

Mathematik III

23.11.2016

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorräume	4
1.1	Definition (Reelle Vektorräume)	4
1.2	Beispiel	4
1.3	Lemma	5
1.4	Definition (Untervektorraum)	6
1.5	Beispiel	6
1.6	Satz (Unterraumkriterium)	7
1.7	Beispiel	7
1.8	Satz	10
1.9	Bemerkung	10
1.10	Beispiel	11
1.11	Beispiel	11
1.12	Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)	13
1.13	Bemerkung	14
1.14	Definition (Lineare Unabhängigkeit)	15
1.15	Beispiel	15
1.16	Satz	16
1.17	Satz	17
1.18	Definition (Basis)	18
1.19	Beispiel	18
1.20	Satz (Existenz von Basen)	18
1.21	Satz (Austauschlemma)	19
1.22	Satz (Steinitz'scher Austauschsatz)	20
1.23	Korollar	20
1.24	Satz	21
1.25	Definition (Dimension)	21
1.26	Korollar	22
1.27	Beispiel	22
1.28	Satz (Dimensionssatz)	23
1.29	Bemerkung (Koordinaten)	25
2	Matrizen und lineare Gleichungssysteme	26
2.1	Beispiel	26
2.2	Definition (Matrix)	26
2.3	Bemerkung	27
2.4	Beispiel:	28

2.5	Bemerkung	29
2.6	Satz	29
2.7	Beispiel (Folien 02.11.2016)	30
2.8	Definition (Matrixprodukt)	30
2.9	Beispiel	30
2.10	Satz + Definition	31
2.11	Beispiel	31
2.12	Definition (Matrizentransponierung)	31
2.13	Beispiel	32
3	Gruppen	33
3.1	Beispiel (Wiederholung zu Permutationen)	33
3.2	Definition (Permutation)	33
3.3	Beispiel	33
3.4	Bemerkung	33
3.5	Beispiel	34
3.6	Bemerkung	34
3.7	Beispiel	35
3.8	Definition (Grundbegriffe)	35
3.9	Definition (Gruppe)	36
3.10	Beispiel	36
3.11	Satz	37
3.12	Beispiel	38
3.13	Satz (Eigenschaften von Gruppen)	40
3.14	Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)	40
3.15	Definition (Untergruppe)	41
3.16	Beispiel	41
3.17	Beispiel	41
3.18	Satz + Definition (Rechtsnebenklasse, Repräsentant)	42
3.19	Beispiel	43
3.20	Kriterium	43
3.21	Definition (Wohldefiniertheit)	43
3.22	Beispiel	43
3.23	Satz (Faktorengruppe/Quotientengruppe)	43
3.24	Lemma	44
3.25	Theorem (Lagrange)	44
3.26	Definition	44
3.27	Satz	45

3.28	Satz + Definition (Ordnung, zyklische Gruppe)	45
3.29	Bemerkung	46
3.30	Korollar	46
4	Ringe und Körper	48
4.1	Definition (Ring)	48
4.2	Beispiel	48
4.3	Satz (Rechenregeln für Ring)	49
4.4	Bemerkung	49
4.5	Definition (Körper)	50
4.6	Beispiel	50
4.7	Satz (Rechenregeln für Körper: Nullteilerfreiheit)	50
4.8	Definition (Ringhomomorphismus, Ringisomorphismus)	50
4.9	Beispiel	51

1 Vektorräume

Bemerkung: 1.1-1.10 identisch mit 8.1-8.10 aus Mathematik 2, SS16

1.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben, v, w, x, y, \dots), auf der eine Addition $+$ definiert ist, $+: V \times V \rightarrow V$; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots$), $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, so dass gilt:

$$(1.1) \quad u + v + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$$

$$(1.2) \quad \text{Es existiert ein Vektor } \mathcal{O} \in V \text{ ('Nullvektor')} \text{ mit } v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \quad \forall v \in V$$

$$(1.3) \quad \text{Zu jedem } v \in V \text{ existiert ein Vektor } -v \in V \text{ mit } v + (-v) = \mathcal{O}$$

$$(1.4) \quad u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als ' $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe').

$$(2.1) \quad \overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$(2.2) \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$$

$$(2.3) \quad \overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$(2.4) \quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

1.2 Beispiel

- a) trivialer Vektorraum Nullraum: $V = \{\mathcal{O}\}$
Es gilt $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}$, $\lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- b) $V = \mathbb{R}^n$, Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge n über \mathbb{R} , Elemente haben

die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \dots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

c) \mathbb{R} ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Vektoren: reelle Zahlen.

Skalare: reelle Zahlen.

$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:

$M \neq \emptyset$ Menge. $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) := \{f: M \rightarrow \mathbb{R}\}$

Menge der auf M definierten reellen Funktionen.

Für $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$- f + g: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$$

$$- \lambda \cdot f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$$

Dann ist V mit $\mathbb{R}, +, \cdot$ ein Vektorraum. Nullvektor ist $f = 0: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in M$.

(kurz: $f \equiv 0$, identisch Null)

1.3 Lemma

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b) $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem $v \in V$ ist der Vektor $-v$ aus (1.3) in 8.1 eindeutig bestimmt.

d) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis

a)

$$\mathcal{O} \stackrel{(1.3)}{=} \underbrace{0 \cdot v}_x + \overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x} = \underbrace{(0 + 0)v}_{\mathcal{O}} + (-0 \cdot v)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v)$$

$$\stackrel{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 * v + (-0 \cdot v))$$

$$\stackrel{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O}$$

$$\stackrel{(1.2)}{=} 0 \cdot v$$

b) Wie a), starte mit $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$, erhalte $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\underline{v + (-1 \cdot v)} = 1 \cdot v + (-1 \cdot v)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} (1 + (-1))v$$

$$= 0 \cdot v$$

$$\stackrel{\text{a)}}{=} \mathcal{O}$$

$$\stackrel{(1.3)}{=} v + (-v)$$

Addiere auf beiden Seiten $-v$:

$$\underline{v + (-1)v} + (-v) = v + (-v) + (-v)$$

$$\Rightarrow -1 \cdot v = -v$$

c) Angenommen, zu $v \in V$ gibt es $-v$ und $-v'$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$ und $v + (-v') = \mathcal{O}$. Dann ist $v + (-v) = v + (-v')$ $\stackrel{+(-v) \text{ auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

□

1.4 Definition (Untervektorraum)

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ heißt Unter(vektor)raum von V , falls U bezüglich der Addition auf V und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

1.5 Beispiel

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist Unterraum von V

b) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist kein Unterraum von V , z.B. (1.2) ist verletzt,

$$\text{Addition funktioniert auch nicht: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Unterraum von V (prüfe alle Eigenschaften von Definition 8.1) \rightarrow umständlich, einfacher geht es mit 8.6

1.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, sei $\emptyset \neq U \subseteq V$.

Dann ist U Unterraum von V genau dann, wenn gilt (\Leftrightarrow):

$$(1) \quad v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$$

$$(2) \quad v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$$

(oder äquivalent: $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$)

Man sagt: U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

Beweis

\Rightarrow ist klar, da U laut Definition 8.4 selbst Vektorraum

\Leftarrow rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 8.1, also z.B. $\mathcal{O} \in U, \dots$)

□

1.7 Beispiel

a)

V ist ein \mathbb{R} -Vektorraum, $\mathcal{O} \neq v \in V$.

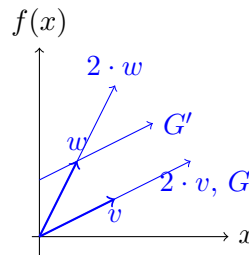
Dann ist $G = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum.

$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: G ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aber: $G' = \{w + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}, w \in V\}$ ist kein Unterraum für $w \neq \mu \cdot v, \mu \in \mathbb{R}$.

Warum? Z.B. $\mathcal{O} \notin G'$



b) $V = \mathbb{R}^3, \quad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ ist Unterraum. Wir

zeigen (1), (2) aus 8.6:

$$- U_1 \neq \emptyset, \text{ z.B. } \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1, \text{ denn } \overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$$

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist $\lambda \cdot v \in U_1$? $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, $w_1 +$

$w_2 - w_3 = 0$. Gilt $v + w \in U_1$? $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also $v + w \in U_1$

– Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

D.h. U_1 ist die Ebene durch $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 1 \right\}$ ist kein Unterraum. Z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \notin U_2$: $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.

