离散数学-图论作业 8 树的基本概念

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

计算下列各题:

1) 有多少非同构的 5 个顶点的树?

2) 饱和碳氢化合物 C_4H_{10} 有多少不同的同分异构体?

3) K_4 有多少个不同的生成树?（假设各条边互不相同）

答案:

1) 3　　2) 2　　3) 16 （6 选 3=20，减去 4 个不连通的）

Problem 2

证明或反驳：若 G 是最大度大于等于 k 的树，则 G 至少有 k 个顶点度数为 1。

答案: 反证法: 若 G 中度为 1 的顶点个数 s 小于 k, 则 $2\epsilon = \sum_{v_i \in V(G)} deg(v_i) \geq 2[|G|-(s+1)]+k+s \geq 2|G|-1$, 与 $\epsilon = |G|-1$ 矛盾

Problem 3

证明或反驳：所有边数不超过图 G 的最小顶点度的树都与图 G 的某个子图同构。

答案: 对树的边数 k 进行归纳:

$k=1$ 时，T 是一个孤立点，G 中一定有至少一个点

$k=2$ 时，T 是 $K2$，G 一定有 $K2$ 子图

假设对于边数为 $k-1(k \geq 3)$ 的每个树 T'，以及最小度至少为 $k-2$ 的每个图 H，T' 同构 H 的某个子图。

设 v 是 T 的一个叶子节点，u 是 T 中与 v 邻接的顶点，则 $T-v$ 是边数为 $k-1$ 的树，由归纳假设知，$T-v$ 一定同构 G 的某个子图 F。

设 u' 是与 T 中 u 对应的 F 中的顶点，由于 u' 度数大于等于于 $k-1$ 因此 u' 一定连接到 G 中某个不属于 F 的顶点 w，因此 T 同构于于 F 加上顶点 w 和 wu' 这个子图

Problem 4

标记树是其中每个顶点都指定了标记的树。当在两个标记树之间存在保持顶点标记的同构时，就称这两个标记树是同构的。
用集合 $\{0,1,2\}$ 里不同的数来标记三个顶点的、非同构的标记树有多少种？用集合 $\{0,1,2,3\}$ 里不同的数来标记四个顶点的、非同构的标记树有多少种？

答案： 三顶点树的只有 S_2 一种结构 (即 $K_{1,2}$)，两个树不同构仅当度为 2 的点标记不同，共有 3 个不同的标记树；

四顶点树有 S_3 和 P_4 两种情况，S_3 有 4 个不同的标记树，P_4 下 4 的全排列中有且仅有互为逆序的在同构下等价，共 $\frac{A(4)}{2}=12$ 个不同的标记树，共计 16 个不同的标记树。

Problem 5

令 $D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 为一正整数序列，且 $n\geq 2$。

a) 若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

b) 反过来，试证明：若 D 满足上式，则存在一个树 T，使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。

答案：

a) 树 T 的边的数目为 $n-1$。由握手定理可知 $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$

b) 对 n 进行归纳。

基础步骤： 当 $n=2$ 时该命题显然成立。

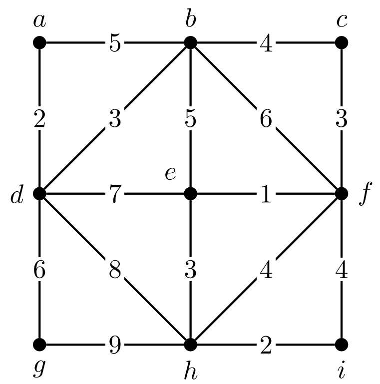
递归步骤： 假设对于 $2\leq n=k-1$ 时该命题成立。现证明该命题对 $n=k$ 时也成立。D 中必存在 $d_i=1$（否则 $\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n$）；亦必有 $d_j>1$（否则 $\sum_{i=1}^{n} d_i < 2(n-1)$）。考虑 $D'=(D-\{d_i,d_j\})\,\{d_j-1\}$，易见 D' 满足归纳假设条件，即存在一颗树 T 的各个顶点的度数序列恰是 D'。今在 T 中添加一个节点，并将其连接到对应于 d_j-1 的节点上。易见 D 恰好是这个新的树的顶点的度数序列。

离散数学-图论作业 8 生成树

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

分别用普林（Prim）算法和克鲁斯卡尔（Kruskal）算法求所给带权图的最小生成树。(按顺序写出选取的边及总的权值即可)



答案： 最小生成树权值应为 24。

Prim 选边序列：$(a, d), (d, b), (b, c), (c, f), (f, e), (e, h), (h, i), (d, g)$

Kruskal 选边序列：$(e, f), (a, d), (h, i), (b, d), (c, f), (e, h), (b, c), (d, g)$

Problem 2

证明或反驳：每条边权重均不相同的带权图

1) 有唯一的最小生成树。

2) 有唯一的“次小生成树”满足，存在一最小生成树的权值小于等于该树，且其他生成树的权值均大于等于该树。

答案:

1) 反证，记不同的最小生成树 T, T' 边集按权重从小到大排序为 $T = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}, T' = \{e'_1, e'_2, ..., e'_{n-1}\}$。

