

# Mathematik III

15.11.2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektorräume</b>	<b>3</b>
1.1	Definition (Reelle Vektorräume) . . . . .	3
1.2	Beispiel . . . . .	3
1.3	Lemma . . . . .	4
1.4	Definition (Untervektorraum) . . . . .	5
1.5	Beispiel . . . . .	5
1.6	Satz (Unterraumkriterium) . . . . .	6
1.7	Beispiel . . . . .	6
1.8	Satz . . . . .	9
1.9	Bemerkung . . . . .	9
1.10	Beispiel . . . . .	10
1.11	Beispiel . . . . .	10
1.12	Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem) . . . . .	12
1.13	Bemerkung . . . . .	13
1.14	Definition (Lineare Unabhängigkeit) . . . . .	14
1.15	Beispiel . . . . .	14
1.16	Satz . . . . .	15
1.17	Satz . . . . .	16
1.18	Definition (Basis) . . . . .	17
1.19	Beispiel . . . . .	17
1.20	Satz (Existenz von Basen) . . . . .	17
1.21	Satz (Austauschlemma) . . . . .	18
1.22	Satz (Steinitz'scher Austauschsatz) . . . . .	19
1.23	Korollar . . . . .	19
1.24	Satz . . . . .	20
1.25	Definition (Dimension) . . . . .	20
1.26	Korollar . . . . .	21
1.27	Beispiel . . . . .	21
1.28	Satz (Dimensionssatz) . . . . .	22
1.29	Bemerkung (Koordinaten) . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Matrizen und lineare Gleichungssysteme</b>	<b>25</b>
2.1	Beispiel . . . . .	25
2.2	Definition (Matrix) . . . . .	25
2.3	Bemerkung . . . . .	26
2.4	Beispiel: . . . . .	27

2.5	Bemerkung . . . . .	28
2.6	Satz . . . . .	28
2.7	Beispiel (Folien 02.11.2016) . . . . .	29
2.8	Definition (Matrixprodukt) . . . . .	29
2.9	Beispiel . . . . .	29
2.10	Satz + Definition . . . . .	30
2.11	Beispiel . . . . .	30
2.12	Definition (Matrizentransponierung) . . . . .	30
2.13	Beispiel . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Gruppen</b>	<b>32</b>
3.1	Beispiel (Wiederholung zu Permutationen) . . . . .	32
3.2	Definition (Permutation) . . . . .	32
3.3	Beispiel . . . . .	32
3.4	Bemerkung . . . . .	32
3.5	Beispiel . . . . .	33
3.6	Bemerkung . . . . .	33
3.7	Beispiel . . . . .	34
3.8	Definition (Grundbegriffe) . . . . .	34
3.9	Definition (Gruppe) . . . . .	35
3.10	Beispiel . . . . .	35
3.11	Satz . . . . .	36
3.12	Beispiel . . . . .	37
3.13	Satz (Eigenschaften von Gruppen) . . . . .	39
3.14	Satz (Gleichungen lösen in Gruppen) . . . . .	39
3.15	Definition (Untergruppe) . . . . .	40

# 1 Vektorräume

Bemerkung: 1.1-1.10 identisch mit 8.1-8.10 aus Mathematik 2, SS16

## 1.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben,  $v, w, x, y, \dots$ ), auf der eine Addition  $+$  definiert ist,  $+: V \times V \rightarrow V$ ; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots$ ),  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , so dass gilt:

$$(1.1) \quad u + v + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$$

$$(1.2) \quad \text{Es existiert ein Vektor } \mathcal{O} \in V \text{ ('Nullvektor')} \text{ mit } v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \quad \forall v \in V$$

$$(1.3) \quad \text{Zu jedem } v \in V \text{ existiert ein Vektor } -v \in V \text{ mit } v + (-v) = \mathcal{O}$$

$$(1.4) \quad u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als '( $V, +$ ) ist eine kommutative Gruppe').

$$(2.1) \quad \overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$(2.2) \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$$

$$(2.3) \quad \overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$(2.4) \quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

## 1.2 Beispiel

- a) trivialer Vektorraum Nullraum:  $V = \{\mathcal{O}\}$   
Es gilt  $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}$ ,  $\lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- b)  $V = \mathbb{R}^n$ , Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge  $n$  über  $\mathbb{R}$ , Elemente haben

die Form  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  mit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \dots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

c)  $\mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Vektoren: reelle Zahlen.

Skalare: reelle Zahlen.

$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:

$M \neq \emptyset$  Menge.  $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) := \{f: M \rightarrow \mathbb{R}\}$

Menge der auf  $M$  definierten reellen Funktionen.

Für  $f, g \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei

$$- f + g: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$$

$$- \lambda \cdot f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$$

Dann ist  $V$  mit  $\mathbb{R}, +, \cdot$  ein Vektorraum. Nullvektor ist  $f = 0: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 0 \quad \forall x \in M$ .

(kurz:  $f \equiv 0$ , identisch Null)

### 1.3 Lemma

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $v \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

a)  $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b)  $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem  $v \in V$  ist der Vektor  $-v$  aus (1.3) in 8.1 eindeutig bestimmt.

d)  $(-1) \cdot v = -v$

#### Beweis

a)

$$\mathcal{O} \stackrel{(1.3)}{=} \underbrace{0 \cdot v}_x + \overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x} = \underbrace{(0 + 0)v}_{\mathcal{O}} + (-0 \cdot v)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v)$$

$$\stackrel{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 * v + (-0 \cdot v))$$

$$\stackrel{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O}$$

$$\stackrel{(1.2)}{=} 0 \cdot v$$

b) Wie a), starte mit  $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$ , erhalte  $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\underline{v + (-1 \cdot v)} = 1 \cdot v + (-1 \cdot v)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} (1 + (-1))v$$

$$= 0 \cdot v$$

$$\stackrel{\text{a)}}{=} \mathcal{O}$$

$$\stackrel{(1.3)}{=} v + (-v)$$

Addiere auf beiden Seiten  $-v$ :

$$\underline{v + (-1)v} + (-v) = v + (-v) + (-v)$$

$$\Rightarrow -1 \cdot v = -v$$

c) Angenommen, zu  $v \in V$  gibt es  $-v$  und  $-v'$  mit  $v + (-v) = \mathcal{O}$  und  $v + (-v') = \mathcal{O}$ . Dann ist  $v + (-v) = v + (-v') \stackrel{+(-v) \text{ auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

□

## 1.4 Definition (Untervektorraum)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Eine Teilmenge  $U \subseteq V$ ,  $U \neq \emptyset$  heißt Unter(vektor)raum von  $V$ , falls  $U$  bezüglich der Addition auf  $V$  und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

## 1.5 Beispiel

a)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  ist Unterraum von  $V$

b)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  ist kein Unterraum von  $V$ , z.B. (1.2) ist verletzt,

$$\text{Addition funktioniert auch nicht: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$$

c)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$  ist ein Unterraum von  $V$  (prüfe alle Eigenschaften von Definition 8.1)  $\rightarrow$  umständlich, einfacher geht es mit 8.6

## 1.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, sei  $\emptyset \neq U \subseteq V$ .

Dann ist  $U$  Unterraum von  $V$  genau dann, wenn gilt ( $\Leftrightarrow$ ):

$$(1) \quad v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$$

$$(2) \quad v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$$

(oder äquivalent:  $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$ )

Man sagt:  $U$  ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

### Beweis

$\Rightarrow$  ist klar, da  $U$  laut Definition 8.4 selbst Vektorraum

$\Leftarrow$  rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 8.1, also z.B.  $\mathcal{O} \in U, \dots$ )

□

## 1.7 Beispiel

a)

$V$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\mathcal{O} \neq v \in V$ .

