

离散数学-图论作业 8 树的基本概念、生成树

如无特意说明，以后各题只考虑有限个点的图。

Problem 1

计算下列各题：

- 1) 有多少非同构的 5 个顶点的树？
- 2) 饱和碳氢化合物 C_4H_{10} 有多少不同的同分异构体？
- 3) K_4 有多少个不同的生成树？（假设各条边互不相同）

Problem 2

标记树是其中每个顶点都指定了标记的树。当在两个标记树之间存在保持顶点标记的同构时，就称这两个标记树是同构的。

用集合 $\{0, 1, 2\}$ 里不同的数来标记三个顶点的、非同构的标记树有多少种？用集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 里不同的数来标记四个顶点的、非同构的标记树有多少种？

Problem 3

令 $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ 为一正整数序列，且 $n \geq 2$ 。

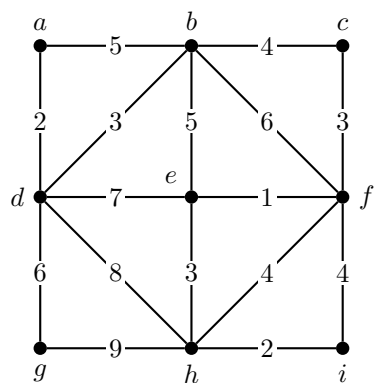
- a) 若 D 恰好是某个树 T 的各个顶点的度数序列，试证明

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

- b) 反过来，试证明：若 D 满足上式，则存在一个树 T ，使得 D 恰好是 T 的各个顶点的度数序列。

Problem 4

分别用普林（Prim）算法和克鲁斯卡尔（Kruskal）算法求所给带权图的最小生成树。（按顺序写出选取的边及总的权值即可）



Problem 5

证明或反驳：每条边权重均不相同的带权图

- 1) 有唯一的最小生成树。
- 2) 有唯一的“次小生成树”满足，存在一最小生成树的权值小于等于该树，且其他生成树的权值均大于等于该树。

Problem 6

令 G 为一无向带权连通图，假设图中存在一个回路。试证明：在此回路上若存在一条边 e 其权值严格大于此回路上的其它各边，则 e 不在 G 的任何最小生成树中。