Práctica 3
Lógica de Predicados

1. Sintaxis

Ejercicio 1

Dados los símbolos de predicados (aplicados a variables para facilitar su descripción):

A(x, y): x admira y
C(x, y): x cursa y
P (x): x es profesor
E(x): x es estudiante
I(x): x es instructor
M(x): x es materia

y la constante juan, escribir las siguientes oraciones como fórmulas.

j = juan→ Para todos los ejercicios defino esta constante.

1. Juan admira a todos los profesores.
$\forall y.[\ P(y) \rightarrow A(j,y)\ ]$

2. Algún profesor admira a Juan.
$\exists x.[\ P(x) \wedge A(x,j)\ ]$

3. Juan se admira a sí mismo.
$A(j,j)$

Ejercicio 2

Dados los símbolos de predicados (aplicados a variables para facilitar su descripción):

P (x, y): x es padre de y **H(x, y): x es hermano de y**
M (x, y): x es madre de y
E(x, y): x es esposo de y **I(x, y): x es hermana de y**

y las constantes j, p, a, l por Juan, Pedro, Ana, Lucia, escribir las siguientes frases:

j = Juan
p = Pedro
a = Ana
l = Lucía

1. Todos tienen una madre.
$\forall y.\exists x.(M(x,y))$

2. Todos tienen una madre y un padre.
$\forall y.\exists x.\exists z.(M(x,y) \wedge P(z,y))$

3. Quien tiene madre, tiene padre.
$\forall y.((\exists x.M(x,y)) \rightarrow (\exists z.P(z,y)))$

4. Juan es abuelo.
$\exists x.\exists y.(P(j,x) \wedge (M(x,y) \vee P(x,y)))$

Nota (antes de ejercicio 3):
Términos:
Individuos → Constantes y variables
Símbolos de función

Fórmulas:
J(x) → propiedad (predicado de aridad 1 o unario)
J(x, y) → relación (predicado de aridad 2 o binario)

Ejercicio 3

Dados F = {d, f, g}, donde d tene aridad 0, f aridad 2 y g aridad 3. h es función de aridad 2. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son términos sobre F?

Hacer la siguiente aclaración:
Considerar que x, y, z son variables y h es de aridad 2:

1. g(d, d)
1) d es término
2) De 1) g(d,d) no es término por ser de aridad 3

2. f (x, g(y, z), d)
1) x es término
2) y es término
3) z es término
4) d es término
5) De 1) y 3) g(x, z) no es término por ser de aridad 3

3. g(x, f (d, z), d)
1) x es término
2) d es término
3) z es término
4) De 2) y 3) f(d, z) es término
5) De 1) 4) y 2) g(x, f(d, z), d) es término

Ejercicio 4

Sean c una constante, f un símbolo de función de aridad 1 y S y B, dos símbolos de predicado binarios. ¿Cuáles de las siguientes cadenas son fórmulas?

Hacer la siguiente aclaración:
Considerar que x, y, z son variables:

1. S(c, x)
1) c es término
2) x es término
3) De 1) y 2) S(c,x) es fórmula

2. B(c, f (c))
1) c es término
2) De 1) f(c) es término
3) De 1) y 2) B(c,f(c)) es fórmula

10. ∀xB(x, f(x))
1) x es término
2) De 1) f(x) es término
3) De 1) y 2) B(x,f(x)) es fórmula
4) De 3) ∀xB(x, f(x)) es fórmula

11. ∃xB(y, x(c))
1) c es término
2) De 1) x(c) no es término (x es variable, no símbolo de función)
3) De 2) ∃xB(y, x(c)) no es fórmula

