

Lógica y Programación

Resolución SLD y Prolog

Método de resolución

- ▶ Dado un conjunto de cláusulas S
 1. Aplicar repetidamente la **regla de resolución** dando lugar a **pasos de resolución**
 2. Hasta producir una **refutación** (i.e. conjunto de cláusulas conteniendo una cláusula vacía o contradicción)
- ▶ En este caso decimos que " S tiene una refutación por resolución"
- ▶ Sustento del método
 - Cada paso de resolución preserva insatisfactibilidad
 - + las refutaciones son trivialmente insatisfactibles
 - = refutación por resolución general de S implica que S es insatisfactible

Regla de resolución

$$\frac{\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_m\} \quad \{\neg D_1, \dots, \neg D_l, C_1, \dots, C_n\}}{\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})}$$

donde σ es el MGU de $\{B_1, \dots, B_k, D_1, \dots, D_l\}$.

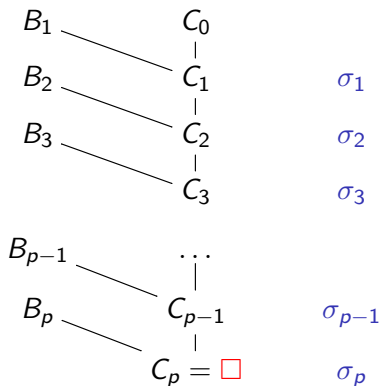
- ▶ Asumimos que las cláusulas $\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_m\}$ y $\{\neg D_1, \dots, \neg D_l, C_1, \dots, C_n\}$ no tienen variables en común; en caso contrario se renombran las variables
- ▶ Observar que $\sigma(B_1) = \dots = \sigma(B_k) = \sigma(D_1) = \dots = \sigma(D_l)$
- ▶ La cláusula $\sigma(\{A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_n\})$ se llama **resolvente** (de $\{B_1, \dots, B_k, A_1, \dots, A_m\}$ y $\{\neg D_1, \dots, \neg D_l, C_1, \dots, C_n\}$)

Resolución lineal

- ▶ Si bien el método de resolución general es completo, hallar refutaciones es un proceso muy caro en el caso general
- ▶ El espacio de búsqueda producido puede ser enorme
- ▶ Hay un alto grado de no-determinismo
 - ▶ ¿Qué cláusulas elegimos? Regla de búsqueda
 - ▶ ¿Qué literales eliminamos? Regla de selección
- ▶ Se precisan restricciones (regla de búsqueda y selección) para reducir el espacio de búsqueda (utilidad práctica)
- ▶ Es deseable que dichas restricciones no renuncien a la completitud del método

Resolución lineal

Una secuencia de pasos de resolución a partir de S es **lineal** si es de la forma:



donde C_0 y cada B_i es un elemento de S o algún C_j con $j < i$

Resolución lineal

- ▶ En general, **reduce** el espacio de búsqueda considerablemente
- ▶ Preserva **completitud**
- ▶ Sin embargo sigue siendo altamente **no-determinístico**
 - ▶ El criterio de búsqueda deja espacio para refinamientos
 - ▶ No se especificó ningún criterio de selección

Cláusulas de Horn

- ▶ Mayor eficiencia en el proceso de producir refutaciones **sin** perder completitud puede lograrse para **subclases** de fórmulas
- ▶ Una de estas clases es la de **Cláusulas de Horn**
- ▶ Una **cláusula de Horn** es una disyunción de literales que tiene **a lo sumo** un literal positivo
- ▶ Para conjuntos de cláusulas de Horn puede usarse una variante de resolución lineal, llamada **resolución SLD**, que goza de buenas propiedades

Forma clausal

Conjunción de sentencias prenexas de la forma $\forall x_1 \dots \forall x_m. C$ donde

1. C es una disyunción de literales y
2. los conjuntos $\{x_1, \dots, x_m\}$ de variables ligadas son disjuntos para todo par distinto de cláusulas.

