

离散数学第十四次作业-偏序集与格

Problem 1

下面哪些是偏序集?

- (a) $(\mathbb{Z}, =)$ (b) (\mathbb{Z}, \neq) (c) (\mathbb{Z}, \geq) (d) (\mathbb{Z}, \mid)

答案:

- (a) 是 (b) 不是 (c) 是 (d) 不是

Problem 2

对偏序集

$$(\{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}, \subseteq),$$

回答下述问题.

- a) 求极大元素.
- b) 求极小元素.
- c) 存在最大元素吗? 如果存在请求出.
- d) 存在最小元素吗? 如果存在请求出.
- e) 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的所有上界.
- f) 如果存在的话, 求 $\{\{2\}, \{4\}\}$ 的最小上界.
- g) 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的所有下界.
- h) 如果存在的话, 求 $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ 的最大下界.

答案:

- a) $\{1, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$

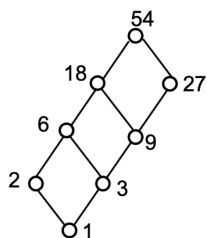
- b) $\{1\}, \{2\}, \{4\}$
- c) 不存在
- d) 不存在
- e) $\{2, 4\}, \{2, 3, 4\}$
- f) $\{2, 4\}$
- g) $\{3, 4\}, \{4\}$
- h) $\{3, 4\}$

Problem 3

已知 A 是由 54 的所有因子组成的集合, 设 $|$ 为 A 上的整除关系,

- (1) 画出偏序集 $(A, |)$ 的哈斯图.
- (2) 确定 A 中最长链的长度, 并按字典序写出 A 中所有最长的链.
- (3) 试计算 A 中元素至少可以划分成多少个互不相交的反链, 并完整写出这些反链.

答案:



- 最长链长: 5.
- 最长链: $\{1, 2, 6, 18, 54\}, \{1, 3, 6, 18, 54\}, \{1, 3, 9, 18, 54\}, \{1, 3, 9, 27, 54\}$.
- 至少划分成 5 个互不相交的反链: $\{54\}, \{18, 27\}, \{6, 9\}, \{2, 3\}, \{1\}$.

Problem 4

设 A 为集合, $B = \rho(A) \setminus \{\emptyset\} \setminus \{A\}$, 且 $B \neq \emptyset$. 求偏序集 (B, \subseteq) 的极大元, 极小元, 最小元.

答案: 因为 $B \neq \emptyset$, 所以 $|A| > 1$. 因此对任意 $x \in A$, $A \setminus \{x\}$ 都是极大元, $\{x\}$ 都是极小元, 无最小元.

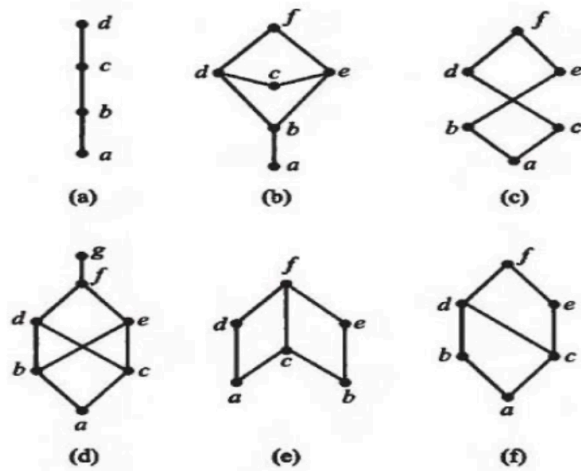
Problem 5

证明: 长度为 $mn + 1$ 的偏序集存在大小为 $m + 1$ 的链或存在大小为 $n + 1$ 的反链.

答案: 若 X 的高度为 r , 宽度为 s . 根据 Dilworth 定理, X 可以划分为 r 个反链 C_1, C_2, \dots, C_r . 并且有 $|C_1| + \dots + |C_r| = |X|$. 因此 $|X| = |C_1| + \dots + |C_r| \leq sr$. 若 $s \leq n$ 并且 $r \leq m$, 则 $|X| \leq mn < mn + 1$ 矛盾.

Problem 6

下图给出了 6 个偏序集的哈斯图. 判断其中哪些是格. 如果不是格, 请说明理由.



答案: 答案: (b),(d),(e) 不是格. 在 (b) 中 $\{d, e\}$ 没有最大下界. 在 (d) 中 $\{d, e\}$ 没有最大下界. 在 (e) 中 $\{a, b\}$ 没有最大下界.

Problem 7

针对 Problem 6 中的每个格, 如果格中的元素存在补元, 则求出这些补元.

答案:

- (a) a 与 d 互为补元, 其他元素没有补元;
- (c) a 与 f 互为补元, b 的补元是 c 和 d , c 的补元是 b 和 e , d 的补元是 b 和 e , e 的补元是 c 和 d .
- (f) a 与 f 互为补元, b 与 e 互为补元, c 与 d 没有补元.

Problem 8

说明 Problem 6 中的每个格是否为分配格、有补格和布尔格, 并说明理由.

答案:

- (a) 是分配格, 因为任何链都是分配格. 不是有补格和布尔格, 因为 b 与 c 没有补元;
- (c) 不是分配格, 因为含有 5 元子格与五角格同构. 是有补格, 每个元素都有补元. 不是布尔格, 因为不是分配格.
- (f) 是分配格, 因为不含有与钻石格和五角格同构的子格. 不是有补格和布尔格, 因为 c 与 d 没有补元.

Problem 9

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, 证明 $\forall a \in L$, 有

$$a \wedge 0 = 0, a \vee 0 = a, a \wedge 1 = a, a \vee 1 = 1$$

答案: $a \wedge 0 \preceq 0, 0 \preceq 0$, 且 $0 \preceq a \Rightarrow 0 \preceq a \wedge 0$, 根据反对称性 $a \wedge 0 = 0$.

$a \preceq a \vee 0, 0 \preceq a$, 且 $a \preceq a \Rightarrow a \vee 0 \preceq a$, 根据反对称性 $a \vee 0 = a$.

$a \wedge 1 \preceq a, a \preceq a$, 且 $a \preceq 1 \Rightarrow a \preceq a \wedge 1$, 根据反对称性 $a \wedge 1 = a$.

$1 \preceq a \vee 1, 1 \preceq 1$, 且 $a \preceq 1 \Rightarrow a \vee 1 \preceq 1$, 根据反对称性 $a \vee 1 = 1$.

Problem 10

求证: 在格 $\langle L, \times, \oplus \rangle$ 中, 若 $a \times (b \oplus c) = (a \times b) \oplus (a \times c)$, 则 $a \oplus (b \times c) = (a \oplus b) \times (a \oplus c)$.

答案: 证明:

$$\begin{aligned} (a \oplus b) \times (a \oplus c) &= ((a \oplus b) \times a) \oplus ((a \oplus b) \times c) \\ &= a \oplus (c \times (a \oplus b)) \\ &= a \oplus ((c \times a) \oplus (c \times b)) \\ &= (a \oplus (a \times c)) \oplus (b \times c) \\ &= a \oplus (b \times c) \end{aligned}$$