Ejercicio 5

Sea A = $\exists x(P(y, z) \land (\forall y(\neg Q(y, x) \lor P(y, z))))$

1. Identificar todas las variables libres y ligadas
2. Calcular A{w/x}, A{w/y}, A{f(x)/y} y A{g(y, z)/z}

$x \rightarrow$ ligada
$y \rightarrow$ ligada y libre
$z \rightarrow$ libre

A{w/x}
Queda igual porque todas las x están ligadas al cuantificador $\exists x$
$A = \exists x(P(y, z) \land (\forall y(\neg Q(y, x) \lor P(y, z))))$

A{w/y}
La primera y la puedo sustituir porque es variable libre, las otras no porque están ligadas.
$A = \exists x.(P(w, z) \land (\forall y.(\neg Q(y, x) \lor P(y, z))))$

2. Semántica

Ejercicio 7

Sea L el lenguaje de primer orden que incluye (junto con las variables, signos de puntuación, conectivos y cuantificadores) la constante de individuos a1, el símbolo de función f de aridad 2 y el símbolo de predicado P de aridad 2. Sea A la fórmula

$\forall$x1.$\forall$x2.(P(f(x1, x2), a1) $\rightarrow$ P(x1, x2))

Definamos una interpretación I para L como sigue. DI es Z, a1 es 0, f(x,y) es x−y, P(x,y) es x < y. Escribir la interpretación de A en Castellano. ¿El enunciado es verdadero o falso? Hallar una interpretación de A en la cual el enunciado tenga el valor de verdad opuesto.

Nota:
L => LPO (Lenguaje de primer orden)
$I = \langle D, R^D, F^D, C^D \rangle$
D => Dominio
R => Relación (también podría ser una propiedad)
F => Símbolos de función
C => Constantes

$I = \langle D_I, \{P^{DI}\}, \{f^{DI}\}, \{a_1^{DI}\} \rangle$
D_I = Z (enteros)
$a_1^{DI} = 0$
$f^{DI}(x,y) = x-y$
$P^{DI}(x,y) = \{ (x,y) \in Z^I : x<y \} = \{ \ldots, (0,1), (0,2), \ldots \}$ (expresados por comprensión)

Interpretación de A en castellano:
Para todo x1, para todo x2, si (x1-x2) $<$ 0 entonces x1 $<$ x2

¿El enunciado es verdadero o falso? (No pide hacerlo mediante la utilización del modelo)
Resuelvo utilizando aritmética:
si x1-x2 $<$ 0, entonces, x1-x2+x2 $<$ 0+x2 entonces x1 $<$ x2.

Ahora busco una interpretación de A para que el enunciado tenga el valor de verdad opuesto.
Defino: $a_1^{DI} = 1$ y dejo el resto igual

Interpretación de A en castellano:
Para todo x1, para todo x2, si (x1-x2) $<$ 1 entonces x1 $<$ x2

Pruebo la asignación:
x1 = 0
x2 = 0

$f(x1,x2) = x1-x2 = 0-0 = 0$
$P(f(x1, x2), a1) = P(0, 1) \Rightarrow 0<1 \Rightarrow T$
$P(x1, x2) = P(0,0) \Rightarrow 0<0 \Rightarrow F$
Luego reemplazando A me queda $T \rightarrow F$ lo cual es F en la interpretación

Ejercicio 8

¿Existe una interpretación (para un lenguaje de primer orden L apropiado) en la cual la fórmula

$\forall x1.(P(x1) \rightarrow P(f(x1)))$

se interprete como un enunciado falso? Si es así, detallar tal interpretación. En caso contrario, explicar por qué no existe tal interpretación.

$I = \langle D_I, \{P^{D_I}\}, \{f^{D_I}\} \rangle$
$D_I = N$ (naturales)
$f^{D_I}(x) = x+1$
$P^{D_I}(x) = \{ x \in N^I : x<5 \} = \{ 0, 1, 2, 3, 4 \}$

Probamos con:
$x1 = 4$
$f(x1) = x1 + 1 = 4 + 1 = 5$
$P(x1) = P(4) \Rightarrow 4<5 \Rightarrow T$
$P(f(x1)) = P(5) \Rightarrow 5<5 \Rightarrow F$
Luego reemplazando A me queda $T \rightarrow F$ lo cual es F en la interpretación

Si fuese por ejemplo $\forall x.P(x) \rightarrow P(x)$ la respuesta sería que no existe ninguna interpretación que haga el enunciado falso, porque el enunciado (la fórmula) es válida (tautología en proposicional).

