南京大学 计算机科学与技术系
Department of Computer Science & Technology, NJU

计算机中的信息表示

补充阅读材料

How a computer represents information internally?

刘奇志

进制

- 一个数可以用不同的进制来表示。常用的进制有：
  - 十进制（0～9，逢十进一）
  - 二进制
    - 二进制（0～1，逢2进一）
    - 八进制（0～7，逢8进一）
    - 十六进制（ 0～9、A～F，逢16进一）

- 例如，对于十进制数：29
  - 二进制表示为：11101
  - 八进制表示为：35
  - 十六进制表示为：1D

二进制数的运算

$$
\begin{array}{r}
(1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1)_2 \\
+\ (_1\ 1_1\ \ 1_1\ \ 1\ \ 0_1\ \ 1)_2 \\
\hline
(1\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 0)_2
\end{array}
$$

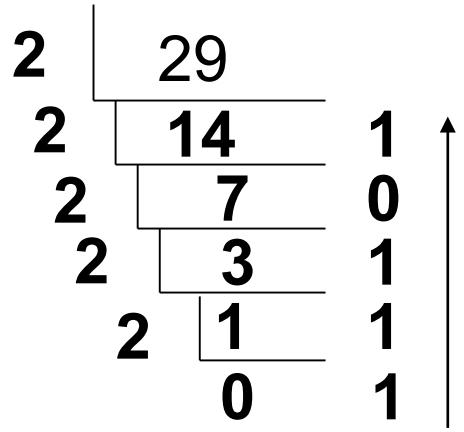
$$
\begin{array}{r}
(3\ \ 5)_8 \\
+\ (3_1\ \ 5)_8 \\
\hline
(7\ \ 2)_8
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
(1\ \ D)_{16} \\
+\ (1_1\ \ D)_{16} \\
\hline
(3\ \ A)_{16}
\end{array}
$$

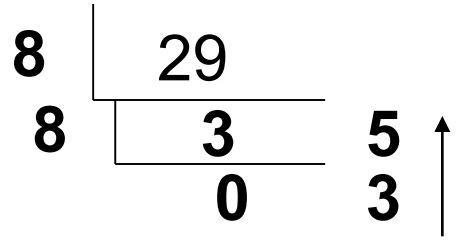
二进制与十进制之间的转换（整数）

- 二进制转成十进制（29）
  - $(11101)_2=1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=29$
  - $(35)_8=3\times8^1+5\times8^0=29$
  - $(1D)_{16}=1\times16^1+13\times16^0=29$

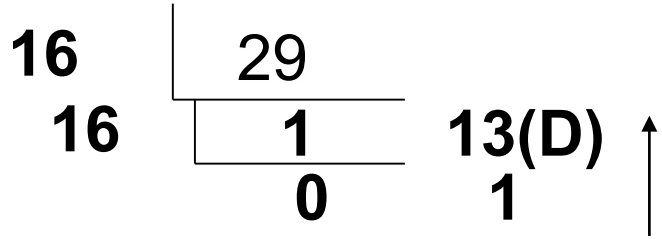
- 十进制（29）转成二进制



（二进制）



（八进制）



（十六进制）

二进制与十进制之间的转换（小数）

- 二进制转成十进制
  - $(0.1101)_2 = 1\times2^{-1}+1\times2^{-2}+0\times2^{-3}+1\times2^{-4} = 0.8125$

- 十进制转成二进制
  - 乘以2取整数位，直到乘积为整

0.8125	×2
1.625	×2
1.25	×2
0.5	×2
1.0	

二进制与八、十六进制之间的转换

- 整数：从低位向高位每三/四位一组，高位不足补0
- 小数：从高位向低位每三/四位一组，低位不足补0

(11101.1101)2
= (011 101.110 100)2 = (35.64)8
= (0001 1101.1101)2 = (1D.D)16

机器数

- 真值：在数值前面用“+”号表示正数，“-”号表示负数的带符号二进制数。
  - +1010111
  - -1010111

- 机器数：用“0”表示符号“+”，用“1”表示符号“-”，即把真值的符号“数值化”后的二进制数（原码）。
  - 8位（1字节）：01010111，11010111
  - 16位（2字节）： 00000000 01010111，10000000 01010111

