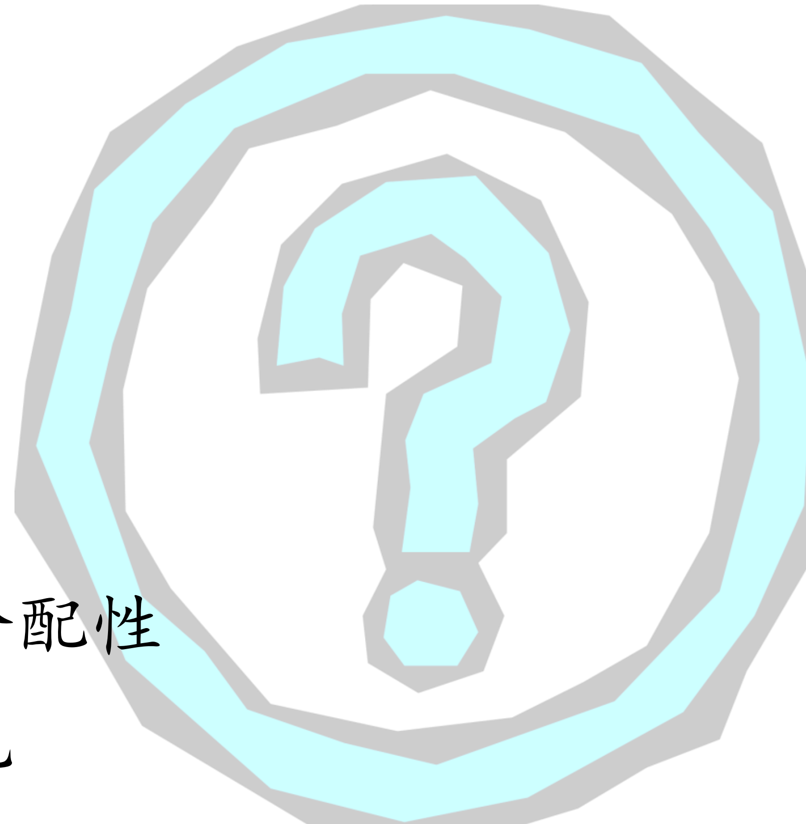
群论导引

离散数学一代数结构

南京大学计算机科学与技术系

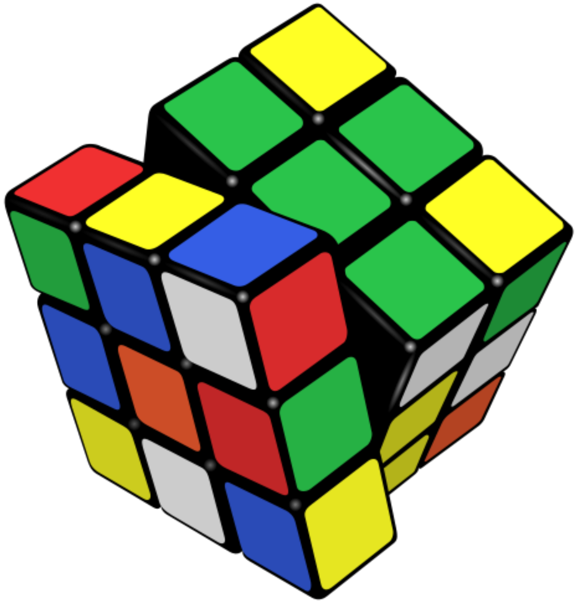
回 顾

- 运算及其封闭性
- 运算的性质
- 运算表
- 代数系统
- 代数系统的性质
  - 结合性、交换性、分配性
  - 单位元、零元、逆元
- 代数系统的同构与同态