Ejercicio 10

Sea N la interpretación aritmética donde DI = N y

c^0	**es el 0,**
P^2	**es =,**
f_1^1	**es la función sucesor,**
f_2^2	**es +,**
f_3^2	**es x,**

Hallar, si es posible, asignaciones que satisfagan y que no satisfagan las siguientes fórmulas.

N = <D_I, {P^{DI}}, {f_1^{DI}, f_2^{DI}, f_3^{DI}}, {c^{DI}}>
D_I = N (naturales)
$c^{DI} = 0$
$f_1^{DI}(x) = x+1$ (función sucesor)
$f_2^{DI}(x,y) = x+y$
$f_3^{DI}(x,y) = x * y$
$P^{DI}(x,y)$ = { (x,y) ∈ Z^I : x==y } = {(0,0), (1,1), … } (expresados por comprensión)

2. P(f2(x1,c), x2) → P(f2(x1, x2), x3)
Pruebo asignación:
x1 = 0
x2 = 0
x3 = 0
f2(x1,c) = x1 + c = 0 + 0 = 0
f2(x1,x2) = x1 + x2 = 0 + 0 = 0
P(f2(x1,c), x2) => P(0, 0) (0,0) ∈ P^{DI} es T en N
P(f2(x1, x2), x3) => P(0, 0) (0,0) ∈ P^{DI} es T en N
P(0, 0) → P(0, 0) => T → T
N ⊨ P(f2(x1,c), x2) → P(f2(x1, x2), x3) => La asignación satisface en N

Pruebo asignación:
x1 = 0
x2 = 0
x3 = 1
f2(x1,c) = x1 + c = 0 + 0 = 0
f2(x1,x2) = x1 + x2 = 0 + 0 = 0
P(f2(x1,c), x2) => P(0, 0) (0,0) ∈ P^{DI} es T en N
P(f2(x1, x2), x3) => P(0, 1) (0,1) /∈ P^{DI} es F en N
P(0, 0) → P(0, 1) => T → F
N /⊨ P(f2(x1,c), x2) → P(f2(x1, x2), x3) => La asignación no satisface en N

Ejercicio 12

¿Cuáles de las siguientes fórmulas son verdaderas en la interpretación N , y cuáles con falsas?

N = <D_I, {P^{DI}}, {f_1^{DI}, f_2^{DI}, f_3^{DI}}, {c^{DI}}>

D_I = N (naturales)

c^{DI} = 0

$f_1^{DI}(x) = x+1$ (función sucesor)

$f_2^{DI}(x,y) = x+y$

$f_3^{DI}(x,y) = x * y$

$P^{DI}(x,y)$ = { (x,y) ∈ Z^I : x==y } = {(0,0), (1,1), … } (expresados por comprensión)

3. ∀x1.∀x2.∃x3. P(f3(x1, x2), x3)

1) f3(x1, x2) = x1 * x2

Los cuantificadores universales, me están diciendo que todos los elementos del dominio tienen que hacerla verdadera. El cuantificador existencial, me está diciendo que un elemento del dominio tiene que hacerla verdadera.

Pruebo asignaciones:

x1	x2	x3	P(x1 * x2, x3)
0	0	0	P(0,0) => (0,0) ∈ P^{DI}
0	0	1	P(0,1) => (0,1) /∈ P^{DI}
.	.	.	.
0	1	0	P(0,0) => (0,0) ∈ P^{DI}
0	1	1	P(0,1) => (0,1) /∈ P^{DI}
.	.	.	.
1	0	0	P(0,0) => (0,0) ∈ P^{DI}
1	0	1	P(0,1) => (0,1) /∈ P^{DI}
.	.	.	.
1	1	0	P(1,0) => (0,0) /∈ P^{DI}
1	1	1	P(1,1) => (1,1) ∈ P^{DI}
.	.	.	.