溢出问题

- **假定用一个字节存储数据**
  - 不考虑符号

$$
\begin{array}{rl}
 & (1111\ 1111) \\
+ & (0000\ 0001) \\
\hline
1 & (0000\ 0000)
\end{array}
$$

  - 考虑符号

$$
\begin{array}{rl}
 & (0111\ 1111) \\
+ & (0000\ 0001) \\
\hline
 & (1000\ 0000)
\end{array}
$$

- 解决办法：加宽存储空间

原码存在的问题

- 问题1：0的机器数（原码）不唯一
  - 以8位为例：00000000，10000000

- 问题2：减法运算借位不方便；改成加负数,结果不正确
  - 以8位为例：

	（0000 0011）	原码	3
-	（0000 1101）	原码	13
	（ ?10）	原码	

	（0000 0011）	原码	3
+	（1000 1101）	原码	-13
	（1001 0000）	原码	?

- 解决办法：补码

补码（complement）

- 补码的定义
  - 符号位：+→0，- → 1
  - 其他位：

$$[X]_{补}=\begin{cases} X & 0\leqslant X<2^{n-1} \\ 2^{n-1}-|X| & -2^{n-1}\leqslant X<0 \end{cases}$$

$[X]_{补}$所能表示数的范围为：

$$[-2^{n-1},\ (2^{n-1}-1)]$$

X = -10000000（-128）
8位:
$[X]_{原}$ = 溢出
$[X]_{补}$ = 1 0000000

- **补码的简单求法**
  - **正数：同原码**
  - **负数：符号位同原码，其余各位取反，末位加1**

真值X：	+1010111	-1010111
$[X]_{原}$(8位)：	01010111	11010111
$[X]_{原}$(16位)：	0000000001010111	1000000001010111
$[X]_{补}$(8位)：	01010111	10101001
$[X]_{补}$(16位)：	0000000001010111	1111111110101001

- 由于每位二进制数只有0和1两种，故$2^{n-1}-|X|$就相当于是对$|X|$的各位“取反加1”，“取反加1”只是对补码定义中$2^{n-1}-|X|$的简单记忆法。

- **补码的优势**
  - **数据0的补码只有00000000(8位)**
    10000000(8位)是-128的补码
  - **可将减法变成加法，结果正确**