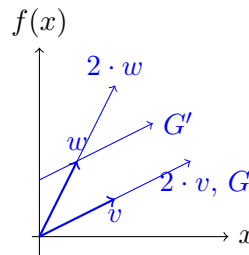
Dann ist  $G = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  ein Unterraum.

$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ :  $G$  ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aber:  $G' = \{w + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}, w \in V\}$  ist kein Unterraum für  $w \neq \mu \cdot v, \mu \in \mathbb{R}$ .

Warum? Z.B.  $\mathcal{O} \notin G'$



b)  $V = \mathbb{R}^3, \quad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$  ist Unterraum. Wir

zeigen (1), (2) aus 8.6:

$$- U_1 \neq \emptyset, \text{ z.B. } \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1, \text{ denn } \overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$$

(1) Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$ , d.h.  $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist  $\lambda \cdot v \in U_1$ ?  $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist  $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$ , d.h.  $v_1 + v_2 - v_3 = 0$ ,  $w_1 +$

$w_2 - w_3 = 0$ . Gilt  $v + w \in U_1$ ?  $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also  $v + w \in U_1$

– Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

D.h.  $U_1$  ist die Ebene durch  $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit den Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



c)  $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 1 \right\}$  ist kein Unterraum. Z.B.  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \notin U_2$ :  $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$ .

Anderes Argument: Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$ , d.h.  $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ .

Gilt  $\lambda \cdot x \in U_2$ ?  $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda}_{\text{nur für } \lambda=1} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  nicht erfüllt für  $\lambda \neq 1$ .

Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Ebene durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit Richtungsvektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d)  $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$  ist kein Unterraum, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \quad 1^2 + 0^2 + 0^2 \leq 1 \quad \checkmark, \text{ aber}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3, \text{ denn } 2^2 + 0^2 + 0^2 \not\leq 1$$

Geometrische Interpretation:

$U_3$  ist eine Kugel um  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit Radius 1

e)  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall

Menge  $C(I)$  ( $C$ : continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf  $I$  ist Unterraum von  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  (vgl. Beispiel 8.2d)).

Menge der diffbaren Funktionen auf  $I$  ist Unterraum von  $C(I)$ .

## 1.8 Satz

$V$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $U_1, U_2$  sind Unterräume von  $V$ .

- a)  $U_1 \cap U_2 = \{u \in V \mid u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$  ist Unterraum von  $V$ .
- b)  $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$  Summe von  $U_1, U_2$  ist Unterraum von  $V$   
(das ist nicht die Vereinigung  $U_1 \cup U_2$ !)

## Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 8.6

- a) Übung: Prüfe  $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$ ? ✓, (1), (2)
- b) –  $U_1 + U_2 \neq \emptyset$ , denn  $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$   
– Seien  $v = u_1 + u_2$ ,  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2$  und  
 $w = u'_1 + u'_2$ ,  $u'_1 \in U_1$ ,  $u'_2 \in U_2$ ,  
also  $v, w \in U_1 + U_2$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lambda v + \mu w &= \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u'_1 + u'_2) \\ &= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u'_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u'_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 \end{aligned}$$

## 1.9 Bemerkung

- a) lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten
- b) lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten
- $U_1 \cup U_2$  ist im Allgemeinen kein Unterraum

## 1.10 Beispiel

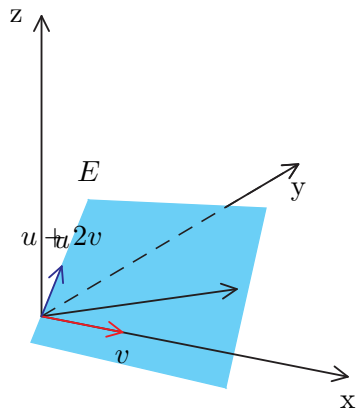
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$        $G_1 = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$        $G_2 = \{\mu w | \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 8.7a), Geraden durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , Unterräume

- $G_1 + G_2$  ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$  ist  $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

## 1.11 Beispiel

18.10.16



- $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $E = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

- $E \subseteq \mathbb{R}^3$  ist Untervektorraum (UVR) und wird aufgespannt/erzeugt von  $u$  und  $v$ . Man nennt  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  Erzeugendensystem von  $E$ .
- D.h.  $w \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : w = \underbrace{\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v}_{\text{Linearkombination von } u \text{ und } v}$

- $w \notin E$ , z.B.  $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Letzte Zeile: } 1 = \lambda_1 \\ \text{Zweite Zeile: } 0 = \lambda_1 \end{array} \right\} \neq$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

### Fortsetzung Bsp. 1.11

(Nachtrag  
vom  
19.10.2016)

a)  $E = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

b)  $\mathbb{R}^n$  wird erzeugt von  $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , wobei j die Stelle ist, an der der Vektor 1

ist.

$$R^n = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \text{ "kanonische Einheitsvektoren"}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + e_n \cdot v_n$$

c) Spannen  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  den  $\mathbb{R}^2$  auf?

Wenn ja, dann muss für  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= x \\ \alpha + 2\beta &= y \\ \Rightarrow \alpha &= x - \beta \\ &= y - 2\beta \\ \Leftrightarrow \beta &= y - x \\ \alpha &= 2x - y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Allg. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$$

d) Spannen  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  den  $\mathbb{R}^2$  auf?

Nein, denn  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  ist  $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subsetneq \mathbb{R}^2$

e)  $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ , d.h. Erzeugendensysteme sind nicht eindeutig!

f)  $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ , da  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

D.h.  $M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}$  ist kein minimales Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^2$ , denn  $v \in M$  kann immer dargestellt werden als Linearkombination von Vektoren aus  $M \setminus v$ .

Man sagt:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig.

## 1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)

$V : \mathbb{R}$ -VR ( $V$  ist Vektorraum in den reellen Zahlen)

- (i)  $v_1, \dots, v_m \in V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$   
 Der Vektor  $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m$  heißt Linearkombination von  $v_1, \dots, v_m$ .

