基本概念

离散数学—图论初步

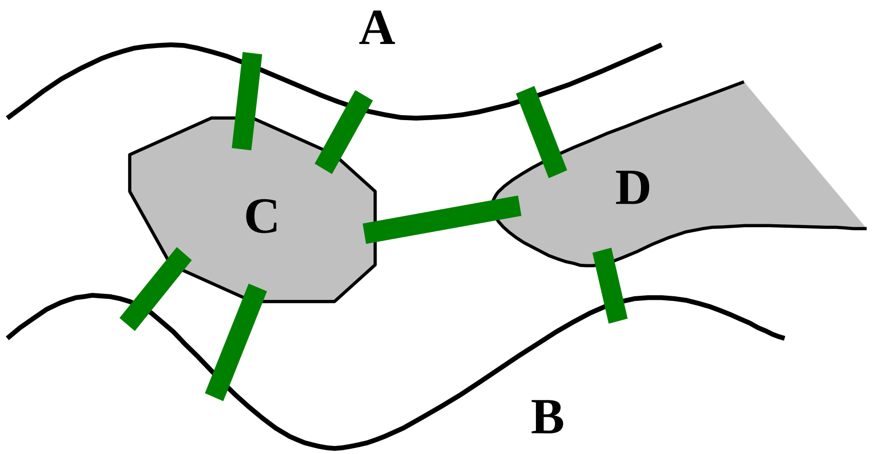
南京大学计算机科学与技术系

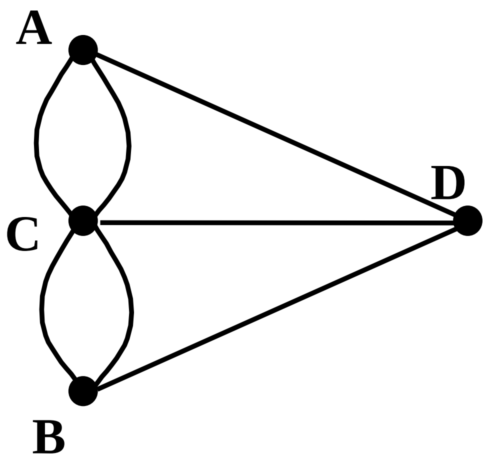
内容提要

- 图的定义
- 用图建模
- 图的表示
- 图的运算
- 图的同构

Königsberg七桥问题

- 问题的抽象：
  - 用顶点表示对象-“地块”
  - 用边表示对象之间的关系-“有桥相连”

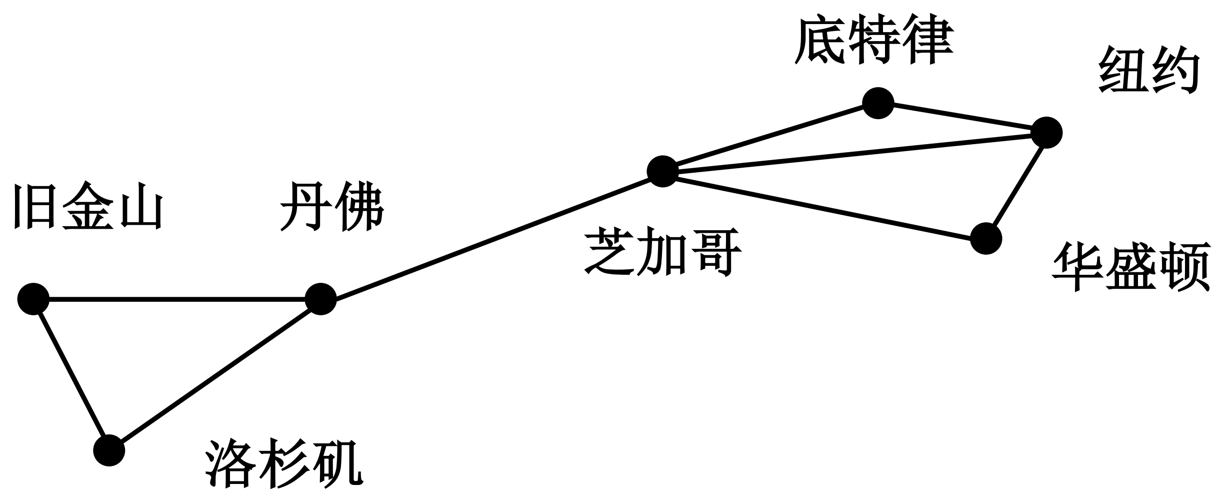




图的定义 Graph

φ常常省略，写作：
$G = (V,\ E)$

- 图G是一个三元组：$G = (V, E, \varphi)$
  - V是非空顶点集，E是边集，且 $V \cap E = \phi$;
  - φ: $E \rightarrow P(V)$, 且$\forall e \in E$. $1 \leq |\varphi(e)| \leq 2$. $\varphi(e)$称为边 e 的端点集.
- 举例（数据中心、通信链接）

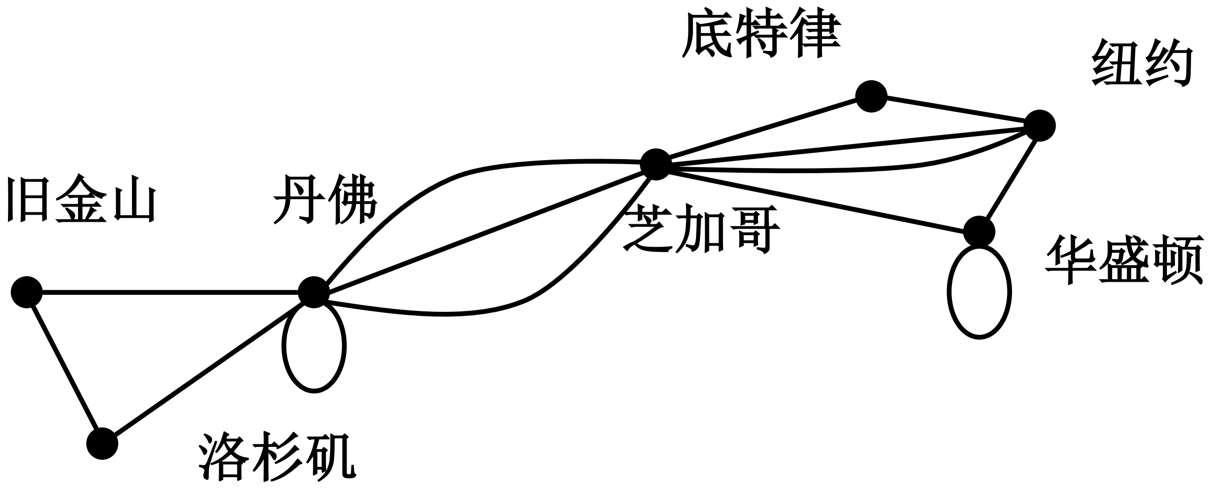


图的定义（续）

- 图$G = (V, E, \varphi)$是简单图，如果
  - 每条边有2个端点，即： $\forall e\in E. |\varphi(e)| = 2$，并且
  - 不同边有不同端点集，即：如果$e_1\neq e_2$，则$\varphi(e_1) \neq \varphi(e_2)$
- 图$G = (V, E, \varphi)$是伪图，如果
  - 存在一条只有1个端点的边，即: $\exists e_0\in E.|\varphi(e_0)| = 1$，或者
  - 有两条边具有相同的端点集，即:$\exists\ e_1\neq e_2.\varphi(e_1)=\varphi(e_2)$