	（0000 0011）	补码	3
+	（1111 0011）	补码	-13
	（1111 0110）	补码	-10

	（0000 0011）	原码	3
-	（0000 1101）	原码	13
	（ ?10）	原码	

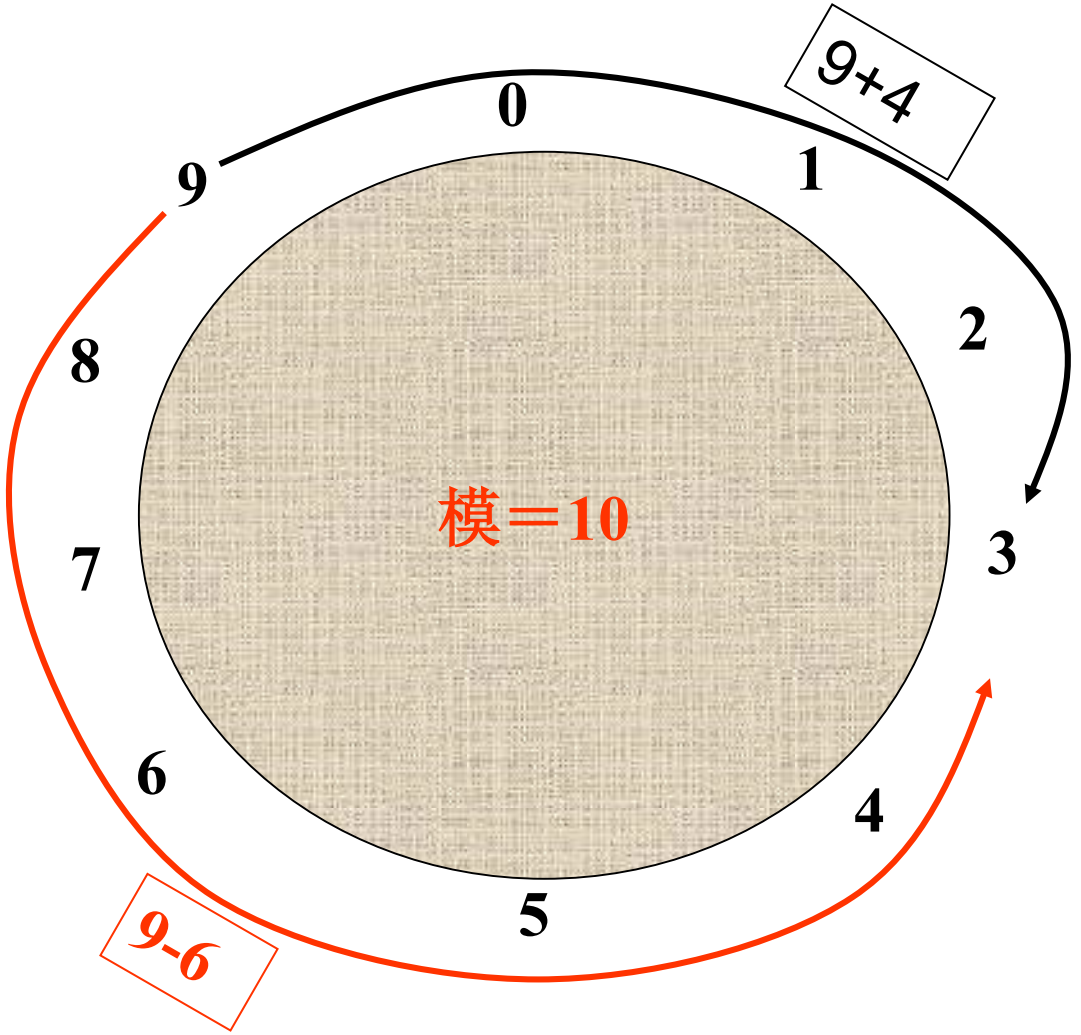
	（0000 0011）	原码	3
+	（1000 1101）	原码	-13
	（1001 0000）	原码	?

- 为什么补码可以将减法变成加法?

