离散数学作业 19-代数格

Problem 1

令 $\langle D_{12}, |\rangle$ 表示 12 的所有正因子组成的偏序集。

(1) 证明 $\langle D_{12}, |\rangle$ 是一个偏序格，并由此定义运算 $*$ 和 $\circ$，证明 $\langle D_{12}, *, \circ\rangle$ 是对应的代数格

(2) 按照 (1) 的定义，说明 $\langle D_{12}, *, \circ\rangle$ 是否是一个有补格

(3) 按照 (1) 的定义，说明 $\langle D_{12}, *, \circ\rangle$ 是否是一个分配格

Problem 2

下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格.

(1) $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

(2) $L = \{1, 2, 3, 6, 12\}$;

(3) $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$;

(4) $L = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^n, \cdots\}$.

Problem 3

设 L 是格，求以下公式的对偶式：

(1) $a \wedge (a \vee b) \preceq a$;

(2) $a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

(3) $b \vee (c \wedge a) \preceq (b \vee c) \wedge a$.

Problem 4

设 L 是格，$a, b, c \in L$, 且 $a \preceq b \preceq c$, 证明 $a \vee b = b \wedge c$.

Problem 5

证明：证明：设 $\langle L, \preceq \rangle$ 为一个有补分配格，则 L 中所有元素的补元唯一。

Problem 6

设 $< L, \preceq >$ 是格，任取 $a \in L$，令 $S = \{x | x \in L \wedge x \preceq a\}$, 证明 $< S, \preceq >$ 是 L 的子格。

Problem 7

令 I 是格 L 的非空子集，若满足 $\forall a, b \in I, a \vee b \in I$ 和 $\forall a \in I, \forall x \in L, x \preceq a \Rightarrow x \in I$，则 I 是 L 的一个理想。
证明：L 的任意理想 I 是 L 的子格

Problem 8

令 $\langle A, \preceq \rangle$ 表示一个有限全序集。证明：

(1) A 是一个格并且是有界格

(2) 若 A 的元素超过两个，那么它不可能是有补格。

(3) A 是分配格

Problem 9

证明在任意格中，均有

(1) $x \vee (y \wedge z) \preceq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

(2) $x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$