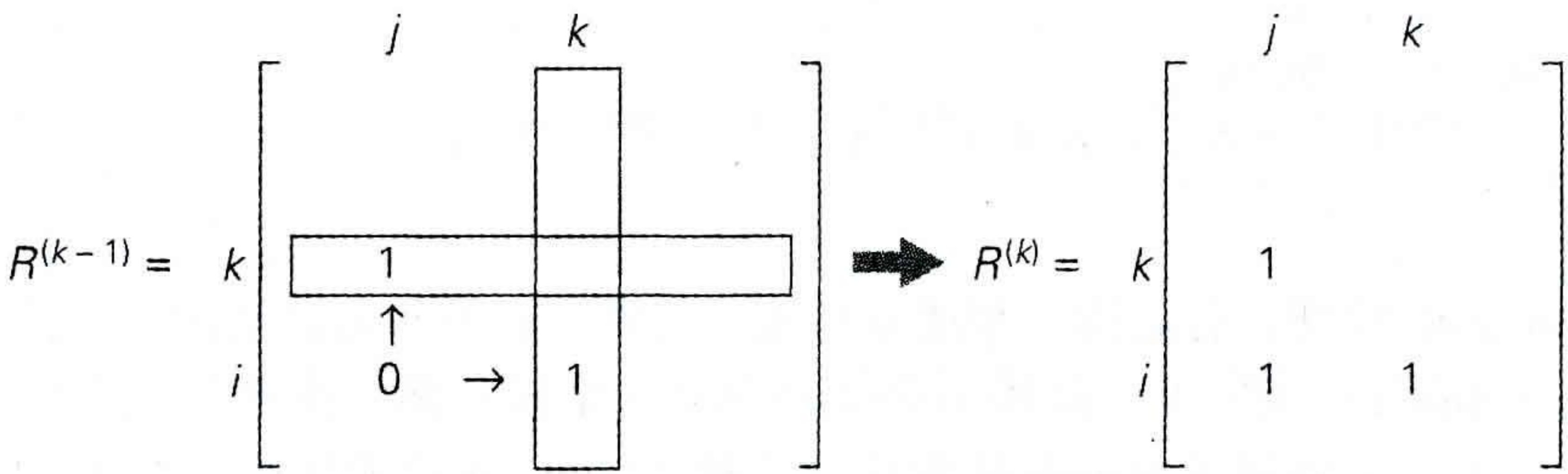
$$\vdots$$

- $R^{(n)}$ 即为可所有的顶点作为中间点寻找有向路径，所以$R^{(n)}$就待求的传递闭包
- Warshall算法的中心是可以通过$\boldsymbol{R}^{(k-1)}$来计算$\boldsymbol{R}^{(k)}$

Warshall算法的过程（续）

- 递推关系式：

$$R_{ij}^{(k)} = R_{ij}^{(k-1)} \vee (R_{ik}^{(k-1)} \wedge R_{kj}^{(k-1)})$$



Warshall算法的过程（续）

$$R^{(0)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

该矩阵反映了不包含中间顶点的路径，框起来的行和列用来计算$R^{(1)}$

$$R^{(1)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

该矩阵反映了包含编号不大于1的中间顶点（也就是a）的路径(有一条从d到b的新路径)框起来的行和列用来计算$R^{(2)}$

$$R^{(2)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

包含编号不大于2的中间顶点(也就是a, b)

$$R^{(3)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

包含编号不大于3的中间顶点a, b, c)的路径，没有新路径

$$R^{(4)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

包含编号不大于4的中间顶点(a, b, c, d)的路径.有五条新路径

Warshall算法过程

- ALGORITHM *WARSHALL* (M_R : n×n的0-1矩阵)
- 1. W := M_R
- 2. FOR k :=1 to n
-     FOR i :=1 to n
-         FOR j :=1 to n
-             $W[i, j] \leftarrow \underline{W[i, j] \vee (W[i, k] \wedge W[k, j])}$
- 3. Output W
- END OF ALGORITHM WARSHALL

这个语句在三重循环内，执行n^3次，每次执行2个布尔运算（和与积）

总运算量: $2n^3$

等价关系的定义

- 满足性质：自反、对称、传递。
- “等于”关系的推广
- 例子
  - 对3同余关系: $R\subseteq Z\times Z$， xRy 当且仅当 $\dfrac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - $R\subseteq N\times N$， xRy iff 存在正整数k,l，使得$x^k=y^l$。
    - 自反: 若x是任意自然数，当然$x^k=x^k$；
    - 对称：若有k,l, 使$x^k=y^l$；也就有l,k, 使$y^l=x^k$；
    - 传递：若有k,l, 使$x^k=y^l$；并有m, n, 使$y^n=z^m$；则有 $x^{kn}=z^{ml}$

