第 2 章　数字逻辑基础

作业：习题 3、5、6（1）、7（5）、7（8）、8（1）、8（2）、8（4）、12、13（2）、13（5）

3.请用完备归纳法证明定理 T2~T5。

【分析解答】

可以直接通过列真值表来证明。

空元素：(T2) X+1=1；

证明：当 X=0 时，等式左边=0+1=1=右边，等式成立；当 X=1 时，等式左边=1+1=1=右边，等式成立。无论 X 取 0 或 1，等式都成立，T2 定理得以证明。

同一律：(T3) X+X=X；

证明：当 X=0 时，等式左边=0+0=0=右边，等式成立；当 X=1 时，等式左边=1+1=1=右边，等式成立。无论 X 取 0 或 1，等式都成立，T3 定理得以证明。

还原律：(T4) $\overline{\overline{X}}$=X。

证明：当 X=0 时，等式左边=$\overline{\overline{0}}$=0=右边，等式成立；当 X=1 时，等式左边=$\overline{\overline{1}} = 1$=右边，等式成立。无论 X 取 0 或 1，等式都成立，T4 定理得以证明。

互补律：(T5) $X+\overline{X}$=1；

证明：当 X=0 时，等式左边=0+$\overline{0}$=1=右边，等式成立；当 X=1 时，等式左边=1+$\overline{1}$=1=右边，等式成立。无论 X 取 0 或 1，等式都成立，T5 定理得以证明。

5.有人依据德・摩根定理认为逻辑表达式 $X+Y\cdot Z$ 的反是$\overline{X}\cdot\overline{Y}+\overline{Z}$。但当 XYZ==110 时，这两个函数运算结果都是 1。对于同样的输入组合，这两个函数结果本应相反，错在哪里？

【分析解答】

根据德・摩根定理对逻辑表达式进行转换，不能改变原先表达式中的运算次序。因此逻辑表达式 $X+Y\cdot Z$ 的反函数是$\overline{X}\cdot(\overline{Y}+\overline{Z})$，当 XYZ==110 时，X+Y·Z=1+1•0=1+0=1，而$\overline{X}\cdot(\overline{Y}+\overline{Z})$=0·(0+1)=0•0=0，结果正好相反。

6.请用布尔代数定理化简下面的逻辑函数。

（1）$\mathrm{F}=\mathrm{W}\cdot X\cdot Y\cdot Z\cdot(\overline{W}\cdot X\cdot Y\cdot Z+W\cdot\overline{X}\cdot Y\cdot Z+W\cdot X\cdot\overline{Y}\cdot Z+\mathrm{W}\cdot X\cdot Y\cdot\overline{Z})$

【分析解答】

根据布尔定理 T8 分配律，把公共因子 $\mathrm{W}\cdot X\cdot Y\cdot Z$和括号中每个与项进行与运算，

再进行或运算。可以发现，每一个与项中都包含有同一个变量的原变量和反变量，而根据布尔代数定理 T5，它们的运算结果为 0，则 F=0。

$\mathrm{F} = \mathbf{W}\cdot X\cdot Y\cdot Z\cdot \overline{\boldsymbol{W}}\cdot X\cdot Y\cdot Z + \mathrm{W}\cdot \boldsymbol{X}\cdot Y\cdot Z\cdot W\cdot \overline{\boldsymbol{X}}\cdot Y\cdot Z + \mathrm{W}\cdot X\cdot \boldsymbol{Y}\cdot Z\cdot W\cdot X\cdot \overline{\boldsymbol{Y}}\cdot$

$Z + \mathrm{W}\cdot X\cdot Y\cdot \boldsymbol{Z}\cdot \mathrm{W}\cdot X\cdot Y\cdot \overline{\boldsymbol{Z}}$ **(T8)**

$\mathrm{F} = 0 + 0 + 0 + 0$ **(T5)**

$= 0$ **(A4D)**

7.请写出下面各个逻辑函数的真值表。

（5）$\mathrm{F} = \overline{\mathrm{W}\cdot X}\cdot\overline{\overline{Y}+\overline{Z}}$

【分析解答】

真值表(5)

WXYZ	F
0000	0
0001	0
0010	0
0011	1
0100	0
0101	0
0110	0
0111	1
1000	0
1001	0
1010	0
1011	1
1100	0
1101	0
1110	0
1111	0

(8) F=$\overline{\overline{\overline{A+B}+\overline{C}}+D}$

【分析解答】

真值表(8)

