

Multiplicando la serie de Fourier por $\text{sen}(m\theta)$, $m \leq N$ e integrando término por término:

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(m\theta) f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \text{pecado}(m\theta) \frac{a_0}{2} d\theta + \int_0^{2\pi} \text{pecado}(m\theta) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \text{sen}(k\theta) d\theta.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta + b_k \int_0^{2\pi} \text{sen}(k\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta$$

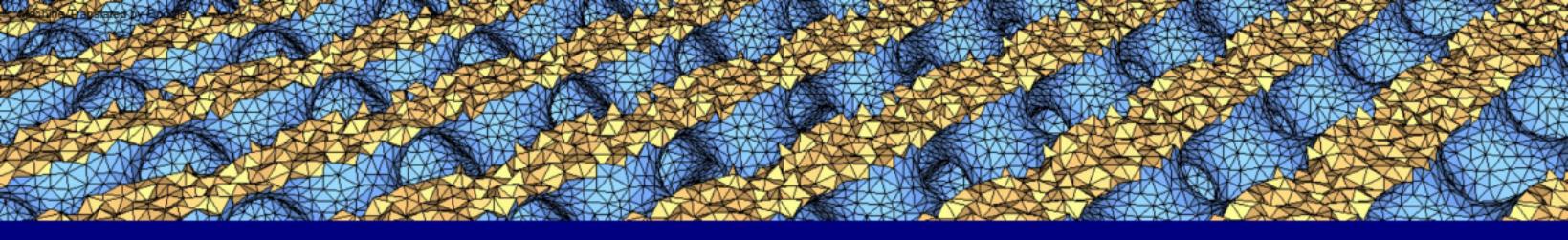
$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_k \text{sen}((m+k)\theta) + \text{sen}((m-k)\theta) d\theta + \frac{1}{2} \left[\text{porque } ((m-k)\theta) - \text{porque } ((m+k)\theta) \right]$$

Cuando $m = k$ ambas integrales se anulan, por lo que la suma infinita se reduce al m -ésimo sumando.

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta = a_m \int_0^{2\pi} \cos(m\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta + b_m \int_0^{2\pi} \sin^2(m\theta) d\theta.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta = \text{soy} \cdot 0 + \frac{b_m}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \cos(2m\theta) d\theta.$$

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta = b_m \pi. = b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \text{sen}(m\theta) d\theta.$$



Transformada de Fourier

Transformada de Fourier

$$\frac{d \text{nf}}{dx^n} = i \pi k^n n$$

$$v(\xi) = F[v](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} v(x) dx$$

Camino

$$\partial_t u - \alpha^2 u(k, t) = \partial_t u(k, t) - \alpha^2 u(k, t) = 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \partial_t u(k, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t u(x, t) \exp(-ikx) dx = \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) (-ik) dx = \partial_t u(k, t) = \partial_t u = \\ &\quad \exp \end{aligned}$$

$$\partial_2 x u(k, t) = (ik)^2 u(k, t) = -k^2 u(k, t) =$$

Para cada k , $f(t) := u(k, t)$

$$F(x) = \exp -\sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \frac{2x}{4}$$

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi at}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp -\frac{(x-y)^2}{4at} g(y) dy$$

Prueba.

$$u(x, t) - u_0(x_0) = \frac{1}{d/2(4\pi t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp -\frac{|x-y|^2}{4t} u_0(y) dy - u_0(x_0)$$

Camino



Semigrupos de un parámetro para ecuaciones de evolución lineal

Encuentra todos los mapas $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow C$ que satisfacen la ecuación funcional

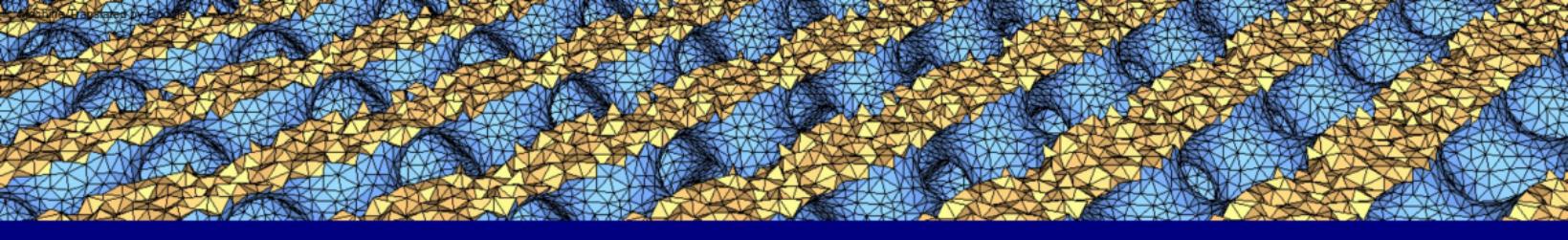
$$\begin{aligned} T(t+s) &= T(t)T(s), \quad t, s \geq 0, \\ T_0(0) &= 1. \end{aligned}$$

$$a \quad C : t \rightarrow \exp(ta).$$

Definición (Semigrupo)

Una función $U : \mathbb{R}^+ \rightarrow B(E)$ se llama semigrupo si y solo si

- $t, t \geq 0 : Ut+t = UtUt$.
- $U_0 = 1$.



