Práctica 1
Lógica Proposicional

1. Sintaxis y tablas de verdad

Ejercicio 1

Sean p y q variables proposicionales. ¿Cuáles de las siguientes expresiones son *fórmulas bien formadas*?

1. $(p\neg q)$
2. $p \vee q \wedge r$
3. $(p \to \neg p \to q)$
4. $(p \wedge \neg(p \to q))$
5. $\neg(p)$
6. $(p \vee \neg p \wedge q)$
7. $(\neg p)$
8. $(p == q)$

Ejercicio 2

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones

1. $(\neg p \vee q)$
2. $(p \vee (s \wedge t) \vee q)$
3. $\neg(q \vee s)$
4. $(\neg p \vee s) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg s))$
5. $((p \vee s) \wedge (t \vee q))$
6. $(((p \vee s) \wedge (t \vee q)) \leftrightarrow (p \vee (s \wedge t) \vee q))$
7. $(\neg q \wedge \neg s)$

cuando el valor de verdad de p y q es $\mathbf{T}$, mientras que el de s y t es $\mathbf{F}$.

Ejercicio 3

Determinar, utilizando tablas de verdad, si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

1. $(p \vee \neg p)$
2. $(p \wedge \neg p)$
3. $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q))$
4. $((p \vee q) \to p)$
5. $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
6. $(p \to p)$
7. $((p \wedge q) \to p)$
8. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$
9. $(((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$

Ejercicio 4

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos $\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (implicación), $\leftrightarrow$ (equivalencia) puede reescribirse utilizando sólo los conectivos $\neg$ y $\vee$.

Ejercicio 5

Sean las variables proposicionales f, e y m con los siguientes significados:

$$f \equiv \text{“es fin de semana”} \qquad e \equiv \text{“Juan estudia”}$$
$$m \equiv \text{“Juan escucha música”}$$

Escribir usando lógica proposicional las siguientes oraciones:

- “Si es fin de semana, Juan estudia o escucha música, pero no ambas cosas”
- “Si no es fin de semana entonces Juan no estudia”
- “Cuando Juan estudia los fines de semana, lo hace escuchando música”

Ejercicio 6

Probar utilizando inducción en la estructura que para cualquier fórmula de lógica proposicional la cantidad de símbolos “(” es igual a la cantidad de símbolos “)”.

Nota: en los siguientes ejercicios de esta sección, recomendamos utilizar la semántica dada por la definición de valuación para proposiciones, y no tablas de verdad.

Ejercicio 7

Probar que si las proposiciones $\phi \rightarrow \psi$ y ϕ son tautologías, entonces ψ también lo es.

Ejercicio 8

Sean las proposiciones ϕ, ψ, ξ y ζ tales que $\phi \rightarrow \psi$ es tautología y $\xi \rightarrow \zeta$ es contradicción, probar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o contingencias.

1. $(\phi \rightarrow \psi) \vee (\xi \rightarrow \zeta)$
2. $(\phi \rightarrow \xi) \vee (\psi \rightarrow \zeta)$
3. $(\phi \rightarrow \zeta) \vee (\psi \rightarrow \zeta)$
4. $(\xi \rightarrow \psi) \vee (\zeta \rightarrow \psi)$

Ejercicio 9

Probar que cualquier proposición que sea una tautología contiene un $\neg$ o una $\rightarrow$.

Ejercicio 10

Probar que si una proposición ϕ no contiene otro conectivo que $\leftrightarrow$, y cada variable proposicional aparece una cantidad de veces par, entonces ϕ es una tautología.

Ejercicio 11

Probar que los siguientes conjuntos son satisfactibles o insatisfactibles.

1. $\{p \to q, q \to p, r \lor s, s \to \neg q, \neg q \to s\}$
2. $\{p \lor q \lor \neg r, p \lor q \lor r, p \lor \neg q, \neg p\}$
3. $\{a \lor \neg c, \neg b \lor \neg a, c \lor a, b \lor \neg a\}$
4. $\{a \lor \neg b \lor c, c \to b, b \lor c, a \to c, \neg b\}$

Ejercicio 12

Dados dos conjuntos satisfactibles de proposiciones Γ_1 y Γ_2, probar que los siguientes conjuntos son satisfactibles o insatisfactibles.

1. $\{\phi \lor \psi \mid \psi \in \Gamma_1, \phi \in \Gamma_2\}$
2. $\{\phi \mid \phi \in \Gamma_1\}$
3. $\{\phi \land \psi \mid \psi \in \Gamma_1, \phi \in \Gamma_2\}$

2. Semántica trivaluada

Ejercicio 13

Asignar un valor de verdad (*verdadero*, *falso* o *indefinido*) a cada una de las siguientes expresiones aritméticas en los reales.

1. $5 > 0$
2. $1 > 1$
3. $(5 + 3 - 8)^{-1} \neq 2$
4. $0 \geq 5$
5. $\frac{1}{0} = \frac{1}{0}$
6. $0 > log_2(2^{2^0-1} - 1)$
7. $0 \cdot \sqrt{-1} = 0$
8. $\sqrt{-1} \cdot 0 = 0$

Ejercicio 14

La semántica de circuito-corto se basa en una forma particular de evaluar las expresiones booleanas. ¿Puede identificarla? ¿Cuál es la motivación?

Ejercicio 15

Determinar los valores de verdad de las proposiciones del ejercicio 2 cuando el valor de verdad de q es verdadero, s es falso y p y t es indefinido.

Ejercicio 16

Mostrar que, a diferencia de lo que sucede en lógica proposicional clásica, $(p \land q)$ no es lógicamente equivalente a $(q \land p)$.

Ejercicio 17

Mostrar que, sin embargo, $(p \leftrightarrow q)$, $((p \to q) \land (q \to p))$ y $((q \to p) \land (p \to q))$ son lógicamente equivalentes.

Ejercicio 18

Sean p, q y r tres variables proposicionales tales que

- p y q nunca están indefinidas,
- r está indefinida sii q es *verdadera*

Escribir una fórmula que nunca esté indefinida y que sea verdadera si y sólo si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera
b) Exactamente una de las tres es verdadera
c) No todas al mismo tiempo son verdaderas
d) Ninguna es verdadera
e) Sólo p y q son verdaderas
f) r es verdadera

3. Forma normal conjuntiva

Ejercicio 19

Convertir a Forma Normal Conjuntiva y luego a Forma Clausal (notación de conjuntos) las siguientes fórmulas proposicionales:

1. $p \to p$
2. $(p \land q) \to p$
3. $(p \lor q) \to p$
4. $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$
5. $\neg(p \land q) \to (\neg p \lor \neg q)$
6. $(p \land q) \lor (p \land r)$
7. $(p \land q) \to r$
8. $p \to (q \to r)$