ABCD	F
0000	1
0001	0
0010	1
0011	0

0100	1
0101	0
0110	0
0111	0
1000	1
1001	0
1010	0
1011	0
1100	1
1101	0
1110	0
1111	0

8.请写出下面各个逻辑函数的标准与-或表达式和标准或-与表达式。

(1) F(A,B,C)=∑m(2,4,6,7)

【分析解答】

标准与-或表达式：

$$F(A,B,C)=\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot\overline{C}+A\cdot B\cdot C。$$

根据逻辑函数表达式最小项列表集合和最大项列表集合之间的互补关系，函数 F 的最大项列表为 F=∏M(0,1,3,5)，标准或-与表达式为：$F(A,B,C)=(A+B+C)\cdot(A+B+\overline{C})\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})\cdot(\overline{A}+B+\overline{C})$。

(2) F(W,*X*,*Y*)=∏M(0,1,3,4,5)

【分析解答】

根据逻辑表达式最小项列表和最大项列表之间的转换关系，函数 F 的最小项列表为 F(W,*X*,*Y*)= ∑m(2,6,7)，标准与-或表达式为：$F(W,X,Y)=\overline{W}\cdot X\cdot\overline{Y}+W\cdot X\cdot\overline{Y}+W\cdot X\cdot Y$。

标准或-与表达式为：F(W,*X*,*Y*)=∏M(0,1,3,4,5)

$$F=(W+X+Y)\cdot(W+X+\overline{Y})\cdot(W+\overline{X}+\overline{Y})\cdot(\overline{W}+X+Y)\cdot(\overline{W}+X+\overline{Y})。$$

(4) $F=\overline{V}+\overline{\overline{W}+X}$

【分析解答】

根据德・摩根定理把逻辑表达式转换成两级与-或表达式。

$$F=\overline{V}+\overline{\overline{W}+X}=\overline{V}+\overline{\overline{W}}\cdot\overline{X}=\overline{V}+W\cdot\overline{X}$$

再根据布尔代数定理组合律 T10，在与项中添加未出现的逻辑变量。

$$F=\overline{V}+W\cdot\overline{X}=\overline{V}\cdot\overline{W}+\overline{V}\cdot W+\overline{V}\cdot W\cdot\overline{X}+V\cdot W\cdot\overline{X}$$

$$F=\overline{V}\cdot\overline{W}\cdot\overline{X}+\overline{V}\cdot\overline{W}\cdot X+\overline{V}\cdot W\cdot\overline{X}+\overline{V}\cdot W\cdot X+\overline{V}\cdot W\cdot\overline{X}+V\cdot W\cdot\overline{X}$$

标准与-或表达式为：

$$F=\overline{V}\cdot\overline{W}\cdot\overline{X}+\overline{V}\cdot\overline{W}\cdot X+\overline{V}\cdot W\cdot\overline{X}+\overline{V}\cdot W\cdot X+V\cdot W\cdot\overline{X}$$

根据布尔代数定理组合律 T10D，在与项中添加未出现的逻辑变量。

$$F=\overline{V}+W\cdot\overline{X}=(\overline{V}+W)\cdot(\overline{V}+\overline{X})$$

$$=(\overline{V}+W+\overline{X})\cdot(\overline{V}+W+X)\cdot(\overline{V}+\overline{W}+\overline{X})\cdot(\overline{V}+W+\overline{X})$$

标准或-与表达式为：

$$F=(\overline{V}+W+\overline{X})\cdot(\overline{V}+W+X)\cdot(\overline{V}+\overline{W}+\overline{X})。$$

12. 能够实现任何逻辑函数的逻辑门类型的集合称为逻辑门的完全集。例如，2 输入与门、2 输入或门以及反相器构成一个逻辑门完全集。因为任何逻辑函数都能表示为输入信号（以原变量或反变量形式表示）构成的与-或表达式，而且任何超过两个输入端的与门（或门）都能通过 2 输入端与门（2 输入端或门）级联得到。请问 2 输入与非门能构成逻辑门的完全集吗？请证明你的答案。2 输入端异或门呢？

【分析解答】

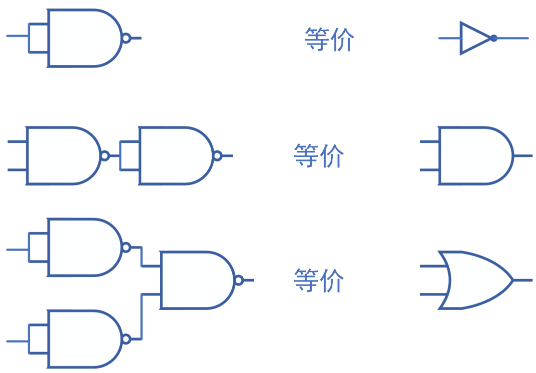
（1）2 输入与非门能构成逻辑门是完全集。这是因为 2 输入与非门可以通过转换实现与门、或门和非门的功能，从而可以实现任何的逻辑函数。

