tu (x, t) $=\infty$ $v=0$ a_n^0 y ivxe v 2t

norte norte

tú$^{\text{metro}}_{\text{norte}}$ = $v=0$ un n$^{\text{metro}}$ en e := $v=0$ 0 a no no$^{\text{metro}}$ mi yo.

Análisis de estabilidad de Fourier

Análisis de estabilidad de Fourier

Presentaremos algunas discretizaciones espaciales simples para el problema periódico de advección-difusión de coeficiente constante en un cuadrícula uniforme $\Omega h = \{x1, . . . , xm\}$ con puntos de cuadrícula $xj = jh$ y ancho de malla $h =$ La $\frac{1}{\text{metro}}$. descomposición de Fourier discreta es una herramienta importante para analizar esquemas de diferencias lineales con condiciones periódicas espaciales. Se puede utilizar para estudiar propiedades fundamentales como la estabilidad, la disipación y la dispersión.

Definición

Modos de Fourier

$$k \quad Z : \quad k (x) = \exp (2\pi ikx) .$$

Estos modos forman una base ortonormal para el espacio L2 [0, 1], es decir,

$$v \quad L^2 [0, 1] : \quad \alpha k \quad k (x) ,$$
$$k \quad Z$$

donde el lado derecho es una serie convergente, que ahora llamamos serie de Fourier. Los coeficientes de Fourier están dados por $\alpha k = \quad k, v.$

Definición

Modos discretos de Fourier

$$k \quad Z : \varphi k (x) = (\quad k (x1) , . . . , \quad k (xm)) \quad C m.$$

La enfermedad de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

Los esquemas explícitos para la ecuación de advección ∂t u + $c\partial x u = 0$ dan lugar a restricciones de tamaño de paso (condiciones de estabilidad) de la forma

$$|c| \leq C, \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

con C una constante positiva apropiada independiente de Δx y Δt.

Observación

Al comienzo del análisis numérico, se utilizaron aproximaciones de diferencias finitas para demostrar la existencia de soluciones de EDP.
Para la convergencia de aproximaciones de diferencias finitas son necesarias para garantizar que el dominio matemático de dependencia de un problema de EDP se encuentre dentro de la contraparte numérica del método de diferencias finitas.

$$U_j^{n+1} = \sum_{k=-r}^{a} \gamma_k U_{j+k}^{n}.$$

Una condición necesaria para la estabilidad es que el dominio matemático de dependencia de la EDP esté contenido en la dominio numérico de dependencia.

En la década de 1940, John von Neumann introdujo el análisis de Fourier en la teoría de esquemas de diferencias finitas para ecuaciones diferenciales parciales dependientes del tiempo. Nos interesa la propagación de pequeños errores en diferentes puntos de la cuadrícula. Si estos errores no se controlan en cada etapa de la iteración temporal, pueden crecer y crear una solución completamente diferente de la solución deseada en un momento posterior. Un pulso inicial que tiene un tamaño limitado pero oscila con una frecuencia k. Tome una exponencial compleja para

$$\text{soy}^{\text{yo}} = \cos(kx) + i\ \text{sen}(kx).$$

El tamaño del pulso de valor complejo viene dado por su módulo, y

$$\text{soy}^{\text{yo}} = |\cos(kx) + i\ \text{sen}(kx)| = 1.$$

El crecimiento en tamaño al aplicar el esquema una vez a e ikx, capturado por una constante de amplificación llamada factor de crecimiento.
En el paso de tiempo n, para algún j Z tomamos

$$\text{Tú y}^{\text{norte}}_{\text{yo}}(k) \equiv \lambda(k)^{\text{no}}\ e^{ik(j\Delta x)} = \begin{cases} \text{Tú y}^{n+1}_{\text{yo}}(k) = \lambda(k)^{n+1}\ \text{y}\ ik(j\Delta x). \\ \text{Un}(k) = \lambda(k)\ j+1\ (k) = \lambda(k)^{\text{norte}}\ \text{y}\ ikj\Delta xe\ ik\Delta x. \\ \text{Un}_{j-1}\ {}^{n-1}\ {}^{\text{norte}}\ \text{y}\ ikj\Delta xe^{-ik\Delta x}. \\ \text{Tú y}_{\text{yo}}(k) = \lambda(k)^{n-1}\ e\ \text{y}\ ikj\Delta x. \end{cases}$$

