关系及其运算

离散数学—集合论

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 集合的基本概念
  - 集合及其描述
  - 集合相等、子集关系
  - 幂集、笛卡尔乘积
- 集合运算
  - 交并补、广义交、广义并
  - 集合恒等式
  - 集合相关命题的证明方式

提要

- 关系的定义
- 关系的表示
- 关系的运算
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质

有序对（Ordered pair）

- (a, b)是集合$\{\{a\}, \{a, b\}\}$的简写
- 次序的体现
  - $(x,y)=(u,v)$ iff $x=u$ 且 $y=v$

若$\{\{x\},\{x,y\}\}=\{\{u\},\{u,v\}\}$，则$\{x\}=\{u\}$或$\{x\}= \{u,v\}$, 因此$x=u$。

假设$y\neq v$

(1) 若$x=y$, 左边$=\{\{x\}\}$, 而$v\neq x$, $\therefore$右边$\neq\{\{x\}\}$;

(2) 若$x\neq y$,则必有$\{x,y\}= \{u,v\}$, 但y既非u,又非v, 矛盾。

笛卡尔乘积（Cartesian Product）

- 对任意集合A, B
  笛卡尔积 $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

- 例：$\{1,2,3\} \times \{a,b\} = \{(1, a), (3, a) , (3, a),$
  $(1, b), (2, b) , (3, b) \}$

- 若A，B是有限集合， $|A \times B| = |A| \times |B|$

例题

- $A=\{1,2\}$, $\rho(A)\times A=?$

- $|A|=m$, $|B|=n$, $|A\times B|=?$

（二元）关系的定义

- 若A, B是集合,从A到B的一个关系是$A\times B$的一个子集.
  - 集合, 可以是空集
  - 集合的元素是有序对

- 关系意味着什么？
  - 两类对象之间建立起来的联系！

从A到B的二元关系

- 笛卡尔乘积的子集
  - “从A到B的关系”R；$R\subseteq A\times B$
  - 若$A=B$： 称为“集合A上的（二元）关系”
- 例子
  - 常用的数学关系：不大于、整除、集合包含等
  - 网页链接、文章引用、相互认识

特殊的二元关系

- 集合A上的空关系$\varnothing$: 空关系即空集
- 全域关系 E_A: $E_A = \{ (x, y) \mid x, y \in A \}$
- 恒等关系 I_A : $I_A = \{(x, x) \mid x \in A \}$

函数是一种特殊的关系

- 函数 $f: A\to B$

- $R=\{ (x, f(x)) \mid x\in A \}$是一个从$A$到$B$的一个关系

关系的表示

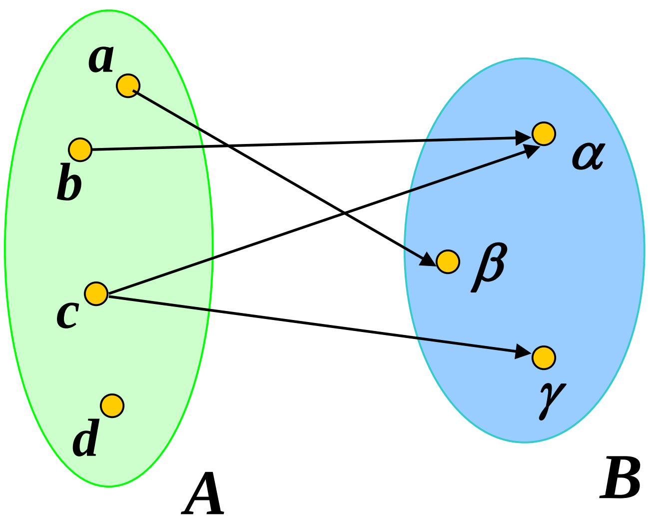
假设$A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ // 假设为有限集合

- 集合表示: $R_1=\{(a, \beta), (b, \alpha), (c, \alpha),(c, \gamma)\}$

0-1矩阵

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

有向图



二元关系和有向图

关系 $R \subseteq A \times B$ ⟷ 有向图 (V_D, E_D)

*A*和*B*是集合

有序对集合

$(x,y) \in R$

若$A=B$, R中存在序列：(x_1,x_2), (x_2,x_3),…,(x_{n-1},x_n)

顶点集 $V_D = A \cup B$

有向边集E_D

从x到y有一条边

图D中存在从 x_1 到 x_n 的长度为 n-1的通路

关系的运算（1）

- 关系是集合, 所有的集合运算对关系均适用
  - 例子:
    - 自然数集合上: “$<$” $\cup$ “$=$” 等同于 “$\leq$”
    - 自然数集合上: “$\leq$” $\cap$ “$\geq$”等同于“$=$”
    - 自然数集合上: “$<$” $\cap$ “$>$”等同于$\varnothing$

关系的运算（2）

- 与定义域和值域有关的运算
  - $\mathrm{dom}\ R = \{x \mid \exists y\ (x,y) \in R\}$
  - $\mathrm{ran}\ R = \{y \mid \exists x\ (x,y) \in R\}$
  - $\mathrm{fld}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$
  - $R \uparrow A = \{(x,y) \mid x \in A \wedge xRy\} \subseteq R$
  - $R[A] = \{y \mid \exists x\ (x \in A \wedge (x,y) \in R)\} = \mathrm{ran}(R \uparrow A) \subseteq \mathrm{ran} R$
- 例：$A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,5,6\}$, A上关系R：

  $R=\{(1,2), (1,4),(2,3),(3,5),(5,2)\}$,

  求 $R\uparrow B$、$R[B]$、$R(1)$和$R(2)$

关系的运算（3）

- 逆运算
  - $R^{-1} = \{ (x, y) \mid (y,x)\in \mathrm{R}\}$
    - 注意:如果R是从A到B的关系,则R^{-1}是从B到A的。
  - $(R^{-1})^{-1} = R$
  - 例子：$(R_1\cup R_2)^{-1} = R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$
    - $(x, y) \in (R_1\cup R_2)^{-1} \Leftrightarrow (y, x)\in(R_1\cup R_2)$
    - $\Leftrightarrow (y, x)\in R_1$ 或 $(y, x)\in R_2$
    - $\Leftrightarrow (x, y)\in R_1^{-1}$ 或 $(x, y)\in R_2^{-1}$

关系的运算（4）

- 关系的复合（合成, Composition）

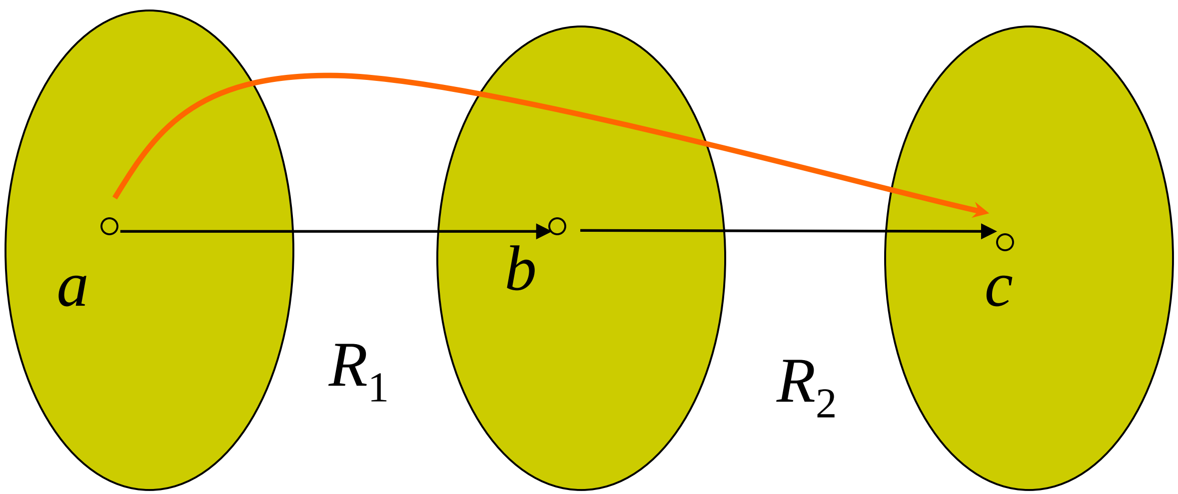
  设 $R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$,

