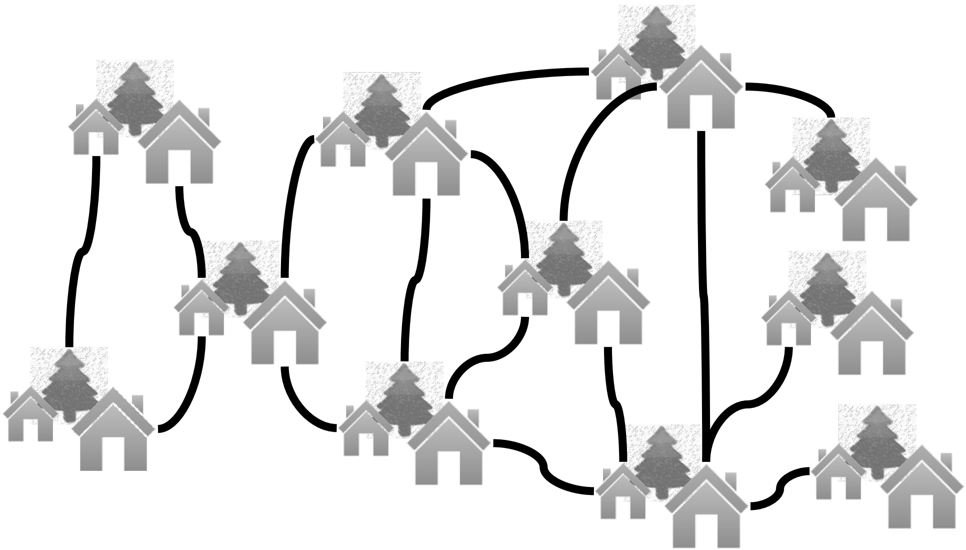
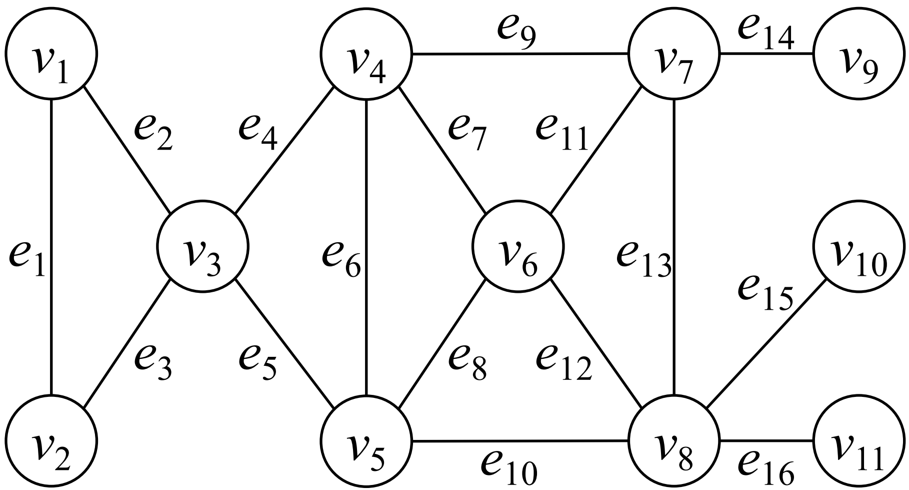
第6.2节 顶点的独立、覆盖和支配

程龚

如何选择道路建设加油站更合理？

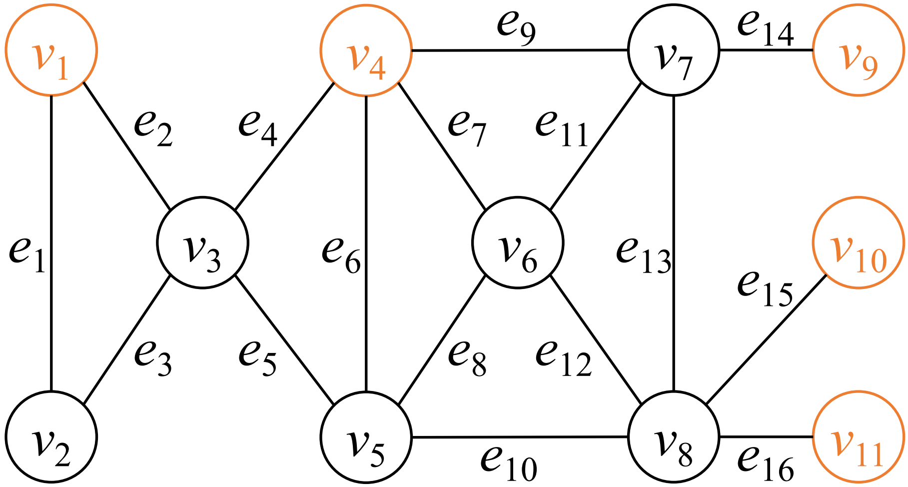


如何选择道路建设加油站更合理？



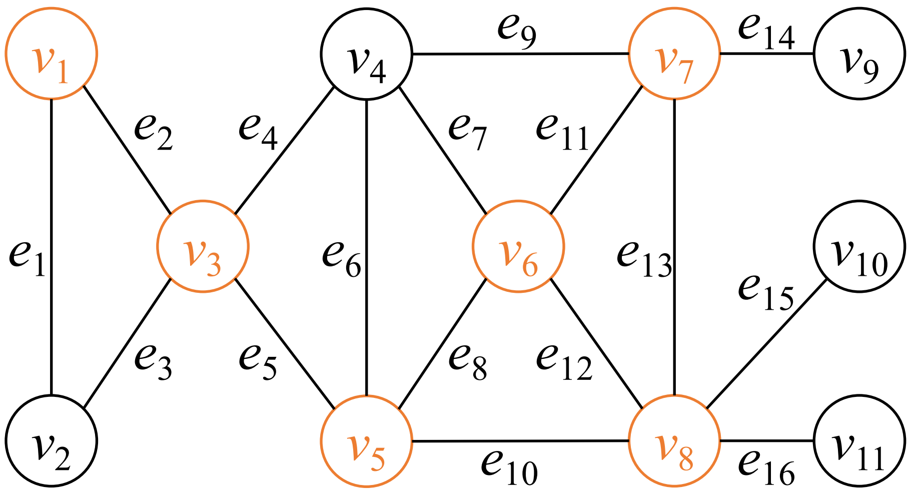
如何选择道路建设加油站更合理？

- 李专家：尽可能多选城镇，但为避免浪费，相邻的城镇原则上至多选一座。



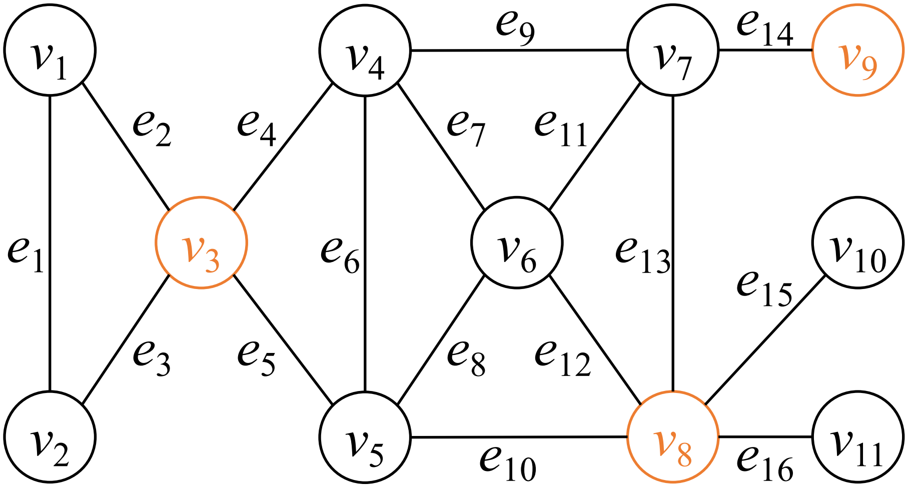
如何选择道路建设加油站更合理？

- 周专家：尽可能少选城镇，但为确保够用，每条道路关联的城镇原则上至少选一座。



如何选择道路建设加油站更合理？

- 吴专家：尽可能少选城镇，但每座未被选中的城镇原则上至少与一座被选中的城镇相邻。

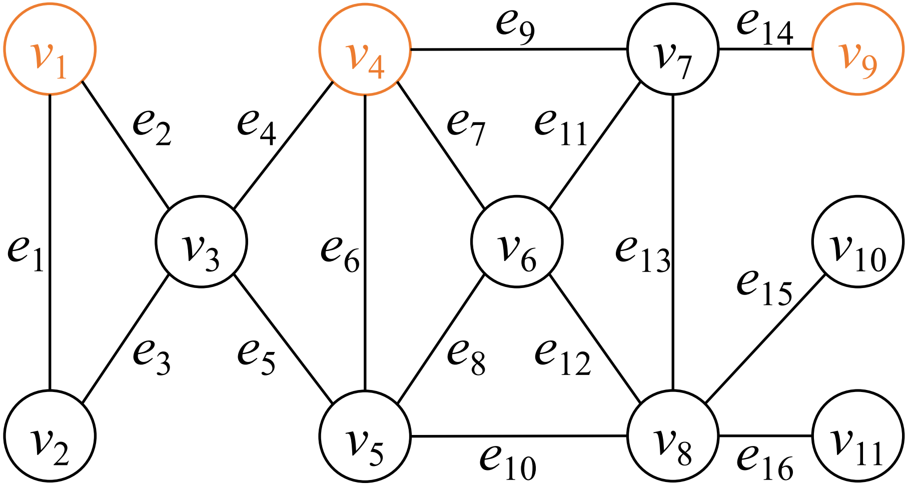


本次课的主要内容

6.2 顶点的独立、覆盖和支配

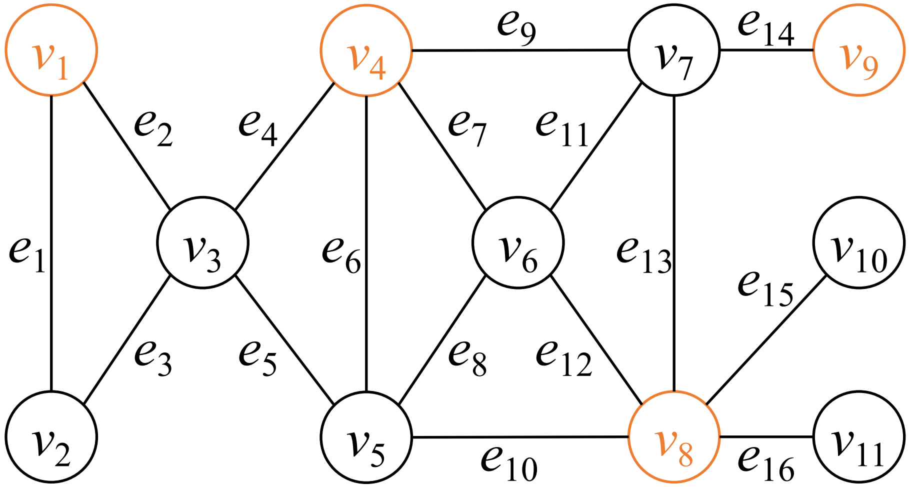
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$I \subseteq V$
  - **点独立集**： I中的顶点两两不相邻



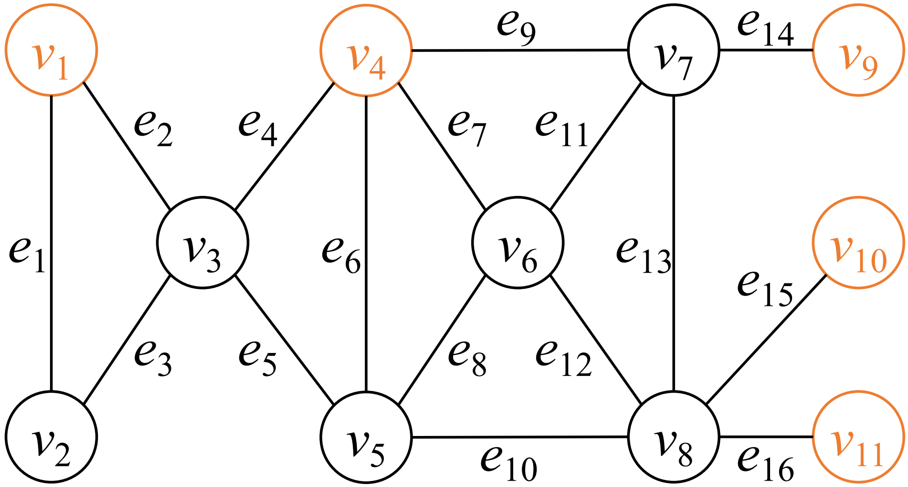
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$I \subseteq V$
  - 点独立集：I中的顶点两两不相邻
  - **极大点独立集**：点独立集，且不是G的任何点独立集的真子集