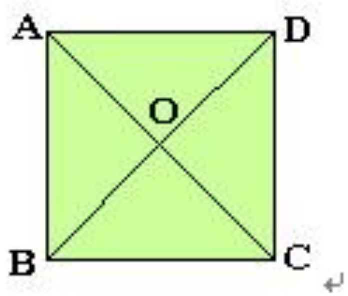
内容提要

- 引言
- 半群
- 幺半群
- 群
- 群的性质
- 群的术语
- 群方程*

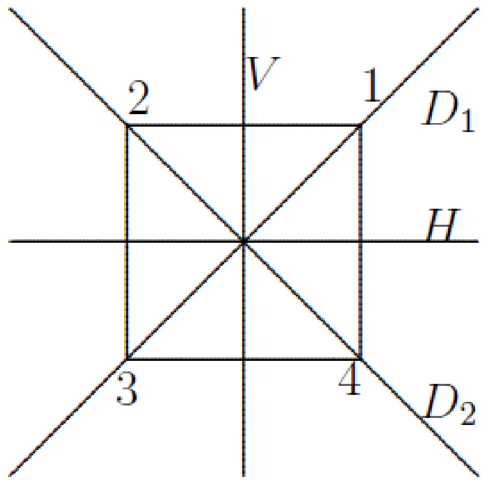


引言：对称变换

- 正方形的**刚体运动**是从四个顶点集到它本身的**一一对应（变换）**，保持相邻点之间**距离不变**



引言：对称变换（续）



设正方形的4个顶点为1、2、3、4；重心为O，对角线为D_1和D_2，水平中线为H，垂直中线为V。以下将从$\{1,2,3,4\}$到$\{1,2,3,4\}$的一一对应记成$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$.

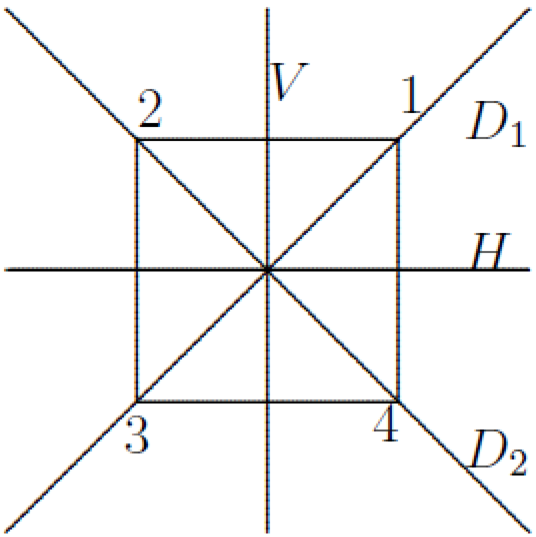
我们现在找出正方形所有的对称

引言：对称变换（续）

旋转对称：由以下刚体运动完成

R_1：绕O顺时针转$90°$，易见$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

R_2：绕O顺时针转$180°$，易见$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$



R_3：绕O顺时针转$270°$，易见$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

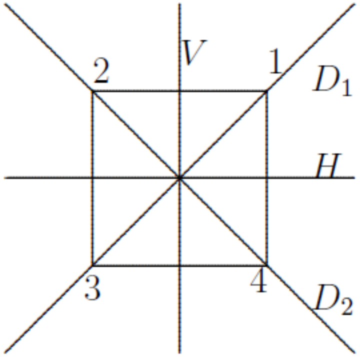
R_0：绕O顺时针转$360°$，易见$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

引言：对称变换（续）

反射对称：由以下刚体运动完成

H：对于水平中线H的反射。D_1：对于对角线D_1的反射。

V：对于垂直中线V的反射。D_2：对于对角线D_2的反射。

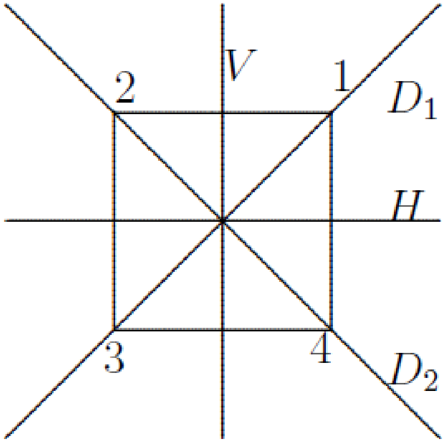


$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

引言：对称变换（续）

- 两个对称变换的连续作用依然是对称变换

- **例如：** $R_1 * H$指先右转90°，后做水平反射，结果得D_1，故$R_1 * H = D_1$；而$H * R_1 = D_2$；由此可以看出$R_1 * H \neq H * R_1$