Para todo x1,x2 ∈ N, siempre existe x3=x1 · x2

Entonces cumple para todo x1, para todo x2 y para algún x3. La fórmula es verdadera en la interpretación.

Ejercicio 13

Nota: Las fórmulas cerradas son sentencias, o sea que no tienen variables libres. Todas las variables están ligadas a los cuantificadores.

¿Cuáles de las siguientes fórmulas cerradas son verdaderas en la interpretación del ejercicio 7, y cuáles son falsas?

$I = \langle D_I, \{P^{DI}\}, \{f^{DI}\}, \{a_1^{DI}\}\rangle$
D_I = Z (enteros)
$a_1^{DI} = 0$
$f^{DI}(x,y) = x-y$
$P^{DI}(x,y) = \{ (x,y) \in Z^I : x<y \} = \{ \dots, (0,1), (0,2), \dots \}$ (expresados por comprensión)

1. ∀x1. P(f(a1, x1), a1)
1) f(a1, x1) = a1 - x1 = 0 - x1 = -x1
2) De 1) ∀x1. P(-x1, 0)

Pruebo asignaciones:

x1	P(-x1, 0)	
-1	P(1,0)	(1,0) /∈ P^{DI}
1	P(-1,0)	(-1,0) ∈ P^{DI}

Encontré una asignación que no satisface y por lo tanto no se cumple la regla de satisfacibilidad para el cuantificador universal. La fórmula es falsa en la interpretación.

4. ∀x1.∃x2.P(x1, f(f(x1,x2), x2))
1) f(x1,x2) = x1-x2
2) De 1) f(f(x1,x2), x2) = f(x1-x2, x2) = x1-x2-x2 = x1 - 2*x2
3) De 1) y 2) ∀x1.∃x2.P(x1, x1-2*x2)

x1		x2			
-n	P(-n, -n-2*x2)	-1	P(-n,-n+2)	(-n,-n+2) ∈ P^{DI}	T
.	.	.	.	.	.
-1	P(-1, -1-2*x2)	-1	P(-1,1)	(-1,1) ∈ P^{DI}	T
0	P(0, 0-2*x2)	-1	P(0,2)	(0,2) ∈ P^{DI}	T
1	P(1, 1-2*x2)	-1	P(1,3)	(1,3) ∈ P^{DI}	T
.	.	.	.	.	.
n	P(n, n-2*x2)	-1	P(n,n+2)	(n,n+2) ∈ P^{DI}	T

La fórmula es verdadera en la interpretación, porque para todo x1 existe al menos un x2 que satisface. Con x2 < 0.

Ejercicio 14

Demostrar que, en una interpretación dada, la fórmula ($A \to B$) es falsa si y sólo si A es verdadera y B es falsa. Recordar que una fórmula es falsa en una interpretación si ninguna asignación en ella la satisface.

Sea en la interpretación I de una estructura M, para toda asignación s que es arbitraria:

1) $s \not\models (A \to B)$ Premisa
2) De 1) $s \not\models (\neg A \vee B)$
3) De 2) No ($s \models (\neg A \vee B)$)
4) De 3) No ($s \models \neg A$ o $s \models B$)
5) De 4) $s \not\models \neg A$ y $s \not\models B$
6) De 5) $s \models A$ y $s \not\models B$

1) $s \models_I A$ y $s \not\models_I B$ Premisa
2) De 1) $s \not\models (A \to B)$

Ejercicio 15
Nota: Una fórmula ϕ es válida sii es válida en toda estructura M.
Demostrar que cada una de las siguientes fórmulas son lógicamente válidas.

