Forma integral de la Ley de Conservación

En general, una ley de conservación en una dimensión toma la forma

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0.$$

Sea Ω_x R un dominio y u C $(\Omega_x \times \Omega_t)$. Supóngase que $\partial_t u$ C $(\Omega_x \times \Omega_t)$ y existen $g(x)$ y $h(x)$ tales que

$$t \quad \Omega_t : |u(x, t)| \leq g(x)$$

y

$$\partial_t u \leq h(x)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} = 0.$$

Integrar con respecto a x

$$\int_a^b \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} \right) dx = \int_a^b \text{0 grados.}$$

Por linealidad de la integral

$$\int_a^b \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dx + \int_a^b \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} dx = 0.$$

Derivando bajo el signo integral

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u(x,t)\, dx + \int_a^b \frac{\partial f(u(x,t))}{\partial x} dx = 0.$$

Aplicación del teorema fundamental del cálculo

$$\int_a^b u(x,t)\, dx - \int_a^b u(x,0)\, dx + \int_0^a f(a,\tau)\, d\tau - \int_0^a f(b,\tau)\, d\tau = 0.$$

$$\boxed{\int_a^b u(x,0)\, dx + \int_0^a f(a,\tau)\, d\tau - \int_0^a f(b,\tau)\, d\tau = \int_a^b y(x,t)\,.}$$

Definiciones básicas

Definiciones básicas

Definición (ecuación diferencial parcial (EDP))

Es una ecuación que involucra una función desconocida u y sus derivadas parciales junto con las variables independientes.

está escrito como

$$L\,(\text{variables independientes, u, derivadas parciales de u}) = 0. \tag{7}$$

Definición (Dominio)

Un dominio Ω es un subconjunto abierto y conexo de R^d que tiene un límite lineal por partes de clase C^1 .

Observación

A partir de ahora Ω siempre será un dominio.

Definición (solución de EDP clásica)

Es una función suficientemente suave $u\colon \Omega \to R$ que satisface (7) para cualquier x Ω.

Definición (Condición auxiliar)

Una condición auxiliar en una solución general es una igualdad que especifica el valor de la función desconocida en un subconjunto de Ω.

Definición (Problema de valor inicial (PVI))

Sea u: $\Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ la solución de (7). Un problema de valor inicial es una ecuación diferencial junto con un conjunto de condiciones auxiliares que especifican la solución y/o sus derivadas en $t = 0$.

Ejemplo (IVP para la ecuación de Korteweg-de Vries)

(8)

∂t u + ∂ 3 xu + 6u∂xu = 0 para (x, t) Ω × [0, T] . u (x, 0) =

u0 (x) para x Ω.

Definición (Problema de valor límite (BVP))

Sea u: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una solución de (7). Un problema de valor límite es una ecuación diferencial junto con un conjunto de condiciones auxiliares que especifican la solución y/o sus derivadas en $\partial\Omega$.

Ejemplo (ecuación de Laplace con condiciones de contorno de Dirichlet no homogéneas)

u = 0 para (x, y) Ω. para

∂Ω. u = f

Ejemplo (Tres condiciones de contorno ampliamente utilizadas para a u (x) en [a, b])

- Las condiciones de contorno de Dirichlet son u (a) = u (b) = 0. •

Las condiciones de contorno de Neumann son u (a) = u (b) = 0. •

Las condiciones de contorno periódicas son u (a) = u (b) y u (a) = u (b).

Definición (Problema bien planteado)

Es un EDP con condiciones auxiliares que cumple las condiciones

Existencia para una elección dada de condiciones auxiliares, existe una solución a la EDP que la satisface.

Unicidad solo hay una solución.

Estabilidad si perturbamos ligeramente la condición auxiliar, entonces la nueva solución no cambia mucho con respecto a La solución original.

Teorema (Malgrange-Ehrenpreis (1950))

Se puede resolver cualquier ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes en $\mathbb{R}^d$.

Ejemplo (operador de Lewy (1957))

No todas las EDP lineales con coeficientes polinomiales tienen solución.

$$\partial_t u = f(t).$$

Prueba.

Consulte https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdectb/lewy2.pdf. □

Ejemplo (operador Mizohata (1962))

$$\partial_x u + ix\partial_y u = g(x, y).$$

Integración

Definición (integrales en masa)

Integrar una función f (x) en algún dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

$$\int \cdots \int_{\Omega} f(x)\, dx$$

donde $dx = dx_1 \ldots dx_d$.