引言：对称变换（续）

Cayley Table

·	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	V	H	D_1	D_2
R_0	R_0	R_{90}	R_{180}	R_{270}	V	H	D_1	D_2
R_{90}	R_{90}	R_{180}	R_{270}	R_0	D_2	D_1	V	H
R_{180}	R_{180}	R_{270}	R_0	R_{90}	H	V	D_2	D_1
R_{270}	R_{270}	R_0	R_{90}	R_{180}	D_1	D_2	H	V
V	V	D_1	H	D_2	R_0	R_{180}	R_{90}	R_{270}
H	H	D_2	V	D_1	R_{180}	R_0	R_{270}	R_{90}
D_1	D_1	H	D_2	V	R_{270}	R_{90}	R_0	R_{180}
D_2	D_2	V	D_1	H	R_{90}	R_{270}	R_{180}	R_0

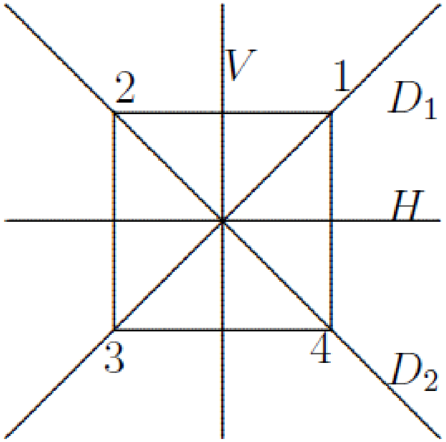
引言：对称变换（续）

令$S=\{R_0,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ V,\ H,\ D_1,\ D_2\}$

$*$为S上的两元运算

事实上可通过函数的复合来计算积。例如

$$R_1 * H = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 1\ 2\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 4\ 3\ 2\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ 1\ 4\ 3\ 2 \end{pmatrix} = D_1$$



通过运算可知

(1) $*$对于S是封闭的，即$(\forall x,\ y\in S)(x*y\in S)$

(2) $(\forall x,\ y,\ z\in S)(x*(y*z)=(x*y)*z)$

(3) $(\forall x\in S)(R_0*x=x*R_0=x)$

(4) $(\forall x\in S)(\exists y\in S)(x*y=y*x=R_0)$

群 论

Je n'ai pas le temps.

——Evariste Galois

半 群

定义 设$(S, *)$为代数系统，$(S, *)$为半群（Semigroup）指

(1) $(\forall x, y \in S)(x * y \in S)$

(2) $(\forall x, y, z \in S)((x * y) * z = x * (y * z))$

若$(\forall x, y \in S)(x * y = y * x)$则称$(S, x)$为交换半群（abelian半群）

- “代数系统” + “结合性” = “半群”
- 例：代数系统$\langle\{1,2\},*\rangle$为半群，其中$*$定义为

  $\forall x, y \in \{1,2\}, x * y = y$

幺半群（Monoid）

定义 设$(S, *)$为代数系统，$(S, *)$为Monoid（Semigroup with unit）指

(1) $(\forall x,\ y \in S)(x * y \in S)$

(2) $(\forall x,\ y,\ z \in S)((x * y) * z = x * (y * z))$

(3) $(\exists e \in S)(\forall x \in S)(e * x = x * e = x)$

- "半群" + "单位元" = "**Monoid**"
- 注意：代数系统中左右单位元若存在则必相等且唯一

幺半群（续）

- 例1：$S=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\}$，$T=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a\in\mathbb{R}\right\}$
  则集合S与T关于矩阵的乘法皆构成Monoid
- 例2：$\langle\mathbb{Z}^{+},+\rangle$为半群，但非Monoid
- 例3：$\langle\mathbb{Z}_n,\oplus_n\rangle$为Monoid，$\oplus_n$是模$n$加法
- 例4：$\langle A^A,\circ\rangle$ 为Monoid，$\circ$是函数复合运算
- 例5：$\langle\mathcal{P}(B),\ \oplus\rangle$为Monoid，$\oplus$为对称差运算