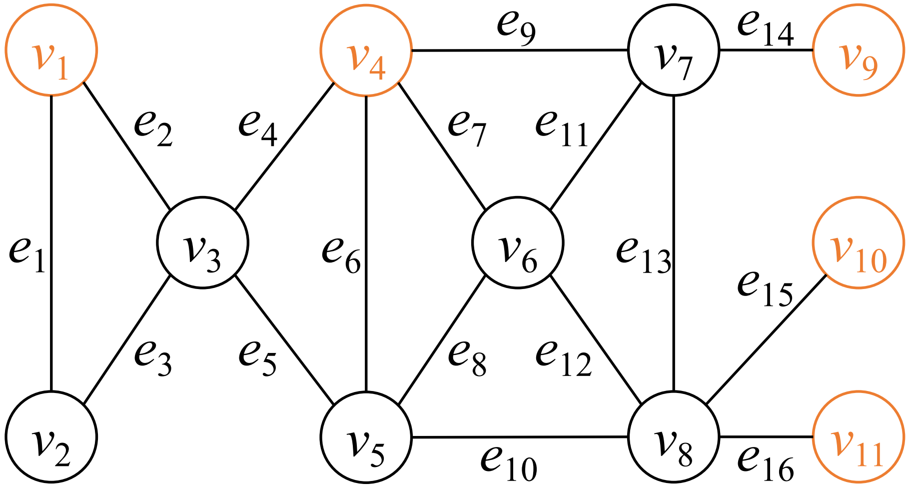
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$I \subseteq V$
  - 点独立集：I中的顶点两两不相邻
  - 极大点独立集：点独立集，且不是G的任何点独立集的真子集
  - **最大点独立集**：顶点的数量最多的点独立集



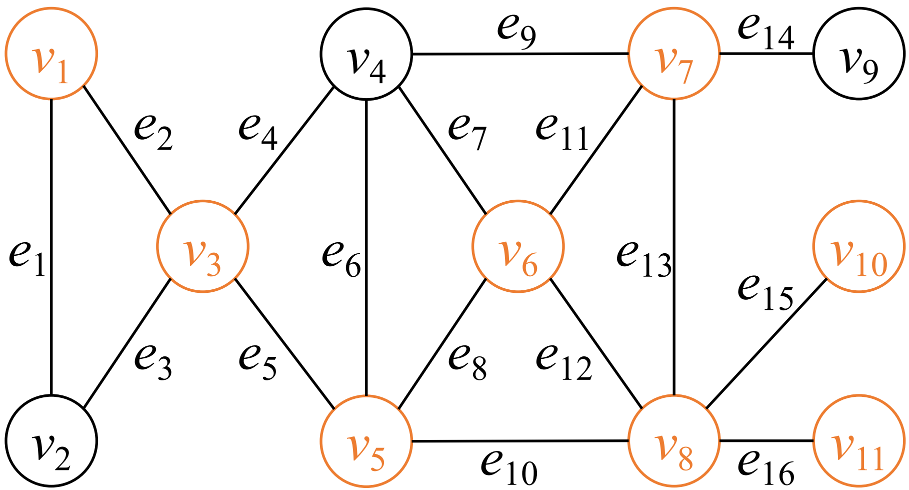
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$I \subseteq V$
  - 点独立集：I中的顶点两两不相邻
  - 极大点独立集：点独立集，且不是G的任何点独立集的真子集
  - 最大点独立集：顶点的数量最多的点独立集
  - **点独立数**：最大点独立集的大小，记作α(G)



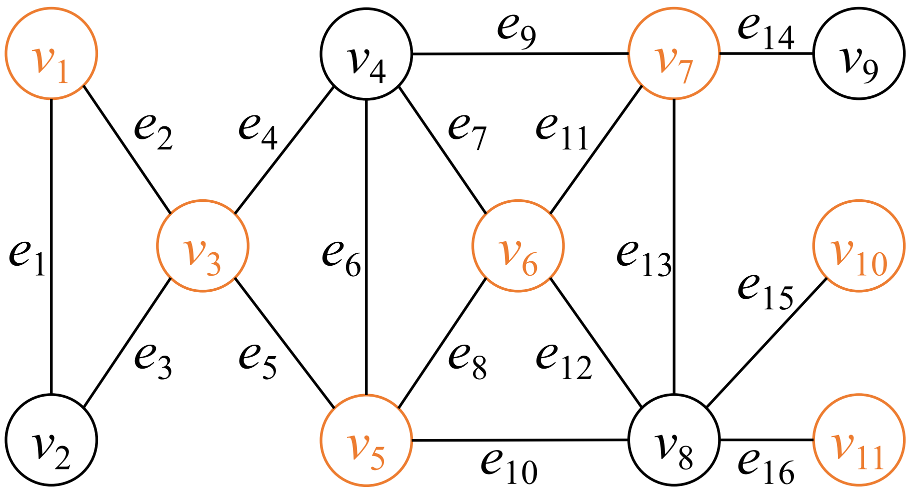
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$C \subseteq V$
  - **点覆盖集**：C中顶点关联的所有边形成的集合为E



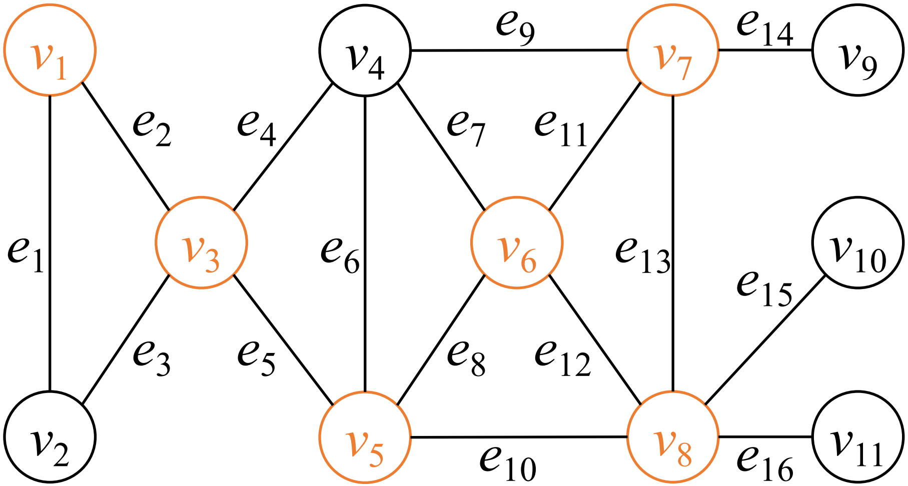
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$C \subseteq V$
  - 点覆盖集：C中顶点关联的所有边形成的集合为E
  - **极小点覆盖集**：点覆盖集，且G的任何点覆盖集都不是C的真子集



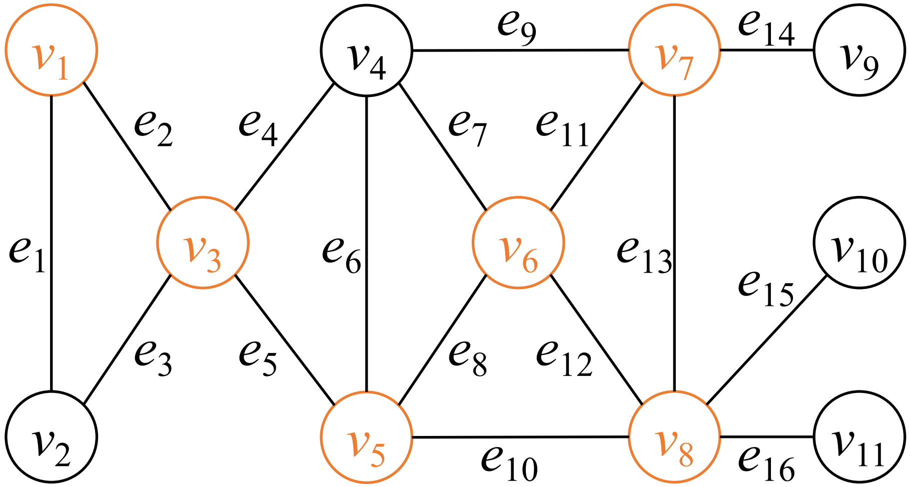
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$C \subseteq V$
  - 点覆盖集：C中顶点关联的所有边形成的集合为E
  - 极小点覆盖集：点覆盖集，且G的任何点覆盖集都不是C的真子集
  - **最小点覆盖集**：顶点的数量最少的点覆盖集



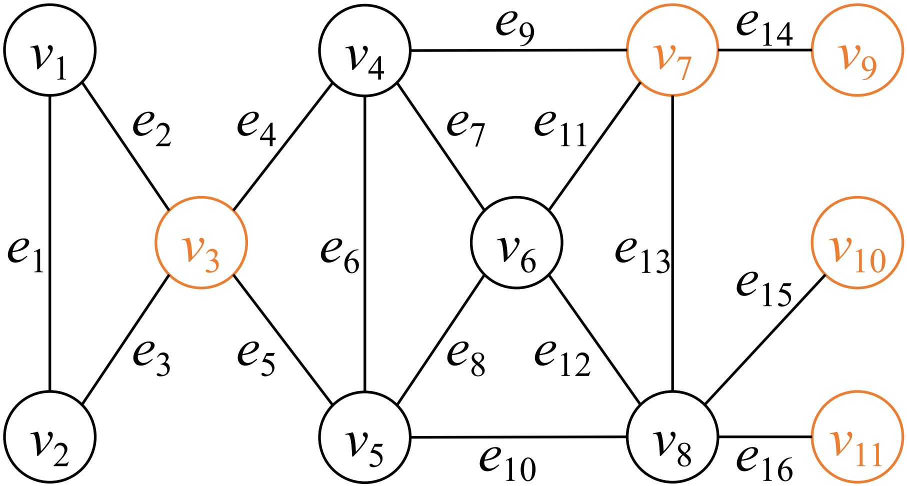
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$C \subseteq V$
  - 点覆盖集：C中顶点关联的所有边形成的集合为E
  - 极小点覆盖集：点覆盖集，且G的任何点覆盖集都不是C的真子集
  - 最小点覆盖集：顶点的数量最少的点覆盖集
  - **点覆盖数**：最小点覆盖集的大小，记作β(G)



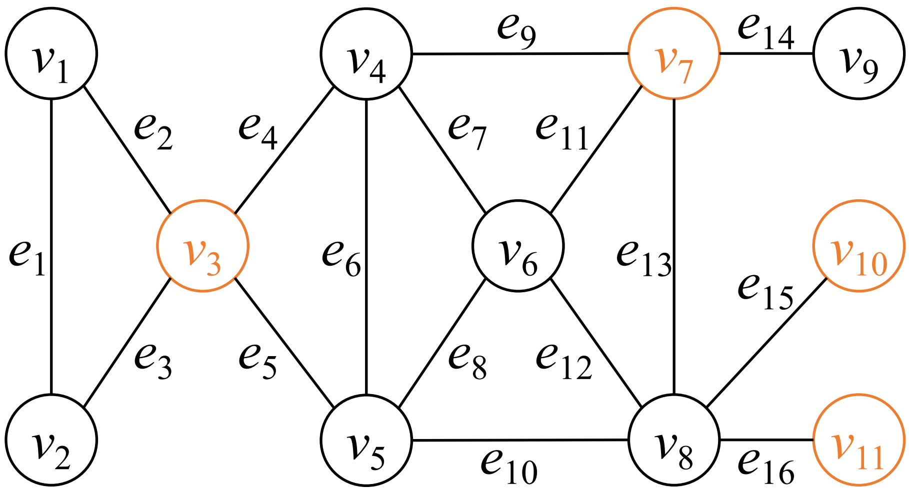
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$D \subseteq V$
  - **点支配集**：$V \setminus D$中的每个顶点都与D中的至少一个顶点相邻



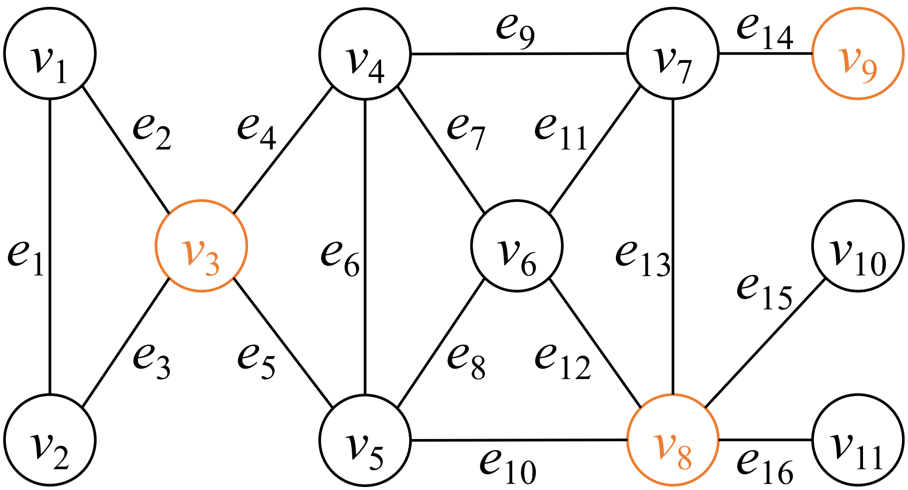
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$D \subseteq V$
  - 点支配集：$V \setminus D$中的每个顶点都与D中的至少一个顶点相邻
  - **极小点支配集**：点支配集，且G的任何点支配集都不是C的真子集



