

Práctica 5

Resolución

1. Resolución en PROP

Ejercicio 1

¿Cuáles de las fórmulas del ejercicio 11 de la práctica 1 son tautologías? Justificar utilizando el método de resolución para la PROP. Para las demás, indicar qué pasa si se intenta demostrarlas usando este método.

Ejercicio 2

¿Se deduce $(p \wedge q)$ de $(\neg p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$? Contestar utilizando el método de resolución para la lógica proposicional.

Ejercicio 3

Demostrar las siguientes tautologías utilizando el método de resolución para la PROP. Notar que no siempre es necesario usar todas las cláusulas.

1. $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
2. $(r \rightarrow \neg q) \rightarrow ((r \wedge q) \rightarrow p)$
3. $((p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow \neg q)) \rightarrow \neg(r \wedge q)$

Ejercicio 4

Un grupo de amigos quería juntarse a comer en una casa, pero no decidían en cuál. Prevalían dos propuestas: la casa de Ana, que era cómoda y espaciosa, y la de Carlos, más chica pero con un amplio jardín y parrilla al aire libre. Finalmente acordaron basar su elección en el pronóstico del tiempo. Si anunciaban lluvia, se reunirían en la casa de Ana; y si no, en la de Carlos (desde ya, la reunión tendría lugar en una sola casa).

Finalmente llegó el día de la reunión, y el grupo se juntó a comer en la casa de Ana, pero no llovió.

Utilizar las siguientes proposiciones para demostrar - mediante el método de resolución - que el pronóstico se equivocó (anunció lluvia y no llovió, o viceversa).

- p = “El pronóstico anunció lluvia.”
 a = “El grupo se reúne en la casa de Ana.”
 c = “El grupo se reúne en la casa de Carlos.”
 l = “Llueve en el día de la reunión.”

Ayuda: por la descripción de arriba sabemos que $p \rightarrow a$, $\neg p \rightarrow c$ y $\neg(a \wedge c)$, además de que a y $\neg l$ son verdaderas. Pensar en lo que se quiere demostrar para decidir qué pares de cláusulas utilizar.

2. Unificación

Ejercicio 5

Unir con flechas los términos que unifican entre sí (entre una fila y la otra). Para cada par unificable, exhibir el *mgu* (“most general unifier”). Asumir que a es una constante, x, y, z son variables, f y g son símbolos de función, y P y Q predicados.

$$\begin{array}{cccccc} P(f(x)) & P(a) & P(y) & Q(x, f(y)) & Q(x, f(z)) & Q(x, f(a)) \\ P(x) & P(f(a)) & P(g(z)) & Q(f(y), x) & Q(f(y), f(x)) & Q(f(y), y) \end{array}$$

Ejercicio 6

Determinar, para cada uno de los siguientes pares de términos de primer orden, si son unificables o no. En cada caso justificar su respuesta exhibiendo una secuencia exitosa o fallida (según el caso) del algoritmo de Martelli-Montanari. Asimismo, en caso de que los términos sean unificables indicar el *mgu* (“most general unifier”). Notación: x, y, z variables; a, b, c constantes; f, g símbolos de función.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $f(x, x, y)$ y $f(a, b, z)$ | 4. $f(a)$ y $g(y)$ |
| 2. $f(x)$ y y | 5. $f(x)$ y x |
| 3. $f(g(c, y), x)$ y $f(z, g(z, a))$ | 6. $g(x, y)$ y $g(f(y), f(x))$ |

Ejercicio 7

Preguntas para pensar.

1. La relación entre términos *unifica con*, ¿es reflexiva? ¿Es simétrica? ¿Es transitiva?
2. ¿Existe algún término t tal que todo término s unifique con él?
3. ¿Cómo aplicaría el algoritmo de unificación al problema de determinar si, dado un conjunto finito de términos, existe un unificador común a todos?

