

# 离散数学作业 21-图的基本概念

如无特意说明，以后各题只考虑有限个顶点的图。

## Problem 1

证明或反驳：若无向图  $G$  至少有两个顶点且各顶点度数均不相同，则  $G$  不是简单图。

## Problem 2

令  $G$  是至少有两个顶点的无向图，证明或反驳

- a) 从图中删去一个度最大的顶点不会使其顶点平均度增加
- b) 从图中删去一个度最小的顶点不会使其顶点平均度减少

## Problem 3

**度序列：**一个图的度序列是由图的各个顶点度按非递增序排列的序列（书 P.561）

判断下列序列是否能作为简单图的度序列。如果是，请画出一个简单图使其具有给定的度序列；若否，请说明理由。

- a) 7,6,5,4,3,2,1,0
- b) 3,3,3,3
- c) 5,4,2,1,1,1
- d) 5,4,3,2,2

## Problem 4

设无向图  $G$  有  $\nu$  个顶点， $\varepsilon$  条边， $\delta(G)$  和  $\Delta(G)$  分别表示  $G$  中度最小和度最大的顶点的度，证明  $\delta(G) \leq \frac{2\varepsilon}{\nu} \leq \Delta(G)$ 。（其中  $\frac{2\varepsilon}{\nu}$  称为图的**顶点平均度**）

## Problem 5

令  $G$  是一个顶点平均度为  $a$  的无自环的无向图。

a) 证明:  $G$  删去一个顶点  $x$  后平均度至少为  $a$ , 当且仅当  $\deg(x) \leq \frac{a}{2}$ ;

b) 证明或反驳: 如果  $a > 0$ , 那么  $G$  有一个最小度大于  $\frac{a}{2}$  的子图。

## Problem 6

有  $n$  支球队 ( $n \geq 4$ ), 已经比赛完了  $n+1$  场, 证明一定有一个球队比赛了至少 3 场

## Problem 7

证明: 不包含三角形  $K_3$  作为子图的  $n$  阶图, 其边数  $m$  必满足  $m \leq \frac{n^2}{4}$ 。