

离散数学第十五次作业-代数系统引论

Problem 1

设 S 为一 n 元集,

- (1) S 上可以定义多少个不同的二元运算?
- (2) 其中有多少个二元运算是可交换的?
- (3) 其中有多少个二元运算是幂等的?
- (4) 其中有多少个二元运算是既不可交换又不幂等的?

Problem 2

设 $A = \{0, 1\}$, $S = A^A$,

- (1) 试列出 S 中的所有元素;
- (2) 给出 S 上函数复合运算的运算表, 并指出单位元、零元和每一个可逆元素的逆元。

Problem 3

设 $A = \{a, b, c\}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, 能否确定 a, b, c 的值使得

- (1) A 对普通加法封闭?
- (2) A 对普通乘法封闭?

Problem 4

判断下列集合对所给的二元运算是否封闭：

- (1) 整数集合 \mathbb{Z} 和普通的减法运算。
- (2) 非零整数集合 \mathbb{Z}^* 和普通的除法运算。
- (3) 全体 $n \times n$ 实数矩阵集合 $M_n(\mathbb{R})$ 和矩阵加法及乘法运算，其中 $n \geq 2$ 。
- (4) 全体 $n \times n$ 实可逆矩阵集合关于矩阵加法和乘法运算，其中 $n \geq 2$ 。
- (5) 正实数集合 \mathbb{R}^+ 和 \circ 运算，其中 \circ 运算定义为：

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, a \circ b = ab - a - b$$

- (6) $\mathbb{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $n \geq 2$ 。 \circ 运算定义如下：

$$\forall a, b \in \mathbb{A}, a \circ b = b$$

- (7) $\mathbb{S} = \{0, 1\}$ 关于普通加法和乘法运算。
- (8) $\mathbb{S} = \{x | x = 2^n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算。
- (9) $\mathbb{S} = \{x | x = \ln n, n \in \mathbb{Z}^+\}$ 关于普通的加法和乘法运算。

Problem 5

\mathbb{R} 为实数集，定义以下 4 个函数 f_1, f_2, f_3, f_4 。 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有

$$f_1((x, y)) = x \cdot y, \quad f_2((x, y)) = x - y,$$

$$f_3((x, y)) = \max(x, y), \quad f_4((x, y)) = |x - y|$$

- (1) 判断上述二元运算是否为可交换、可结合、幂等的。
- (2) 求上述二元运算的单位元、零元以及每一个可逆元素的逆元。
- (3) 设 $A = \{a, b\}$ ，试给出 A 上一个不可交换、也不可结合的二元运算。

Problem 6

设 $S = \{1, 2, \dots, 10\}$, 问下面定义的运算能否与 S 构成代数系统 $\langle S, * \rangle$?
如果能, 则说明 $*$ 运算是否满足交换律、结合律, 并给出单位元和零元。

- (1) $x * y = \gcd(x, y)$, $\gcd(x, y)$ 是 x 与 y 的最大公约数。
- (2) $x * y = \text{lcm}(x, y)$, $\text{lcm}(x, y)$ 是 x 与 y 的最小公倍数。
- (3) $x * y =$ 大于等于 x 和 y 的最小整数。
- (4) $x * y =$ 质数 p 的个数, 其中 $x \leq p \leq y$ 。

Problem 7

判断下列集合能否构成代数系统 $V = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ 的子代数:

- (1) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 的某次幂可以被 } 16 \text{ 整除} \}$
- (2) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 的某次幂可以被 } y \text{ 整除} \}$
- (3) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 与 } 5 \text{ 互素} \}$
- (4) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是 } 30 \text{ 的因子} \}$
- (5) $\{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \text{ 是 } 30 \text{ 的倍数} \}$

Problem 8

设 $S = \{a, b, c, d\}$, 定义 S 上的一个二元运算 \circ 如下表所示:

\circ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

1. 请指出代数系统 $V = \langle S, \circ \rangle$ 的单位元和零元，并尝试给出 V 的所有子代数；
2. 如果保持 S 不变，同时要求代数系统有唯一单位元 a ，运算 \circ 满足结合律且每个元素在运算 \circ 下都有逆元。若把将 b, c, d 三个元素任意交换后相同的运算表当作同一种情况（同构），请画出所有满足条件的 \circ 的运算表。