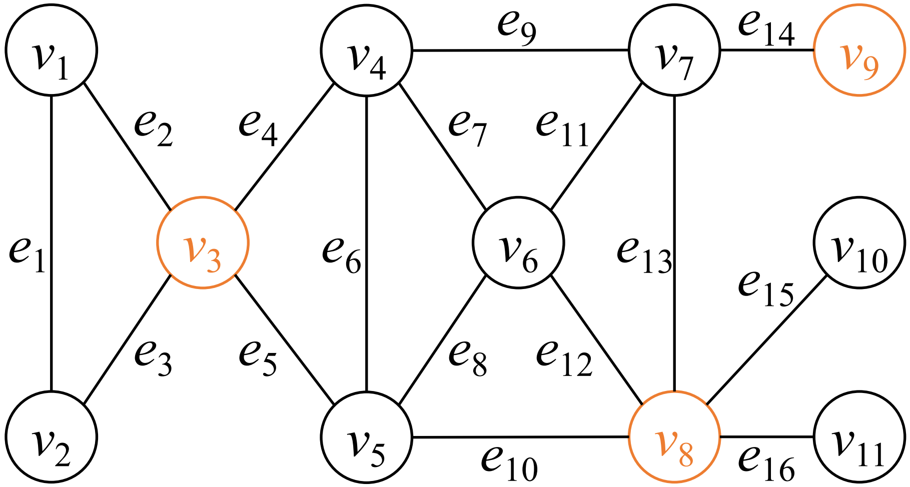
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$D \subseteq V$
  - 点支配集：$V \setminus D$中的每个顶点都与D中的至少一个顶点相邻
  - 极小点支配集：点支配集，且G的任何点支配集都不是C的真子集
  - **最小点支配集**：顶点的数量最少的点支配集



顶点的独立、覆盖和支配

- 对于图$G = <V, E>$和顶点子集$D \subseteq V$
  - 点支配集：$V \setminus D$中的每个顶点都与D中的至少一个顶点相邻
  - 极小点支配集：点支配集，且G的任何点支配集都不是C的真子集
  - 最小点支配集：顶点的数量最少的点支配集
  - **点支配数**：最小点支配集的大小，记作$\gamma(G)$



顶点的独立、覆盖和支配

- 每个图都有点独立集、点覆盖集和点支配集吗？

顶点的独立、覆盖和支配

- 每个图都有点独立集、点覆盖集和点支配集吗？
- 阶为n的图的点独立数的上界是多少？
  点覆盖数的下界是多少？
  点支配数的下界是多少？

顶点的独立、覆盖和支配

- 每个图都有点独立集、点覆盖集和点支配集吗？
- 阶为n的图的点独立数的上界是多少？
  点覆盖数的下界是多少？
  点支配数的下界是多少？
  - $\nu - \gamma \leq \gamma\Delta$，为什么？
  - 因此，$\gamma \geq \nu / (1 + \Delta)$

顶点的独立、覆盖和支配

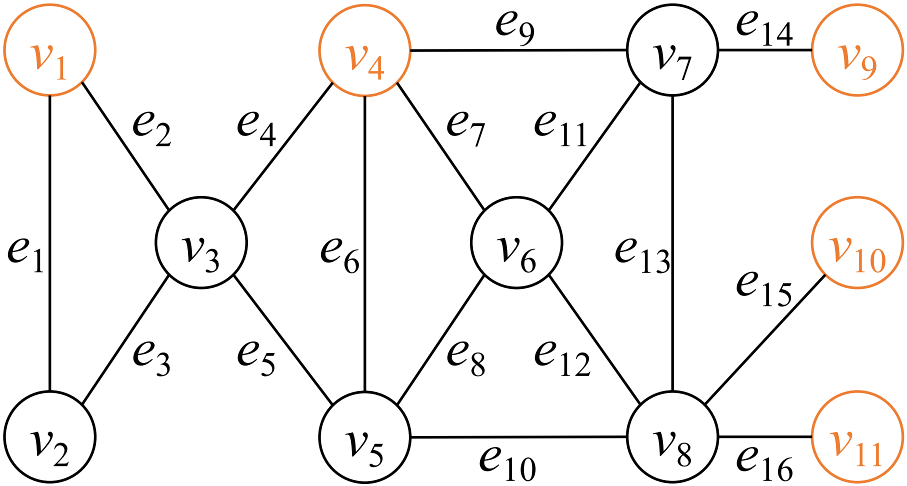
- 每个图都有点独立集、点覆盖集和点支配集吗？
- 阶为n的图的点独立数的上界是多少？
  点覆盖数的下界是多少？
  点支配数的下界是多少？

- 完全图K_n的点独立数、点覆盖数和点支配数分别是多少？
- 完全二分图$K_{m,n}$的点独立数、点覆盖数和点支配数分别是多少？

随堂小测

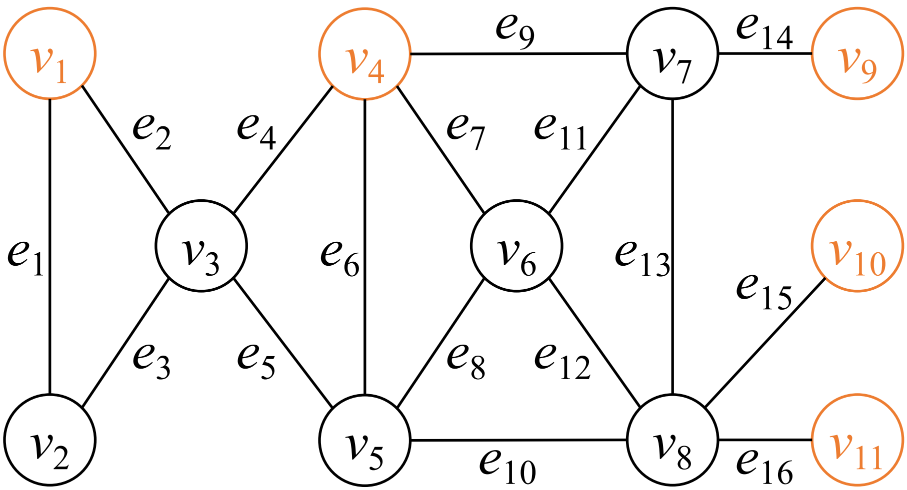
顶点的独立、覆盖和支配

- 点独立集的补集是点覆盖集吗？
  点覆盖集的补集是点独立集吗？



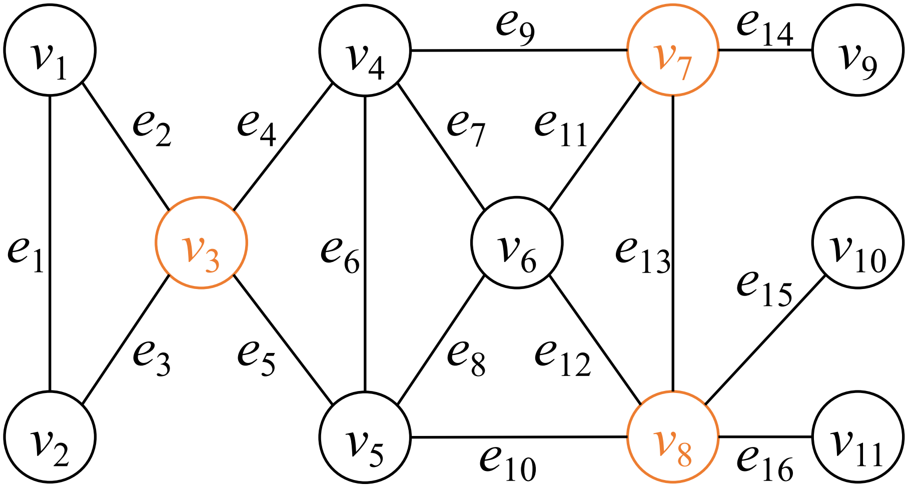
顶点的独立、覆盖和支配

- 点独立集的补集是点覆盖集吗？
  点覆盖集的补集是点独立集吗？
- 对于任意一个图G：$\alpha(G) + \beta(G) = \nu(G)$
  - 你能自己证明吗？



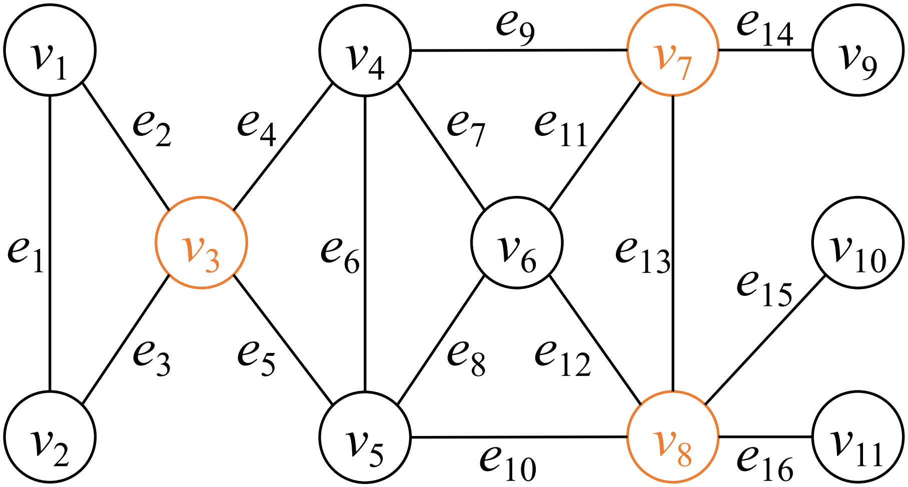
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于不含孤立点的图，点支配集的补集也是点支配集吗？
  极小点支配集的补集是点支配集吗？



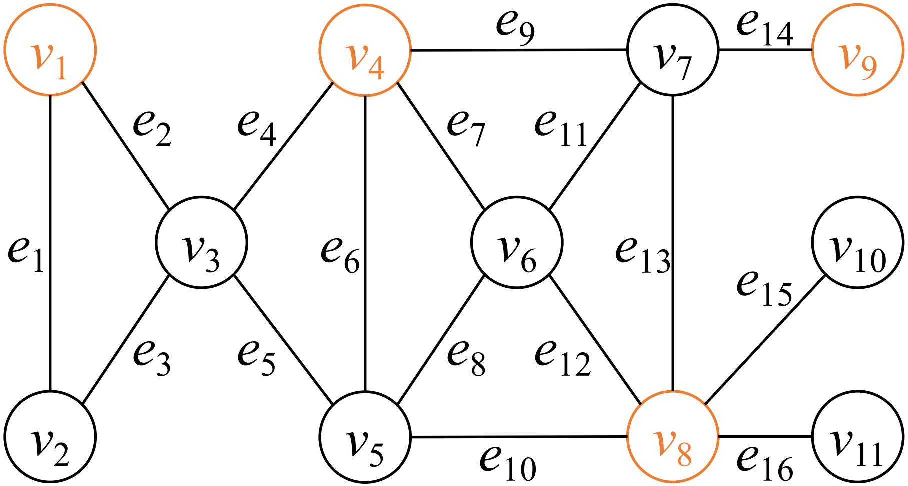
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于不含孤立点的图，点支配集的补集也是点支配集吗？极小点支配集的补集是点支配集吗？
- 对于极小点支配集中的顶点，其邻点有什么特征？