  R_1与R_2的复合（合成）, 记为 $R_2\circ R_1$, 定义如下：

  $R_2\circ R_1=\{(a, c)\in A\times C \mid \exists b\in B\ ((a, b)\in R_1\wedge(b, c)\in R_2)\}$

复合关系的图示

- $(a, c) \in R_2 \circ R_1$ 当且仅当 $a \in A$, $c \in C$, 且存在$b \in B$, 使得$(a, b) \in R_1$, $(b,c) \in R_2$



关系的复合运算：举例

- 设$A=\{a, b, c, d\}$, R_1, R_2为A上的关系，其中：

  $R_1 = \{ (a, a), (a, b), (b, d)\}$

  $R_2 = \{(a, d), (b, c), (b, d), (c, b)\}$

  则：

  $R_2 \circ R_1 = \{(a, d), (a, c), (a, d)\}$

  $R_1 \circ R_2 = \{(c, d)\}$

  $R_1^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d)\}$

关系的复合运算的性质（1）

- 结合律
  - 给定$R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq B\times C$, $R_3 \subseteq C\times D$, 则：

$$(R_3 \circ R_2) \circ R_1 = R_3 \circ (R_2 \circ R_1)$$

- 证明左右两个集合相等.

关系的复合运算的性质（2）

- 复合关系的逆关系
  - 给定$R_1 \subseteq A \times B$, $R_2 \subseteq B \times C$, 则：

$$(R_2 \circ R_1)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$$

- 同样，证明左右两个集合相等
  - $(x, y) \in (R_2 \circ R_1)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow$

$$\exists t \in B \ ((y, t) \in R_1 \land (t, x) \in R_2) \Leftrightarrow$$

$$\exists t \in B \ ((t, y) \in R_1^{-1} \land (x, t) \in R_2^{-1}) \Leftrightarrow$$

$$(x, y) \in R_2^{-1} \circ R_1^{-1}$$

关系的复合运算的性质（3）

- 对集合并运算满足分配律
  - 给定$F\subseteq A\times B$, $G\subseteq B\times C$, $H\subseteq B\times C$, 则：

    $(G\cup H)\circ F = (G\circ F)\cup(H\circ F)$
- 对集合交运算：$(G\cap H)\circ F \subseteq (G\circ F)\cap(H\circ F)$
  - 注意：等号不成立。

    $A=\{a\}$, $B=\{s,t\}$, $C=\{b\}$;

    $F=\{(a,s),(a,t)\}$, $G=\{(s,b)\}$, $H=\{(t,b)\}$;

    $G\cap H=\varnothing$, $(G\circ F)\cap(H\circ F)=\{(a,b)\}$

0-1 矩阵运算

- 令0-1矩阵$M_1=[a_{ij}],M_2=[b_{ij}]$:
  - $C=M_1 \wedge M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=b_{ij}=1$
  - $C=M_1 \vee M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $a_{ij}=1$或$b_{ij}=1$
- 令r×s矩阵$M_1=[a_{ij}]$；s×t矩阵$M_2=[b_{ij}]$:
  - $C=M_1 \otimes M_2$: $c_{ij}=1$ iff. $\exists k(a_{ik}=1 \wedge b_{kj}=1)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

关系运算的矩阵法（1）

- 命题

$$M_{R_1 \cup R_2} = M_{R_1} \vee M_{R_2}$$

$$M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \otimes M_{R_2}$$

证明:

令$R_1: X \to Y; R_2 : Y \to Z;$

令$\mathrm{A} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1}$, $\mathrm{B} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}$, $\mathrm{C} = \mathrm{M}_{\mathrm{R2 \circ R1}}$, $\mathrm{D} = \mathrm{M}_{\mathrm{R}_1} \otimes \mathrm{M}_{\mathrm{R}_2}$有

$$c_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, z_j \rangle \in R_2 \circ R_1 \Leftrightarrow \exists y_k \in Y(\langle x_i, y_k \rangle \in R_1 \wedge \langle y_k, z_j \rangle \in R_2)$$

$$\Leftrightarrow a_{ik} = 1 \wedge b_{kj} = 1 \Leftrightarrow d_{ij} = 1$$

For $n \geq 2$, and R a relation on a finite set A, we have

$$M_{R^n} = M_R \otimes M_R \otimes \Lambda \otimes M_R \quad (n \text{ factors})$$

关系的性质：自反性 reflexivity

- 集合A上的关系 R 是:
  - 自反的 reflexive：定义为：对所有的 $a\in A$, $(a,a)\in R$
  - 反自反的 irreflexive：定义为：对所有的$a\in A$, $(a,a)\notin R$

注意区分"非"与"反"

- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1), (1,3), (2,2), (2,1), (3,3)\}$ 是自反的
  - $\{(1,2), (2,3), (3,1)\}$ 是反自反的
  - $\{(1,2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$ 既不是自反的，也不是反自反的

自反性与恒等关系

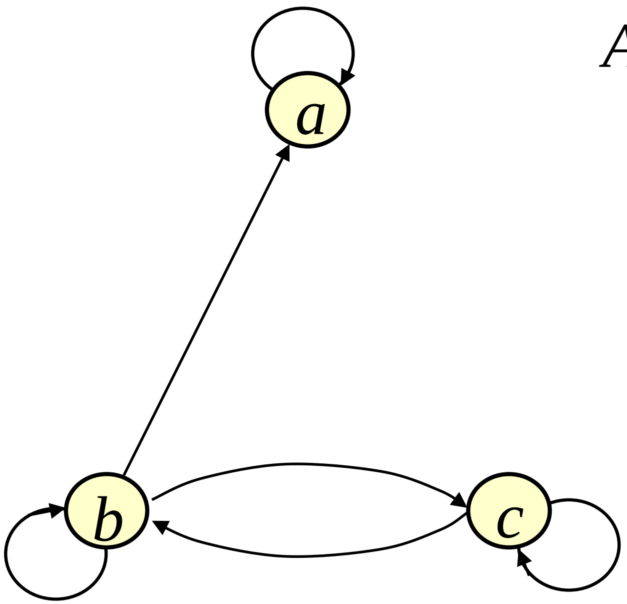
- R 是 A 上的自反关系 $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$,

  这里I_A是集合A上的恒等关系,即: $I_A=\{(a,a) \mid a \in A\}$

  直接根据定义证明:

