# Mathematik III

18.10.2016

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Vektorräume

Bemerkung: 1.1-1.10 identisch mit 8.1-8.10 aus Mathematik 2, SS16

## 1.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben, $v, w, x, y, ...$), auf der eine Addition $+$ definiert ist, $+ \colon V \times V \to V$; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, ...$), $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V$, so dass gilt:

(1.1) $u + v + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in V$

(1.2) Es existiert ein Vektor $\mathcal{O} \in V$ ('Nullvektor') mit $v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \qquad \forall v \in V$

(1.3) Zu jedem $v \in V$ existiert ein Vektor $-v \in V$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$

(1.4) $u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als '$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe').

(2.1) $\overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.2) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

(2.3) $\overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.4) $1 \cdot v = v \qquad \forall v \in V$

## 1.2 Beispiel

a) trivialer Vektorraum Nullraum: $V = \{\mathcal{O}\}$
Es gilt $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}, \quad \lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R}^n$, Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge $n$ über $\mathbb{R}$, Elemente haben die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

c) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Vektoren: reelle Zahlen.
Skalare: reelle Zahlen.
$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:
$M \neq \emptyset$ Menge. $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) := \{f\colon M \to \mathbb{R}\}$
Menge der auf $M$ definierten reellen Funktionen.
Für $f, g \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ sei

- $f + g\colon M \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$
- $\lambda \cdot f\colon M \to \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$

Dann ist $V$ mit $\mathbb{R}, +, \cdot$ ein Vektorraum. Nullvektor ist $f = 0\colon M \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \qquad \forall x \in M$.
(kurz: $f \equiv 0$, identisch Null)

## 1.3 Lemma

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

a) $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b) $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem $v \in V$ ist der Vektor $-v$ aus (1.3) in 8.1 eindeutig bestimmt.

d) $(-1) \cdot v = -v$

### Beweis

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &\overset{(1.3)}{=} \underbrace{\overbrace{0 \cdot v}^{x}}_{} + \overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x} = \underbrace{(0+0)v}_{} + (-0 \cdot v) \\
&\overset{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) \\
&\overset{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 * v + (-0 \cdot v)) \\
&\overset{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O} \\
&\overset{(1.2)}{=} 0 \cdot v
\end{aligned}$$

b) Wie a), starte mit $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$, erhalte $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\begin{aligned}\underline{v + (-1 \cdot v)} &= 1 \cdot v + (-1 \cdot v) \\ &\overset{(2.1)}{=} (1 + (-1))v \\ &= 0 \cdot v \\ &\overset{\text{a)}}{=} \mathcal{O} \\ &\overset{(1.3)}{=} v + (-v)\end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $-v$:

$$\underline{v + (-1)v} + (-v) = v + (-v) + (-v)$$

$$\Rightarrow -1 \cdot v = -v$$

c) Angenommen, zu $v \in V$ gibt es $-v$ und $-v'$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$ und $v + (-v') = \mathcal{O}$. Dann ist $v + (-v) = v + (-v') \overset{+(-v)\text{auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

$\square$

## 1.4 Definition

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $\quad U \neq \emptyset$ heißt <u>Unter(vektor)raum von $V$</u>, falls $U$ bezüglich der Addition auf $V$ und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

## 1.5 Beispiel

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ist Unterraum von $V$

b) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ ist kein Unterraum von $V$, z.B. (1.2) ist verletzt, Addition funktioniert auch nicht: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$

c) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum von $V$ (prüfe alle Eigenschaften von Definition 8.1) $\rightarrow$ umständlich, einfacher geht es mit 8.6

## 1.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $\emptyset \neq U \subseteq V$.
Dann ist $U$ Unterraum von $V$ genau dann, wenn gilt ($\Leftrightarrow$):

(1) $v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$

(2) $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$

(oder äquivalent: $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$)
Man sagt: $U$ ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

### Beweis

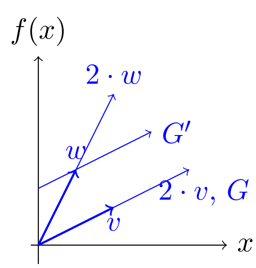
$\Rightarrow$ ist klar, da $U$ laut Definition 8.4 selbst Vektorraum

$\Leftarrow$ rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 8.1, also z.B. $\mathcal{O} \in U$,...)