3. Resolución en PRED

Ejercicio 8

Convertir a Forma Normal Negada (NNF) las siguientes fórmulas de primer orden:

1. $\forall x. \forall y. (\neg Q(x, y) \rightarrow \neg P(x, y))$

$$2. \forall x. \forall y. ((P(x, y) \wedge Q(x, y)) \rightarrow R(x, y))$$

$$3. \forall x. \exists y. (P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$$

Ejercicio 9

Convertir a Forma Normal de Skolem y luego a Forma Clausal las siguientes fórmulas de primer orden:

$$1. \exists x. \exists y. R(x, y).$$

$$4. \exists x. \forall y. (P(x, y) \wedge Q(x) \wedge \neg R(y))$$

$$2. \forall x. \exists y. R(x, y)$$

$$5. \forall x. (P(x) \wedge \exists y. (Q(y) \vee \forall z. \exists w. (P(z) \wedge \neg Q(w))))$$

$$3. \forall x. \neg (P(x) \wedge \forall y. (\neg P(y) \vee Q(y)))$$

Ejercicio 10

Escribir en lógica de primer orden y luego convertir a Forma Clausal los siguientes enunciados expresados en lenguaje natural:

1. Todo conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo.

Utilizar los siguientes predicados: $N(x)$ para expresar que x es un número natural, $C(x)$ para x es conjunto, $x \in y$ para x pertenece a y y $x \leq y$ para x menor o igual a y .

2. Un dragón es feliz si todas sus crías pueden volar.

Los dragones verdes pueden volar.

Un dragón es verde si al menos uno de sus progenitores es verde, y es rosa en cualquier otro caso.

Utilizar los siguientes predicados: $D(x)$ para expresar que x es un dragón, $P(x, y)$ para x es el progenitor de y , $F(x)$ para x es feliz, $V(x)$ para indicar que x puede volar, $VE(x)$ para x es verde y $R(x)$ para x es rosa.

Ejercicio 11

Para pensar (o jugar):

1. Exhibir una cláusula que arroje un resolvente consigo misma.
2. Exhibir dos cláusulas, cada una con no más de dos literales, que arrojen tres o más resolventes distintos entre sí.
3. Exhibir dos cláusulas que arrojen como resolvente \square si se unifican tres o más términos a la vez, pero no si se unifica solamente un término de cada lado.

Ejercicio 12

La computadora de la policía registró que el Sr. Smullyan no pagó una multa. Cuando el Sr. Smullyan la pagó, la computadora grabó este hecho pero, como el programa tenía errores, no borró el hecho que expresaba que no había pagado la multa. Dada la información almacenada en la computadora, mostrar utilizando resolución que el jefe de gobierno es un espía.

Utilizar los siguientes predicados y constantes: $Pagó(x)$ para expresar que x pagó su multa, $Espía(x)$ para x es un espía, $smullyan$ para el Sr. Smullyan y $jefeGob$ para el jefe de gobierno.

Ejercicio 13

¿Cuáles las siguientes fórmulas son lógicamente válidas? Demostrarlas usando resolución.

1. $\exists x.\forall y.R(x, y) \rightarrow \forall y.\exists x.R(x, y)$
2. $\forall x.\exists y.R(x, y) \rightarrow \exists y.\forall x.R(x, y)$
3. $\exists x.[P(x) \rightarrow \forall x.P(x)]$
4. $\exists x.[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow [\exists x.P(x) \vee \exists x.Q(x)]$
5. $\forall x.[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow [\forall x.P(x) \vee \forall x.Q(x)]$
6. $[\exists x.P(x) \wedge \forall x.Q(x)] \rightarrow \exists x.[P(x) \wedge Q(x)]$
7. $\forall x.\exists y.\forall z.\exists w.[P(x, y) \vee \neg P(w, z)]$
8. $\forall x.\forall y.\forall z.[\neg P(f(a)) \vee \neg P(y) \vee Q(y)] \wedge P(f(z)) \wedge [\neg P(f(f(x))) \vee \neg Q(f(x))]$

Ejercicio 14

Expresar en forma clausal las siguientes reglas de inferencia y mostrar que son válidas usando resolución:

1. *Modus ponens*.
2. *Modus tollens*.
3. *Especialización* (De $\forall x.A(x)$ deducir $A(t)$, cualquiera sea el término t).