等价类

- R是非空集合A上的等价关系，$\forall x \in$A，等价类$[x]_R=\{y \mid y\in \text{A} \wedge xRy\}$
- 每个等价类是A的一个非空子集。
- 例子：对3同余关系: $R\subseteq Z\times Z$， xRy 当且仅当 $\frac{|x-y|}{3}$ 是整数。
  - ３个等价类： $[0]=\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$;

    $[1]=\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$;

    $[2]=\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}$

等价类的代表元素

- 对于等价类$[x]_R=\{ y \mid y\in A \wedge xRy \}$，$x$称为这个等价类的代表元素.
- 其实，该等价类的每个元素都可以做代表元素：若xRy，则$[x]=[y]$
  - 证明：对任意元素t, 若$t\in[x]$, 则xRt, 根据R的对称性与传递性，且xRy, 可得yRt, 因此 $t\in[y]$, $\therefore [x]\subseteq[y]$; 同理可得$[y]\subseteq[x]$ 。

商集

- R是非空集合A上的等价关系，$\forall x \in A$，则其所有等价类的集合称为商集，A/R
- 集合$A=\{a_1,a_2, \ldots, a_n\}$上的恒等关系$I_A$是等价关系，商集$A/I_A=\{\{a_1\}, \{a_2\},\ldots, \{a_n\}\}$
- 定义自然数集的笛卡儿乘积上的关系R:

  (a, b)R(c,d) 当且仅当 a+d=b+c

  证明这是等价关系，并给出其商集.

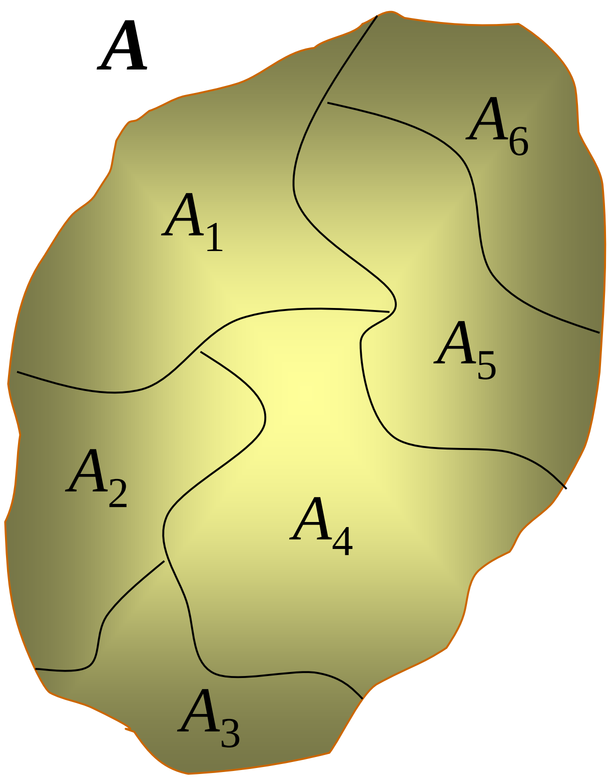
等价关系的一个例子

- R_1,R_2分别是集合X_1,X_2上的等价关系。定义$X_1\times X_2$上的关系S：

$$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2) \text{ 当且仅当 } x_1R_1y_1 \text{ 且 } x_2R_2y_2$$

- 证明：S是$X_1\times X_2$上的等价关系
  - [自反性] 对任意$(x,y)\in X_1\times X_2$, 由R_1,R_2满足自反性可知， $(x,x)\in R_1$, $(y,y)\in R_2$; $\therefore$ $(x,y)S(x,y)$; S自反。
  - [对称性] 假设$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2)$, 由S的定义以及R_1,R_2满足对称性可知： $(y_1,y_2)S\,(x_1,x_2)$; S对称。
  - [传递性] 假设$(x_1,x_2)S\,(y_1,y_2)$, 且$(y_1,y_2)S\,(z_1,z_2)$, 则$x_1R_1y_1$, $y_1R_1z_1$, $x_2R_2y_2$, $y_2R_2z_2$, 由R_1,R_2满足传递性可知：$x_1R_1z_1$, 且$x_2R_2z_2$, 于是：$(x_1,x_2)S\,(z_1,z_2)$; S传递。