Anderes Argument: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$, d.h. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Gilt $\lambda \cdot x \in U_2$? $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda}_{\text{nur für } \lambda=1} = 1 \end{aligned}$$

\Rightarrow nicht erfüllt für $\lambda \neq 1$.

Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$ ist kein Unterraum, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \quad 1^2 + 0^2 + 0^2 \leq 1 \quad \checkmark, \text{ aber}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3, \text{ denn } 2^2 + 0^2 + 0^2 \not\leq 1$$

Geometrische Interpretation:

U_3 ist eine Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 1

e) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Menge $C(I)$ (C : continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf I ist Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 8.2d)).

Menge der diffbaren Funktionen auf I ist Unterraum von $C(I)$.

1.8 Satz

V ist ein \mathbb{R} -Vektorraum, U_1, U_2 sind Unterräume von V .

- a) $U_1 \cap U_2 = \{u \in V \mid u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$ ist Unterraum von V .
- b) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$ Summe von U_1, U_2 ist Unterraum von V
(das ist nicht die Vereinigung $U_1 \cup U_2$!)

Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 8.6

- a) Übung: Prüfe $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$? ✓, (1), (2)
- b) – $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$
– Seien $v = u_1 + u_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ und
 $w = u'_1 + u'_2$, $u'_1 \in U_1$, $u'_2 \in U_2$,
also $v, w \in U_1 + U_2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lambda v + \mu w &= \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u'_1 + u'_2) \\ &= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u'_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u'_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 \end{aligned}$$

1.9 Bemerkung

- a) lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten
- b) lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten
- $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum

1.10 Beispiel

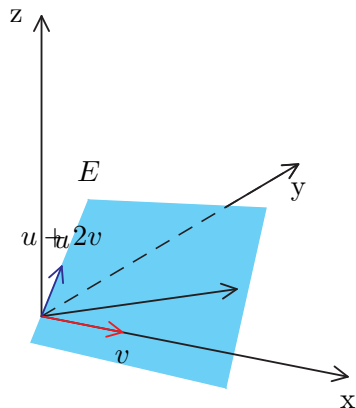
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $G_1 = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $G_2 = \{\mu w | \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 8.7a), Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Unterräume

- $G_1 + G_2$ ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$ ist $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.11 Beispiel

18.10.16



- $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $E = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

- $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum (UVR) und wird aufgespannt/erzeugt von u und v . Man nennt $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Erzeugendensystem von E .
- D.h. $w \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : w = \underbrace{\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v}_{\text{Linearkombination von } u \text{ und } v}$

- $w \notin E$, z.B. $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Letzte Zeile: } 1 = \lambda_1 \\ \text{Zweite Zeile: } 0 = \lambda_1 \end{array} \right\} \neq$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

Fortsetzung Bsp. 1.11

(Nachtrag
vom
19.10.2016)

a) $E = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

b) \mathbb{R}^n wird erzeugt von $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei j die Stelle ist, an der der Vektor 1

ist.

$$R^n = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \text{ "kanonische Einheitsvektoren"}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + e_n \cdot v_n$$

c) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den \mathbb{R}^2 auf?

Wenn ja, dann muss für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= x \\ \alpha + 2\beta &= y \\ \Rightarrow \alpha &= x - \beta \\ &= y - 2\beta \\ \Leftrightarrow \beta &= y - x \\ \alpha &= 2x - y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Allg. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$$

d) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ den \mathbb{R}^2 auf?

Nein, denn $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subsetneq \mathbb{R}^2$

e) $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, d.h. Erzeugendensysteme sind nicht eindeutig!

f) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D.h. $M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}$ ist kein minimales Erzeugendensystem des \mathbb{R}^2 , denn $v \in M$ kann immer dargestellt werden als Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus v$.

Man sagt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)

$V : \mathbb{R}$ -VR (V ist Vektorraum in den reellen Zahlen)

- (i) $v_1, \dots, v_m \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$
 Der Vektor $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m$ heißt Linearkombination von v_1, \dots, v_m .

- (ii) Sei $M \subseteq V$. Dann ist

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_k \in \mathbb{R}, v_k \in M, n \in \mathbb{N} \}$$

der von M aufgespannte/erzeugte UVR von V

Vereinbarung: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Schreibweise: $M = \{v_1, \dots, v_m\}$

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$$

- (iii) Ist $V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$, so heißt M ein Erzeugendensystem von V . V heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

1.13 Bemerkung

$M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von V , der M enthält.

Beweis

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist UVR. erfüllt Kriterien von 1.6, daher klar:
 1.6 2) erfüllt. $u \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \quad (M = \{v_1, \dots, v_n\})$
 $\Rightarrow \lambda \cdot u = \underbrace{\lambda \lambda_1}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{\lambda \lambda_n}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_n$
 1.6 3) ähnlich.
- Angenommen U ist der kleinste UVR, so dass $M \subseteq U$.
 Z. z.: $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$.
 Wegen 1.6 enthält U alle Linearkombinationen von Vektoren aus M .
 $\Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U \Rightarrow U$ kann nicht kleiner sein als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U \quad \square$

Ergänzung zu 1.13

19.10.16

Bsp: $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ Gerade

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \supseteq M$

- $E = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \supseteq M$

$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ Gerade, E Ebene, d.h. E ist größer als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$
 $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von \mathbb{R}^3 , der M enthält.

1.14 Definition (Lineare Unabhängigkeit)

- $V: \mathbb{R} - VR, \quad v_1, \dots, v_n$ heißen linear unabhängig, wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = 0 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\lambda = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0}_{\text{einzige Lösung!}}$$

- $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn gilt:
Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_m \in M$ paarweise verschieden sind v_1, \dots, v_m linear unabhängig
- Ist in obigen beiden Fällen (mindestens) $\lambda_i \neq 0$, dann sind die Vektoren linear abhängig

1.15 Beispiel

a) \mathcal{O} ist linear abhängig, da $\lambda \cdot \mathcal{O} = 0 \quad \forall \lambda \neq 0$

b) Sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ linear abhängig in \mathbb{R}^2 ?

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

$$\begin{cases} \text{I} & \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \text{II} & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Erfüllt für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \text{ Aber hier gibt}$$

es noch die Lösung: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1!$

\Rightarrow Vektoren sind linear abhängig

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (l.u.) in \mathbb{R}^3

d) $v \neq \mathcal{O}, \quad v \in V, \quad v$ ist linear unabhängig
Angenommen es existiert $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \cdot v = 0$.
 $\Rightarrow v = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \mathcal{O} \neq$

e)

$$\begin{aligned} v, w \text{ linear abhängig} &\Leftrightarrow v = \lambda w, \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

f) In $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung}\}$ sind die Vektoren

- $f(x) = x, \quad g(x) = x^2$ linear unabhängig
- $f(x) = \sin^2(x), \quad g(x) = \cos^2(x), \quad h(x) = 2$ linear abhängig:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x \\ 0 &= \underbrace{2}_{\lambda_1} \sin^2 x + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cos^2 x + \underbrace{-1}_{\lambda_3} \cdot 2 \end{aligned}$$

1.16 Satz

$$M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$$

- (i) M linear unabhängig \Leftrightarrow Zu jedem $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$
- (ii) M linear unabhängig, $v \notin \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow M \cup \{v\}$ linear unabhängig

Beweis

- (i) (\Leftarrow) $\mathcal{O} \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} :$

$$\mathcal{O} = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

Gleichung erfüllt für $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ (eindeutige Lösung)

- (\Rightarrow) Sei M linear unabhängig, $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\text{Angenommen } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot v_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{=0, \text{ da } M \text{ linear unabhängig}} \cdot v_i = \mathcal{O}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- (ii) Z.z.: $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i, \lambda = 0$

$$\text{Annahme: } \lambda \neq 0 \Rightarrow v = -\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot v_n$$

$$\Rightarrow v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{. Also } \lambda = 0$$

$\lambda_i = 0$, weil M linear unabhängig.

□

1.17 Satz

$M \subseteq V$ linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow N = M$$

In Worten: Man kann von M keinen Vektor weglassen, ohne dass der von M aufgespannte Raum sich verkleinert.

Beweis

(\Rightarrow) Sei $M \subseteq V$ linear unabhängig.

Angenommen: Man kann doch aus M Vektoren weglassen, d.h.