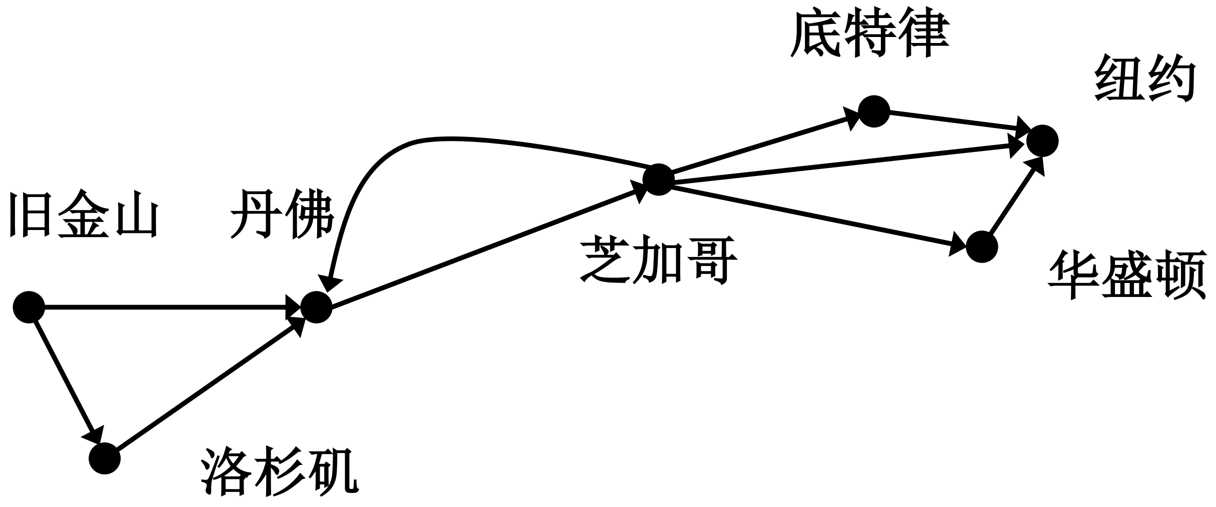
图的定义（续）

- 伪图（包含环或者多重边）示例



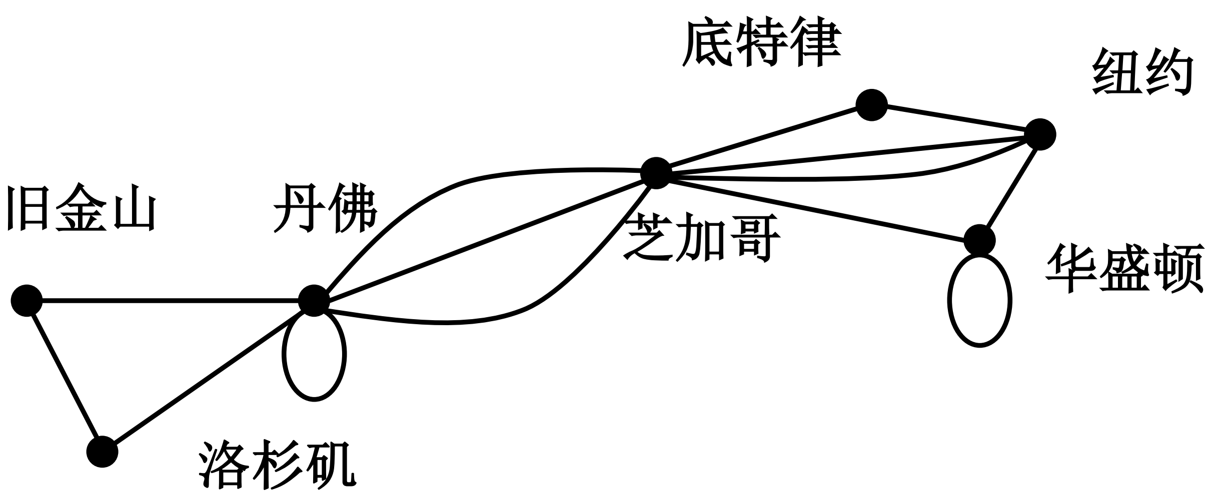
图的定义（有向图）

- 有向图G是一个三元组：G= (V, E, φ)
  - V是非空顶点集，E是有向边（弧）集，且V∩E=ϕ;
  - φ:E→V×V, 若φ(e)=(u, v), 则u和v分别称为e的起点和终点.
- 举例（简单有向图）



图的术语

- 无向图G = (V, E, φ), φ(e)={u, v}
  - u和v在G里邻接（相邻）
  - e关联（连接）顶点u和v
- 图G中顶点v的度, deg(v)， d_G(v)
  - 与该顶点关联的边数，环为顶点的度做出双倍贡献。



握手定理

- 无向图G有**m**条边，**n**个顶点$\mathbf{v_1, \ldots v_n}$.

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

- 推论：无向图中奇数度顶点必是偶数个。

图的术语（续）

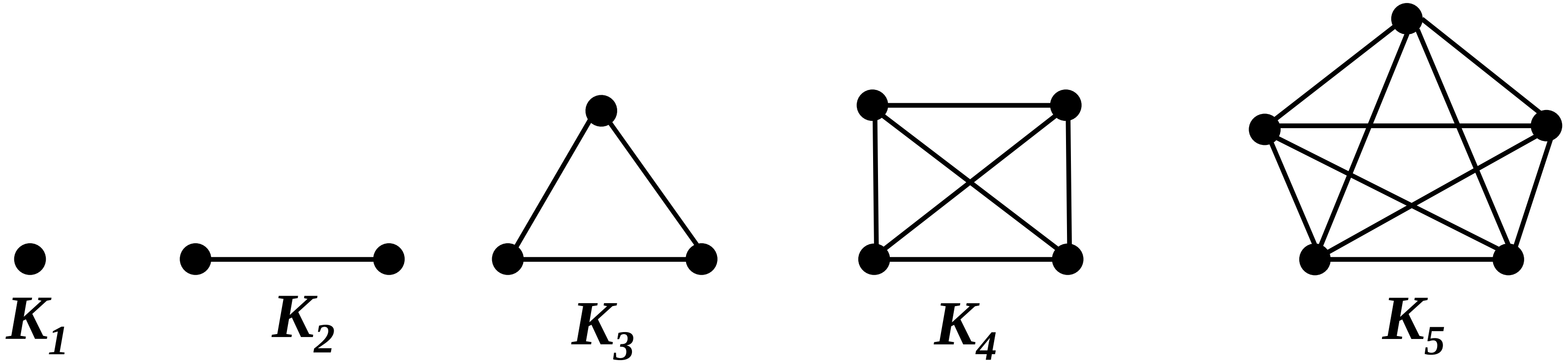
- 有向图$G = (V, E, \varphi)$, $\varphi(e)=(u, v)$
  - u是e的起点，v是e的终点
  - 假设 $u \neq v$， u邻接到v，v从u邻接
- 有向图中顶点的出度和入度
  - $d_G^+(v)$ = 以v为始点的边的条数， $\deg^+(v)$
  - $d_G^-(v)$ = 以v为终点的边的条数， $\deg^-(v)$
- 有向图中各顶点的出度之和等于入度之和。

$$\Sigma_{v \in V} deg^+(v) = \Sigma_{v \in V} deg^-(v) = |E|$$

- 有向图的底图

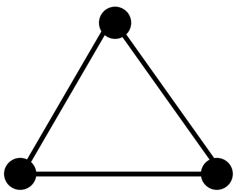
特殊的简单图（完全图）

- 若简单图G中任意两点均相邻，则称为完全图。记为K_n, 其中n是图中顶点数。
  - K_n中每个顶点皆为n-1度，总边数为n(n-1)/2。
  - 边数达到上限的简单图。