Definición (Integrales de flujo)

Sea S una superficie orientable con su campo vectorial normal unitario bien definido n que varía continuamente a través de S.

$$\iint_S F \cdot n\, dS .$$

Para superficies cerradas S que son el límite de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, denotaremos la superficie por $\partial\Omega$.

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot n\, dS .$$

Definición (Función integrable)

Una función f definida en un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ es integrable en Ω si y solo si

$$\int \cdots \int_{\Omega} |f(x)|\, dx$$

existe y es un número finito.

Definición (Función integrable localmente)

Una función $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es localmente integrable si y solo si para cada $K \subseteq \mathbb{R}^d$ que es cerrado y acotado, tenemos

$$\int \cdots \int_{K} |f(x)|\, dx < \infty.$$

Teorema (divergencia)

Si F es un campo vectorial suave en un dominio acotado con normal exterior, entonces

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} F \cdot n\, dS .$$

Teorema (Verde)

Si P (x, y) y Q (x, y) son funciones suaves en un dominio 2D acotado Ω y C = ∂Ω, entonces

$$\iint_{\text{Ohmio}} \left(\frac{\partial Q (x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P (x, y)}{\partial y} \right) dxdy = \oint_{\text{do}} (P (x, y)\, dx + Q (x, y)\, dy) .$$

Teorema (divergencia de componentes)

Si f = f (x) es una función suave en un dominio acotado Ω R3 , entonces

$$i = 1, 2, 3 : \quad \int_{\text{Ohmio}} f_{x_i} (x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f n_i\, dS$$

donde ni denota el componente i-ésimo de la normal unitaria exterior n.

Teorema (integración por partes)

Si f y g son funciones suaves de una variable x, entonces

$$\int_a^b f (x)\, g (x)\, dx = [f (x)\, g (x)]_a^b - \int_a^b f (x)\, g (x)\, dx.$$

Integración

Teorema (Fórmula de integración de campos vectoriales por partes)

$$u \cdot \quad u\,dx = - \quad (\operatorname{div} u)\, v\,dx + \quad (vu) \cdot n\,dS.$$

Ohmio Ohmio $\partial\Omega$

Aquí n denota la unidad exterior normal a $\partial\Omega$.

Teorema (Primera identidad de Green)

$$Vu\,dx = \quad \text{tú}\,\frac{\partial u}{\partial n}\,dS - \quad u \cdot \quad v\,dx.$$

Ohmio $\partial\Omega$ Ohmio

Teorema (Segunda identidad de Green)

$$v - uv\,dx = \quad \text{en}\,\frac{\partial u}{\partial n} - \text{tú}\,\frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{es.}$$

Ohmio $\partial\Omega$

Teorema (integral unidimensional al teorema puntual I)

f C (R) y I R intervalo acotado: f (x) dx = 0 = f ≡ 0.

I

Teorema (integral unidimensional a teorema puntual II)

f C (R) y g Cc (R) función continua con soporte compacto: f (x) g (x) dx = 0 = f ≡ 0.

R

Teorema (integral general al teorema puntual I)

subdominio acotado f C (Ω) y W Ω: ... f (x) dx = 0 = f ≡ 0.

Yo

Teorema (integral general al teorema puntual II)

Función continua f C (Ω) y g Cc (Ω) con soporte compacto: ... f (x) g (x) dx = 0 = f ≡ 0.

Ohmio

Teorema (convergencia dominada por Lebesgue)

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de funciones integrables en $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea f una función integrable en I tal que $\forall x \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Supóngase que existe una función integrable $g(x) \geq 0$ en I tal que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in I : |f_n(x)| \leq g(x).$$

Entonces

$$\text{límite}_{n\to\infty} \int_I \text{función}(x)\, dx = \int_I f(x)\, dx.$$

Teorema (convergencia monótona)

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de funciones integrables no negativas en $I \subseteq \mathbb{R}$ y sea f una función integrable en I tal que $\forall x \in I : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Supóngase que $\forall n \in \mathbb{N} : \forall x \in I : 0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Entonces

$$\text{límite}_{n\to\infty} \int_I \text{función}(x)\, dx = \int_I f(x)\, dx.$$

Teorema (Diferenciación bajo el signo integral)

Sea f C (Ω × (a, b)) para algún −∞ ≤ a < b ≤ ∞. Supóngase lo siguiente:

- ∂t f (x, t) C (Ω × (a, b)).
- Existen funciones integrables g (x) y h (x) en Ω tales que

$$|f(x,t)| \leq g(x) \text{ y } t \quad (a,b) : \partial t f(x,t) \leq h(x).$$

Entonces la función

$$t \longrightarrow \cdots \Omega \quad f(x,t)\,dx$$

es diferenciable (continua) en t (a, b) y

$$\partial t \quad \cdots_{\text{Ohmio}} \quad f(x,t)\,dx = \cdots_{\text{Ohmio}} \quad \partial t f(x,t)\,dx.$$

Prueba.