  - $\Rightarrow$ 只需证明：对任意(a,b)，若$(a,b) \in I_A$, 则$(a,b) \in R$
  - $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的a, 若$a \in A$, 则$(a,a) \in R$

自反关系的有向图和0-1矩阵



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

关系的性质：对称性 Symmetry

- 集合A上的关系R是:
  - 对称的 symmetric：定义为：若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$
  - 反对称的 anti-~：定义为：若$(a,b)\in R$ 且$(b,a)\in R$，则$a=b$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(3,3)\}$ 是对称的
  - $\{(1,2),(2,3),(2,2),(3,1)\}$ 是反对称的

理解对称性

- 关系R满足对称性：对任意(a,b)，若 $(a,b)\in R$, 则 $(b,a)\in R$

  关系R是对称的 $\Leftrightarrow \forall <a,b>(<a,b>\in R \Rightarrow <b,a>\in R)$

- 注意：$\varnothing$是对称关系。

- 反对称并不是对称的否定:

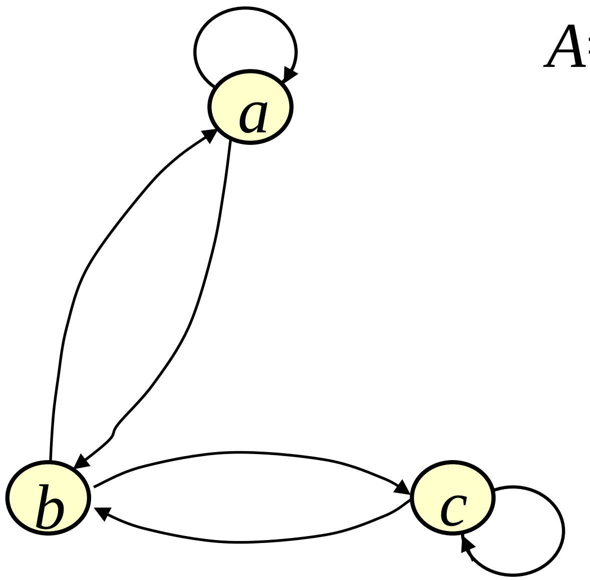
  (令：$A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$)

  - $\{(1,1),(2,2)\}$ 既是对称的，也是反对称的
  - $\varnothing$是对称关系，也是反对称关系。

对称性与逆关系

- R 是集合A上的对称关系 $\Leftrightarrow R^{-1}=R$
  - $\Rightarrow$ 证明一个集合等式 $R^{-1}=R$
    - 若$(a,b)\in R^{-1}$, 则$(b,a)\in R$, 由R的对称性可知$(a,b)\in R$, 因此：$R^{-1}\subseteq R$; 同理可得：$R\subseteq R^{-1}$;
  - $\Leftarrow$ 只需证明：对任意的(a,b) 若$(a,b)\in R$, 则$(b,a)\in R$

对称关系的有向图和0-1矩阵



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

关系的性质：传递性 transitivity

- 集合A上的关系R是
  - 传递的 transitive: 若 $(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 则 $(a,c)\in R$
- 设 $A=\{1,2,3\}$, $R\subseteq A\times A$
  - $\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 传递的
  - $\{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ 是非传递的
  - $\{(1,3)\}$?
  - $\varnothing$?

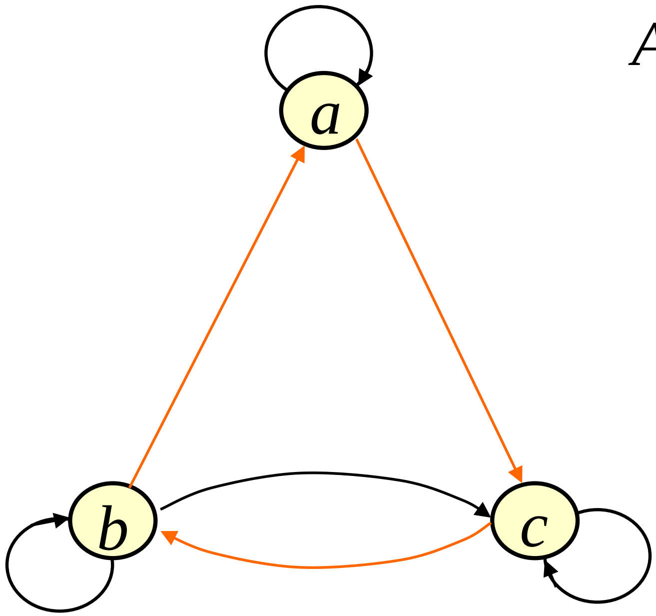
关系R是传递关系 $\Leftrightarrow \forall(a,b,c)(((a,b)\in R\wedge(b,c)\in R)\Rightarrow(a,c)\in R)$

传递性与关系的乘幂

- 关系的复合(乘)运算满足结合律，可以用 R^n 表示

  $R\circ R\circ\ldots\circ R$ (n是正整数)
- 命题：$(a,b)\in R^n$ 当且仅当：存在$t_1,t_2,\ldots,t_{n-1}\in A$, 满足：$(a,t_1),(t_1,t_2),\ldots,(t_{n-2},t_{n-1}),(t_{n-1},b)\in R$。
  - 对n>=1用数学归纳法：n=1, trivial. 奠基n=2,直接由关系复合的定义可得；归纳基于：$R^n=R^{n-1}\circ R$
- 集合A上的关系R是传递关系 $\Leftrightarrow R^2\subseteq R$
  - 必要性：$\Rightarrow$任取$(a,b)\in R^2$,根据上述命题以及R的传递性可得$(a,b)\in R$
  - 充分性：$\Leftarrow$ 若$(a,b)\in R$, $(b,c)\in R$, 则$(a,c)\in R^2$, 由$R^2\subseteq R$可得：$(a,c)\in R$，则 R是传递关系

传递关系的有向图和0-1矩阵



$A=\{a,b,c\}$

$$M_R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

一些常用关系的性质

	$=$	$\leq$	$<$	$\mid$	$\equiv_3$	$\varnothing$	E
自反	✓	✓	✗	✓	✓	✗	✓
反自反	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗
对称	✓	✗	✗	✗	✓	✓	✓
反对称	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗
传递	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

关系运算与性质的保持

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cap R_2$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_1 \cup R_2$	✓	✓	✓	✗	✗
$R_1 \circ R_2$	✓	✗	✗	✗	✗

习题举例一

下列关系是否自反的、对称的、反对称的或可传递的？关系S为：$r_1 \leqslant |r_2|$ $(r_1, r_2 \in R)$ 时

解：s是自反的，因为对任意的$r \in R$，有$r \leqslant |r|$。

s不是对称的，如$-1 \leqslant |3|$，但$3 > |-1|$。

s不是反对称的，如$-3 \leqslant |2|$，$2 \leqslant |-3|$，但$-3 \neq 2$。

s不是可传递的，$100 \leqslant |-101|$，$-101 \leqslant |2|$，但$100 > |2|$

Example 7.2

设关系 $R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 2,2\rangle\}$, $S=\{\langle 4,2\rangle,\langle 2,5\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 3,5\rangle\}$. 求复合关系 $R\circ S$, $S\circ R$, $R\circ R$, $R\circ R\circ R$.