Nota:

- ▶ Cada $\forall x_1 \dots \forall x_m. C$ se llama **cláusula**
- ▶ La forma clausal

$$(\forall x_{11} \dots \forall x_{1m_1}. C_1) \wedge \dots \wedge (\forall x_{k1} \dots \forall x_{km_k}. C_k)$$

se escribe $\{C'_1, \dots, C'_k\}$ donde C'_i resulta de reemplazar la disyunción de literales C_i por el conjunto de literales asociado

Cláusulas de Horn

Una cláusula $\forall x_1 \dots \forall x_m. C$ tal que la disyunción de literales C tiene **a lo sumo** un literal positivo

Nota: C puede tomar una de las formas:

- ▶ $\{B, \neg A_1, \dots, \neg A_n\}$
- ▶ $\{B\}$
- ▶ $\{\neg A_1, \dots, \neg A_n\}$ (llamada **cláusula “goal” o negativa**)

Relación con fórmulas de primer orden

- ▶ **No** toda fórmula de primer orden puede expresarse como una cláusula de Horn
- ▶ Ejemplos
 - ▶ $\forall x. P(x) \vee Q(x)$
 - ▶ $(\forall x. P(x) \vee \forall x. Q(x)) \rightarrow \forall x. P(x) \vee Q(x)$
- ▶ Sin embargo, el conjunto de cláusulas de Horn es suficientemente expresivo para representar programas, en la visión de resolución como computación
 - ▶ más detalles por venir

Resolución SLD

- ▶ **Cláusula de definición** (“Definite Clause”)
 - ▶ Cláusula de la forma $\forall x_1 \dots \forall x_m C$ tal que la disyunción de literales C tiene **exactamente** un literal positivo
- ▶ Sea $S = P \cup \{G\}$ un conjunto de cláusulas de Horn (con nombre de variables disjuntos) tal que
 - ▶ P conjunto de cláusulas de definición y
 - ▶ G una cláusula negativa
- ▶ $S = P \cup \{G\}$ son las **cláusulas de entrada**
 - ▶ P se conoce como el **programa o base de conocimientos** y
 - ▶ G el **goal o meta**

Resolución SLD

Un secuencia de pasos de **resolución SLD** para S es una secuencia de **cláusulas negativas**

$$\langle N_0, N_1, \dots, N_p \rangle$$

que satisfacen las siguientes dos condiciones:

1. N_0 es el goal G
2. para todo N_i con $0 < i < p$, se tiene que, si

$$N_i = \{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n\}$$

entonces hay alguna **cláusula de definición** C_i en P de la forma

$$C_i = \{A, \neg B_1, \dots, \neg B_m\}$$

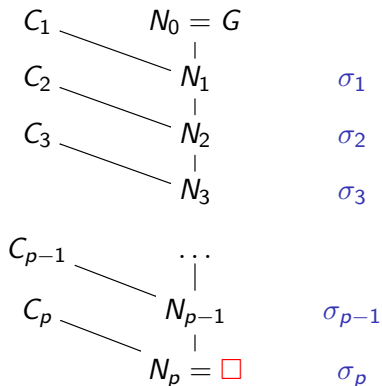
tal que A_k y A son unificables con MGU σ , y

$$N_{i+1} = \{\sigma(\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg B_1, \dots, \neg B_m, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n)\}$$

con $m \geq 0$.

Refutación SLD

Secuencia de pasos de resolución SLD $\langle N_0, \dots, N_p \rangle$ tal que $N_p = \square$



Sustitución respuesta

- ▶ En cada paso, las cláusulas $\{\neg A_1, \dots, \neg A_{k-1}, \neg A_k, \neg A_{k+1}, \dots, \neg A_n\}$ y $\{A, \neg B_1, \dots, \neg B_m\}$ son resueltas
 - ▶ No se especifica regla de búsqueda alguna
- ▶ Los átomos A_k y A son unificados con MGU σ_i
- ▶ El literal A_k se llama **átomo seleccionado** de N_i
 - ▶ No se especifica regla de selección alguna
- ▶ **Sustitución respuesta** es la sustitución

