

Lógica y Programación

Primer Parcial 2023

Nombre y Apellido: _____

26 de abril de 2023

Duración: 3 horas

La nota será el mínimo entre 10 y la suma de los puntos obtenidos.

1. (2 puntos) Dar una valuación v tal que $v \models (p \wedge q) \rightarrow \neg r$.

Solución:

Tomemos $v(p) = T$, $v(q) = T$ y $v(r) = F$. Entonces, tenemos que $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$ es verdadero porque $p \wedge q$ es verdadero y $\neg r$ es verdadero.

2. (2 puntos) Pasar la fórmula $(p \wedge q) \rightarrow \neg r$ a forma normal conjuntiva (desarrollarlo paso a paso, no dar sólo el resultado final). Luego, expresarlo en notación conjuntista.

Solución:

$$(p \wedge q) \rightarrow \neg r \equiv \neg(p \wedge q) \vee \neg r \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee \neg r$$

La notación conjuntista sería: $\{\{\neg p, \neg q, \neg r\}\}$.

3. (2 puntos) Usá Deducción Natural para demostrar que el siguiente seciente es válido. Usá el estilo Genzen.

$$p \rightarrow (q \wedge r), \neg r \vdash \neg p$$

Solución:

$$\frac{p^1 \quad \frac{\overline{p \rightarrow (q \wedge r)}}{\frac{q \wedge r}{r} \wedge_{e2}} \text{Hyp} \quad \frac{\neg r}{\neg p} \text{Hyp}}{\frac{\perp}{\neg p} \neg_i, 1} \rightarrow_e$$

4. (2 puntos) Describí brevemente los conceptos de corrección y completitud de la Deducción Natural.

Solución:

La corrección de la Deducción Natural se refiere a que si una fórmula se puede demostrar usando la Deducción Natural, entonces esa fórmula es verdadera.

La completitud de la Deducción Natural se refiere a que si una fórmula es verdadera, entonces se puede demostrar usando la Deducción Natural.

5. (2 puntos) Considerá el lenguaje \mathcal{L} con los siguientes elementos:

- Conjunto de símbolos de función $\mathcal{F} = \{S, +, \times\}$.
- Conjunto de constantes $\mathcal{C} = \{0, 1\}$.
- Conjunto de símbolos de predicado $\mathcal{P} = \{\doteq, \leq\}$.

Dar una estructura $\mathcal{M} = (M, I)$ para \mathcal{L} y una asignación s tal que

$$s \models_{\mathcal{M}} \left((S(1) \doteq 0) \wedge (1 \leq x) \right)$$

Solución:

Tomamos $M = \mathbb{N}$, es decir, el conjunto de los números naturales y definimos la interpretación I de los símbolos de \mathcal{L} como sigue:

- $I(S) = S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la función sucesor.
- $I(+) = + : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la operación de suma.
- $I(\times) = \times : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la operación de multiplicación.
- $I(1) = 0 \in \mathbb{N}$, el número natural 0. ¡*Acá estaba el truco!*

- $I(0) = 1 \in \mathbb{N}$, el número natural 1. ¡Acá estaba el truco!
- $I(\doteq) = \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de pares ordenados (n, n) donde n es un número entero.
- $I(\leq) = \{(n, m) \mid n \leq m, n, m \in \mathbb{N}\}$, el conjunto de pares ordenados (n, m) donde n y m son números enteros y n es menor o igual que m .

Luego, tomamos la asignación s definida por $s(x) = 1$ valida la fórmula, ya que

$$s \models_{\mathcal{M}} \left((S(1) \doteq 0) \wedge (1 \leq x) \right)$$

$$\text{sii } s \models_{\mathcal{M}} S(1) \doteq 0 \quad \text{y} \quad s \models_{\mathcal{M}} 1 \leq x$$

$$\text{sii } (\hat{s}(S(1)), \hat{s}(0)) \in I(\doteq) \quad \text{y} \quad (\hat{s}(1), \hat{s}(x)) \in I(\leq)$$

$$\text{sii } (I(S)(\hat{s}(1)), I(0)) \in \{(n, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{y} \quad (I(1), s(x)) \in \{(n, m) \mid n \leq m, n, m \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{sii } I(S)(\hat{s}(1)) = I(0) \quad \text{y} \quad I(1) \leq s(x)$$

$$\text{sii } I(S)(I(1)) = I(0) \quad \text{y} \quad I(1) \leq s(x)$$

$$\text{sii } I(S)(0) = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq 1$$

$$\text{sii } 0 + 1 = 1 \quad \text{y} \quad 0 \leq 1$$

6. (2 puntos) Usá Deducción Natural para demostrar que el siguiente sequente es válido. Usá el estilo Fitch.

$$\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x.(Q(x) \rightarrow R(x)) \vdash \forall x.(P(x) \rightarrow R(x))$$

Solución:

1	$\forall x.P(x) \rightarrow Q(x)$	Premisa
2	$\forall x.Q(x) \rightarrow R(x)$	Premisa
3	$P(x)$	Suposición temporal
4	$P(x) \rightarrow Q(x)$	$\forall_e, 1$
5	$Q(x)$	$\rightarrow_e, 3, 4$
6	$Q(x) \rightarrow R(x)$	$\forall_e, 2$
7	$R(x)$	$\rightarrow_e, 5, 6$
8	$P(x) \rightarrow R(x)$	$\rightarrow_i, 3-7$
9	$\forall x.(P(x) \rightarrow R(x))$	$\forall_i, 8$