Distribución

Distribución

Definición (Distribución)

Una distribución F es una regla que asigna a cada función de prueba $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R})$ un número real, que es **lineal** y **continuo**.

$$\begin{aligned} F : C^\infty_c(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \quad \varphi \\ &\mapsto F, \varphi . \end{aligned}$$

Observación

Sea $f(x)$ una función localmente integrable en \mathbb{R} . Entonces $f(x)$ puede interpretarse como la distribución F_f donde

$$\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}) : F_f, \varphi := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

Piense en F_f como la **distribución generada** por la función $f(x)$.

Definición (derivada de una distribución)

Sea F cualquier distribución. Entonces F' es también una distribución definida por $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}) : F', \varphi = -F, \varphi .$

La **derivada distributiva** de la distribución generada por una función suave es simplemente la distribución generada por la derivada clásica.

Función delta

Definición (función delta)

$$\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}) : \delta_0, \varphi = \varphi(0).$$

Definición (Derivada de la función delta)

$$\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}) : \delta'_0, \varphi = -\delta_0, \varphi = -\varphi(0).$$

Definición (Convergencia de una secuencia de distribuciones)

Una secuencia de distribuciones $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a una distribución F si y solo si

$$\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}) : F_n, \varphi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F, \varphi.$$

Definición (Espacio de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$)

Sea $k \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ y sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función localmente integrable. Supóngase lo siguiente:

- Para cualquier multiíndice α de orden menor o igual a k , $\partial^\alpha u$ en el sentido de distribuciones se genera por un valor localmente integrable $v\alpha$; es decir,

$$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \partial^\alpha u, \varphi = (-1)|\alpha| tu, \partial^\alpha \varphi = (-1)|\alpha| \cdots$$

Camino

$$u(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx = \cdots$$

Camino

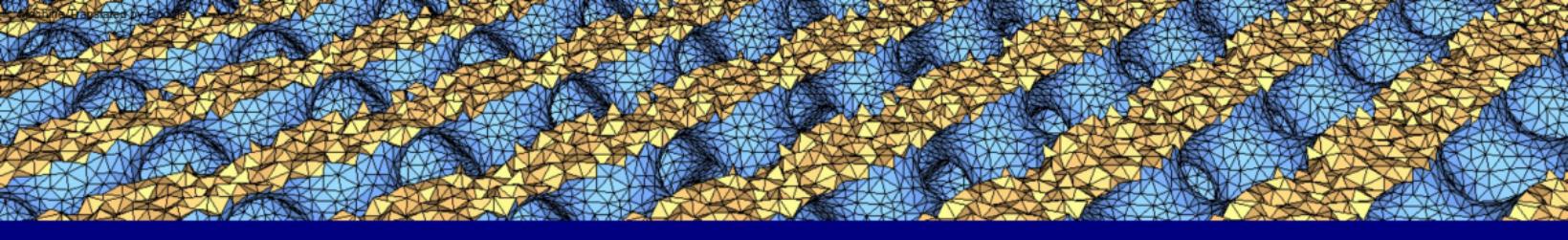
$$v\alpha(x) \varphi(x) dx.$$

- La función $v\alpha$ satisface

$$\int_{\mathbb{R}^d} |v\alpha(x)|^p dx < \infty.$$

Camino

Entonces decimos $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$.



Operador de onda



Sea el operador d'Alembertiano := $\partial_x^2 - c^2 \partial_t^2$

$$\frac{\partial_x^2 - c^2 \partial_t^2}{a^2} u = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

1

La **ecuación de onda**

$$(10) \quad \partial_t u + c \partial_x u = 0$$

se cumple mediante ondas con velocidad de propagación c en un medio isótropo homogéneo.

Jean-Baptiste le Rond
D'Alembert
(1717-1783).

Invariancia

El operador es invariante bajo inversión temporal $(x, t) \rightarrow (x, -t)$.

Observación

- Si la solución de (10) es $u \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, entonces ∂_x y ∂_t comutan y el operador de onda es

$$\partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 u = \partial_t^2 u - c^2 \partial_x (\partial_t u + c \partial_x u) = \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u.$$

Así, la ecuación de onda unidimensional se convierte en $\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0$. Estos son los operadores de primer orden. **ecuación de transporte**, cuya solución es de la forma $u(x, t) = g(x - ct)$.

- La solución de la ecuación de onda es la suma de dos soluciones de ecuaciones de transporte: una se mueve **hacia la izquierda** y la otra se mueve **hacia la derecha** ambos con velocidad de propagación c .

Teorema (Solución general de la ecuación de onda unidimensional)

La solución de (10) es $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$, donde $f, g \in C^2(\mathbb{R})$.

Observación

- Si $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, entonces $u^\pm(x, t) = \varphi(x \pm ct)$ cumple (10) ya que $\partial_t u^\pm = c \partial_x \varphi$. • Si φ es localmente integrable, entonces u es una solución distribucional.

Prueba.