$\square$

## 1.7 Beispiel

a) $V$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{O} \neq v \in V$.
Dann ist $G = \{\lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum.
$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: $G$ ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.
$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Aber: $G' = \{w + \lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}, \quad w \in V\}$ ist kein Unterraum für $w \neq \mu \cdot v, \quad \mu \in \mathbb{R}$.
Warum? Z.B. $\mathcal{O} \notin G'$




b) $V = \mathbb{R}^3, \qquad U_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ ist Unterraum. Wir zeigen (1), (2) aus 8.6:

$$- \; U_1 \neq \emptyset, \text{ z.B. } \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1, \text{ denn } \overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$$

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist $\lambda \cdot v \in U_1$? $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, $\quad w_1 + w_2 - w_3 = 0$. Gilt $v + w \in U_1$? $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also $v + w \in U_1$

– Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

D.h. $U_1$ ist die Ebene durch $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $U_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ ist kein Unterraum. Z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \notin$ $U_2$: $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.

Anderes Argument: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$, d.h. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Gilt $\lambda \cdot x \in U_2$? $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda = 1}_{\text{nur für } \lambda = 1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nicht erfüllt für $\lambda \neq 1$.
Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $U_3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ ist kein Unterraum, z.B.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \qquad 1^2 + 0^2 +^2 \leq 1 \quad \checkmark$, aber

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$, denn $2^2 + 0^2 + 0^2 \not\leq 1$

Geometrische Interpretation:

$U_3$ ist eine Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 1

e) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall
Menge $C(I)$ ($C$: continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf $I$ ist Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 8.2d)).
Menge der diffbaren Funktionen auf $I$ ist Unterraum von $C(I)$.

## 1.8 Satz

$V$ ist ein $\mathbb{R}$.Vektorraum, $U_1, U_2$ sind Unterräume von $V$.

a) $U_1 \cap U_2 = \{u \in V | u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$ ist Unterraum von $V$.

b) $U_1 + U_2 \coloneqq \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$ <u>Summe</u> von $U_1, U_2$ ist Unterraum von $V$
(das ist nicht die Vereinigung $U_1 \cap U_2$!)

### Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 8.6

a) Übung: Prüfe $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$? ✓, (1), (2)

b)
- $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$
- Seien $v = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U_1, \quad u_2 \in U_2$ und
  $w = u_1' + u_2', \quad u_1' \in U_1, \quad u_2' \in U_2$,
  also $v, w \in U_1 + U_2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \lambda v + \mu v &= \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u_1' + u_2') \\ &= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u_1'}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u_2'}_{\in U_2} \qquad \in U_1 + U_2 \end{aligned}$$

## 1.9 Bemerkung

a) lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten

b) lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten

- $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen <u>kein</u> Unterraum

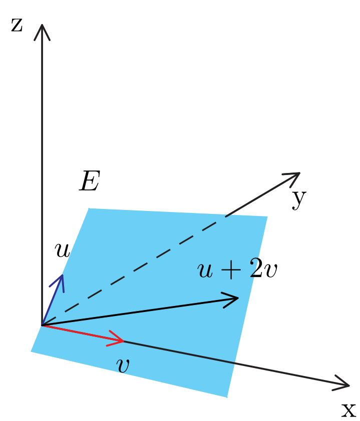
## 1.10 Beispiel

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad G_1 = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad G_2 = \{\mu w | \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 8.7a), Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Unterräume

- $G_1 + G_2$ ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$ ist $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

## 1.11 Beispiel




- $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $E = \{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

- E $\subseteq \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum (UVR) und wird <u>aufgespannt/erzeugt</u> von $u$ und $v$. Man nennt $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ <u>Erzeugendensystem</u> von $E$.
- D.h. $w \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : w = \underbrace{\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v}_{\text{Linearkombination von } u \text{ und } v}$

- $w \notin E$, z.B. $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  $\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Letzte Zeile: } 1 = \lambda_1 \\ \text{Zweite Zeile: } 0 = \lambda_1 \end{array}\right\} ↯$

  $\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$

## 1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)

$V$ : $\mathbb{R}$-VR (V ist Vektorraum in den reellen Zahlen)

(i) $v_1, ..., v_m \in V$ und $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$
Der Vektor $\lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m$ heißt <u>Linearkombination</u> von $v_1, ..., v_m$.