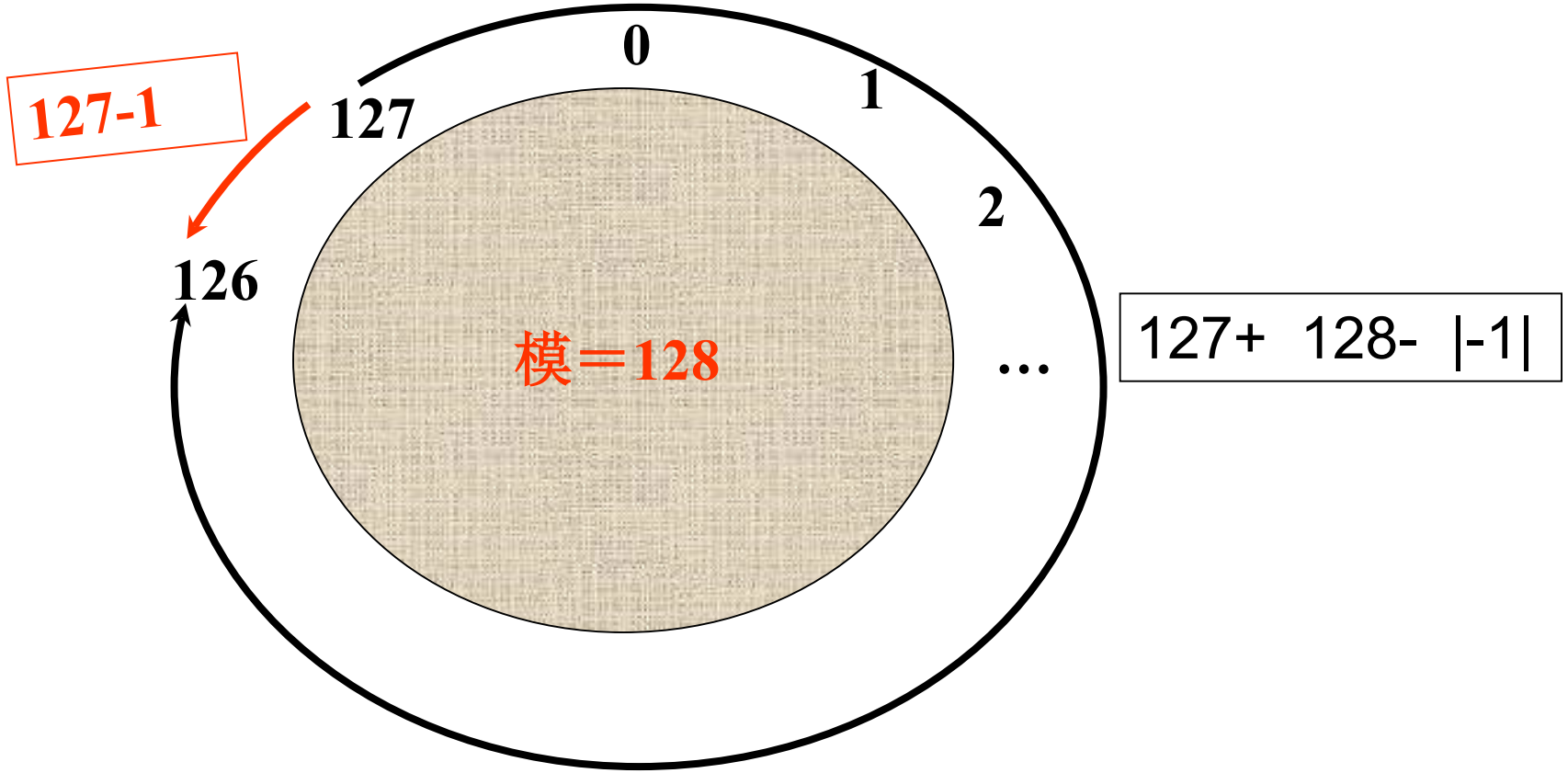
- 假设在圆盘上进行加减运算：
  - 加法：顺时针运动找到结果；
  - 减法：逆时针运动找到结果；
  - 运动一周，终点回到起点。

- 任一个数X(9)，减去一个数A(6)，总可以找到另一个数B(4)，使得X+B=X-A(9+4=9-6)，于是称B(4) 是 －A(-6) 的补数。

- 因为逆时针运动能到达的点，顺时针运动一定也能到达，两种运动跨度之和叫做模(=|-A|+B) 。



- 再假设这个圆盘的模改为128，则圆盘上的任一个数X-A，相当于X+B，其中，B=128-|-A|，B是-A的补数.



- 推广
  - $[X]_{补}$= 模 - |X|

- 对于8位二进制数：模为1000 0000，则

  $[X]_{补}$=1000 0000-|X|

- 如果模为2^{n-1} ，则

  $[X]_{补}$= 2^{n-1} - |X|

计算机中的实数**（non-integral numbers）

- 定点数
- 浮点数
- BCD
- 对数数字系统（Logarithmic number systems）
- 任意精度（arbitrary-precision）浮点数计算系统
- 比例计算（rational arithmetic ）软件包（分数）
- 其它计算软件（Computer algebra systems），如Mathematica等...