Observación

$$\text{Re}\ \text{-e}^{ik\Delta x} = \cos(k\Delta x) = \frac{ik\Delta x\ e + e^{-ik\Delta x}}{2}, \quad \text{Yo soy}\ e^{ik\Delta x} = \text{sen}(k\Delta x) = \frac{ik\Delta x\ e - e^{-ik\Delta x}}{2\text{yo}}.$$

Ejemplo (ecuación de transporte en un dominio periódico)

Para alguna constante $c > 0$ y alguna función continua y acotada $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u + c\partial_x u = 0, \; x \quad (0, 1)\,, \; u\,(0, t) = u \quad t > 0. \\
&(1, t)\,, \; t > 0. \\
&u\,(x, 0) = g\,(x)\,, \qquad x \quad [0, 1]\,.
\end{aligned}
$$

Consideramos el FDM implícito

(6)
$$
\begin{aligned}
&\frac{\text{máquina virtual}^{+1}_{jj} - v^{m}}{\Delta t} + c\,\frac{\text{máquina virtual}^{+1}_{jj-1} - v^{m+1}}{\Delta x} = 0 \quad j = 1, \ldots, n+1, \; m = 0, 1, \ldots \\
&\text{en}^{m+1}_{0} = v^{m+1}_{n+1} \qquad m = 0, 1, \ldots \\
&\text{en}^{0}_{\text{yo}} = g\,(x_j) \qquad j \quad \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

Demuestre que para cualquier elección de $\Delta t, \Delta x > 0$, cualquier solución de (6) satisface

$$
\text{información}_{x\,[0,1]}\; g\,(x)\; v^{\text{metro}}_{\text{yo}} \qquad \text{sorber}_{x\,[0,1]}\; y\,(x)\,.
$$

Solución

Sea J un punto en el que v^{m+1}_{Yo} $^{n+1}_{j=1}$ alcanza su máximo. Entonces

$$en^{m+1}_{Yo} = v^{metro}_{Yo} - c\frac{\Delta t}{\Delta x} en^{m+1}_{J\ J-1} . - en^{m+1}$$

Suponiendo que c > 0, y por la elección de J tenemos $v^{m+1}_{Yo} - en^{m+1}_{J-1} \geq 0$. Iterando la desigualdad sobre todos los m se obtiene

$$en^{metro}_{yo} \leq \text{máx.}_{j=0,\ldots,n+1} \; en^{0}_{j} \leq \text{comer}_{x\ [0,1]} \; y\,(x) .$$

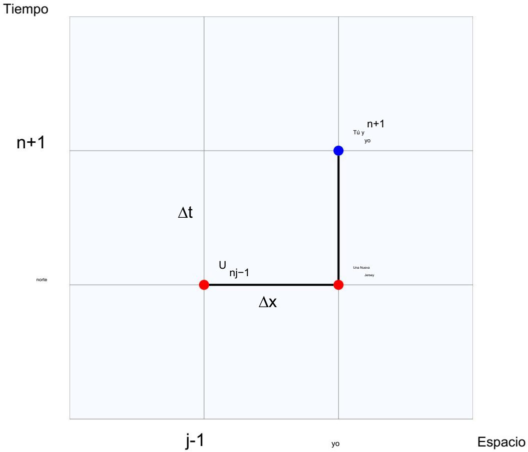
Análisis de estabilidad de Fourier

Ejemplo (Viento en contra de primer orden (FOU))

Propuesta por Richard Courant, Eugene Isaacson y Mina Rees. Sea c (x, t) = c > 0.

$$0 = \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c\,\frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x}.$$

$$U_j^{n+1} = U_j^n - r\left(U_j^n - U_{j-1}^n\right), \qquad r = c\,\frac{\Delta t}{\Delta x}.$$



Teorema (Análisis de estabilidad para el esquema FOU)

$$r \quad (0, 1] \qquad |\lambda(k)| \leq 1.$$

Prueba.