Sea $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ y los cambios de variable $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$. La **regla de la cadena** nos da

$$\partial_x u = \partial_\xi + \partial_\eta u, \quad \partial_t u = c \partial_\xi - \partial_\eta u.$$

Combinando estas ecuaciones, encontramos

$$\partial_t - c\partial_x u = -2c\partial_\eta u, \quad \partial_t + c\partial_x u = 2c\partial_\xi u.$$

Por lo tanto, (10) resulta

$$u = \partial_t - c\partial_x \partial_t + c\partial_x u = -2c\partial_\eta u + 2c\partial_\xi u = -4c \partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

Su solución es $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$. Es decir, $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ con las variables originales. □

Problema de Cauchy homogéneo global para la ecuación de onda unidimensional

El problema del valor límite para (10) es un problema de Cauchy.

$$(11) \quad \begin{aligned} tu &= 0 && \text{para } x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \text{ para } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ y $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ son el **desplazamiento inicial** y la **velocidad inicial**, respectivamente.

Teorema (fórmula de d'Alembert)

Si $u(x, t)$ es solución de (11), entonces

$$(12) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Prueba.

Por el teorema 93, tenemos que la solución general de (10) es $u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$ con $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Busquemos una relación entre las funciones f y g con φ y ψ . Nótese que

$$u(x, 0) = f(x) + g(x) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = f'(x) + g'(x) = \psi(x).$$

Reemplazar x por a

$$\varphi(a) = f(a) + g(a), \quad \psi(a) = f'(a) + g'(a).$$

Prueba (Cont.)

Resolver el sistema de ecuaciones para f y g en términos de φ y ψ .

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \varphi(\alpha) + \psi(\alpha),$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} \varphi(\alpha) - \psi(\alpha).$$

Integrando con respecto a α nos da

$$f(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \varphi(s) ds + C1,$$

$$g(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \psi(s) ds + C2.$$

$$(\alpha) + g(\alpha) = \varphi(\alpha) + \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \varphi(s) ds + C1 + \varphi(\alpha) - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \psi(s) ds + C2 = \varphi(\alpha) + C1 + C2.$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \psi(s) ds + C2 = \varphi(\alpha) + C1 + C2.$$

Y tenemos que $C1 + C2 = 0$. Finalmente, u

$$(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2} \int_0^{0x+ct} \psi(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^{x-ct} \psi(s) ds.$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2} \int_0^{x+ct} \psi(s) ds - \frac{1}{2} \int_{-x-ct}^0 \psi(s) ds.$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Ejemplo

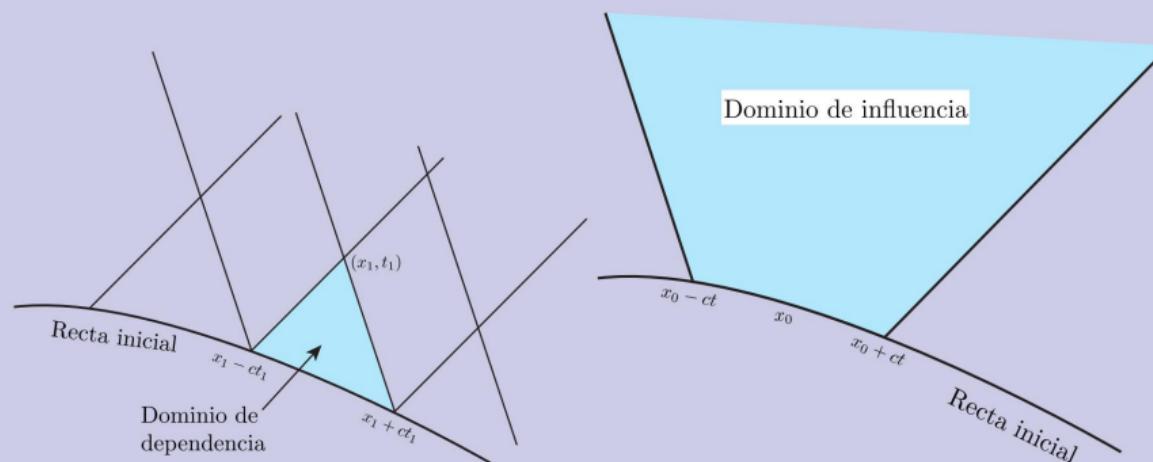
Sea $\lambda > 0$ y supongamos que $\phi(x) = \sin$

$y \psi(x) = 0$. Entonces, la **fórmula de d'Alembert** da

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x+t}{\lambda} + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x-t}{\lambda} = \operatorname{sen} \frac{x}{\lambda} \cos \frac{t}{\lambda}$$

Definición (Ámbito de dependencia e influencia)

- Fijar un punto (x_1, t_1) en el espacio-tiempo y obtener un dato inicial $u(x_1, t_1)$ y mirar al pasado.
- Fije un punto x_0 en $t = 0$ y pregúntese después de un tiempo $t_1 > 0$, ¿qué puntos de la cuerda están influenciados por la desplazamiento/velocidad en x_0 para $t = 0$?



El siguiente principio está relacionado con el método de **variación de parámetros** en EDO.

Problema de Cauchy global no homogéneo para la ecuación de onda unidimensional

Supongamos ahora que la cuerda infinita está bajo una fuerza externa vertical en la posición x y el tiempo t.

$$(13) \quad \begin{aligned} u &= f(x, t) u && \text{para } x \in \mathbb{R}, t > 0. \\ (x, 0) &= \varphi(x), \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \text{ para } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Teorema

Si $u(x, t)$ es una solución de (13), entonces

$$(14) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + ct) + \varphi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2c} \int_D f(y, \tau) dy d\tau,$$

donde D es el **dominio de dependencia** asociado a (x, t) , es decir, el triángulo en el plano x versus t y los puntos base $(x - ct, 0)$ y $(x + ct, 0)$.