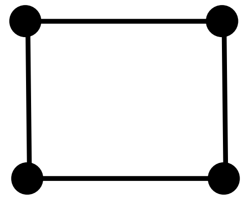


特殊的简单图（圈图与轮图）

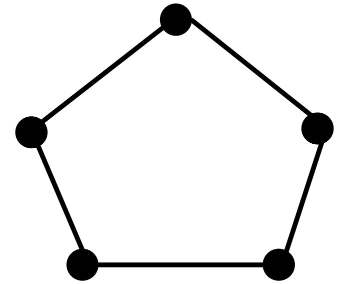
Cycle



C_3

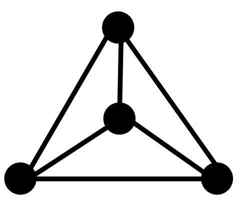


C_4

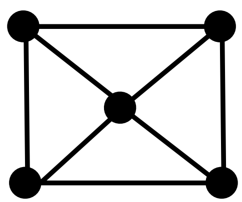


C_5

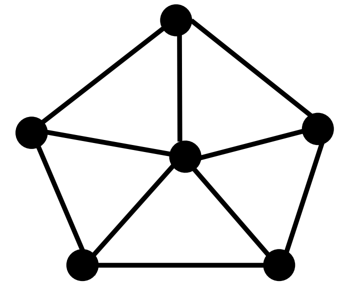
Wheel



W_3



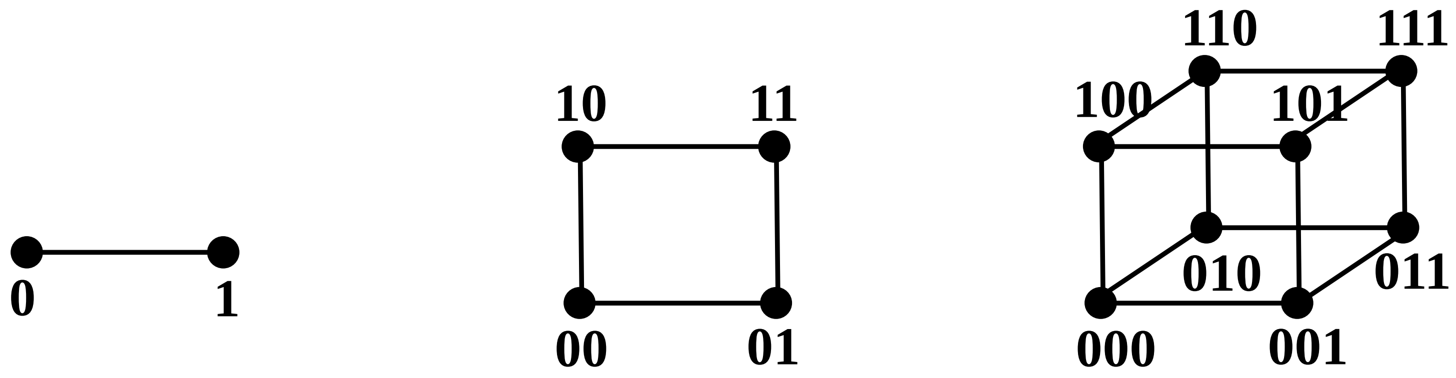
W_4



W_5

特殊的简单图（立方体图）

n-cube



Q_1 Q_2 Q_3

正则图：顶点度相同的简单图

子图

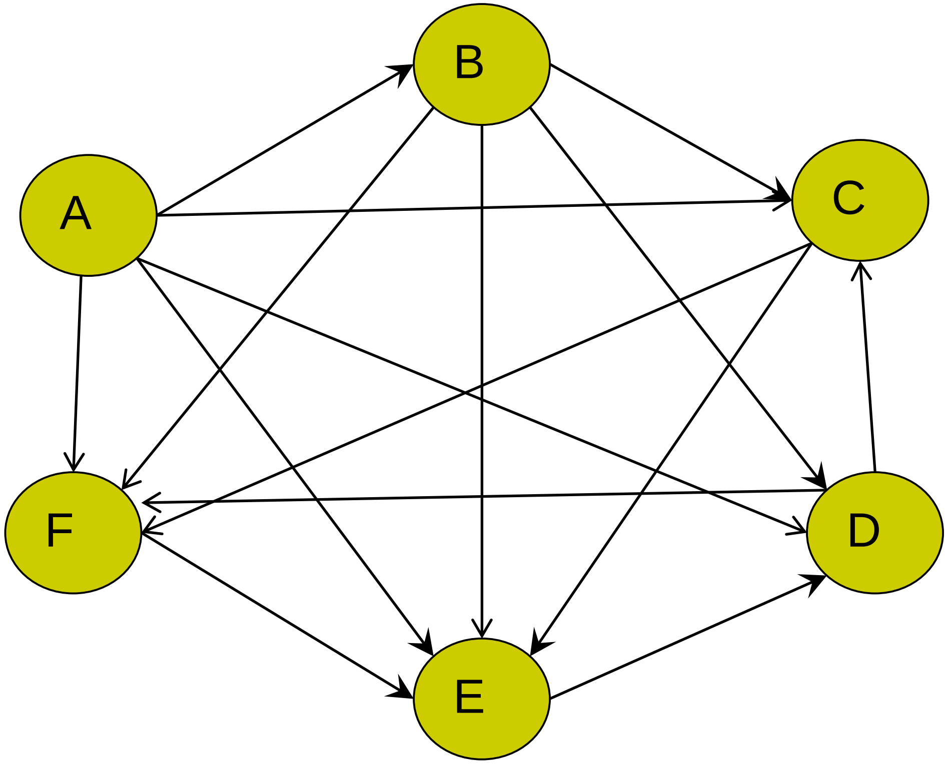
- 设G=<V,E>, G'=<V',E'>, 如果$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, 则称G'是G的子图。
- 如果$V' \subset V$, 或者$E' \subset E$, 则称为真子图。
- 诱导(导出)子图：可以由顶点集的子集，或者由边集的子集导出一个子图。

用图建模

图模型

- 交通网络
  - 航空、公路、铁路
- 信息网络
  - 万维网图（**Web Graph**）
  - 引用图（**Citation Graph**）
- 社会网络
  - 熟人关系图
  - 合作图，好莱坞图
  - 呼叫图
- 体育（循环赛的图模型）

循环赛的冠军是哪个队？



是什么思考帮助我们建模？
问题的答案是什么？

优先图和程序并发执行

- 右边的程序有没有办法执行快一点？

s1||s2;s3||s4;s5||s6

S_1 $a := 0$

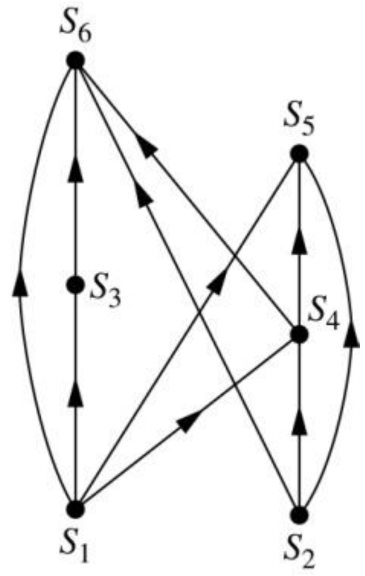
S_2 $b := 1$

S_3 $c := a + 1$

S_4 $d := b + a$

S_5 $e := d + 1$

S_6 $e := c + d$



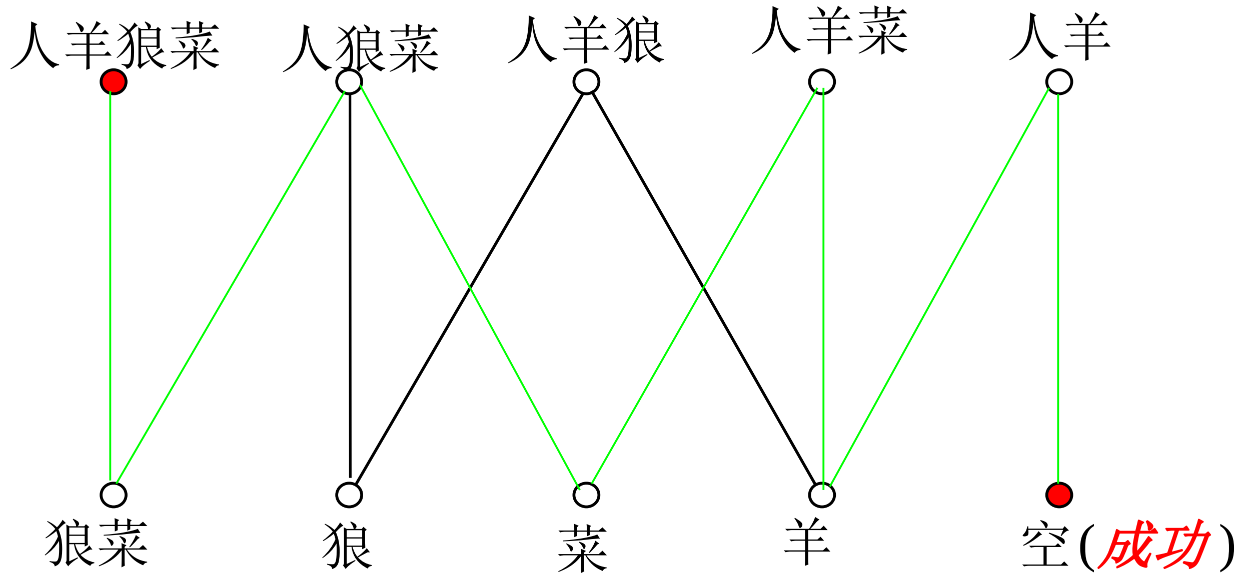
是什么思考帮助我们建模？
问题的答案是什么？

“巧渡河”问题

- 问题：人、狼、羊、菜用一条只能同时载两位的小船渡河，“狼羊”、“羊菜”不能在无人在场时共处，当然只有人能架船。
- 图模型：顶点表示“原岸的状态”，两点之间有边当且仅当一次合理的渡河“操作”能够实现该状态的转变。
- 起始状态是“人狼羊菜”，结束状态是“空”。
- 问题的解：找到一条从起始状态到结束状态的尽可能短的通路。