群（Group）

- $(G,*)$为群当且仅当有$e \in G$和G上的一元运算$^{-1}$使

$(0)\ G \neq \emptyset$

$(1)\ (\forall x, y \in G)(x * y \in G)$ ……代数系统

$(2)\ (\forall x, y, z \in G)(x * (y * z) = (x * y) * z)$ …半群

$(3)\ (\forall x \in G)(x * e = e * x = x)$ ……幺半群

$(4)\ (\forall x \in G)(x * x^{-1} = x^{-1} * x = e)$ ……群

$(1) \sim (4)$有时被称为群论公理

群 （续）

- 群的等价描述：
- 设G为非空集合，$*$为G上的二元运算，$\langle G,*\rangle$为群指

  $\langle G,*\rangle$为Monoid，其单位元为e，且满足：

  $$(\forall x \in G)(\exists y \in G)(x * y = y * x = e)$$

- 注意：可结合的代数系统中逆元若存在则唯一

群（续）

命题 设$\langle G, *, e\rangle$为群，任何元素之逆是唯一的。

证：设y，z为x之逆，从而

$$x * y = y * x = e = x * z = z * x$$

$$\begin{aligned}
\because x * y = e &\to z * (x * y) = z * e \\
&\to (z * x) * y = z \\
&\to e * y = z \\
&\to y = z
\end{aligned}$$

$\therefore y = z \quad \square$

群（续）

- 示例
  - $\langle \mathbb{R}, +\rangle, \langle \mathbb{Z}, +\rangle$为群，但$\langle \mathbb{N}, +\rangle$不为群（1无逆）
  - $\langle \mathbb{R}\text{-}\{0\}, *\rangle$，非零实数乘法群；$a$的逆元素为$1/a$
  - $\langle \mathbb{Z}_n, \oplus_n\rangle$为群，$i$之逆为$n-i$
  - 正方形的对称变换集与乘积构成群
  - $T_A = \{f: A \to A | f$为双射$\}$，单位元I_A，f的逆元f^{-1}
  - $A = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} |$呈形$f(x) = ax + b\}$，$\langle A, \circ\rangle$是群？

群（续）

设$f(x) = ax + b\ (a,\ b \in \mathbb{R})\ f \in A\ f$有逆吗?

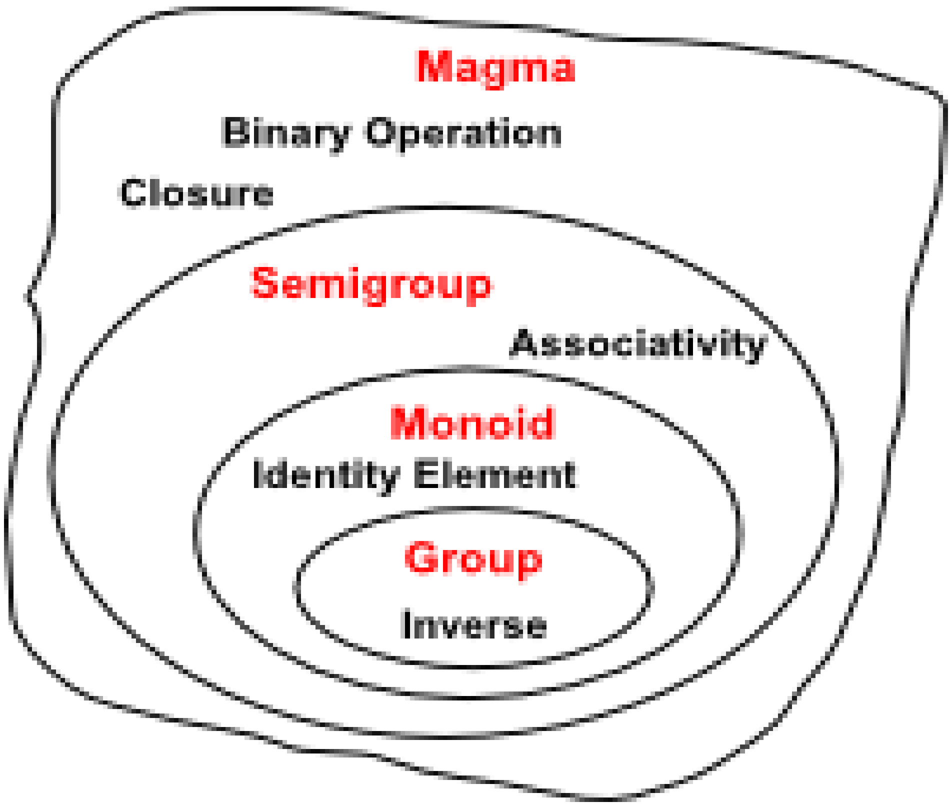
设$g(x) = cx + d\ (c,\ d \in \mathbb{R})$为$f$之逆，从而$f(g(x)) = g(f(x)) = x$。