Observación

Si $f \equiv 0$ en (13), entonces recuperamos la fórmula de d'Alembert en (14).

Prueba.

Sea (x_0, t_0) D fijo y arbitrario. Supóngase que (13) tiene solución.

$$f(x, t) = u = \partial_x^2 u - c^2 \partial_t^2 u.$$

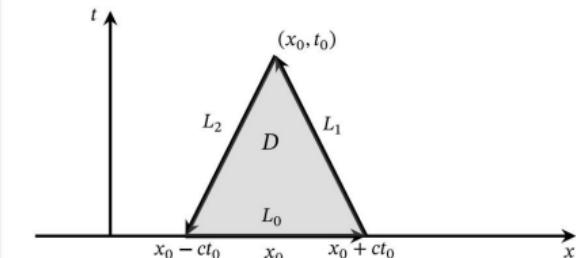
$$\int_D f(x, t) dx dt = \int_D \partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u dx dt.$$

$$\begin{aligned} &= \int_D -c^2 \partial_x u - \partial_t u dx \\ &\quad - \int_D \partial_t u dx \quad \text{D.X.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_D -c^2 \partial_x u - \partial_t u dx. \\ &\quad \partial D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_D -c^2 \partial_x u - \partial_t u dx. \\ &\quad L_0 \quad L_1 \quad L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_D -c^2 \partial_x u - \partial_t u dx. \\ &\quad y_0=0 \quad L_i \end{aligned}$$



Con la ayuda del **teorema de Green** con $P = -\partial_t u$ y $Q = -c^2 \partial_x u$.

Prueba (Cont.)

Calculamos cada integral de línea

$$\begin{aligned}
 & \int_{L_0}^{x_0 + ct_0} -c \frac{\partial x u}{\partial t} dt - \frac{\partial t u}{\partial x} dx = - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0} \psi(x) dx. \\
 & \int_{L_1}^{0} -c \frac{\partial x u}{\partial t} dt - \frac{\partial t u}{\partial x} dx = -c \int_{0}^{2ct_0} \frac{\partial x u}{\partial t} dt = cu(x_0, t_0) - c\varphi(x_0 + t_0). \\
 & \int_{L_2}^{x_0 + ct_0} -c \frac{\partial x u}{\partial t} dt - \frac{\partial t u}{\partial x} dx = -c\varphi(x_0 - ct_0) + cu(x_0, t_0).
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_D^{x_0 + ct_0} f(x, t) dx dt = - \int_{x_0 - ct_0}^{x_0} \psi(x) dx + cu(x_0, t_0) - c\varphi(x_0 + t_0) - c\varphi(x_0 - ct_0) + cu(x_0, t_0).$$

Por lo tanto,

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} [\varphi(x_0 + ct_0) + \varphi(x_0 - ct_0)] + \frac{1}{2c} \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} f(x, t) dx dt.$$

Ejemplo

$$u = xt$$

para $x \in \mathbb{R}, t > 0$.

$$u(x, 0) = \sin(x), \partial_t u(x, 0) = \cos(x) \text{ para } x \in \mathbb{R}.$$

Solución

Entonces, (14) da

$$u(x, t) = [\sin(x + ct) + \sin(x - ct)] + 2c$$

$$\frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} \cos(s) ds + 2c \int_0^a y \tau dy d\tau.$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [2 \sin(x) \cos(ct)] + \frac{1}{2c} [\sin(x + ct) - \sin(x - ct)] +$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{x-ct} y \tau dy d\tau.$$

$$u(x, t) = \sin(x) \cos(ct) + [2 \cos(x) \sin(ct)] + 2c$$

$$\frac{1}{2} \frac{(x + ct - ct)^2 - (x - ct + ct)^2}{2} \Big|_0^a \quad \text{es decir, } dt.$$

$$u(x, t) = \sin(x) \cos(ct) + \cos(x) \sin(ct) + 4$$

$$\frac{1}{2} \int_0^a 4cx(t - \tau) \tau d\tau = \sin(x + ct) + cx \quad 2t - \tau \quad dt.$$

$$u(x, t) = \sin(x + ct) +$$

$$\frac{\cos 3}{6}.$$

Onda mecánica

Recordemos los conceptos físicos de la **ley de conservación de la energía** y la ecuación de movimiento de la onda mecánica, y deduciremos sus fórmulas para la energía cinética y potencial.

El período T y la frecuencia f de la onda están dados por

$$\frac{\omega}{2\pi} = y = \frac{1}{y_0}.$$

$$v = \frac{\omega}{a} = \frac{la}{y_0} = \lambda f.$$

La velocidad de una onda en una cuerda estirada con tensión t y densidad lineal μ es

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}},$$

es decir, depende únicamente de las propiedades de la cuerda y del medio.

El principio de conservación de la energía mecánica

La energía es una cantidad escalar asociada al estado de uno o más cuerpos.