“巧渡河”问题的解

- 注意：在“人狼羊菜”的16种组合种允许出现的只有10种。



考试时间编排问题

- 问题：排考试时间，一方面要总时间尽可能短(假设教室没问题)，另一方面一个同学所选的任意两门课不能同时间。
- 图模型：每门课程对应一个顶点。任意两点相邻当且仅当对应的两门课程有相同的选课人。
- 解：用不同颜色给顶点着色。相邻的点不能同颜色。则最少着色数即至少需要的考试时间段数(可以将颜色相同的点所对应的课程安排在同一时间)。

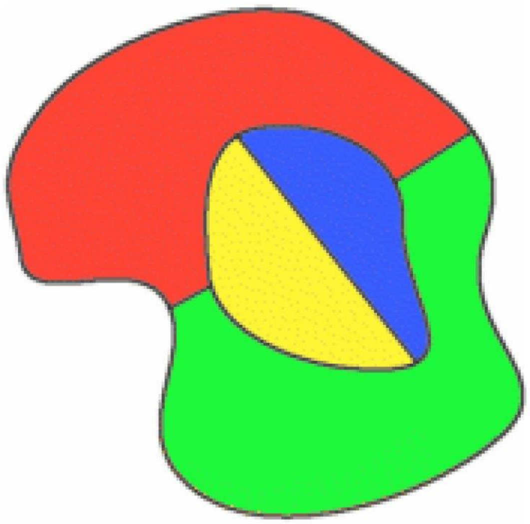
中国邮递员问题（管梅谷，1960）

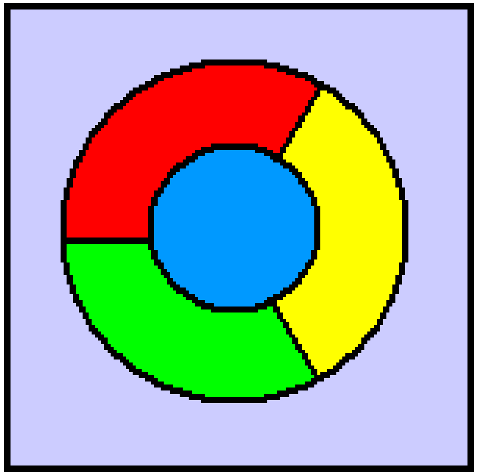
- 邮递员从邮局出发，走过辖区内每条街道*至少一次*，再回邮局，如何选择最短路线？
- **Euler**回路？添加重复边（权和最小）。

旅行商(TSP)问题

- **n个城市间均有道路，但距离不等，旅行商从某地出发，走过其它n-1个城市，且只经过一次，最后回到原地，如何选择最短路线?**
- **最短Hamilton回路。**

地图与平面图着色（四色定理）





图的表示

关联矩阵(*incidence matrix*)

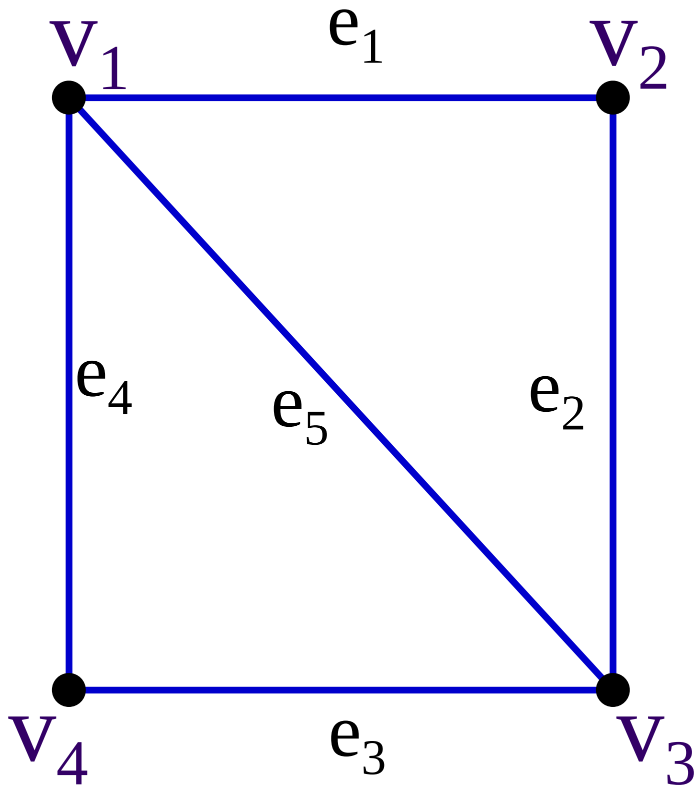
- 无向图G = (V, E, φ)， 不妨设V＝{v_1， …， v_n}， E＝{e_1， …， e_m}。
- M(G) ＝$[m_{ij}]$称为G的关联矩阵(n×m阶矩阵), 其中

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果}e_j\text{关联}v_i \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$v_i \in \varphi(e_j)$

- 无向图G可以是伪图(含环或多重边)。

举例（关联矩阵）



$$M(G) = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

关联矩阵表示法不适合于有向图

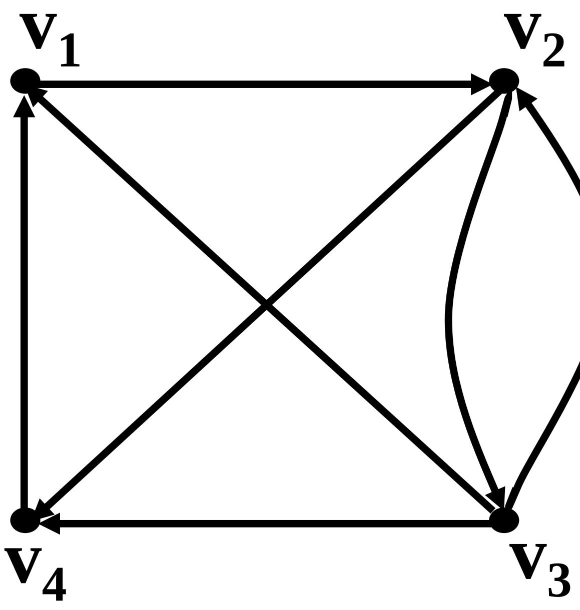
邻接矩阵(*adjacency matrix*)

- 简单有向图G = (V, E, φ)， 设V＝{v_1， …， v_n}，E＝{e_1， …， e_m}。
- A(G)＝[a_{ij}]称为G的邻接矩阵(n×n阶矩阵)， 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{如果}v_i\text{邻接到}v_j \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$$

