Lógica y Programación

Lógica Proposicional: Corrección y Completitud

Corrección y completitud

¿Cuál es la relación entre la sintaxis y la semántica de PROP?

Sintaxis

- Conjunto de fórmulas ϕ tal que $\vdash \phi$ es un secuente válido

Semántica

- Conjunto de fórmulas ϕ tal que $v \vDash \phi$, para toda valuación v (i.e. tautologías).

Corrección

$\vdash \phi$ secuente válido implica que ϕ es tautología

Completitud

ϕ tautología implica que $\vdash \phi$ es secuente válido .

Corrección y completitud

¿Cuál es la relación entre la sintaxis y la semántica de PROP?

Sintaxis

- Conjunto de fórmulas ϕ tal que $\vdash \phi$ es un secuente válido

Semántica

- Conjunto de fórmulas ϕ tal que $v \vDash \phi$, para toda valuación v (i.e. tautologías).

Corrección

ϕ tiene una prueba implica que ϕ es tautología

Completitud

ϕ tautología implica que ϕ tiene una prueba.

Valuaciones

- Valuación: función $v : \mathcal{V} \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$ que asigna valores de verdad a las variables proposicionales
- Satisfactibilidad: v satisface A si $v \models A$ donde:

$$
\begin{array}{rcl}
v \models p & \textit{sii} & v(p) = \mathbf{T} \\
v \models \neg\phi & \textit{sii} & v \not\models \phi \ (i.e. \text{ no } v \models \phi) \\
v \models \phi \lor \psi & \textit{sii} & v \models \phi \text{ o } v \models \psi \\
v \models \phi \land \psi & \textit{sii} & v \models \phi \text{ y } v \models \psi \\
v \models \phi \to \psi & \textit{sii} & v \not\models \phi \text{ o } v \models \psi \\
v \models \phi \leftrightarrow \psi & \textit{sii} & (v \models \phi \text{ sii } v \models \psi)
\end{array}
$$

Tautologías y satisfactibilidad

Una proposición A es

- una tautología si $v \vDash A$ para toda valuación v
- satisfactible si existe una valuación v tal que $v \vDash A$
- insatisfactible si no es satisfactible

Consecuencia semántica (semantic entailment)

Consecuencia semántica

Para $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \psi$ fórmulas de la lógica proposicional,

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$$

cuando toda valuación v que satisface todas las premisas (esto es $v \vDash \phi_i$ para todo $i \in 1..n$) también satisface la conclusión ($v \vDash \psi$).

Ejemplos

- $p \wedge q \vDash p$
- $\neg q, p \vee q \vDash p$
- $p \vee q \nvDash q$
- $p \vDash q \vee \neg q$

Corrección y completitud (Generalizado)

- Conviene generalizar los enunciados de corrección y completitud
- Motivo: Facilita su demostración

Corrección

$\vdash \phi$ secuente válido implica que ϕ es tautología

Completitud

ϕ tautología implica que $\vdash \phi$ es secuente válido.

Corrección (generalizada)

$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ secuente válido implica que $\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$

Completitud (generalizada)

$\psi_1, \ldots, \psi_n \models \phi$ implica que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ es secuente válido.

Corrección

Completitud

Corrección

Teorema

Si $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ entonces $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$

Demostración:

- Por inducción en la estructura de la prueba
- Procedemos analizando por casos la última regla aplicada en la prueba
- Arrancamos con el caso base
- Caso base) La prueba consiste únicamente de la regla Hyp: $\psi = \phi_i$ para algún i. Como $v \vDash \phi_i$ por hipótesis, tenemos que $v \vDash \psi$.

sigue...

Corrección

continuación

- Caso $\wedge i$) $\psi = \eta_1 \wedge \eta_2$ con $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \eta_1$ (1) y $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \eta_2$ (2).
  - Por HI en (1) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \eta_1$.
  - Por HI en (2) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \eta_2$.

  Por def. de consecuencia semántica, para toda valuación v que satisface las premisas $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$,
  - $v \vDash \eta_1$
  - $v \vDash \eta_2$

  Luego $v \vDash \eta_1 \wedge \eta_2$ (es decir $v \vDash \psi$) por definición de satisface. Finalmente, $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$.

sigue...

Corrección

continuación

- Caso $\wedge e_1$) $\psi = \eta_1$ con $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \eta_1 \wedge \eta_2$. Aplicando HI,
$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \eta_1 \wedge \eta_2.$$
Por definición de consecuencia semántica, si v satisface todas las premisas, entonces
$$v \vDash \eta_1 \wedge \eta_2.$$
Luego, $v \vDash \eta_1$ (es decir $v \vDash \psi$). Finalmente $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$.
- Caso $\wedge e_2$) análogo anterior.

sigue...

