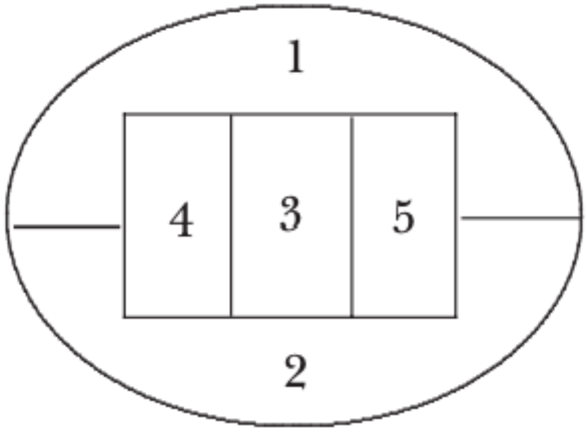
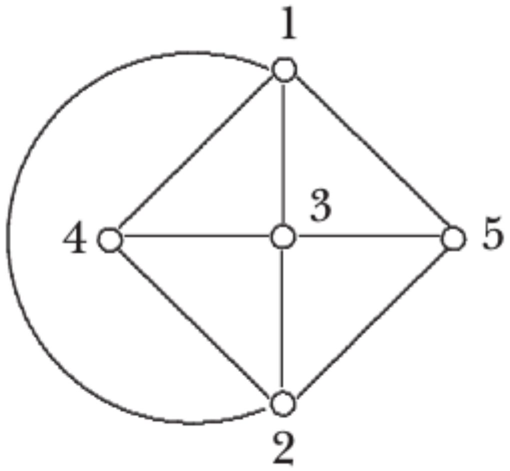
14 平面性

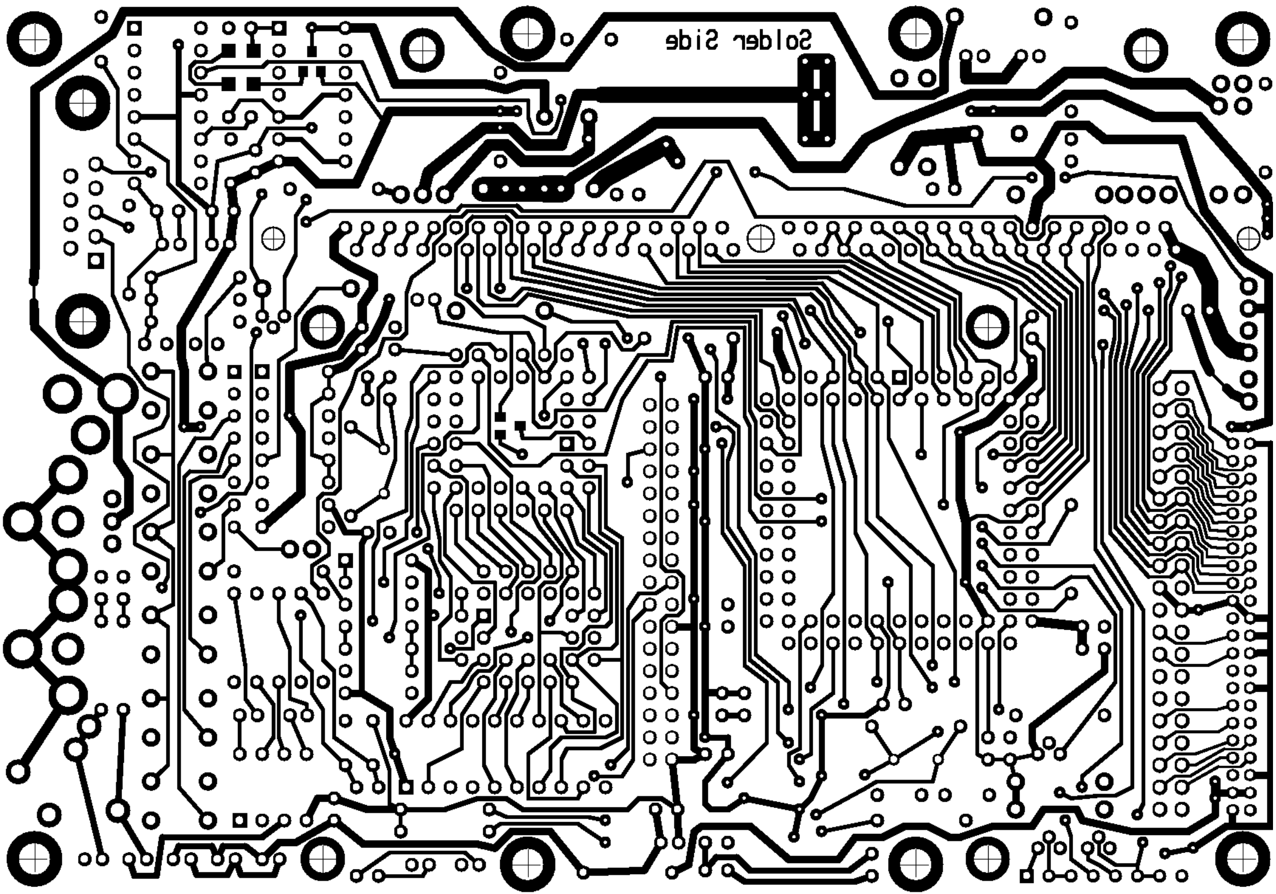
程龚

五王子问题





http://assets.press.princeton.edu/chapters/s10314.pdf



http://www.pjrc.com/mp3/mp3_pcb_reva_solder.gif

本次课的主要内容

高随祥《图论与网络流理论》

7.1 平面图的概念

7.2 Euler公式及其应用

7.4 平面图的对偶图

7.3 可平面图的判断

DMP算法

- 注意：这次课的讨论不再限于简单图

本次课的主要内容

高随祥《图论与网络流理论》

7.1 平面图的概念

7.2 Euler公式及其应用

7.4 平面图的对偶图

7.3 可平面图的判断

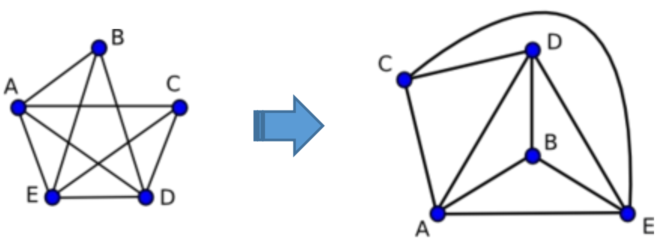
DMP算法

可平面图

- **可平面图**
  - 能画在平面上且任意两边不交叉
  - **交叉**：包含端点以外的其它公共**点**

    (指的是平面上的point，不是图的vertex)
  - 这个画法叫做一种**平面嵌入**
  - 画出来的结果是一个**平面图**
- 这些完全图都是可平面图吗？
  - K_1, K_2, K_3, K_4
  - $K_{1,n}, K_{2,n}$