定点数（Fixed-point）

- 定点数就是约定小数点的位置固定不变。
- 定点整数（纯整数）：小数点在数的最右方
- 定点小数（纯小数）：小数点在符号位之后
- 小数点是隐含的，不另开辟空间存放
- 定点小数（纯小数）的小数点前的0也是隐含的，不另开辟空间存放

定点数可表示数值的范围

码制	定点小数		定点整数	
	最大数	最小数	最大数	最小数
原码	$1-2^{-n}$	$-(1-2^{-n})$	2^n-1	$-(2^n-1)$
补码	$1-2^{-n}$	-1	2^n-1	-2^n

注意：表中的n不包括小数点或符号位

定点小数:

原码：

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1　$-(1-2^{-15})$

~0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1　$2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-15}=1-2^{-15}$

补码：

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0　-1

~0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1　$1-2^{-15}$

定点数的运算

- 参与运算的数要么都调整成整数
  - 3+0.5=(3×10+0.5×10)/10

比例因子

- 参与运算的数要么都调整成小数
  - 3+0.5=(3/100+0.5/100)×100

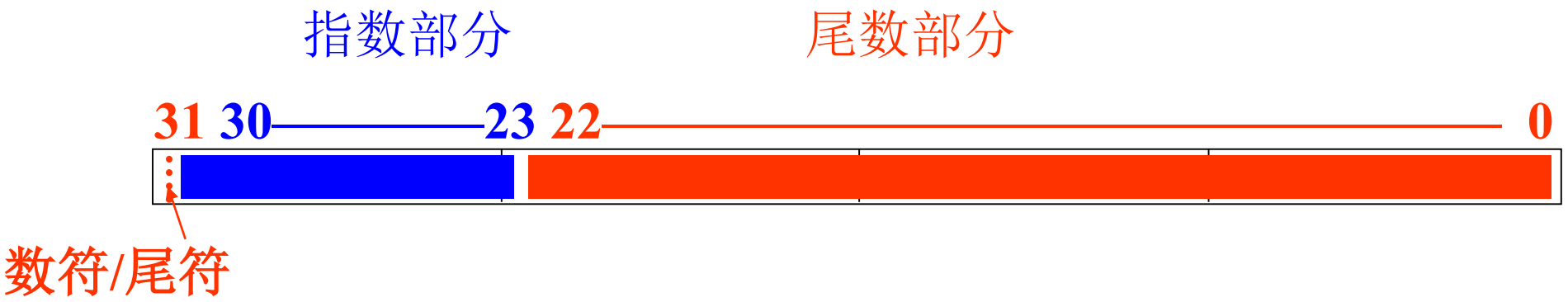
比例因子

- 比例因子选择不当，会产生溢出或降低运算精度。

浮点数（Floating point）

- ± $M \cdot R^E$
  - ±(S)，sign,数符.
  - M，mantissa,尾数，一般为定点小数，常用补码或原码表示，指明有效数字的位数，因而决定浮点数的精度.
  - R，radix,比例因子的基数，一般为2，8或16.
  - E，exponent,比例因子的指数，又称为浮点数的阶码，一般为定点整数，常用补码或移码表示，指明小数点在数据中的位置，因而决定浮点数的表示范围.

单精度浮点数格式（IEEE754）



尾数——原码，且规格化，且隐含存储1
指数——移码，是127的偏移（ $[X]_{移}=127+X$ ）

将-0.5按IEEE754单精度格式存储。

先将-0.5换成二进制并写成规格化：$-0.5 = -0.1_2 = -1.0\times2^{-1}{}_2$
这里s=1_2，M为全0_2，E=127+(-1)=126 = 01111110_2，
则存储形式为：10111111 00000000000000000000000