Corrección

continuación

- Caso $\vee e$) $\psi = \chi$ con

  (1) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \eta_1 \vee \eta_2$
  (2) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \eta_1 \vdash \chi$
  (3) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \eta_2 \vdash \chi$.

  Usando hipótesis inductiva en (1-3), tenemos que

  (4) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \eta_1 \vee \eta_2$
  (5) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \eta_1 \vDash \chi$
  (6) $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \eta_2 \vDash \chi$.

  Por (3), sabemos que para toda valuación v que satisface las premisas, $v \vDash \eta_1 \vee \eta_2$. Luego $v \vDash \eta_1$ o $v \vDash \eta_2$

  - Si $v \vDash \eta_1$, por (5) $v \vDash \chi$ y luego $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \chi$.
  - Si $v \vDash \eta_2$, por (6) $v \vDash \chi$ y luego $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \chi$.

  En los dos casos $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vDash \psi$ (porque $\psi = \chi$).

restantes casos como práctica

Comentarios adicionales sobre corrección

- Resultado es esperado
- Muestra que las reglas lógica del sistema de Deducción Natural para PROP son "razonables"
- Beneficio adicional: se puede usar para probar que una fórmula no es demostrable
  - $\vdash p$ no es un secuente válido (¿Por qué?)

Corrección

Completitud

Completitud

Completitud

$\psi_1, \ldots, \psi_n \vDash \phi$ implica que $\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ es secuente válido.

- Estrategia: vamos a probar el contrarecíproco

Completitud (definición equivalente a la anterior)

$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ no es secuente válido implica que $\psi_1, \ldots, \psi_n \nvDash \phi$.

Recordar:

- "$\psi_1, \ldots, \psi_n \vdash \phi$ no es secuente válido" significa que no hay una prueba de ϕ a partir de las hipótesis $\psi_1, \ldots, \psi_n$.
- "$\psi_1, \ldots, \psi_n \nvDash \phi$" significa que existe una valuación v tal que $v \vDash \psi_i$, para toda $i \in 1..n$ pero $v \nvDash \phi$.

Nociones preliminares

Conjunto consistente de fórmulas

Γ se dice consistente si $\Gamma \nvdash \bot$.

- Γ es consistente si no se puede derivar una contradicción a partir de él

Ejemplos:

- $\{p, q \to r\}$ es consistente (¿Cómo lo pruebo?)
- $\{p, q, q \to \neg p\}$ no es consistente

Nociones preliminares

Recordamos la definición de satisfactibilidad de un conjunto de fórmulas

- Γ un conjunto de fórmulas

Definición

Γ tiene un modelo (o es satisfactible) si existe una valuación v tal que

$$v \models \phi, \text{ para toda } \phi \in \Gamma$$

Ejemplos:

- $\{p, q \to r\}$ tiene un modelo (¿Ejemplo de valuación?)
- $\{p, q, q \to \neg p\}$ no tiene un modelo

Completitud: $\Gamma \nvdash \phi$ implica $\Gamma \not\models \phi$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \phi$

Completitud: $\Gamma \nvdash \phi$ implica $\Gamma \not\models \phi$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \phi$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente (por L1)

Completitud: $\Gamma \nvdash \phi$ implica $\Gamma \nvDash \phi$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \phi$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ tiene modelo (por L2)

Completitud: $\Gamma \nvdash \phi$ implica $\Gamma \nvDash \phi$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \phi$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ tiene modelo (por L2)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $\forall\psi \in \Gamma \cup \{\neg\phi\}$, $v \vDash \psi$ (def. de tener modelo)

Completitud: $\Gamma \nvdash \phi$ implica $\Gamma \nvDash \phi$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \phi$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ tiene modelo (por L2)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $\forall \psi \in \Gamma \cup \{\neg\phi\}$, $v \vDash \psi$ (def. de tener modelo)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $v \nvDash \phi$ y $\forall \psi \in \Gamma$, $v \vDash \psi$ (def. de $\vDash$)

Completitud: $\Gamma \nvdash \phi$ implica $\Gamma \nvDash \phi$

Demostración requiere dos lemas:

L1. Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

L2. Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

La prueba

Supongamos que $\Gamma \nvdash \phi$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente (por L1)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ tiene modelo (por L2)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $\forall \psi \in \Gamma \cup \{\neg\phi\}$, $v \vDash \psi$ (def. de tener modelo)

$\Longrightarrow$ $\exists v$ tal que $v \nvDash \phi$ y $\forall \psi \in \Gamma$, $v \vDash \psi$ (def. de $\vDash$)

$\Longrightarrow$ $\Gamma \nvDash \phi$ (def. de consecuencia semántica). $\square$

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente.

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente.

$\Longrightarrow \quad \Gamma, \neg\phi \vdash \perp$.