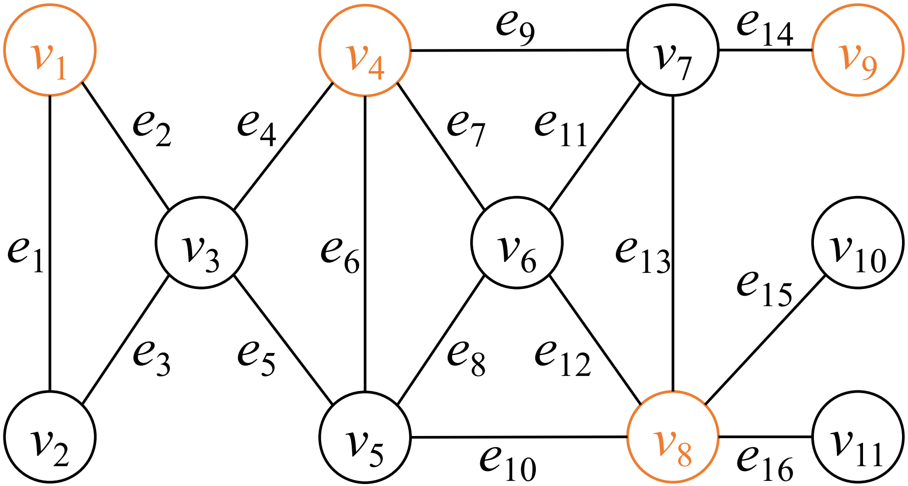
顶点的独立、覆盖和支配

- 点独立集是点支配集吗？
  极大点独立集是点支配集吗？
  极大点独立集是极小点支配集吗？



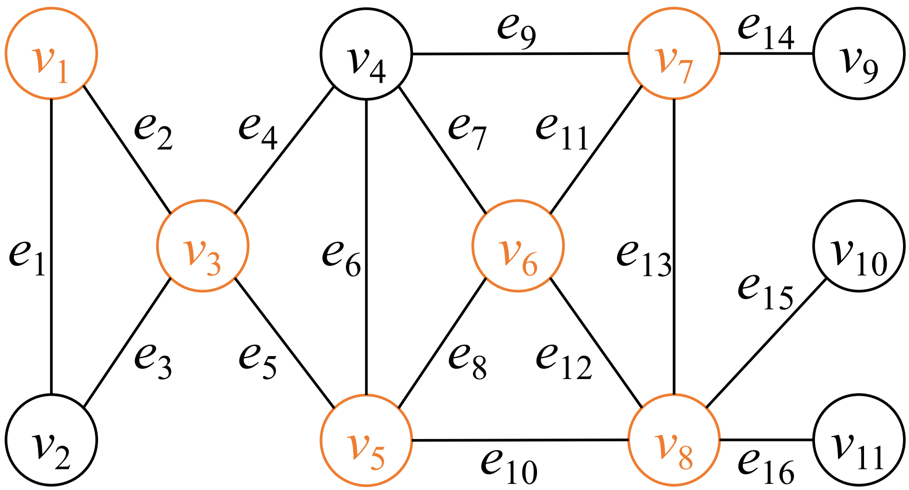
顶点的独立、覆盖和支配

- 点独立集是点支配集吗？
  极大点独立集是点支配集吗？
  极大点独立集是极小点支配集吗？
- 对于任意一个图G：$\alpha(G) \geq \gamma(G)$
  - 你能自己证明吗？



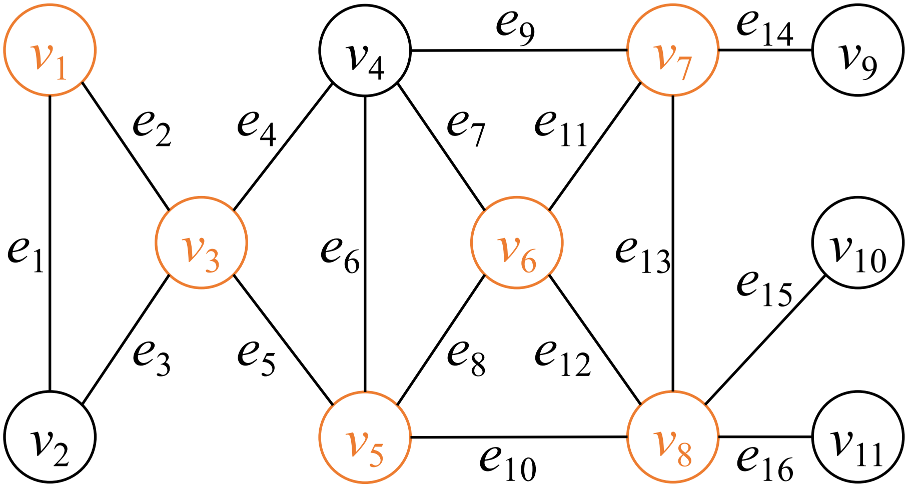
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于不含孤立点的图，点覆盖集是点支配集吗？



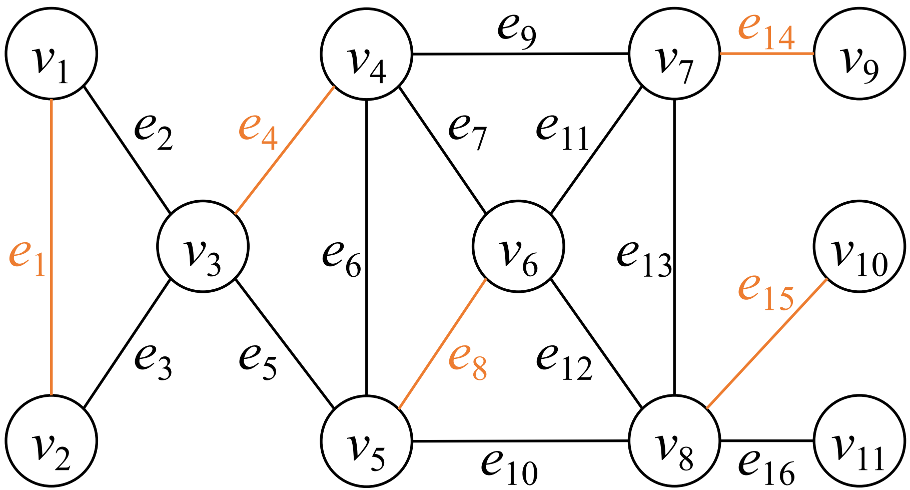
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于不含孤立点的图，点覆盖集是点支配集吗？
- 对于任意一个不含孤立点的图G：$\beta(G) \geq \gamma(G)$
  - 你能自己证明吗？



顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个图G：$\beta(G) \geq \alpha'(G)$
  - 你能自己证明吗？
  - 提示：基于最大边独立集，分析点覆盖数。



顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个图G：$\beta(G) \geq \alpha'(G)$
- 若图G的一个点覆盖集和一个边独立集的大小相等，你能得出什么结论？

顶点的独立、覆盖和支配

- Dénes König，1884-1944，出生于奥匈帝国
- Jenő Egerváry，1891-1958，出生于奥地利

编写了第一本图论教材

http://en.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9nes_K%C5%91nig
http://en.wikipedia.org/wiki/Jen%C5%91_Egerv%C3%A1ry

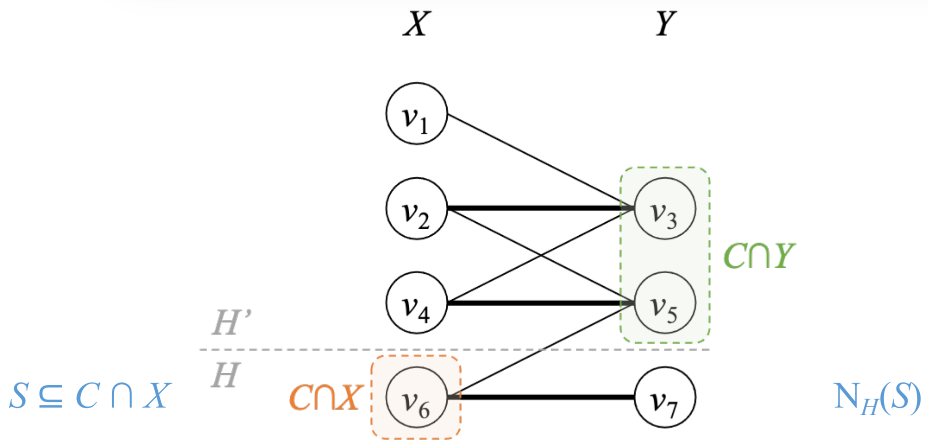
顶点的独立、覆盖和支配

- （柯尼希-艾盖尔瓦里定理）
  对于任意一个二分图G：$\beta(G) = \alpha'(G)$

顶点的独立、覆盖和支配

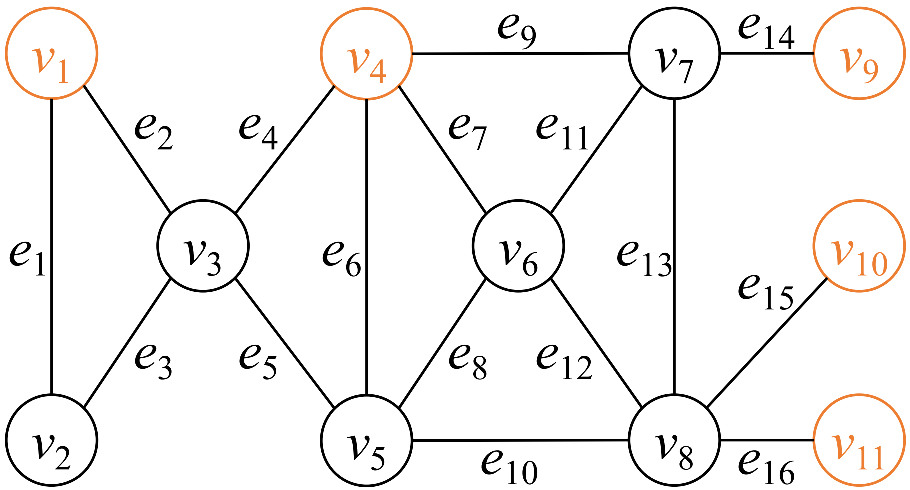
- （柯尼希-艾盖尔瓦里定理）
  对于任意一个二分图G：$\beta(G) = \alpha'(G)$
  - 思路：只需证明$\beta(G) \le \alpha'(G)$，基于最小点覆盖集构造边独立集
  - 关键：

> - 霍尔定理：对于二分图$G = <X \cup Y, E>$，G有饱和X中所有顶点的匹配当且仅当对于任意顶点子集$S \subseteq X$，$|N(S)| \ge |S|$。
>   - $N(S)$：S中所有顶点的所有邻点形成的集合



顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个不含孤立点的图G：$\alpha(G) \le \beta'(G)$
  - 你能自己证明吗？
  - 提示：基于最大点独立集，分析边覆盖数。



顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个不含孤立点的图G：$\alpha(G) \le \beta'(G)$
- 若图G的一个点独立集和一个边覆盖集的大小相等，你能得出什么结论？

顶点的独立、覆盖和支配

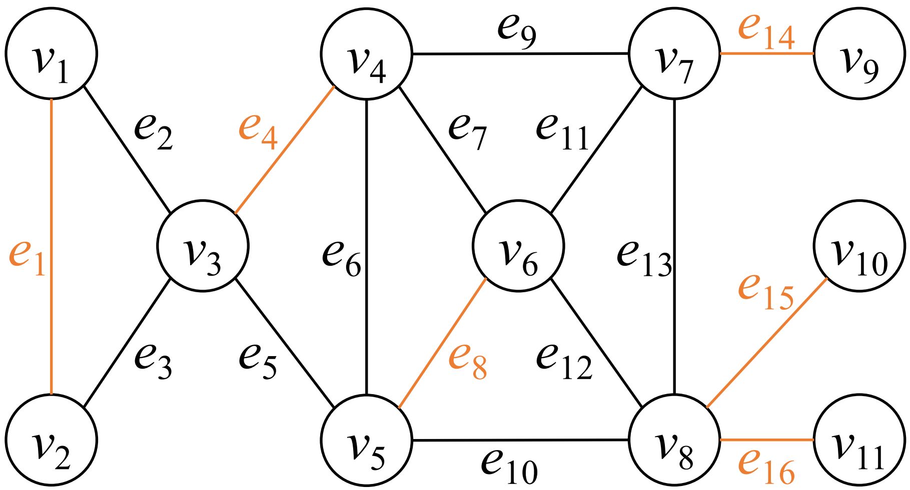
- 对于任意一个不含孤立点的二分图G：$\alpha(G) = \beta'(G)$

顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个不含孤立点的二分图G：$\alpha(G) = \beta'(G)$
  - 对于任意一个不含孤立点的图G：$\alpha'(G) + \beta'(G) = \nu(G)$
  - 对于任意一个图G：$\alpha(G) + \beta(G) = \nu(G)$
  - 对于任意一个二分图G：$\beta(G) = \alpha'(G)$

顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个不含孤立点的图G：$\gamma(G) \leq \beta'(G)$
  - 你能自己证明吗？
  - 提示：基于最小边覆盖集构造点支配集。

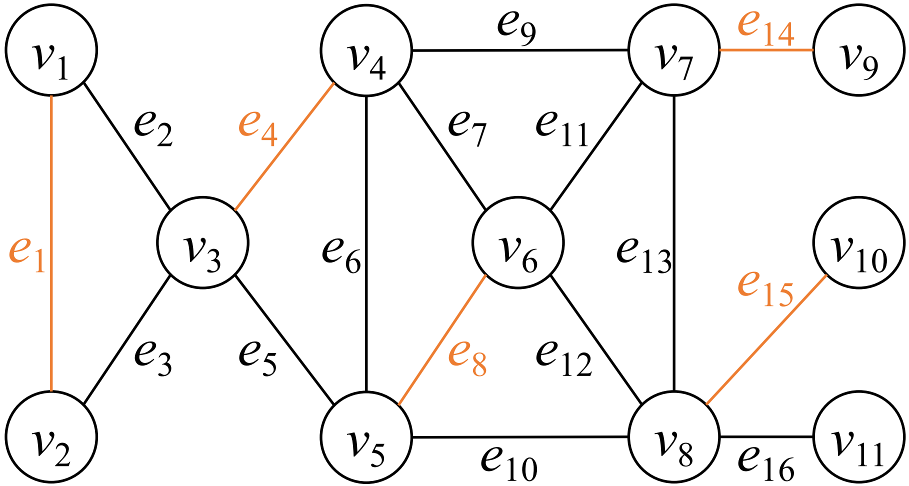


顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个不含孤立点的图G：$\gamma(G) \le \alpha'(G)$