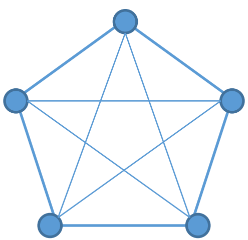
随堂小测

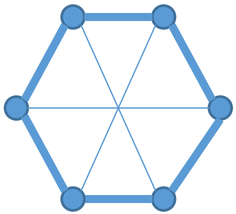


http://media.tumblr.com/tumblr_m0om4wbHGm1qir7tc.png

不可平面图

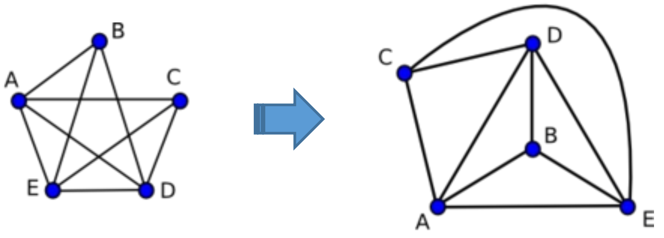
- **不可平面图**
- 例如
  - K_5, $K_{3,3}$
  - 你能观察出原因吗？
    - 考虑圈以外的弦怎么画





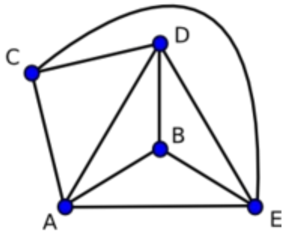
可平面图的性质

- 可平面图的子图一定是可平面图吗？
  - $K_6, K_{4,4}$是可平面图吗？
- 自环和重边对图的可平面性有没有影响？



面和边界

- **面**
  - 平面图的边将平面划分出的极大区域
  - **面数**：$\phi(G)$
- **无限面**
  - 面积无限的面，又称**外部面**
  - 平面图有几个无限面？
  - 每个非外部面都能按照另一种平面嵌入成为外部面，你能想到吗？
- **边界**
  - 包围一个面的所有边
- 面的**度数**
  - 边界上的边数，又称**长度**
  - 只在一个面的边界上的边计两次（是什么样的边？）
    - 当且仅当是割边，为什么？
  - 所有面的度数和 = 边数的两倍



面和边界* (续)

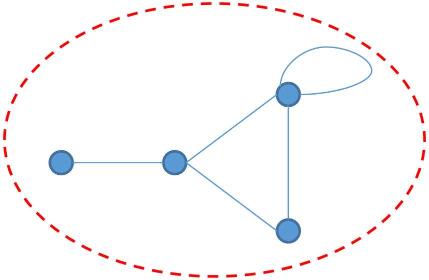
- 平面图G是二分图的充要条件是每个面的度数都是偶数。

证明：

⇒ 你能自己证明吗？

面的度数是奇数就有奇圈。

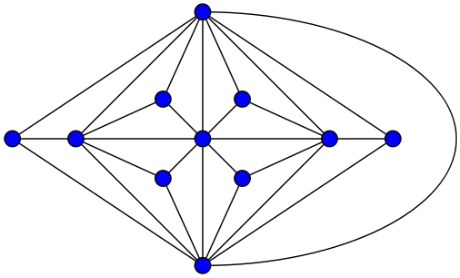
⇐



1. G中任取一个圈C先画在平面上。
2. G的面或者在C内，或者在C外。
3. C内所有面的度数和是偶数。（接下来，你能自己证明吗？）
4. 其中，C内的每条边贡献2度。
5. 剩余偶数度来自C，且C的每条边贡献1度，即C是偶圈。

极大可平面图

- **极大可平面图**
  - 简单可平面图
  - 增加任意一条连接不相邻顶点的边都不再是可平面图
- 性质
  - 一定是连通图吗？
  - 可以有割边或割点吗？(当$v \geq 3$时)
  - 每个面的度数有什么特征？



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/9/96/Goldner-Harary_graph.svg/500px-Goldner-Harary_graph.svg.png

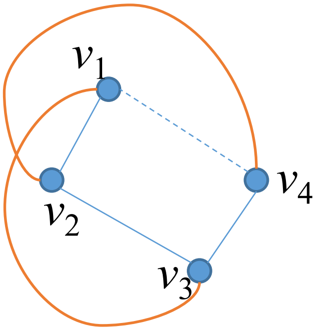
极大可平面图 (续)

- 定理7.1.7 对于至少含3个顶点的极大平面图，其每个面的度数必定都是3。

证明：

反证法：假设存在一个面的度数 > 3，你能推出矛盾吗？

1. v_1和v_3必须相邻，否则添加(v_1, v_3)后仍是可平面图，与极大性矛盾。
2. 且(v_1, v_3)必须在面的外面。
3. 同理，存在(v_2, v_4)且在面的外面。
4. (v_1, v_3)与(v_2, v_4)必然交叉，矛盾。



本次课的主要内容

高随祥《图论与网络流理论》

7.1 平面图的概念

7.2 Euler公式及其应用

7.4 平面图的对偶图

7.3 可平面图的判断

DMP算法

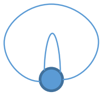
Euler公式

- 定理7.2.1 对于连通的平面图，$\nu - \varepsilon + \phi = 2$。

证明：

对ν用数学归纳法。

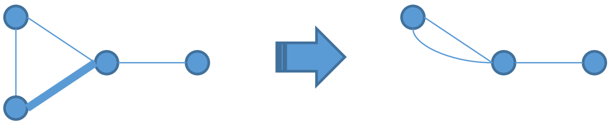
1. $\nu = 1$时：所有边都是自环 $\Rightarrow$
   1. $\varepsilon = 0$时 $\Rightarrow \phi = 1 \Rightarrow$ 成立
      $\varepsilon > 0$时怎么证明？
   2. 每条新增的边都将一个面分成两个 $\Rightarrow$ 成立