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$N \neq M \Rightarrow \exists x \in M \setminus N \quad (\text{da } N \subseteq M)$$

$$\Rightarrow \exists v_1, \dots, v_n \in N \quad \text{paarweise verschieden und}$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{so dass}$$

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad (\text{da } \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - x = \mathcal{O}$$

$$\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\in N}, \quad \underbrace{x}_{\in M \setminus N} \text{ paarweise verschieden}$$

Da $N \subseteq M$, ist $\underbrace{v_1, \dots, v_n, x}_{\text{linear abhängig}} \in M \Rightarrow M$ linear abhängig

Also muss $N = M$ gelten.

(\Leftarrow) Sei M linear abhängig.

Z.z. Man kann Vektoren aus M weglassen, d.h.:

$$\exists N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$M \text{ linear abhängig} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists v_1, \dots, v_n \in M$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (mit } \lambda_i \neq 0 \text{ für ein } i)$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

$$\text{O.B.d.A: } \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot v_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$$

$$\text{Setze } N = M \setminus \{v_1\} \Rightarrow N \neq M$$

Da v_1 Linearkombination von v_2, \dots, v_n folgt:

Jede Linearkombination von v_1, \dots, v_n lässt sich ausdrücken als Linearkombination von $v_2, \dots, v_n \Rightarrow \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ \square

Basis und Dimension

25.10.16

Ein minimales Erzeugendensystem heißt Basis.

1.18 Definition (Basis)

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR. Eine endliche Menge $B \subseteq V$ heißt Basis, falls

- $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$ und
- B linear unabhängig.

Für $V = \{\mathcal{O}\}$ ist $B = \emptyset$ die Basis.

1.19 Beispiel

a) $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist Basis von \mathbb{R}^n ('Standard-/kanonische Basis')

b) Basis ist nicht eindeutig.

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & B_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ \Rightarrow \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}, \text{ da: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\in \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

1.20 Satz (Existenz von Basen)

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR \Rightarrow Jedes endliche Erzeugendensystem enthält Basis.

Beweis

Sei $M \subseteq V$ endlich, $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = V$

- M linear unabhängig \rightarrow fertig
- M linear abhängig $\stackrel{1.17}{\Rightarrow}$ Man kann aus M einen Vektor $v \in M$ weglassen, so dass $\langle M \setminus \{v\} \rangle_{\mathbb{R}} = V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$. Nach endlich vielen Schritten liefert das Verfahren eine Basis. \square

Fragen

- Basis nicht eindeutig. Sind alle Basen gleich groß?
- geg. $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $S = \{e_1, e_2, e_3\}$. Wie kann man w zu einer Basis ergänzen? Welche Vektoren aus S sind geeignet?

$$w = \frac{1}{3}e_1 + e_3 = \{ \underbrace{w, e_1, e_3}_{\text{linear abhängig}} \} \text{ keine Basis, aber}$$

$$\{ \underbrace{w, e_1, e_2}_{\text{linear unabhängig}} \} \text{ Basis und } \{w, e_2, e_3\} \text{ Basis}$$

1.21 Satz (Austauschlemma)

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR. Gegeben: $w \in V$, $w \neq \mathcal{O}$, $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, wobei $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ Basis von V .

$\Rightarrow \underbrace{(B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}}_{(*)} \text{ Basis, falls } \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \neq 0$

Beweis

Z.z: $(*)$ ist Basis.

1) $(*)$ ist linear unabhängig.

Z.z:

$$\sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \text{ und } \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w &= \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) \\ &= \sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu \lambda_i) v_i + \mu \lambda_j v_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ Basis} &\Rightarrow \mu \lambda_j = 0 \text{ und } \mu_i + \mu \lambda_i = 0 \quad \forall i \neq j \\ \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \neq 0 &\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu_i + \underbrace{\mu \lambda_i}_{=0} = \mu_i = 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

2) (\star) erzeugt V .

$$\begin{aligned}
 w &= \lambda_j v_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i && |: \lambda_j, \text{ da } \lambda_j \neq 0 \\
 \Leftrightarrow \quad v_j &= \frac{1}{\lambda_j} w - \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \\
 \Rightarrow \quad v_j &\in \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} \\
 \Rightarrow \quad \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} = V
 \end{aligned}$$

1.22 Satz (Steinitz'scher Austauschatz)

Geg. $w_1, \dots, w_m \in V$ linear unabhängig, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V .

Es folgt:

- a) Aus den n Vektoren v_1, \dots, v_n kann man $n - m$ Vektoren auswählen, die mit w_1, \dots, w_m eine Basis bilden.
- b) $m \leq n$

Beweis

- a) 1) $w_1 \in V \Rightarrow w_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$
 Wären alle $\lambda_i = 0$, dann wäre auch $w_1 = 0$. Da $\mathcal{O} \in V$ linear abhängig ist, wäre also auch w_1, \dots, w_m linear abhängig. E
 Also: Mindestens ein $\lambda_i \neq 0$
 O.B.d.A. $\lambda_1 \neq 0$ (sonst umnummerieren) $\xrightarrow{1.20} \{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist Basis von V
- 2) $w_2 \in V \Rightarrow w_2 = \mu_1 w_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i v_i$
 Wären alle $\mu_2, \dots, \mu_n = 0$, so wäre $w_2 = \mu_1 w_1$, also auch w_1, w_2 linear abhängig. E , da $\{w_1, \dots, w_m\}$ linear unabhängig.
 \Rightarrow Mindestens ein $\mu_i \neq 0$, $i \in \{2, \dots, n\}$
 O.B.d.A. $\mu_2 \neq 0 \xrightarrow{1.20} \{w_1, w_2, v_3, \dots, v_n\}$ Basis von V

□

b) \rightarrow Übung

1.23 Korollar

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR

- i) Je zwei Basen von V enthalten gleich viele Elemente.
- ii) Basisergänzungssatz
Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis

- i) B, \tilde{B} Basen
 B linear unabhängig $\stackrel{1.22b)}{\Rightarrow} |B| \leq |\tilde{B}|$
 \tilde{B} linear unabhängig $\stackrel{1.22b)}{\Rightarrow} |\tilde{B}| \leq |B|$
 $\Rightarrow |B| = |\tilde{B}|$
- ii) Wähle beliebige Basis von V und tausche aus(1.22a)).

1.24 Satz

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR, $B \subseteq V$.

Dann sind äquivalent:

- i) B ist Basis
- ii) B ist maximale linear unabhängige Menge in V
- iii) B ist minimales Erzeugendensystem

Beweis

- i) \Rightarrow ii) Wegen 1.23 (linear unabhängige Menge zu Basis ergänzen, alle Basen gleich groß)
- ii) \Rightarrow i) (Bzw. \neg i) \Rightarrow \neg ii.) B keine Basis, B linear unabhängig
 $\Rightarrow \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq V \Rightarrow \exists v \in V \setminus \langle B \rangle_{\mathbb{R}} : B \cup \{v\}$ linear unabhängig
- i) \Rightarrow iii) Satz 1.17

□

1.25 Definition (Dimension)

$V : \mathbb{R}$ -VR

26.10.16

- i) Ist V endlich erzeugbar, B Basis von V , $|B| = n$ so hat V die Dimension n , $\dim(V) = n$
- ii) Ist V nicht endlich erzeugbar, so heißt V unendlichdimensional.

1.26 Korollar

$\dim V = n, B \subseteq V, |B| = n$.

Dann ist B Basis von V , wenn B linear unabhängig oder $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$

Beweis

Folgt aus 1.24

1.27 Beispiel

a) $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

b) $\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow \dim(\{\mathcal{O}\}) = 0$

c) Bilden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis von V ?

