

离散数学第九次作业-基本计数原理

Problem 1

长度为 $n(n > 5)$ 且以 000 开始或以 111 结尾的二进制串有多少个?

Problem 2

从 1000 到 9999 之间, 包含多少个正整数

- | | |
|---------------|--------------------|
| a) 被 9 整除? | b) 被 5 或 7 整除? |
| c) 是偶数? | d) 不被 5 也不被 7 整除? |
| e) 有不同的十进制数字? | f) 被 5 整除但不被 7 整除? |
| g) 不被 3 整除? | h) 被 5 和 7 整除? |

Problem 3

给定 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 集合 A 的有多少个子集, 满足其中所有元素的乘积能被 10 整除?

Problem 4

长度为 12 且不包含“11”子串的二进制串有多少个?

Problem 5

设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 和 x_6 是正整数, 方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 < 32$ 有多少个解?

Problem 6

考虑用红, 蓝两种颜色着色 3×3 的方格棋盘, 在允许图形翻转和旋转的情况下, 一共有多少种不同的着色方案?

Problem 7

由一个正 n 边形的顶点构成的三角形有多少个? 如果正 n 边形的边不能是构成三角形的边, 这样的三角形又有多少个?

Problem 8

使用数学归纳法证明容斥原理.

Problem 9

有 6 个集合, 如果知道其中任 3 个集合都是不相交的, 根据容斥原理写出关于这 6 个集合并集元素个数的显式公式.

Problem 10

考虑一个 $N \times N$ 网格, 其中的每一个单元格可以取值 $+1$ 或 -1 . 我们称这种网格为二进制网格 (*Binary grid*). 任何行的行乘积 (*row product*) 都被定义为该单行中所有元素的乘积. 同样, 一列的列乘积 (*column product*) 被定义为该单个列中所有元素的乘积. 如果 N 行的行乘积中, 有且只有一个结果为 -1 , 而 N 列的列乘积中, 有且只有一个结果为 -1 , 则该 $N \times N$ 的二元网格称为魔术网格. 换句话说, 魔术网格要求其他 $N - 1$ 个行乘积全部为 $+1$, 其他 $N - 1$ 个列乘积应也全部为 $+1$. 试计算所有 $N \times N$ 的网格中, 魔术网格的数量.