- (ii) Sei  $M \subseteq V$ . Dann ist

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_k \in \mathbb{R}, v_k \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$$

der von  $M$  aufgespannte/erzeugte UVR von  $V$

Vereinbarung:  $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Schreibweise:  $M = \{v_1, \dots, v_m\}$

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$$

- (iii) Ist  $V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ , so heißt  $M$  ein Erzeugendensystem von  $V$ .  $V$  heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

## 1.13 Bemerkung

$M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  ist der kleinste UVR von  $V$ , der  $M$  enthält.

### Beweis

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  ist UVR. erfüllt Kriterien von 1.6, daher klar:  
 1.6 2) erfüllt.  $u \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \quad (M = \{v_1, \dots, v_n\})$   
 $\Rightarrow \lambda \cdot u = \underbrace{\lambda \lambda_1}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{\lambda \lambda_n}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_n$   
 1.6 3) ähnlich.
- Angenommen  $U$  ist der kleinste UVR, so dass  $M \subseteq U$ .  
 Z. z.:  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$ .  
 Wegen 1.6 enthält  $U$  alle Linearkombinationen von Vektoren aus  $M$ .  
 $\Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U \Rightarrow U$  kann nicht kleiner sein als  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U \quad \square$

## Ergänzung zu 1.13

19.10.16

Bsp:  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$  Gerade

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \supseteq M$

- $E = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \supseteq M$

$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  Gerade, E Ebene, d.h. E ist größer als  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$   
 $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  ist der kleinste UVR von  $\mathbb{R}^3$ , der M enthält.

### 1.14 Definition (Lineare Unabhängigkeit)

- $V: \mathbb{R} - VR, \quad v_1, \dots, v_n$  heißen linear unabhängig, wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = 0 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\lambda = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0}_{\text{einzige Lösung!}}$$

- $M \subseteq V$  heißt linear unabhängig, wenn gilt:  
Für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  und  $v_1, \dots, v_m \in M$  paarweise verschieden sind  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig
- Ist in obigen beiden Fällen (mindestens)  $\lambda_i \neq 0$ , dann sind die Vektoren linear abhängig

### 1.15 Beispiel

- a)  $\mathcal{O}$  ist linear abhängig, da  $\lambda \cdot \mathcal{O} = 0 \quad \forall \lambda \neq 0$

- b) Sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$  linear abhängig in  $\mathbb{R}^2$  ?

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

$$\begin{cases} \text{I} & \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \text{II} & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Erfüllt für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \text{ Aber hier gibt}$$

es noch die Lösung:  $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1!$

$\Rightarrow$  Vektoren sind linear abhängig

- c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  linear unabhängig (l.u.) in  $\mathbb{R}^3$

- d)  $v \neq \mathcal{O}, \quad v \in V, \quad v$  ist linear unabhängig  
Angenommen es existiert  $\lambda \neq 0$  mit  $\lambda \cdot v = 0$ .  
 $\Rightarrow v = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \mathcal{O} \neq$

e)

$$\begin{aligned} v, w \text{ linear abhängig} &\Leftrightarrow v = \lambda w, \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

f) In  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung}\}$  sind die Vektoren

- $f(x) = x, \quad g(x) = x^2$  linear unabhängig
- $f(x) = \sin^2(x), \quad g(x) = \cos^2(x), \quad h(x) = 2$  linear abhängig:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x \\ 0 &= \underbrace{2}_{\lambda_1} \sin^2 x + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cos^2 x + \underbrace{-1}_{\lambda_3} \cdot 2 \end{aligned}$$

## 1.16 Satz

$$M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$$

- (i)  $M$  linear unabhängig  $\Leftrightarrow$  Zu jedem  $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  gibt es eindeutig bestimmte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$
- (ii)  $M$  linear unabhängig,  $v \notin \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow M \cup \{v\}$  linear unabhängig

### Beweis

- (i)  $(\Leftarrow)$   $\mathcal{O} \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists$  eindeutig bestimmte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} :$

$$\mathcal{O} = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

Gleichung erfüllt für  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  (eindeutige Lösung)

- $(\Rightarrow)$  Sei  $M$  linear unabhängig,  $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\text{Angenommen } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot v_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{=0, \text{ da } M \text{ linear unabhängig}} \cdot v_i = \mathcal{O}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- (ii) Z.z.:  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i, \lambda = 0$

$$\text{Annahme: } \lambda \neq 0 \Rightarrow v = -\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot v_n$$

$$\Rightarrow v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{. Also } \lambda = 0$$

$\lambda_i = 0$ , weil  $M$  linear unabhängig.

□



## 1.17 Satz

$M \subseteq V$  linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow N = M$$

In Worten: Man kann von  $M$  keinen Vektor weglassen, ohne dass der von  $M$  aufgespannte Raum sich verkleinert.

### Beweis

( $\Rightarrow$ ) Sei  $M \subseteq V$  linear unabhängig.

Angenommen: Man kann doch aus  $M$  Vektoren weglassen, d.h.

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$N \neq M \Rightarrow \exists x \in M \setminus N \quad (\text{da } N \subseteq M)$$

$$\Rightarrow \exists v_1, \dots, v_n \in N \quad \text{paarweise verschieden und}$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{so dass}$$

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad (\text{da } \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - x = \mathcal{O}$$

$$\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\in N}, \quad \underbrace{x}_{\in M \setminus N} \text{ paarweise verschieden}$$

Da  $N \subseteq M$ , ist  $\underbrace{v_1, \dots, v_n, x}_{\text{linear abhängig}} \in M \Rightarrow M$  linear abhängig

Also muss  $N = M$  gelten.

( $\Leftarrow$ ) Sei  $M$  linear abhängig.

Z.z. Man kann Vektoren aus  $M$  weglassen, d.h.:

$$\exists N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$M \text{ linear abhängig} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists v_1, \dots, v_n \in M$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (mit } \lambda_i \neq 0 \text{ für ein } i)$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

$$\text{O.B.d.A: } \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot v_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$$

$$\text{Setze } N = M \setminus \{v_1\} \Rightarrow N \neq M$$

Da  $v_1$  Linearkombination von  $v_2, \dots, v_n$  folgt:

Jede Linearkombination von  $v_1, \dots, v_n$  lässt sich ausdrücken als Linearkombination von  $v_2, \dots, v_n \Rightarrow \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$   $\square$

## Basis und Dimension

25.10.16

Ein minimales Erzeugendensystem heißt Basis.

### 1.18 Definition (Basis)

$V$  endlich erzeugter  $\mathbb{R}$ -VR. Eine endliche Menge  $B \subseteq V$  heißt Basis, falls

- $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$  und
- $B$  linear unabhängig.

Für  $V = \{\mathcal{O}\}$  ist  $B = \emptyset$  die Basis.

### 1.19 Beispiel

a)  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^n$  ('Standard-/kanonische Basis')

b) Basis ist nicht eindeutig.