1. $\exists x1.\forall x2.\ P(x1 , x2) \rightarrow \forall x2.\exists x1.\ P(x1 , x2)$
Que exista un mismo x1 para todo x2 implica que exista para todo x2 un x1.

Sea para toda asignación s arbitraria en una estructura M arbitraria:
1) $s \vDash \exists x1.\forall x2.\ P(x1 , x2) \rightarrow \forall x2.\exists x1.\ P(x1, x2)$
2) De 1) $s \nvDash \exists x1.\forall x2.\ P(x1 , x2)$ o $s \vDash \forall x2.\exists x1.\ P(x1, x2)$

Existe un $a \in M$ tal que para todo $b \in M$, $P(a,b)$
Para todo $b \in M$, existe un $c \in M$ tal que $P(c,b)$

3) De 2) No($s[x1 \leftarrow a][x2 \leftarrow b] \vDash P(a, b)$) o $s[x1 \leftarrow c][x2 \leftarrow b] \vDash P(c, b)$

Si un $a \in M$ existe para todo $b \in M$ y para todo $b \in M$ existe algún $c \in M$, entonces existe $a=c$ que hace verdadera a la fórmula para toda estructura M. Por lo tanto, es lógicamente válida.

Ejercicio 16

Demuestra que ninguna de las siguientes fórmulas es lógicamente válida.

1. $\forall x1.\exists x2.\ P(x1, x2) \rightarrow \exists x2.\forall x1.\ P(x1, x2)$
Que para todo x1 exista un x2 no implica que exista un mismo x2 para todo x1

Sea para toda asignación s arbitraria en una estructura M arbitraria:

1) $s \vDash \forall x1.\exists x2.\ P(x1, x2) \rightarrow \exists x2.\forall x1.\ P(x1, x2)$
2) De 1) $s \not\vDash \forall x1.\exists x2.\ P(x1, x2)$ o $s \vDash \exists x2.\forall x1.\ P(x1, x2)$

Para todo $a \in M$, existe un $b \in M$ tal que $P(a,b)$
Existe un $c \in M$ tal que para todo $a \in M$, $P(a,c)$

3) De 2) No($s[x1\leftarrow a][x2\leftarrow b] \vDash P(a, b)$)   o $s[x1\leftarrow a][x2\leftarrow c] \vDash P(a, c)$

Que para todo $a \in M$ exista algún $b \in M$ y que un $c \in M$ exista para todo $a \in M$, no implica que b=c. Por lo tanto, no es lógicamente válida.

3. Deducción Natural

Ejercicio 17

Dar derivaciones en DN de las siguientes fórmulas.

1. ∀x.P(x) → P(a)

⊢∀x.P(x) → P(a)

1)	∀x.P(x)	Premisa
2)	P(a)	∀e, 1{a/x}
3) ∀x.P(x) → P(a)		→i 1-2

2. P(a) → ∃x.P(x)

⊢P(a) → ∃x.P(x)

1)	P(a)	Premisa
2)	∃x.P(x)	∃i 1
3) P(a) → ∃x.P(x)		→i 1-2

3. ∀x.∀y. (R(x,y) → ¬R(y,x)) → ∀x. ¬R(x,x)

⊢∀x.∀y. (R(x,y) → ¬R(y,x)) → ∀x. ¬R(x,x)

1)	∀x.∀y. (R(x,y) → ¬R(y,x))		Premisa
2)		R(z,z)	Premisa temporal. z es variable aleatoria
3)		R(z,z) → ¬R(z,z)	∀e 1{z/x,z/y}
4)		¬R(z,z)	→e 2-3
5)		⊥	⊥i 2,4
6)	¬R(z,z)		¬i 2-5
7)	∀x.¬R(x,x)		∀i 6{x/z}
8) ∀x.∀y. (R(x,y) → ¬R(y,x)) → ∀x. ¬R(x,x)			→i 1-7

