离散数学第十五次作业-代数系统引论

Problem 1

设 S 为一 n 元集，

(1) S 上可以定义多少个不同的二元运算？

(2) 其中有多少个二元运算是可交换的？

(3) 其中有多少个二元运算是幂等的？

(4) 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的？

解：

(1) n^{n^2} 个；

(2) $n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 个；

(3) n^{n^2-n} 个；

(4) $n^{n^2}-n^{\frac{n(n+1)}{2}}-n^{n^2-n}+n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 个。

Problem 2

设 $A=\{0，1\}$，$S=A^A$，

(1) 试列出 S 中的所有元素；

(2) 给出 S 上函数复合运算的运算表，并指出单位元、零元和每一个可逆元素的逆元。

解：

(1)

$f_1 = \{< 0, 0 >, < 1, 0 >\}$

$f_2 = \{< 0, 0 >, < 1, 1 >\}$

$f_3 = \{< 0, 1 >, < 1, 0 >\}$

$f_4 = \{< 0, 1 >, < 1, 1 >\}$

(2)

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_1	f_4	f_4
f_2	f_1	f_2	f_3	f_4
f_3	f_1	f_3	f_2	f_4
f_4	f_1	f_4	f_1	f_4

单位元为 f_2，没有零元（但有右零元），f_2 和 f_3 有逆元，都是自己。

Problem 3

设 $A = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ 为实数集的三元子集, 能否确定 a, b, c 的值使得

(1) A 对普通加法封闭?

(2) A 对普通乘法封闭?

解：

(1) 不能。假设存在满足题意的集合 A，那么 A 中必然存在绝对值最大的非零元素，不妨假设是 a，那么 $|a + a| = 2|a| > |a|$ 比 A 中绝对值最大的元素还大，因此不属于 A，矛盾。故不存在满足题意的集合。

(2) 能，$A = \{-1, 0, 1\}$。

Problem 4

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

(1) 整数集合 $\mathbb{Z}$ 和普通的减法运算。

(2) 非零整数集合 $\mathbb{Z}^*$ 和普通的除法运算。

(3) 全体 $n \times n$ 实数矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算，其中 $n \geq 2$。

(4) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算，其中 $n \geq 2$。

(5) 正实数集合 $\mathbb{R}^+$ 和 $\circ$ 运算，其中 $\circ$ 运算定义为：

$$\forall a，b \in \mathbb{R}^+，a \circ b = ab - a - b$$

(6) $\mathbb{A} = \{a_1，a_2，\dots，a_n\}$，$n \geq 2$。$\circ$ 运算定义如下：

$$\forall a，b \in \mathbb{A}，a \circ b = b$$

(7) $\mathbb{S} = \{0，1\}$ 关于普通加法和乘法运算。

(8) $\mathbb{S} = \{x | x = 2^n，n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算。

(9) $\mathbb{S} = \{x | x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算。

解：

(1) 封闭。

(2) 不封闭。

(3) 加法，乘法都封闭。

(4) 加法不封闭，乘法封闭。

(5) 不封闭。

(6) 封闭。

(7) 加法不封闭，乘法封闭。

(8) 加法不封闭，乘法封闭。

(9) 加法封闭，乘法不封闭。

Problem 5

$\mathbb{R}$ 为实数集，定义以下 4 个函数 f_1，f_2，f_3，f_4。$\forall x$，$y \in \mathbb{R}$ 有

$f_1((x, y)) = x \cdot y$，　$f_2((x, y)) = x - y$，

$f_3((x, y)) = \max(x, y)$，　$f_4((x, y)) = |x - y|$

(1) 判断上述二元运算是否为可交换、可结合、幂等的。

(2) 求上述二元运算的单位元、零元以及每一个可逆元素的逆元。

(3) 设 $A = \{a, b\}$，试给出 A 上一个不可交换、也不可结合的二元运算。

解：

(1)

	可交换	可结合	幂等
f_1	$\surd$	$\surd$	$\times$
f_2	$\times$	$\times$	$\times$
f_3	$\surd$	$\surd$	$\surd$
f_4	$\surd$	$\times$	$\times$

(2)

	单位元	零元	逆元
f_1	1	0	$1/x(x \neq 0)$
f_2	$\times$	$\times$	$\times$
f_3	$\times$	$\times$	$\times$
f_4	$\times$	$\times$	$\times$

(3)

$\circ$	a	b
a	b	b
b	a	a

Problem 6

设 $S = \{1, 2, ..., 10\}$，问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $< S, * >$? 如果能构成代数系统则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律，并求 $*$ 运算的单位元和零元。

(1) $x * y = gcd(x, y)$，$gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数。

(2) $x * y = lcm(x，y)$，$lcm(x，y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数。

(3) $x * y =$ 大于等于 x 和 y 的最小整数。

(4) $x * y =$ 质数 p 的个数，其中 $x \leq p \leq y$。

解：

	代数系统	交换律	结合律	单位元	零元
(1)	√	√	√	×	1
(2)	×				
(3)	√	√	√	1	10
(4)	×				

Problem 7

下面各集合都是 $\mathbb{N}$ 的子集，判断它们能否构成代数系统 $V =< \mathbb{N}，+ >$ 的子代数：

(1) $\{x|x \in \mathbb{N} \land x$ 的某次幂可以被 16 整除 $\}$

(2) $\{x|x \in \mathbb{N} \land y \in \mathbb{N} \land x$的某次幂可以被$y$整除$\}$

(3) $\{x|x \in \mathbb{N} \land x$ 与 5 互素 $\}$

(4) $\{x|x \in \mathbb{N} \land x$ 是 30 的因子 $\}$

(5) $\{x|x \in \mathbb{N} \land x$ 是 30 的倍数 $\}$

解:

(1) 能。

(2) 能。

(3) 不能。

(4) 不能。

(5) 能。

Problem 8

设 $S = \{a, b, c, d\}$，定义 S 上的一个二元运算 $\circ$ 如下表所示：

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

1. 请指出代数系统 $V =< S, \circ >$ 的单位元和零元，并尝试给出 V 的所有子代数；
2. 如果保持 S 不变，同时要求代数系统有唯一单位元 a，运算 $\circ$ 满足结合律且每个元素在运算 $\circ$ 下都有逆元。若把将 b, c, d 三个元素任意交换后相同的运算表当作同一种情况（同构），请画出所有满足条件的 $\circ$ 的运算表。

解：

(1) V 的单位元为 a，没有零元，V 的子代数有 $\{a\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{a, d\}$，$\{a, b, c, d\}$ 以及 V 上的加法运算，共五个。

(2) 实际上还有四阶循环群一种，一个满足题意的运算表为

$\circ$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

注：旧版的题目中未给出结合性条件，导致满足条件的运算表很多。若部分班级已完成这部分习题，只要给出的运算表的第一行第一列和答案相同，同时每行每列都至少有一个 a（即逆元）的都可以算对。