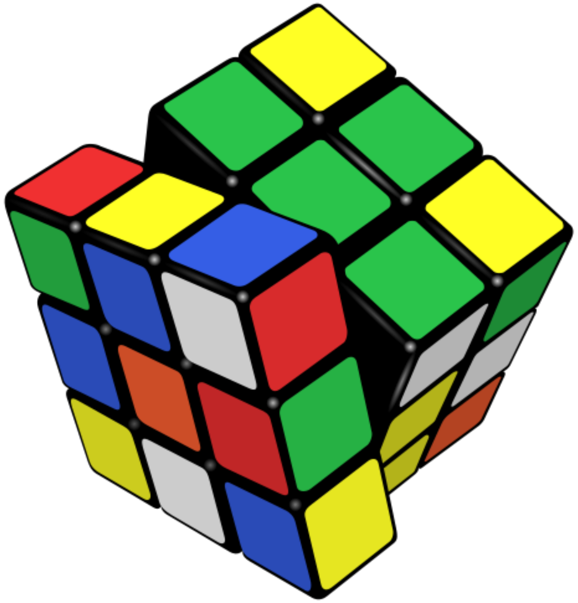
子群与拉格朗日定理

离散数学一代数结构

南京大学计算机科学与技术系

回顾

- 半群
- 幺半群
- 群
- 群的性质
- 群的术语
- 群方程*



子群与拉格朗日定理

- 子群的定义及其判定
- 生成子群与元素的阶
- 子群的陪集与划分
- 拉格朗日定理
- 拉格朗日定理的推论

子群的定义

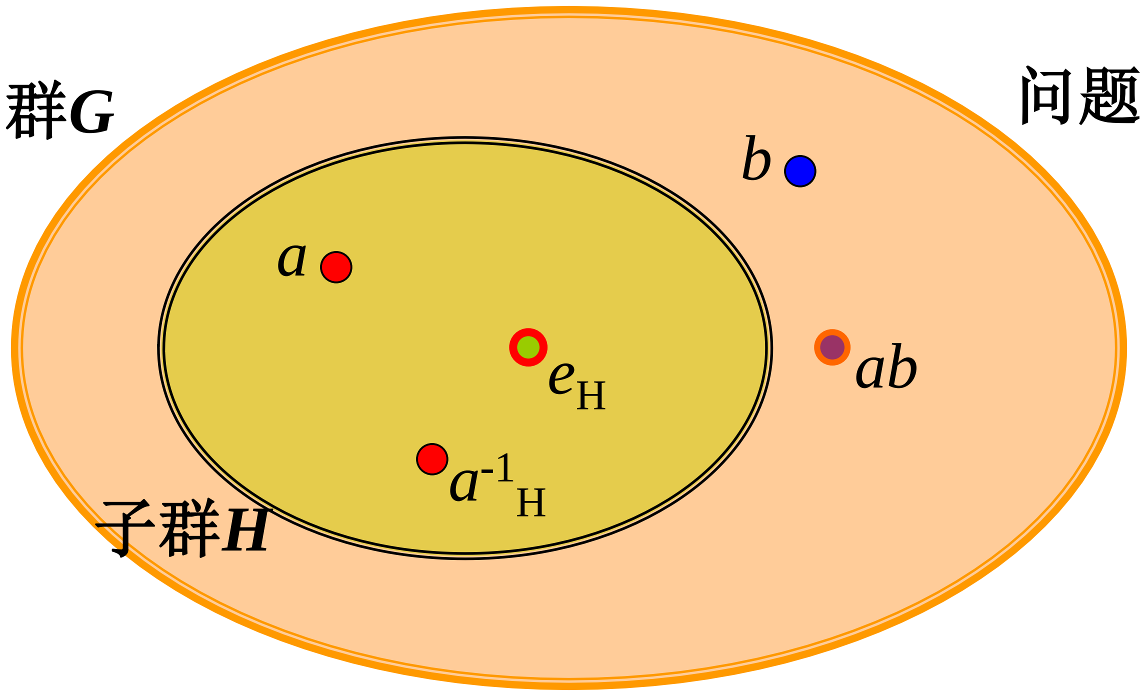
- **设(G, ∘)是群，H是G的非空子集，如果H关于G中的运算构成群，即(H, ∘)也是群，则H是G的子群。**
  - 记作**(H, ∘) ≤ (G, ∘)**, 简记为 **H≤G**。
- 例子：偶数加系统是整数加群的子群
- 平凡子群 (G, ∘)， ({e}, ∘)

注意：结合律在G的子集上均成立。

关于子群定义的进一步思考

问题1：e_H是否一定是e_G?　　$e_H e_H = e_H \rightarrow e_H = e_G$

问题2：*ab*应该在哪儿?