解:

$$R\circ S=\{\langle 1,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 2,5\rangle\},$$

$$S\circ R=\{\langle 4,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,4\rangle\},$$

$$R\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\},$$

$$R\circ R\circ R=(R\circ R)\circ R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}.$$

练习

设 R 为 A 上的关系, 证明

1. R 在 A 上自反, 当且仅当 $I_A \subseteq R$.
2. R 在 A 上反自反, 当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$.
3. R 在 A 上传递, 当且仅当 $R \circ R \subseteq R$.

证: ① 必要性. 任取 $\langle x, x\rangle \in I_A$, 如果 R 在 A 上自反, 必有

$$\langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R,$$

从而 $I_A \subseteq R$.

充分性. 当 $I_A \subseteq R$ 时, 任取 $x \in A$, 有

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in R,$$

因此 R 在 A 上是自反的.

证:　② $\boxed{R \text{ 是反自反的} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to \langle x, x\rangle \notin R) \Leftrightarrow M_R \text{ 主对角元全为 } 0.}$

必要性. (反证法) 设 R 在 A 上反自反, 但 $R \cap I_A \neq \varnothing$, 必存在 $\langle x, y\rangle \in R \cap I_A$, 则

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle \in R \cap I_A &\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \in I_A \\ &\Rightarrow \langle x, y\rangle \in R \wedge (x = y) \\ &\Rightarrow \langle x, x\rangle \in R.\end{aligned}$$

这与 R 是反自反的相矛盾.

充分性. 设 $R \cap I_A = \varnothing$, 任取 $x \in A$, 则

$$x \in A \Rightarrow \langle x, x\rangle \in I_A \Rightarrow \langle x, x\rangle \notin R.$$

证: ③ (必要性) 设 R 在 A 上是传递的. 任取 $\langle x,\ y\rangle \in R \circ R$, 有

$$\langle x,\ y\rangle \in R \circ R \Rightarrow (\exists t)(\langle x, t\rangle \in R \wedge \langle t, y\rangle \in R)$$

$$\Rightarrow \langle x,\ y\rangle \in R. \qquad \text{(由传递性)}$$

所以 $R \circ R \subseteq R$.

(充分性) 设 $R \circ R \subseteq R$. 任取 $\langle x,\ y\rangle \in R$, $\langle y, z\rangle \in R$, 则

$$\langle x,\ y\rangle \in R \wedge \langle y, z\rangle \in R \Rightarrow \langle x, z\rangle \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \langle x, z\rangle \in R.$$

所以 R 是传递的. □

小结

- 关系：笛卡尔积的子集
- 关系的运算
  - 集合运算；复合运算；逆
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质
  - reflexivity, ir-~; symmetry, anti-~; transitivity
  - 图特征；矩阵特征

作业

- 教材内容：[Rosen] 2.1.3、8.1 节 8.3节
- 课后习题：
  - 见课程主页

函数及其运算

离散数学－集合论

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 关系：笛卡尔积的子集
- 关系的运算
  - 集合运算；复合运算；逆
- 0-1矩阵运算
- 关系的性质
  - reflexivity, ir-~; symmetry, anti-~; transitivity
  - 图特征；矩阵特征

提要

- 函数的定义
- 子集的像
- 单射与满射
- 反函数
- 函数的复合
- 函数加法与乘法

函数(function)的定义

- 设 A 和 B 为非空集合，从集合A到B的函数 f 是对元素的一种指派，对A的每个元素恰好指派B的一个元素。记作 f :A→B。
  - Well defined(良定义)
  - f :A→B：函数的型构
  - f 的定义域（domain）是A，f 的伴域（codomain）是B
  - 如果 f 为A中元素a指派的B中元素为b，就写成 $f(a)=b$。此时，称 b是a的像，而a是b的一个原像。
  - A中元素的像构成的集合称为f的值域 range （f的像 image）。
- 函数也称为映射(mapping)或变换(transformation)

函数的集合定义

- 设F为二元关系，F为函数指：

$$(\forall x, y, z)(xFy \wedge xFz \rightarrow y = z)$$

当F为函数，若有y使xFy，则这样的y是唯一的，这时记这样的y为$F(x)$，且称y为F在x的值。事实上：

$$F\text{为函数} \leftrightarrow \big(\forall x \in \mathrm{Dom}(F) \rightarrow (\exists!\, y)(xFy)\big)$$

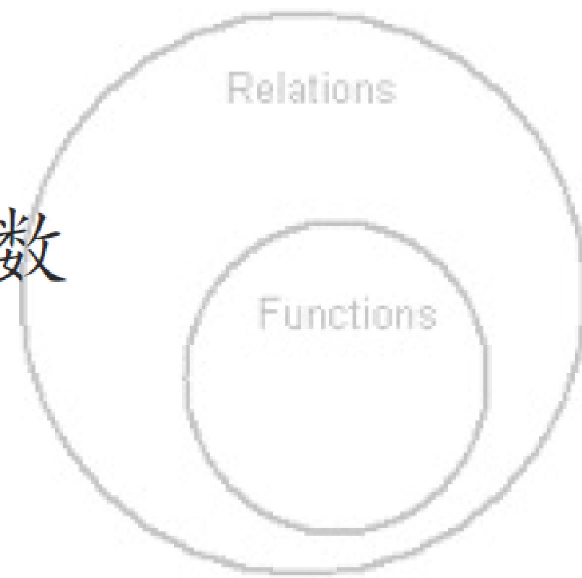
函数的集合定义（续）

- 例：

$F_1 = \{(1,2),(3,2)\}$ 为函数

$F_2 = \{(1,2),(1,3)\}$ 不为函数

$F_3 = \emptyset$ 为函数

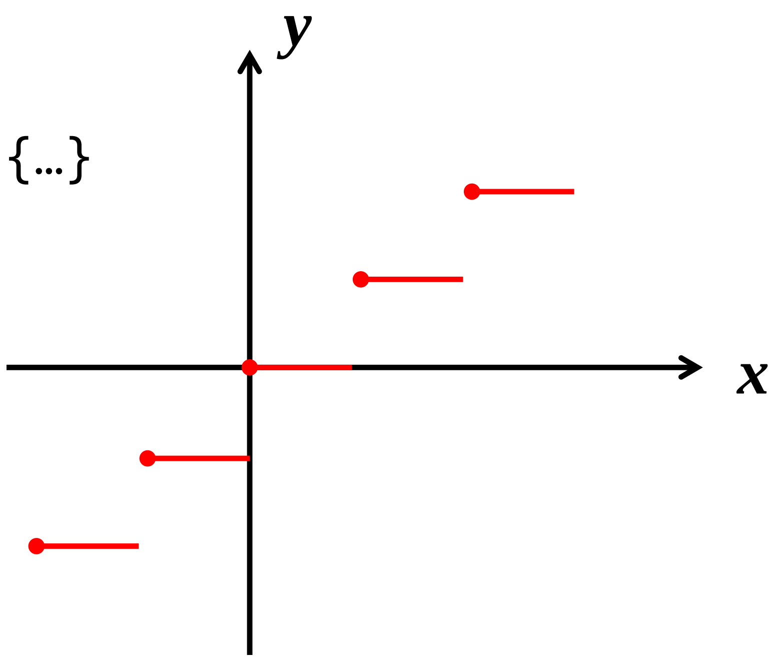


函数举例

- 下取整函数 $\lfloor x \rfloor: \mathrm{R} \to \mathrm{Z}$

```
Java Program
int  floor(float real) {…}


floor: float → int
```