$\exists e \in E.\ \varphi(e)=(v_i, v_j)$

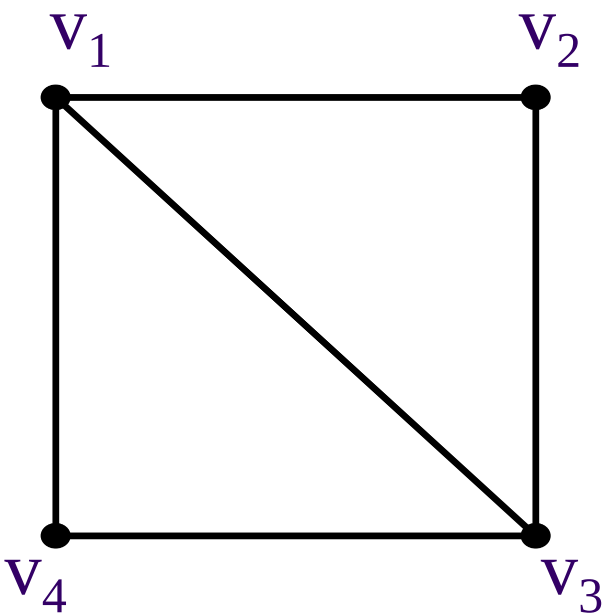
举例（邻接矩阵）



$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可推广到简单无向图

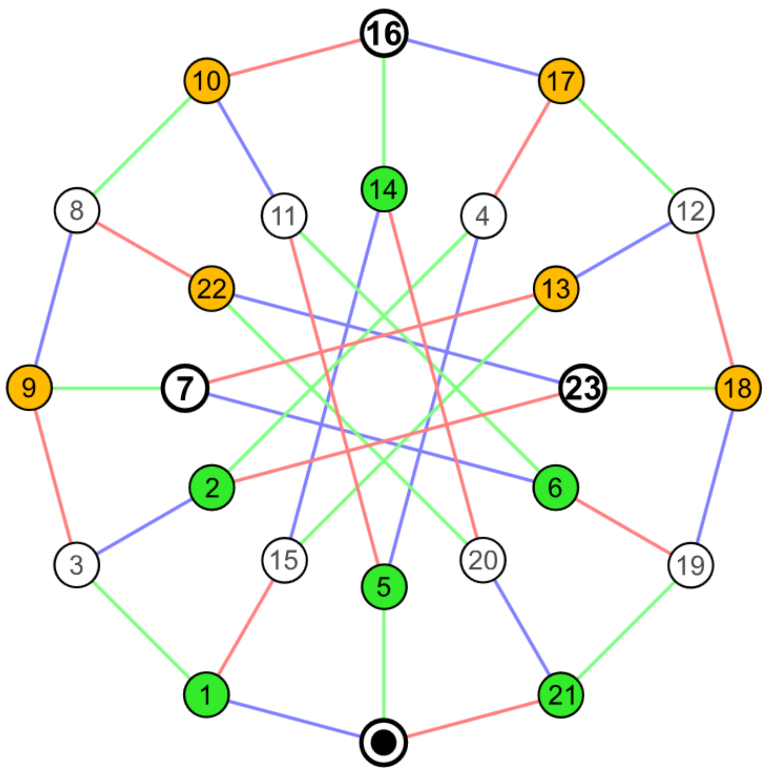
举例（邻接矩阵）

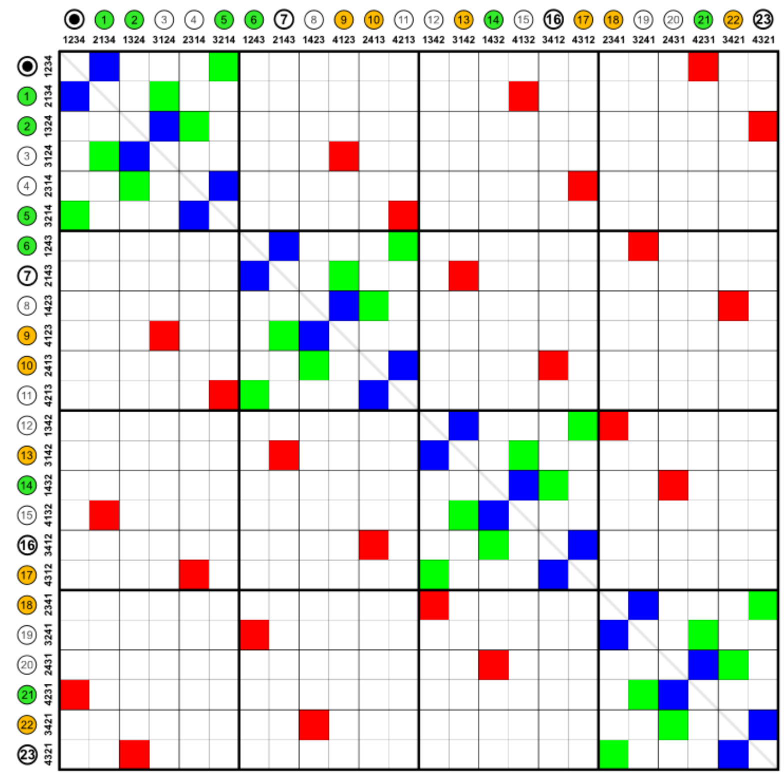


$$A(G) = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix}$$

简单无向图的邻接矩阵是对称矩阵

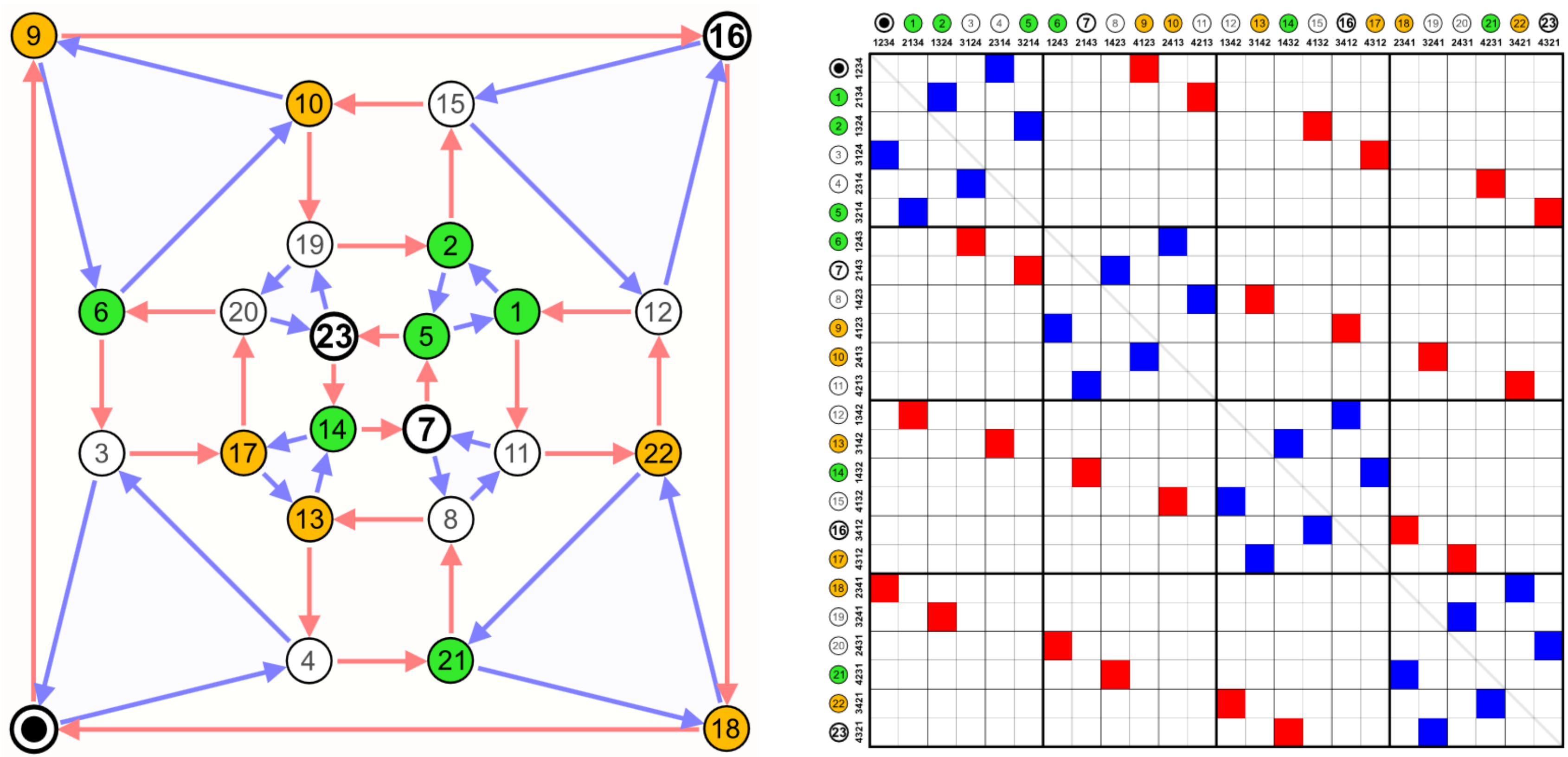
举例（邻接矩阵）





The Nauru graph, from Wikipedia

举例（邻接矩阵）

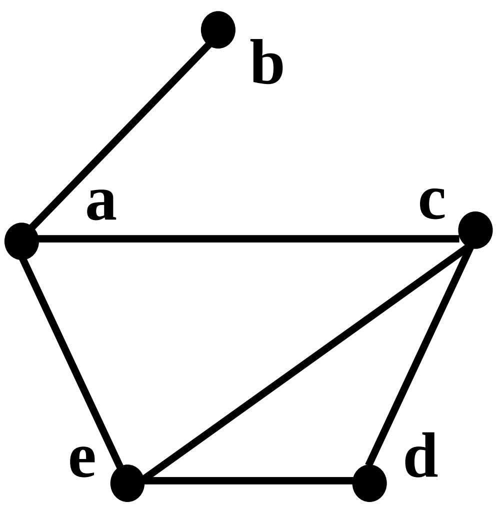


Directed Cayley graph of $S_{4,}$ from Wikipedia

邻接表

φ是单射

- 若图G = (V, E, φ) 没有多重边，列出这个图的所有边。对每个顶点，列出与其邻接的顶点。

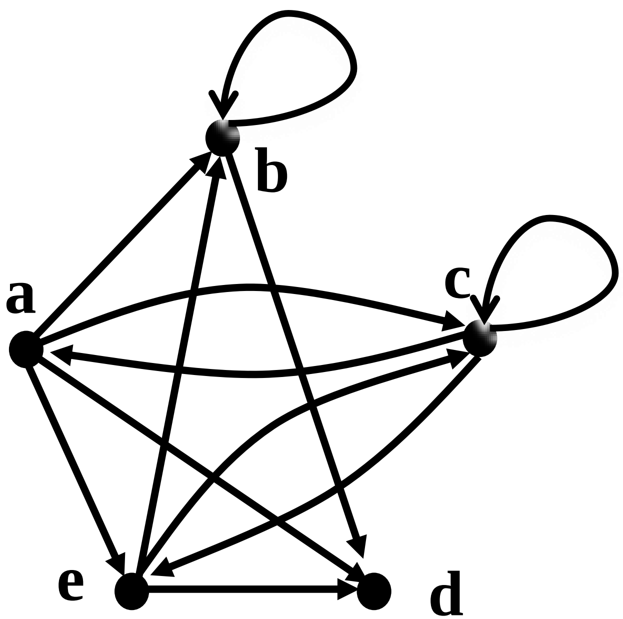


顶 点	相邻顶点
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

邻接表（有向图）

φ是单射

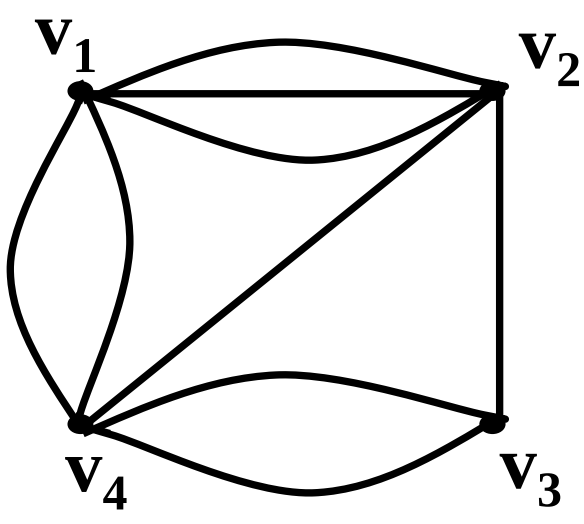
- 若图G = (V, E, φ) <u>没有多重边</u>，列出这个图的所有边。对每个顶点，列出与其邻接的顶点。



顶点	相邻顶点
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

关于邻接矩阵

- 通常，邻接矩阵中的元素为0和1，称为布尔矩阵。
- 邻接矩阵也可表示包含多重边的图，此时的矩阵不是布尔矩阵。



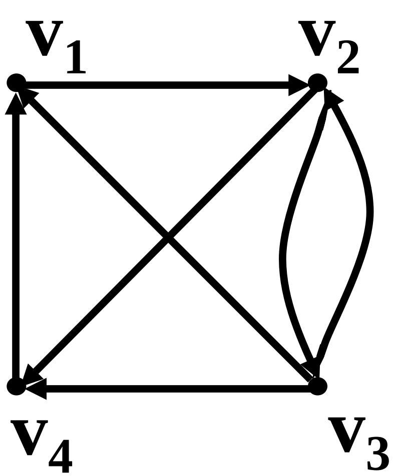
$$A=\begin{Bmatrix}0 & 3 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 0\end{Bmatrix}$$

关于邻接矩阵

- 当有向图中的有向边表示关系时，邻接矩阵就是关系矩阵。无向图的邻接矩阵是对称的。
- 图G的邻接矩阵中的元素的次序是无关紧要的，只要进行行和行、列和列的交换，则可得到相同的矩阵。