6. ∀x.(P(x) → Q(x)) ∧ ∃x.P(x) → ∃x.Q(x)

⊢∀x.(P(x) → Q(x)) ∧ ∃x.P(x) → ∃x.Q(x)

1)	∀x.(P(x) → Q(x)) ∧ ∃x.P(x)		Premisa
2)	∀x.(P(x) → Q(x))		∧e1 1
3)	∃x.P(x)		∧e2 1
4)		P(x0)	Premisa
5)		P(x0) → Q(x0)	∀e 2
6)		Q(x0)	→e 4-5
7)		∃x.Q(x)	∃i 6
8)	∃x.Q(x)		∃e 3, 4-7
9) ∀x.(P(x) → Q(x)) ∧ ∃x.P(x) → ∃x.Q(x)			→i 1-8

16. $\neg\exists x.\forall y.\ (\ (\ R(y, x) \rightarrow \neg R(x, y)\ )\ \wedge\ (\ \neg R(x, y) \rightarrow R(y, x)\ )\ )$

$\vdash \neg\exists x.\forall y.\ (\ (\ R(y, x) \rightarrow \neg R(x, y)\ )\ \wedge\ (\ \neg R(x, y) \rightarrow R(y, x)\ )\ )$

1)	$\exists x.\forall y.\ (\ (\ R(y, x) \rightarrow \neg R(x, y)\ )\ \wedge\ (\ \neg R(x, y) \rightarrow R(y, x)\ )\ )$	P
2)	$\forall y.\ (\ (\ R(y, x0) \rightarrow \neg R(x0, y)\ )\ \wedge\ (\ \neg R(x0, y) \rightarrow R(y, x0)\ )\ )$	P
3)	$(\ R(x0, x0) \rightarrow \neg R(x0, x0)\ )\ \wedge\ (\ \neg R(x0, x0) \rightarrow R(x0, x0)\ )$	$\forall$e2 {x0/y}
4)	$R(x0, x0) \rightarrow \neg R(x0, x0)$	$\wedge$e1 3
5)	$\neg R(x0, x0) \rightarrow R(x0, x0)$	$\wedge$e2 3
6)	$R(x0, x0) \vee \neg R(x0, x0)$	LEM
7)	$R(x0, x0)$	P
8)	$R(x0, x0) \rightarrow \neg R(x0, x0)$	Copia 4
9)	$\neg R(x0, x0)$	$\rightarrow$e 7,8
10)	$\perp$	$\perp$i 7,9
11)	$\neg R(x0, x0)$	P
12)	$\neg R(x0, x0) \rightarrow R(x0, x0)$	Copia 5
13)	$R(x0, x0)$	$\rightarrow$e 11,12
14)	$\perp$	$\perp$i 11,13
15)	$\perp$	$\vee$e 6, 7-10, 11-14
16)	$\perp$	$\exists$e 1, 2-15
17)	$\neg\exists x.\forall y.\ (\ (\ R(y, x) \rightarrow \neg R(x, y)\ )\ \wedge\ (\ \neg R(x, y) \rightarrow R(y, x)\ )\ )$	$\neg$i 1-16

Ejercicio 18

Nota: Los iguales deberían tener un punto arriba.

Dar derivaciones en DN de las siguientes fórmulas.

1. ∃x. t=x, para cualquier término t

Gentzen:

—-----RI 1

⊢ t = t

—----------- ∃i

⊢ ∃x. t = x

Fitch:

1) t = t1

2) ∃x. t = x ∃i

2. ∀z. (z=x → z=y) → x=y

1)	∀z. (z=x → z=y)	P	
2)	x=x → x=y	∀e1	{x/z}
3)	x=x	RI1	
4)	x=y	→e	3,2
5) ∀z. (z=x → z=y) → x=y		→i	1-4