$$\sigma_p \circ \dots \circ \sigma_1$$

- ▶ se usa en Prolog para extraer la salida del programa

Ejemplo

Consideremos las siguientes cláusulas de definición

- ▶ $C_1 = \{add(U, 0, U)\}$
- ▶ $C_2 = \{add(X, succ(Y), succ(Z)), \neg add(X, Y, Z)\}$

y la cláusula goal G

$$\{\neg add(succ(0), V, succ(succ(0)))\}$$

- ▶ Deseamos mostrar que el conjunto de estas cláusulas (i.e. $\{C_1, C_2, G\}$) es **insatisfactible**
- ▶ Contamos con la siguiente refutación SLD

Ejemplo

- ▶ $C_1 = \{add(U, 0, U)\}$
- ▶ $C_2 = \{add(X, succ(Y), succ(Z)), \neg add(X, Y, Z)\}$

Cláusula goal

$\{\neg add(succ(0), V, succ(succ(0)))\}$

$\{\neg add(succ(0), Y, succ(0))\}$

Cláusula de entrada

C_2

C_1

Sust.

σ_1

σ_2



donde

$\sigma_1 = \{X \leftarrow succ(0), Z \leftarrow succ(0), V \leftarrow succ(Y)\}$

$\sigma_2 = \{U \leftarrow succ(0), Y \leftarrow 0\}$

▶ La sustitución resultado es:

$\{X \leftarrow succ(0), Z \leftarrow succ(0), V \leftarrow succ(0), U \leftarrow succ(0), Y \leftarrow 0\}$

Corrección y completitud

Corrección

Si un conjunto de cláusulas de Horn tiene una refutación SLD, entonces es insatisfactible

Completitud

Dado un conjunto de cláusulas de Horn $P \cup \{G\}$ tal como se describió, si $P \cup \{G\}$ es insatisfactible, existe una refutación SLD cuya primera cláusula es G .

Resolución SLD en Prolog

- ▶ Prolog utiliza resolución SLD con las siguientes restricciones
 - ▶ **Regla de búsqueda:** se seleccionan las cláusulas de programa de arriba hacia abajo, en el orden en que fueron introducidas
 - ▶ **Regla de selección:** seleccionar el átomo de más a la izquierda
- ▶ La suma de regla de búsqueda y regla de selección se llama **estrategia**
- ▶ Cada estrategia determina un árbol de búsqueda o **árbol SLD**

Ejemplo

Cláusulas de Def.

