1. 线性空间与基

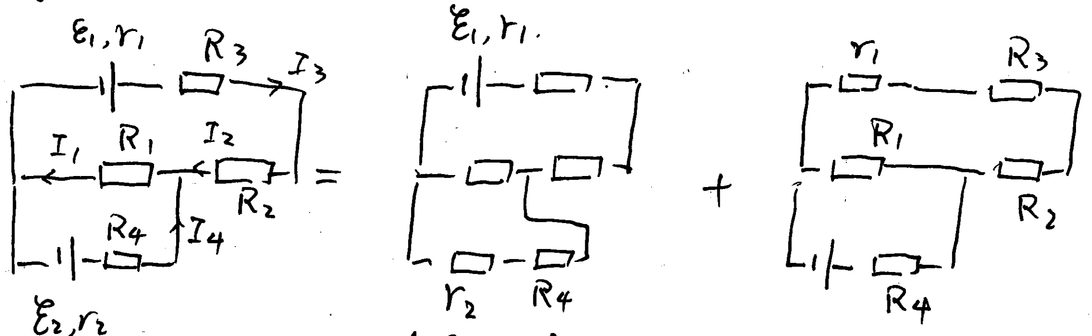
李辰剑.

例1.(独立源叠加定理). 设一个电路中有n个元件(电源也是元件),每个元件上的电压、电流记为U_i, I_i。把所有U_i, I_i写成一个向量

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \\ \vdots \\ U_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

,则所有$\mathcal{X}$构成的电路状态空间V是线性空间.

a. 应用:



$(\varepsilon_{r2}=0)$.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ i_1 \\ \varepsilon_2 \\ i_2 \\ \hdashline U_1 \\ I_1 \\ \vdots \\ U_4 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ i_1 \\ 0 \\ i_2 \\ \hdashline U_{11} \\ I_{11} \\ \vdots \\ U_{41} \\ I_{41} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ i_1 \\ \varepsilon_2 \\ i_2 \\ \hdashline U_{12} \\ I_{12} \\ \vdots \\ U_{42} \\ I_{42} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2.$$

简化求解！（线性方程组降阶）

⇒ 独立源叠加定理.

b、相当于选择 $\mathscr{F}_1\Big|_{\substack{\varepsilon_1=1V\\ \varepsilon_2=0}}$，$\mathscr{F}_2\Big|_{\substack{\varepsilon_2=1V\\ \varepsilon_1=0}}$ 作为基.

c. 看似 V 和 $\mathbb{R}^{2\times6}$ ($\mathbb{R}^{2n}$) 很像，但不难发现 ~~V 只与 $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$~~ 在元件参数给定时，电路状态只与源 ε_1、ε_2 有关，故可证 $V \triangleq \mathbb{R}^2$. 事实上，$V$ 为 $\mathbb{R}^{2\times6}$ ($\mathbb{R}^{2n}$) 的子空间.

d. 直流 ⟹ 交流.

交流电路中，

$$I \equiv I(t) \Rightarrow I(t) = I_0\cos(\omega t+\varphi)$$

$$U \equiv U(t) \Rightarrow U(t) = U_0\cos(\omega t+\varphi).$$

元件：$R \Rightarrow R. L. C.$

复数表示：$\tilde{I}(t) = \tilde{I}_0 e^{i\omega t}$　$\tilde{U}(t) = \tilde{U}_0 e^{i\omega t}$

（复振幅，包括初相信息）

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{I}_0}$$

电路状态矢量由 $\mathbb{R}^{2n}$ 的子空间变为 $\mathbb{C}^{2n}$ 的子空间.

例2、常微分线性微分方程的解构成的空间是线性空间.

