

# 离散数学第十四次作业-偏序集与格

## Problem 1

下面哪些是偏序集?

- (a)  $(\mathbb{Z}, =)$                       (b)  $(\mathbb{Z}, \neq)$                       (c)  $(\mathbb{Z}, \geq)$                       (d)  $(\mathbb{Z}, \mid)$

## Problem 2

对偏序集

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq),$$

回答下述问题.

- a) 求极大元素.
- b) 求极小元素.
- c) 存在最大元素吗? 如果存在请求出.
- d) 存在最小元素吗? 如果存在请求出.
- e) 求  $\{\{2\}, \{4\}\}$  的所有上界.
- f) 如果存在的话, 求  $\{\{2\}, \{4\}\}$  的最小上界.
- g) 求  $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$  的所有下界.
- h) 如果存在的话, 求  $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$  的最大下界.

## Problem 3

已知  $A$  是由 54 的所有因子组成的集合, 设  $\mid$  为  $A$  上的整除关系,

- (1) 画出偏序集  $(A, \mid)$  的哈斯图.
- (2) 确定  $A$  中最长链的长度, 并按字典序写出  $A$  中所有最长的链.

(3) 试计算  $A$  中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链, 并完整写出这些反链.

## Problem 4

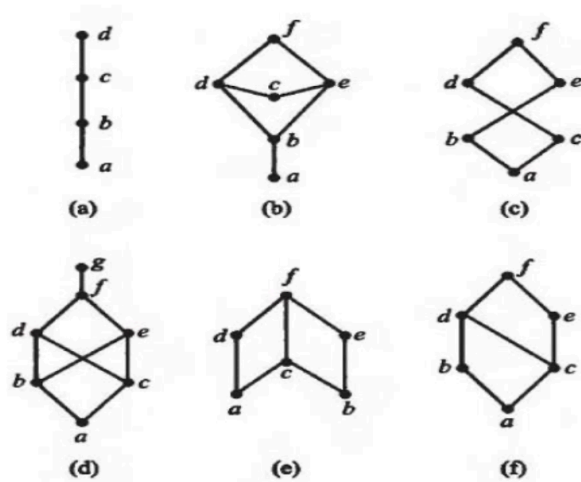
设  $A$  为集合,  $B = \rho(A) \setminus \{\emptyset\} \setminus \{A\}$ , 且  $B \neq \emptyset$ . 求偏序集  $(B, \subseteq)$  的极大元, 极小元, 最小元.

## Problem 5

证明: 长度为  $mn + 1$  的偏序集存在大小为  $m + 1$  的链或存在大小为  $n + 1$  的反链.

## Problem 6

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 请说明理由.



## Problem 7

针对 Problem 6 中的每个格, 如果格中的元素存在补元, 则求出这些补元.

## Problem 8

说明 Problem 6 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格, 并说明理由.

## Problem 9

设  $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$  是有界格, 证明  $\forall a \in L$ , 有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

## Problem 10

求证：在格  $\langle L, \times, \oplus \rangle$  中，若  $a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c)$ ，则  $a \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$ 。