- 函数 f 的图像: $\{(a, b) \mid a \in \mathrm{A} \land f(a)=b\}$

函数举例

- **某课程成绩**

函数原型

Program

`CourseGrade  grade(StudentName sname, CourseName cname) {…}`

函数型构
(signature)

Function：

`Grade: StudentName ×CourseName→ CourseGrade`

姓名	课程	成绩
张明	离散数学	A
李宁	程序设计	B
王琴	数据结构	A
…	…	…

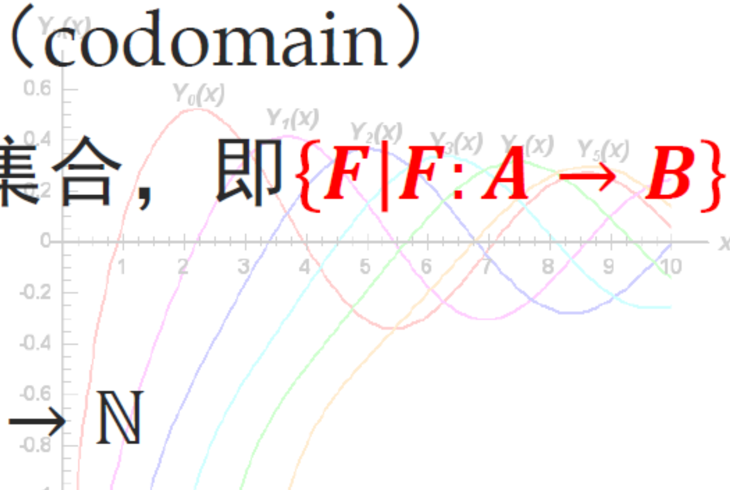
函数举例

- 设A为非空集合，A上的 恒等函数$\iota_A:A\to A$定义为
  - $\iota_A(x)=x$，$x\in A$
- 设 U 为 非 空 集 合 ， 对 任 意 的 $A\subseteq U$， 特 征 函 数 $\chi_A:U\to\{0,1\}$ 定义为：
  - $\chi_A(x)=1$，$x\in A$
  - $\chi_A(x)=0$，$x\in U-A$

函数的集合

- **定义：** 设A，B为集合，F为从A到B的函数(记为$F: A \to B$)指F为函数，且$\mathbf{Dom}(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}$且$\mathbf{Ran}(\boldsymbol{F}) \subseteq \boldsymbol{B}$，$A$称函数$F$的定义域，$\mathrm{Ran}(F)$称$F$的值域，$B$称$F$的陪域（codomain）
- 记$\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{A}}$为$A$到$B$所有函数集合，即$\{\boldsymbol{F} \mid \boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\}$，读作“$B$ 上 A”
- **例：** $\sin: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$\mathrm{Suc}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

  则：$\sin \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$，$\mathrm{Suc} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$



函数(function)的相等

- 函数相等 $f=g$ if
  - $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$
  - $\underline{\mathrm{codom}(f)=\mathrm{codom}(g)}$
  - $\forall x(x\in \mathrm{dom}(f) \rightarrow f(x)=g(x))$

函数的相等

- **命题**：设$|A| = m$，$|B| = n$，则：

$$\boldsymbol{|B^A| = |B|^{|A|} = n^m}$$

这里约定$0^0 = 1$。注意：当$|A| = 0$，$|B| = 0$，即：

$A = B = \emptyset$时，$B^A = \{\emptyset\}$；空关系本身是一个从

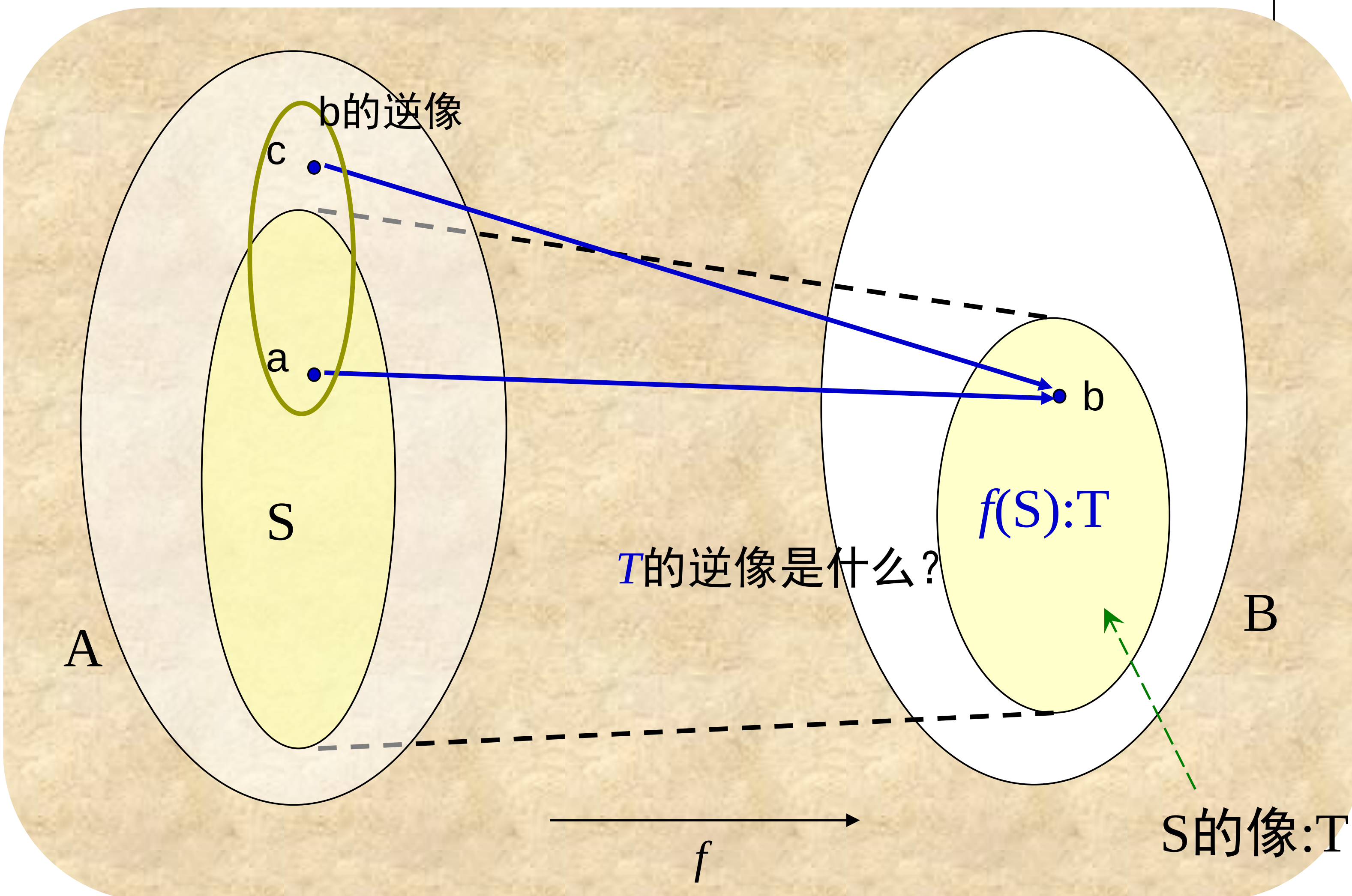
空集到任意集合S（包括空集）的函数，因为它满

足：$\forall \boldsymbol{x} \in \emptyset \rightarrow (\exists!\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{S})\big((\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \emptyset\big)$