2. 假设$\nu = k$时成立，则$\nu = k + 1$时：如何利用归纳假设？
   - 连通图 $\Rightarrow$ 存在一条不是自环的边 $\Rightarrow$ “收缩”这条边 $\Rightarrow$
     - $\nu' = \nu - 1$
     - $\varepsilon' = \varepsilon - 1$
     - $\phi' = \phi$

收缩后仍然是连通的平面图吗？

$\Rightarrow$ 成立



Euler公式的推广

- 定理7.2.2 对于具有w个连通分支的平面图，$\nu - \varepsilon + \phi = w + 1$。

证明：

1. Euler公式 $\Rightarrow$ 对每个连通分支，有$\nu_i - \varepsilon_i + \phi_i = 2$
2. 每个连通分支的外部面相同 $\Rightarrow$
   $2w = \sum(\nu_i - \varepsilon_i + \phi_i) = \sum\nu_i - \sum\varepsilon_i + \sum\phi_i = \nu - \varepsilon + \phi + (w - 1)$
   $\Rightarrow \nu - \varepsilon + \phi = w + 1$

Euler公式的应用 (续)

- 定理7.2.5 设G是$\nu \geq 3$的简单平面图，则$\varepsilon \leq 3\nu - 6$。

证明：

1. 如果G是连通图：$2\varepsilon = \sum d(F) \geq 3\phi = 3(2 + \varepsilon - \nu)$
   $\Rightarrow \varepsilon \leq 3\nu - 6$
2. 如果G不是连通图，怎么办？
   - 添加边成为连通图 $\Rightarrow$ 更加成立

Euler公式的应用 (续)

- 定理7.2.6 设G是$v \geq 3$的极大简单平面图，则$\varepsilon = 3v - 6$，$\phi = 2v - 4$。

证明：

极大（简单）平面图 $\Rightarrow$

- 是连通图
- 每个面的度数都是3

$$\Rightarrow 2\varepsilon = \sum d(F) = 3\phi = 3(2 + \varepsilon - v) \Rightarrow \varepsilon = 3v - 6 \Rightarrow \phi = 2v - 4$$

Euler公式的应用 (续)

- 定理7.2.7 设G是$\nu \geq 3$的连通简单图，则G是极大平面图当且仅当G的每个面的度数均为3。

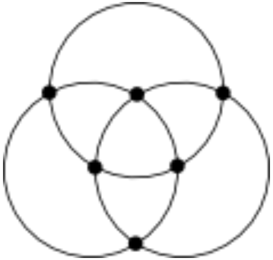
证明：

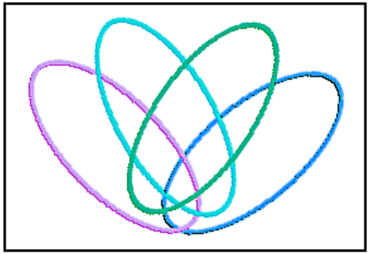
- $\Rightarrow$：定理7.1.7
- $\Leftarrow$：
  1. $2\varepsilon = \sum d(F) = 3\phi = 3(2 + \varepsilon - \nu) \Rightarrow \varepsilon = 3\nu - 6$
  2. 反证：如果G不是极大平面图，则可新增一条边得到平面图G'：
     - $\varepsilon' = \varepsilon + 1$
     - $\nu' = \nu$
  3. $\varepsilon' = \varepsilon + 1 = 3\nu - 5 = 3\nu' - 5 > 3\nu' - 6$，与定理7.2.5矛盾

Euler公式的应用 (续)

- 有没有可能用正圆画出4个集合的Venn图？
  - $\nu = 12$　　每对正圆恰有2个交点，且所有交点不重合
    （否则至少3圆共点，导致必有某种组合无法出现）
  - $\varepsilon = 4\nu / 2 = 24$　　每个顶点的度数为4
  - $\phi = 2^4 = 16$　　Venn图的定义
  - 连通性显然

  $\Rightarrow$ 不满足连通图的Euler公式
- 4个集合画不出，5个集合能画出吗？
  - 如果能画出：包含4个集合的Venn子图，矛盾





http://math.stackexchange.com/questions/1475/why-can-a-venn-diagram-for-4-sets-not-be-constructed-using-circles

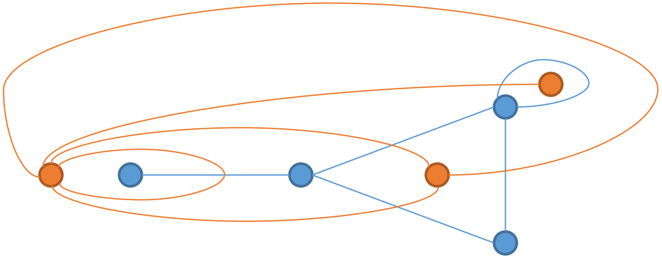
本次课的主要内容

高随祥《图论与网络流理论》

7.1 平面图的概念
7.2 Euler公式及其应用
7.4 平面图的对偶图
7.3 可平面图的判断
DMP算法

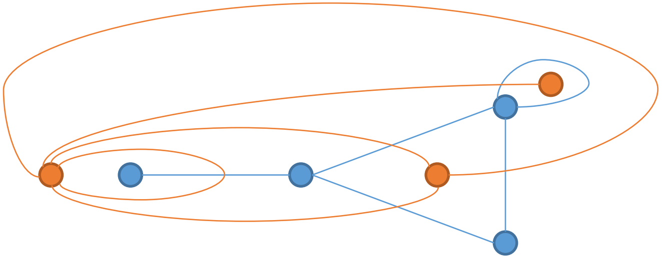
对偶图

- **对偶图**
  - 面 → 点
  - 公共边界上的边 → 连接两点的边
  - 割边 → 自环
  - 记作G^*



对偶图的性质

- G的割边对应G^*的自环，G的自环对应G^*的割边。（为什么？）
- G^*是连通图。（为什么？）
- G^*是平面图。（怎么画能保证？）

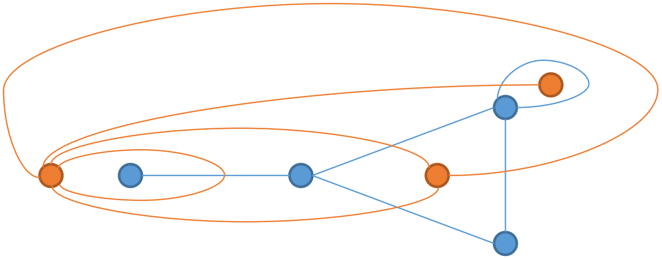


对偶图的性质 (续)