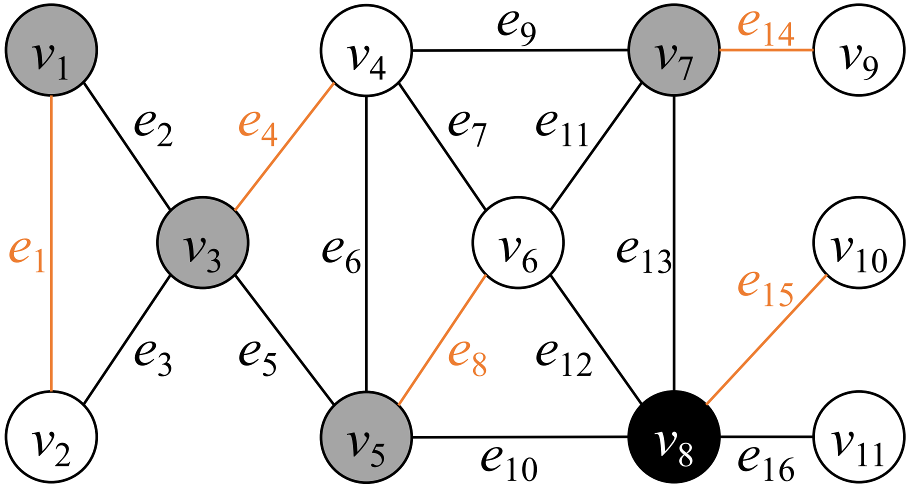
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个不含孤立点的图G：$\gamma(G) \le \alpha'(G)$
  - 思路：基于最大边独立集构造点支配集。



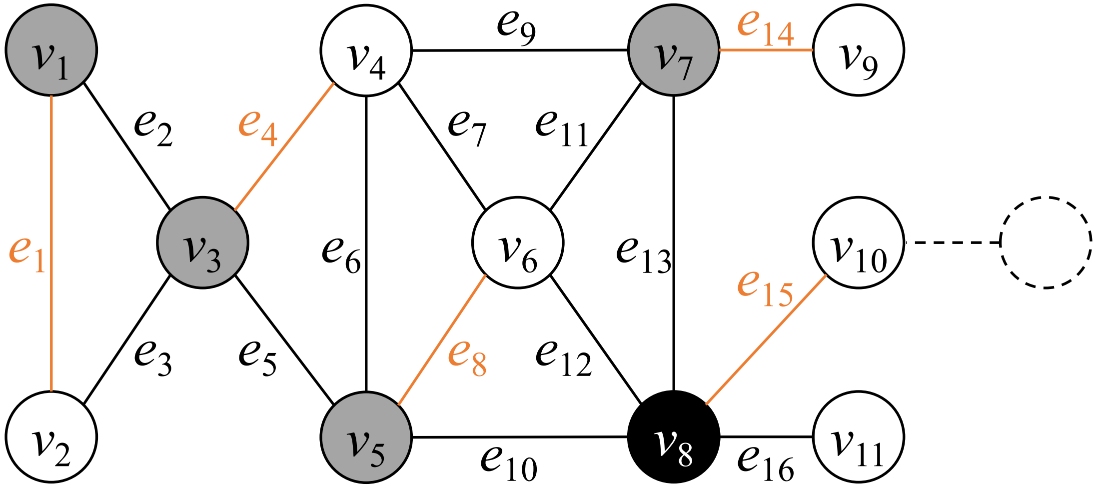
顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个不含孤立点的图G：$\gamma(G) \leq \alpha'(G)$
  - 思路：基于最大边独立集构造点支配集。



顶点的独立、覆盖和支配

- 对于任意一个不含孤立点的图G：$\gamma(G) \leq \alpha'(G)$
  - 思路：基于最大边独立集构造点支配集。



顶点的独立、覆盖和支配

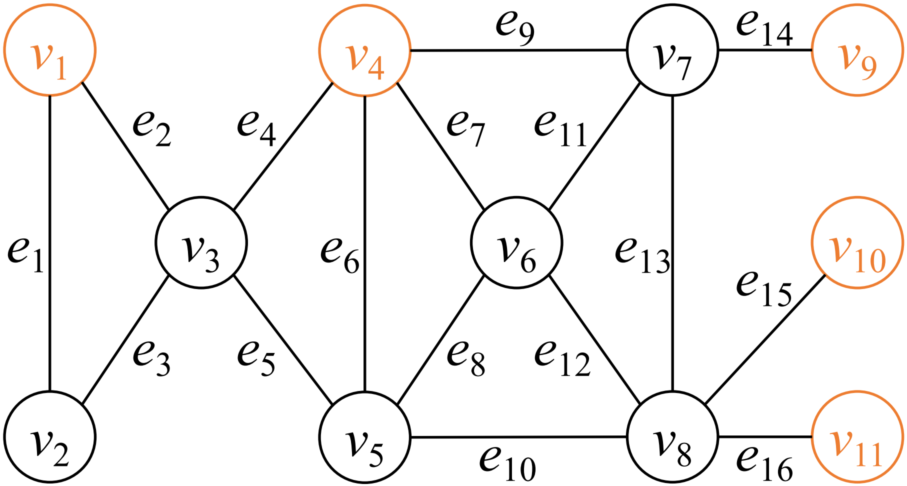
- 如何找出图中的最大点独立集？
- 如何找出图中的最小点覆盖集？
- 如何找出图中的最小点支配集？

顶点的独立、覆盖和支配

- 如何找出图中的最大点独立集？
- 如何找出图中的最小点覆盖集？
- 如何找出图中的最小点支配集？

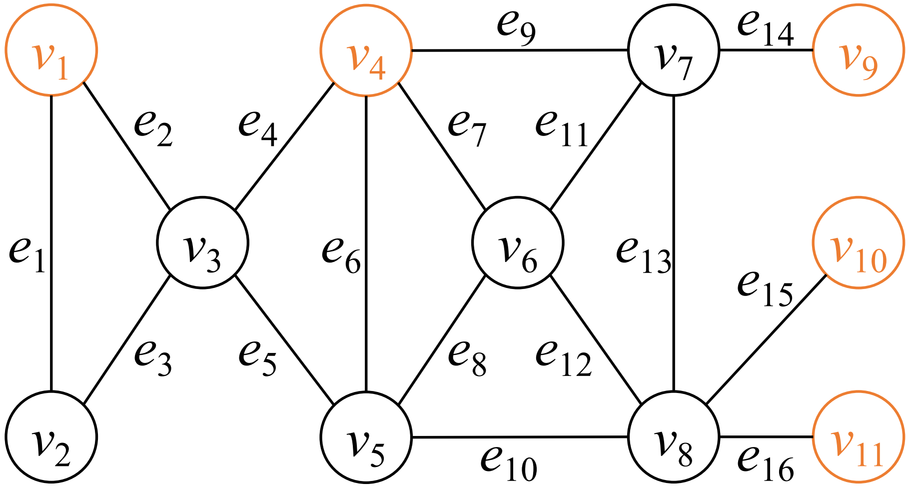
顶点的独立、覆盖和支配

- 图G的最大点独立集是其补图$\overline{G}$的最大团
  - **团**：顶点子集，两两相邻
  - **最大团**：顶点的数量最多的团



顶点的独立、覆盖和支配

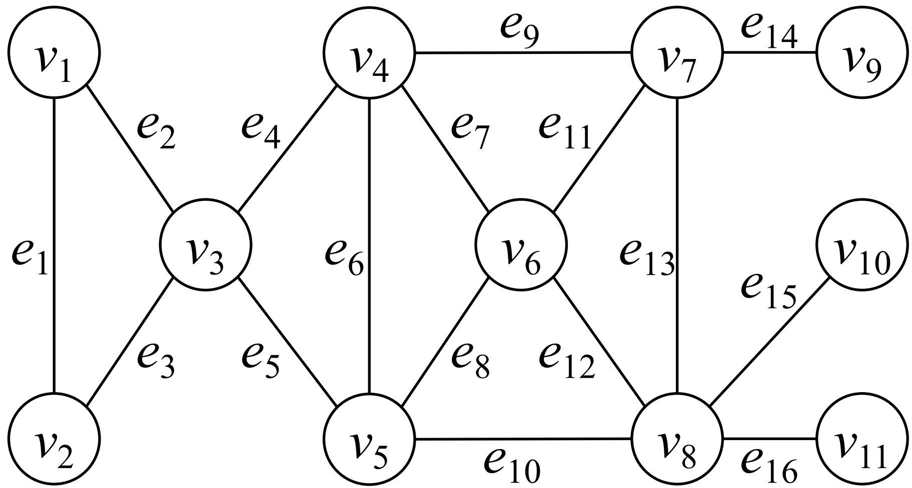
- 图G的最大点独立集是其补图$\overline{G}$的最大团
  - 团：顶点子集，两两相邻
  - 最大团：顶点的数量最多的团
- 最大团的计算是一个NP难的优化问题，不存在多项式时间算法（除非P=NP）



顶点的独立、覆盖和支配

- 从初值为空集的点独立集I开始

$I = \{\}$



算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

$\quad v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u);$

$\quad I \leftarrow I \cup \{v\};$

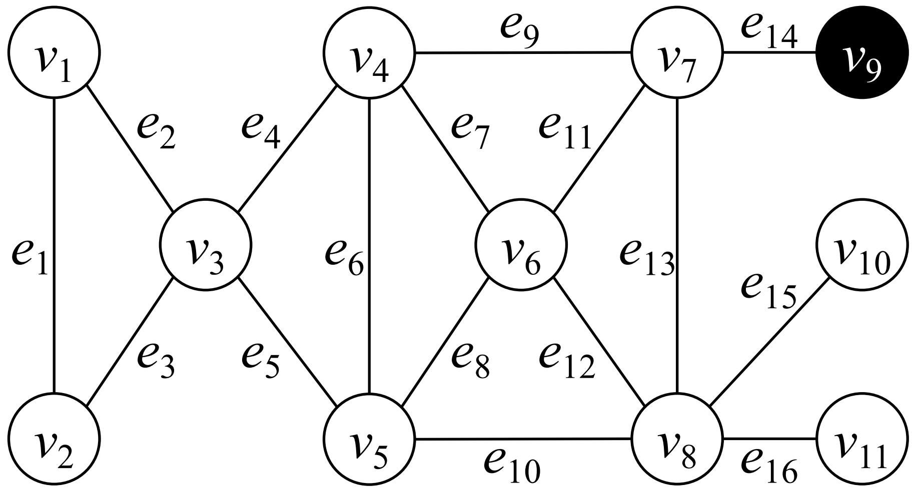
$\quad G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v));$

输出 (I);

顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点
    为什么选择这样的v？

$I = \{v_9\}$



算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E\rangle$
初值: I 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**
  $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;
  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;
  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;
输出 (I);

顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点
  - 然后，将v及其所有邻点形成的集合N(v) 从G中删除
    为什么删除？删除后，V中的顶点有什么特征？

$I = \{v_9\}$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

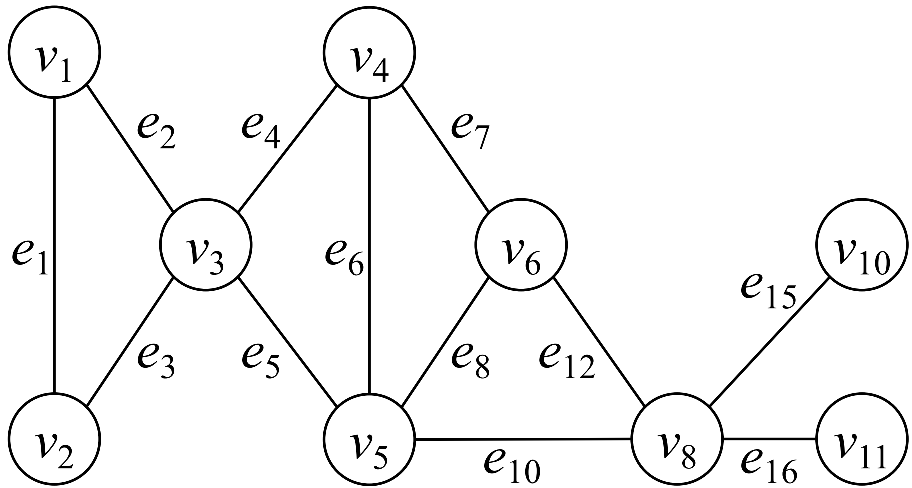
while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 （I);