$\{p(X, Z), \neg q(X, Y), \neg p(Y, Z)\}$

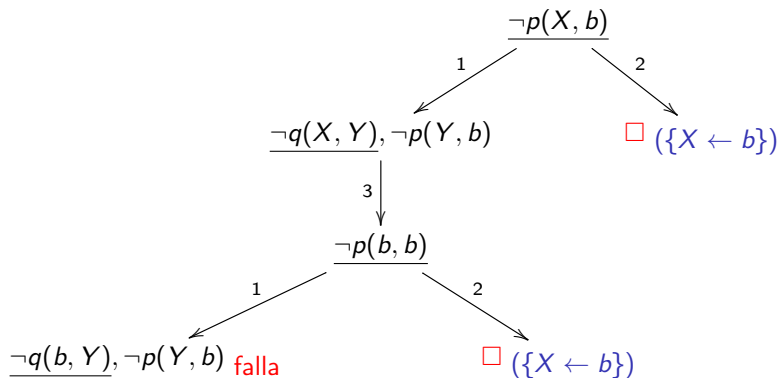
$\{p(X, X)\}$

$\{q(a, b)\}$

Goal

$\{\neg p(X, b)\}$

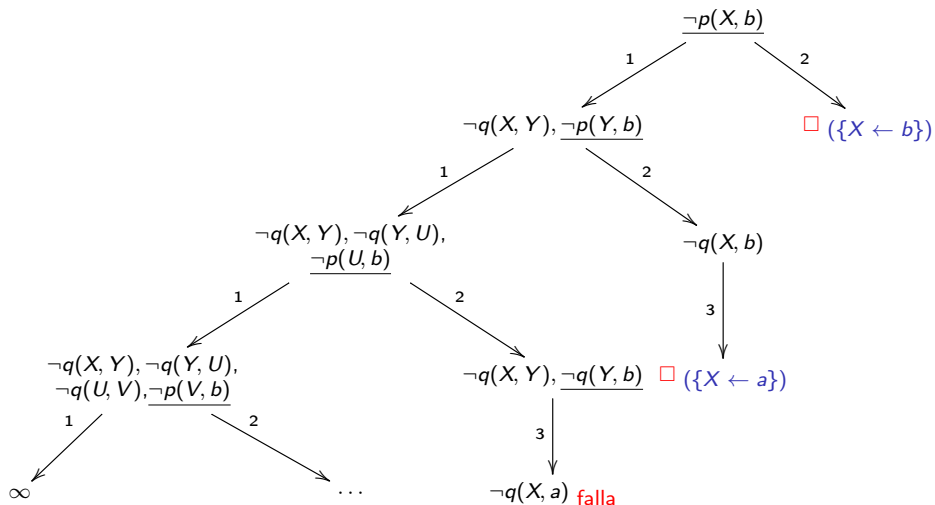
Ejemplo - árbol SLD



Variando la regla de selección

- ▶ Si variamos la **regla de selección**, varía el árbol SLD asociado
- ▶ Vamos a asumir ahora que la regla de selección es “**seleccionar el de más a la derecha**”

Ejemplo - átomo de más la derecha



Variando la regla de búsqueda

- ▶ Si variamos la **regla de búsqueda**, también varía el árbol SLD asociado
- ▶ Ejercicio: asumir ahora que la regla de búsqueda es “**seleccionar las cláusulas de programa de abajo hacia arriba**” y armar el árbol SLD del ejemplo

Motivación

- ▶ En esta parte de la clase exploramos de qué manera **resolución SLD** puede usarse para **computar**
- ▶ Asimismo, vamos a enfatizar el rol de la **sustitución respuesta** como “resultado de cálculo”

Motivación

- ▶ Recordar el ejemplo de la suma
 - ▶ $C_1 = \{add(U, 0, U)\}$
 - ▶ $C_2 = \{add(X, succ(Y), succ(Z)), \neg add(X, Y, Z)\}$
- ▶ Estas cláusulas pueden verse como una definición recursiva de la suma
- ▶ Supongamos que queremos saber si, dada esa definición,
$$\exists V.add(succ(0), V, succ(succ(0)))$$
- ▶ En otras palabras

“¿Existe V tal que $1 + V = 2$?”

Motivación

Lo podemos plantear como la validez de la fórmula

$$C_1 \wedge C_2 \rightarrow \exists V. add(succ(0), V, succ(succ(0)))$$

Es decir,

$$\underbrace{(\forall U. C_1 \wedge \forall X. \forall Y. \forall Z. C_2)}_{\text{Define la suma}} \rightarrow \underbrace{\exists V. add(succ(0), V, succ(succ(0)))}_{\text{Pide calcular } V} \text{ es válida}$$

Motivación

Esto es lo mismo que preguntarse por la **insatisfactibilidad** de

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \neg \exists V. add(succ(0), V, succ(succ(0)))$$

O lo que es lo mismo

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \forall V. \neg add(succ(0), V, succ(succ(0)))$$

¡Resolución SLD testea por insatisfactibilidad!