. □

Teorema (Regla de Leibniz)

Si $f(t, s)$ es una función suave en ambas variables, entonces

$$\partial_t \left(\int_0^a f(t, s)\, ds \right) = f(t, t) + \int_0^a \partial_t f(t, s)\, ds.$$

Prueba.

Por el cambio de variable $\tau = \frac{s}{t}$, tenemos $\int_0^a f(t, s)\, ds = \int_0^1 t f(t, t\tau)\, d\tau$. Por lo tanto, por diferenciación bajo el signo integral

$$\partial_t \int_0^1 (t f(t, t\tau))\, d\tau = \int_0^1 \partial_t (t f(t, t\tau))\, d\tau = \int_0^1 \left(f(t, t\tau) + t\partial_t f(t, t\tau) + t\partial_s f(t, t\tau)\, \tau \right) d\tau.$$

Cambiando las variables nuevamente a s, encontramos $\int_0^1 t\partial_t f(t, t\tau)\, d\tau = \int_0^a \partial_t f(t, s)\, ds$. Finalmente, por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$\int_0^1 \left(f(t, t\tau) + t f_s(t, t\tau)\, \tau \right) d\tau = \int_0^1 \frac{d}{d\tau} (\tau f(t, t\tau))\, d\tau = f(t, t).$$

□

Teorema de Fubini-Tonelli

Sea $f(x, y)$ una función (posiblemente) de valor complejo en R^2 .

$$\int_R \int_R |f(x, y)|\, dx \; dy = \int_R \int_R |f(x, y)|\, dy \; \text{D.X.}$$

Además, si cualquiera de las integrales iteradas anteriores en (A.22) es finita (lo que da como resultado que f es)

$$\int_R \int_R f(x, y)\, dx \; dy = \int_R \int_R f(x, y)\, dy \; \text{D.X.}$$

Definición (Orden)

Definimos el orden de una EDP como el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación.

Escribamos la EDP en la siguiente forma:

Todos los términos que contienen u y sus derivadas = Todos los términos que involucran solo las variables independientes.

Por lo tanto, cualquier EDP para $u(x)$ se puede escribir como

$$L(u) = f(x),$$

para algún operador L y alguna función f.

Definición (lineal)

Decimos que la EDP es lineal si L es lineal en u. Es decir,

$$\alpha \quad R: \quad u_1, u_2 : L(\alpha u_1 + u_2) = \alpha L(u_1) + L(u_2).$$

De lo contrario, decimos que la EDP es no lineal.

Ejemplo (ecuación de advección, $L(u) = \partial_t u + c\partial_x u$)

$$\begin{aligned} L(\alpha u_1 + u_2) &= \partial_t(\alpha u_1 + u_2) + c\partial_x(\alpha u_1 + u_2). \\ &= \alpha\partial_t u_1 + \alpha c\partial_x u_1 + \partial_t u_2 + c\partial_x u_2. \\ &= \alpha L(u_1) + L(u_2). \end{aligned}$$

Definición (EDP semilineal, cuasilineal y completamente no lineal)

Una EDP de orden k se llama:

- semilineal si y solo si todas las ocurrencias de derivadas de orden k aparecen con un coeficiente que sólo depende de las variables independientes,
- cuasilineal si y solo si todas las ocurrencias de derivadas de orden k aparecen con un coeficiente que sólo depende de la variables independientes, u, y sus derivadas de orden estrictamente menor que k,
- completamente no lineal si no es cuasilineal.

Ejemplo

Lineal

$$(xy)\,\partial_x u + e^y \partial_y u + (\text{sen } x)\, u = x^{3\,4\,\text{años}}.$$

Semilineal

$$(xy)\,\partial_x u + e^y \partial_y u + (\text{sen } x)\, u = u^2.$$

Cuasilineal

$$u\partial_x u + \partial_y u = 0.$$

Completamente no lineal

$$(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = 1.$$

Observación

Por definición, tenemos las inclusiones estrictas

{Ecuaciones diferenciales parciales lineales} {Ecuaciones diferenciales parciales semilineales} {Ecuaciones diferenciales parciales cuasilineales} .

