量子场论课程笔记

王逸飞

北京大学物理学院, 北京 100871, 中国

wang_yifei@pku.edu.cn

摘要

马滟青老师量子场论课程笔记. 本课程讨论范围限于相对论性的量子场论. 课程首先介绍量子场论的历史及其引入的必要性, 随后系统介绍相对论性的经典场论, 以求将场论中经典的部分和量子的部分区分开, 场的量子化在了解经典场论之后引入. 有了量子场论的基本语言, 课程将介绍散射矩阵, 微扰论及简单的计算和微扰论的高阶修正. 如果有时间, 我们会讨论一下发散的问题和量子场论的应用. 本课程的主要目的在于讲清楚量子电动力学 (QED).

我们使用 $\hbar = c = 1$ 的自然单位制. 符号体系参考 [1].

Created date: 2021 年 9 月 13 日

Version: 2021 年 9 月 13 日

目录

1 量子场论创立的历史 1
1.1 相对论性量子力学及其困难 1
1.1.1 量子力学 1
1.1.2 Klein-Gordon 方程 2
1.1.3 Dirac 方程 3
1.1.4 基于因果律的考察 4

第一讲, 2021 年 9 月 13 日.

1 量子场论创立的历史

相对论和量子力学是 20 世纪初物理学的两大突破, 这两大突破可以认为是对经典物理的推广: 前者可以描述速度 $v \sim c = 1$ 时的物理学, 在 $v \ll 1$ 时回到经典极限; 后者可以描述角动量 $J \sim \hbar = 1$ 时的物理学, 在 $J \gg 1$ 时回到经典极限. 除了上述描述现象的扩大, 两个理论也带来了观念的改变. 相对论统一了时间和空间; 而量子力学引入了空间和动量的不确定度, 统一了空间和动量. 如果在相对论中, 角动量减小到 1 的量级, 或者在量子力学中, 速度到了 1 的量级, 即得到 $v \sim 1$, $J \sim 1$ 的系统. 如何描述这样的系统? 上述问题的典型例子包括光子 γ $(v \sim 1)$ 和原子 $(J \sim 1)$ 的相互作用. 而即使是速度很小的系统, 例如氢原子, 当精度很高时, $\mathcal{O}\left(v^k\right)$ 的相对论修正可以探测到, k 是一个和实验精度相关的整数, 我们仍然需要结合相对论和量子力学来得到正确的结果.

1.1 相对论性量子力学及其困难

结合相对论和量子力学的第一个尝试是相对论性的量子力学.

1.1.1 量子力学

量子力学中, 我们使用正则量子化:

$$\begin{aligned} E &\to \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}, \\ \boldsymbol{p} &\to -\mathrm{i}\nabla, \end{aligned} \tag{1.1}$$

依据色散关系

$$E=\frac{p^2}{2m} \tag{1.2}$$

得到 Schrödinger 方程

$$\left(\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\nabla^2}{2m}\right)\psi=0. \tag{1.3}$$

左乘波函数的复共轭并与所得式子的复共轭相减, 得到

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*\psi\right)+\nabla\cdot\left(\psi^*\frac{\nabla}{2m}\psi-\psi\frac{\nabla}{2m}\psi^*\right)=0, \tag{1.4}$$

即连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0, \tag{1.5}$$

其中

$$\rho=|\psi|^2,\quad \boldsymbol{J}=-\mathrm{i}\left(\psi^*\frac{\nabla}{2m}\psi-\psi\frac{\nabla}{2m}\psi^*\right). \tag{1.6}$$

对空间积分我们得到概率密度 ρ 在全空间的守恒, 此即概率守恒.

1.1.2 Klein-Gordon 方程

我们用同样的思路去构造相对论性量子力学. 依据色散关系

$$E^2-\boldsymbol{p}^2=m^2, \tag{1.7}$$

得到

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+m^2\right)\psi=0, \tag{1.8}$$

或者其协变形式

$$\left(\partial^2+m^2\right)\psi=0. \tag{1.9}$$

此即 Klein-Gordon (K-G) 方程. 这是无自旋粒子的波动方程. 该方程由 Schrödinger 首先得到, 但只能描述标量粒子, 无法解决氢原子的问题, 因此被暂时抛弃. 这个方程后来被重新导出为标量场的场方程.

验证 K-G 方程的概率守恒. 左乘波函数的复共轭, 并于所得式子的复共轭相减, 得到

$$\psi^*\partial^2\psi-\psi\partial^2\psi^*=\partial_t\left(\psi^*\partial_t\psi-\psi\partial_t\psi^*\right)-\nabla\cdot\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)=0. \tag{1.10}$$

我们仍将中间部分 ∂_t 作用的部分看作概率密度, 讲 ∇ 作用的部分看作流, 我们发现 ρ 并非正定的. 概率守恒无法实现.