子集在函数下的像

- 设 f 是从集合A到B的函数，S 是A的一个子集。S 在 f 下的像，记为$f(S)$，定义如下：
  - $f(S)=\{ t \mid \exists s \in S\ (t= f(s)) \}$
- 备注：$f(A)$ 即为 f 的值域。

S的像和逆像



并集的像

- 设函数 f: A→B，且X，Y是A的子集，则

$$f(X\cup Y) = f(X)\cup f(Y)$$

- 证明:
  - $f(X\cup Y) \subseteq f(X)\cup f(Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X\cup Y)$, 则存在$s\in X\cup Y$, 满足$f(s)=t$; 假设 $s\in X$, 则$t\in f(X)$, 假设$s\in Y$, 则$t\in f(Y)$, $\therefore t\in f(X)\cup f(Y)$
  - $f(X)\cup f(Y) \subseteq f(X\cup Y)$

    对任意的t，若$t\in f(X)\cup f(Y)$

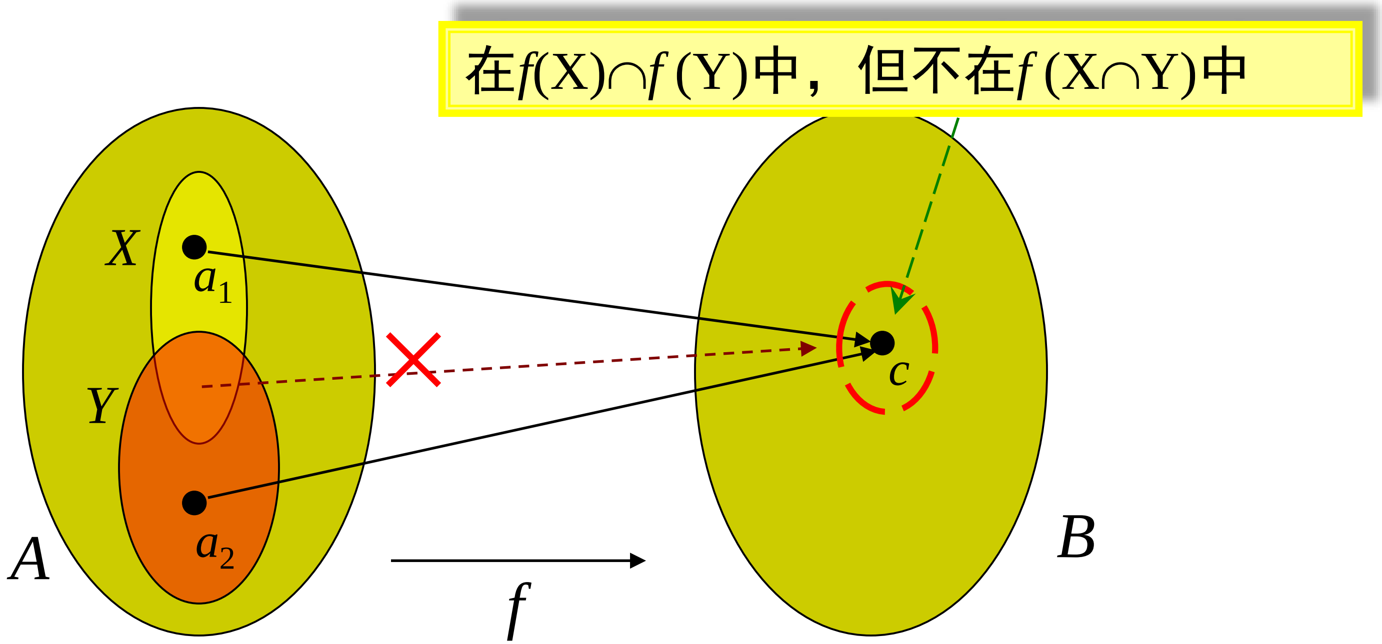
    情况1：$t\in f(X)$, 则存在$s\in X\subseteq X\cup Y$, 满足$f(s)=t$, $\therefore t\in f(X\cup Y)$

    情况2：$t\in f(Y)$, 同样可得$t\in f(X\cup Y)$

    $\therefore t\in f(X\cup Y)$

交集的像

- 设函数 $f: A \to B$，且X，Y是A的子集，则
  - $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$



函数性质

- f:A→B是**单射**（一对一的）
  - injection, injective function, one-to-one function
  - $\forall x_1, x_2 \in A$, 若$x_1 \neq x_2$，则$f(x_1) \neq f(x_2)$
  - //等价的说法：$\forall x_1, x_2 \in A$, 若$f(x_1) = f(x_2)$，则$x_1 = x_2$
  - //另一种等价的说法？
- f:A→B是**满射**（映上的）
  - surjection, surjective function, onto function
  - $\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得$f(x)=y$
  - //等价的说法：$f(A)=B$
- f:A→B是**双射**（一一对应）
  - bijection, bijective function, one-to-one correspondence
  - 满射+单射

函数性质的证明

- 判断$f:R\times R\to R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$的性质
- 单射？
  - 令$f(<x_1, y_1>) = f(<x_2, y_2>)$
    - $x_1+y_1=x_2+y_2$且$x_1-y_1=x_2-y_2$,易见： $x_1=x_2$且$y_1=y_2$
    - $<x_1, y_1>=<x_2, y_2>$
- 满射？
  - 任取$<a, b> \in R\times R$，总存在$<(a+b)/2,(a-b)/2>$,使得
  - $f(<(a+b)/2,(a-b)/2>)=<a, b>$