Forma explícita para ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en dos variables independientes x e y

Lineal significa que la EDP se puede escribir en la forma

$$a(x, y)\, \partial_x u(x, y) + b(x, y)\, \partial_y u(x, y) = c_1(x, y)\, u + c_2(x, y)$$

para algunas funciones reales dadas a, b, c_1 y c_2 de x e y.

Semilineal significa que la EDP se puede escribir en la forma

$$a(x, y)\, \partial_x u(x, y) + b(x, y)\, \partial_y u(x, y) = c(x, y, u)$$

para algunas funciones reales dadas a y b de x e y, y una función real c de x, y y u.

Cuasilineal significa que la EDP se puede escribir en la forma

$$a(x, y, u)\, \partial_x u(x, y) + b(x, y, u)\, \partial_y u(x, y) = c(x, y, u)$$

para algunas funciones reales dadas a, b y c de x, y y u.

Observación

Tenga en cuenta que en todos los casos, los coeficientes de las funciones de valor real a, b y c no necesitan ser lineales en sus argumentos.

Teorema de Cauchy-Kowalewska

Sea la función fi del sistema

$$i = 1, \ldots, \text{uno}: \frac{\partial u_i}{\partial t} = \text{fijo } x, t, u, \partial_x u \, ,$$

donde $u(x, t) = (u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t))$ con una condición inicial

$$u_0(x, 0) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

ser analítico en algún vecindario del punto

$$t = 0, x = 0, u = 0, \partial_x u = 0.$$

Además, sean los datos iniciales (6.1.2) analíticos en $x = 0$. De ello se deduce que el problema de Cauchy (6.1.1), (6.1.2) admite una solución analítica única en algún vecindario del punto $x = t = 0$.

Clasificación de ecuaciones diferenciales parciales lineales de segundo orden

Definición (Clasificación de EDP lineales de segundo orden)

Sea la EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes Lu (x) = f (x) y x Ω, donde el operador diferencial L está dado por

$$\text{Yo}(x) := \sum_{j=1}^{d} \sum_{yo=1}^{d} a_{ij}\partial_i\partial_j u(x) + \sum_{yo=1}^{d} b_i\partial_i u(x) + cu(x).$$

$$= A, \quad 2u(x) \quad {}_F + b, \quad u(x) + cu(x),$$

donde A = [aij] Rd×d, b = [bi] punto ^{yo} Rd, 2u (x) es la matriz hessiana de u en x, u (x) es el gradiente de u en el mismo y el producto interno de Frobenius se define como

$$A, B \quad R^{d\times d} : A, B_F := \operatorname{tr} A^{yo} B.$$

Decimos que el operador diferencial parcial de segundo orden con coeficientes constantes D es

- Elíptica sólo si y sólo si A tiene d valores propios con el mismo signo, es decir, σ (A) R+ o σ (A) R−.
- Parabólico si y solo si A tiene exactamente d − 1 valores propios, ya sean positivos o negativos, y cero es un valor propio de multiplicidad uno.
- Hiperbólico si y solo si A tiene d − 1 valores propios positivos o negativos, y el restante es distinto de cero y de signo opuesto.
- Ultraparabólico sólo si cero es un valor propio múltiple y todos los valores propios restantes tienen el mismo signo.
- Ultrahiperbólico si y solo si cero no es un valor propio y hay más de un valor propio positivo y más de uno negativo valor propio.

Supongamos que A es una matriz simétrica. Al realizar una transformación de coordenadas lineal $\xi = F(x)$. Nótese que

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = F_{ij}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} F_{ji}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l}\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} F_{ki}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} F_{lj}.$$

Después de la transformación de coordenadas, la ecuación diferencial toma la forma

$$0 = \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} a_{ij} \sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} F_{ki}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} F_{lj} + \sum_{i=1}^{d} b_i \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} F_{ji} + cu.$$

$$0 = \sum_{l=1}^{d}\sum_{k=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} F_{ki} a_{ij} F_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_k \partial \xi_l} + \sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} F_{ji} b_i \frac{\partial u}{\partial \xi_j} + cu.$$

Nos gustaría elegir la matriz F de manera que $D = FAF^T$ sea diagonal. Recordemos que podemos diagonalizar una matriz simétrica mediante un cambio ortogonal de variables. En otras palabras, podemos elegir que F sea una matriz ortogonal.

