2. 神奇的内积，与更多代数结构.

回顾: 函数空间 $\mathbb{R}^\infty$ (或 $\mathbb{C}^\infty$).

$v=(x_1,x_2,x_3)^T\in\mathbb{R}^3$

$f=(f(0),f(0.00\cdots01)\cdots,f(0.1),\cdots f(1),\cdots,f(\infty))^T\in\mathbb{R}^\infty$

以 $\{1,\cos n\omega x,\sin n\omega x\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 作为基

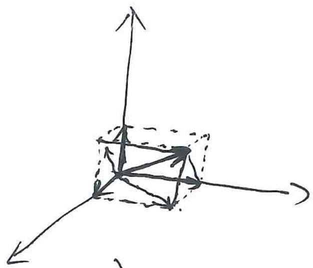
在 $\mathbb{R}^\infty$ 的子空间 Ω_T 中的展开为傅里叶展开:

即 $$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)$$

其中 $$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos n\omega x\,d(\omega x). \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin n\omega x\,d(\omega x). \end{cases}$$

为什么？

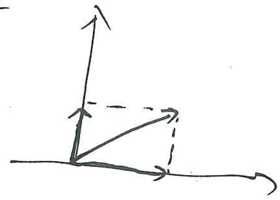
E^3中, $\vec{v}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$.



如何求出 $\vec{v}$ 的 x 分量？

只需 $\vec{v}\cdot\hat{i}=(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot\hat{i}=x$.

之所以能这么做，是因为 $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$ 是一组标准正交基: $$\begin{cases}\hat{i}\cdot\hat{i}=1,\\ \hat{i}\cdot\hat{j}=0\\ \hat{i}\cdot\hat{k}=0.\end{cases}$$



因此，$\vec{v}$和$\vec{i}$做内积，可以直接取出$\vec{v}$中的x分量/$\vec{i}$前系数，而同时屏蔽掉$\vec{j}$、$\vec{k}$项.

前提：$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$正交！

在Ω_T中定义内积：$\langle f(x), g(x)\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,g(x)\,d(\omega x)$.

Remark 1. 容易验证，满足内积的定义.

2. 系数$\frac{1}{\pi}$其实不重要，之所以选$\frac{1}{\pi}$？见下.

3. 其实和$\mathbb{R}^n$上定义的内积 $u\cdot v=\sum_{i}^{n} u_i v_i$ 是一样的.

可以验证：

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \sin n\omega x\, d(\omega x)=0\\
&\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot \cos n\omega x\, d(\omega x)=0\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\omega x\cdot \cos n\omega x\, d(\omega x)=0
\end{aligned}\right\}\quad m,n=1,2,\cdots$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \sin m\omega x\cdot \sin n\omega x\, d(\omega x)=0\\
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\omega x\cdot \cos n\omega x\, d(\omega x)=0
\end{aligned}\right\}\quad m,n=1,2,\cdots \text{ 且 } m\neq n.$$

以及 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 n\omega x\, d(\omega x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 n\omega x\, d(\omega x)=1,\ n\in N^*$

加上 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx=2$

可知：$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}^{*}, \cos n\omega x, \sin n\omega x\right\}$ $(n=1,2,\cdots)$ 是Ω_T上的标准正交函数系*

至于为什么能成为基？(即完备性)超出了今天讨论的范畴.

(参考：高数(下) P323~P324).

于是,我们直接有: $a_n = \langle f(x), \cos n\omega x \rangle$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos n\omega x \, d(\omega x).$$

$(n=1,2,\cdots)$.

$$b_n = \langle g(x), \sin n\omega x \rangle$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin n\omega x \, d(\omega x).$$

自己试一试: 把 $\{1, x, x^2, \cdots x^n \cdots\}$ 改造成标准正交基,

试试对 $[0,1]$ 上的实函数也做这样的操作

[如何定义内积?] [施密特正交化] 格拉姆-施密特过程]

更多代数结构.

向量空间 (vector space): $(V, F, +, \times)$.

1. 交换律 $\forall u, v \in V$, $u+v = v+u$.
2. 结合律 I $\forall u, v, w \in V$, $(u+v)+w = u+(v+w)$.
3. 结合律 II. $\forall a, b \in F$, $\forall v \in V$, $(ab)v = a(bv)$.
4. 加法单位元. $\exists\, 0 \in V$, $\forall v \in V$, $v+0 = v$
5. 乘法单位元 $(\exists\, 1 \in F)$ $\forall v \in V$, $1v = v$
6. 加法逆元 $\forall v \in V$, $\exists\, w$, $v+w = 0$.
7. 分配律 $\forall a, b \in F$, $\forall u, v \in V$, $a(u+v) = au+av$

   $(a+b)u = au+bu$.

北京大学

群 (Group) $(G, \cdot)$:

若加交换律，为交换群

1. 结合律 $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
2. 单位元：$\exists e\in G$, s.t. $a\cdot e = e\cdot a = a$
3. 逆元 $\forall a\in G, \exists a^{-1}\in G$, s.t. $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = e$
4. 封闭性：$\forall a,b\in G$, $a\cdot b\in G$.

例. $(\mathbb{Z}, +)$. $SO(n)$ - 表示 n 维空间中旋转与反射变换.

$\mathbb{C}$（$\{A \mid A$ 为 $n\times n$ 阶实正交阵$\}$，矩阵乘法）

$(\mathbb{R}/\{0\}, \cdot)$，$D_n$（二面体群）.（$L(V,V)$，映射复合）

群理解为可复合的一组变换（往往）.

$A\in SO(2), A = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$

SU(3)：杨-米尔斯场论

一些几何直观和
例证

复数

环 (Ring) $(R, +, \times)$.

~~环. 其 (R,+)~~ 1. $(R,+)$ 有 {结合律，交换律，单位元，逆元，封闭性

2. $(R,\cdot)$ 有 {结合律，单位元，封闭性.

3. $+, \times$ 间有左右分配律

例. 多项式环. 为何是环不是域？因为 $p(x) = \sum a_n x^n$

的逆元 $\frac{1}{p(x)}$ 可能是分式而不是多项式

$\times$ 无逆元.

北京大學

域(Field) $(F,+,\times)$:

1&2. $(F,+)$ 和 $(F,\times)$ 都满足 $\left\{\begin{array}{l}\text{结合律 交换律}\\ \text{单位元 逆元}\\ \text{封闭性.}\end{array}\right.$

3. $+,\times$ 满足分配律 $a(b+c)=ab+ac$

例. $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 都是域. 布尔代数中 $B=\{0,1\}$, $(B,\underset{\text{逻辑或}}{+},\underset{\text{与}}{\cdot})$ 也是域

有理数域 $\mathbb{Q}$.

* 实数域 $\mathbb{R}$:

1,2,3 同域

4. 具有完备性.(详细见旭峰高数).

Remark / Application. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}=$ ______ (把 $\mathbb{C}$ 作为域 $\mathbb{R}$ 上线性空间)

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}=$ ______ ($\mathbb{C}$~ $\mathbb{C}$ ~线性空间)