子群的判定 – 判定定理一

- G是群，H是G的非空子集。H是G的子群当且仅当：
  - $\forall a,b\in$H, $ab\in$H, 并且
  - $\forall a\in$H, $a^{-1}\in$H

（注意：这里a^{-1}是a在G中的逆元，当H确定为群后，它也是a在H中的逆元）

- 证明
  - 必要性显然（注意群中逆元素的唯一性）
  - 充分性：只须证明G中的单位元也一定在H中，它即是H的单位元素。

子群的判定 – 判定定理二

- G是群，H是G的非空子集。H是G的子群当且仅当：

  $\forall a,b \in \mathrm{H},\ ab^{-1} \in \mathrm{H}$

- 证明
  - 必要性易见
  - 充分性：
    - 单位元素：因为H非空，任取$a\in\mathrm{H}$, $e=aa^{-1}\in\mathrm{H}$
    - 逆元素： $\forall a\in\mathrm{H}$, 因为$e\in\mathrm{H}$, 所以 $a^{-1}=ea^{-1}\in\mathrm{H}$
    - 封闭性： $\forall a,b\in\mathrm{H}$, 已证$b^{-1}\in\mathrm{H}$，所以$ab=a(b^{-1})^{-1}\in\mathrm{H}$

群的术语：元素的乘幂（次方）

- 定义

$a^0 = e$ （e是单位元素）

$a^{n+1} = a^n \circ a$ (n是非负整数)

$a^{-k} = (a^{-1})^k$ (k为正整数)

- 性质

$a^n \circ a^m = a^{n+m}$

$(a^n)^m = a^{nm}$

群的术语：元素的阶

- 设G是群，$a\in$G， a的阶（周期）定义如下：
  - $|a|= \min\{k\in \mathbb{Z}^+ |\ a^k= e\}$
  - 如果这样的k不存在，a为无限阶元
- 性质
  - 有限群不存在无限阶元
  - 群中元素及其逆元具有相同的阶
  - 有限群中阶大于2的元素有偶数个
  - 偶数群中阶为2的元素有奇数个 $(a = a^{-1})$

子群的判定 – 有限子群

- **G是群，H是G的非空有限子集。H是G的子群当且仅当：**

  $$\forall a,b \in H,\ ab \in H$$

- 证明. 必要性显然. 下证充分性，只须证明逆元素性
  - 若H中只含G的单位元，H显然是子群。
  - 否则，任取H中异于单位元的元素a, 考虑序列

    $$a, a^2, a^3, \ldots$$

    注意：该序列中各项均为有限集合H中的元素，因此，必有正整数i, j(j>i), 满足：$a^i=a^j$, 因此：

    $$a^{-1}=a^{j-i-1} \in H$$

生成子群

- 设G是群，$a\in$G，构造G的子集H如下：

$$\mathrm{H} = \{a^k \mid k\text{是整数}\}$$

则H构成G的子群，称为a生成的子群 $\langle a\rangle$

- 证明：
  - H非空：a在H中
  - 利用判定定理二：

$$\forall a^{m}, a^{n} \in \mathrm{H},\ \ a^{m}(a^{n})^{-1} = a^{m-n} \in \mathrm{H},$$

群中元素的阶（续）

- 例

在Kleine 4群$(V, *)$中，$|e|=1$，当$a \neq e$时，$|a|=2$。

在$(\mathbb{Z}_7, +_7)$中，$|0|=1$, $a \neq 0$, $|a|=7$。

在$(\mathbb{Z}_6, +_6)$中，$|0|=1$

元素	0	1	2	3	4	5
阶	1	6	3	2	3	6

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

群中元素的阶（续）

- 定理（**元素的阶的性质**）

设$(G,\ *)$，a，$b \in G$，$|a|$，$|b|$为有穷

(1) 对$k \in \mathbb{Z}^+$，$a^k = e \Leftrightarrow |a| \mid k$

(2) $|a| = |a^{-1}|$

(3) $|ab| = |ba|$

(4) $|b^{-1}ab| = |a|$

群中元素的阶（续）

-
- (1) 对$k \in \mathbb{Z}^+$，$a^k = e \Leftrightarrow |a| \mid k$

证明：(1) “$\Rightarrow$”，设$|a| = m > 0$，$m = min\{k \mid a^k = e \wedge k > 0\}$

故$k \geq m$，从而$k = q \times m + r$，这里$0 \leq r < m$

$\because a^k = a^{qm} * a^r = (a^m)^q * a^r = e^q * a^r = a^r$

$\therefore a^r = e$

$\because r < m$

$\therefore r = 0$，从而$k = q \times m$，故$m \mid k$。

“$\Leftarrow$”，设$|a| = r$

$|a| \mid k \rightarrow r \mid k \rightarrow k = n \times r \rightarrow a^k = a^{n\times r} = (a^r)^n = e^n = e$