因此，$a(cx + d) + b = x$，$c(ax + b) + d = x$；$acx + ad + b = x$，$acx + cb + d = x$；$ac = 1$，$ad + b = cb + d = 0$；$c = 1/a$，$d = -b/a$。

故当$a = 0$时f无逆，当$a \neq 0$时f的逆为$g(x) = x/a - b/a$。

然而令$A' = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f$呈形$f(x) = ax + b$且$a \neq 0\}$，$(A', \circ)$为群。

群 （续）



Magma
Binary Operation
Closure
Semigroup
Associativity
Monoid
Identity Element
Group
Inverse

群的性质

定理 设$(G, *, e, ^{-1})$为群

(1) $(a^{-1})^{-1} = a$

(2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

(3) $ab = ac \rightarrow b = c$（左消去律）

(4) $ba = ca \rightarrow b = c$（右消去律）

(5) 方程$ax = b$和$ya = b$在G中对x，y有唯一解

有限群的运算表中每行（列）均为群中所有元素的一种排列，不同行（列）也不可能出现同样的排列。

群的术语：群的阶

(1) 若G为有穷集，则称$(G,*)$为有限群。当$|G|=n$时称$(G,*)$之阶为n且称G为n阶群

(2) 若G为无穷集，则称$(G,*)$为无限群

(3) 若群$(G,*)$满足$(\forall x,y\in G)(xy=yx)$，则称$G$为交换群(abelian群)

下面我们给出1，2，3，4阶全部不同构的群

(1) 若$(G,*)$为1阶群，从而设$G=\{e\}$有$ee=e$。故1阶群在同构意义下只有一个。

(2) 若$(G,*)$为2阶群，从而设$G=\{e,a\}(a\neq e)$，易见$ea=ae=a$，$ee=e$但aa呢？若$aa=a$则$a=e$矛盾，故$aa=e$。故2阶群在同构意义下只有一个。

乘法表见下:

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

有关群的术语（续）

(3) 若$\langle G,*\rangle$为3阶群，从而可设$G=\{e,a,b\}$，e,a,b互异。若$a*a=e$,则$a*b=b$,矛盾，故$a*a=b$。运算表唯一。因此，3阶群在同构意义下只有一个。

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

有关群的术语（续）

- **证明：** 四阶群皆为Abel群

证：设$G=\{e,a,b,c\}$，e为幺。现证$ab=ba$

情况1. $ab=e$从而ba只能为e或c，若$ba=c$则$aba=ac$，从而$ea=ac$，从而$c=e$矛盾，故$ba=e$。

情况2. $ab=c$，同理$ba=c$

同理$bc=cb$，$ac=ca$。 □

- **证明：** 四阶群中元素的阶为1、2或者4（不为3）.

假设有个元素*a*的阶为3，$\{e, a, a^2, b\}$, $ab=$?（矛盾）

有关群的术语（续）

(4) 只有两种四阶群

- 有个元素的阶为4：

  $\{e, a, a^2, a^3\}$

  与$\langle \mathbb{Z}_4, \oplus_4 \rangle$同构

- 元素的阶均不为4：

  Klein四元群

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

群的方程定义*

- 群有以下二种等价的定义：
- (1) 若$\langle G,*\rangle$为半群且方程$ax=b$与$ya=b$有唯一解，则称$\langle G,*\rangle$为群
- (2) 若$\langle G,*\rangle$为半群，存在左单位元，且每个元素都具有左逆元，则$\langle G,*\rangle$称为群