(ii) Sei $M \subseteq V$. Dann ist

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k | \lambda_k \in \mathbb{R}, v_k \in M, n \in \mathbb{N}\}$$

der <u>von $M$ aufgespannte/erzeugte UVR</u> von V

Vereinbarung: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$
Schreibweise: $M = \{v_1, ..., v_m\}_{\mathbb{R}}$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, ..., v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

(iii) Ist $v = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$, so heißt $M$ ein <u>Erzeugendensystem</u> von $V$. $V$ heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

## 1.13 Bemerkung

$M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von $V$, der $M$ enthält.

**Beweis**

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist UVR. erfüllt Kriterien von 1.6, daher klar:
  1.6 2) erfüllt. $u \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n \quad (M = \{v_1, ..., v_n\})$
  $\Rightarrow \lambda \cdot u = \underbrace{\lambda\lambda_1}_{\in\mathbb{R}} \cdot v_1 + ... + \underbrace{\lambda\lambda_n}_{\in\mathbb{R}} \cdot v_n$
  1.6 3) ähnlich.

- Angenommen $U$ ist der kleinste UVR, so dass $M \subseteq U$.
  Z. z.: $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$.
  Wegen 1.6 enthält $U$ alle Linearkombinationen von Vektoren aus M.
  $\Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U \Rightarrow U$ kann nicht kleiner sein als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$ $\square$

## Fortsetzung Bsp. 1.11

a) $E = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

b) $\mathbb{R}^n$ wird erzeugt von $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei j die Stelle ist, an der der Vektor 1 ist.

$$R^n = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \text{ "kanonische Einheitsvektoren"}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + ... + e_n \cdot v_n$$

c) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{R}^2$ auf?

Wenn ja, dann muss für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$
\begin{aligned}
& & \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & & \alpha + \beta &= x \\
& & \alpha + 2\beta &= y \\
\Rightarrow & & \alpha &= x - \beta \\
& & &= y - 2\beta \\
\Leftrightarrow & & \beta &= y - x \\
& & \alpha &= 2x - y
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Allg. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

d) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{R}^2$ auf?

Nein, denn $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2$

e) $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, d.h. Erzeugendensysteme sind <u>nicht</u> eindeutig!

f) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D.h. $M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}$ ist kein <u>minimales</u> Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, denn $v \in M$ kann immer dargestellt werden als Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus v$.
Man sagt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind <u>linear abhängig</u>.

## Ergänzung zu 1.13

Bsp: $M = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ Gerade

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \supseteq M$

- $E = \{\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \supseteq M$

$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ Gerade, E Ebene, d.h. E ist größer als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von $\mathbb{R}^3$, der M enthält.

## 1.14 Definition: Lineare Unabhängigkeit

- $V: \quad \mathbb{R} - VR, \quad v_1, ..., v_n$ heißen <u>linear unabhängig</u>, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m = 0 \\ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\lambda = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0}_{\text{einzige Lösung!}}$$

- $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn gilt:
  Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, ..., v_m \in M$ paarweise verschieden sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig

- Ist in obigen beiden Fällen (mindestens) $\lambda_i \neq 0$, dann sind die Vektoren linear abhängig

## 1.15 Beispiel

a) $\mathcal{O}$ ist linear abhängig, da $\lambda \cdot \mathcal{O} = 0 \qquad \forall \lambda \neq 0$

b) Sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\mathbb{R}^2$ ?
   $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$
   $\begin{cases} \text{I} & \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \text{II} & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \end{cases}$ Erfüllt für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aber hier gibt es noch die Lösung: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1!$
   $\Rightarrow$ Vektoren sind linear abhängig