群中元素的阶（续）

(2)令$|a| = r$

$\because (a^{-1})^r = (a^r)^{-1} = e^{-1} = e$

$\therefore |a^{-1}| \mid |a|$，同理$|a| \mid |a^{-1}|$，故$|a^{-1}| = |a|$。

(3)$(ab)^{n+1} = abab\cdots ab = a(ba)^n b$

Case 1: ab的阶有穷，设为r

从而$(ab)^{r+1} = a(ba)^r b$

从而$ab = a(ba)^r b$，故$(ba)^r = e$

故ba的阶有穷，设为r'，由(1)知$r' \mid r$

同理$|ba| = r'$时有$|ab|$有穷，若为r,则$r \mid r'$

因此$|ab| = |ba|$.　　　　(4) $|b^{-1}ab| = |abb^{-1}| = |ae| = |a|$

群中元素的阶（续）

- 例题：设$\langle G,*\rangle$为群，试证明：若$|G|=n$，则

  G中阶大于2的元素有偶数个

证明：

对于$a\in G$，若$|a|>2$，则$a\neq a^{-1}$，若不然，则$a=a^{-1}$，从而$a^2=e$，故$|a|\leq 2$与$|a|>2$矛盾！因此我们有$|a|>2\rightarrow a\neq a^{-1}$，故$G$中阶$>2$的元素$a$与其逆$a^{-1}$成对出现，因此$G$有偶数个阶$>2$的元素。

群的中心

- 设G是群，构造G的子集C如下：

$$C = \{a \mid a \in G, \text{ 且} \forall x \in G, ax = xa\}$$

则C构成G的子群，称为G的中心

证明：

- C非空：单位元在C中
- 利用判定定理二：即证明对任意的$a, b \in C$, (即$ax=xa$, $bx=xb$对G中一切x成立)，

$$(ab^{-1})x = x(ab^{-1}) \text{ 也对G中一切}x\text{成立}$$

$$(ab^{-1})x = a(b^{-1}(x^{-1})^{-1}) = a(x^{-1}b)^{-1} = a(bx^{-1})^{-1} = a(xb^{-1}) = x(ab^{-1})$$

左(右)陪集及其表示

- 若H是群G的一个子群，a是G中的任意一个元素，

  定义：$a\mathrm{H} = \{\, ah \mid h \in \mathrm{H} \,\}$

- aH称为H的一个左陪集
  - 由群的封闭性可知，aH也是G的子集
  - $\forall h \in \mathrm{H}.\ ah \in \mathrm{H}\ \mathit{iff}\ a \in \mathrm{H}$
- 相应地可定义右陪集

陪集与划分

- 设H是群G的子群，则H的所有左陪集构成G的划分
  - G中任意元素a一定在某个左陪集中：$a \in a\text{H}$
  - $\forall a,b \in \text{G}$, $a\text{H}=b\text{H}$或者$a\text{H} \cap b\text{H}=\varnothing$
    - 假设$a\text{H} \cap b\text{H} \neq \varnothing$, 即存在$c \in a\text{H} \cap b\text{H}$, 令$c=ah_1=bh_2$,
    - 则$a=bh_2h_1^{-1}$, 从而$a\text{H} \subseteq b\text{H}$,
    - 同理可得： $b\text{H} \subseteq a\text{H}$. 所以 $a\text{H}=b\text{H}$
- 注意：a, b属于同一左陪集

  iff $a \in b\text{H}$且$b \in a\text{H}$

  iff $b^{-1}a \in \text{H}$

陪集与划分（示例）

- 令$H=\{2n|n\in\mathbb{Z}\}$，$\langle H,+\rangle<\langle\mathbb{Z},+\rangle$，$a\in\mathbb{Z}$，

  $aH=\{2n+a|n\in\mathbb{Z}\}$，$(2k)H=H$，

  $(2k+1)H=\mathbb{Z}-H$，$\{0H,1H\}\mathbb{Z}$的一个划分。

- $\langle\mathbb{Z}_6,\oplus_6\rangle$为群，令$H=\{0,3\}$，$\langle H,\oplus_6\rangle<\langle\mathbb{Z}_6,\oplus_6\rangle$

