

# 离散数学-作业2 谓词逻辑初步

## Problem 1

判断 $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$  是否为永真式。

## Problem 2

证明 $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$  和 $q \rightarrow (p \vee r)$  逻辑等价。

## Problem 3

证明 $(p \wedge q) \rightarrow r$  和 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ 不是逻辑等价。

## Problem 4

如果每个变量的论域都为实数集合，判断下列各语句的真值。

a)  $\exists x(x^2 = 2)$

c)  $\forall x(x^2 + 2 \geq 1)$

b)  $\exists x(x^2 = -1)$

d)  $\forall x(x^2 \neq x)$

## Problem 5

证明下列逻辑等价式，其中 $x$ 在 $A$ 中不作为自由变元出现。假设论域非空。

a)  $(\forall x P(x)) \vee A \equiv \forall x (P(x) \vee A)$

b)  $(\exists x P(x)) \vee A \equiv \exists x (P(x) \vee A)$

## Problem 6

下列语句的真值是什么？

$$\text{a) } \exists !xP(x) \rightarrow \exists xP(x)$$

$$\text{b) } \forall xP(x) \rightarrow \exists !xP(x)$$

$$\text{c) } \exists !x\neg P(x) \rightarrow \neg \forall xP(x)$$

## Problem 7

使用谓词、量词、逻辑联结词和数学运算符表达语句“有一个正整数不是三个整数的平方和”。

## Problem 8

将下列逻辑式转化为前束范式。

$$\text{a) } \exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \vee A, \text{ 其中 } A \text{ 是不涉及任何变量的命题。} \quad \text{b) } \neg(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x))$$

$$\text{c) } \exists xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$$

## Problem 9

找出变元  $x$ 、 $y$  和  $z$  的一个公共论域，使语句  $\forall x \forall y ((x \neq y) \rightarrow \forall z ((z = x) \vee (z = y)))$  为真，再找出另外一个论域使其为假。

## Problem 10

证明两个语句  $\neg \exists x \forall y P(x, y)$  和  $\forall x \exists y \neg P(x, y)$  是逻辑等价的，这里两个  $P(x, y)$  第一个变元的量词具有相同的论域，两个  $P(x, y)$  第二个变元的量词也具有相同的论域。