群 方 程*

定理 若代数系统$(G,*)$为半群且在G中方程$ax=b$与$ya=b$有唯一解，则$(G,*)$为群

证：第一步 证明有左幺$e_l\in G$使$(\forall a\in G)(e_la=a)$

取定$b\in G$，$xb=b$有唯一解，设为e_l。对任何$a\in G$下证$e_la=a$。

$\because bx=a$有解c，$\therefore e_la=e_l(bc)=(e_lb)c=bc=a$

第二步 证明$(\forall a\in G)(\exists a^{-1}\in G)(a^{-1}a=e_l)$即左逆存在

令a^{-1}为$ya=e_l$的唯一解即可

第三步 证明$aa^{-1}=e_l$即左逆=右逆

$\because a^{-1}\in G \quad \therefore ya^{-1}=e_l$有唯一解$a'$，从而$a'a^{-1}=e_l$从而

$$aa^{-1}=e_l(aa^{-1})=(a'a^{-1})(aa^{-1})=a'(a^{-1}a)a^{-1}=a'e_la^{-1}=a'a^{-1}=e_l$$

第四步 $(\forall a\in G)(ae_l=a)$ 即左幺=右幺

$\because ae_l=a(a^{-1}a)=(aa^{-1})a=e_la=a \quad \therefore ae_l=a$

因此$(G,*,e,{}^{-1})$为群 □

群的方程定义*（续）

对于半群$\langle G,*\rangle$，设e_l为其左幺元（题设），对任意$a \in G$，a_l为其左逆元(题设)，故$a * a_l = e_l$，因为$a_l \in G$，故对于a_l，$\exists a^{-1} \in G$，使得$a^{-1} * a_l = e_l$，则立即有：$a * a_l = e_l * (a * a_l) = (a^{-1} * a_l) * (a * a_l) = a^{-1} * (a_l * a) * a_l = a^{-1} e_l a_l = a^{-1} a_l = e_l$. 故左逆元$=$右逆元；

下证e_l即为右幺：$\forall a \in G$，$a * e_l = a * (a_l * a) = (a * a_l) * a = e_l * a = a$，故$e_l$即为系统的幺元，$\forall a \in G$，$a_l$为$a$之逆．综上，$\langle G,*\rangle$即为群.

群的方程定义*（续）

推论 设$(G,*)$为半群且$|G|$有穷，若$(G,*)$满足消去律，则$(G,*)$为群

证：设$G=\{a_1,\cdots,a_n\}$，$\forall a,b\in G$下证明方程$ax=b$有唯一解，令$aG=\{aa_i|i=1,2,\cdots,n\}$

$\because$ 左消去律 $\therefore|aG|=n$从而$aG=G$而$b\in G$故有$a_i\in G$使$aa_i=b$从而$ax=b$有解，

又$\because$ 左消去律 $\therefore$解唯一。同理可证$ya=b$有唯一解。因此$(G,*)$为群。 □

有穷代数系统若满足结合律和消去律，则必为群。

$\langle\mathbb{Z}^+,*\rangle$（普通乘法）满足结合律和消去律，但不是群

作业

- 教材内容：[屈婉玲] 10.1节
- 课后习题：见课程QQ群

Niels Abel（1802–1829）:天才与贫困

阿贝尔的第一个抱负不凡的冒险，是试图解决一般的五次方程。…失败给了他一个非常有益的打击；它把他推上了正确的途径，使他怀疑一个代数解是否是可能的。他证明了不可解。那时他大约十九岁。

阿贝尔的《关于非常广泛的一类超越函数的一般性质的论文》呈交给巴黎科学院。这就是勒让德后来用贺拉斯的话描述为“永恒的纪念碑”的工作，埃尔米特说：“他给数学家们留下了够他们忙上五百年的东西。”它是现代数学的一项登峰造极的成就。（摘自贝尔：《数学精英》）

这篇论文的一个评阅人勒让德74岁，发现这篇论文很难辨认，而另一位评阅人，39岁的柯西正处于自我中心的顶峰，把论文带回家，不知放在何处，完全忘了。4年后，当柯西终于将它翻出来时，阿贝尔已经不在人世。作为补偿，科学院让阿贝尔和雅可比一起获得1830年的数学大奖。