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

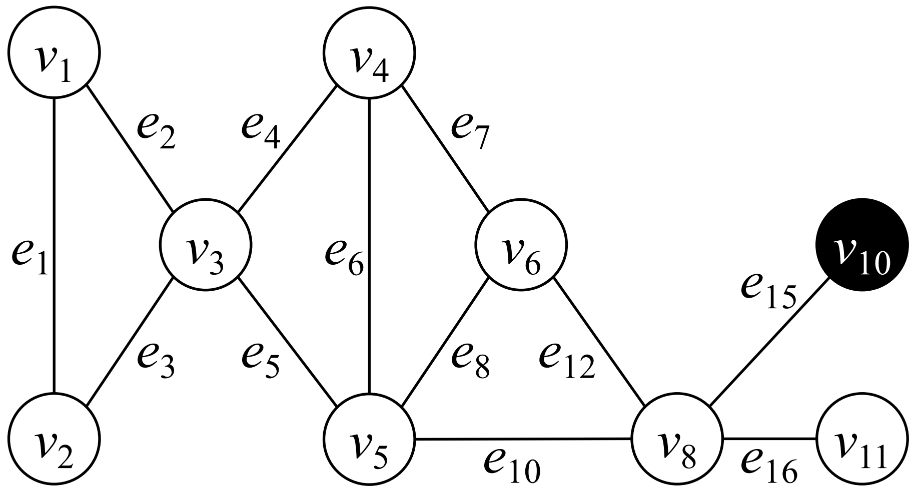
  $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 (I);

$I = \{v_9, v_{10}\}$



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点
  - 然后，将v及其所有邻点形成的集合N(v) 从G中删除

$I = \{v_9, v_{10}\}$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

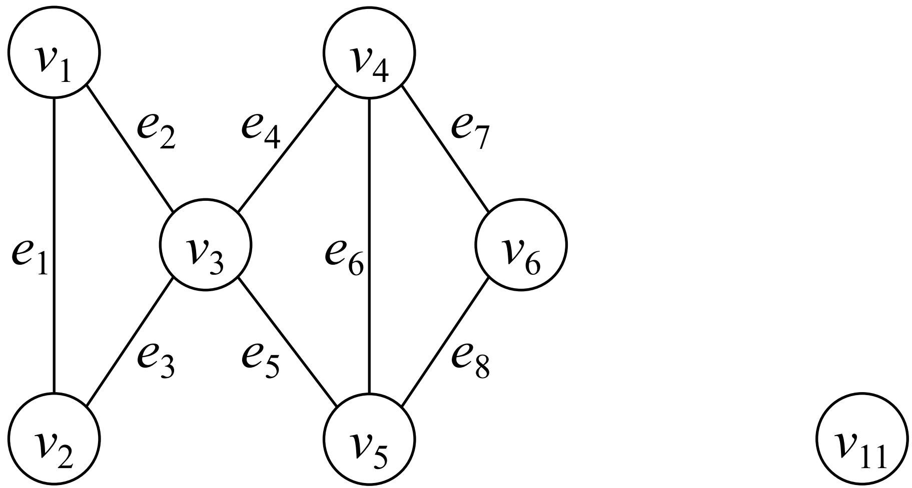
while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v))$;

输出 （I）;



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点

$I = \{v_9, v_{10}, v_{11}\}$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

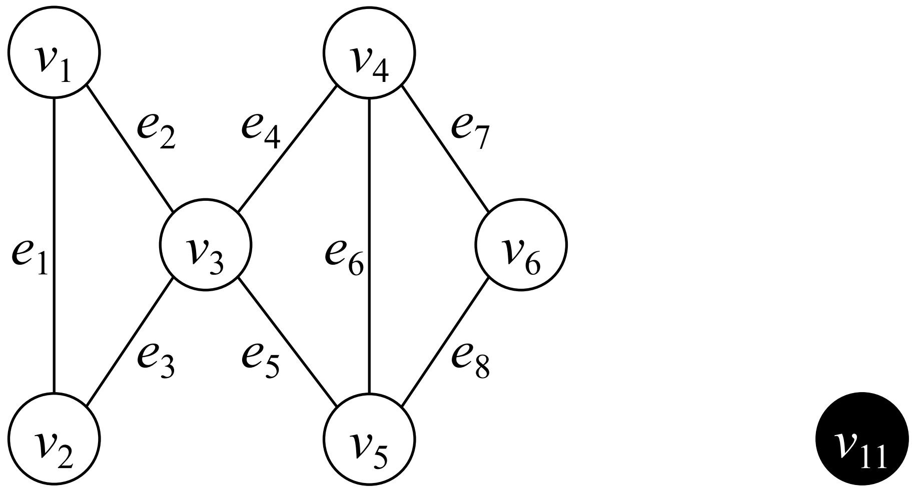
while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 (I);



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点
  - 然后，将v及其所有邻点形成的集合N(v) 从G中删除

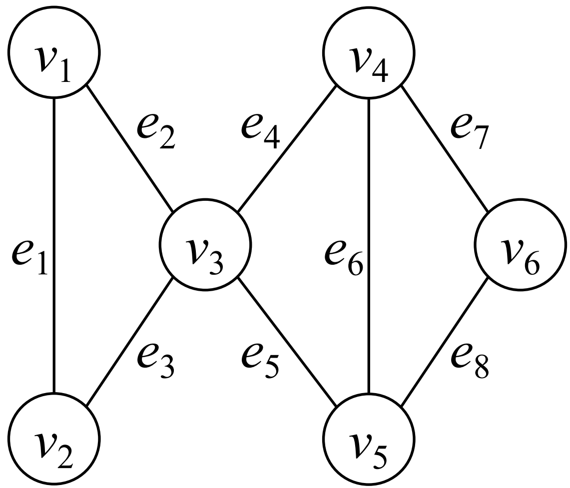
$I = \{v_9, v_{10}, v_{11}\}$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E\rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← arg min_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点

$I = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_1\}$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

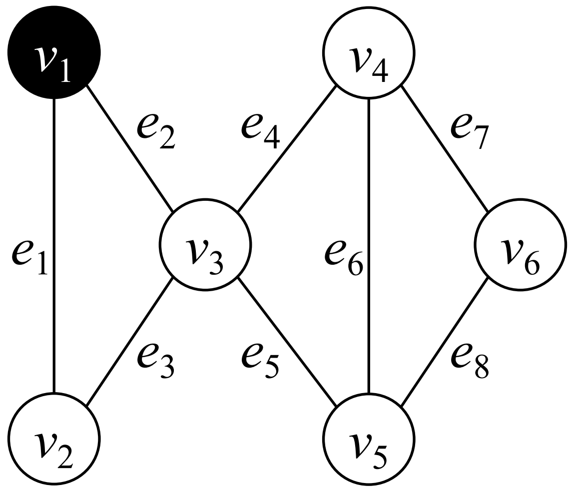
while $V \neq \emptyset$ **do**

 $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

 $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

 $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 (I);



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点
  - 然后，将v及其所有邻点形成的集合N(v) 从G中删除

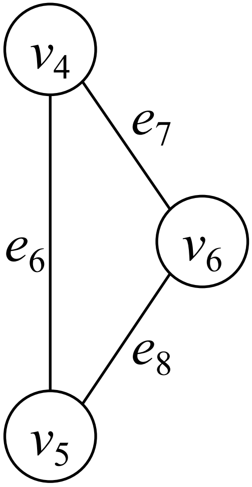
$I = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_1\}$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E\rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

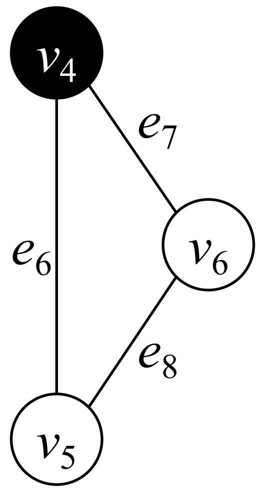
```
while V ≠ ∅ do
    v ← arg min_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点

$I = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_1, v_4\}$



算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 (I);

顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入I，直至无法将任何顶点加入I
  - v是V中度最小的顶点
  - 然后，将v及其所有邻点形成的集合$N(v)$ 从G中删除

$$I = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_1, v_4\}$$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← argmin_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 最后，输出I

$$I = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_1, v_4\}$$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathtt{d}(u)$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v))$;

输出 (I);

顶点的独立、覆盖和支配

- 最后，输出I
  - I为什么是点独立集？

$$I = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_1, v_4\}$$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\min_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 (I);

顶点的独立、覆盖和支配

- 最大点独立集包含的顶点的数量不超过较大点独立集包含的顶点的数量的$\Delta(G)+1$倍。

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← arg min_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 最大点独立集包含的顶点的数量不超过
  较大点独立集包含的顶点的数量的$\Delta(G)+1$倍。
  - 每轮循环最多删除多少个顶点？

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G=\langle V,E\rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\min_{u\in V} \mathrm{d}(u)$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v))$;

输出 (I);

顶点的独立、覆盖和支配

- 最大点独立集包含的顶点的数量不超过
  较大点独立集包含的顶点的数量的$\Delta(G) + 1$倍。
  - 每轮循环最多删除多少个顶点？
    - $\Delta(G) + 1$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← arg min_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 最大点独立集包含的顶点的数量不超过
  较大点独立集包含的顶点的数量的$\Delta(G)+1$倍。
  - 每轮循环最多删除多少个顶点？
    - $\Delta(G)+1$
  - 总共删除多少个顶点？

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G=\langle V,E\rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← argmin_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 最大点独立集包含的顶点的数量不超过
  较大点独立集包含的顶点的数量的$\Delta(G)+1$倍。
  - 每轮循环最多删除多少个顶点？
    - $\Delta(G)+1$
  - 总共删除多少个顶点？
    - $|I|\,(\Delta(G)+1)\geq \nu$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G=\langle V,E\rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← argmin_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 最大点独立集包含的顶点的数量不超过较大点独立集包含的顶点的数量的$\Delta(G)+1$倍。
  - 每轮循环最多删除多少个顶点？
    - $\Delta(G)+1$
  - 总共删除多少个顶点？
    - $|I|\,(\Delta(G)+1) \geq \nu$
  - $\nu \,/\, |I| \leq \Delta(G)+1$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E\rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← arg min_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 最大点独立集包含的顶点的数量不超过较大点独立集包含的顶点的数量的$\Delta(G) + 1$倍。
- 最大点独立集包含的顶点的数量不超过较大点独立集包含的顶点的数量的$(\Delta(G) + 2) / 3$倍。

顶点的独立、覆盖和支配

- 对于阶为n的图和任意常数$\varepsilon > 0$,
  最大团的计算具有$n^{1-\varepsilon}$-不可近似性（除非P=NP），
  最大点独立集的计算也具有同样的不可近似性。

顶点的独立、覆盖和支配

- 时间复杂度：$O(n^2+m)$
  - while循环的轮数：$O(n)$
    - 每轮循环找v：$O(n)$
  - 所有循环删除顶点：$O(n+m)$

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G=\langle V,E\rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← arg min_{u∈V} d(u);
    I ← I ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (I);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 简化版本
  ① 每轮循环不重新计算顶点的度，直接采用原图中顶点的度
  ② 甚至，不考虑度，从V中任意选择一个顶点作为v

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \underline{\arg\min_{u \in V} \mathtt{d}(u)}$;

  $I \leftarrow I \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v))$;

输出 (I);

顶点的独立、覆盖和支配

- 简化版本
  ① 每轮循环不重新计算顶点的度，直接采用原图中顶点的度
  ② 甚至，不考虑度，从V中任意选择一个顶点作为v
- 为什么近似比仍不超过$\Delta(G)+1$？

算法 15: 计算最大点独立集的近似算法

输入: 图 $G=\langle V,E\rangle$
初值: I 初值为 $\emptyset$
while $V\neq\emptyset$ **do**
  $v\leftarrow\arg\min_{u\in V}\mathrm{d}(u)$;
  $I\leftarrow I\cup\{v\}$;
  $G\leftarrow G-(\{v\}\cup\mathtt{N}(v))$;
输出 (I);

顶点的独立、覆盖和支配

- 如何找出图中的最大点独立集？
- 如何找出图中的最小点覆盖集？
- 如何找出图中的最小点支配集？

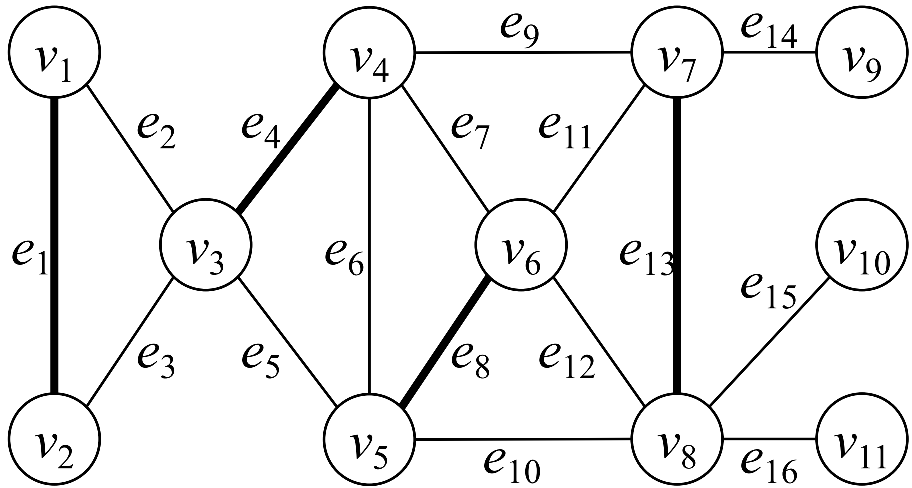
顶点的独立、覆盖和支配

- 最小点覆盖集的计算是一个NP难的优化问题，不存在多项式时间算法（除非P=NP）。

顶点的独立、覆盖和支配

- 找出G的一个极大边独立集I'

$I' = \{e_1, e_4, e_8, e_{13}\}$



算法 16: 计算最小点覆盖集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: C 初值为 $\emptyset$

$I' \leftarrow G$ 的极大边独立集;

foreach $(u, v) \in I'$ **do**

  $C \leftarrow \{u, v\}$;

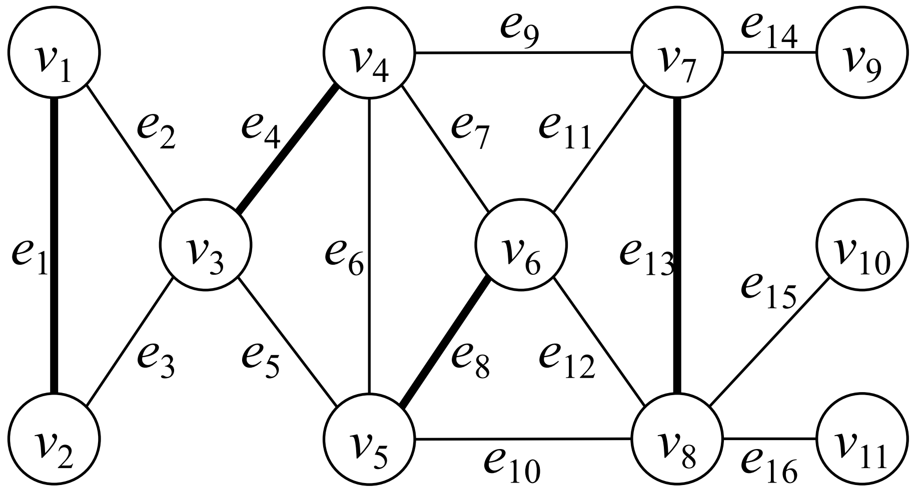
输出 (C);

顶点的独立、覆盖和支配

- 从初值为空集的点覆盖集C开始

$I' = \{e_1, e_4, e_8, e_{13}\}$

$C = \{\}$



算法 16: 计算最小点覆盖集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E\rangle$

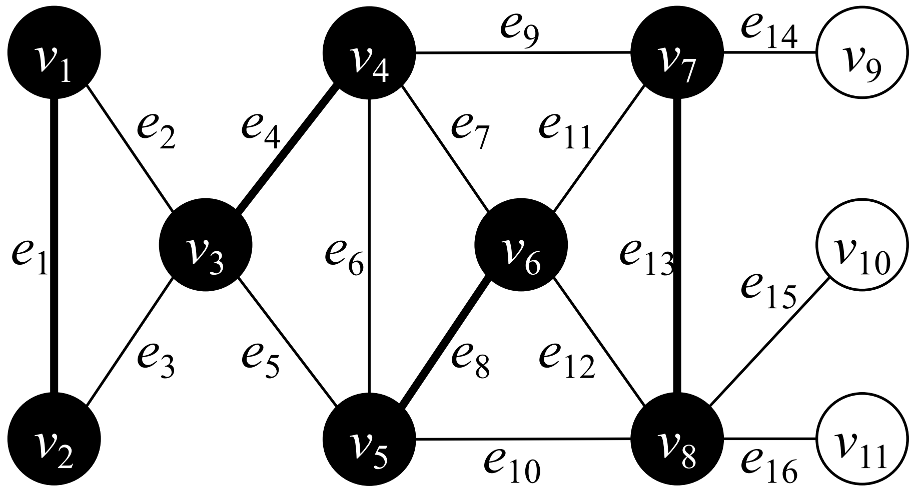
初值: C 初值为 $\emptyset$