另外, K-G 方程存在负能解 $E=-\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}$, 系统存在强大的向负能态跃迁的趋势, 系统无法稳定.

1.1.3 Dirac 方程

考察 K-G 方程中概率密度非正定出现的原因, 我们希望找到只包含时间一阶导数的方程. 考虑到相对论协变性的要求, 空间的导数也应为一阶. 协变形式的色散关系为

$$p^2 = m^2. \tag{1.11}$$

量子化给出 $p^2 = -\partial^2$. 通过定义 4×4 的矩阵 γ^μ, $\mu = 1, 2, 3, 4$ 满足

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \tag{1.12}$$

可以定义 $\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$, $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$, 于是有

$$\not{p}^2 = \gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu = p^2. \tag{1.13}$$

进而

$$-\partial^2 = \left(\mathrm{i}\not{\partial}\right)^2. \tag{1.14}$$

色散关系写为

$$\mathrm{i}\not{\partial} = m. \tag{1.15}$$

于是得到 Dirac 方程

$$\left(\mathrm{i}\not{\partial} - m\right)\psi = 0. \tag{1.16}$$

由此得到连续性方程

$$\partial_\mu \left(\psi^\dagger \gamma^\mu \psi\right) = 0, \tag{1.17}$$

和概率 $\int \mathrm{d}^3x\, \psi^\dagger \gamma^0 \psi$ 守恒. 注意这里 ψ 是一个列矩阵因而我们取共轭转置而非简单的共轭. 注意此时 ψ 为一个四分量的物理量, 称为旋量. 首先, 对 Dirac 方程作非相对论近似, 可以得出 Pauli 矩阵, 对应自旋 1/2 粒子. Dirac 方程仍然有负能解, 但由于所描述的粒子为费米子, Dirac 假设负能级已经被粒子填满, 称为 Dirac 海. 如果 Dirac 电子海中有一个电子跃迁到了正能级, 海中体现出一个带正电的粒子, 即正电子, 电子的反粒子. 旋量的四个自由度恰好对应自旋 $\pm 1/2$ 和正反粒子.

然而, 即使 Dirac 方程很好地描述了自旋 1/2 的粒子, 它无法推广到玻色子系统. 另外, Dirac 方程的出发点是构造单粒子的波动方程, 但引入 Dirac 海之后, 它实际上在描述一个多粒子的系统, 这在逻辑上是矛盾的.

1.1.4 基于因果律的考察

在相对论中, 类空间隔的两个事件没有因果关系. 我们检查量子理论中因果律是否满足. 考察物理量

$$K\left(t_1, \boldsymbol{x}_1; t_2, \boldsymbol{x}_2\right) = \langle \boldsymbol{x}_1 | \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t_1-t_2)} \, | \boldsymbol{x}_2 \rangle \, , \tag{1.18}$$

对于类空的两个点 $(t_1, \boldsymbol{x}_1)$, $(t_2, \boldsymbol{x}_2)$, 这个值应该为零. 对于非相对论的理论,

$$\begin{aligned} K\left(t_1, \boldsymbol{x}_1; t_2, \boldsymbol{x}_2\right) &= \int \frac{\mathrm{d}p^3}{(2\pi)^2} \, \langle \boldsymbol{x}_1 | \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \, | \boldsymbol{p} \rangle \, \langle \boldsymbol{p} | \boldsymbol{x}_2 \rangle \\ &= \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{i} t}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\boldsymbol{x}^2/2t}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

这个值始终不为零, 因果律不满足, 这和我们的期待是一致的. 对于相对论性的理论,

$$K\left(t_1, \boldsymbol{x}_1; t_2, \boldsymbol{x}_2\right) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\sqrt{\boldsymbol{p}^2+m^2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{1.20}$$

其结果为 Bessel 函数. 在 $t \ll 1/m \ll |\boldsymbol{x}|$ 的条件下展开, K 仍然不为 0, 因果律仍然不能得到满足. 注意我们这里的推导并没有依赖任何特殊的理论, 而是依据一般的单粒子色散关系, 因此不能满足因果律也是单粒子相对论性量子力学的必然缺陷.

另外我们知道, 在相对论中, 能量的变化和粒子 (正反粒子对) 的产生湮灭相关联, 于是单粒子的概率必然不会守恒. 但即使是当能量很低时, 例如低于 $m_e \sim 0.5\,\mathrm{MeV}$, 由于不确定性原理 $\Delta E \Delta t \geqslant 1$, 能量的不确定性仍然可以产生和湮灭粒子 (虚粒子). 因此, 只要将相对论和量子力学相关联, 多粒子的本质就是不可避免的.

场论是用来描述无穷多自由度体系的语言. 因此, 用场论的语言结合相对论和量子力学是自然的.

第一讲结束.

参考文献

[1] Michael Peskin. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, New York, 1995.