  - 若有二个简单有向图，则可得到二个对应的邻接矩阵，若对某一矩阵进行行和行、列和列之间的交换后得到和另一矩阵相同的矩阵，则此二图同构。

邻接矩阵的运算

- 顶点的度
  - 行中1的个数就是行中相应结点的出度
  - 列中1的个数就是列中相应结点的入度



$$A = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$Deg^{+}(1)=1, Deg^{-}(1)=2$

$Deg^{+}(2)=2, Deg^{-}(2)=2$

$Deg^{+}(3)=3, Deg^{-}(3)=1$

$Deg^{+}(4)=1, Deg^{-}(4)=2$

邻接矩阵的运算

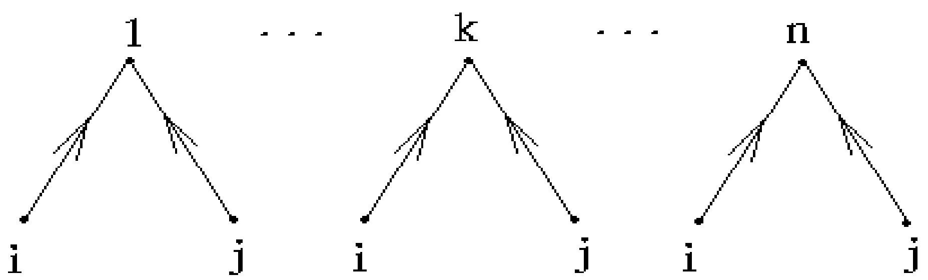
- 逆图（转置矩阵）
  - 设G的邻接矩阵为A，则G的逆图的邻接矩阵是A的转置矩阵，用A^T表示。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}\qquad A^T=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的运算

$$A \times A^T = B = [b_{ij}]$$

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times a_{jk} = a_{i1} \times a_{j1} + a_{i2} \times a_{j2} + \Lambda + a_{in} \times a_{jn}$$

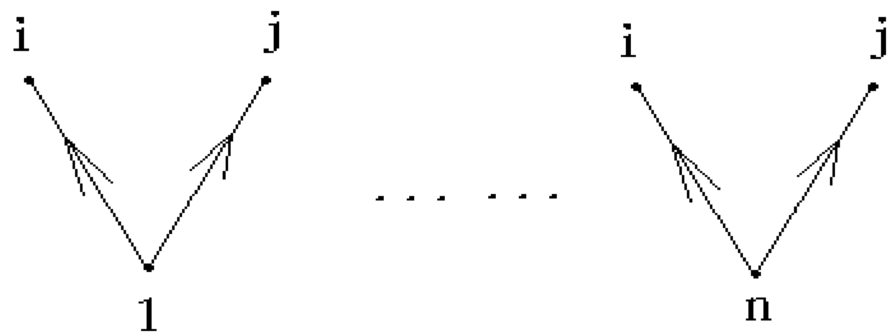


- b_{ij}表示结点i和结点j均有边指向的那些结点的个数；
- 若i＝j，则b_{ii}表示结点i的出度。

邻接矩阵的运算

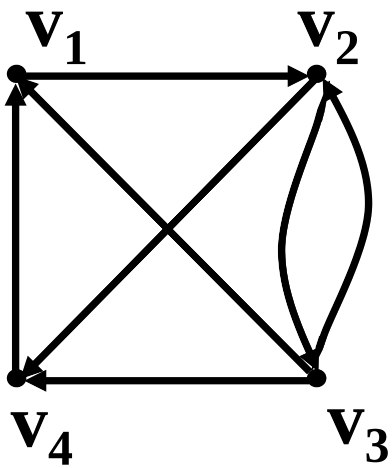
$$A^T \times A = C = [C_{ij}]$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \times a_{kj} = a_{1i} \times a_{1j} + a_{2i} \times a_{2j} + \Lambda + a_{ni} \times a_{nj}$$



- C_{ij}表示同时有边指向结点i和结点j的那些结点的个数；
- 若i＝j，则C_{ii}表示结点i的入度。

邻接矩阵的运算



$$A=\left\{\begin{matrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{matrix}\right\}$$

