离散数学第十七次作业
子群与拉格朗日定理

Problem 1

不定项选择题

设 H,K 是群 $<G,\circ>$ 的子群，下面哪些代数系统是 $<G,\circ>$ 的子群?

A.$< H \cup K, \circ >$　　B.$< H \cap K, \circ >$　　C.$< K - H, \circ >$　　D.$< H - K, \circ >$

Problem 2

设 G 为群, a 是 G 中给定元素, a 的正规化子 $N(a)$ 表示 G 中与 a 可交换的元素构成的集合，即 $N(a) = \{x | x \in G \wedge xa = ax\}$. 证明: $N(a)$ 是 G 的子群.

Problem 3

设 H 是群 G 的子群, $x \in G$, 令 $xHx^{-1} = \{xhx^{-1} | h \in H\}$, 证明 xHx^{-1} 是 G 的子群, 称为 H 的共轭子群.

Problem 4

设 H 和 K 分别为群 G 的 r, s 阶子群，若 r 与 s 互素，证明 $H \cap K = \{e\}$.

Problem 5

证明：若 G 中只有一个 2 阶元，则这个 2 阶元一定与 G 中所有元素可交换。

Problem 6

证明：在群 G 中，如果 $g,h \in G$ 满足 $gh = hg$，并且 $\gcd(|g|,|h|) = 1$，那么 $|gh| = |g||h|$
（提示：令 $N = |gh||g|$，使用阶的性质和交换律）

Problem 7

（正规子群与陪集）设群 G 有子群 H，H 是正规子群当且仅当

$$\forall g \in G, \forall h \in H : ghg^{-1} \in H$$

证明: 若子群 H 为正规子群，则左右陪集相等。即证 $\forall g \in G, gH = Hg$.

Problem 8

证明: 使用阶的概念证明费马小定理。即对素数 p 和任意整数 a, 均有 $a^p \equiv a \pmod p$。
（提示：考虑集合 $\mathbb{Z}_n^* := \{[m]_n \in \mathbb{Z}_n | \gcd(m,n) = 1\}$ 在乘法下构成的群。使用拉格朗日定理的拓展：元素的阶和群的阶之间的关系）