- 定理7.4.1 设G^*是连通平面图G的对偶图，则：
  1. $\nu^* = \phi$
  2. $\varepsilon^* = \varepsilon$
  3. $\phi^* = \nu$
  4. 设G^*的顶点v_i^*位于G的面F_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = d(F_i)$。

证明：

- 1和2显然成立。
- 3为什么成立？
  - G和G^*都连通 $\Rightarrow \nu - \varepsilon + \phi = 2$且$\nu^* - \varepsilon^* + \phi^* = 2 \Rightarrow \phi^* = \nu \Rightarrow 3$成立
- F_i边界上的非割边对等式两侧各贡献1，割边各贡献2 $\Rightarrow$ 4成立

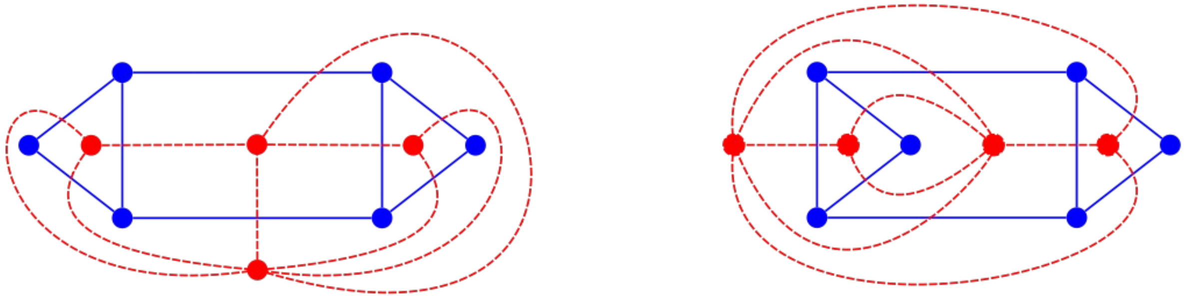


对偶图的性质 (续)

- 定理7.4.2 设G^*是具有w个连通分支的平面图G的对偶图，则：
  1. $\nu^* = \phi$
  2. $\varepsilon^* = \varepsilon$
  3. $\phi^* = \nu - w + 1$
  4. 设G^*的顶点v_i^*位于G的面F_i中，则$d_{G^*}(v_i^*) = d(F_i)$。

对偶图的性质 (续)

- 同构图的对偶图一定同构吗？
- 对偶图的对偶图一定是原图吗？
  - 如果G是连通图，则$(G^*)^*$与G同构。*



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7b/Noniso_dual_graphs.svg/500px-Noniso_dual_graphs.svg.png

本次课的主要内容

高随祥《图论与网络流理论》

7.1 平面图的概念

7.2 Euler公式及其应用

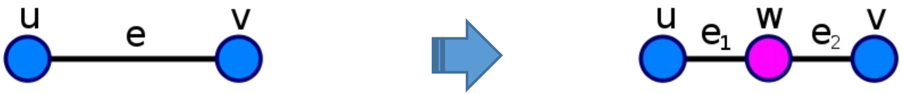
7.4 平面图的对偶图

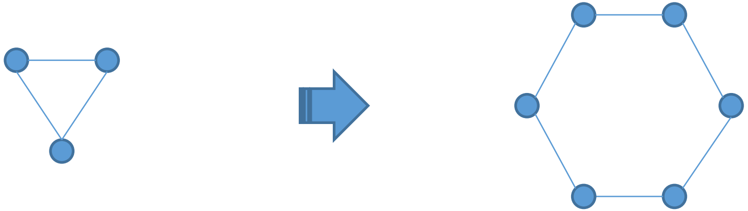
7.3 可平面图的判断

DMP算法

可平面图的判断

- **剖分**
  - 在一条边上加入一个新的顶点，将其分为两条边

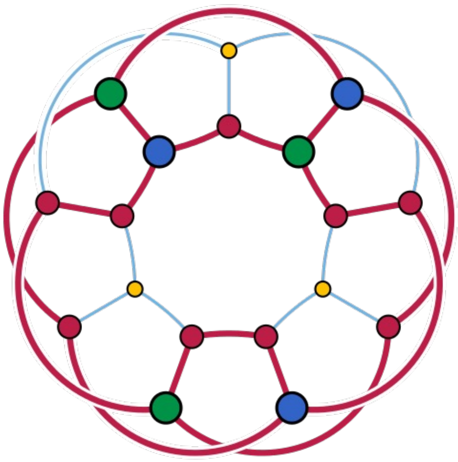




https://en.wikipedia.org/wiki/Subdivision_(graph_theory)#Subdivisions

可平面图的判断

- **Kuratowski子图**
  - K_5或$K_{3,3}$的剖分



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/73/GP92-Kuratowski.svg/500px-GP92-Kuratowski.svg.png

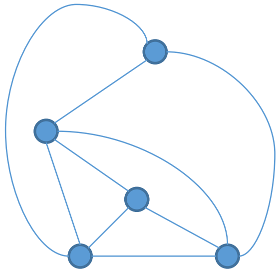
可平面图的判断

- **Kuratowski定理**
  可平面图的充要条件：没有Kuratowski子图。
- **Wagner定理**
  可平面图的充要条件：没有可以收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

可平面性的判断算法

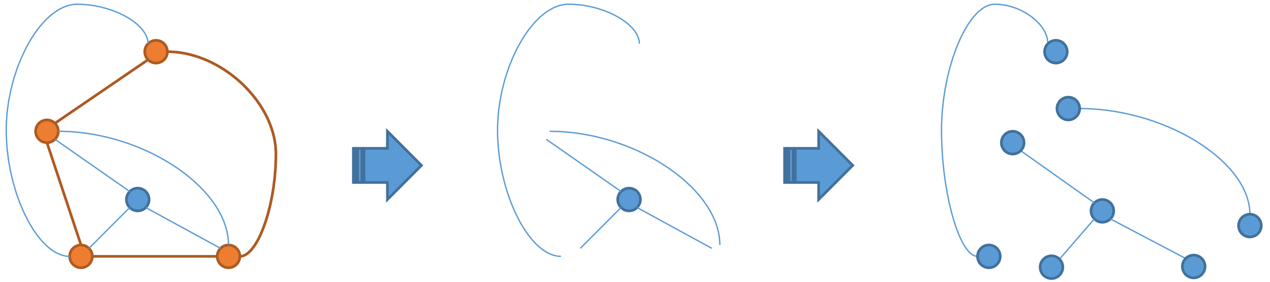
- **D**emoucron-**M**algrange-**P**ertuiset算法：简单的平方算法
- 此外，还有一些较为复杂的线性算法