把与非门的一个输入端接逻辑 1 或把 2 个输入端并联，则与非门实现了非门的功能。$\overline{X\cdot 1}=\overline{X}$或$\overline{X\cdot X}=\overline{X}$。

把与非门连接到非门，则实现了与门功能。$\overline{\overline{X\cdot Y}}=X\cdot Y$。

把输入信号取反后，再连接到与非门的输入端，则可实现或门功能，如$\overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}}=X+Y$。

可见，与非门通过转换能够实现基本的 2 输入与门、2 输入或门和非门，因而构成逻辑门的完全集。



与非门转换成非门、与门和或门示意图

（2）2 输入端异或门不是逻辑门的完全集。

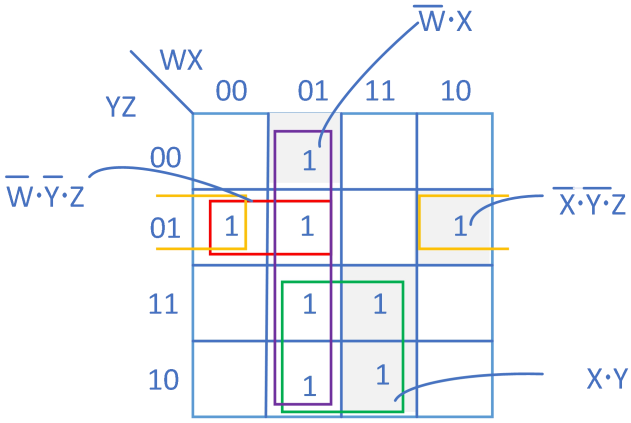
把异或门的两个输入端并联到一起，输出 F=0；把其中一个输入端连接到低电平，则 F=X；把把其中一个输入端连接到高电平，则 F=$\overline{X}$。可见，异或门可以实现非门的功能，而不能实现或门和与门的功能。

13. 利用卡诺图将下列标准表达式化简得到最简与-或表达式，并把结果转换为与非-与非表

达式。

【分析解答】

(2) F(W,X,Y,Z)=Σm(1,4.5,6,7,9,14,15)



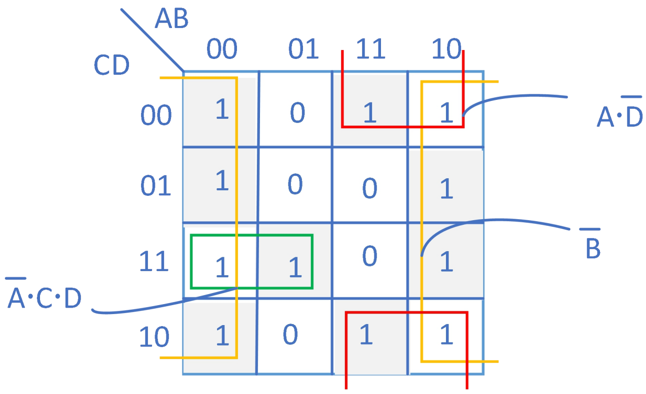
最简与-或表达式：F=$\overline{W}\cdot X+X\cdot Y+\overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z$

与非-与非表达式：F=$\overline{\overline{\overline{W}\cdot X+X\cdot Y+\overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z}}==\overline{\overline{\overline{W}\cdot X}\cdot\overline{X\cdot Y}\cdot\overline{\overline{X}\cdot\overline{Y}\cdot Z}}$

(5) F(A,B,C,D)=ΠM(4,5,6,13,15)

可根据逻辑函数最大项和最小项列表集合的互补关系，列出该函数的最小项列表：

F(A,B,C,D)=$\sum$m(0,1,2,3,7,8,9,10,11,12,14)



最简与-或表达式：F=$\overline{B}+A\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot C\cdot D$

与非-与非表达式：F=$\overline{\overline{\overline{B}+A\cdot\overline{D}+\overline{A}\cdot C\cdot D}}=\overline{B\cdot\overline{A\cdot\overline{D}}\cdot\overline{\overline{A}\cdot C\cdot D}}$