Observación

- Si D tiene entradas diagonales distintas de cero, todas del mismo signo, la ecuación diferencial es elíptica.
- Si D tiene entradas diagonales distintas de cero con una entrada de signo diferente de las demás, entonces la ecuación diferencial es hiperbólico.
- Si D tiene una entrada diagonal cero, la ecuación puede ser parabólica.

Ejemplo (ecuación de Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov (KZK))

$$\partial^2_{x_1 t} u + \partial^2_{x_2} u - \partial_{x_3}\partial_{x_4} u = 0.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La ecuación KZK es hiperbólica.

Ejemplo (EDP lineal de segundo orden)

Sea d N la dimensión espacial.

Elíptico

$$-u(x) = -Id, \quad 2u(x) \quad _F = - \sum_{yo=1}^{d} \partial_i^2 tu(x) .$$

Parabólico

$$H(x, t) = \partial tu(x, t) + \begin{matrix} -Id & 0 \\ T0 & 0 \end{matrix}, \quad 2u(x, t) \quad _F = \partial tu(x, t) - u(x, t) .$$

Hiperbólico

$$u(x, t) = \begin{matrix} -Id & 0 \\ T0 & 1 \end{matrix}, \quad 2u(x, t) \quad _F = \partial_a^2 y(x, t) - y(x, t) .$$

Ejemplo (Euler-Tricomi)

Consideremos una ecuación que cambia de tipo.

(9)
$$\partial_{xu}^2 + x\partial 2_y u = 0.$$

Esta ecuación es elíptica en el semiplano derecho (x, y) R2 | x > 0 , es parabólica en el plano (x, y) R2 | x = 0 y es hiperbólica en el semiplano izquierdo (x, y) R2 | x < 0 .

Observación

(9) es útil en el estudio del flujo transónico (vuelo a la velocidad del sonido o cerca de ella).

Teorema (forma canónica de una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden)

Para cualquier EDP lineal de segundo orden, existe un cambio lineal de las variables $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ tal que en las nuevas coordenadas (ξ, η), la EDP se transforma de la siguiente manera:

- Si la EDP es elíptica, entonces

$$\partial_\xi^2 u + \partial_\eta^2 u + F(\partial_\xi u, \partial_\eta u, u) = 0.$$

- Si la ecuación diferencial parcial es parabólica, entonces

$$\partial_\eta^2 u + F(\partial_\xi u, \partial_\eta u, u) = 0.$$

- Si la ecuación diferencial parcial es hiperbólica, entonces

$$\partial_\xi \partial_\eta u + F(\partial_\xi u, \partial_\eta u, u) = 0.$$

En cada caso, F es una función lineal de tres variables.

Prueba.

Utilice la ley de inercia de Sylvester. □

Definición

Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales cuasi-lineales se llamará hiperbólico si su

parte homogénea admite soluciones ondulatorias. Esto implica que un conjunto de ecuaciones hiperbólicas

estar asociados a la propagación de ondas y que el comportamiento y las propiedades del sistema físico descrito por estas ecuaciones estarán dominados por fenómenos ondulatorios.

En otras palabras, un sistema hiperbólico describe fenómenos de convección e inversamente, los fenómenos de convección se describen mediante ecuaciones hiperbólicas.

parabólica si las ecuaciones admiten soluciones correspondientes a ondas amortiguadas. elíptica si

no admite soluciones ondulatorias.

Ejemplo

$$a\partial_x u + c\partial_y v = f1. \; b\partial_x v$$

$$+ c\partial_y u = f2.$$

Ejemplo (ecuaciones de Euler estacionarias) u ρ 0

$$\begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & \text{tú} & 0 \\ 0 & 0 & \text{tu} \end{pmatrix} \partial x \begin{pmatrix} \rho \\ \text{tú} \\ \text{en} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{en} & 0 & \rho \\ 0 & v & 0 \\ \frac{\text{do}^2}{\rho} & 0 & v \end{pmatrix} \partial y \begin{pmatrix} \rho \\ \text{tú} \\ \text{en} \end{pmatrix} = 0.$$

Método de características

Consideremos el problema para la forma explícita de ecuaciones diferenciales parciales lineales de primer orden en dos variables independientes.

$$a(x, y)\,\partial_x u + b(x, y)\,\partial_y u = c_1(x, y)\,u + c_2(x, y), \quad u(x, y)$$
$$\text{dado para } (x, y) \quad \Gamma.$$

para ser resuelto en algún dominio $\Omega \quad R^2$ con datos dados en alguna curva $\Gamma \quad \overline{\Omega}$.