$$tú^{n+1} = Ujj^{\text{norte}} - r\,U\,j^{\text{norte}} - U_{j-1}^{\text{norte}}.$$

$$\lambda(k)\ n{+}1 e\ ik(j\Delta x) = \lambda(k) \quad \text{no}\ ^{ik(j\Delta x)} - r\lambda(k) \quad ^{\text{norte}}\ \text{mi}^{ik(j\Delta x)} \quad -\ \text{mi}\ ^{ik(j-1)\Delta x} \quad .$$

$$\lambda(k) = 1 - r\ 1 - e^{-ik\Delta x} \quad .$$

$$|\lambda(k)| = 1 - r + re{-}ik\Delta x \leq |1 -$$

$$r| + re{-}ik\Delta x$$

$$= |1 - r| + r \leq$$

$$1 \qquad r \quad (0, 1].$$

$\square$

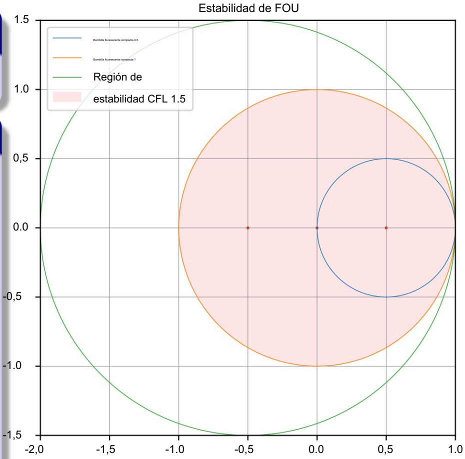


Figura: El esquema FOU es disipativo.

```
etiqueta = "Esquema FOU para PDE de advección lineal 1D"
espacio = [0, 10]
puntos espaciales = [6]
velocidad = 5
tiempo = [0, 1]
pasos de tiempo = 5
por partes = [2, 4]
```

Programa Python : Archivo de parámetros fou.toml.

```
desde tomllib importar carga

importar numpy como np

con abierto(archivo="fou.toml", modo="rb") como f:
        datos = carga(f)

c = datos["velocidad"]
x, Δx = np.linspace(
        inicio=datos["espacio"][0],
        parada=datos["espacio"][1],
        num=datos["puntos de espacio"][0],
        retstep=Verdadero,
)
t, Δt = np.linspace(
        inicio=datos["tiempo"][0], fin=datos["tiempo"][1], num=datos["pasosdetiempo"], retstep=Verdadero
)
cfl = c * Δt / Δx

u = np.donde((datos["por partes"][0] <<= x) y (datos["por partes"][1] <<= 4), 1.0, 0)
u = np.insert(u, 0, u[0]) # nodo fantasma del lado izquierdo
u = np.append(u, u[-1]) # nodo fantasma del lado derecho

print(f"Número CFL : {cfl}")

print("u0 para        u1      u2      u3      u4      u5      u6")
el paso de tiempo en t:
        imprimir(u)
        u[1:] -= cfl * (u - np.roll(u, 1))[1:]
        u[0] = u[1]
        u[-1] = u[-2]
```

Programa Python : fou.py.

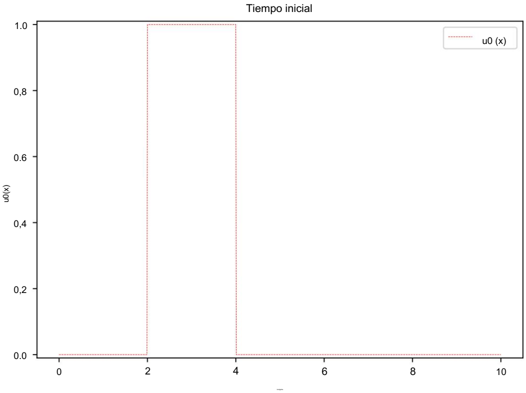


Figura: Perfil inicial.

```
Número de CFL: 0,625

tu0      u1      u2      u3      u4 u5          u6
[0. 0. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]
[0. 0.375 1. 1. [0.                 1.       1.       1.       ]
         0.        0,140625 0,609375 1.         1.       1.       1.       ]
[0.      0.        0,052734 0,316406 0,755859 1.        1.       1.       ]
[0.      0.        0,019775 0,151611 0,481201 0,847412 1.         1.       ]
```