Motivación

Resolución SLD se dispara a partir del conjunto de cláusulas

$$\left\{ \left\{ \text{add}(U, 0, U), \{ \text{add}(X, \text{succ}(Y), \text{succ}(Z)), \neg \text{add}(X, Y, Z) \} \right. \right. \\ \left. \left. \{ \neg \text{add}(\text{succ}(0), V, \text{succ}(\text{succ}(0))) \} \right\} \right\}$$

- ▶ En caso de tener éxito, va a hallar el V buscado
- ▶ **Importante observar que**
 - ▶ No solamente interesa saber que **existe** tal V (i.e. que existe la refutación)
 - ▶ Además, queremos una **instancia del mismo**
- ▶ La **sustitución respuesta** σ proveerá dichas instancias; las mismas pueden interpretarse como el **resultado del cómputo**

Programas lógicos - Notación Prolog

Recordar que la resolución SLD parte de un conjunto de cláusulas $S = P \cup \{G\}$ donde

1. P es un conjunto de cláusulas de **definición**

► Cláusulas con exactamente un literal positivo

$$\begin{array}{c} \{B, \neg A_1, \dots, \neg A_n\} \\ \{B\} \end{array}$$

2. G es un **goal**

► Cláusula negativa

$$\{\neg A_1, \dots, \neg A_n\}$$

Notación Prolog para programas lógicos

$$\begin{aligned} B \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n &\iff \neg(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \vee B \\ &\iff (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B \end{aligned}$$

Como consecuencia, las cláusulas en P se escriben

- ▶ $B : \neg A_1, \dots, A_n$ para $\{B, \neg A_1, \dots, \neg A_n\}$ (reglas)
- ▶ $B.$ para B (hechos)

Ejemplo de la suma en notación Prolog

Volviendo al ejemplo de la suma, el programa Prolog es

```
add(U,0,U) .
```

```
add(X,succ(Y),succ(Z)):-add(X,Y,Z) .
```

Ingresamos el goal

```
?- add(succ(0),V,succ(succ(0))) .
```

La respuesta es:

```
V=succ(0)
```

Ejemplo I

```
padres(fred, sally).  
padres(tina, sally).  
padres(sally, john).  
padres(sally, diane).  
padres(sam, bill).  
hermanos(A, B) :- padres(P, A), padres(P, B), A \== B.
```

- ▶ Si el goal es `hermanos(john,X)` entonces la refutación SLD para $P \wedge \forall X. \neg \text{hermanos}(\text{john}, X)$ arrojará la sustitución respuesta $\sigma = \{X \leftarrow \text{diane}\}$
- ▶ Nota: Puede que la sustitución respuesta asigne valores a variables intermedias (no exhibidas en σ) que sugieron en el proceso de búsqueda de una refutación

Ejemplo II

Términos de primer orden para representar estructuras de datos

- ▶ `mas(A,B)` (suma)
- ▶ `menos(A,B)` (resta)
- ▶ `por(A,B)` (producto)

`eval(mas(A,B),CV):-eval(A,AV),eval(B,BV),CV is AV+BV.`

`eval(menos(A,B),CV):-eval(A,AV),eval(B,BV),CV is AV-BV.`

`eval(por(A,B),CV):-eval(A,AV),eval(B,BV),CV is AV*BV.`

`eval(Num,Num):-number(Num).`

- ▶ Dado el goal `eval(menos(mas(2,3),1),X)` la sustitución resultado será $\{X \leftarrow 4\}$

Corrección y completitud

Corrección

Si existe una refutación SLD de $P \cup \{G\}$ con la estrategia antes mencionada entonces es insatisfactible

Completitud

Si $P \cup \{G\}$ es insatisfactible, entonces una refutación SLD con la estrategia antes mencionada a partir del mismo

Búsqueda de refutaciones SLD en Prolog

- ▶ Recorre el árbol SLD en **profundidad** (“depth-first search”)
- ▶ La ventaja del recorrido en profundidad es que puede ser implementado de manera muy eficiente
 - ▶ Se usa una **pila** para representar los átomos del goal
 - ▶ Se hace un **push** del resolvente del átomo del tope de la pila con la cláusula de definición
 - ▶ Se hace un **pop** cuando el átomo del tope de la pila no unifica con ninguna cláusula de definición más (luego, el átomo que queda en el tope se unifica con la siguiente cláusula de definición)
- ▶ Desventaja: ¡puede que no encuentre una refutación SLD **aún** si existe!