单精度浮点数值域

$$N_{\max} = 2^{127} \cdot (2 - 2^{-23})$$

$$N_{\min} = -2^{127} \cdot (2 - 2^{-23})$$

$$|N|_{\min} = 2^{-126}$$

指数范围为-126~127，对应移码为01~FE. (十六进制)
对于移码为00或为FF的情况，IEEE有特殊的规定：
移码为00：尾数是0，表示0
尾数不是0，表示绝对值非常小的数
移码为FF：尾数是0，表示无穷大
尾数不是0，不是一个数(NaN)

单精度浮点数的尾数用23位存储（除符号位外），
2^(23) ＝ 8388608，
故单精度浮点数的有效位数约是7位。

双精度浮点数的尾数用52位存储（除符号位外），2^(52) ＝4503599627370496，
故双精度的有效位数约是16位。

浮点数的规格化

为什么要进行浮点数的规格化?

浮点数尾数的位数表示数的有效数位，有效数位越多，数据的精度越高。为了在浮点数运算过程中，尽可能多地保留有效数字的位数 ，使有效数字尽量占满尾数数位，必须经常对浮点数进行规格化操作。

规格化数的标志

尾数最高位具有非零数字。即:

若基为R ，则|M|>=1/R

若R=2，则M=±0.1bb...bb 或 M=±1.bb...bb(IEEE754格式)

若用补码表示尾数，则，规格化数的标志为:

“尾数的符号位和最高位具有不同的代码”

BCD（Binary-coded decimal）

- 用四个二进制位储存一个十进制的数码
  - 有利于二进制和十进制之间进行快捷转换(相对于一般的浮点式表示法，BCD可减少电脑作浮点运算时所耗费的时间)
  - 有利于用二进制来精确表示十进制数

- BCD码有多种形式，常用的是8421码，每一位十进数码用四位二进数码表示，不允许出现1010～1111六种组合。

0	0000	5	0101
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001
10	0001 0000		
123	0001 0010 0011		
123.4	0001 0010 0011 . 0100		

- 可以采用1010～1111六种组合中的某种组合表示正号、负号或小数点等信息。

- 这种编码技巧，最常用于会计系统的设计里，因为会计制度经常需要对很长的数字串作准确的计算。 BCD也常用于其他需要高精度的计算场合。此外，基于BCD码设计电路，可以便于数码管显示数字，13(00001101):
0001 0011

- **采用BCD码运算时，逢16进1比逢10进1“迟钝”了6。怎么做才能得到正确的结果?**

$$
\begin{array}{r}
(0111)_{BCD}\ \ 7 \\
+\ (0110)_{BCD}\ \ 6 \\
\hline
(1101)_{BCD}\ \ 13?
\end{array}
$$

+6、60、66等修正

$$
\begin{array}{r}
(1101) \\
+\ (0110)_{BCD}\ \ 6 \\
\hline
(1\ 0011)_{BCD}\ \ 13
\end{array}
$$

- 但基于BCD码，不便于复杂计算（比如求sin(x)），所以很多情况下都不采用BCD码。

- 对数数字系统（Logarithmic number systems）
- 任意精度（arbitrary-precision）浮点数计算系统
- 比例计算（rational arithmetic）软件包（分数）
- 其他计算软件（Computer algebra systems），如Mathematica等…

ASCII码（American Standard Code for Information Interchange)

