Práctica 4
Corrección y Completitud para PRED

Ejercicio 1

Completar la prueba de corrección para el caso de $\exists i$ y $\exists e$.

Ejercicio 2

Sea $\mathcal{M} = (M, I)$ una estructura para $\mathcal{L}$. Sea A una fórmula y x una variable tal que $x \notin FV(A)$. Probar que para cualquier $a \in M$, $s[x \leftarrow a] \models_{\mathcal{M}} A$ sii $s \models_{\mathcal{M}} A$.

Ejercicio 3

Probar que si Γ tiene modelo, entonces es consistente. Ayuda: Usar el mismo esquema de prueba de este resultado en PROP (ver teórica) y adaptarlo para PRED.

Ejercicio 4

Sea A la fórmula $\exists x_1.\exists x_2.\exists x_3.\neg(x_1 \doteq x_2) \wedge \neg(x_1 \doteq x_3) \wedge \neg(x_2 \doteq x_3)$. Mostrar que $\models_{\mathcal{M}} A$ sii $\mathcal{M}$ tiene al menos 3 elementos en el universo.

Ejercicio 5

Sea $\mathcal{M}$ una estructura para una LPO $\mathcal{L}$ y s_1 y s_2 asignaciones en $\mathcal{M}$.

1. Sea t un término tal que para toda x en t, $s_1(x) = s_2(x)$. Probar que $\widehat{s_1}(t) = \widehat{s_2}(t)$.
2. Sea A una fórmula tal que para toda $x \in FV(A)$, $s_1(x) = s_2(x)$. Probar que $s_1 \models_{\mathcal{M}} A$ sii $s_2 \models_{\mathcal{M}} A$.
3. Deducir del ítem anterior que si A es una sentencia entonces o bien $\forall s.\ s \models_{\mathcal{M}} A$ o bien $\forall s. s \not\models_{\mathcal{M}} A$.

Ejercicio 6

Sean A y B sentencias.

1. Mostrar que $\models_{\mathcal{M}} A \to B$ sii ($\models_{\mathcal{M}} A$ implica $\models_{\mathcal{M}} B$).
2. ¿Vale si A y B no se asumen sentencias?

Ejercicio 7

Sea $\{T_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de teorías tal que $T_i \subseteq T_{i+1}$. Considerar $T = \bigcup\{T_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$.

1. Mostrar que T es una teoría.
2. Mostrar que T extiende a T_i para todo $i \in \mathbb{N}$.
3. Mostrar que T es consistente, si cada T_i es consistente.

Ejercicio 8

Probar que $T_{\neg,\rightarrow,\wedge}$ es una extensión conservativa de $T_{\neg,\rightarrow}$ (ambos se encuentran definidos en la teórica).

- Para todo $A \in Form(\neg, \rightarrow)$, $\vdash_{R_1} A$ sii $\vdash_{R_2} A$

Para ello definir una función $f : Form(\neg, \rightarrow, \wedge) \rightarrow Form(\neg, \rightarrow)$ tal que

1. $\vdash_{R_2} A$ implica $\vdash_{R_1} f(A)$
2. Si $A \in Form(\neg, \rightarrow)$, entonces $f(A) = A$.
3. Usar los dos ítems anteriores para deducir el resultado principal.

Ejercicio 9

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden que consiste exclusivamente de un único símbolo de predicado P de aridad 2. Mostrar que $\{\exists x.\exists y.P(x, y)\}$ es consistente. Ayuda: Usar el ejercicio 3.