# 离散数学第七次作业

## Problem 1

设 $a, b, c, d$ 均为正整数，下列命题是否为真？若为真，给出证明；否则，给出反例。

a) 若 $a \mid c$, $b \mid c$, 则 $ab \mid c$

b) 若 $a \mid c$, $b \mid d$, 则 $ab \mid cd$

c) 若 $ab \mid c$, 则 $a \mid c$

d) 若 $a \mid bc$, 则 $a \mid b$ 或 $a \mid c$

## Problem 2

证明：任何 3 个连续整数的乘积可以被 6 整除。

## Problem 3

计算：

a) 23300 mod 11  b) $2^{3300} \bmod 31$  c) $3^{516} \bmod 7$

## Problem 4

证明：如果 $a$ 和 $b$ 为正整数，则 $(2^a - 1) \bmod (2^b - 1) = 2^{a \bmod b} - 1$。

## Problem 5

证明；如果 $2^n - 1$ 是质数，则 $n$ 也为质数。

## Problem 6

证明：对于任意的整数 $n$，$\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{3}n^3+\frac{7}{15}n$ 是整数。

## Problem 7

证明:

a) 设 $d \geq 1$, $d \mid m$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{d}$

b) 设 $d \geq 1$, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow da \equiv db \pmod{dm}$

c) 设 $c$ 与 $m$ 互质, 则 $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow ca \equiv cb \pmod{m}$

## Problem 8

借助于费马小定理证明如果 $n$ 是一个正整数，则 42 能整除 $n^7 - n$。

## Problem 9

试证明: 若 $p \geq 7$ 为质数，则 $240 \mid (p^4-1)$。

## Problem 10

证明：若 $m$ 和 $n$ 互质，则 $m^{\phi(n)} + n^{\phi(m)} \equiv 1 (\text{mod } mn)$。