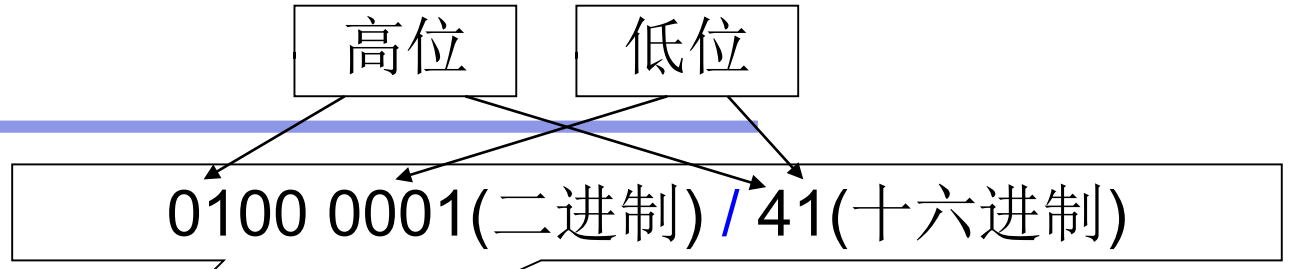
- **美国标准信息交换码**
  - ASCII码是常用的将字符转换成二进制数的标准代码。
  - ASCII码由8位二进制数组成，其中最高位为校验位，用于传输过程检验数据正确性，其余7位二进制数表示一个字符，共有128种组合。若校验位也扩展为数据位，则有256种组合。
  - 为了方便起见，常常用十六进制数或十进制数来描述二进制ASCII码，有些系统还定义了控制符来描述。
  - 原来是美国的国家标准，1967年被定为国际标准。

ASCII码 十进制	ASCII码 十六进制	字符	控制字符	意义	ASCII码 十进制	ASCII码 十六进制	字符	控制字符	意义
000	00		NULL		016	10	►	DLE	
001	01	☺	SOH		017	11	◄	DC1	
002	02	☻	STX		018	12	↕	DC2	
003	03	♥	ETX		019	13	‼	DC3	
004	04	♦	EOT		020	14	¶	DC4	
005	05	♣	ENQ		021	15	§	NAK	
006	06	♠	ACK		022	16	▬	SYN	
007	07	•	BELL	振铃	023	17	↨	ETB	
008	08	◘	BS	退格键	024	18	↑	CAN	
009	09		HT	定位键	025	19	↓	EM	
010	0A		LF	line feed	026	1A	→	SUB	档案结束
011	0B	♂	VT	home	027	1B	←	ESC	escape
012	0C	♀	FF	form feed	028	1C	L	FS	向右键
013	0D		CR	carriage return	029	1D	↔	GS	向左键
014	0E	♫	SO		030	1E	▲	RS	向上键
015	0F	☼	SI		031	1F	▼	US	向下键

ASCII 码		字符		ASCII 码		字符		ASCII 码		字符		ASCII 码		字符
十进制	十六进制			十进制	十六进制			十进制	十六进制			十进制	十六进制	
032	20			056	38	8		080	50	P		104	68	h
033	21	!		057	39	9		081	51	Q		105	69	i
034	22	"		058	3A	:		082	52	R		106	6A	j
035	23	#		059	3B	;		083	53	S		107	6B	k
036	24	$		060	3C	<		084	54	T		108	6C	l
037	25	%		061	3D	=		085	55	U		109	6D	m
038	26	&		062	3E	>		086	56	V		110	6E	n
039	27	'		063	3F	?		087	57	W		111	6F	o
040	28	(		064	40	@		088	58	X		112	70	p
041	29	)		065	41	A		089	59	Y		113	71	q
042	2A	*		066	42	B		090	5A	Z		114	72	r
043	2B	+		067	43	C		091	5B	[		115	73	s
044	2C	,		068	44	D		092	5C	\		116	74	t
045	2D	-		069	45	E		093	5D	]		117	75	u
046	2E	.		070	46	F		094	5E	^		118	76	v
047	2F	/		071	47	G		095	5F	_		119	77	w
048	30	0		072	48	H		096	60	`		120	78	x
049	31	1		073	49	I		097	61	a		121	79	y
050	32	2		074	4A	J		098	62	b		122	7A	z
051	33	3		075	4B	K		099	63	c		123	7B	{
052	34	4		076	4C	L		100	64	d		124	7C	|
053	35	5		077	4D	M		101	65	e		125	7D	}
054	36	6		078	4E	N		102	66	f		126	7E	~
055	37	7		079	4F	O		103	67	g		127	7F	