Onda mecánica

Definición (Energía cinética)

Es la energía asociada con el estado de movimiento de un cuerpo.

$$K = \frac{1}{2} \rho v^2$$

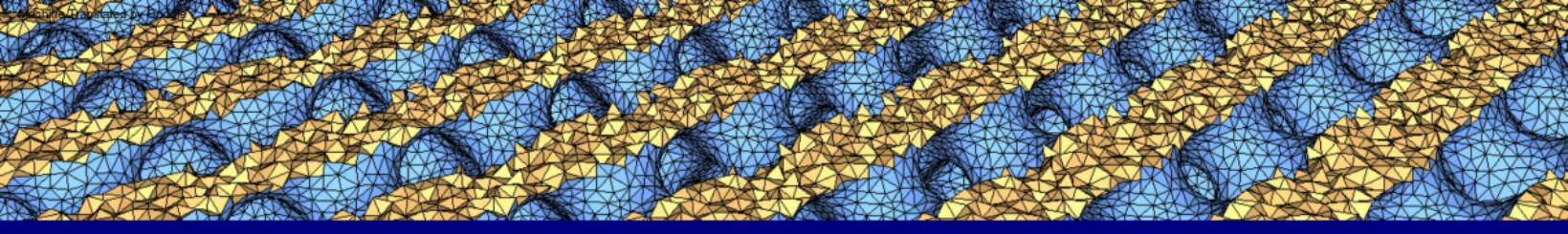
$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \partial_x^2 u(x, t) dx.$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L T \partial_x^2 u(x, t) dx.$$

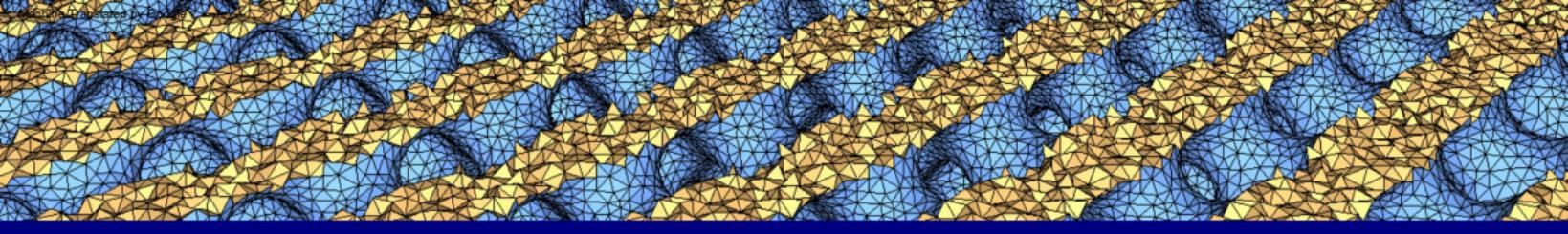
$$E = K + U = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \partial_x^2 u(x, t) + T \partial_x^2 u(x, t) dx.$$

$$\partial_t E = 0.$$

Energía de una cuerda vibrante



Ecuación de onda con dos dimensiones espaciales



Operador de difusión

Teorema

Sea $u_0 \in C_b \cap L^2$.

$$\text{d} \quad x_0 \quad R : \quad u(x, t) = u_0(x_0) \cdot \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)}$$

Ejemplo

Dejar

$$u_0(x) = \exp -\frac{2x}{2}$$

Teorema (No expansividad)

Para cualquier $t > 0$.

$$\begin{aligned}
 E(t) : C_b R^d &\rightarrow C_b R^d \\
 x \mapsto &\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp -\frac{|x-y|^2}{4t} \int_{\text{Camino}} u(y) dy.
 \end{aligned}$$

$$t > 0 : u_1(\cdot, t) - u_2(\cdot, t) \leq t \int_{L \times R^d} |u|^2 dy$$

Definición (Solución débil)

Sea $T \in (0, \infty]$.

$$tu \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \partial_t u \in L^{-2}(0, T; H_0^1(\Omega))$$

Teorema (Principio del máximo)

Sea $u: \bar{C} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\partial_t u(x, t) - u(x, t) \leq 0$$

Ejemplo (IVP para la ecuación de difusión)

$$(15) \quad \begin{aligned} & \partial_t u - \alpha \Delta u = 0 \text{ para } (x, t) \in \Omega \times [0, T]. \\ & u(x, 0) = \varphi(x), \quad \partial_t u(x, 0) = \psi(x) \text{ para } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Transformación de Hopf-Cole para la advección-difusión cuasi-lineal unidimensional

Es una ecuación diferencial parcial fundamental que se produce en mecánica de fluidos, acústica no lineal, dinámica de gases y flujo de tráfico. Consideraremos la

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial t}{\partial t} u + u \frac{\partial x}{\partial t} u = v \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} u && \text{para } a < x < b, t > 0. \\
 (\text{Ecuación de Burger viscosa}) \quad & u(x, 0) = \varphi(x) && \text{para } a < x < b. \\
 & u(a, t) = f(t) \text{ y } u(b, t) = g(t) \text{ para } t > 0.
 \end{aligned}$$

De donde

- u es la velocidad del fluido.
- v es el coeficiente de viscosidad cinética.

La **transformación de Hopf-Cole** proporciona un método interesante para resolver las EDP anteriores y otras EDP de orden superior, que describe $u(x, t)$ mediante una función $w(x, t)$ dada como

$$(16) \quad u(x, t) = -2v \frac{\partial xw}{\partial t}.$$

Calculamos las siguientes derivadas de (16).