  ，$H0=H$，$H1=\{1,4\}$，$H2=\{2,5\}$

  $H3=H, H4=\{4,1\}=H1, H5=\{5,2\}=H2$

  $\{H0,H1,H2\}$是$\mathbb{Z}_6$的一个划分。

陪集与划分（续）

-
- 定理（陪集与划分）：设$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle$,

(1) $eH = H$

(2) $\cup \{aH|a \in G\} = G$

(3) $\forall a,b \in G$，$aH = bH$ 或者 $aH \cap bH = \emptyset$

(4) $\{aH|a \in G\}$为$\boldsymbol{G}$之划分

左陪集关系

- 设H是群G的子群，定义G上的二元关系R如下：
  $\forall a,b\in G$, $(a,b)\in R$当且仅当$b^{-1}a\in H$
- R是G上的等价关系
  - 自反性：$\forall a\in G$, $a^{-1}a=e$
  - 对称性：注意$a^{-1}b=(b^{-1}a)^{-1}$
  - 传递性：如果$b^{-1}a\in H$, $c^{-1}b\in H$, 则

$$c^{-1}a=c^{-1}(bb^{-1})a=(c^{-1}b)(b^{-1}a)\in H$$

- $[a]_R=aH$：$x\in[a]_R \Leftrightarrow aRx \Leftrightarrow x^{-1}a=h\in H \Leftrightarrow x=ah^{-1}\in aH$

Lagrange 定理

- 引理（陪集的势）

设$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle$，$a \in G$，则$H \approx aH \approx Ha$

- 证明：

令$\sigma: H \to aH$为$\sigma(h) = ah$，由消去律可知

τ, σ为1-1，易见σ亦为满射，故$H \approx aH$。

同理可证$H \approx Ha$。

Lagrange 定理（续）

- $\{a\mathrm{H}|\ a \in G\}$ 是G的一个划分。
- 对有限群G，每个陪集元素个数有限且相同，并等于$|\mathrm{H}|$, 于是$|G| = k|\mathrm{H}|$, k是左（右）陪集的个数，称为H在G中的指数，记为$[G:\mathrm{H}]$

Lagrange 定理（续）

- Lagrange定理：设$\langle G,*\rangle$为有限群，$\langle H,*\rangle < \langle G,*\rangle$，则 $|G| = |H| \cdot [G:H]$
- 证明：由于$|G|$有穷，故$[G:H]$有穷且设为N，从而有$a_1,\cdots,a_N \in G$使$\{a_iH|1 < i \le N\}$为G之划分，故$G = \bigcup_{i=1}^{N} Ha_i$；由引理，对任意$i,j$，$|Ha_i| = |Ha_j| = |H|$ $\therefore |G| = |H| \cdot N$即$|G| = |H| \cdot [G:H]$. □

Lagrange 定理（续）

- 推论1：设$\langle G,*\rangle$为有限群，$a \in G$，则$|a|$为$|G|$的因子。

- 证明*：$\because \left\langle \langle a\rangle,* \right\rangle \le \langle G,*\rangle \therefore |\langle a\rangle|$为$|G|$的因子，又由于$|a|$有穷，故$|\langle a\rangle| = |a|$，故$|a|$为$|G|$的因子. $\square$

Lagrange 定理（续）

- 推论2*：设$\langle G,*\rangle$为p阶群，若p为质数，则$(\exists a \in G)(\langle a\rangle = G)$

证：设$|G| = p$为素数，可以取$a \neq e$，$a \in G$,由上推论知

$|\langle a\rangle|$为$|G|$的因子，$\because |\langle a\rangle| \geq 2 \ \therefore |\langle a\rangle| = p$

故$G = \langle a\rangle$

拉格朗日定理的应用

- 6阶群G必含3阶子群
- 证明
  - 如果G中有6阶元素a, 则$b=aa$是3阶元素，因此$\langle a\rangle$是3阶子群
  - 如果G中没有6阶元素，则根据拉格朗日定理的推论，G中元素的阶只可能是1,2或3。
    - 如果没有3阶元素，即$\forall x\in G$, $x^2=e$, 那么$\forall x, y\in G$, $xy=(yx)^2(xy)=yx$, 即G是交换群。
    - 因此$\{e,a,b,ab\}$构成4阶子群，但4不能整除6，矛盾。
  - 所以G中必含3阶元素a, 即由a生成的子群是3阶子群。

- 证明阶小于6的群都是交换群

作业

- 教材内容：[屈婉玲] 10.2节
- 课后习题：见课程QQ群