ASCII码		字符	ASCII码		字符	ASCII码		字符	ASCII码		字符
十进制	十六进制		十进制	十六进制		十进制	十六进制		十进制	十六进制	
128	80	Ç	160	A0	á	192	C0	└	224	E0	α
129	81	ü	161	A1	í	193	C1	┴	225	E1	ß
130	82	é	162	A2	ó	194	C2	┬	226	E2	Γ
131	83	â	163	A3	ú	195	C3	├	227	E3	π
132	84	ä	164	A4	ñ	196	C4	─	228	E4	Σ
133	85	à	165	A5	Ñ	197	C5	┼	229	E5	σ
134	86	å	166	A6	ª	198	C6	╞	230	E6	µ
135	87	ç	167	A7	º	199	C7	╟	231	E7	τ
136	88	ê	168	A8	¿	200	C8	╚	232	E8	Φ
137	89	ë	169	A9	⌐	201	C9	╔	233	E9	Θ
138	8A	è	170	AA	¬	202	CA	╩	234	EA	Ω
139	8B	ï	171	AB	½	203	CB	╦	235	EB	δ
140	8C	î	172	AC	¼	204	CC	╠	236	EC	∞
141	8D	ì	173	AD	¡	205	CD	═	237	ED	φ
142	8E	Ä	174	AE	«	206	CE	╬	238	EE	∈
143	8F	Å	175	AF	»	207	CF	╧	239	EF	∩
144	90	É	176	B0	▒	208	D0	╨	240	F0	≡
145	91	æ	177	B1	▓	209	D1	╤	241	F1	±
146	92	Æ	178	B2	▓	210	D2	╥	242	F2	≥
147	93	ô	179	B3	│	211	D3	╙	243	F3	≤
148	94	ö	180	B4	┤	212	D4	╘	244	F4	⌠
149	95	ò	181	B5	╡	213	D5	╒	245	F5	⌡
150	96	û	182	B6	╢	214	D6	╓	246	F6	÷
151	97	ù	183	B7	╖	215	D7	╫	247	F7	≈
152	98	ÿ	184	B8	╕	216	D8	╪	248	F8	°
153	99	Ö	185	B9	╣	217	D9	┘	249	F9	∙
154	9A	Ü	186	BA	║	218	DA	┌	250	FA	·
155	9B	¢	187	BB	╗	219	DB		251	FB	√
156	9C	£	188	BC	╝	220	DC		252	FC	^{n}
157	9D	¥	189	BD	╜	221	DD		253	FD	²
158	9E	₧	190	BE	╛	222	DE		254	FE	■
159	9F	ƒ	191	BF	┐	223	DF		255	FF	

常用字符的ASCII码值



ASCII码值 十进制	字符	ASCII码值十 进制	字符	ASCII码值十 进制	字符
0	(null)	65	A	97	a
10	换行	66	B	98	b
32	空格	…	…	…	…
48	0	90	Z	122	z
49	1	91	[	123	{
…	…			127	DEL
57	9				

其它码制

- 汉字字符集的个数远远超过256，可以用2个字节表示的编码（65536种组合）
  - GB2312（简体）
  - Big5（繁体）
- 国际通用大字符集
  - Unicode
- …

- 它们一般都兼容ASCII码

Unicode（*Universal Coded Character Set*）

- 使用16位的编码空间，也就是每个字符占用2个字节。这样理论上一共最多可以表示2^{16}即65536个字符。基本满足各种语言的使用。实际上当前版本的Unicode尚未填充满，保留了大量空间作为特殊使用或扩展。

- UTF-8（Unicode Transformation Format – 8 - bit）是一种根据 Unicode 标准定义的可变长度字符编码。兼容ASCII码。由 Ken Thompson和 Rob Pike于1992年创建。现在已经标准化为RFC 3629。UTF-8用1到6个字节编码Unicode字符。用在网页上可以统一页面显示中文简体繁体及其它语言（如英文，日文，韩文）。

Thanks!