函数性质的证明

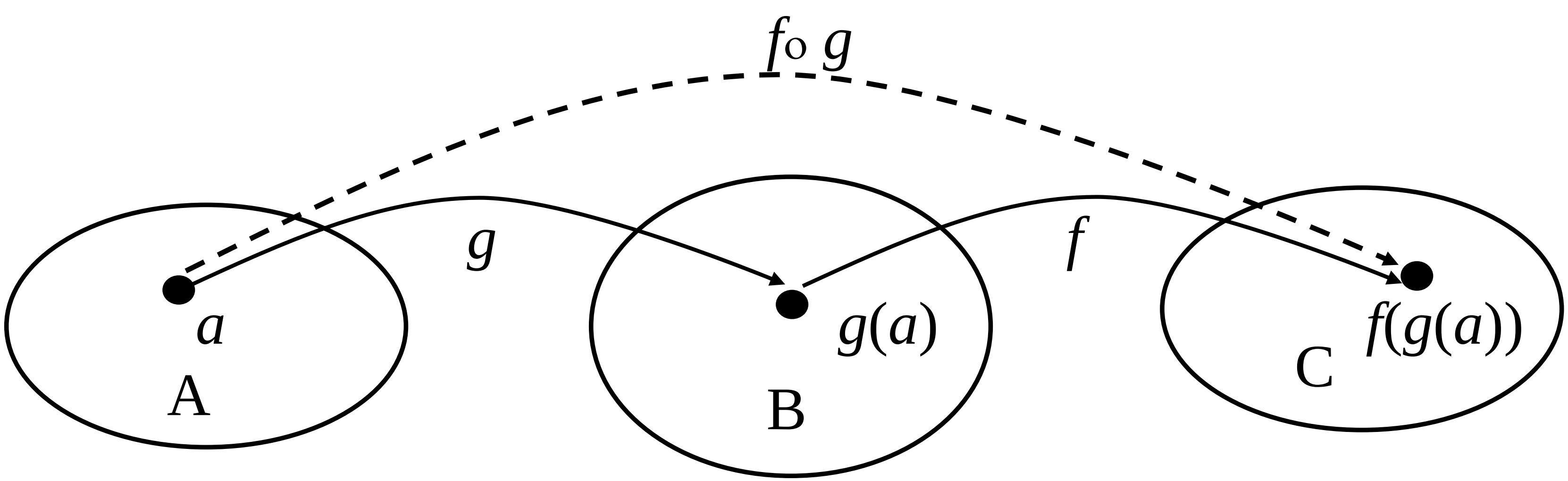
- 设A有限集合，f 是从A到A的函数。f 是单射当且仅当 f 是满射。

反函数

- 设f是从A到B的一一对应，f的反函数是从B到A的函数，它指派给B中元素b的是A中满足$f(a)=b$的（唯一的）a。f的反函数记作f^{-1}。
  - $f(a)=b$ 当且仅当 $f^{-1}(b)=a$
  - *任何函数都有反函数吗？*
- 例子
  - $f:R\times R\rightarrow R\times R$, $f(<x,y>) = <x+y, x-y>$
  - $f^{-1}:R\times R\rightarrow R\times R$, $f^{-1}(<x,y>) = <?, ?>$

函数的复合

- 设g是从A到B的函数，f是从B到C的函数，f和g的复合用$f\circ g$表示，定义为：
  - $(f\circ g)(x)=f(g(x))$， $x\in A$



复合运算的性质

- 函数的复合满足结合律
  - $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 满射的复合是满射
- 单射的复合是单射
- 双射的复合是双射
- 设f 是从A到B的双射
  - $f^{-1} \circ f = \iota_A$
  - $f \circ f^{-1} = \iota_B$

复合运算

证

(1) 任取 $c \in C$, 由 g: $B \to C$ 的满射性, $\exists b \in B$ 使得 $g(b)=c$.

对于这个 b, 由 f: $A \to B$ 的满射性，$\exists a \in A$ 使得 $f(a)=b$.

由合成定理有

$$f{\circ}g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$$

从而证明了 $f{\circ}g$: $A \to C$ 是满射的.