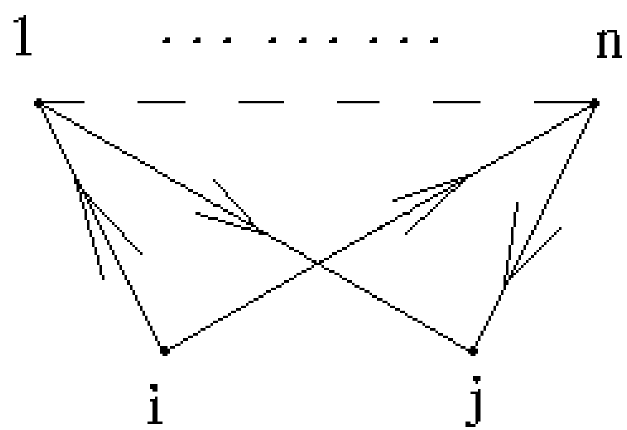
$$A\times A^{T}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&2&1&0\\1&1&3&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$A^{T}\times A=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}$$

邻接矩阵的运算

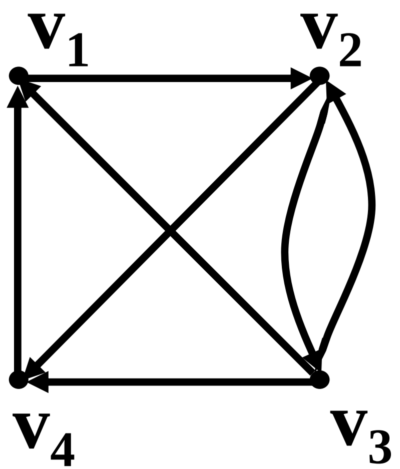
$$A \times A = A^2 = D = [d_{ij}]$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times a_{kj} = a_{i1} \times a_{1j} + \Lambda + a_{in} \times a_{nj}$$



- 若$a_{ik} \times a_{kj} = 1$，则表示有i→k→j长度为2的有向边；
- d_{ij}表示i和j之间具有长度为2的通路个数。

邻接矩阵的运算



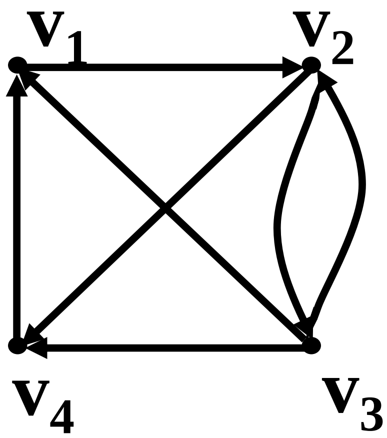
$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=A^2\times A=\begin{bmatrix}2&1&0&1\\1&2&1&1\\2&2&1&2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

- 从$v_2\rightarrow v_1$，有二条长度为2的通路；有一条长度为3的通路

邻接矩阵的运算



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = A^1 + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ 7 & 7 & 4 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

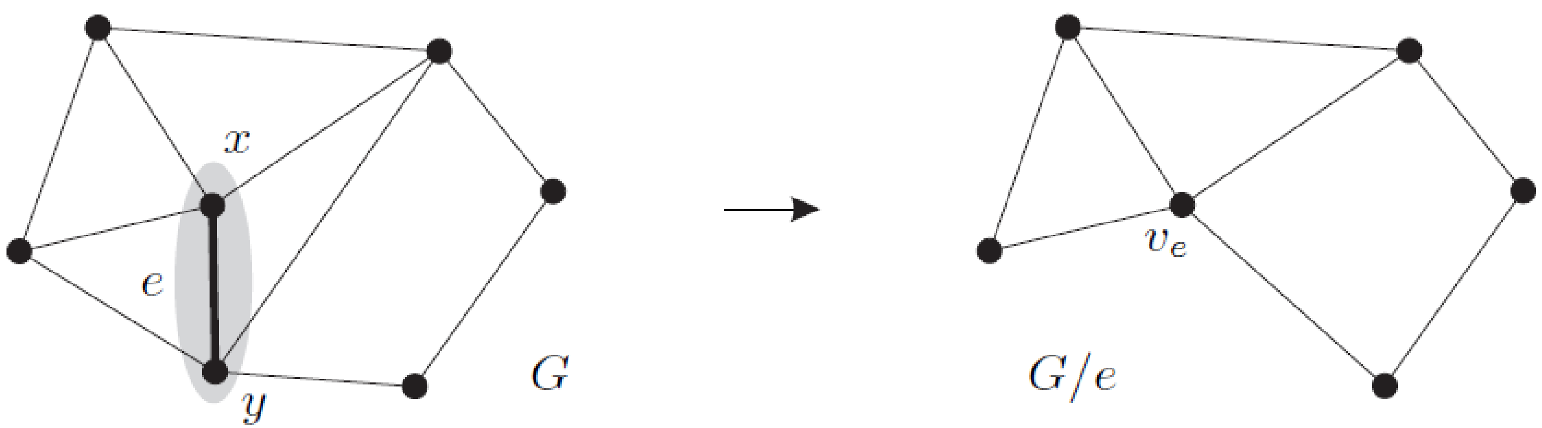
- 长度不大于k的通路个数

邻接矩阵的运算

- 回顾：Warshall算法

图的运算

- 加新边:$G+e$
- 减边或边集：$G-e$
- 减点或点集: $G-v$ （同时删除与v关联的边）
- 边的收缩: G/e



图的运算

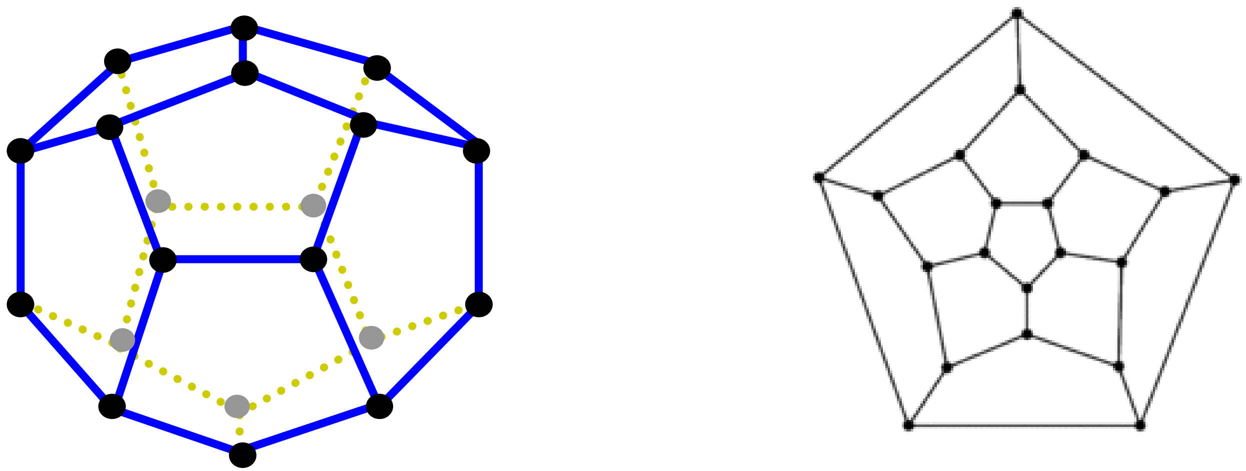
- $G \cup G'$：以$V(G) \cup V(G')$中的顶点组成的集合为顶点集,以$E(G) \cup E(G')$为边集。 //简单图的并
- 假设G和G’是不交的无向图, 定义$G * G'$如下：
  - 以$V(G) \cup V(G')$为顶点集
  - 以$E(G) \cup E(G') \cup \{\{x, y\} \mid x \in V(G), y \in V(G')\}$为边集
- 举例, $K_2 * K_3 = K_5$.
- 简单图G的补图（complement graph），记为 G
  - $G=(V, E)$ 的补图定义为 $(V, [V]^2 \setminus E)$