[以二阶为例]　$y = y(x)$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0.$$

若 ~~有~~ $y_1(x)$、$y_2(x)$ 都是解，则对 $y =$ ~~y_1+y_2~~ $k_1y_1 + k_2y_2$：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=\frac{d^2}{dx^2}(k_1y_1+k_2y_2)+\frac{d}{dx}(k_1y_1+k_2y_2)\cdot p(x)$$

$$+\,q(x)(ky_1+ky_2)$$

$$=k_1\frac{d^2}{dx^2}y_1+k_1p\frac{d}{dx}y_1+k_1q(x)y_1$$

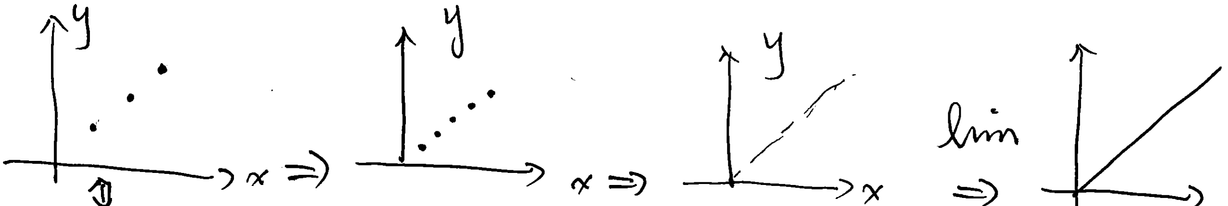
$$+\,k_2\frac{d^2}{dx^2}y_2+k_2p(x)\frac{d}{dx}y_2+k_2q(x)y_2=k_1\cdot 0+k_2\cdot 0=0$$

∴ y 也是原方程的解.

尝试一下：已知n阶线性常微分方程解集是n维的，试给出方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 的所有解.

例3. 函数空间 K^∞ $(K=\mathbb{R},\mathbb{C},\cdots)$.

a. 为什么函数空间可以写成 K^∞?



$$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}0.5\\1\\1.5\\2\\2.5\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^5\qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}f(0)\\f(0.01)\\f(0.02)\\\vdots\\f(1)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{101}\qquad \vec{v}=\begin{pmatrix}f\\\vdots\end{pmatrix}\begin{matrix}0\\\downarrow\\+\infty\end{matrix}\in\mathbb{R}^\infty$$

开挂般的操作：函数空间选什么基?

b. 以幂函数 $\{x^n\}$ $(n=0,1,2,\cdots,\infty)$ 为基.

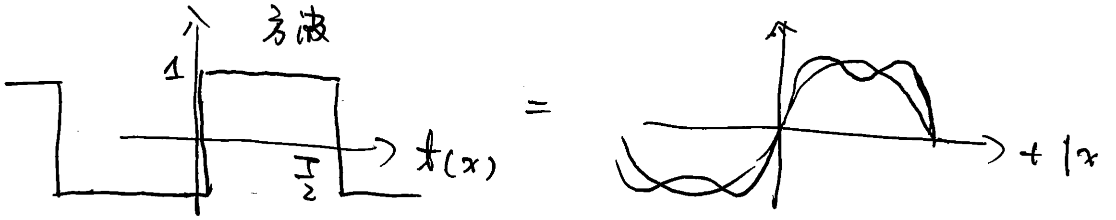
$e^x = 1\cdot e_0 + 1\cdot e_1 + \frac{1}{2!}e_2 + \cdots + \frac{1}{n!}e_n$

$\sin x = 1\cdot e_1 - \frac{1}{3!}e_3 + \frac{1}{5!}e_5 - \cdots\cdots$

$\Rightarrow$ 泰勒展开！　（严格来说，并不完备）.

c. 在 $\mathbb{R}^\infty$ 的子空间 $\Omega_T = \{$以T为周期的函数$\}$中

以 $\{\cos n\omega x, \sin n\omega x, 1\}$ $(n=1,\cdots,\infty)$ $(\omega=\frac{2\pi}{T})$ 为基.



$f(x) = \sin\omega x + \frac{1}{3}\sin 3\omega x + \frac{1}{5}\sin 5\omega x + \cdots$

$\Rightarrow$ 傅里叶变换！

一般情况：$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

（$T=2\pi$，其余情形作变换即可）.

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{cases}$$

为什么？

提示：正交基与内积.

d. 其余基展开：洛朗级数. 拉普拉斯变换……