Observación

A menudo, $\Gamma \quad \partial\Omega \quad R^2$ será solo uno de los ejes de coordenadas.

Encontramos las características, es decir, las curvas que siguen estas direcciones, resolviendo

$$\frac{Dx}{ds} = a(x(s), y(s)), \qquad \frac{dy}{ds} = b(x(s), y(s)).$$

Supongamos ahora que u es una solución de la EDP. Sea z (s) el valor de la solución u a lo largo de una característica, es decir,

$$z(s) := u(x(s), y(s)).$$

Entonces por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{el}{} = \partial_x u(x(s), y(s)) \quad \frac{Dx}{ds}(x(s), y(s)) + \partial_y u(x(s), y(s))(x(s), y(s)) \cdot \frac{dy}{ds}$$
$$\frac{dzdz}{} = \partial_x u(x(s), y(s))\, a(x(s), y(s)) + \partial_y u(x(s), y(s))\, b(x(s), y(s)).$$
$$\frac{dzdz}{ds} = c_1(x(s), y(s))\, z(s) + c_2(x(s), y(s)).$$

Definición (Ecuaciones características)

Hay tres variables dependientes x, y y z y una variable independiente s.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Dx}}{\mathrm{ds}}(s) &= a\,(x\,(s)\,,\,y\,(s))\,. \\
\frac{\mathrm{morir}}{\mathrm{ds}}(s) &= b\,(x\,(s)\,,\,y\,(s))\,. \\
\frac{\mathrm{el}}{\mathrm{ds}}(s) &= c1\,(x\,(s)\,,\,y\,(s))\,z\,(s) + c2\,(x\,(s)\,,\,y\,(s))\,.
\end{aligned}
$$

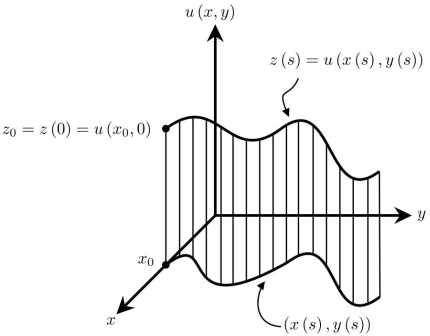


Figura: La solución u se describe mediante la superficie definida por z = u (x, y). Desde cualquier punto x0 en el eje x, existe una curva (x (s) , y (s)) en el plano xy, sobre el cual wa puede calcular la solución z = u (x (s) , y (s)). Conociendo solo la estructura de la EDP, x0 y z0 podemos Resolver EDO para encontrar la parte de la superficie de la solución que se encuentra por encima de la curva.

Ejemplo (Advección)

.

Ecuación de advección lineal

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0$$

con una condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ y $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Podemos ver que $u(x, t) = u_0(x - ct)$ satisface la EDP. Sea $z(x, t) = x - ct$, entonces de la regla de la cadena tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t u_0(x - ct) + c\partial_t u_0(x - ct) &= \partial_t u_0(z(x, t)) + c\partial_x u_0(z(x, t)) \, . \, (z) \, . \\
&= u_0'(z)\, \partial_t z + c u_0' \\
&= -c u_0'(z) + c u_0'(y) \, . \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esto nos dice que la solución transporta (o advecta) la condición inicial con velocidad c.
Las características son caminos en el plano xt, denotados por $(X(t), t)$ en los que la solución es constante.

Para $\partial_t u + c\partial_x u = 0$ tenemos $X(t) = X_0 + ct$, ya que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} u(X(t), t) &= \partial_t u(X(t), t) + \partial_x u(X(t), t) \frac{dX(t)}{dt} \\
&= \partial_t u(X(t), t) + \partial_x u(X(t), t)\, c. \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $u(X(t), t) = u(X(0), 0) = u_0(X_0)$, es decir, la condición inicial se transporta a lo largo de las características.
Las características tienen implicaciones importantes para la dirección del flujo de información y para las condiciones de contorno.
De manera más general, si tenemos un lado derecho distinto de cero en la EDP, entonces la situación es un poco más complicada en cada característica.