换作是你，会如何尝试将一个图嵌入到平面中？



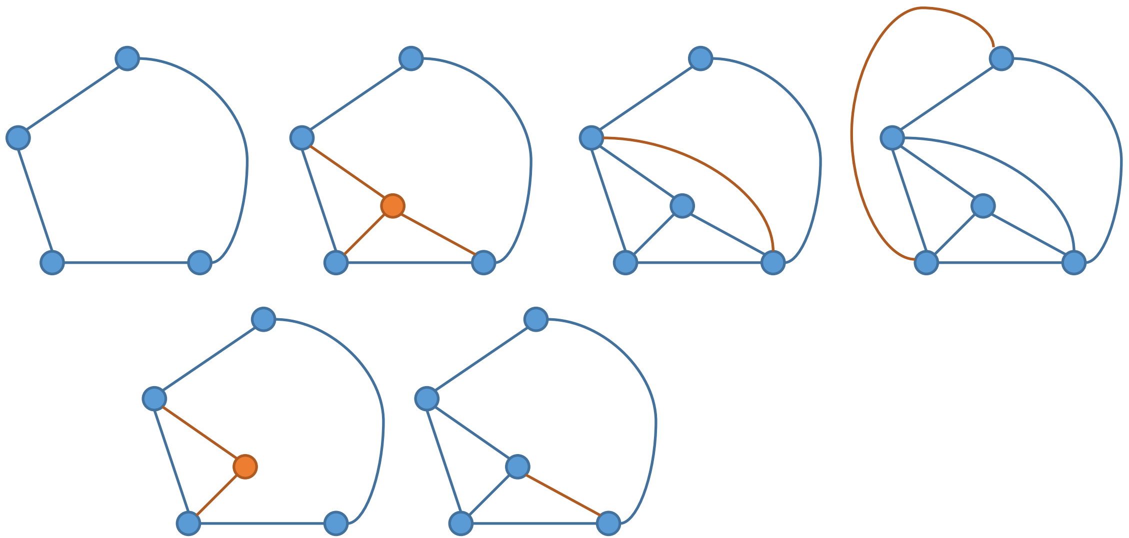
H-fragment*

- 图G的H-fragment
  - 给定G的一个子图H
  - G的H-fragment是G中去掉H后剩余的“连通分支”，即
    - 一条不在H中但两个端点都在H中的边，或者
    - $G - V[H]$的一个连通分支 + 它连到H的边及其端点
- H及所有H-fragment构成了对G的一种分解



DMP算法*

- 基本思路
  - 迭代地嵌入当前子图的fragment，直至：
    - G全部被嵌入（可平面）
    - 某个fragment无法嵌入（不可平面）
  - 嵌入一个fragment可能难以操作，但总能嵌入其中的一条路



DMP算法 (续)

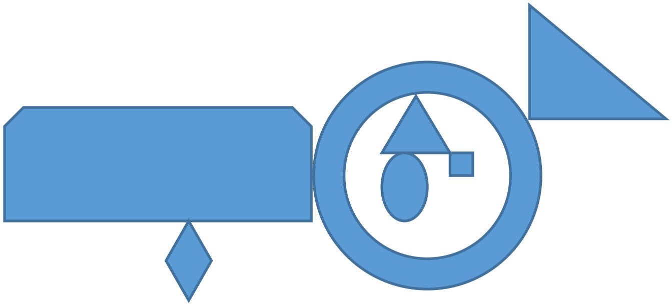
- 图G是可平面的当且仅当G的每个块都是可平面的。

证明：

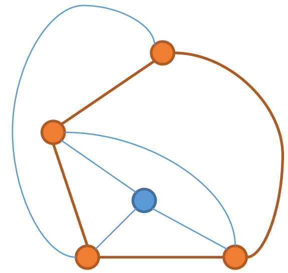
⇒：显然。

⇐：

1. 只需考虑连通图；否则分别考虑每个连通分支即可。
2. 考虑块-割点图：不可能存在“圈” ⇒ 构成“树”
   你能把G平面嵌入吗？
3. 任取一个块作为“树”的根，平面嵌入。
4. 两个块最多只有一个公共顶点（割点） ⇒ 剩余块根据到根的距离由近到远，依次平面嵌入（新块平面嵌入并使割点在外平面上，在割点处与旧块相粘）。



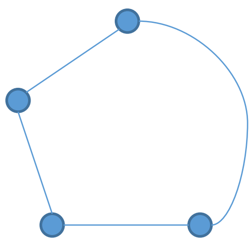
DMP算法 (续)

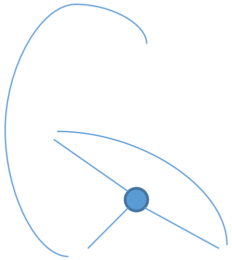


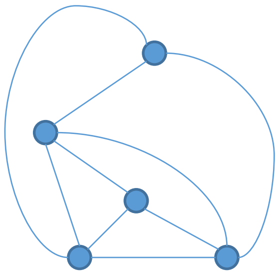
0. 只需检测每个块（2-连通图）是否可平面即可。
1. 从2-连通图G中任取一个圈G_0，平面嵌入。
2. 迭代：
   1. 找到所有G_i-fragment。
   2. 对于每个G_i-fragment（称作B），在G_i中找到所有包含所有B的附着点的面，称作F(B)。
      - 如果某个F(B)为空，则G不可平面。
      - 否则，如果某个$|\mathrm{F}(B)| = 1$，则选中这个B。
      - 否则，每个$|\mathrm{F}(B)| > 1$，则任选一个B。
   3. 从选中的B中任选一条连接两个附着点的路P，将P平面嵌入到F(B)中的一个面中。（有没有可能B只有一个附着点？）
   4. 将结果记作G_{i+1}。
   5. 如果$G_{i+1} = G$，则G可平面。否则，继续迭代。