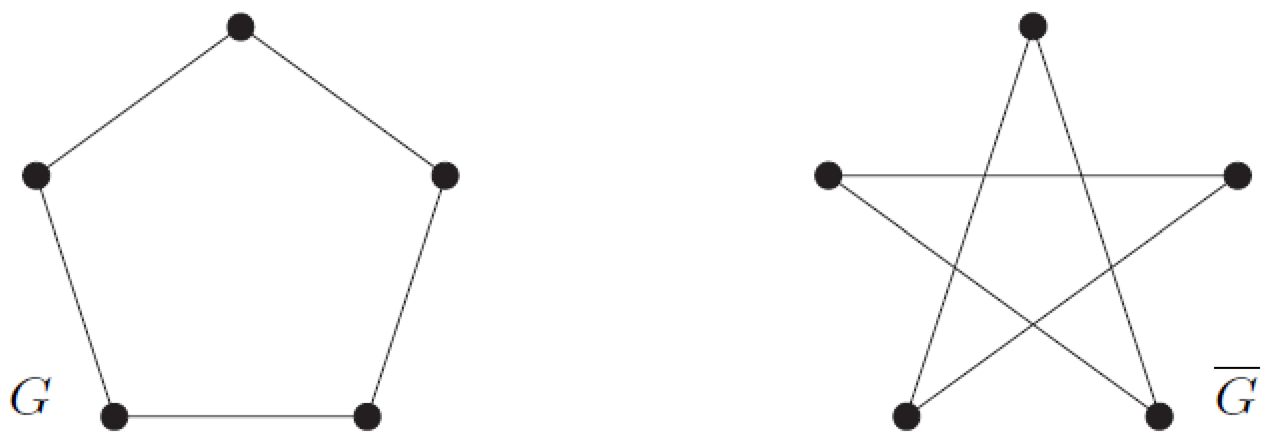
图的同构

- 图同构的定义
  - 设$G_1=(V_1, E_1, \varphi_1)$和$G_2=(V_2, E_2, \varphi_2)$是两个简单无向图。若存在双射$f: V_1 \rightarrow V_2$, u和v在G_1中相邻当且仅当 $f(u)$和$f(v)$在G_2中相邻。此时称f是一个同构函数。
  - 设$G_1=(V_1, E_1, \varphi_1)$和$G_2=(V_2, E_2, \varphi_2)$是两个无向图。若存在双射$f: V_1 \rightarrow V_2$, $g: E_1 \rightarrow E_2$,

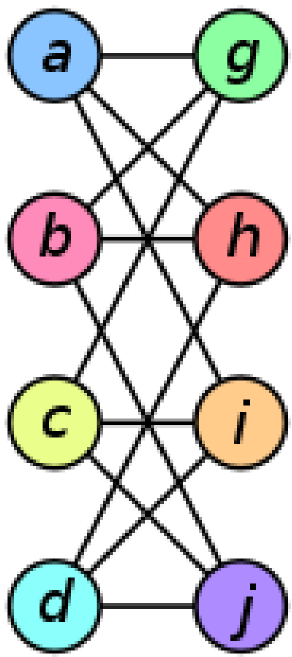
$\forall e \in E_1$, $\varphi_1(e)=\{u, v\}$当且仅当$g(e) \in E_2$, $\varphi_2(g(e))=\{f(u), f(v)\}$

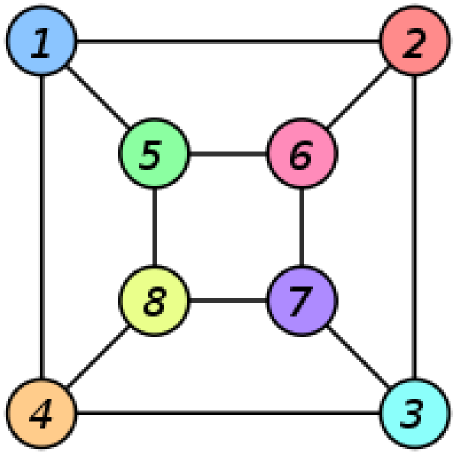
图同构的例子





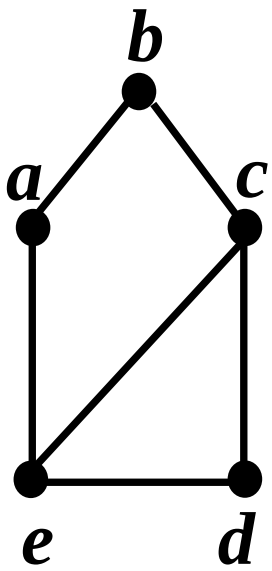
图同构的例子



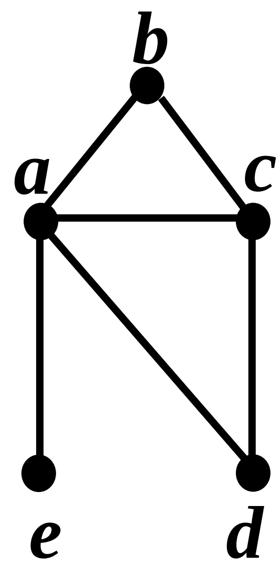


检测两个简单图是否同构

- 图同构下保持的性质称为图不变的
  - 顶点数、度序列、...
- 利用图不变的性质（没有保持）来推断出不同构

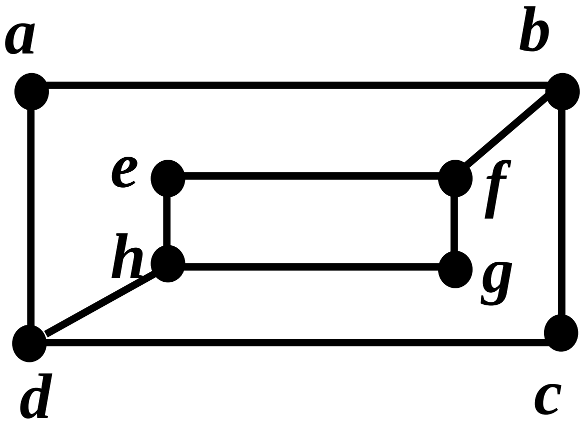


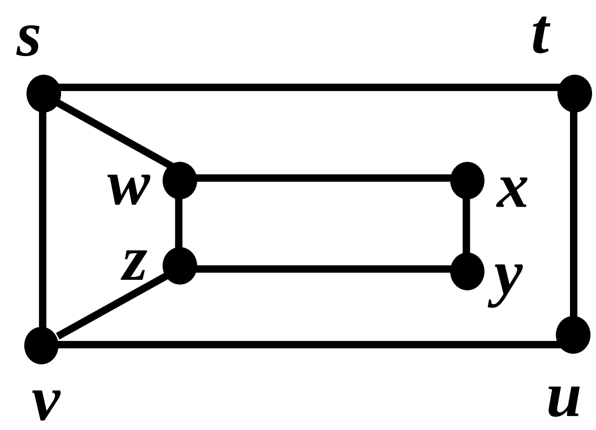
图G



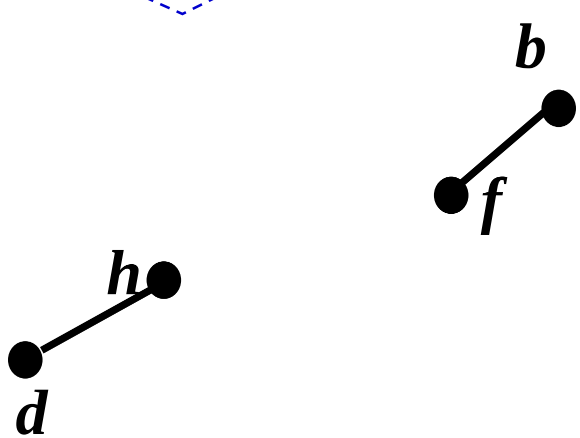
图H

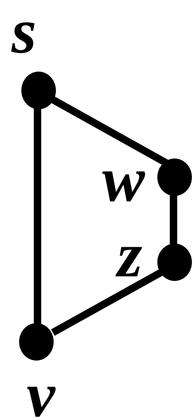
检测两个简单图是否同构





3度顶点导出子图





检测两个简单图是否同构

- 若图G与图H同构，则对于任意自然数k,
  - G的k度顶点导出子图与H的k度顶点导出子图同构
- 若对于任意自然数k，G的k度顶点导出子图与H的k度顶点导出子图同构， G与H是否同构？
  - 肯定的话，请证明之。
  - 否定的话，请举反例。

“图同构”问题

- 尚未找到多项式时间复杂度的算法
- 尚未证明：图同构问题是NP-完全的（NP-Complete）
- **Luks, 1983:** $\exp(O(\sqrt{n \log n}))$
- **László Babai, 2017:** $(\exp((\log n)^{O(1)}))$

quasipolynomial time

“子图同构”问题

- 给定简单图G和H，G是否与H的某个子图同构？
- 已经证明：子图同构问题是NP-完全的。
- 那么，对于一些特殊类型的图G呢？
  - K_m
  - C_m

作业

- **见QQ群**