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (l.u.) in $\mathbb{R}^3$

d) $v \neq \mathcal{O}, \quad v \in V, \quad v$, ist linear unabhängig
   Angenommen es existiert $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \cdot v = 0$.
   $\Rightarrow v = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \mathcal{O}$ ↯

e)

$$\begin{aligned} v, w \text{ linear abhängig } &\Leftrightarrow v = \lambda w \text{ , für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

f) In $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} |$ f Abbildung$\}$ sind die Vektoren

- $f(x) = x, \quad g(x) = x^2$ linear unabhängig
- $f(x) = \sin^2(x), \quad g(x) = \cos^2(x), \quad h(x) = 2$ linear abhängig:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x \\ 0 &= \underbrace{2}_{\lambda_1} \sin^2 x + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cos^2 x \underbrace{-1}_{\lambda_3} \cdot 2 \end{aligned}$$

## 1.16 Satz

$M = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$

(i) $M$ linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Zu jedem $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$

(ii) $M$ linear unabhängig, $v \notin \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow M \cup \{v\}$ linear unabhängig

**Beweis**

(i) ($\Leftarrow$) $\mathcal{O} \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ :
$$\mathcal{O} = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n$$
Gleichung erfüllt für $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ (eindeutige Lösung)

($\Rightarrow$) Sei $M$ linear unabhängig, $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$
Angenommen $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{=0, \text{ da } M \text{ linear unabhängig}} \cdot v_i = \mathcal{O}$$
$$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \qquad \forall i = 1, ..., n$$

(ii) Z.z.: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i, \lambda = 0$
Annahme: $\lambda \neq 0 \Rightarrow v = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot v_n$
$$\Rightarrow v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \lightning. \text{ Also } \lambda = 0$$
$\lambda_i = 0$, weil M linear unabhängig. $\square$

## 1.17 Satz

$M \subseteq V$ linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$N \subseteq M, \quad \langle N\rangle_{\mathbb{R}} = \langle M\rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow N = M$$

In Worten: Man kann von $M$ keinen Vektor weglassen, ohne dass der von $M$ aufgespannte Raum sich verkleinert.

### Beweis

($\Rightarrow$) Sei $M \subseteq V$ linear unabhängig.
Angenommen: Man kann doch aus $M$ Vektoren weglassen, d.h.

$$N \subseteq M, \quad \langle N\rangle_{\mathbb{R}} = \langle M\rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$\begin{aligned}
N \neq M \Rightarrow\ & \exists x \in M \setminus N && \text{(da } N \subseteq M\text{)} \\
\Rightarrow\ & \exists v_1, ..., v_n \in N && \text{paarweise verschieden und} \\
& \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} && \text{so dass} \\
& x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n && \text{(da } \langle N\rangle_{\mathbb{R}} = \langle M\rangle_{\mathbb{R}}\text{)} \\
\Rightarrow\ & \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n - x = \mathcal{O} \\
& \underbrace{v_1, ..., v_n,}_{\in N} \quad \underbrace{x}_{\in M \setminus N} \ \text{paarweise verschieden}
\end{aligned}$$

Da $N \subseteq M$, ist $\underbrace{v_1, ..., v_n, x}_{\text{linear abhängig}} \in M \Rightarrow M$ linear abhängig ↯
Also muss $N = M$ gelten.

($\Leftarrow$) Sei $M$ linear abhängig.
Z.z. Man kann Vektoren aus $M$ weglassen, d.h.:

$$\exists N \subseteq M, \quad \langle N\rangle_{\mathbb{R}} = \langle M\rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$\begin{aligned}
M \text{ linear abhängig} \Rightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists v_1, ..., v_n \in M \\
& \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (mit } \lambda_i \neq 0 \text{ für ein i)} \\
& \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n = 0
\end{aligned}$$

O.B.d.A: $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot v_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$
Setze $N = M \setminus \{v_1\} \Rightarrow N \neq M$
Da $v_1$ Linearkombination von $v_2, ..., v_n$ folgt:
Jede Linearkombination von $v_1, ..., v_n$ lässt sich ausdrücken als Linearkombination von $v_2, ..., v_n \Rightarrow \langle N\rangle_{\mathbb{R}} = \langle M\rangle_{\mathbb{R}}$ □