DMP算法举例

- 一个可平面图的例子

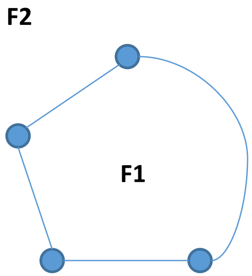


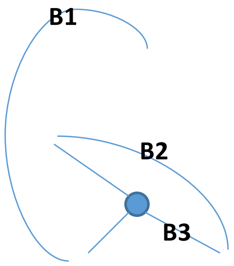


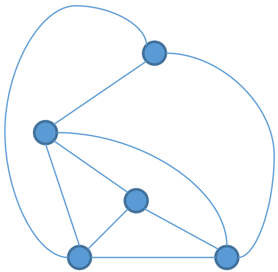


DMP算法举例 (续)

F(B1)={F1, F2}
F(B2)={F1, F2}
F(B3)={F1, F2}

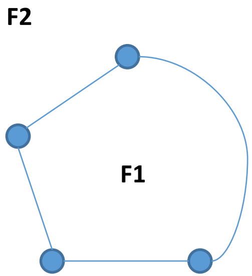


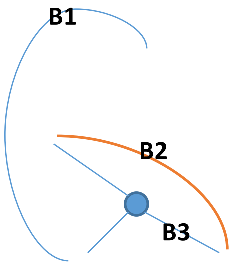


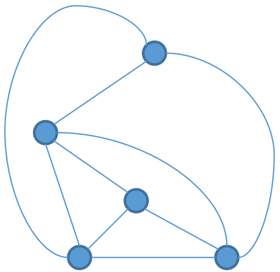


DMP算法举例 (续)

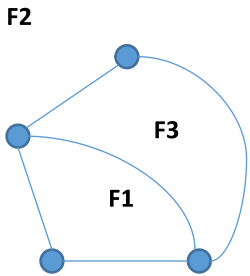
F(B1)={F1, F2}
F(B2)={F1, F2}
F(B3)={F1, F2}

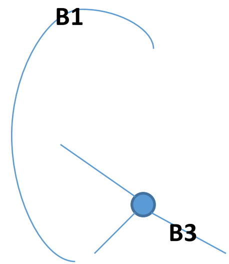


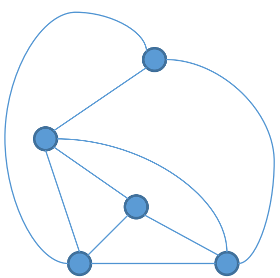




DMP算法举例 (续)

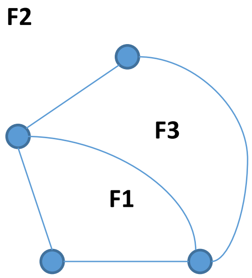


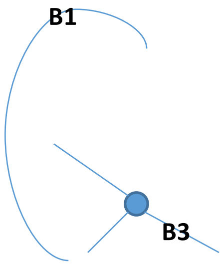


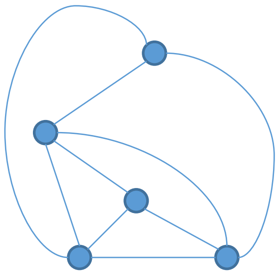


DMP算法举例 (续)

F(B1)={F2}
F(B3)={F1, F2}

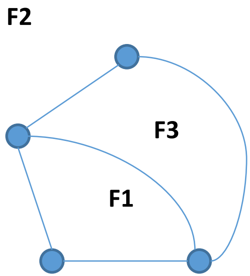


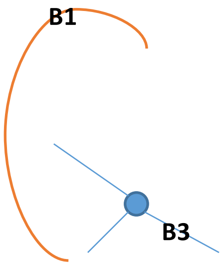


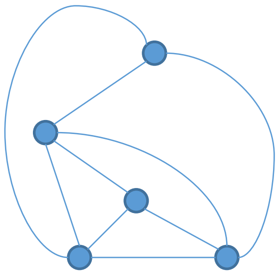


DMP算法举例 (续)

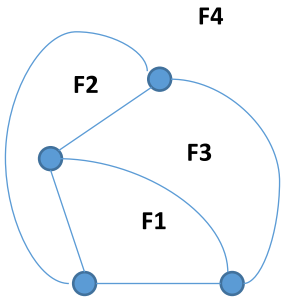
F(B1)={F2}
F(B3)={F1, F2}

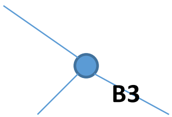


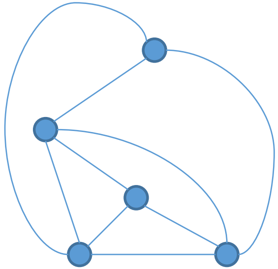




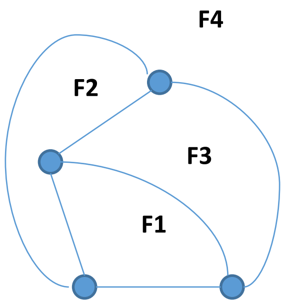
DMP算法举例 (续)

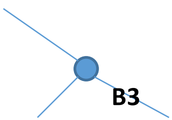




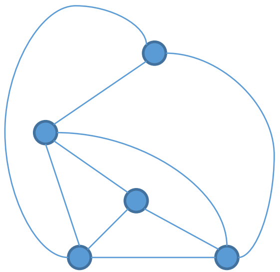


DMP算法举例 (续)



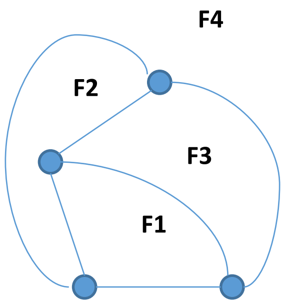


F(B3)={F1}

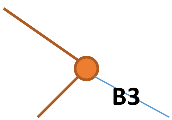


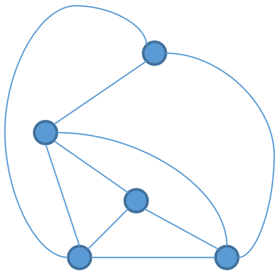
DMP算法举例 (续)