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial t}{\partial t} u &= -2v \frac{\partial xw}{\partial t} = -2v \frac{w \frac{\partial t}{\partial t} \partial xw - \partial xw \frac{\partial tw}{\partial t}}{w^2} = 2v \frac{\partial xw \partial tw - w \frac{\partial t}{\partial t} \partial xw}{w^2}. \\
 \frac{\partial x}{\partial t} u &= -2v \frac{\partial xw}{\partial x} = -2v \frac{w \frac{\partial 2xw}{\partial x} - \partial xw}{w^2} = 2v \frac{\frac{\partial xw}{\partial x} - w \frac{\partial 2xw}{\partial x}}{w^2}. \\
 \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} u &= -2v \frac{\partial xw}{\partial x^2} = -2v \frac{-w \frac{\partial 3}{\partial x^2} xw + 3w \frac{\partial xw}{\partial x} \frac{\partial 2}{\partial x} xw - 2w \frac{\partial 2}{\partial x} xw}{w^3}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Ahora, reemplace las ecuaciones (16) y (17) en la ecuación de Viscous Burger.

Lado izquierdo

$$\text{peso } ut = 2v \frac{\text{peso } x \text{ peso } - \text{peso } x}{w^2} .$$

Lado derecho

$$\begin{aligned} vuxx - uux &= 2v \\ 2 = 2v &\quad \frac{-w^2 wxxx + 3wwxwx - 2w^3 w^3}{w^3} \quad \text{cuando } -2v \quad 2v \frac{w^2 - www.xxx}{w^2} \\ w^2 &\quad \frac{-w^2 wxxx + 3wwxwx - 2w^3 + 4v}{w^3} \quad 2 \frac{w^3 - WWXWX}{w^3} \\ &\quad 2 \frac{wwxxx - wxwx - 2v}{w^2} . \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos

Lado izquierdo = Lado derecho

$$\begin{aligned} \frac{wxwt - wwxt}{w^2} &= \frac{2 wwww - wxwx}{w^2} \\ \frac{wxwt - wwxt}{w^2} &= \frac{WWXWX - WWWXX}{w^2} . \end{aligned}$$

Nosotros lo conseguimos

$$\frac{\text{peso}}{\text{el}} = v \quad \frac{wxx}{\text{el}} .$$

Integrando con respecto a x

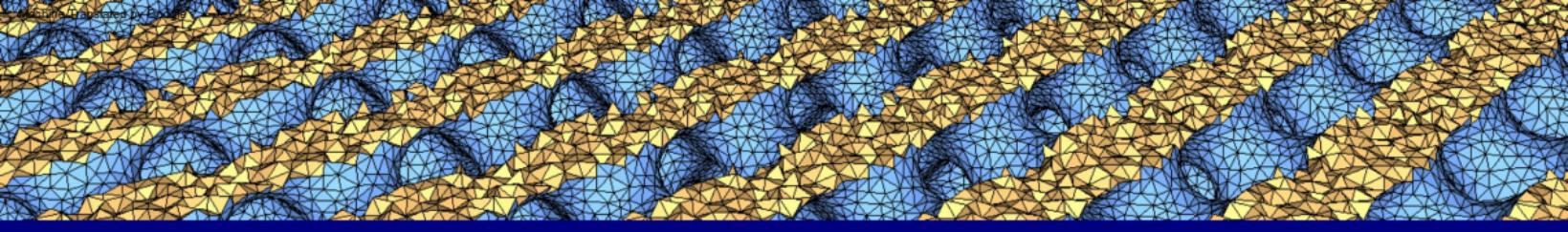
$$\frac{\text{peso}}{\text{el}} = v \quad \frac{wxx}{\text{el}} .$$

(4)

$$\text{peso} = vwxx.$$

Vemos que (la ecuación de Burger Viscoso) se había transformado en la ecuación del calor.

Último cambio: 28 de octubre de 2024 a las 00:15h.



Operador de Laplace



Simeón Denis Poisson
(1781–1840).

Teorema (Principio del máximo)

Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

$$\forall x \in \Omega : Lu(x) \leq 0.$$

- Si $c \equiv 0$, entonces la función u alcanza su máximo en el límite

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

•

$$\forall x \in \Omega : c(x) \geq 0 \Rightarrow \max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) \leq \max_{x \in \partial\Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} tu(x).$$

Ecuación de Laplace en un rectángulo

Nuestro objetivo es encontrar una distribución de calor en equilibrio (estado estable) en un rectángulo $R = [0, a] \times [0, b]$ donde especificamos temperatura (calor) en el límite. Esto significa que tenemos cuatro funciones (de una variable) f_1, f_2, f_3 y f_4 y Deseamos resolver

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= f_1(x), & u(x, b) = f_2(x), 0 \leq x \leq a, \\ (x, 0) &= f_1(y), & u(x, b) = f_2(y), 0 \leq x \leq b, \\ u(x, 0) &= f_2(y), & u(x, 0) = f_2(y), 0 \leq x \leq b, \end{aligned}$$

Lo primero que notamos es que

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, 0 \leq x \leq a, 0 < y < b, \\ tu(0, y) &= 0, 0 \leq x \leq a, 0 < y \leq b \end{aligned}$$

Ecuación de Laplace en un disco

$$\Delta u = 0, \quad x \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}, \\ \partial D.$$