Ejercicio 15

Cualquiera que sepa leer no es analfabeto. Los delfines son analfabetos. Algunos delfines son inteligentes. Demostrar utilizando resolución que hay quienes son inteligentes pero analfabetos.

Utilizar los siguientes predicados: $L(x)$ para expresar que x sabe leer, $A(x)$ para x es analfabeto, $D(x)$ para x es delfín e $I(x)$ para x es inteligente.

Ejercicio 16

Dadas las siguientes cláusulas:

1. $\{P(x), \neg P(x), Q(a)\}$
2. $\{P(x), \neg Q(y), \neg R(x, y)\}$
3. $\{\neg P(x, x, z), \neg Q(x, y), \neg Q(y, z)\}$
4. $\{M(1, 2, x)\}$

1. ¿Cuáles son cláusulas de Horn?

2. Para cada cláusula de Horn indicar si es una cláusula de definición (hecho o regla) o una cláusula objetivo.
3. Dar, para cada cláusula, la fórmula de primer orden que le corresponde.

Ejercicio 17

Dadas las siguientes fórmulas en lógica de primer orden:

1. $\forall x.(S(x) \rightarrow \exists y.(T(y) \wedge E(x, y)))$
2. $\forall x.(W(x) \rightarrow S(x))$
3. $W(a) \wedge D(a)$
4. $\forall z.(T(z) \wedge ((\exists y.(D(y) \wedge E(y, z))) \rightarrow M(z)))$

Determinar si la siguiente fórmula es consecuencia de (1-4) anterior utilizando resolución SLD:

$$\exists z.(T(z) \wedge M(z))$$

Ejercicio 18

Alan es un robot japonés. Cualquier robot que puede resolver un problema lógico es inteligente. Todos los robots japoneses pueden resolver todos los problemas de esta práctica. Todos los problemas de esta práctica son lógicos. Existe al menos un problema en esta práctica. ¿Quién es inteligente? Encontrarlo utilizando resolución SLD y composición de sustituciones.

Utilizar los siguientes predicados y constantes: $R(x)$ para expresar que x es un robot, $Res(x, y)$ para x puede resolver y , $PL(x)$ para x es un problema lógico, $Pr(x)$ para x es un problema de esta práctica, $I(x)$ para x es inteligente, $J(x)$ para x es japonés y la constante $alan$ para Alan.

Ejercicio 19

Sean las siguientes cláusulas (en forma clausal), donde $suma$ y par son predicados, suc es una función y $cero$ una constante:

1. $\{\neg suma(x, y, z), suma(x, suc(y), suc(z))\}$
2. $\{suma(x, cero, x)\}$
3. $\{\neg suma(x, x, y), par(y)\}$

Demostrar utilizando resolución que suponiendo (1), (2), (3) se puede probar $par(suc(suc(cero)))$. Si es posible, aplicar resolución SLD. En caso contrario, utilizar resolución general. Mostrar en cada aplicación de la regla de resolución la sustitución utilizada.

Ejercicio 20

1. Pasar las siguientes fórmulas en lógica de primer orden a forma clausal.
 - a) $\forall c.(V(c) \vee \exists e.(P(e, c)))$

- b) $\neg \exists c.(V(c) \wedge \exists e.(P(e, c)))$
 c) $\forall e.\forall c.(P(e, I(c)) \Leftrightarrow P(e, c))$

2. A partir de las cláusulas definidas en el punto anterior, ¿puede demostrarse $\forall c.(V(I(c)) \rightarrow V(c))$ usando resolución SLD? Si se puede, hacerlo. Si no, demostrarlo usando el método de resolución general.