Ja, weil linear unabhängig (siehe Korollar 1.26).

d) $V = \mathbb{R}^4, U = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

u_1, u_2 linear unabhängig $\Rightarrow \dim(U) = 2$

Ergänze u_1, u_2 zu Basis von $V = \mathbb{R}^4$

– 1. Möglichkeit (Austauschlemma + Steinitz)

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ Basis von \mathbb{R}^4

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + e_4 \Rightarrow \{u_1, e_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_3 \Rightarrow \{u_1, u_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

(Basis könnte auch anders aussehen, nur beispielhaft dargestellt)

– 2. Möglichkeit (1.16)

- * $e_1 \notin U$ (*) (nachrechnen)
 $\xRightarrow{1.16} \{u_1, u_2, e_1\}$ linear unabhängig
- * $e_4 \notin \langle \{u_1, u_2, e_1\} \rangle_{\mathbb{R}}$ (nachrechnen)
 $\xRightarrow{1.16} \{u_1, u_2, e_1, e_4\}$ linear unabhängig und damit Basis (Korollar 1.26)

(*) Angenommen:

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} I & 1 = \lambda_1 \\ II & 0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ III & 0 = \lambda_2 \\ IV & 0 = \lambda_1 \end{cases} \quad \text{! zu I} \\ &\Rightarrow e_1 \notin \langle \{u_1, u_2\} \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \{u_1, u_2, e_1\} \text{ linear unabhängig} \end{aligned}$$

1.28 Satz (Dimensionssatz)

V \mathbb{R} -VR, $\dim(V) = n$

- i) $U \subseteq V$ ist UVR $\Rightarrow \dim(U) \leq n$
- ii) $U \subseteq W \subseteq V$, U, W sind UVR mit $\dim(U) = \dim(W) \Rightarrow U = W$
- iii) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Beweis

- i) Basis von U kann man zu Basis von V ergänzen $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$
- ii) $\dim(U) = \dim(W) \stackrel{U \subseteq W}{\Rightarrow}$ Basis von U auch Basis von $W \Rightarrow U = W$
- iii) Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von $U \cap W$
Ergänze $\{v_1, \dots, v_k\}$ zu

a) Basis $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ von U

b) Basis $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l\}$ Basis von W

Behauptung: $B = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ Basis von $U + W$

1) B linear unabhängig

Sei

$$\overbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k}^{=v} + \overbrace{\mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_m u_m}^{=u} + \overbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l}^{=w} = 0$$

$\lambda_i, \mu_j, \gamma_r \in \mathbb{R}$

Es ist $w \in U \cap W$, da

$$* \quad w = \underbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l}_{\in W} \in W$$

$$* \quad w = - \underbrace{u}_{\in U} - \underbrace{v}_{\in U} \in U$$

Also: $w \in U \cap W$.

$$\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow w = \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_k = 0$$

$\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l\}$ linear unabhängig

$$\Rightarrow \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_l = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

$$\Rightarrow w = 0 \text{ und } v + u + w = v + u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_m u_m = 0$$

$\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ linear unabhängig (Basis von U)

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_m = 0$$

2) $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = U + W$, da:

$$* \quad \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U + W \quad (\text{da } \underbrace{u + v}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W} \in U + W)$$

$$* \quad U \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \text{ (da Basis von } U \text{ in } B)$$

$$* \quad W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow U + W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$$

□

1.29 Bemerkung (Koordinaten)

Geg.: Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V , Vektor $u \in V$

$$\Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

λ_i eindeutig und heißen Koordinaten von u bezüglich der Basis B .

$$\text{z.B.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ hat Koordinaten } 1, 1, 3 \text{ bezüglich}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

02.11.16

2.1 Beispiel

- Ein Bauer besitzt Kühe und Gänse
- Insgesamt 18 Tiere mit 40 Beinen
- Frage: Wieviele der Tiere sind Kühe?

Lineares Gleichungssystem (LGS): $\ast \begin{cases} I: & k + g & = 18 \\ II: & 4k + 2g & = 40 \end{cases} \Leftrightarrow 2k + g = 20$
 $\Rightarrow g = 20 - 2k = 18 - k \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow g = 16$

Vektorenschreibweise von \ast :

$$\begin{pmatrix} k + g \\ 4k + 2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ oder } k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

2.2 Definition (Matrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:
Gegeben:

- Unbekannte $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen
- Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$Ax = b$ mit

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{Zeile} \\ \uparrow \\ \text{Spalte} \end{matrix}$$

$$\bullet x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\bullet b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Man schreibt $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oder nur $A = (a_{ij})$, wenn m, n schon bekannt.

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ - Eingänge der Matrix A
- A - reelle $m \times n$ - Matrix
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ - Menge aller reellen $m \times n$ - Matrizen
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ - quadratische Matrizen

(**) Dabei ist

$$Ax := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

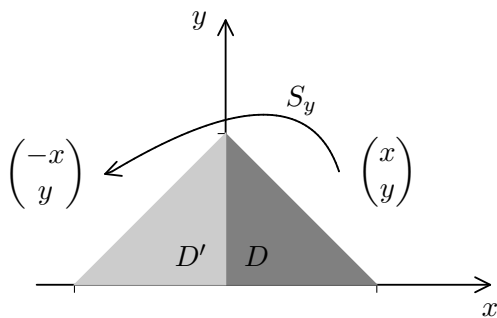
2.3 Bemerkung

Aus (**) ergibt sich: $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto A \cdot x$ für $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
 A bildet Vektoren auf Vektoren ab.

Matrizen können nicht nur zur Lösung von LGS verwendet werden, sondern auch in der Geometrie:

2.4 Beispiel:

- a) Spiegelung S_y an \mathbb{R}^2 an y -Achse



$$S_y : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$S_y : \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

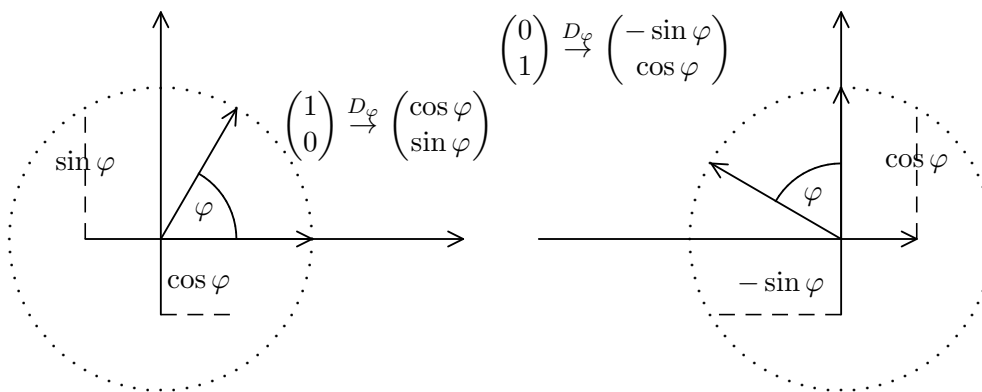
$$S_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} + s_{12} \\ s_{21} + s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

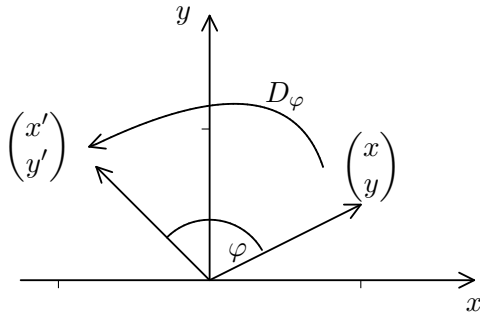
$$\Rightarrow s_{11} = -1 \quad s_{12} = 0 \quad s_{21} = 0 \quad s_{22} = 1$$

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S_y bildet D auf D' ab.

- b) Drehung D_φ um $\varphi \in [0, 2\pi)$
Vorüberlegung am Einheitskreis:





$$\begin{aligned}
 D_\varphi &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
 D_\varphi &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ und} \\
 D_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D_\varphi &= (D_\varphi \cdot e_1, D_\varphi \cdot e_2) = \\
 &\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2.5 Bemerkung

Aus Beispiel 2.4 b) und Def 2.2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 A \cdot e_j &= 1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j\text{-te Spalte von } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) \\
 \Rightarrow A &= \underbrace{(A_{e_1}, A_{e_2}, \dots, A_{e_n})}_{\text{Spalten}}
 \end{aligned}$$

2.6 Satz

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{i) } A(\lambda x) = \lambda(A \cdot x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } A(x + y) = Ax + Ay$$

Beweis

i)

$$\begin{aligned}
 A(\lambda x) &= (\lambda x_1) \underbrace{A \cdot e_1}_{\text{1. Spalte}} + (\lambda x_2) A e_2 + \dots + (\lambda x_n) \underbrace{A e_n}_{\text{n-te Spalte}} \\
 &= \lambda [x_1 (A e_1) + \dots + x_n (A e_n)] \\
 &= \lambda (Ax)
 \end{aligned}$$

ii) Übung

2.7 Beispiel (Folien 02.11.2016)

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cdot x &= (D_\pi \circ S_y) \cdot x = D_\pi \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Berechnung Matrixprodukt (Verknüpfung) $A \cdot B$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{\left[x_1 \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} \\ &\stackrel{2.6}{=} x_1 \underbrace{\left[e \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} + x_2 \underbrace{\left[f \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} ea + gb & fa + hb \\ ec + gd & fc + hd \end{pmatrix}}_{\text{Matrixprodukt } A \cdot B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.8 Definition (Matrixprodukt)

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R}) \\ c_{ik} &= (i\text{-te Zeile von } A) \cdot (k\text{-te Spalte von } B) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \end{aligned}$$

(Skalarprodukt)

2.9 Beispiel

08.11.16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ nicht definiert!

