线性代数

物理学院学术辅导

王逸飞

北京大学物理学院

December 1, 2019

Click https://github.com/Florestan-Eusebius/Linear-Algebra to get the newest version.

Section 1

一些不严谨且没用的闲话

线性关系

问题

我们见过的最简单数量关系是什么？
我们见过的最简单的那些几何对象是什么？
它们有怎样的性质和联系？

问题

面对不那么简单的关系和对象，我们怎样处理？

线性关系

任务

- 研究线性关系.
- 研究更丰富的关系.

手段

- 代数方法 $\to$ 线性代数.
- 分析方法 $\to$ 微积分.

线性关系

任务

- 研究线性关系.
- 研究更丰富的关系.

手段

- 代数方法 $\to$ 线性代数.
- 分析方法 $\to$ 微积分.

问题

什么是关系？
什么是代数？

请站稳扶好，注意安全

好了，废话说完了，让我们进入抽象的世界.

Section 2

线性空间

Subsection 1

准备概念

复数

定义 (复数)

1. 复数, 复数集 $\mathbb{C}$
2. 加法和乘法

性质 (复数)

1. 加法交换律
2. 加法结合律
3. 单位元 *(加法单位元 0 和乘法单位元 1)*
4. 加法逆元
5. 乘法逆元
6. 分配律

$\mathbb{F}^n$

定义 (list)

$(x_1, \cdots, x_n)$.

定义 ($\mathbb{F}^n$)

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{F}\ \forall j = 1, \cdots, n\}.$$

Remark

$\mathbb{F}$ 是所谓"数域", 指 $\mathbb{C}$ 或 $\mathbb{R}$. 我们暂不讨论其他域.

$\mathbb{F}^n$ 上的运算

定义（加法）

$$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n).$$

性质（加法交换律）

定义（0）

定义（加法逆元）

定义（数乘）

域 (补充)

定义 (环)

定义了加法和乘法运算的非空集合被称为环当且仅当这两个运算满足

1. 加法结合律
2. 加法交换律
3. 存在零元
4. 存在加法逆元 (负元)
5. 乘法结合律
6. 乘法对加法的左分配律和右分配律

定义 (域)

有单位元且非零元可逆的交换环.

Subsection 2

线性空间的概念

定义 (加法和数乘)

定义 (线性空间)

定义了加法和数乘的集合称为线性空间如果其运算满足

1. 加法交换律
2. 加法和乘法的结合律
3. 加法零元存在
4. 加法逆元存在
5. 域的单位元是数乘单位元
6. 左分配律和右分配律

向量　线性空间举例

定义 (向量)

线性空间中的元素称为向量.

例 (什么是线性空间)

- $\mathbb{F}^n$ 对于我们之前定义的加法和数乘.
- $\mathbb{R}^3$ 对于我们高中学过的矢量的加法和数乘 (实际上是上一条的特例，但这是最直观的例子，所以单独列出).[1]
- 定义某个区间某个区间上的可导函数.
- 定义在某个区间上的黎曼可积函数.

[1] 当我们说一个集合是线性空间时，我们必须指出加法和乘法运算分别是什么，但由于我实在码不动字了，在后面几个例子中，对于平凡的加法和乘法不再做特殊说明.

线性空间举例

例 (什么是线性空间.cont)

- 域上的多项式.
- 齐次线性方程组的解.
- 线性微分方程的解.
- 量子力学中的态空间.

例 (什么不是线性空间)

- 起点在原点终点在一球面上的矢量，对于矢量的加法和数乘.
- 非齐次方程的解.

研究线性空间的几个途径

- 从元素的角度
- 从子集的角度
- 从集合划分的角度
- 从线性空间之间关系的角度

- 基与维数
- 子空间与子空间的直和
- 等价类，商集和商空间
- 众多线性空间之相同的结构构相同的结构

Subsection 3

线性空间的基与维数

向量组

定义

向量组　线性组合　线性表出　有限维线性空间　线性无关 *(*线性独立*)*　线性相关　极大线性无关组

性质

向量组 A 线性表出线性无关的 B 则 A 中向量个数大于等于 B.
向量组的不同极大线性无关组所含向量个数相等.

Remark

我们目前仅讨论有限维线性空间.[2]

---

[2]遗憾的是，物理中我们要和大量的无穷维线性空间打交道．大部分学物理的学生通过将这些概念自然推广来解决这一问题．虽然这种推广有时在数学上需要一些更艰深的技巧，幸运的是，结果常常是对的．

基与维数

定义

基　维数

性质

展开的唯一性.
基的存在性.[3]
基中所含向量个数个数的唯一性.(由此可以定义维数)
维数与线性空间中线性无关向量组的规模.($n \leq \dim V$)

Remark

从展开的唯一性看"线性独立"的意义.