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & B_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ \Rightarrow \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}, \text{ da: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\in \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

### 1.20 Satz (Existenz von Basen)

$V$  endlich erzeugter  $\mathbb{R}$ -VR  $\Rightarrow$  Jedes endliche Erzeugendensystem enthält Basis.

#### Beweis

Sei  $M \subseteq V$  endlich,  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = V$

- $M$  linear unabhängig  $\rightarrow$  fertig
- $M$  linear abhängig  $\stackrel{1.17}{\Rightarrow}$  Man kann aus  $M$  einen Vektor  $v \in M$  weglassen, so dass  $\langle M \setminus \{v\} \rangle_{\mathbb{R}} = V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ . Nach endlich vielen Schritten liefert das Verfahren eine Basis.  $\square$

## Fragen

- Basis nicht eindeutig. Sind alle Basen gleich groß?
- geg.  $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Wie kann man  $w$  zu einer Basis ergänzen? Welche Vektoren aus  $S$  sind geeignet?

$$w = \frac{1}{3}e_1 + e_3 = \{ \underbrace{w, e_1, e_3}_{\text{linear abhängig}} \} \text{ keine Basis, aber}$$

$$\{ \underbrace{w, e_1, e_2}_{\text{linear unabhängig}} \} \text{ Basis und } \{w, e_2, e_3\} \text{ Basis}$$

### 1.21 Satz (Austauschlemma)

$V$  endlich erzeugter  $\mathbb{R}$ -VR. Gegeben:  $w \in V$ ,  $w \neq \mathcal{O}$ ,  $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ , wobei  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  Basis von  $V$ .  
 $\Rightarrow \underbrace{(B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}}_{(*)} \text{ Basis, falls } \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \neq 0$

### Beweis

Z.z:  $(*)$  ist Basis.

- 1)  $(*)$  ist linear unabhängig.  
 Z.z:

$$\sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \text{ und } \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w &= \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) \\ &= \sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu \lambda_i) v_i + \mu \lambda_j v_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ Basis} &\Rightarrow \mu \lambda_j = 0 \text{ und } \mu_i + \mu \lambda_i = 0 \quad \forall i \neq j \\ \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \neq 0 &\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu_i + \underbrace{\mu \lambda_i}_{=0} = \mu_i = 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

2)  $(\star)$  erzeugt  $V$ .

$$\begin{aligned}
 w &= \lambda_j v_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i && |: \lambda_j, \text{ da } \lambda_j \neq 0 \\
 \Leftrightarrow \quad v_j &= \frac{1}{\lambda_j} w - \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \\
 \Rightarrow \quad v_j &\in \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} \\
 \Rightarrow \quad \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} = V
 \end{aligned}$$

## 1.22 Satz (Steinitz'scher Austauschatz)

Geg.  $w_1, \dots, w_m \in V$  linear unabhängig,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ .

Es folgt:

- a) Aus den  $n$  Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  kann man  $n - m$  Vektoren auswählen, die mit  $w_1, \dots, w_m$  eine Basis bilden.
- b)  $m \leq n$

### Beweis

- a) 1)  $w_1 \in V \Rightarrow w_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$   
 Wären alle  $\lambda_i = 0$ , dann wäre auch  $w_1 = 0$ . Da  $\mathcal{O} \in V$  linear abhängig ist, wäre also auch  $w_1, \dots, w_m$  linear abhängig.  $E$   
 Also: Mindestens ein  $\lambda_i \neq 0$   
 O.B.d.A.  $\lambda_1 \neq 0$  (sonst umnummerieren)  $\xrightarrow{1.20} \{w_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist Basis von  $V$
- 2)  $w_2 \in V \Rightarrow w_2 = \mu_1 w_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i v_i$   
 Wären alle  $\mu_2, \dots, \mu_n = 0$ , so wäre  $w_2 = \mu_1 w_1$ , also auch  $w_1, w_2$  linear abhängig.  $E$ , da  $\{w_1, \dots, w_m\}$  linear unabhängig.  
 $\Rightarrow$  Mindestens ein  $\mu_i \neq 0$ ,  $i \in \{2, \dots, n\}$   
 O.B.d.A.  $\mu_2 \neq 0 \xrightarrow{1.20} \{w_1, w_2, v_3, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$

□

b)  $\rightarrow$  Übung

## 1.23 Korollar

$V$  endlich erzeugter  $\mathbb{R}$ -VR

- i) Je zwei Basen von  $V$  enthalten gleich viele Elemente.
- ii) Basisergänzungssatz  
Jede linear unabhängige Teilmenge von  $V$  lässt sich zu einer Basis von  $V$  ergänzen.

### Beweis

- i)  $B, \tilde{B}$  Basen  
 $B$  linear unabhängig  $\stackrel{1.22b)}{\Rightarrow} |B| \leq |\tilde{B}|$   
 $\tilde{B}$  linear unabhängig  $\stackrel{1.22b)}{\Rightarrow} |\tilde{B}| \leq |B|$   
 $\Rightarrow |B| = |\tilde{B}|$
- ii) Wähle beliebige Basis von  $V$  und tausche aus(1.22a)).

## 1.24 Satz

$V$  endlich erzeugter  $\mathbb{R}$ -VR,  $B \subseteq V$ .

Dann sind äquivalent:

- i)  $B$  ist Basis
- ii)  $B$  ist maximale linear unabhängige Menge in  $V$
- iii)  $B$  ist minimales Erzeugendensystem

### Beweis

- i) $\Rightarrow$ ii) Wegen 1.23 (linear unabhängige Menge zu Basis ergänzen, alle Basen gleich groß)
- ii) $\Rightarrow$ i) (Bzw.  $\neg$ i) $\Rightarrow$   $\neg$ ii.)  $B$  keine Basis,  $B$  linear unabhängig  
 $\Rightarrow \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq V \Rightarrow \exists v \in V \setminus \langle B \rangle_{\mathbb{R}} : B \cup \{v\}$  linear unabhängig
- i) $\Rightarrow$ iii) Satz 1.17

□

## 1.25 Definition (Dimension)

$V : \mathbb{R}$ -VR

26.10.16

- i) Ist  $V$  endlich erzeugbar,  $B$  Basis von  $V$ ,  $|B| = n$  so hat  $V$  die Dimension  $n$ ,  $\dim(V) = n$
- ii) Ist  $V$  nicht endlich erzeugbar, so heißt  $V$  unendlichdimensional.

## 1.26 Korollar

$\dim V = n, B \subseteq V, |B| = n$ .

Dann ist  $B$  Basis von  $V$ , wenn  $B$  linear unabhängig oder  $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$

### Beweis

Folgt aus 1.24

## 1.27 Beispiel

a)  $\{e_1, \dots, e_n\}$  Basis von  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

b)  $\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow \dim(\{\mathcal{O}\}) = 0$

c) Bilden  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  Basis von  $V$ ?