2.10 Satz + Definition

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist Vektorraum mit

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
- $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis: Siehe Hausaufgabe 03 Aufgabe 4a)

2.11 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2.12 Definition (Matrizentransponierung)

i) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})$.

Die zu A transponierte Matrix (Tauschen von Zeilen und Spalten):

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\text{z.B.: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } - \text{ Nullmatrix: } \mathcal{O}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$- \text{ Einheitsmatrix (nur Hauptdiagonale): } E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

2.13 Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ Matrixmultiplikation nicht kommutativ!

b) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
 $A \cdot E_n = A$ und $E_m \cdot A = A$

3 Gruppen

3.1 Beispiel (Wiederholung zu Permutationen)

Geg.: Menge $\{A, B, C\}$

Anordnungen: ABC, CAB, ACB, ... $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ Möglichkeiten

Jede Anordnung kann man auffassen als eineindeutige (bijektive) Abbildung

$\pi : \{A, B, C\} \rightarrow \{A, B, C\}$

$$\pi : \begin{array}{c|c|c|c} x & A & B & C \\ \hline \pi(x) & A & C & B \end{array}$$

3.2 Definition (Permutation)

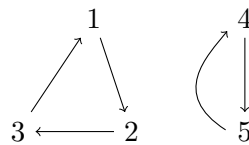
- Eine Permutation ist eine eineindeutige Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst. Im Allgemeinen verwendet man die Menge $\{1, \dots, n\}$ und schreibt eine Permutation π als Wertetabelle $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ oder als geordnete Liste der Werte $\pi = \pi(1)\dots\pi(n)$
- \mathcal{S}_n - Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$, $|\mathcal{S}_n| = n!$

Beispiel: $\mathcal{S}_2 = \{\text{id}, (AB)\} = \{\text{id}, (12)\}$, $|\mathcal{S}_2| = 2! = 2$

mit $\text{id} = \begin{pmatrix} AB \\ AB \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} AB \\ BA \end{pmatrix}$

3.3 Beispiel

- $M = \{1, 2, \dots, 5\}$
 $\pi = \pi(1)\dots\pi(5) = 23154$
 oder $\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix}$
- $\text{id}(i) = i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$



Graph der Permutation

3.4 Bemerkung

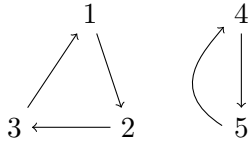
In Literatur oft Zyklenschreibweise:

Zyklus $(a_1 a_2 \dots a_k)$ bedeutet $\pi(a_i) = a_{i+1}$ und $\pi(a_k) = a_1$

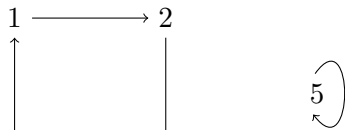
z.B.: $\pi = (123)(45)$

Verknüpfung von Permutationen

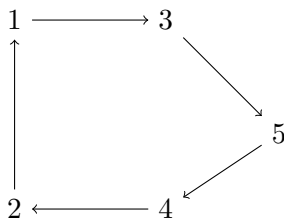
3.5 Beispiel



$$\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix} = (123)(45)$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23415 \end{pmatrix} = (1234)(5)$$



$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 31524 \end{pmatrix} = (13542)$$

3.6 Bemerkung

- Die Verknüpfung von 2 Permutationen π, σ ist wieder Permutation η mit $\eta(i) = \pi \circ \sigma(i) = \pi(\sigma(i))$
- Fixpunkte mit $\pi(i) = i$ lässt man weg, z.B. $\underbrace{(123)(4)}_{\in \mathcal{S}_4} = (123)$
- Jede Permutation kann als Produkt disjunkter Zyklen geschrieben werden, z.B.: $(34) \cdot (345) = (3)(45) = (45)$.
Verkettung \circ
 Zwei Zyklen heißen disjunkt, wenn $\{a_1 \dots a_k\} \cap \{b_1 \dots b_j\} = \emptyset$.
- Permutationen sind nur in sehr seltenen Fällen kommutativ:
 $(123)(23) = (12) \neq (23)(123) = (13)$
- Zyklendarstellung nicht eindeutig, z.B.:
 $(123) = (231)$ oder $(34)(12) = (12)(34)$

3.7 Beispiel

09.11.16

Symmetrieoperationen des Rechtecks	Identität	Spiegelung y-Achse	Spiegelung x-Achse	Drehung 180°
	$\begin{array}{ c c } \hline D & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline C & D \\ \hline B & A \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline A & B \\ \hline D & C \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline B & A \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}$
als Matrix	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$D_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
als Permutation der Ecken	id	$\pi = (AB)(CD)$	$\sigma = (AD)(BC)$	$\eta = (AC)(BD)$

Verknüpfungstafel

Matrixmultiplikation	E_2	S_y	S_x	D_π
E_2	E_2	S_y	S_x	D_π
S_y	S_y	E_2	D_π	S_x
S_x	S_x	D_π	E_2	S_y
D_π	D_π	S_x	S_y	E_2

3.8 Definition (Grundbegriffe)

- Seien X, Y nichtleere Mengen, Eine Verknüpfung ' \cdot ' ist eine Abbildung

$$X \times X \rightarrow Y \quad (a, b) \rightarrow a \cdot b \quad (\leftarrow \text{'Produkt' von a und b})$$

- Eine Menge $X \neq \emptyset$ heißt abgeschlossen bzgl. einer Verknüpfung ' \cdot ', falls $a \cdot b \in X \quad \forall a, b \in X$.

Beispiel: $X = \{-1, 1\}$ mit ' \cdot ' Addition $\Rightarrow (-1) \cdot (1) = -1 + 1 = 0$

Die Menge $\{id, \pi, \sigma, \eta\}$ aus Beispiel 3.7 ist abgeschlossen bzgl. der Verkettung von Permutationen

Bemerkung

Die Verknüpfung von Elementen einer endlichen Menge stellt man anhand der Verknüpfungstafel dar, siehe Bsp. 3.7

3.9 Definition (Gruppe)

- a) Eine Gruppe ist ein Paar (G, \cdot) mit Menge $G \neq \emptyset$ und einer Verknüpfung $\cdot : \underbrace{G \times G \rightarrow G}_{\text{abgeschlossen!}}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$ Assoziativität
- 2) $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$ Neutralelement
- 3) $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ Inverse

Falls zusätzlich

- 4) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$ Kommutativität

gilt, dann heißt G abelsche Gruppe.

- b) $|G|$ heißt Ordnung der Gruppe G .

3.10 Beispiel

- a) $(\{e\}, \cdot)$ ist Gruppe
- b) $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit $+$ ist abelsche Gruppe. Inverse zu a ist $-a$.
- c) $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit \cdot keine Gruppen. Problem: 0 besitzt keine Inverse, weil $0 \cdot a = 1 \nexists$

$\Rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ mit \cdot Gruppen, wenn man 0 weglässt

- d) Einzige endliche Gruppen von reellen Zahlen:

- $(\{1\}, \cdot)$ bzw. $(\{0\}, +)$
- $(\{1, -1\}, \cdot)$

Für weitere endliche Gruppen muss man Restklassen (Beispiel 3.12) Matrizen oder Permutationen betrachten

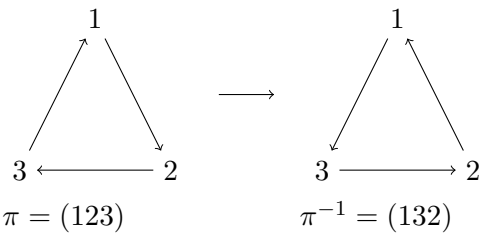
- e) $\mathcal{S}_2 = \{\text{id}, (12)\}$ und $\mathcal{S}_3 = \{\text{id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$ sind Gruppen (s. 3.11)
- f) $V_4 = \{\text{id}, \pi, \sigma, \eta\}$ aus Beispiel 3.7 ist die Symmetriegruppe des Rechtecks und heißt 'Kleinsche Vierergruppe' (V_4 Gruppe: s. 3.16 e).