Resolvamos este problema mediante la separación de variables. Pasando a coordenadas polares, reescribiendo el operador laplaciano en términos de r y θ obtenemos

$$2 \Delta u = \partial_{rr} u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} u$$

Por lo tanto, buscamos resolver

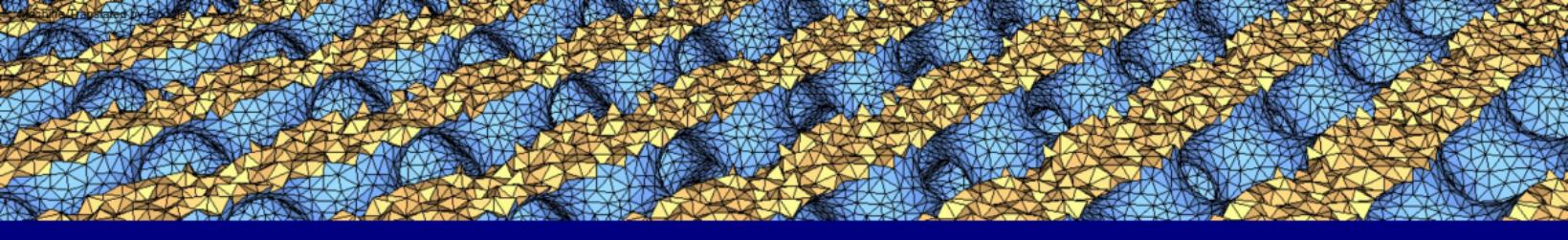
$$2 \Delta u = \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} u = 0, \quad r < a, \\ u = h(\theta), \quad r = a.$$

busque soluciones separadas de la forma $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ para las cuales la EDP requiere que

$$R \Theta'' + \frac{1}{r} R \Theta' + \frac{1}{r^2} R \Theta = 0, \quad r < a$$

Dividiendo por $R\Theta$ y multiplicando por r^2 , Nosotros obtenemos

$$2r \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda.$$



Algoritmo de separación de variables para problemas de valores en la frontera

Algoritmo de separación de variables para problemas de valores en la frontera

Dada una EDP lineal con condiciones de contorno y/o condiciones iniciales, el Algoritmo de Separación de Variables se basa siguiendo los siguientes pasos:

- 1** Buscamos soluciones separadas para la EDP y las condiciones de contorno de la forma

$$u(x, t) = X(x) T(t).$$

- 2** Las condiciones de contorno se trasladan al problema de valor propio que involucra a $X(x)$. Resolvemos este valor de contorno / Problema de valor propio para encontrar una cantidad contable de valores propios λ_n para los cuales existen soluciones no triviales $X_n(x)$.

- 3** Resolvemos el problema de valores propios de $T(t)$ para cada valor propio λ_n hallado en el paso anterior. De este modo llegamos a un número contable de soluciones separadas

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t).$$

a la EDP y las condiciones de contorno.

- 4** Observamos que cualquier combinación lineal finita u_n de estas soluciones separadas también será una solución de la EDP y la condiciones de contorno. Consideraremos atrevidamente una combinación lineal infinita de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) T_n(t).$$

con coeficientes a_n .

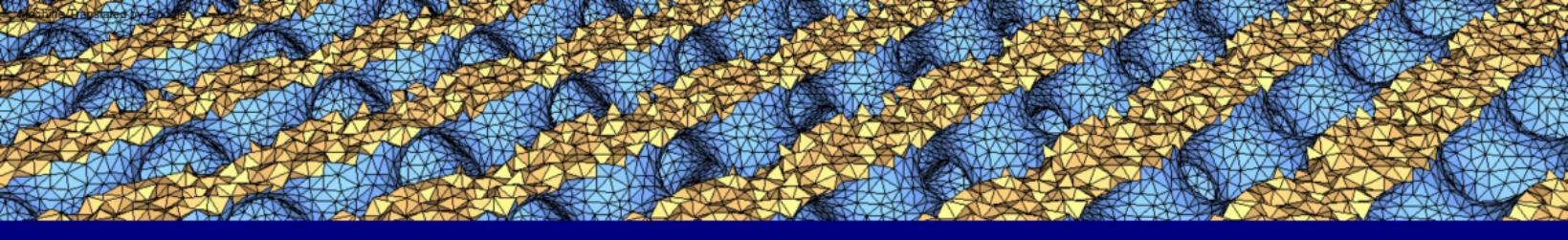
- 5** Observamos que lograr las condiciones iniciales equivale a elegir los coeficientes de manera apropiada. Cuando el valor propio Los problemas son para $\frac{d^2}{dx^2}$ en algún intervalo con una condición de contorno simétrica, llegamos a lo que anteriormente llamamos una serie general de Fourier para los datos. Hallamos estos coeficientes explotando la ortogonalidad y las propiedades de expansión de las funciones propias. Esto significa que, efectivamente, encontramos cada coeficiente mediante la proyección sobre la función propia respectiva.

Observación

Observamos que encontrar estas soluciones separadas se reduce a resolver problemas de valores propios para cada uno de los componentes X y T con el mismo valor propio.

Extensiones y generalizaciones del algoritmo de separación de variables

Definición (funciones de Bessel)



Función de Green

Función de Green

Definición (función de Green)

Si una función está definida en $\bar{\Omega} \setminus \{x_0\}$ se cumple lo siguiente:

- $x_0 \in \bar{\Omega} : Hx_0(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ tal que $x = x_0 : G(x, x_0) = \Phi(x - x_0) + Hx_0(x)$.
- $x \in \partial\Omega : G(x, x_0) = 0$.

