4. 特征值与特征向量

李辰剑

回顾：对线性映射 $A: V \to V$.

若 $\exists\, v \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $A(v) = \lambda v$

则 λ 称为 A 的特征值，v 称为 A（关于特征值 λ）的特征向量.

例. 考虑函数空间 $V = \mathrm{span}\{e^x \sin x,\ e^x \cos x\}$，

（或 $V_{\lambda,\omega} = \mathrm{span}\{e^{\lambda x}\sin \omega x,\ e^{\lambda x}\cos \omega x\}$）.

以及其上的线性映射 $\mathcal{D}$, $\mathcal{I}$.（求导，积分）.

我们有：
$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x}\sin\omega x = \lambda e^{\lambda x}\sin\omega x + \omega e^{\lambda x}\cos\omega x$$
$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x}\cos\omega x = \lambda e^{\lambda x}\cos\omega x - \omega e^{\lambda x}\sin\omega x.$$

从而，$\mathcal{D}$ 的矩阵表示：
$$D(\lambda,\omega) = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix}$$

或
$$D = D(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

回顾高数题：$\int e^x \cos x\, dx = ?$ $\quad \frac{d^n}{dx^n} e^x \sin x = ?$

事实上，我们可以找到 $\lambda_{1,2} = \lambda \pm i\omega$

$$v_{1,2} = e^{\lambda x}\sin\omega x \mp i e^{\lambda x}\cos\omega x.$$

从而：
$$\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\sin\omega x + i e^{\lambda x}\cos\omega x\right) = (\lambda - i\omega)\left(e^{\lambda x}\sin\omega x + i e^{\lambda x}\cos\omega x\right).$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda x}\sin\omega x - i e^{\lambda x}\cos\omega x\right) = (\lambda + i\omega)\left(e^{\lambda x}\sin\omega x - i e^{\lambda x}\cos\omega x\right);$$

核！"凑"出了 v, s.t. $\frac{d}{dx}v = \lambda_{1,2}v$.

问题变 Trivial 了，大大简化.

推论：
$$\int e^{\lambda x}\sin\omega x + i e^{\lambda x}\cos\omega x \, dx = \frac{1}{\lambda - i\omega}\left(e^{\lambda x}\sin\omega x + i e^{\lambda x}\cos\omega x\right) + C$$
$$= \frac{\lambda + i\omega}{\lambda^2 + \omega^2}(\sim) + C.$$

$$\int e^{\lambda x}\sin\omega x - i e^{\lambda x}\sin\omega x \, dx = \frac{1}{\lambda + i\omega}\left(e^{\lambda x}\sin\omega x - i e^{\lambda x}\cos\omega x\right) + C.$$

推论：$\cancel{\frac{d^n}{dx^n}}$ 若 $f = a_1v_1 + a_2v_2$，则
$$\frac{d^n}{dx^n}(f) = a_1\lambda_1^n v_1 + a_2\lambda_2^n v_2.$$

推论. 有线性递推数列 $\begin{cases} a_{n+1} = \lambda_{11}a_n + \lambda_{12}b_n \\ b_{n+1} = \lambda_{21}a_n + \lambda_{22}b_n \end{cases}$.

则有特征值 λ_1, λ_2，特征向量 $v_1 = \begin{pmatrix} a_{01} \\ b_{01} \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} a_{02} \\ b_{02} \end{pmatrix}$

北京大學

若 $\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$ 可分解为 $\xi v_1+\eta v_2$.

则 $\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}=\xi\lambda_1^{n-1}v_1+\eta\lambda_2^{n-1}v_2$.

高中数列题!

相当于凑出了 $v_n^{(1)}, v_n^{(2)}$.

其中 $\begin{cases}v_{n+1}^{(1)}=\lambda_1 v_n^{(1)}\\ v_{n+1}^{(2)}=\lambda_2 v_n^{(2)}\end{cases}$ 退耦合了.

推论. 线性变换 $\mathscr{A}$ 此时的矩阵化为对角阵 $\begin{pmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{pmatrix}$.

PEKING UNIVERSITY 1898
北京大學

以斐波那契数列 $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$，$f_1=f_2=1$.

(需略作推广).

我们可以求出通项 $$f_n=\underbrace{\frac{1}{\sqrt5}}_{\boxed{\text{系数 }\xi,\eta.\ \text{以及 } v_1, v_2.}}\Big[\big(\underbrace{\tfrac{1+\sqrt5}{2}}_{\lambda_1}\big)^n-\big(\underbrace{\tfrac{1-\sqrt5}{2}}_{\lambda_2}\big)^n\Big].$$

因此，$\mathrm{span}\{\underbrace{v}_{\text{特征vector}}\}$ 又叫"不变子空间"——在其上的线性映射变得极为简单.

其它例子：一般情况下，$\underbrace{\vec{L}}_{\text{角动量}}=\underbrace{\vec{I}}_{\text{转动惯量张量}}\vec{\omega}$

$$\vec{I}=\begin{pmatrix} I_{\xi\xi} & I_{\xi\eta} & I_{\xi\zeta} \\ I_{\eta\xi} & I_{\eta\eta} & I_{\eta\zeta} \\ I_{\zeta\xi} & I_{\zeta\eta} & I_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}$$

但我们总能找到三个方向 x,y,z

使得在 $Oxyz$ 坐标下 $I=\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$.

i.e. $$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

$\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ 为特征向量，I_x,I_y,I_z 为特征值.

x,y,z 方向称为"主轴".

北京大学

因此，特征值与不变子空间反映了这样一种思想：
化繁为简，找到线性变换的"命根子"所在，
不受"坐标系"的影响，找到线性变换的本质所在.

其它例子：马尔可夫链中的平稳分布

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2) \text{ 的特征值为 } e^{i\theta}$$

广义的"拉伸"&"不变"：效果为旋转.