3.11 Satz

\mathcal{S}_n ist eine nicht abelsche Gruppe. (Name: Symmetrische Gruppe)

Beweis

- assoziativ: $\pi, \sigma, \eta \in \mathcal{S}_n \Rightarrow \underbrace{(\pi \cdot \sigma) \cdot \eta}_{\text{Verknüpfung von Abbildungen}} = \overset{\text{bijektive Abbildungen}}{\pi \cdot (\sigma \cdot \eta)}$
- Neutralelement: id, denn
 $\text{id} \cdot \pi = \pi \cdot \text{id} = \pi \quad \forall \pi \in \mathcal{S}_n$
- Inverse: Alle Pfeile eines Zyklus werden umgedreht, d.h. die Zyklen werden rückwärts gelesen:



Fixpunkte und 2er-Zyklen ändern sich dabei nicht:

$$\sigma = (1678)(23) \Rightarrow \sigma^{-1} = (1876)(23)$$

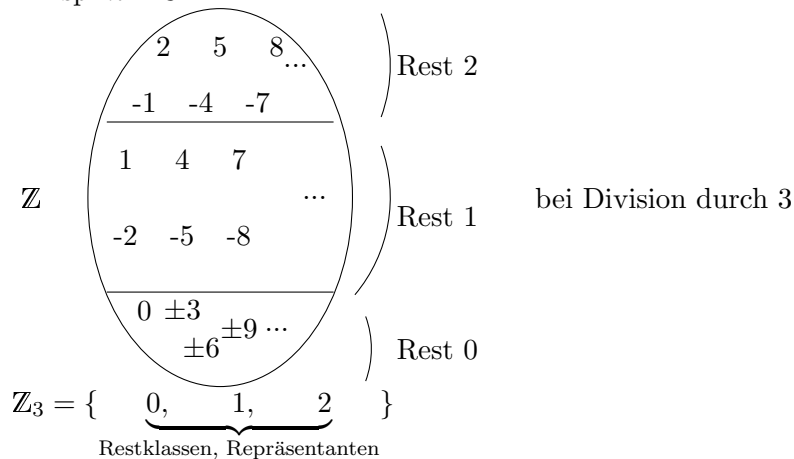
Setzt man die Pfeile von den Graphen π und π^{-1} zusammen, ändert sich nichts, d.h. $\pi \cdot \pi^{-1}(i) = i \Rightarrow \pi \cdot \pi^{-1} = \text{id} = \pi^{-1} \cdot \pi$

- nicht abelsch: Bem. 3.6d)

3.12 Beispiel

Restklassen modulo $n : \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$,

z. Bsp. $n = 3$



a) (\mathbb{Z}_n, \oplus) mit $a \oplus b = a + b \pmod n$. Z.B. in \mathbb{Z}_3 ist $2 \oplus 1 = 0$

(\mathbb{Z}_n, \oplus) ist abelsche Gruppe:

- abgeschlossen: $a + b \pmod n \in \{0, \dots, n-1\}$
- assoziativ: $a + (b + c) \pmod n = (a + b) + c \pmod n$
- Neutralelement: $a + 0 \equiv 0 + a \equiv a \pmod n$
- Inverse zu $a \in \mathbb{Z}_n$: Für welches $b \in \mathbb{Z}_n$ ist $a + b \pmod n = 0$?
Wähle b so, dass $a + b = n$, falls $a \neq 0$ (sonst $b = 0$)
z.B. in \mathbb{Z}_3 : $a = 1 \Rightarrow b = 2$, $a = 2 \Rightarrow b = 1$, $a = 0, b = 0$
- kommutativ: $a + b \pmod n = b + a \pmod n$

b) (\mathbb{Z}_n, \odot) mit $a \odot b = ab \pmod n$

Ist i.A. keine Gruppe:

- assoziativ ✓
- Neutralelement: $e = 1$ ✓

- Aber: 0 hat keine Inverse! Es gibt kein $a \in \mathbb{Z}_n$: $\underbrace{0 \cdot a}_{0} \bmod n = 1$ (!)

Hat $z \neq 0$ eine Inverse bzgl. \odot ?

\bar{z} invers zu z , wenn $\bar{z} \cdot z \equiv 1 \pmod{n}$

z.B. in \mathbb{Z}_{15} gilt:

* $2 \cdot 8 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$, d.h. 2 und 8 sind zueinander invers

* Alle Vielfachen von 5 haben Rest 0, 5, 10, d.h.

$k \cdot 5 \bmod 15 \in \{0, 5, 10\} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5$ hat kein Inverses

Allgemein:

$$\begin{aligned} z \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n : z \odot \bar{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n \quad \exists q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z = qn + 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z}, q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z - qn = 1 \\ &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(z, n) = 1 \end{aligned}$$

Beweis von *

' \Leftarrow ' Lemma von Bézout/Erweiterter Euklidischer Algorithmus (EEA):

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$$

$$\text{Hier: } a = z, \quad b = n, \quad s = \bar{z}, \quad t = -q$$

' \Rightarrow ' Übung (Übungsblatt 5, A1c)

Also: Nur die zu n teilerfremden Zahlen in \mathbb{Z}_n haben Inverse. Z.B.: In \mathbb{Z}_{15} sind 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 bzgl. \odot invertierbar.

Bezeichnung: $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$ ist Gruppe mit Ordnung $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$ (Eulersche φ -Funktion, $\varphi(n)$ ist Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen zwischen 1 und n).

Berechnung der Inversen in \mathbb{Z}_n^* :

$$\begin{aligned} \text{EEA :} \quad z \in \mathbb{Z}_n^* &\Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : sz + tn = 1 \\ &\Rightarrow s \cdot z \equiv 1 \pmod{n} \\ &\Rightarrow s \text{ invers zu } z \end{aligned}$$

3.13 Satz (Eigenschaften von Gruppen)

G Gruppe.

- i) Das Neutralelement von G ist eindeutig.
- ii) Die Inverse zu jedem $a \in G$ ist eindeutig.
- iii) $a, b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Beweis

- i) Angenommen e_1, e_2 Neutralelemente
 $\Rightarrow e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$
- ii) Angenommen $a \in G$ hat 2 Inversen x, y
 $x, y \in G \Rightarrow x = x \underbrace{(ay)}_e = \underbrace{(xa)}_e y = y$
- iii) $\ast (ab)^{-1} \cdot (ab) \underset{\text{Vor.}}{=} (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1} \underbrace{(a^{-1}a)}_e b = \underbrace{b^{-1}b}_e = e$
 $\ast (ab)(ab^{-1})$ analog

□

3.14 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)

G Gruppe, $a, b \in G$

- i) $\exists! x \in G : a \cdot x = b$. Es ist $x = a^{-1} \cdot b$
- ii) $\exists! y \in G : y \cdot a = b$. Es ist $y = b \cdot a^{-1}$
- iii) $ax = bx$ für ein $x \in G \Rightarrow a = b$
 bzw. $ya = yb$ für ein $y \in G \Rightarrow a = b$ (Kürzungsregel)

Beweis

- i) $x = a^{-1}b$ erfüllt $ax = a(a^{-1}b) = \underbrace{(aa^{-1})}_e b = b$
- ii) Analog zu i)
- iii) $a = a \underbrace{(xx^{-1})}_e = (ax)x^{-1} = (bx)x^{-1} = b \underbrace{(xx^{-1})}_e = b$

□

Untergruppen und Nebenklassen

3.15 Definition (Untergruppe)

(G, \cdot) Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$.

U heißt Untergruppe von G ($U \leq G$), wenn U bzgl. ' \cdot ' eine Gruppe ist.