复合运算

（2）假设存在 $x_1, x_2 \in A$ 使得

$$f \circ g(x_1)=f \circ g(x_2)$$

由合成定理有

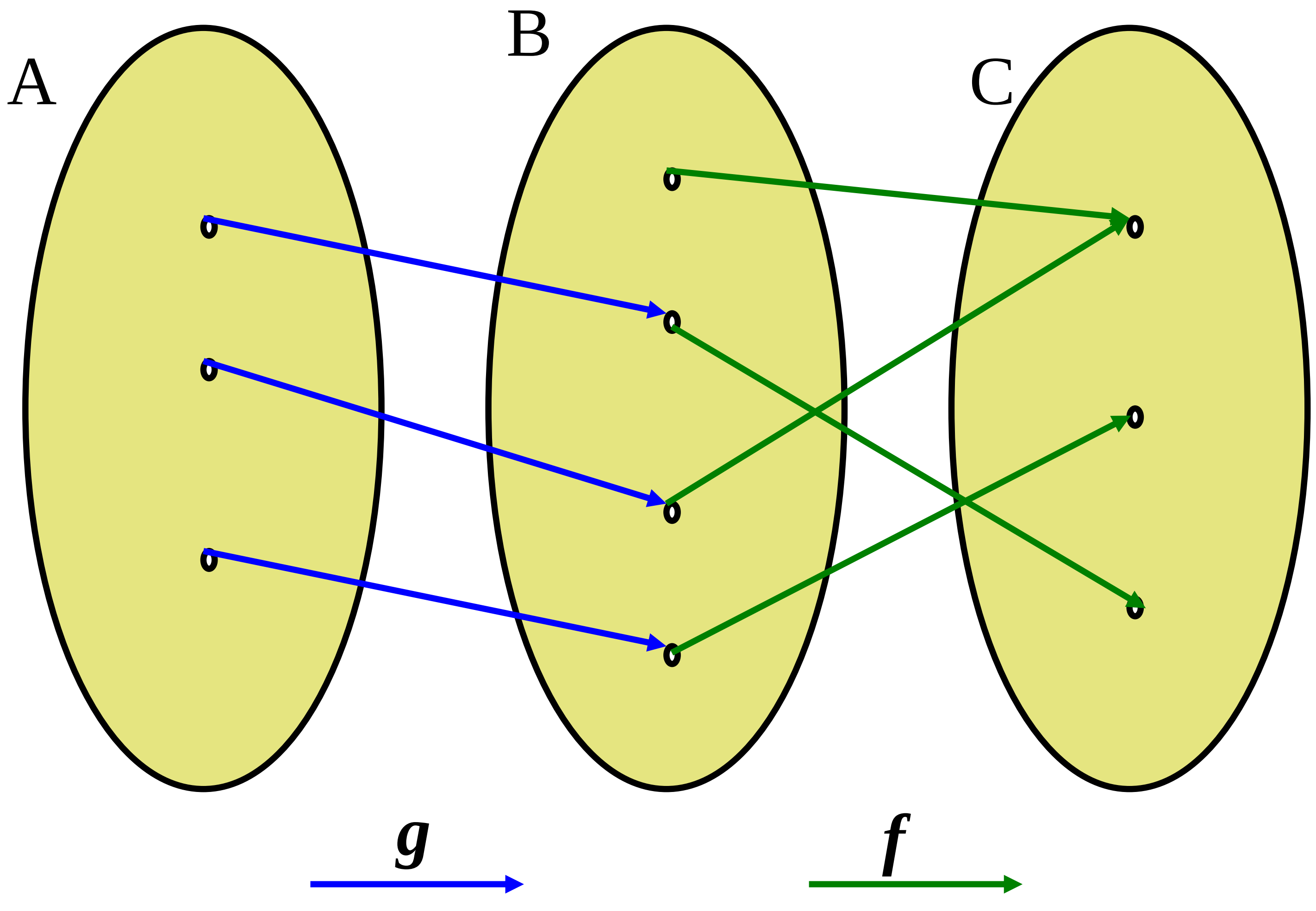
$$g(f(x_1))=g(f(x_2))$$

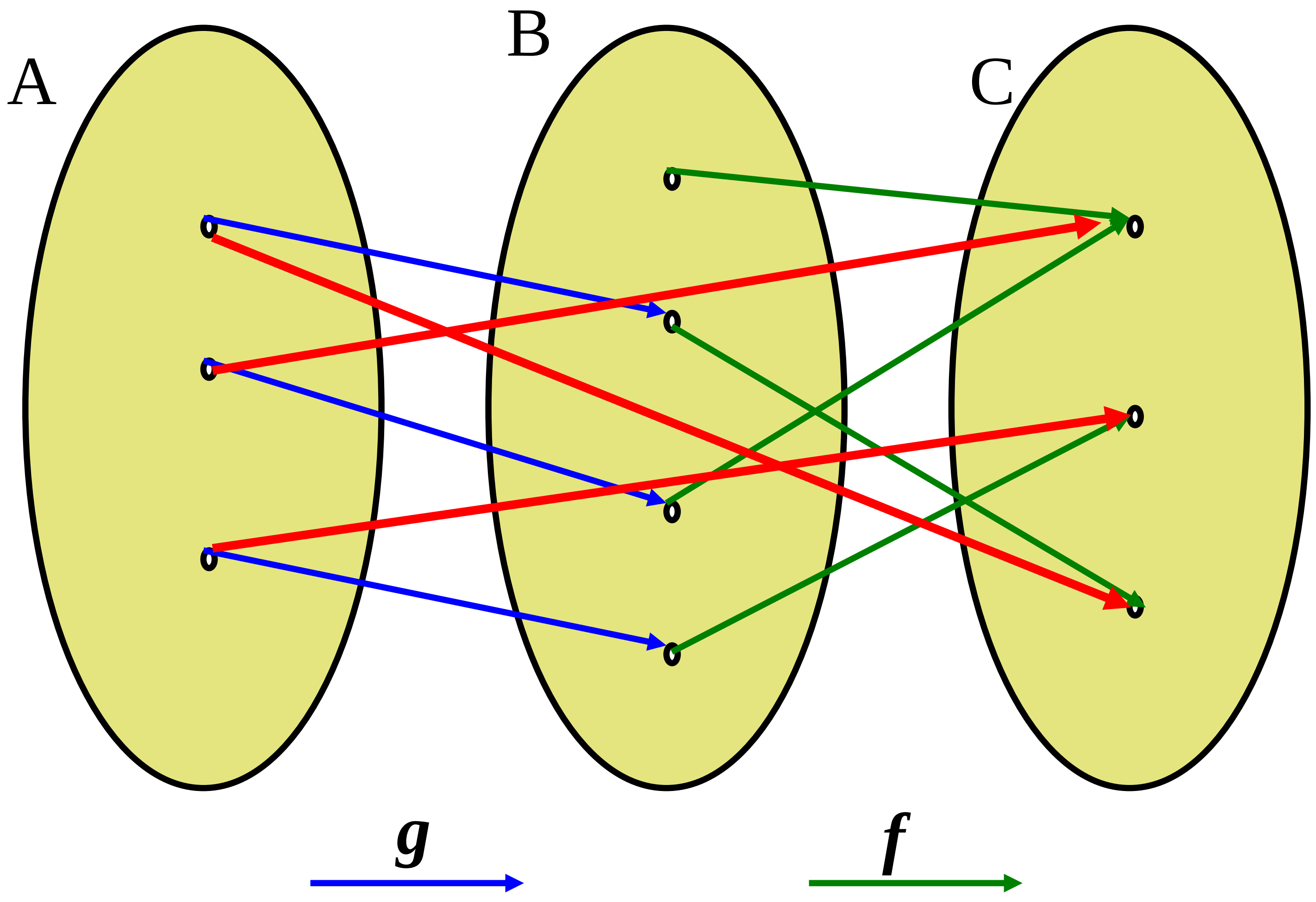
因为 g：$B\rightarrow C$ 是单射的，故 $f(x_1)=f(x_2)$．又由于 f：$A\rightarrow B$ 也是单射的，所以 $x_1=x_2$．从而证明 $f \circ g$：$A\rightarrow C$ 是单射的．

（3）由（1）和（2）得证．

但是…

- 若$f\circ g$是满射，能推出f和g是满射吗？
  - f*一定*是满射， g*不一定*是满射。
- 若$f\circ g$是单射，能推出f和g是单射吗？
  - g*一定*是单射，f *不一定*是单射。


A
B
C
g
f


A
B
C
g
f

函数的加法、乘法

- 设f和g是从A到R的函数，那么 $f+g$ 和 $f\ g$也是从A到R的函数，其定义为
  - $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$， $x \in A$
  - $f\ g(x) = f(x)\ g(x)$， $x \in A$

递增（递减）函数

- 设f的定义域和伴域都是实数(或其子集),
- f是递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \to f(x) \le f(y))$
- f是严格递增的
  - $\forall x\ \forall y\ (x<y \to f(x) < f(y))$

一个有趣的例子

- 自然数1,2,3,…,n^2+1的任何一种排列中，必然含一个长度不小于$n+1$的严格递增链或严格递减链。
  - 7,4,3,5,2,1,9,8,6,10//////10,3,2,6,4,7,5,9,1,8
  - 在所给的序列中，以k开始的严格递增序列长度为I(k), 以k开始的严格递减序列长度为D(k)。
  - f: $k \rightarrow (\mathrm{I}(k), \mathrm{D}(k))$, $k \in \{1,2,\ldots, n^2+1\}$
    - f(7)=(3,5),f(4)=(4,4),f(3)=(4,3),f(5)=(3,3),f(2)=(3,2),f(1)=(3,1)
    - f(9)=(2,3),f(8)=(2,2),f(6)=(2,1),f(10)=(1,1)
  - f是单射：对于$k_1<k_2$，如果k_1排在k_2前面，则$\mathrm{I}(k_1)>\mathrm{I}(k_2)$，如果$k_2$排在$k_1$前面，则$\mathrm{D}(k_2)>\mathrm{D}(k_1)$。
- 反证法：给定任一种排列，假设严格递增与递减序列最大长度均不大于n：
  - f的值域最多有n^2个元素
  - f不可能是单射

练习

设$f: A \to B$，$A_1 \subseteq A$，$B_1 \subseteq B$，证明：

$$f\big(A \cap f^{-1}(B_1)\big) = f(A) \cap B_1$$

证明： 任取y，

$$y \in f\big(A \cap f^{-1}(B_1)\big) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \cap f^{-1}(B_1) \wedge xfy)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge x \in f^{-1}(B_1) \wedge xfy) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge f(x) \in B_1 \wedge xfy)$$

$$\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge y \in B_1 \wedge xfy) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xfy) \wedge y \in B_1$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in B_1 \Leftrightarrow y \in f(A) \cap B_1 \qquad \square$$

练习

3.（12 分）设函数$f: X \to Y$，$g: Y \to X$；设$g \circ f$为X上的恒同函数（*i.e.* $g\big(f(x)\big) = I_X(x)$），证明：f为单射函数，g为满射函数.

证明：先证$f: X \mapsto Y$为单射，$(\forall x_1, x_2 \in X)\big(f(x_1) = f(x_2)\big) \Longrightarrow g\big(f(x_1)\big) = g\big(f(x_2)\big)$($\because g: Y \to X$为函数)$\Longrightarrow g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$($\because g \circ f = \mathrm{I}_X$)

□

再证g为满射，$(\forall x \in X) \Longrightarrow \exists y(y \in Y \wedge y = f(x))$($\because \mathrm{dom}f = X$)$\Longrightarrow \exists y \exists x'\big(y \in Y \wedge x' \in X \wedge y = f(x) \wedge x' = g(y)\big)$（$\because \mathrm{dom}g = Y$）$\Longrightarrow \exists y \exists x'\big(y \in Y \wedge x' \in X \wedge x' = g(y) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) = x\big)$($\because g \circ f = \mathrm{I}_X$)$\Longrightarrow \exists y(y \in Y \wedge g(y) = x)$，故$g$为满射.□

作业

- 教材[2.3]
  - 见课程群