Considere $\partial_t u + c\partial_x u = f(x, t, u(x, t))$, y $X(t) = X_0 + ct$.

$$\frac{\text{tú}\,(X(t), t)}{\text{es}} = \partial tu\,(X(t), t) + \partial xu\,(X(t), t) \qquad \frac{dX(t)}{\text{es}}$$

$$= \partial tu\,(X(t), t) + \partial xu\,(X(t), t) \qquad \frac{dX(t)}{\text{es}}$$

$$= f\,(X(t), t, u\,(X(t), t)).$$

En este caso, la solución ya no es constante en $(X(t), t)$, sino que hemos reducido una EDP a un conjunto de EDO, de modo que

$$u\,(X(t), t) = u0\,(X0) + \int_0^a f\,(X(t)\,t, u\,(X(t), t))\,dt.$$

El dominio de dependencia de la solución exacta $u(t_{n+1}, x_j)$ está determinado por la curva característica que pasa por (t_{n+1}, x_j).

Consideremos el problema para la forma explícita de ecuaciones en derivadas parciales semilineales de primer orden en dos variables independientes.

$$
\begin{aligned}
&a(x, y)\, \partial_x u + b(x, y)\, \partial_y u = c(x, y, u), \\
&u(x, y) \text{ dado para } (x, y) \in \Gamma.
\end{aligned}
$$

Consideremos el problema para la forma explícita de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden cuasilineales en dos variables independientes.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(s) &= a(x(s), y(s), z(s)), \\
\dot{y}(s) &= b(x(s), y(s), z(s)), \\
\dot{z}(s) &= c(x(s), y(s), z(s)).
\end{aligned}
$$

Ejemplo

.

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_i(s) &= \partial_{p_i} F(p(s), z(s), x(s)), \\
\dot{z}(s) &= \sum_{j=1}^{n} p_j(s)\, \partial_{p_j} F(p(s), z(s), x(s)), \\
\dot{p}_i(s) &= -\partial_{x_i} F(p(s), z(s), x(s)) - \partial_z F(p(s), z(s), x(s))\, p_i(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(s) &= \quad pF(p(s), z(s), x(s)), \\
\dot{z}(s) &= \quad pF(p(s), z(s), x(s)) \cdot p(s), \\
\dot{p}(s) &= - \quad xF(p(s), z(s), x(s)) - \quad \frac{\partial}{\partial}
\end{aligned}
$$

Ejemplo

.

Así pues, consideramos el problema

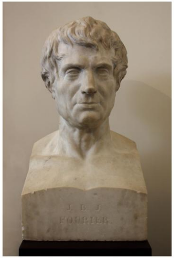
$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} - \lambda\psi(t) = 0$$

$$\frac{d^2 (x)}{dx^2} - \lambda (x) = 0.$$

Serie trigonométrica de Fourier

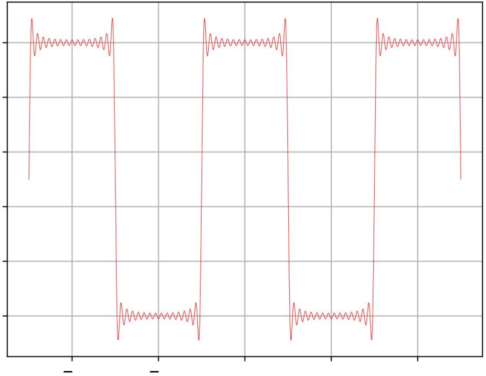
Serie trigonométrica de Fourier

El tema fue fundado por Jean-Baptiste Joseph Fourier, quien descubrió lo que deberíamos reconocer como los fundamentos del análisis de Fourier en sus estudios sobre el flujo de calor en la década de 1820.



Juan Bautista José Fourier (1768-1830).

.



Definición (serie de Fourier de f relativa)

Sea f L2 (I) y { k}k N una secuencia ortonormal en I R. La serie de Fourier de f relativa de { k}k N es

ck k (θ) , donde k N : ck := f, k = f (θ) k (θ) dθ son los coeficientes de Fourier de f relativos a { k}k N .
k N I

Ejemplo

Si I = [0, 2π] y dos secuencias ortonormales de funciones trigonométricas { k}k N , {φk}k Z :

2k−1 (θ) = , 2k (θ) = √ 2π √ π √ π 1 cos (kθ) sen (kθ) real 0 (θ) = , .

complejo φk (θ) = √ soy yo 2π = cos (kθ) + i sen (kθ) √ 2π .