Bemerkung

22.11.2016

- Abgeschlossenheit prüfen: $\forall u, v \in U : uv \in U$
- e von G ist auch e von U
- Inversen in U gleich wie in G

(wegen 3.13)

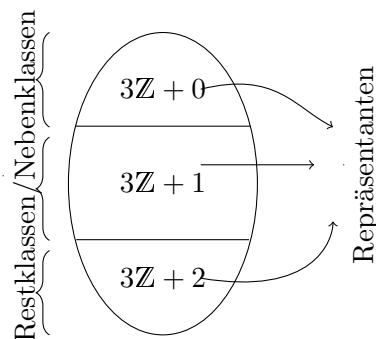
3.16 Beispiel

- a) $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$
- b) $(\{-1, 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- c) $V_4 = \{\text{id}, \underbrace{(AB)(CD)}_{\pi}, \underbrace{(AC)(BD)}_{\sigma}, \underbrace{(AD)(BC)}_{\eta}\} \leq \mathcal{S}_4$ (Bsp. 3.7, 3.10) weil V_4
 abgeschlossen, $\text{id} \in V_4$, $\gamma^{-1} = \gamma \quad \forall \gamma \in V_4$

3.17 Beispiel

Es ist $U = 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

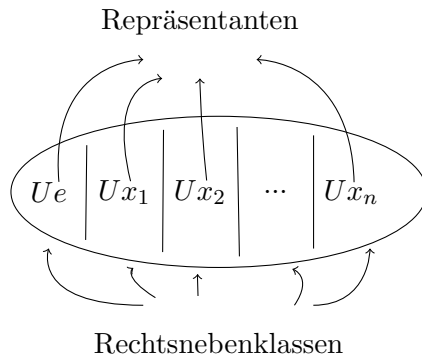
- Mehr Klassen gibt es nicht, da $3\mathbb{Z} + 3 = 3\mathbb{Z} + 0$, $3\mathbb{Z} + 4 = 3\mathbb{Z} + 1$, $3\mathbb{Z} - 1 = 3\mathbb{Z} + 2$
- Repräsentanten sind nicht eindeutig, -1 auch Repräsentant von $3\mathbb{Z} + 2 = 3\mathbb{Z} - 1$
- Grundidee: Nebenklassen von U unterteilen $G = \mathbb{Z}$ in disjunkte Äquivalenzklassen.
 Hier: $x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in 3\mathbb{Z} : u + x = y$, z.B.
 $4 \sim_U 10$, da $\underbrace{6}_{\in 3\mathbb{Z}} + 4 = 10$



3.18 Satz + Definition (Rechtsnebenklasse, Repräsentant)

G Gruppe, $U \leq G$.

- i) Für $x, y \in G : x \sim_U y : \Leftrightarrow \exists u \in U : ux = y$.
Behauptung: \sim_U Äquivalenzrelation.
- ii) $Ux := \{ux \mid u \in U\}$ (mit $x \in G$) heißt Rechtsnebenklasse von U in G . x heißt Repräsentant der Klasse Ux [Linksnebenklassen analog: xU]
- iii) $G/U := \{Ux \mid x \in G\}$ Menge der Rechtsnebenklassen von U in G .
Behauptung: G/U ist eine disjunkte Zerlegung von G in Äquivalenzklassen Ux .



Beweis

- i) – $x \sim_U x$, da $\underbrace{e}_{\in U} \cdot x = x$ (Reflexivität)
- (Symmetrie)

$$\begin{aligned}
 x \sim_U y &\Rightarrow \exists u \in U : ux = y \\
 &\Rightarrow x = \underbrace{u^{-1}}_{\in U} y = x \\
 &\Rightarrow y \sim_U x
 \end{aligned}$$

- (Transitivität)

$$\begin{aligned}
 x \sim_U y, y \sim_U z &\Rightarrow \exists u, u' \in U : ux = y, u'y = z \\
 &\Rightarrow u'y = u'(ux) = \underbrace{(u'u)}_{\in U} x = z \\
 &\Rightarrow x \sim_U z
 \end{aligned}$$

- iii) – $Ux = \{ux | u \in U\} = \{y \in G | \underbrace{\exists u : ux = y}_{y \sim_U x}\} = \{y \in G | y \sim_U x\} \Rightarrow Ux$
Äquivalenzklassen von $x \in G$
– Für je 2 Äquivalenzklassen Ux, Uy gilt: $Ux = Uy$ oder $Ux \cap Uy = \emptyset$
(wegen Transitivität)

3.19 Beispiel

$$\mathbb{Z}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z} + 0, 3\mathbb{Z} + 1, 3\mathbb{Z} + 2\} = \{3\mathbb{Z} + 3, 3\mathbb{Z} - 2, 3\mathbb{Z} + 11\}$$

Man schreibt oft $\mathbb{Z}_3 = \{0, \underline{1}, \underline{2}\}$ (wobei $j = 3\mathbb{Z} + j$) oder einfach $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Allgemein: $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$

Beobachtung in \mathbb{Z}_3 : Ist $x \in \underline{1}, y \in \underline{2}$, dann ist immer $x + y \in \underline{0}$

3.20 Kriterium

G Gruppe, $U \leq G$.

Für je 2 beliebige Klassen, Ux, Uy ($x, y \in G$) gelte:

$$x' \in Ux, y' \in Uy \Rightarrow x' \cdot y' \in U(xy)$$

3.21 Definition (Wohldefiniertheit)

Wenn Kriterium 3.20 erfüllt ist, kann man auf G/U eine Verknüpfung definieren:

$*$: $G/U \times G/U \rightarrow G/U$ mit

$$(Ux) * (Uy) = U(\underbrace{xy}_{\text{Produkt in } G})$$

Man sagt: Wenn 3.20 erfüllt, ist '*' wohldefiniert.

3.22 Beispiel

23.11.2016

- a) $*$ wohldefiniert auf $(\mathbb{Z}_n, +)$ (ohne Beweis)

Bemerkung: $x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in 3\mathbb{Z} : u + x = y$

$$\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{3}$$

Daraus ergibt sich die Def. aus Bsp. 3.12 mit $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ und $x \oplus y = x + y \pmod{3}$

- b) $U = \{\text{id}, (12)\} \leq \mathcal{S}_3$. Auf \mathcal{S}_3/U ist $*$ nicht wohldefiniert (Übung).

3.23 Satz (Faktorengruppe/Quotientengruppe)

$U \leq G$, G Gruppe.

Wenn '*' aus Def 3.21 wohldefiniert, dann ist $(G/U, *)$ eine Gruppe.

(Name: Quotientengruppe/Faktorengruppe)

Beweis: Übung.

Bemerkung: G abelsch \Rightarrow $'\cdot'$ immer wohldefiniert, d.h. G/U Gruppe.

3.24 Lemma

G Gruppe, $U \leq G$, U endlich $\Rightarrow |Ux| = |U| \quad \forall x \in G$

Beweis

$\varphi : U \rightarrow Ux, \quad u \mapsto u \cdot x$ bijektiv:

- surjektiv, da $\varphi(U) = Ux$
- injektiv, da $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1x = u_2x$
 $\xRightarrow{\cdot x^{-1}} u_1 = u_2$

$\Rightarrow |U| = |Ux|$

3.25 Theorem (Lagrange)

G endliche Gruppe, $U \leq G \Rightarrow |U|$ teilt $|G|$ und $|G/U| = \frac{|G|}{|U|}$.

Beweis

Seien U_{x_1}, \dots, U_{x_q} die q verschiedenen Rechtsnebenklassen von U in G .

$\Rightarrow G = \bigcup_{i=1}^q Ux_i \Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^q \underbrace{|Ux_i|}_{=|U|} = q \cdot |U|.$

□

Ordnung und zyklische Gruppen

3.26 Definition

(G, \cdot) Gruppe, $a \in G$.

Definiere $a^0 := e, \quad a^1 := a, \quad \underbrace{a^m := (a^{m-1}) \cdot a}_{\text{für } m \in \mathbb{N}}, \quad a^m := \underbrace{(a^{-1})^{-m}}_{\text{für } m \in \mathbb{Z}^-}$

als Potenzen von $a \in G$.

3.27 Satz

G Gruppe, $a \in G$. Es gilt:

$$\text{i) } (a^{-1})^m = (a^m)^{-1} = a^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii) } a^m a^n = a^{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iii) } (a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Beweis

i) a) m positiv:

* Inverses für a^m , wenn $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } a^m \cdot \underbrace{(a^{-1})^m}_{\text{Inverse}} &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{m\text{-mal}} = e \\ \Rightarrow (a^m)^{-1} &= (a^{-1})^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{* nach Definition: } a^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{Z}^-}} = (a^{-1})^{+m} \\ &\Rightarrow \text{i) gilt für } m \geq 0 \end{aligned}$$

b) m negativ:

$$\text{* } a^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} = \underbrace{((a^{-1})^{-1})^{-m}}_{\in G} \stackrel{\text{Def.}}{=} (a^{-1})^m$$

$$\begin{aligned} \text{* } a^{\overbrace{m}^{\in \mathbb{Z}^-}} &= (a^{-1})^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} \stackrel{\text{a)}}{=} (a^{-m})^{-1} \\ \Rightarrow (a^m)^{-1} &= ((a^{-m})^{-1})^{-1} = a^{-m} \end{aligned}$$

ii) + iii) analog mit m oder n negativ oder positiv

3.28 Satz + Definition (Ordnung, zyklische Gruppe)

G endliche Gruppe, $g \in G$.

i) Es gibt eine kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$. n heißt Ordnung $\mathcal{O}(g)$ von g .

ii) $\{g^0 = e, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}\} \leq G$ und heißt die von g erzeugte zyklische Gruppe $\langle g \rangle$.

iii) $g^{|G|} = e$

Beweis

$$\begin{aligned} \text{i) } G \text{ endlich} &\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} : g^i = g^j \text{ und } i > j \\ &\Rightarrow g^{\overbrace{i-j}^{\in \mathbb{N}}} = g^i g^{-j} = \underbrace{g^i}_{=g^j} (g^j)^{-1} = e \end{aligned}$$

Wähle $n = \min\{k \in \mathbb{N} | g^k = e\}$.