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente.

$\Longrightarrow$ $\Gamma, \neg\phi \vdash \bot$.

$\Longrightarrow$ La usamos para probar ϕ a partir de Γ:
$$\frac{\Gamma, \neg\phi^{n} \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ PBC$$

Prueba del L1

Si $\Gamma \nvdash \phi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es consistente

Prueba

Por contrarecíproco.

Supongamos que $\Gamma \cup \{\neg\phi\}$ es inconsistente.

$\Longrightarrow$ $\Gamma, \neg\phi \vdash \bot$.

$\Longrightarrow$ La usamos para probar ϕ a partir de Γ:

$$\frac{\Gamma, \neg\phi^n \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ PBC$$

$\Longrightarrow$ $\Gamma \vdash \phi$ $\square$

Sobre L2 – Primero una observación

L2

Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

- Vale la vuelta también: Si Γ tiene modelo, es consistente

Prueba de la vuelta

Por el absurdo.

$$\Gamma \vdash \perp$$

Sobre L2 – Primero una observación

L2

Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

- Vale la vuelta también: Si Γ tiene modelo, es consistente

Prueba de la vuelta

Por el absurdo.

$$\Gamma \vdash \bot$$

$\Longrightarrow$ Sea v tal que $\forall \phi \in \Gamma$, $v \models \phi$ (v existe porque Γ tiene modelo)

Sobre L2 – Primero una observación

L2

Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

- Vale la vuelta también: Si Γ tiene modelo, es consistente

Prueba de la vuelta

Por el absurdo.

$\Gamma \vdash \perp$

$\Longrightarrow$ Sea v tal que $\forall \phi \in \Gamma$, $v \models \phi$ (v existe porque Γ tiene modelo)

$\Longrightarrow$ Por Teorema de Corrección, v debería satisfacer $\perp$.

Sobre L2 – Primero una observación

L2

Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

- Vale la vuelta también: Si Γ tiene modelo, es consistente

Prueba de la vuelta

Por el absurdo.

$\Gamma \vdash \bot$

$\Longrightarrow$ Sea v tal que $\forall \phi \in \Gamma$, $v \vDash \phi$ (v existe porque Γ tiene modelo)

$\Longrightarrow$ Por Teorema de Corrección, v debería satisfacer $\bot$.

$\Longrightarrow$ ¡Ninguna v verifica $v \vDash \bot$!

Sobre L2 – Primero una observación

L2

Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

- Vale la vuelta también: Si Γ tiene modelo, es consistente

Prueba de la vuelta

Por el absurdo.

$$\Gamma \vdash \perp$$

$\Longrightarrow$ Sea v tal que $\forall \phi \in \Gamma$, $v \vDash \phi$ (v existe porque Γ tiene modelo)

$\Longrightarrow$ Por Teorema de Corrección, v debería satisfacer $\perp$.

$\Longrightarrow$ ¡Ninguna v verifica $v \vDash \perp$!

$\Longrightarrow$ $\Gamma \nvdash \perp$. $\square$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \phi \in \Gamma,\ v \models \phi$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \phi \in \Gamma$, $v \models \phi$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \phi \in \Gamma$, $v \models \phi$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$
- Si $\neg p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall\phi \in \Gamma$, $v \models \phi$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$
- Si $\neg p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$.
- ¿Si $p \notin \Gamma$ y $\neg p \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$?

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \phi \in \Gamma$, $v \models \phi$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$
- Si $\neg p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$.
- ¿Si $p \notin \Gamma$ y $\neg p \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$?
  - Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$ y $v(q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$ y $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \phi \in \Gamma,\ v \models \phi$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$
- Si $\neg p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$.
- ¿Si $p \notin \Gamma$ y $\neg p \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$?
  - Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$ y $v(q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$ y $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Objetivo

- Definir v tal que $\forall \phi \in \Gamma,\ v \vDash \phi$

Consideraciones:

- Hay que definir v sobre las variables proposicionales
- Si $p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$
- Si $\neg p \in \Gamma$, no queda otra que definir $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{F}$.
- ¿Si $p \notin \Gamma$ y $\neg p \notin \Gamma$? ¿Podemos definir, digamos, $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$?
    - Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$ y $v(q) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$ y $v(p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}$.

Observación 1

- Primero "completar" Γ con todas sus consecuencias lógicas
    - $Th(\Gamma) = \{q, q \to \neg p, \neg p, q \wedge \neg p \ldots\}$
    - En general $Th(\Gamma) = \{\phi \mid \Gamma \vdash \phi\}$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$
- ¿r es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash r$? No.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$
- ¿r es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash r$? No.
- ¿$\neg r$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg r$? No.