F(B3)={F1}

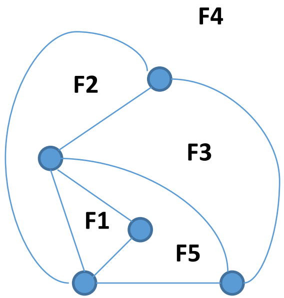


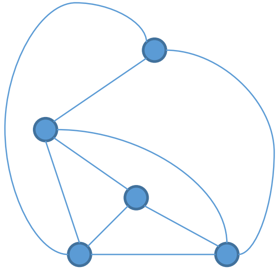
注意：单看这条路径，似乎也可以放在F2中，但不可以！





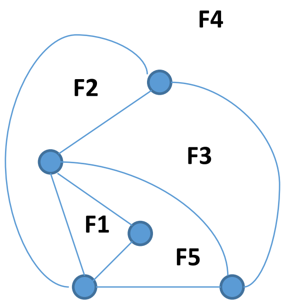
DMP算法举例 (续)

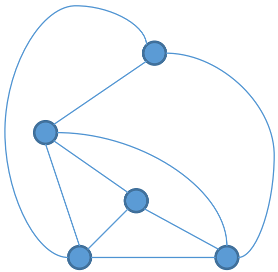




DMP算法举例 (续)

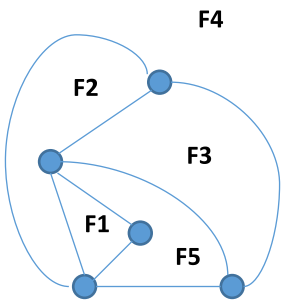
F(B3)={F5}

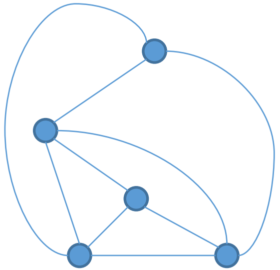




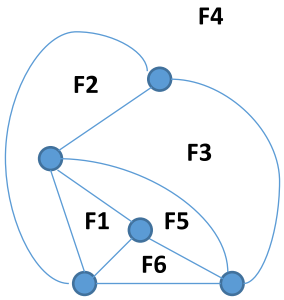
DMP算法举例 (续)

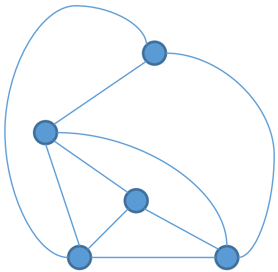
F(B3)={F5}





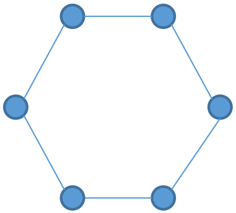
DMP算法举例 (续)

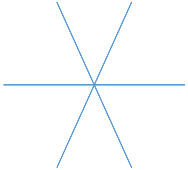


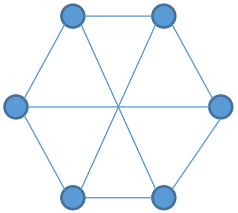


DMP算法举例 (续)

- 一个不可平面图的例子

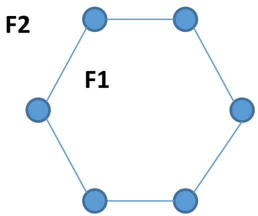


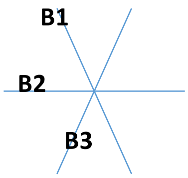


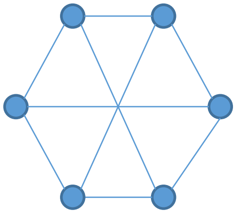


DMP算法举例 (续)

F(B1)={F1, F2}
F(B2)={F1, F2}
F(B3)={F1, F2}

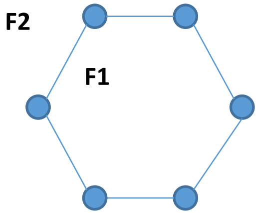


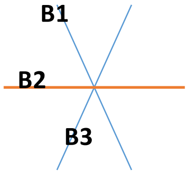


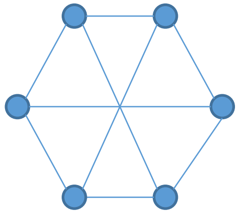


DMP算法举例 (续)

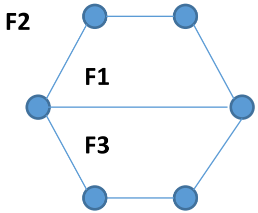
F(B1)={F1, F2}
F(B2)={F1, F2}
F(B3)={F1, F2}

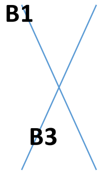


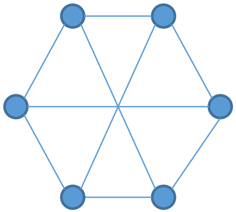




DMP算法举例 (续)

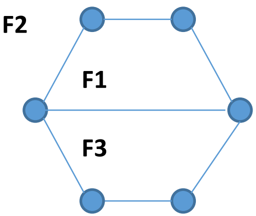


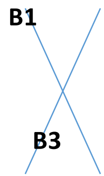


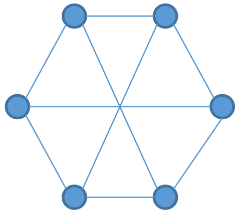


DMP算法举例 (续)

F(B1)={F2}
F(B3)={F2}

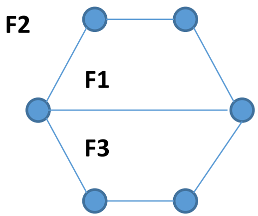


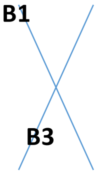


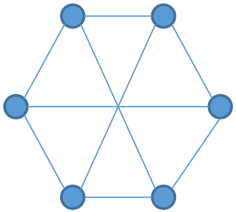


DMP算法举例 (续)

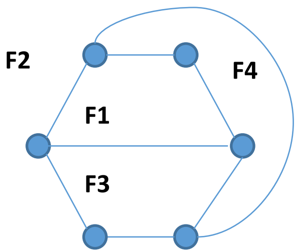
F(B1)={F2}
F(B3)={F2}

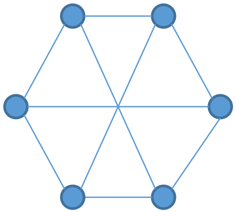






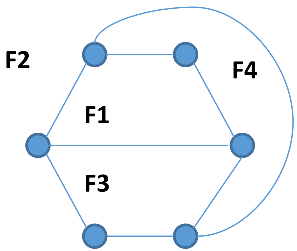
DMP算法举例 (续)