```
I' ← G 的极大边独立集;
foreach (u, v) ∈ I' do
    C ← {u, v};
输出 (C);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 对于I'中的每条边(u, v)，向C中增加这条边的两个端点u和v

$I' = \{e_1, e_4, e_8, e_{13}\}$
$C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$



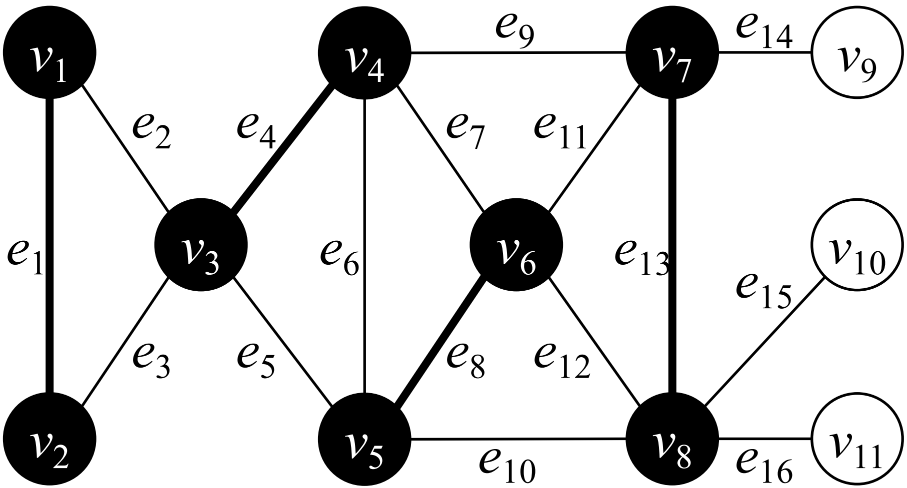
算法 16: 计算最小点覆盖集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$
初值: C 初值为 $\emptyset$
$I' \leftarrow G$ 的极大边独立集;
foreach $(u, v) \in I'$ **do**
    $C \leftarrow \{u, v\}$;
输出 (C);

顶点的独立、覆盖和支配

- 输出C

$C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$



算法 16: 计算最小点覆盖集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

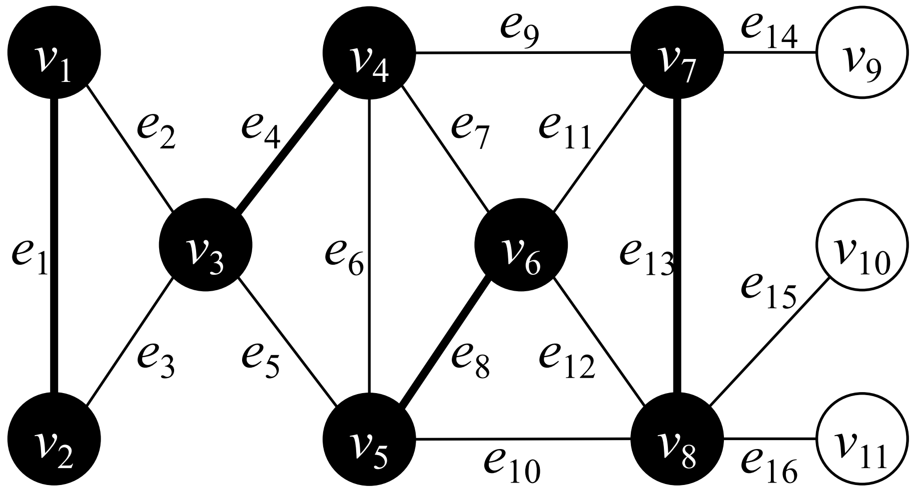
初值: C 初值为 $\emptyset$

```
I' ← G 的极大边独立集;
foreach (u, v) ∈ I' do
    C ← {u, v};
输出 (C);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 输出C
  - C为什么是点覆盖集？

$C = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$



算法 16: 计算最小点覆盖集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E\rangle$

初值: C 初值为 $\emptyset$

$I' \leftarrow G$ 的极大边独立集;

foreach $(u, v) \in I'$ **do**

  $C \leftarrow \{u, v\}$;

输出 (C);

顶点的独立、覆盖和支配

- 较小点覆盖集包含的顶点的数量不超过最小点覆盖集包含的顶点的数量的2倍。
  - 你能自己证明吗？

算法 16: 计算最小点覆盖集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

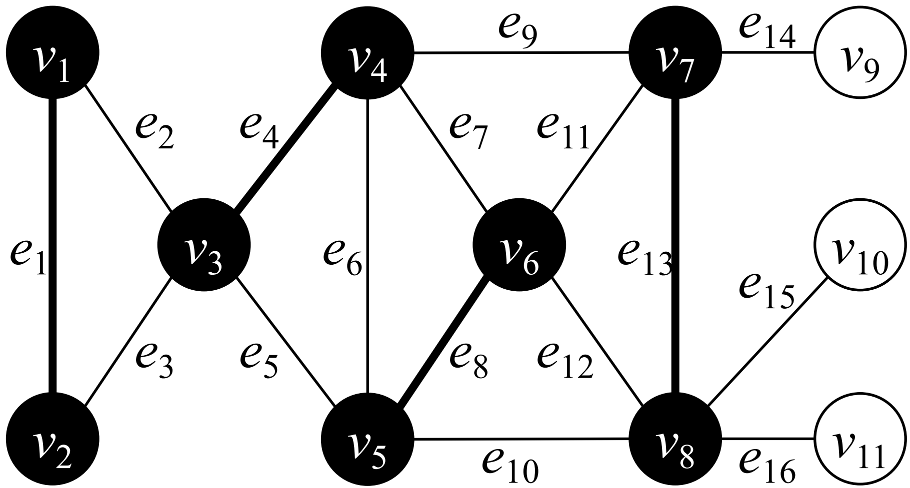
初值: C 初值为 $\emptyset$

$I' \leftarrow G$ 的极大边独立集;

foreach $(u, v) \in I'$ **do**

  $C \leftarrow \{u, v\}$;

输出（C）;



顶点的独立、覆盖和支配

- 计算最小点覆盖集的不可近似性
  - 最小点覆盖集的计算具有1.36-不可近似性（除非P=NP）。
  - 在某种特定猜想成立的前提下，对于任意常数$\varepsilon > 0$，最小点覆盖集的计算具有$(2-\varepsilon)$-不可近似性。

顶点的独立、覆盖和支配

- 计算最小点覆盖集的不可近似性
  - 最小点覆盖集的计算具有1.36-不可近似性（除非P=NP）。
  - 在某种特定猜想成立的前提下，对于任意常数$\varepsilon > 0$，
    最小点覆盖集的计算具有$(2-\varepsilon)$-不可近似性。
  - 较小点覆盖集包含的顶点的数量不超过
    最小点覆盖集包含的顶点的数量的2倍。
    - 这意味着什么？

顶点的独立、覆盖和支配

- 计算最小点覆盖集的不可近似性
  - 最小点覆盖集的计算具有1.36-不可近似性（除非P=NP）。
  - 在某种特定猜想成立的前提下，对于任意常数$\varepsilon > 0$，最小点覆盖集的计算具有$(2-\varepsilon)$-不可近似性。
  - 较小点覆盖集包含的顶点的数量不超过最小点覆盖集包含的顶点的数量的2倍。
    - 以较小点覆盖集作为最小点覆盖集的近似，在理论上似乎已经足够精确了。

顶点的独立、覆盖和支配

- 时间复杂度：$O(n+m)$

算法 14: 计算极大边独立集的算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: I' 初值为 $\emptyset$；V 中所有顶点的 saturated 初值为 false

```
foreach (u, v) ∈ E do
    if u.saturated = false 且 v.saturated = false then
        I′ ← I′ ∪ {(u, v)};
        u.saturated ← true;
        v.saturated ← true;
输出 (I′);
```

算法 16: 计算最小点覆盖集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: C 初值为 $\emptyset$