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$
- ¿r es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash r$? No.
- ¿$\neg r$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg r$? No.
- Entonces ni r ni $\neg r$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$
- ¿r es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash r$? No.
- ¿$\neg r$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg r$? No.
- Entonces ni r ni $\neg r$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$
- Problema: ¿cómo definimos v en r?

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$
- ¿r es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash r$? No.
- ¿$\neg r$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg r$? No.
- Entonces ni r ni $\neg r$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$
- Problema: ¿cómo definimos v en r?

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

¿Alcanza con completar Γ con sus consecuencias lógicas para poder definir v?

- No.
- Considerar $\Gamma = \{q, q \to \neg p\}$
- ¿r es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash r$? No.
- ¿$\neg r$ es consecuencia lógica de Γ? Es decir, ¿$\Gamma \vdash \neg r$? No.
- Entonces ni r ni $\neg r$ van a aparecer en $Th(\Gamma)$
- Problema: ¿cómo definimos v en r?

Observación 2

- Podemos usar L1 y agregarlo (r o $\neg r$) a Γ conservando consistencia

Prueba del L2: Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

- Vamos a definir una técnica que se encarga de atender ambas observaciones a la vez:
  - Agrega las consecuencias lógicas y además
  - Agrega las fórmulas que no son consecuencia lógica y que no generan inconsistencias
- Permite obtener la extensión consistente maximal de Γ y se escribe Γ^*
- Nuestro plan de prueba de L2 ahora será:
  1. Dado Γ, obtenemos Γ^*
  2. A partir de Γ^* obtenemos una valuación v
  3. Probamos que v satisface a todas las fórmulas de Γ

Conjunto consistente maximal

Γ es consistente maximal si

1. Γ es consistente
2. Si $\Gamma \subseteq \Gamma'$ y Γ' consistente, entonces $\Gamma' = \Gamma$

Observación

- (2) puede reemplazarse equivalentemente por:

$$\text{Si } \Gamma \subset \Gamma', \text{ entonces } \Gamma' \text{ es inconsistente}$$

Ejemplo

$\Gamma = \{\phi \mid v \models \phi\}$ para una valuación v cualquiera dada.

- Es consistente por vuelta de L2 (si tiene modelo es consistente)
- Si $\Gamma \subset \Gamma'$, entonces Γ' es inconsistente (¿por qué?)

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba

- Sea $\phi_0, \phi_1, \ldots$ la lista de todas las fórmulas de PROP
- Definimos una secuencia de conjuntos de fórmulas

$$\Gamma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma$$

$$\Gamma_{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\phi_n\} & \text{si } \Gamma_n \cup \{\phi_n\} \text{ es consistente} \\ \Gamma_n & \text{sino} \end{cases}$$

- Luego definimos

$$\Gamma^* \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{\Gamma_i \mid i \geq 0\}$$

- Es claro que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$
- Veremos que Γ^* es consistente maximal

sigue...

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente maximal

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente maximal

Asumir Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\psi \in \Delta$

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente maximal

Asumir Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\psi \in \Delta$

$\Longrightarrow$ Existe m tal que $\psi = \phi_m$

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente maximal

Asumir Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\psi \in \Delta$

$\Longrightarrow$ Existe m tal que $\psi = \phi_m$

$\Longrightarrow$ Como $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$, $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ consistente

Lema de saturación

Lema

Γ consistente está contenido en un conjunto consistente maximal Γ^*

Prueba (continuación)

Cada Γ_n es consistente (trivial)

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente. Se muestra por el absurdo

$\Longrightarrow$ Γ^* es consistente maximal

Asumir Δ consistente tal que $\Gamma^* \subseteq \Delta$ y $\psi \in \Delta$

$\Longrightarrow$ Existe m tal que $\psi = \phi_m$

$\Longrightarrow$ Como $\Gamma_m \subseteq \Gamma^* \subseteq \Delta$, $\Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ consistente

$\Longrightarrow$ $\Gamma_{m+1} = \Gamma_m \cup \{\phi_m\}$ y por ende $\phi_m \in \Gamma^*$ $\square$

Finalmente: Prueba de L2

L2

Si Γ es consistente, entonces tiene modelo

Prueba

- Por lema de saturación existe Γ^* consistente maximal que incluye a Γ
- Definimos:

$$v(p_i) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{T} & \text{si } p_i \in \Gamma^* \\ \mathbf{F} & \text{sino} \end{cases}$$

- Probamos que $v \models \phi$ sii $\phi \in \Gamma^*$
- Concluimos que $v \models \phi$ para todo $\phi \in \Gamma$ $\square$

Resumen de resultados

- Caracterización sintáctica y semántica de verdades universales

$$\vdash \qquad\qquad \models$$

- Ambas coinciden

Corrección

ϕ tiene una prueba implica que ϕ es tautología

Completitud

ϕ tautología implica que ϕ tiene una prueba.