Teorema (Simetría de la función de Green)

$$x = x_0 \in \bar{\Omega} : G(x, x_0) = G(x_0, x).$$

Observación

Las soluciones fundamentales y las funciones de Green (con diferentes condiciones de contorno) son en realidad comunes a todas las ecuaciones en derivadas parciales lineales.

Función de Green de la ecuación de Laplace

0.

Función de Green de la ecuación de difusión

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp - \frac{x^2}{4\kappa t} .$$

Función de Green de la ecuación de onda 1D

$$\Phi(x, t) := \frac{1}{2c} H(ct - |x|) = \begin{cases} \frac{1}{2c} & |x| < ct, t > 0 \\ 0 & |x| \geq ct, t > 0 \end{cases}$$

donde H es la función **de Heaviside**.

Lista de referencias

- Libros



Daniel Arrigo. Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales. [Cham: Springer International Publishing, 2023.](#)
ISBN: 978-3-031-22087-6.



Rustum Choksi. Ecuaciones diferenciales parciales: un primer curso. [American Mathematical Society, abril de 2022.](#) isbn: 978-1-4704-6491-2.



Gerald Budge Folland. Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales. [Vol. 102. Princeton University Press, 1995.](#)



Abner J. Salgado y Steven M. Wise. Análisis numérico clásico: un curso completo. [Cambridge University Press, septiembre de 2022.](#) isbn: 978-1-108-94260-7.

Lista de referencias

- Artículos

-  Igor A. Baratta et al. DOLFINx: el entorno de resolución de problemas FEniCS de próxima generación. Preimpresión. 2023. doi: [10.5281/zenodo.10447666](https://doi.org/10.5281/zenodo.10447666).
-  Lisandro D. Dalcin et al. "Computación distribuida paralela usando Python". En: *Advances in Water Resources* 34.9 (2011). Nuevos métodos computacionales y herramientas de software, págs. 1124-1139. issn: 0309-1708. doi: [10.1016/j.advwatres.2011.04.013](https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2011.04.013).
-  Alice Harpole et al. "Pyro: un marco para la exploración y creación de prototipos de hidrodinámica". En: *Journal of Open Software fuente* 4.34 (2019), pág. 1265. doi: [10.21105/joss.01265](https://doi.org/10.21105/joss.01265). URL: <https://doi.org/10.21105/joss.01265>.
-  S. Kutluay, AR Bahadir y A. Özdeş. "Solución numérica de la ecuación unidimensional de Burgers: explícita y métodos de diferencias finitas explícitos exactos". En: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 103.2 (1999), págs. 251–261. issn: 0377-0427. doi: [10.1016/S0377-0427\(98\)00261-1](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(98)00261-1).
-  Kyle T Mandli et al. "Clawpack: creación de un ecosistema de código abierto para resolver ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas". En: *PeerJ Ciencias de la Computación* 2 (2016), e68. doi: [10.7717/peerj-cs.68](https://doi.org/10.7717/peerj-cs.68).
-  Aaron Meurer et al. "SymPy: computación simbólica en Python". En: *PeerJ Computer Science* 3 (enero de 2017), e103. issn: 2376-5992. doi: [10.7717/peerj-cs.103](https://doi.org/10.7717/peerj-cs.103).
-  David Zwicker. "py-pde: Un paquete de Python para resolver ecuaciones diferenciales parciales". En: *Journal of Open Source Software* 5.48 (2020), pág. 2158. doi: [10.21105/joss.02158](https://doi.org/10.21105/joss.02158).

Lista de referencias

- Sitios web

-  Daniel Arrigo. Matemáticas 4315 - Ecuaciones parciales en derivadas. URL: <http://www.danielarrigo.com/matematicas-4315--ecuaciones-parciales-en-derivadas.html> (visitado el 13/09/2024).
-  Carlos Aznarán. El teorema de Stone-Weierstraß. url:
<https://carlosal1015.github.io/stone-weierstrass/main.beamer.pdf> (visitado el 16/01/2023).
-  Michael Eiserman. Höhere Mathematik 3 für Luft- und Raumfahrttechnik und Materialwissenschaft. URL:
<https://pnp.mathematik.uni-stuttgart.de/igt/eiserm/lehre/HM3/HM3-1x1.pdf> (visitado el 16/01/2023).
-  Svetlana Gurevich. Métodos numéricos para sistemas complejos I. URL: https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/en/teaching/courses/numerical_methods_for_complex_systems_i_ws2018-2019.html (visitado el 13/09/2024).
-  Russell Herman. Un primer curso de ecuaciones diferenciales parciales. url:
<https://people.uncw.edu/hermanr/pde1/PDE1notes/index.htm> (visitado el 13/09/2024).
-  Joachim Krieger. Ecuaciones diferenciales ordinarias - 2022. url:
<https://www.epfl.ch/labs/pde/enseignement/ecuaciones-diferentes-ordinaires-2022> (visitado el 27/08/2024).
-  Mikael Mortensen. Método numérico para la alineación diferencial parcial. URL:
<https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT-MEK4270> (visitado el 13/09/2024).