[3]注意我们已经强调我们仅讨论有限维线性空间. 这一定理对无穷维线性空间也是成立的，其证明需要用到佐恩引理或类似的集合论中的基本定理 (公理).

定理 (基变换与坐标变换)

设 A 是 $n \times n$ 的可逆矩阵，$(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n)$ 和 $(\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n)$ 是两组基且满足

$$(\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) A, \tag{1}$$

矢量 $\mathbf{x} = (\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n) x = (\mathbf{e}'_1, \cdots, \mathbf{e}'_n) x'$，其中 x, x' 为坐标，是列向量，则有坐标变换[4]

$$x = Ax'. \tag{2}$$

[4]这两种变换形式，一种称为" 协变"，一种称为" 逆变"．结合对偶空间中的变换，我们将会发现这两种变换形式有很深刻的内容．

例题

例

证明 $\mathbb{R}$ 上的 n 级对称矩阵构成线性空间，并求出它的维数.

例

在定义域为实数集 $\mathbb{R}$ 的所有实值函数形成的线性空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 中

1. 题干的表述有什么问题？
2. $\sin x, \cos x, \mathrm{e}^x \sin x$ 是否线性无关？
3. 对其中 n 个 $n-1$ 阶连续可导函数 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ 定义朗斯基行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

证明若存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $W(x_0) \neq 0$，则这些函数线性无关.

Subsection 4

子空间与子空间的直和

子空间　子空间的和

定义

子空间　子空间的和

性质

- 加法和数乘封闭的子集为子空间.
- 两个子空间的交仍是子空间.
- 两个子空间的和仍是子空间，维数为 $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \bigcap V_2)$.

直和

定义

子空间的直和.(分解的唯一性)　补空间

性质 (直和的等价表述)

1. $V_1 + V_2$ 是直和.
2. $V_1 + V_2$ 中零向量的表示唯一.
3. $V_1 \bigcap V_2 = 0$.
4. $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$.
5. V_1 的一个基与 V_2 的一个基合起来是 $V_1 + V_2$ 的一个基.

性质

补空间存在.[5]

[5] 有限维的证明是容易的.

直和

性质 (多个子空间直和的等价表述)

1. $V_1 + \cdots + V_s$ 是直和.
2. $V_1 + \cdots + V_s$ 中零向量的表示唯一.
3. $V_i \bigcap \left(\sum_{j\neq i} V_j\right) = 0.$
4. $\dim(V_1 + \cdots + V_s) = \dim V_1 + \cdots + \dim V_s.$
5. V_1 的一个基，V_2 的一个基，$\cdots$，V_s 的一个基合起来是 $V_1 + \cdots + V_s$ 的一个基.

Subsection 5

线性空间的同构

线性空间的同构

定义

同构映射 (保持加法和数乘的双射） 同构

性质

同构保持了以下关系:

- 零元
- 负元
- 线性表出和线性相关性
- 基
- 维数
- 子空间

有限维线性空间的结构

定理

$\mathbb{F}$ 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们的维数相等.

Remark

$\mathbb{F}$ 上所有 n 维线性空间都与 $\mathbb{F}^n$ 同构.

例题

例

设集合 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$，求 X 到 $\mathbb{F}$ 上所有映射构成的 $\mathbb{F}$ 上线性空间 $\mathbb{F}^X$ 的一个基和维数．并写出 $f \in \mathbb{F}^X$ 在这组基下的坐标．

Subsection 6

商空间

等价关系　等价类　商集

定义 (等价关系 $\sim$)

如果一个非空集合 S 的一个二元关系 R 满足

1. 反身性: $aRa, \forall a \in S$
2. 对称性: $aRb \Rightarrow bRa$
3. 传递性: $aRb, bRc \Rightarrow aRc$

则称 R 是一个等价关系.[6]

定义 (划分　等价类)

定义 (商集 $S/\sim$)

等价类作元素构成的集合.

[6] 等价关系通常记作 $\sim$，所以我在标题中写这个符号并不是为了卖萌.

商空间

定义

设 U 是 V 的子空间，定义 V 上的等价关系 $\alpha \sim \beta : \alpha - \beta \in U$，我们将 α 所在的等价类记为 $\alpha + U$，称其为 W 的一个陪集．定义陪集的加法和数乘：

- $(\alpha + W) + (\beta + W) := (\alpha + \beta) + W$
- $k(\alpha + W) := k\alpha + W$

定义（商空间）

上面定义的等价关系定出线性空间 V 的一个商集，这个商集对于上面定义的加法和数乘构成线性空间，称为商空间．记作 V/U．

商空间

Remark

商空间 V/U 中的向量 (元素) 是 V 的子集 (等价类), 而不是 V 中的向量.

性质

商空间的维数.
商空间与补空间的同构.

例

非齐次线性方程组的解集是商空间的元素.

例题

证明上一页写出的性质.

