Práctica 2
Deducción Natural, Corrección y Completitud para PROP

1. Deducción Natural

Ejercicio 1

Probar que los siguientes secuentes son válidos:

1. $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \ \vdash q \wedge s$
2. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$
3. $p \to (p \to q), p \vdash q$
4. $q \to (p \to r), \neg r, q \vdash \neg p$
5. $\vdash (p \wedge q) \to p$
6. $\neg p \to q, \neg q \vdash p$
7. $p \to \neg q, q \vdash \neg p$
8. $(p \wedge q) \to r \vdash p \to (q \to r)$
9. $p \to (q \to r) \vdash (p \wedge q) \to r$
10. $p \to q \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge r)$
11. $q \to r \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$
12. $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$
13. $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
14. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$
15. $\neg p \vee q \vdash p \to q$
16. $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$
17. $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$ (sin usar MT)
18. $(p \wedge \neg q) \to r, \neg r, p \vdash q$
19. $p \vee q \vdash r \to (p \vee q) \wedge r$
20. $(p \vee (q \to p)) \wedge q \vdash p$
21. $p \to q, r \to s \vdash (p \wedge r) \to (q \wedge s)$
22. $p \to q \vdash ((p \wedge q) \to p) \wedge (p \to (p \wedge q)$
23. $p \to (q \wedge r) \vdash (p \to q) \wedge (p \to r)$
24. $(p \to q) \wedge (p \to r) \vdash p \to (q \wedge r)$
25. $p \vee (p \wedge q) \vdash p$
26. $p \to (q \vee r), q \to s, r \to s \vdash p \to s$
27. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

Ejercicio 2

Probar los siguientes secuentes

1. $\neg p \to \neg q \vdash q \to p$
2. $\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$
3. $\neg p, p \vee q \vdash q$
4. $p \vee q, \neg q \vee r \vdash p \vee r$

5. $p \wedge \neg p \vdash \neg(r \to q) \wedge (r \to q)$
6. $\neg(\neg p \vee q) \vdash p$
7. $\vdash \neg p \to (p \to (p \to q))$
8. $p \wedge q \vdash \neg(\neg p \vee \neg q)$
9. $\vdash (p \to q) \vee (q \to r)$

Ejercicio 3

Probar que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ es válido sii $\vdash \psi_1 \to (\ldots \to (\psi_n \to \phi) \ldots)$ es válido.

Ejercicio 4

Probar los siguientes teoremas

1. $((p \to q) \to q) \to (q \to p) \to p)$
2. $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

2. Corrección y completitud

Ejercicio 5

Completar la prueba de corrección ("soundness") vista en teórica.

Ejercicio 6

Probar que $\{p, q \to p\}$ es consistente. Ayuda: Usar el contrarecíproco del lema de corrección.

Ejercicio 7

Probar que si Γ es consistente maximal entonces $\Gamma \vdash A$ implica $A \in \Gamma$ (i.e. Γ es cerrada respecto a derivabilidad). Ayuda: Probar por el absurdo.

Ejercicio 8

Probar que Γ es consistente maximal sii Γ es consistente y para toda fórmula A, $A \in \Gamma$ o $\neg A \in \Gamma$.

Ejercicio 9

Un conjunto Γ se dice *completo* si para toda fórmula A, $\Gamma \vdash A$ o $\Gamma \vdash \neg A$. No confundir esta noción con el lema de completitud visto en clase. ¿El conjunto $\emptyset$ es completo?