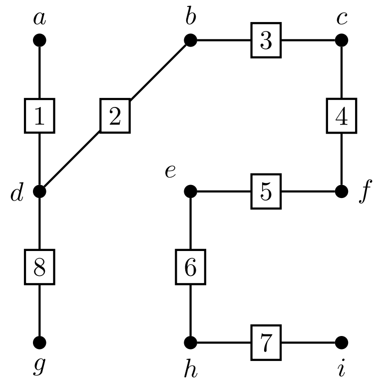


Figure 1: *

Prim

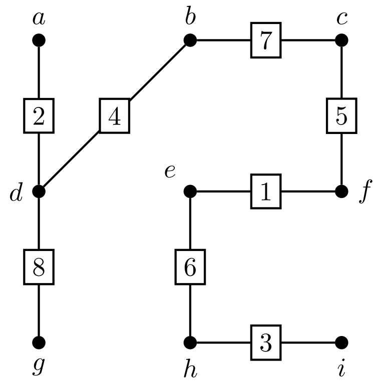


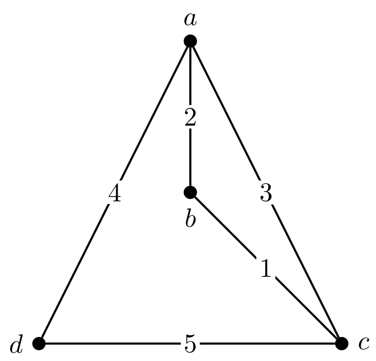
Figure 2: *

Kruskal

因为 $T \neq T'$，必存在最小的 $k < n$ 使得 $e_k \neq e'_k$，不妨令 $w(e'_k) < w(e_k)$，将 e'_k 加入 T，得到的 $T + e'_k$ 中有一个包含 e'_k 的圈 C，因为 $\{e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e'_k\} = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_k\} \subseteq T'$ 无环，所以存在 $t > k.e_t \in C$，删去 e_t 得到 G 的另一个生成树 $T + e'_k - e_t$，$w(T + e'_k - e_t) = w(T) + w(e'_k) - w(e_t) < w(T) + w(e'_k) - w(e_k) < w(T)$，与 T 是 G 上的最小生成树矛盾。

2) 反驳，如下图

最小生成树 $\{(a,b),(b,c),(a,d)\}$，次小生成树 $\{(b,c),(a,c),(a,d)\}$ 和 $\{(a,b),(b,c),(c,d)\}$



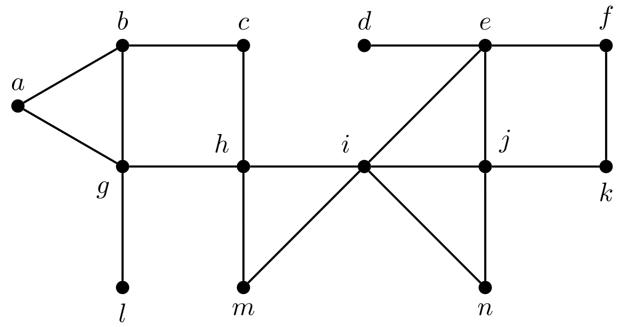
Problem 3

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路. 试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。

答案: 不妨假设该回路 C 是顶点不重复的简单回路，设 $e = uv$。以下使用反证法来证明 e 不在任何最小生成树中，假设 T 是包含 e 的最小生成树。$T - \{e\}$ 必含两个连通分支，设为 $T1, T2$。$C - \{e\}$ 是图 G 中的 uv-通路，其中必有一边满足其两个端点 x,y 分别在 $T1, T2$ 中，设其为 e'。$T' = T - \{e\}\ \{e'\}$，显然 T' 是生成树。因 e 的权重大于 e' 的权重，T' 的权重比 T 更小，矛盾。所以，e 不在任何最小生成树中。

Problem 4

用深度优先搜索和广度优先搜索来构造下图的生成树。选择 a 作为这个生成树的根，并假定顶点都以字母顺序来排序。



答案： DFS：$\to a, a \to b, b \to c, c \to h, h \to g, g \to l, h \to i, i \to e, e \to d, e \to f, f \to k, k \to j, j \to n, i \to m$

BFS：$\to a, a \to b, a \to g, b \to c, g \to h, g \to l, h \to m, h \to i, i \to e, i \to j, i \to n, e \to d, e \to f, j \to k$

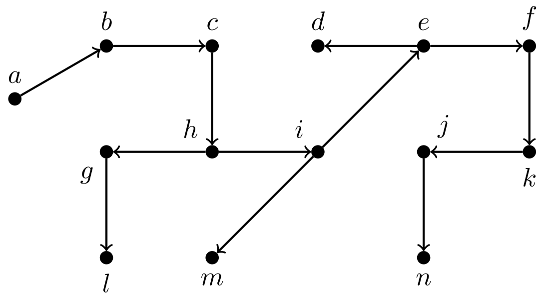


Figure 3: *

DFS

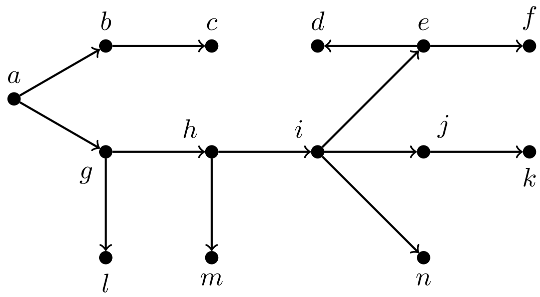


Figure 4: *

BFS