集合的划分



集合A的 划分, π, 是A的一组非空子集的集合，即 $\pi\subseteq\rho(A)$, 且满足：

1. 对任意 $x\in A$, 存在某个 $A_i\in\pi$, 使得 $x\in A_i$.

$$\text{i.e. } \bigcup_i A_i = A$$

2. 对任意 $A_i, A_j\in\pi$, 如果 $i\neq j$, 则：

$$A_i \cap A_j = \phi$$

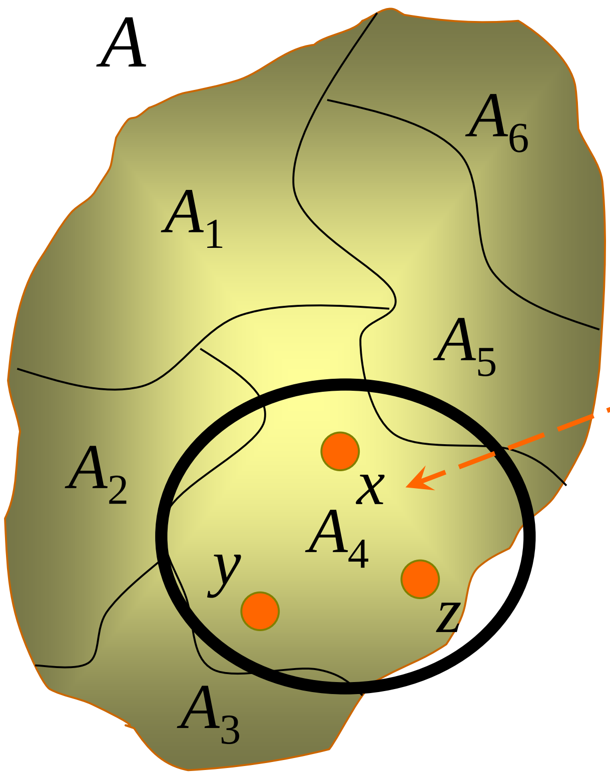
由等价关系定义的划分

- 假设R是集合A上的等价关系，给定$a\in A$, $R(a)$是由R 所诱导的等价类。
- $Q=\{R(x)|x\in A\}$是相应的商集。
- 容易证明，这样的商集即是A的一个划分：
  - 对任意 $a\in A$, $a\in R(\mathrm{a})$ (R 是自反的)
  - 对任意 $a,b\in A$
    - $(a,b)\in R$ 当且仅当 $R(a)=R(b)$, 同时
    - $(a,b)\notin R$ 当且仅当 $R(a)\cap R(b)=\varnothing$

商集即划分– 证明

- 不相等的等价类必然不相交。换句话说，有公共元素的任意两个等价类必然相等。
- 证明：
  - 假设$R(a)\cap R(b)\neq\varnothing$, 设$c$是一个公共元素。
  - 根据等价类的定义，$(a,c)\in R$, $(b,c)\in R$
  - 对任意$x\in R(a)$, $(a,x)\in R$, 由R的传递性和对称性，可得$(c,x)\in R$, 由此可知$(b,x)\in R$, 即$x\in R(b)$, $\therefore R(a)\subseteq R(b)$
  - 同理可得：$R(b)\subseteq R(a)$。因此: $R(a)=R(b)$

根据一个划分定义等价关系



给定 A 上一个划分，可以如下定义A 上的等价关系 R：

$\forall x,y \in A, (x,y) \in R$ 当且仅当:

x,y 属于该划分中的同一块。

显然，关系 R 满足自反性、对称性、传递性。因此：R 是等价关系。

利用等价类解题：

- 证明：

从1,2,...,2000中任取1001个数，其中必有两个数x,y，满足$x/y=2^k$。

(k为整数)。

想起鸽笼原理没？

等价关系与划分：一个例子-解

- 建立1000个集合，每个集合包括1至2000之间的一个奇数以及该奇数与2的k次幂的乘积，但最大不超过2000。可以证明这1000个集合的集合是集合{1,2,3,..., 2000}上的一个划分。注意任意两个1到2000之间的正整数x,y在同一划分块中当且仅当$x/y=2^k$。(k为整数)。
- 定义集合{1,2,3,..., 2000}上的一个关系R，任意x,y，xRy当且仅当$x/y=2^k$。易证这是一个等价关系。其商集即上面的划分。

小结

- 闭包的定义
- 闭包的计算公式
- 传递闭包的Warshall算法
- 等价关系，等价类
- 商集，划分

作业

- 见课程QQ群