Lógica y Programación

Primer Parcial 2023

Nombre y Apellido: ______________________________

27 de septiembre de 2023

Duración: 3 horas
La nota será el mínimo entre 10 y la suma de los puntos obtenidos.

1. (2 puntos) Dar una valuación v tal que $v \vDash (p \vee q) \rightarrow \neg r$.

> **Solución:**
>
> Tomemos, por ejemplo, $v(p) = T$, $v(q) = F$ y $v(r) = F$. Entonces, tenemos que $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ es verdadero porque $p \vee q$ es verdadero y $\neg r$ es verdadero.

2. (2 puntos) Pasar la fórmula $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ a forma normal conjuntiva (desarrollarlo paso a paso, no dar sólo el resultado final). Luego, expresarlo en notación conjuntista.

> **Solución:**
>
> $(p \vee q) \rightarrow \neg r \equiv \neg(p \vee q) \vee \neg r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r \equiv (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$
>
> La notación conjuntista sería: $\{\{\neg p, \neg r\}, \{\neg q, \neg r\}\}$.

3. (2 puntos) Usá Deducción Natural para demostrar que el siguiente secuente es válido. Usá el estilo Genzen.

$$\neg p \rightarrow (q \wedge r), \neg r \vdash p$$

> **Solución:**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p^1 \qquad \dfrac{}{\neg p \to (q \land r)}\,\text{Hyp}}{q \land r}\,\to_e}{r}\,\land_{e_2} \qquad \dfrac{}{\neg r}\,\text{Hyp}}{\bot}}{p}\,PBC, 1$$

4. (2 puntos) Describí brevemente los conceptos de corrección y completitud de la Deducción Natural. ¿Qué significan esos resultados?

> **Solución:**
>
> La corrección de la Deducción Natural se refiere a que si una fórmula se puede demostrar usando la Deducción Natural, entonces esa fórmula es verdadera.
>
> La completitud de la Deducción Natural se refiere a que si una fórmula es verdadera, entonces se puede demostrar usando la Deducción Natural.

5. (2 puntos) Considerá el lenguaje $\mathcal{L}$ con los siguientes elementos:

   - Conjunto de símbolos de función $\mathcal{F} = \{S, +, \times\}$.
   - Conjunto de constantes $\mathcal{C} = \{0, 1\}$.
   - Conjunto de símbolos de predicado $\mathcal{P} = \{\doteq, \leq\}$.

   Dar una estructura $\mathcal{M} = (M, I)$ para $\mathcal{L}$ y una asignación s tal que

$$s \vDash_{\mathcal{M}} \Big((S(1) \doteq 0) \land (1 \leq x) \Big)$$

> **Solución:**
>
> Tomamos $M = \mathbb{N}$, es decir, el conjunto de los números naturales y definimos la interpretación I de los símbolos de $\mathcal{L}$ como sigue:
>
> - $I(S) = S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la función sucesor.
> - $I(+) = + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la operación de suma.
> - $I(\times) = \times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la operación de multiplicación.
> - $I(1) = 0 \in \mathbb{N}$, el número natural 0. *¡Acá estaba el truco!*

- $I(0) = 1 \in \mathbb{N}$, el número natural 1. *¡Acá estaba el truco!*
- $I(\doteq) = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de pares ordenados (n, n) donde n es un número entero.
- $I(\leq) = \{(n, m) \mid n \leq m, n, m \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de pares ordenados (n, m) donde n y m son números enteros y n es menor o igual que m.

Luego, tomamos la asignación s definida por $s(x) = 1$ valida la fórmula, ya que

$$
\begin{array}{ll}
 & s \models_{\mathcal{M}} \Big((S(1) \doteq 0) \wedge (1 \leq x) \Big) \\
\text{sii} & s \models_{\mathcal{M}} S(1) \doteq 0 \quad \text{y} \quad s \models_{\mathcal{M}} 1 \leq x \\
\text{sii} & (\hat{s}(S(1)), \hat{s}(0)) \in I(\doteq) \quad \text{y} \quad (\hat{s}(1), \hat{s}(x)) \in I(\leq) \\
\text{sii} & (I(S)(\hat{s}(1)), I(0)) \in \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad (I(1), s(x)) \in \{(n, m) \mid n \leq m, n, m \in \mathbb{N}\} \\
\text{sii} & I(S)(\hat{s}(1)) = I(0) \quad \text{y} \quad I(1) \leq s(x) \\
\text{sii} & I(S)(I(1)) = I(0) \quad \text{y} \quad I(1) \leq s(x) \\
\text{sii} & I(S)(0) = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq 1 \\
\text{sii} & 0 + 1 = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq 1
\end{array}
$$

6. (2 puntos) Usá Deducción Natural para demostrar que el siguiente sequente es válido. Usá el estilo Fitch.

$\forall x.(P(x) \to Q(x)), \forall x.(Q(x) \to R(x)) \vdash \forall x.(P(x) \to R(x))$

Solución:

1	$\forall x.P(x) \to Q(x)$	Premisa
2	$\forall x.Q(x) \to R(x)$	Premisa
3	$P(x)$	Suposición temporal
4	$P(x) \to Q(x)$	$\forall_e$, 1
5	$Q(x)$	$\to_e$, 3, 4
6	$Q(x) \to R(x)$	$\forall_e$, 2
7	$R(x)$	$\to_e$, 5, 6
8	$P(x) \to R(x)$	$\to_i$, 3–7
9	$\forall x.(P(x) \to R(x))$	$\forall_i$, 8