Ja, weil linear unabhängig (siehe Korollar 1.26).

d)  $V = \mathbb{R}^4, U = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

$u_1, u_2$  linear unabhängig  $\Rightarrow \dim(U) = 2$

Ergänze  $u_1, u_2$  zu Basis von  $V = \mathbb{R}^4$

– 1. Möglichkeit (Austauschlemma + Steinitz)

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + e_4 \Rightarrow \{u_1, e_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_3 \Rightarrow \{u_1, u_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

(Basis könnte auch anders aussehen, nur beispielhaft dargestellt)

– 2. Möglichkeit (1.16)

- \*  $e_1 \notin U$  (\*) (nachrechnen)  
 $\xRightarrow{1.16} \{u_1, u_2, e_1\}$  linear unabhängig
- \*  $e_4 \notin \langle \{u_1, u_2, e_1\} \rangle_{\mathbb{R}}$  (nachrechnen)  
 $\xRightarrow{1.16} \{u_1, u_2, e_1, e_4\}$  linear unabhängig und damit Basis (Korollar 1.26)

(\*) Angenommen:

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \\ &\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} I & 1 = \lambda_1 \\ II & 0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ III & 0 = \lambda_2 \\ IV & 0 = \lambda_1 \end{cases} \quad \text{! zu I} \\ &\Rightarrow e_1 \notin \langle \{u_1, u_2\} \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \{u_1, u_2, e_1\} \text{ linear unabhängig} \end{aligned}$$

## 1.28 Satz (Dimensionssatz)

$V$   $\mathbb{R}$ -VR,  $\dim(V) = n$

- i)  $U \subseteq V$  ist UVR  $\Rightarrow \dim(U) \leq n$
- ii)  $U \subseteq W \subseteq V$ ,  $U, W$  sind UVR mit  $\dim(U) = \dim(W) \Rightarrow U = W$
- iii)  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

## Beweis

- i) Basis von  $U$  kann man zu Basis von  $V$  ergänzen  $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$
- ii)  $\dim(U) = \dim(W) \stackrel{U \subseteq W}{\Rightarrow}$  Basis von  $U$  auch Basis von  $W \Rightarrow U = W$
- iii) Sei  $\{v_1, \dots, v_k\}$  Basis von  $U \cap W$   
Ergänze  $\{v_1, \dots, v_k\}$  zu

a) Basis  $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$  von  $U$

b) Basis  $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l\}$  Basis von  $W$

Behauptung:  $B = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l, u_{k+1}, \dots, u_m\}$  Basis von  $U + W$

1)  $B$  linear unabhängig

Sei

$$\overbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k}^{=v} + \overbrace{\mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_m u_m}^{=u} + \overbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l}^{=w} = 0$$

$\lambda_i, \mu_j, \gamma_r \in \mathbb{R}$

Es ist  $w \in U \cap W$ , da

$$* \quad w = \underbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l}_{\in W} \in W$$

$$* \quad w = - \underbrace{u}_{\in U} - \underbrace{v}_{\in U} \in U$$

Also:  $w \in U \cap W$ .

$$\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow w = \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_k = 0$$

$\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l\}$  linear unabhängig

$$\Rightarrow \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_l = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

$$\Rightarrow w = 0 \text{ und } v + u + w = v + u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_m u_m = 0$$

$\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$  linear unabhängig (Basis von  $U$ )

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_m = 0$$

2)  $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = U + W$ , da:

$$* \quad \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U + W \text{ (da } \underbrace{u + v}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W} \in U + W)$$



$$* \quad U \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \text{ (da Basis von } U \text{ in } B)$$

$$* \quad W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow U + W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$$

□

## 1.29 Bemerkung (Koordinaten)

Geg.: Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ , Vektor  $u \in V$

$$\Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$\lambda_i$  eindeutig und heißen Koordinaten von  $u$  bezüglich der Basis  $B$ .

$$\text{z.B.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ hat Koordinaten } 1, 1, 3 \text{ bezüglich}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## 2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

02.11.16

### 2.1 Beispiel

- Ein Bauer besitzt Kühe und Gänse
- Insgesamt 18 Tiere mit 40 Beinen
- Frage: Wieviele der Tiere sind Kühe?

Lineares Gleichungssystem (LGS):  $\ast \begin{cases} I: & k + g & = 18 \\ II: & 4k + 2g & = 40 \end{cases} \Leftrightarrow 2k + g = 20$   
 $\Rightarrow g = 20 - 2k = 18 - k \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow g = 16$

Vektorenschreibweise von  $\ast$ :

$$\begin{pmatrix} k + g \\ 4k + 2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ oder } k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

### 2.2 Definition (Matrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:  
Gegeben:

- Unbekannte  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $m \in \mathbb{N}$  Gleichungen
- Koeffizienten  $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$Ax = b$  mit

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{Zeile} \\ \uparrow \\ \text{Spalte} \end{matrix}$$

$$\bullet x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\bullet b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Man schreibt  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$  oder nur  $A = (a_{ij})$ , wenn  $m, n$  schon bekannt.

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$  - Eingänge der Matrix  $A$
- $A$  - reelle  $m \times n$ - Matrix
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  - Menge aller reellen  $m \times n$  - Matrizen
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$  - quadratische Matrizen

(\*\*) Dabei ist

$$Ax := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

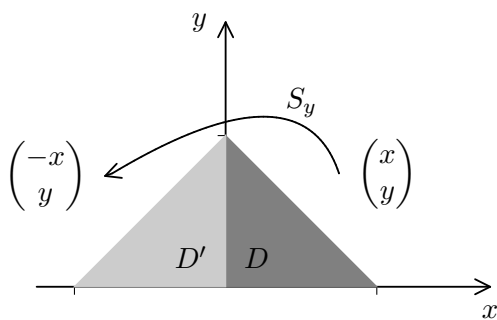
## 2.3 Bemerkung

Aus (\*\*) ergibt sich:  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto A \cdot x$  für  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$   
 $A$  bildet Vektoren auf Vektoren ab.