Section 3

建议

一些建议

线性空间的梳理已经结束了，很显然我们的时间不够把所有内容这样详细地梳理一遍，但我希望我们之前做的事情可以给大家一些提示：对于线性代数其他部分的知识，你也可以用类似的方式自己梳理一遍，梳理的时候注意不同模块之间的联系及其在理论体系中的位置．注意：总结梳理的工作不能做得像搭积木，一块一块地堆砌，而应该像织毛衣，在各种内容之间建立起联系．

下面提供一个联系不同内容的实例．

Section 4

对偶空间，内积和 Dirac 符号

对偶空间　狄拉克符号

定义 (对偶空间)

$V' = \mathrm{Hom}\,(V, \mathbb{F})$[7]

定义 (Dirac 符号)

线性空间 V 称为右矢空间，其中的元素称为右矢 *(ket)*，记作 $|v\rangle \in V$；其对偶空间称为左矢空间，其中的元素称为左矢 *(bra)*[8]，记作 $\langle v| \in V'$.

问题

上面的记号中，$|v\rangle$ 和 $\langle v|$ 有没有确定的联系或对应？

[7] 我故意使用和教材上不一样的符号，一是为了向著名青年数学家，教我线代的方博汉老师致敬，二是为了让你们习惯表达同一数学概念有各种不同的符号这一事实.

[8] 它就是左矢，没有其他意思，你们千万不要多想. 这个名称的来源是把 bracket 拆开，左边表示左矢，右边表示右矢.

对偶基，对偶对应

定义 (对偶基)

设 $|v_1\rangle, \cdots, |v_n\rangle$ 是 V 的一组基，则我们定义 $\langle v_1|, \cdots, \langle v_n|$ 是其对偶基，如果 $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$

定义 (对偶对应)

基于对偶基可以定义对偶对应: $\forall \lambda_i, \lambda_j \in \mathbb{F}$,

$$\lambda_i^* \langle v_i| + \lambda_j^* \langle v_j| \xleftrightarrow{\text{D.C.}} \lambda_i |v_i\rangle + \lambda_j |v_j\rangle .$$ [9]

[9] 容易证明这个对应对实数域上线性空间是同构映射，对复数域上线性空间，它是一种结构类似于同构映射的双射，不妨称其为共轭同构映射，这样定义的好处，我们很快就将看出.

线性映射在 bra 和 ket 上的分解

例 (线性函数在对偶基上分解)

我们知道，给出一个线性函数在每个基 $|v_i\rangle$ 上的值 f_i，这个函数随即确定．显然，$f = f_i \langle v_i|$[10]

例 (一般线性映射的分解)

设 $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$，$A|v_j\rangle = a_{ij}|w_i\rangle$，则

$$A = a_{ij}|w_i\rangle\langle v_j|.$$

[10] 从这里开始，如无特殊声明，我们使用 Einstein 求和约定．

对偶映射

定义（对偶映射）

$A \in \operatorname{Hom}(V, W)$，$A$ 的对偶映射 $A' \in \operatorname{Hom}(W', V')$ 满足

$$A'(\langle w'|)\,|v\rangle = \langle w|\left(A'\,|v\rangle\right).$$

Remark

我们只要使 *Dirac* 符号满足结合律，即 $(\langle w|\,A)\,|v\rangle = \langle w|\,(A\,|v\rangle)$，并且要求作用在 *bra* 上的线性映射写在右边，作用在 *ket* 上的线性映射写在左边，我们就可以用完全一样的 *Dirac* 记号表示一个映射和它的对偶映射.

定理

$\dim \operatorname{Im}\ A = \dim \operatorname{Im}\ A'$.

映射的矩阵表示

$A \in \mathrm{Hom}\,(V, W)$，若选取了 V 和 W 的一组基，一个线性映射将坐标 $(x_i, \cdots, x_n)^T$ 表示的向量映射到 $(y_1, \cdots, v_m)^T$ 表示的向量，则线性映射的矩阵 $\tilde{A}$ 满足

$$(y_1, \cdots, y_m)^T = \tilde{A}(x_1, \cdots, x_n)^T,$$

或 $y_i = a_{ij}x_j$.

定理

映射的矩阵和其对偶映射的矩阵互为转置.

矩阵的秩

定义 (矩阵的行秩和列秩)

定理

矩阵的列秩与它表示的线性映射的象的维数相等.

定理

矩阵的行秩等于列秩.

内积

定义 (内积)

$\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 中的元素形成有序的元素对 $(|u\rangle, |v\rangle)$，元素对到 $\mathbb{F}$ 上的映射被称为内积如果它有如下性质:

1. 正定性;
2. 对第一个元素的线性性;
3. 共轭对称.

有了内积，就可以选取标准正交基，按照之前的定义建立对偶对应. 此时不同标准正交基下都满足 $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$. 此时可以验证 $(u, v) = \langle v|u\rangle$.