Más sobre Prolog

Dos temas de Prolog que no hemos desarrollado

1. Cut
2. Deducción de información negativa

Cut

- ▶ Es una anotación que permite **podar** el árbol SLD
- ▶ Es de carácter **extra-lógico** (i.e. no se corresponde con un predicado estándar de la lógica)
- ▶ Se encuentra presente por cuestiones de eficiencia
- ▶ Debe usarse con cuidado dado que puede podarse una rama de éxito

Ejemplo

```
?-member(Y, [[1,2],[3,4]]),member(X,Y).  
% devuelve X=1,X=2,X=3,X=4 sucesivamente
```

```
?-member(Y, [[1,2],[3,4]]),member(X,Y),!.  
% devuelve X=1 solamente
```

```
?-member(Y, [[1,2],[3,4]]),!,member(X,Y).  
% devuelve X=1, X=2 sucesivamente
```

```
?-!,member(Y, [[1,2],[3,4]]),member(X,Y).  
% devuelve X=1,X=2,X=3,X=4 sucesivamente
```

Cut - En general

- ▶ Cuando se selecciona un cut, tiene éxito **inmediatamente**
- ▶ Si, debido a backtracking, se vuelve a este cut, su efecto es el de hacer **fallar el goal que le dio origen**
 - ▶ El goal que unificó con la cabeza de la cláusula que **contiene** al corte y que hizo que esa cláusula se “activara”
- ▶ El efecto obtenido es el de forzar **determinismo** (i.e. a lo sumo una solución) de
 1. el goal padre
 2. cualquier goal que ocurre a la izquierda del corte en la cláusula que contiene el corte
 3. todos los objetivos intermedios que se ejecutaron durante la ejecución de los goals precedentes

Negación por falla

Se dice que un árbol SLD **falla finitamente** si es finito y no tiene ramas de éxito

Predicado not:

```
not(G) :- call(G), !, fail.  
not(G).
```

Ejemplo

Puede deducirse `not(student(mary))` a partir de

```
student(joe).  
student(bill).  
student(jim).  
teacher(mary).
```


Negación por falla **no** es negación lógica

```
hombre(juan).  
hombre(pedro).  
mujer(X) :- not(hombre(X)).
```

- ▶ El query `mujer(juan)` da “no”, tal como se espera
- ▶ El query `mujer(julia)` da “sí”, tal como se espera
- ▶ ¿Resultado del query `mujer(X)`? (i.e. $\exists X.mujer(X)$?)
- ▶ Es importante que el predicado del not sea **cerrado**

Negación por falla **no** es negación lógica

```
hombre(juan).                not(G) :- G, !, fail.  
hombre(pedro).              not(G).  
mujer(X) :- not(hombre(X)).
```

- ▶ **Observar:** el goal `not(G)` **nunca** instancia variables de `G`
 - ▶ Si `G` tiene éxito, `fail` falla y descarta la sustitución
 - ▶ Caso contrario, `not(G)` tiene éxito inmediatamente (sin afectar `G`)
- ▶ En consecuencia, `not(not(hombre(X)))` **no** es equivalente a `hombre(X)`

Negación por falla **no** es negación lógica

```
candidato_a_bombero(X) :-  
    not( piromaniaco(X) ),  
    puntual(X).  
piromaniaco(juan).  
puntual(juana_de_arco).
```

- ▶ ¿Resultado del query candidato_a_bombero(Y)?
- ▶ ¿Por qué juana_de_arco **no** es solución?
- ▶ ¿Si se intercambian las dos cláusulas en la definición de candidato_a_bombero **sí** da a juana_de_arco como solución!

Negación por falla **no** es negación lógica

```
candidato_a_bombero(X) :-  
    not( piromaniaco(X) ),  
    puntual(X).  
piromaniaco(juan).  
puntual(juana_de_arco).
```

- ▶ ¿Resultado del query candidato_a_bombero(Y)?
- ▶ ¿Por qué juana_de_arco **no** es solución?
- ▶ ¡Si se intercambian las dos cláusulas en la definición de candidato_a_bombero **sí** da a juana_de_arco como solución!

Es importante que el predicado del not sea cerrado .