Entonces, las series de Fourier de f relativas de { k}k N y {φk}k N son

real a0/2 + ak cos (kθ)+bk sen (kθ). k N

complejo αke ikθ, αk = 1/2π 2π 0 f (θ) e −ikθ dθ. k Z

Observación

El conjunto de funciones $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\text{porque }(m\theta)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{pecado }(n\theta)}{\sqrt{\pi}}\right\}_{m,n \ \mathbb{N}}$ $L^2([0, 2\pi])$ es ortonormal.

De hecho, n, m N:

- $\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\, d\theta = \left.\frac{1}{\theta 2\pi}\right|_0^{2\pi} = 1.$
- $\int_0^{2\pi} \left(\frac{\text{porque }(m\theta)}{\sqrt{\pi}}\right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(m\theta)}{\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 + \cos(2m\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\left.(4m\theta)\,\theta + \frac{\text{pecado}}{4 \text{ millones}}\right|_0^{2\pi} = 1.$
- $\int_0^{2\pi} \left(\frac{\text{pecado }(n\theta)}{\sqrt{\pi}}\right)^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2(n\theta)}{\pi}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 - \cos(2m\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\left.\theta - \frac{\text{pecado }(4m\theta)}{4 \text{ millones}}\right|_0^{2\pi} = 1.$
- $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\text{porque }(m\theta)}{\sqrt{\pi}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\, d\theta = 0.$
- $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\text{pecado }(n\theta)}{\sqrt{\pi}}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \text{seno }(n\theta)\, d\theta = 0.$
- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(m\theta)\,\text{sen}(n\theta)}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \text{seno }(n\theta)\,\text{coseno }(m\theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\text{pecado }((n+m)\,\theta) - \text{pecado }((n-m)\,\theta)}{2}\, d\theta = 0.$

Definición (serie de Fourier generada por f)

Sea f L2 ([0, 2π]). Los coeficientes de Fourier de f están dados por

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(k\theta)\, d\theta, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,\mathrm{sen}(k\theta)\, d\theta.$$

y la n-ésima suma parcial de Fourier es

$$\boxed{f_{nc}(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\text{norte}} a_k\cos(k\theta) + b_k\,\mathrm{sen}(k\theta).}$$

En efecto, de las igualdades k N:

- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\, d\theta = \frac{a_0\,\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} = \pi a_0.$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \text{coseno}(k\theta)\, d\theta = \frac{\text{seno}(k\theta)}{a}\Big|_0^{2\pi} = 0.$
- $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(k\theta)\, d\theta = \frac{-\cos(k\theta)}{a}\Big|_0^{2\pi} = 0.$

Si integramos la serie de Fourier término por término

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\, d\theta + \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \operatorname{sen}(k\theta)\, d\theta.$$

Entonces,

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = \frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi} d\theta + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\, d\theta + b_k \int_0^{2\pi} \text{pecado}(k\theta)\, d\theta.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta = \pi a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot 0 + b_k \cdot 0)\, . = \quad a_0 \boxed{= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\, d\theta.}$$

Multiplicando la serie de Fourier por cos (mθ), m N e integrando término por término:

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\theta)\, f(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \text{porque } (m\theta) \frac{a0}{2} d\theta + \int_0^{2\pi} \text{porque } (m\theta) \sum_{k=1}^{\infty} ak \cos(k\theta) + bk \text{ sen } (k\theta)\, d\theta.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta)\, d\theta = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} ak \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \cos(m\theta)\, d\theta + bk \int_0^{2\pi} \text{seno } (k\theta) \text{ coseno } (m\theta)\, d\theta.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta)\, d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ak}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m+k)\theta) + \cos((m-k)\theta)\, d\theta + \frac{bk}{2} \int_0^{2\pi} \text{pecado } ((m+k)\theta) + \text{pecado } ((m-k)\theta)\, d\theta.$$

Cuando m = k ambas integrales se anulan, por lo que la suma infinita se reduce al m-ésimo sumando.

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta)\, d\theta = am \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta)\, d\theta + bm \int_0^{2\pi} \text{seno } (m\theta) \text{ coseno } (m\theta)\, d\theta.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta)\, d\theta = \frac{\text{soy}}{2} \int_0^{2\pi} 1 + \cos(2m\theta)\, d\theta + bm \cdot 0.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta)\, d\theta = am\pi. = \quad \text{soy} \boxed{= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(m\theta)\, d\theta.}$$