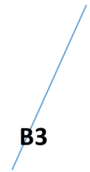


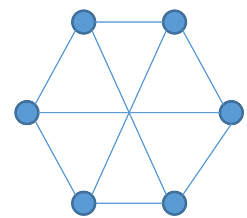


DMP算法举例 (续)

F(B3)=∅

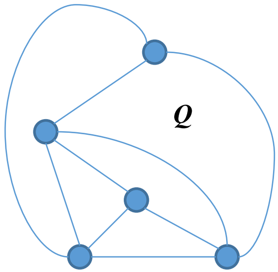






DMP算法的正确性

如果G是可平面图，假设其平面嵌入的预期结果是Q。

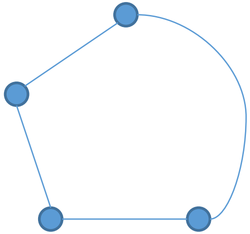


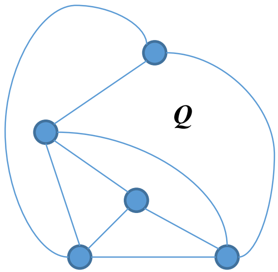
DMP算法的正确性

如果G是可平面图，假设其平面嵌入的预期结果是Q。

1. G中的每个圈在平面嵌入后仍是一个圈 ⇒ 算法先将一个圈平面嵌入：或者与Q中一致，或者方向相反（怎么办？）

- 并不影响，因为Q可以翻转，因此结果与Q“对称”



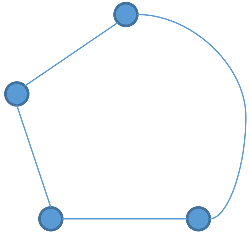


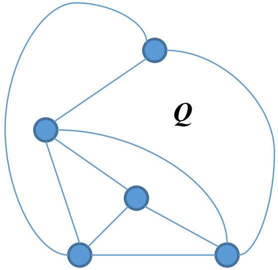
DMP算法的正确性

如果G是可平面图，假设其平面嵌入的预期结果是Q。

1. G中的每个圈在平面嵌入后仍是一个圈 ⇒ 算法先将一个圈平面嵌入：或者与Q中一致，或者方向相反（怎么办？）
   - 并不影响，因为Q可以翻转，因此结果与Q “对称”

2. 只需证明：如果算法截至G_i的嵌入与Q一致或者（局部）对称，那么截至G_{i+1}的嵌入也与Q一致或者（局部）对称。

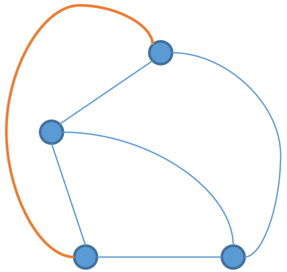


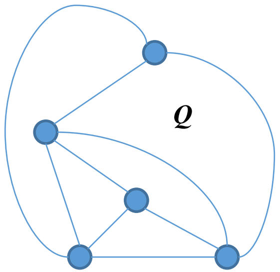


DMP算法的正确性

如果G是可平面图，假设其平面嵌入的预期结果是Q。

1. G中的每个圈在平面嵌入后仍是一个圈 ⇒ 算法先将一个圈平面嵌入：或者与Q中一致，或者方向相反（怎么办？）
   - 并不影响，因为Q可以翻转，因此结果与Q“对称”
2. 只需证明：如果算法截至G_i的嵌入与Q一致或者（局部）对称，那么截至G_{i+1}的嵌入也与Q一致或者（局部）对称。
   - 如果选中的是某个$|F(B)| = 1$，即只有一个面可以将P嵌入，那么这种嵌入方式必然与Q中的方式一致。

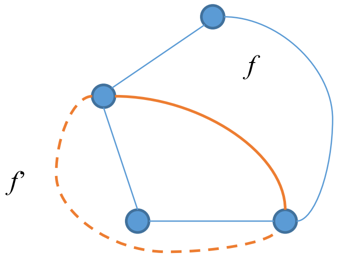


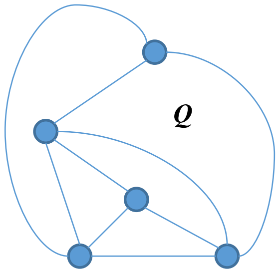


DMP算法的正确性

如果G是可平面图，假设其平面嵌入的预期结果是Q。

1. G中的每个圈在平面嵌入后仍是一个圈 ⇒ 算法先将一个圈平面嵌入：或者与Q中一致，或者方向相反（怎么办？）
   - 并不影响，因为Q可以翻转，因此结果与Q “对称”
2. 只需证明：如果算法截至G_i的嵌入与Q一致或者（局部）对称，那么截至G_{i+1}的嵌入也与Q一致或者（局部）对称。
   - 如果选中的是某个$|F(B)| = 1$，即只有一个面可以将P嵌入，那么这种嵌入方式必然与Q中的方式一致。
   - 如果选中的是某个$|F(B)| > 1$，并且没有将P按照Q中的方式嵌入到面f中，而是 “错误地” 嵌入到面f'中，怎么办？
     - 这意味着f和f'有公共边界，那么对于之后的fragment，只要将原本嵌入f的改为嵌入f'，将原本嵌入f'的改为嵌入f，即沿f和f'的公共边界对称翻转，便可得到一个与Q（局部）对称的结果。





DMP算法的运行时间

- $O(\nu^2)$
  - 块分解：$O(\nu)$，基于DFS
  - 找初始的圈：$O(\nu)$
  - 迭代轮数？
    - 简单平面图满足$\varepsilon \leq 3\nu - 6$
    - $\phi - 1 = \varepsilon - \nu + 1 \leq 2\nu - 5 \in O(\nu)$，因为每轮迭代新增一个面
  - 每轮迭代的时间：$O(\nu)$

书面作业

高随祥《图论与网络流理论》

- 练习7.4
- 练习7.15(a)(b)
- 练习7.23
- 练习7.29
- 请用DMP算法将P214的G_2嵌入到平面中，写出详细步骤。