Matrizen können nicht nur zur Lösung von LGS verwendet werden, sondern auch in der Geometrie:

## 2.4 Beispiel:

- a) Spiegelung  $S_y$  in  $\mathbb{R}^2$  an  $y$ -Achse



$$S_y : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$S_y : \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

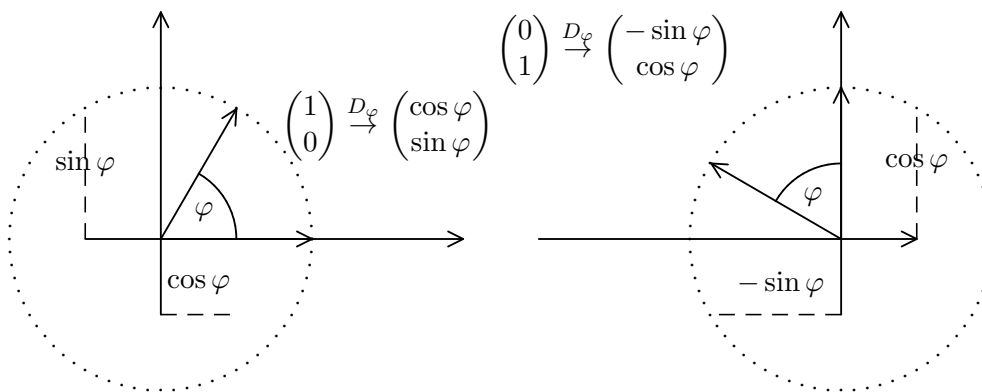
$$S_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} + s_{12} \\ s_{21} + s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

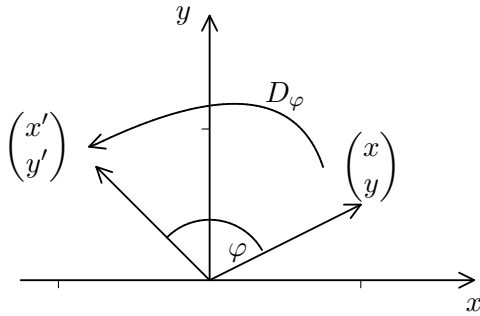
$$\Rightarrow s_{11} = -1 \quad s_{12} = 0 \quad s_{21} = 0 \quad s_{22} = 1$$

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S_y$  bildet  $D$  auf  $D'$  ab.

- b) Drehung  $D_\varphi$  um  $\varphi \in [0, 2\pi)$   
Vorüberlegung am Einheitskreis:





$$\begin{aligned}
 D_\varphi &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
 D_\varphi &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ und} \\
 D_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D_\varphi &= (D_\varphi \cdot e_1, D_\varphi \cdot e_2) = \\
 &\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 2.5 Bemerkung

Aus Beispiel 2.4 b) und Def 2.2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 A \cdot e_j &= 1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j\text{-te Spalte von } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) \\
 \Rightarrow A &= \underbrace{(A_{e_1}, A_{e_2}, \dots, A_{e_n})}_{\text{Spalten}}
 \end{aligned}$$

## 2.6 Satz

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{i) } A(\lambda x) = \lambda(A \cdot x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } A(x + y) = Ax + Ay$$

### Beweis

i)

$$\begin{aligned}
 A(\lambda x) &= (\lambda x_1) \underbrace{A \cdot e_1}_{\text{1. Spalte}} + (\lambda x_2) A e_2 + \dots + (\lambda x_n) \underbrace{A e_n}_{\text{n-te Spalte}} \\
 &= \lambda [x_1 (A e_1) + \dots + x_n (A e_n)] \\
 &= \lambda (Ax)
 \end{aligned}$$

ii) Übung

## 2.7 Beispiel (Folien 02.11.2016)

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cdot x &= (D_\pi \circ S_y) \cdot x = D_\pi \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Berechnung Matrixprodukt (Verknüpfung)  $A \cdot B$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{\left[ x_1 \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} \\ &\stackrel{2.6}{=} x_1 \underbrace{\left[ e \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} + x_2 \underbrace{\left[ f \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} ea + gb & fa + hb \\ ec + gd & fc + hd \end{pmatrix}}_{\text{Matrixprodukt } A \cdot B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2.8 Definition (Matrixprodukt)

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R}) \\ c_{ik} &= (i\text{-te Zeile von } A) \cdot (k\text{-te Spalte von } B) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \end{aligned}$$

(Skalarprodukt)

## 2.9 Beispiel

08.11.16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$  nicht definiert!

## 2.10 Satz + Definition

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  ist Vektorraum mit

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
- $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis: Siehe Hausaufgabe 03 Aufgabe 4a)

## 2.11 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

## 2.12 Definition (Matrizentransponierung)

i)  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})$ .

Die zu A transponierte Matrix (Tauschen von Zeilen und Spalten):

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\text{z.B.: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix heißt symmetrisch, wenn  $A = A^T$ , z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } - \text{ Nullmatrix: } \mathcal{O}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$- \text{ Einheitsmatrix (nur Hauptdiagonale): } E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

### 2.13 Beispiel

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$   
 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$  Matrixmultiplikation nicht kommutativ!

b)  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$   
 $A \cdot E_n = A$  und  $E_m \cdot A = A$



### 3 Gruppen

#### 3.1 Beispiel (Wiederholung zu Permutationen)

Geg.: Menge  $\{A, B, C\}$

Anordnungen: ABC, CAB, ACB, ...  $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$  Möglichkeiten

Jede Anordnung kann man auffassen als eineindeutige (bijektive) Abbildung

$\pi : \{A, B, C\} \rightarrow \{A, B, C\}$

$\pi :$	$\frac{x}{\pi(x)}$	$\frac{A}{A}$	$\frac{B}{C}$	$\frac{C}{B}$
---------	--------------------	---------------	---------------	---------------

#### 3.2 Definition (Permutation)

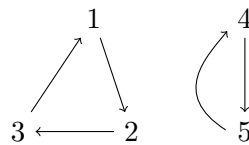
- Eine Permutation ist eine eineindeutige Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst. Im Allgemeinen verwendet man die Menge  $\{1, \dots, n\}$  und schreibt eine Permutation  $\pi$  als Wertetabelle  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$  oder als geordnete Liste der Werte  $\pi = \pi(1)\dots\pi(n)$
- $\mathcal{S}_n$ - Menge aller Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$ ,  $|\mathcal{S}_n| = n!$

Beispiel:  $\mathcal{S}_2 = \{\text{id}, (AB)\} = \{\text{id}, (12)\}$ ,  $|\mathcal{S}_2| = 2! = 2$

mit  $\text{id} = \begin{pmatrix} AB \\ AB \end{pmatrix}$ ,  $\pi = \begin{pmatrix} AB \\ BA \end{pmatrix}$

#### 3.3 Beispiel

- $M = \{1, 2, \dots, 5\}$   
 $\pi = \pi(1)\dots\pi(5) = 23154$   
oder  $\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix}$
- $\text{id}(i) = i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$



Graph der Permutation

#### 3.4 Bemerkung

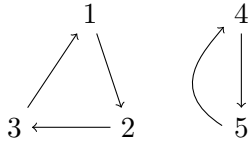
In Literatur oft Zykelschreibweise:

Zyklus  $(a_1 a_2 \dots a_k)$  bedeutet  $\pi(a_i) = a_{i+1}$  und  $\pi(a_k) = a_1$