Ejercicio 21

Dadas las siguientes afirmaciones:

- Toda persona tiene un contacto en Facebook:

$$\forall x.\exists y.\text{esContacto}(x, y)$$

$$1. \{\text{esContacto}(x, f(x))\}$$

- Si una persona es contacto de otra, la otra es contacto de la una:

$$\forall x.\forall y.(\text{esContacto}(x, y) \rightarrow \text{esContacto}(y, x))$$

$$2. \{\neg \text{esContacto}(x, y), \text{esContacto}(y, x)\}$$

1. La siguiente es una demostración de que toda persona es contacto de sí misma, es decir, de que

$$\forall x \text{ esContacto}(x, x)$$

- Negando la conclusión:

$$\neg \forall x.\text{esContacto}(x, x)$$

- Forma normal negada:

$$\exists x.\neg \text{esContacto}(x, x)$$

- Skolemizando y en forma clausal:

$$3. \{\neg \text{esContacto}(c, c)\}$$

- De 1 y 3, con $\sigma = \{x \leftarrow c, f(x) \leftarrow c\}$:

□

¿Es correcta? Si no lo es, indicar el o los errores.

2. La siguiente es una demostración de que toda persona es contacto de alguien, es decir, de que

$$\forall y.\exists x.\text{esContacto}(x, y)$$

- Negando la conclusión:

$$\neg \forall y.\exists x.\text{esContacto}(x, y)$$

- Forma normal negada:

$$\exists y.\forall x.\neg \text{esContacto}(x, y)$$

- Skolemizando y en forma clausal:

$$3. \{\neg \text{esContacto}(x, d)\}$$

- De 2 y 3, con $\sigma = \{x \leftarrow d, y \leftarrow d\}$:

$$4. \{\neg \text{esContacto}(d, d)\}$$

- De 1 y 4, con $\sigma = \{d \leftarrow x, d \leftarrow f(x)\}$:

□

¿Es correcta? Si no lo es, indicar el o los errores.

3. ¿Puede deducirse de las dos premisas que toda persona es contacto de alguien? En caso afirmativo dar una demostración (puede usarse la del ítem anterior), y en caso contrario explicar por qué.

Ejercicio 22

Dadas las siguientes definiciones de Descendiente y Abuelo a partir de la relación Progenitor:

$$\begin{aligned} \forall x. \forall y. (\text{Progenitor}(x, y) \rightarrow \text{Descendiente}(y, x)) \\ \forall x. \forall y. \forall z. (\text{Descendiente}(x, y) \wedge \text{Descendiente}(y, z) \rightarrow \text{Descendiente}(x, z)) \\ \forall x. \forall y. (\text{Abuelo}(x, y) \rightarrow \exists z. (\text{Progenitor}(x, z) \wedge \text{Progenitor}(z, y))) \end{aligned}$$

Demostrar usando resolución general que los nietos son descendientes; es decir, que

$$\forall x. \forall y. (\text{Abuelo}(x, y) \rightarrow \text{Descendiente}(y, x))$$

Ayuda: tratar de aplicar el método a ciegas puede traer problemas. Conviene tener en mente lo que se quiere demostrar.

Ejercicio 23

Indicar cuáles de las siguientes condiciones son necesarias para que una demostración por resolución sea SLD.

- Realizarse de manera lineal (utilizando en cada paso el resolvente obtenido en el paso anterior).
- Utilizar únicamente cláusulas de Horn.
- Utilizar cada cláusula a lo sumo una vez.
- Empezar por una cláusula objetivo (sin literales positivos).
- Empezar por una cláusula que provenga de la negación de lo que se quiere demostrar.
- Recorrer el espacio de búsqueda de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha.

Ejercicio 24

Sea R un símbolo de predicados de aridad 2. Se demostrará que, si R satisface las tres propiedades mencionadas, entonces es vacía. Dadas las siguientes definiciones:

1. R es **irreflexiva**: $\forall x. \neg R(x, x)$
2. R es **simétrica**: $\forall x. \forall y. (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$
3. R es **transitiva**: $\forall x. \forall y. \forall z. ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$
4. R es **vacía**: $\forall x. \neg \exists y R(x, y)$

Utilizando resolución, demostrar que sólo una relación vacía puede cumplir a la vez las propiedades 1 a 3. Indicar si el método de resolución utilizado es o no SLD (y justificar).