- $$\begin{aligned} \text{ii) } & - \langle g \rangle \text{ abgeschlossen, da } g^m \cdot g^k = g^{m+k} \in \langle g \rangle \\ & - g^0 = e \in \langle g \rangle \\ & - (g^m)^{-1} = g^{-m} = \underbrace{g^n}_e \cdot g^{-m} \in \langle g \rangle \\ \text{iii) Lagrange: } & n \mid |G| \Rightarrow n \cdot k = |G| \text{ für ein } k \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow g^{|G|} = g^{nk} = \underbrace{(g^n)^k}_e = e^k = e \end{aligned}$$

□

3.29 Bemerkung

Eine endliche Gruppe heißt zyklisch, falls sie von einem Element erzeugt wird.

Beispiel

- (\mathbb{Z}_n, \oplus) zyklisch, da $1 \in \mathbb{Z}_n$ und $1^2 = 1 + 1 = 2$, $1^3 = 1 + 1 + 1 = 3$, ..., $1^n = (1^{n-1}) \cdot 1 = (n-1) + 1 = n$ und $n \equiv 0 \pmod{n}$
 \mathbb{Z}_n hat Ordnung n , da $1^n = 0$
- Drehungen, die ein regelmäßiges n -Eck in sich selbst überführen, sind zyklisch:
 $(ABC)^0 = id$, $(ABC) = (ABC)$, $(ABC)^2 = (ACB)$, $(ABC)^3 = id$
 $\langle (ABC) \rangle = \{id, (ABC), (ACB)\} \leq \mathcal{S}_3$
- \mathcal{S}_3 oder V_4 nicht zyklisch.

3.30 Korollar

- $$\begin{aligned} \text{i) Satz von Euler:} & \\ & n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad \text{ggT}(a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \\ \text{ii) Kleiner Satz von Fermat:} & \\ & p \text{ Primzahl, } a \in \mathbb{Z}, \quad p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

Beweis

Wir können annehmen, dass $1 \leq a < n$, denn

$$a^{\varphi(n)} \bmod n = \underbrace{(a \bmod n)^{\varphi(n)}}_{\{1, \dots, n-1\}} \bmod n$$

$$\Rightarrow a \in \mathbb{Z}_n^*$$

$$\mathbb{Z}_n^* \text{ endliche Gruppe} \Rightarrow a^{\overbrace{|\mathbb{Z}_n^*|}^{\varphi(n)}} \equiv 1 \pmod{n}$$

ii) Folgt aus i) für $n = p$, $\varphi(p) = p - 1$

□

4 Ringe und Körper

Grundlegende Eigenschaften

4.1 Definition (Ring)

Sei $\mathcal{R} \neq \emptyset$ eine Menge mit 2 Verknüpfungen $+$ und \cdot .

i) Man nennt $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ einen Ring, wenn gilt:

1) $(\mathcal{R}, +)$ ist abelsche Gruppe mit Neutralelement 0 und Inverse $-a$ von a .

2) (\mathcal{R}, \cdot) ist abgeschlossen und assoziativ (Halbgruppe).

3) Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = ab + ac$
 $(a + b) \cdot c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in \mathcal{R}$

29.11.2016

ii) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ heißt kommutativ, falls ' \cdot ' zusätzlich kommutativ ist

iii) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ heißt Ring mit Eins, falls es bezüglich ' \cdot ' ein Neutralelement 1 gibt mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathcal{R}$.

iv) Ist $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ Ring mit Eins, so heißen die bezüglich ' \cdot ' invertierbaren Elemente Einheiten.

Bezeichnung:

- a^{-1} Inverse von a bzgl. ' \cdot '
- $\mathcal{R}^* :=$ Menge aller Einheiten in \mathcal{R}

4.2 Beispiel

a) Trivialer Ring $(\{0\}, +, 0)$

b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins.

Einheiten: $1, -1 \Rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}}_{\text{kein Ring!}}$

Ebenso $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

mit $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Ring, kommutativ, ohne Eins

d) $n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ kommutativer Ring mit Eins

e) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins: (\cdot und $+$ Komponentenweise)

Bemerkung: $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ Ringe $\Rightarrow \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_n$ Ring

f) $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (für $n \geq 2$) Ring mit Eins ($= E_n$). Nicht kommutativ!

4.3 Satz (Rechenregeln für Ring)

$(\mathcal{R}, +, \cdot)$ Ring, $a, b, c \in \mathcal{R}$

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

ii) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$

iii) $(-a)(-b) = ab$

Beweis

i) Es ist $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$$\begin{array}{lcl} \text{Addiere } -a \cdot 0 : & a \cdot 0 - a \cdot 0 & = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 \\ & \Leftrightarrow & 0 = a \cdot 0 \end{array}$$

Analog: $0 = 0 \cdot a$

ii) Es ist $(-a)b + ab = \underbrace{(-a + a)}_{=0} b = 0 \cdot b \stackrel{\text{i)}}{=} 0$

$\Rightarrow (-a)b$ invers zu ab und $(-a)b = -(ab)$

Analog: $a(-b) = -(ab)$

iii) $(-a)(-b) \stackrel{\text{ii)}}{=} -(a(-b)) \stackrel{\text{ii)}}{=} -(-(ab)) = ab$

□

4.4 Bemerkung

a) \mathcal{R} Ring mit Eins $\Rightarrow 1, -1 \in \mathcal{R}^*$

Achtung! Z.B. in $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ ist $1 = -1$

b) In einem kommutativen Ring gilt der binomische Lehrsatz:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$$

c) In 4.3: Rechenregeln für Multiplikation mit additiven Inversen, z.B.: $a \cdot (-b)$

Über Addition mit multiplikativen Inversen keine Aussage möglich (z.B. keine Regel für $a^{-1} + b$).

4.5 Definition (Körper)

Ein kommutativer Ring mit Eins $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ heißt Körper, falls $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$. D.h. jedes $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ ist bezüglich ' \cdot ' invertierbar.

4.6 Beispiel

- a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper $[(\mathbb{C}, +, \cdot)$ auch]
 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper, da $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$.
- b) $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n | \text{ggT}(z, n) = 1\}$ Gruppe bezüglich ' \odot '
 $\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ Körper $\Leftrightarrow n$ Primzahl

4.7 Satz (Rechenregeln für Körper: Nullteilerfreiheit)

$(\mathcal{K}, +, \cdot)$ Körper, $a, b \in \mathcal{K}$. Dann gilt

- a) alle Rechenregeln für Ringe gelten auch für Körper
- b) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ [Gegenbeispiel: $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$, weil $2 \odot 3 = 0$]

Beweis

' \Leftarrow ' klar (Satz 4.3.i)

' \Rightarrow ' $ab = 0$. Angenommen $a \neq 0 \Rightarrow b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1} \underbrace{(ab)}_{=0} \stackrel{4.3i)}{=} 0$

□

Strukturgleichheit von Ringen

4.8 Definition (Ringhomomorphismus, Ringisomorphismus)

Geg. $(\mathcal{R}, +, \cdot)$, $(\mathcal{R}', \boxplus, \boxdot)$ Ringe

- i) $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ heißt Ringhomomorphismus, falls $\psi(x + y) = \psi(x) \boxplus \psi(y)$ und $\psi(xy) = \psi(x) \boxdot \psi(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$
- ii) Wenn ψ bijektiv ist, heißt ψ Ringisomorphismus. In diesem Fall heißen $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ isomorph (d.h. sie sind strukturgleich). Man schreibt $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$

4.9 Beispiel

$$\psi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$$

$$x \mapsto x \bmod n$$

$$x + y \rightarrow x + y \pmod{n}, \quad x \cdot y \rightarrow x \cdot y \pmod{n}$$

ψ Ringhomomorphismus

Nicht injektiv: $\psi(1) = \psi(n+1) = 1$