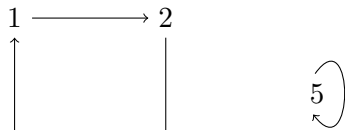
z.B.:  $\pi = (123)(45)$

## Verknüpfung von Permutationen

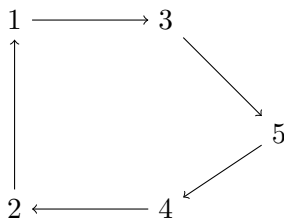
### 3.5 Beispiel



$$\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix} = (123)(45)$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23415 \end{pmatrix} = (1234)(5)$$



$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 31524 \end{pmatrix} = (13542)$$

### 3.6 Bemerkung

- Die Verknüpfung von 2 Permutationen  $\pi, \sigma$  ist wieder Permutation  $\eta$  mit  $\eta(i) = \pi \circ \sigma(i) = \pi(\sigma(i))$
- Fixpunkte mit  $\pi(i) = i$  lässt man weg, z.B.  $\underbrace{(123)}_{\in \mathcal{S}_4}(4) = (123)$
- Jede Permutation kann als Produkt disjunkter Zyklen geschrieben werden, z.B.:  $(34) \cdot (345) = (3)(45) = (45)$ .  
Verkettung  $\circ$   
 Zwei Zyklen heißen disjunkt, wenn  $\{a_1 \dots a_k\} \cap \{b_1 \dots b_j\} = \emptyset$ .
- Permutationen sind nur in sehr seltenen Fällen kommutativ:  
 $(123)(23) = (12) \neq (23)(123) = (13)$
- Zyklendarstellung nicht eindeutig, z.B.:  
 $(123) = (231)$  oder  $(34)(12) = (12)(34)$

### 3.7 Beispiel

09.11.16

Symmetrieoperationen des Rechtecks	Identität	Spiegelung y-Achse	Spiegelung x-Achse	Drehung 180°
	$\begin{array}{ c c } \hline D & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline C & D \\ \hline B & A \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline A & B \\ \hline D & C \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline B & A \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}$
als Matrix	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$D_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
als Permutation der Ecken	id	$\pi = (AB)(CD)$	$\sigma = (AD)(BC)$	$\eta = (AC)(BD)$

### Verknüpfungstafel

Matrixmultiplikation	$E_2$	$S_y$	$S_x$	$D_\pi$
$E_2$	$E_2$	$S_y$	$S_x$	$D_\pi$
$S_y$	$S_y$	$E_2$	$D_\pi$	$S_x$
$S_x$	$S_x$	$D_\pi$	$E_2$	$S_y$
$D_\pi$	$D_\pi$	$S_x$	$S_y$	$E_2$

### 3.8 Definition (Grundbegriffe)

- Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen, Eine Verknüpfung ' $\cdot$ ' ist eine Abbildung

$$X \times X \rightarrow Y \quad (a, b) \rightarrow a \cdot b \quad (\leftarrow \text{'Produkt' von a und b})$$

- Eine Menge  $X \neq \emptyset$  heißt abgeschlossen bzgl. einer Verknüpfung ' $\cdot$ ', falls  $a \cdot b \in X \quad \forall a, b \in X$ .

Beispiel:  $X = \{-1, 1\}$  mit ' $\cdot$ ' Addition  $\Rightarrow (-1) \cdot (1) = -1 + 1 = 0$

Die Menge  $\{id, \pi, \sigma, \eta\}$  aus Beispiel 3.7 ist abgeschlossen bzgl. der Verkettung von Permutationen

### Bemerkung

Die Verknüpfung von Elementen einer endlichen Menge stellt man anhand der Verknüpfungstafel dar, siehe Bsp. 3.7

### 3.9 Definition (Gruppe)

- a) Eine Gruppe ist ein Paar  $(G, \cdot)$  mit Menge  $G \neq \emptyset$  und einer Verknüpfung  $\cdot : \underbrace{G \times G \rightarrow G}_{\text{abgeschlossen!}}$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$  Assoziativität
- 2)  $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$  Neutralelement
- 3)  $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$  Inverse

Falls zusätzlich

- 4)  $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$  Kommutativität

gilt, dann heißt  $G$  abelsche Gruppe.

- b)  $|G|$  heißt Ordnung der Gruppe  $G$ .

### 3.10 Beispiel

- a)  $(\{e\}, \cdot)$  ist Gruppe
- b)  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  mit  $+$  ist abelsche Gruppe. Inverse zu  $a$  ist  $-a$ .
- c)  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  mit  $\cdot$  keine Gruppen. Problem:  $0$  besitzt keine Inverse, weil  $0 \cdot a = 1 \nexists$

$\Rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  mit  $\cdot$  Gruppen, wenn man  $0$  weglässt

- d) Einzige endliche Gruppen von reellen Zahlen:

- $(\{1\}, \cdot)$  bzw.  $(\{0\}, +)$
- $(\{1, -1\}, \cdot)$

Für weitere endliche Gruppen muss man Restklassen (Beispiel 3.12) Matrizen oder Permutationen betrachten

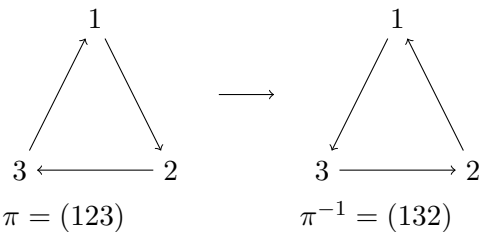
- e)  $\mathcal{S}_2 = \{\text{id}, (12)\}$  und  $\mathcal{S}_3 = \{\text{id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$  sind Gruppen (s. 3.11)
- f)  $V_4 = \{\text{id}, \pi, \sigma, \eta\}$  aus Beispiel 3.7 ist die Symmetriegruppe des Rechtecks und heißt 'Kleinsche Vierergruppe' ( $V_4$  Gruppe: s. 3.16 e).

### 3.11 Satz

$\mathcal{S}_n$  ist eine nicht abelsche Gruppe. (Name: Symmetrische Gruppe)

#### Beweis

- assoziativ:  $\pi, \sigma, \eta \in \mathcal{S}_n \Rightarrow \underbrace{(\pi \cdot \sigma) \cdot \eta}_{\text{Verknüpfung von Abbildungen}} = \overset{\text{bijektive Abbildungen}}{\pi \cdot (\sigma \cdot \eta)}$
- Neutralelement: id, denn  
 $\text{id} \cdot \pi = \pi \cdot \text{id} = \pi \quad \forall \pi \in \mathcal{S}_n$
- Inverse: Alle Pfeile eines Zyklus werden umgedreht, d.h. die Zyklen werden rückwärts gelesen:



Fixpunkte und 2er-Zyklen ändern sich dabei nicht:

$$\sigma = (1678)(23) \Rightarrow \sigma^{-1} = (1876)(23)$$

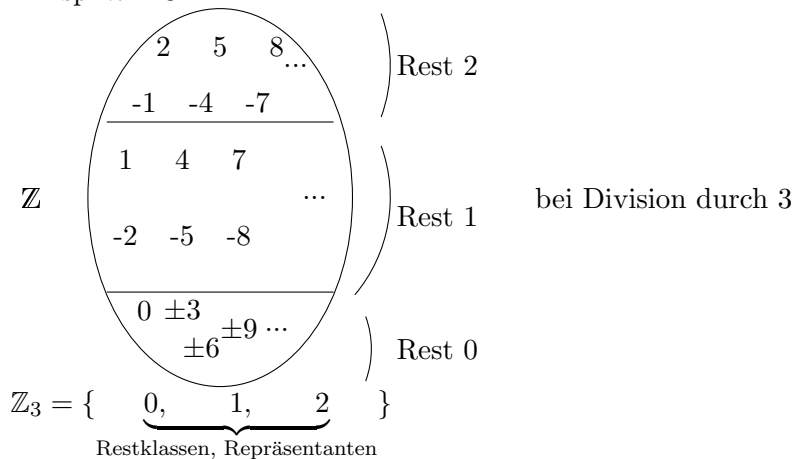
Setzt man die Pfeile von den Graphen  $\pi$  und  $\pi^{-1}$  zusammen, ändert sich nichts, d.h.  $\pi \cdot \pi^{-1}(i) = i \Rightarrow \pi \cdot \pi^{-1} = \text{id} = \pi^{-1} \cdot \pi$

- nicht abelsch: Bem. 3.6d)

### 3.12 Beispiel

Restklassen modulo  $n : \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,

z. Bsp.  $n = 3$



a)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  mit  $a \oplus b = a + b \mod n$ . Z.B. in  $\mathbb{Z}_3$  ist  $2 \oplus 1 = 0$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  ist abelsche Gruppe:

- abgeschlossen:  $a + b \mod n \in \{0, \dots, n-1\}$
- assoziativ:  $a + (b + c) \mod n = (a + b) + c \mod n$
- Neutralelement:  $a + 0 \equiv 0 + a \equiv a \pmod{n}$
- Inverse zu  $a \in \mathbb{Z}_n$ : Für welches  $b \in \mathbb{Z}_n$  ist  $a + b \mod n = 0$  ?  
Wähle  $b$  so, dass  $a + b = n$ , falls  $a \neq 0$  (sonst  $b = 0$ )  
z.B. in  $\mathbb{Z}_3$  :  $a = 1 \Rightarrow b = 2$ ,  $a = 2 \Rightarrow b = 1$ ,  $a = 0, b = 0$
- kommutativ:  $a + b \mod n = b + a \mod n$

b)  $(\mathbb{Z}_n, \odot)$  mit  $a \odot b = ab \mod n$

Ist i.A. keine Gruppe:

- assoziativ ✓
- Neutralelement:  $e = 1$  ✓

- Aber: 0 hat keine Inverse! Es gibt kein  $a \in \mathbb{Z}_n : \underbrace{0 \cdot a}_{0} \bmod n = 1$  (!)

Hat  $z \neq 0$  eine Inverse bzgl.  $\odot$ ?

$\bar{z}$  invers zu  $z$ , wenn  $\bar{z} \cdot z \equiv 1 \pmod{n}$

z.B. in  $\mathbb{Z}_{15}$  gilt:

\*  $2 \cdot 8 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$ , d.h. 2 und 8 sind zueinander invers

\* Alle Vielfachen von 5 haben Rest 0, 5, 10, d.h.

$k \cdot 5 \bmod 15 \in \{0, 5, 10\} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5$  hat kein Inverses

Allgemein:

$$\begin{aligned} z \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n : z \odot \bar{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n \quad \exists q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z = qn + 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z}, q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z - qn = 1 \\ &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(z, n) = 1 \end{aligned}$$

### Beweis von \*

' $\Leftarrow$ ' Lemma von Bézout/Erweiterter Euklidischer Algorithmus (EEA):

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$$

$$\text{Hier: } a = z, \quad b = n, \quad s = \bar{z}, \quad t = -q$$

' $\Rightarrow$ ' Übung (Übungsblatt 5, A1c)

Also: Nur die zu  $n$  teilerfremden Zahlen in  $\mathbb{Z}_n$  haben Inverse. Z.B.: In  $\mathbb{Z}_{15}$  sind 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 bzgl.  $\odot$  invertierbar.

Bezeichnung:  $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$  ist Gruppe mit Ordnung  $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$  (Eulersche  $\varphi$ -Funktion,  $\varphi(n)$  ist Anzahl der zu  $n$  teilerfremden Zahlen zwischen 1 und  $n$ ).

Berechnung der Inversen in  $\mathbb{Z}_n^*$ :

$$\begin{aligned} \text{EEA :} \quad z \in \mathbb{Z}_n^* &\Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : sz + tn = 1 \\ &\Rightarrow s \cdot z \equiv 1 \pmod{n} \\ &\Rightarrow s \text{ invers zu } z \end{aligned}$$

### 3.13 Satz (Eigenschaften von Gruppen)

$G$  Gruppe.

- i) Das Neutralelement von  $G$  ist eindeutig.
- ii) Die Inverse zu jedem  $a \in G$  ist eindeutig.
- iii)  $a, b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

**Beweis**

- i) Angenommen  $e_1, e_2$  Neutralelemente  
 $\Rightarrow e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$
- ii) Angenommen  $a \in G$  hat 2 Inversen  $x, y$   
 $x, y \in G \Rightarrow x = x \underbrace{(ay)}_e = \underbrace{(xa)}_e y = y$
- iii)  $\ast (ab)^{-1} \cdot (ab) \underset{\text{Vor.}}{=} (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1} \underbrace{(a^{-1}a)}_e b = \underbrace{b^{-1}b}_e = e$   
 $\ast (ab)(ab^{-1})$  analog

□

### 3.14 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)

$G$  Gruppe,  $a, b \in G$

- i)  $\exists! x \in G : a \cdot x = b$ . Es ist  $x = a^{-1} \cdot b$
- ii)  $\exists! y \in G : y \cdot a = b$ . Es ist  $y = b \cdot a^{-1}$
- iii)  $ax = bx$  für ein  $x \in G \Rightarrow a = b$   
 bzw.  $ya = yb$  für ein  $y \in G \Rightarrow a = b$  (Kürzungsregel)

**Beweis**

- i)  $x = a^{-1}b$  erfüllt  $ax = a(a^{-1}b) = \underbrace{(aa^{-1})}_e b = b$
- ii) Analog zu i)
- iii)  $a = a \underbrace{(xx^{-1})}_e = (ax)x^{-1} = (bx)x^{-1} = b \underbrace{(xx^{-1})}_e = b$

□



## Untergruppen und Nebenklassen

### 3.15 Definition (Untergruppe)

$(G, \cdot)$  Gruppe,  $\emptyset \neq U \subseteq G$ .

$U$  heißt Untergruppe von  $G$  ( $U \leq G$ ), wenn  $U$  bzgl. ' $\cdot$ ' eine Gruppe ist.