```
I′ ← G 的极大边独立集;
foreach (u, v) ∈ I′ do
    C ← {u, v};
输出 (C);
```

顶点的独立、覆盖和支配

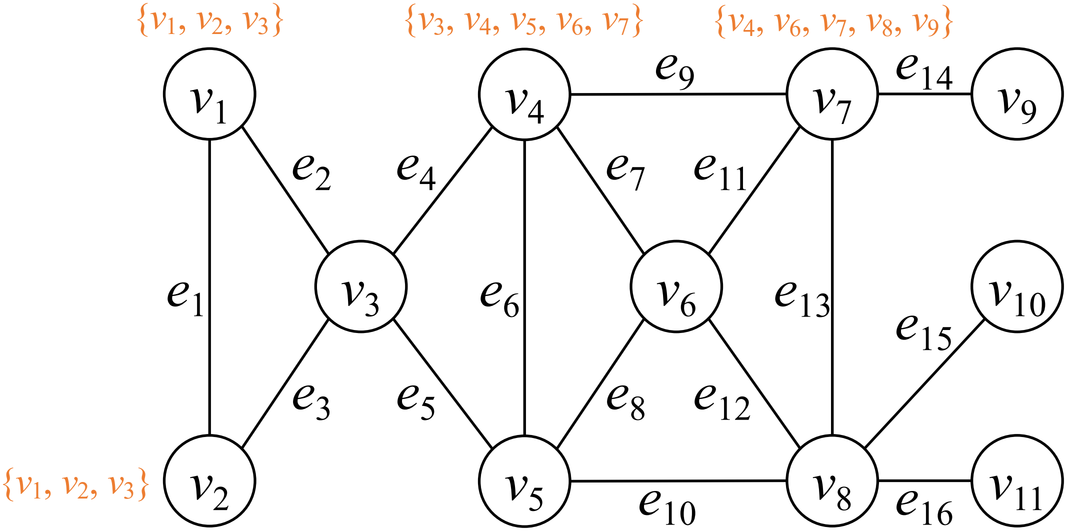
- 如何找出图中的最大点独立集？
- 如何找出图中的最小点覆盖集？
- 如何找出图中的最小点支配集？

顶点的独立、覆盖和支配

- 最小点支配集的计算是一个NP难的优化问题，不存在多项式时间算法（除非P=NP）。

顶点的独立、覆盖和支配

- 该问题可归约为**集合覆盖问题**，
  继而通过集合覆盖问题的近似算法来解决。
  - 从给定的一组子集中找出数量最少的子集，其并集为全集



顶点的独立、覆盖和支配

- Vašek Chvátal，1946-，出生于捷克，2015年获得约翰·冯·诺依曼理论奖

https://en.wikipedia.org/wiki/V%C3%A1clav_Chv%C3%A1tal

顶点的独立、覆盖和支配

- 从初值为空集的点支配集D开始

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

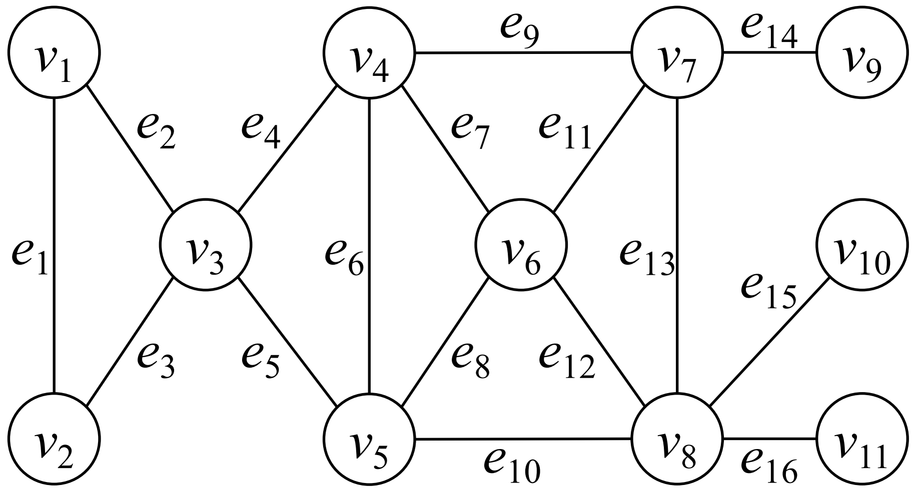
  $v \leftarrow \arg\max_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $D \leftarrow D \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 (D);

$D = \{\}$



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入D，直至无需将任何顶点加入D
  - v是V中度最大的顶点
    为什么选择这样的v？

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

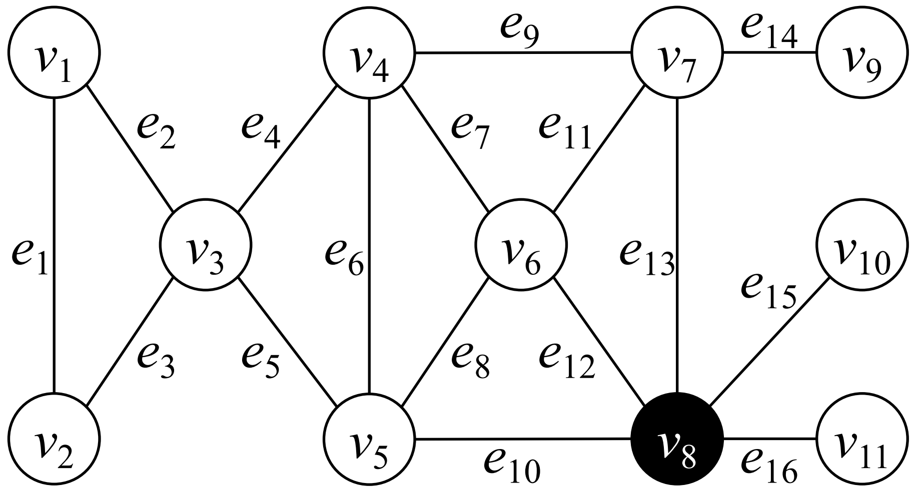
  $v \leftarrow \arg\max_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $D \leftarrow D \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 (D);

$D = \{v_8\}$



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入D，直至无需将任何顶点加入D
  - v是V中度最大的顶点
  - 然后，将v及其所有邻点形成的集合N(v)从G中删除
    为什么删除？删除后，V中的顶点有什么特征？

$D = \{v_8\}$

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

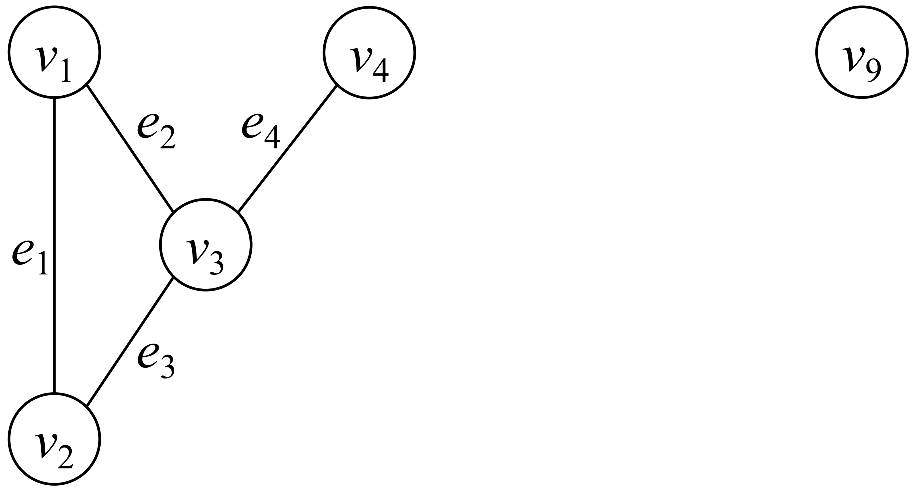
while $V \neq \emptyset$ **do**

$\quad v \leftarrow \arg\max_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

$\quad D \leftarrow D \cup \{v\}$;

$\quad G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

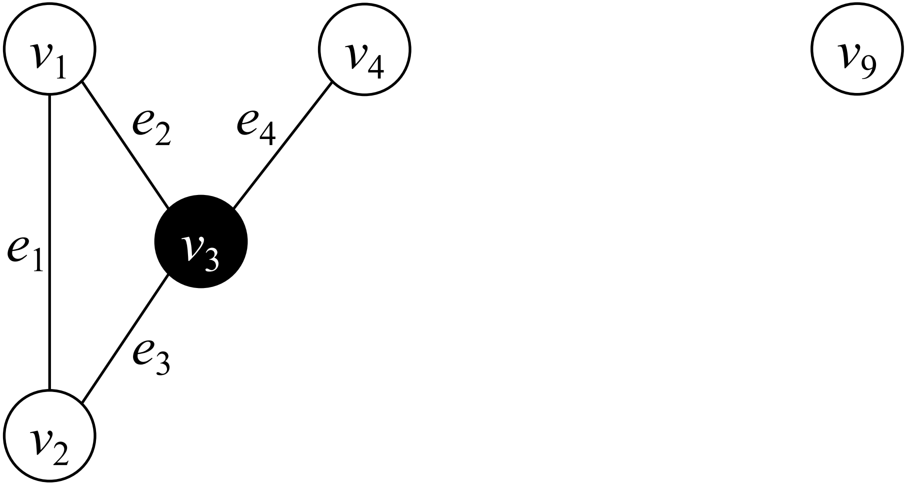
输出 (D);



顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入D，直至无需将任何顶点加入D
  - v是V中度最大的顶点

$D = \{v_8, v_3\}$



算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\max_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $D \leftarrow D \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathrm{N}(v))$;

输出 (D);

顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入D，直至无需将任何顶点加入D
  - v是V中度最大的顶点
  - 然后，将v及其所有邻点形成的集合N(v)从G中删除

$D = \{v_8, v_3\}$

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\max_{u \in V} \mathtt{d}(u)$;

  $D \leftarrow D \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v))$;

输出 (D);

顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入D，直至无需将任何顶点加入D
  - v是V中度最大的顶点

$$D = \{v_8, v_3, v_9\}$$

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← arg max_{u∈V} d(u);
    D ← D ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (D);
```

顶点的独立、覆盖和支配

- 每轮循环从V中选择一个顶点v加入D，直至无需将任何顶点加入D
  - v是V中度最大的顶点
  - 然后，将v及其所有邻点形成的集合N(v)从G中删除

$$D = \{v_8, v_3, v_9\}$$

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\max_{u \in V} \mathrm{d}(u)$;

  $D \leftarrow D \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v))$;

输出 (D);

顶点的独立、覆盖和支配

- 最后，输出D

$$D = \{v_8, v_3, v_9\}$$

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E\rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\max_{u \in V} \mathtt{d}(u)$;

  $D \leftarrow D \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v))$;

输出 (D);

顶点的独立、覆盖和支配

- 最后，输出D
  - D为什么是点支配集？

$$D = \{v_8, v_3, v_9\}$$

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

while $V \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow \arg\max_{u \in V} \mathtt{d}(u)$;

  $D \leftarrow D \cup \{v\}$;

  $G \leftarrow G - (\{v\} \cup \mathtt{N}(v))$;

输出 (D);

顶点的独立、覆盖和支配

- 对于阶为n的图，较小点支配集包含的顶点的数量不超过最小点支配集包含的顶点的数量的$\ln n - \ln\ln n + \Theta(1)$倍。

顶点的独立、覆盖和支配

- 计算最小点支配集的不可近似性
  - 对于任意常数$\varepsilon > 0$,
    集合覆盖问题具有$(1-\varepsilon)\ln n$-不可近似性（除非P=NP）。

顶点的独立、覆盖和支配

- 计算最小点支配集的不可近似性
  - 对于任意常数$\varepsilon > 0$,
    集合覆盖问题具有$(1-\varepsilon)\ln n$-不可近似性（除非P=NP）。
  - 集合覆盖问题和最小点支配集的计算问题可以互相**L规约**,
    - 即存在常数$c > 0$，最小点支配集的计算问题具有$c\ln n$-不可近似性。

顶点的独立、覆盖和支配

- 计算最小点支配集的不可近似性
  - 对于任意常数$\varepsilon > 0$,
    集合覆盖问题具有$(1-\varepsilon)\ln n$-不可近似性（除非P=NP）。
  - 集合覆盖问题和最小点支配集的计算问题可以互相L规约,
    - 即存在常数$c > 0$，最小点支配集的计算问题具有$c\ln n$-不可近似性。
  - 对于阶为n的图，较小点支配集包含的顶点的数量不超过最小点支配集包含的顶点的数量的$\ln n - \ln\ln n + \Theta(1)$倍。
    - 这意味着什么？

顶点的独立、覆盖和支配

- 计算最小点支配集的不可近似性
  - 对于任意常数$\varepsilon > 0$，
    集合覆盖问题具有$(1-\varepsilon)\ln n$-不可近似性（除非P=NP）。
  - 集合覆盖问题和最小点支配集的计算问题可以互相L规约，
    - 即存在常数$c > 0$，最小点支配集的计算问题具有$c\ln n$-不可近似性。
  - 对于阶为n的图，较小点支配集包含的顶点的数量不超过
    最小点支配集包含的顶点的数量的$\ln n - \ln\ln n + \Theta(1)$倍。
    - 以较小点支配集作为最小点支配集的近似，在理论上已经足够精确了。

顶点的独立、覆盖和支配

- 时间复杂度：$O(n^2 + m)$
  - while循环的轮数：$O(n)$
    - 每轮循环找v：$O(n)$
  - 所有循环删除顶点：$O(n + m)$

算法 17: 计算最小点支配集的近似算法

输入: 图 $G = \langle V, E \rangle$

初值: D 初值为 $\emptyset$

```
while V ≠ ∅ do
    v ← arg max_{u∈V} d(u);
    D ← D ∪ {v};
    G ← G − ({v} ∪ N(v));
输出 (D);
```

书面作业

- 练习6.5
  （本周和上周的作业一起交）