Mathematatik III

18.10.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorräume

Bemerkung: 1.1-1.10 identisch mit 8.1-8.10 aus Mathematik 2, SS16

1.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben, $v, w, x, y, ...$), auf der eine Addition $+$ definiert ist, $+ \colon V \times V \to V$; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, ...$), $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V$, so dass gilt:

(1.1) $u + v + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in V$

(1.2) Es existiert ein Vektor $\mathcal{O} \in V$ ('Nullvektor') mit $v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \qquad \forall v \in V$

(1.3) Zu jedem $v \in V$ existiert ein Vektor $-v \in V$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$

(1.4) $u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als '$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe').

(2.1) $\overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.2) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

(2.3) $\overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.4) $1 \cdot v = v \qquad \forall v \in V$

1.2 Beispiel

a) trivialer Vektorraum Nullraum: $V = \{\mathcal{O}\}$
Es gilt $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}, \quad \lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R}^n$, Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge n über $\mathbb{R}$, Elemente haben die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

c) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Vektoren: reelle Zahlen.
Skalare: reelle Zahlen.
$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:
$M \neq \emptyset$ Menge. $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \coloneqq \{f \colon M \to \mathbb{R}\}$
Menge der auf M definierten reellen Funktionen.
Für $f, g \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ sei

- $f + g \colon M \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$
- $\lambda \cdot f \colon M \to \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$

Dann ist V mit $\mathbb{R}, +, \cdot$ ein Vektorraum. Nullvektor ist $f = 0 \colon M \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \qquad \forall x \in M$.
(kurz: $f \equiv 0$, identisch Null)

1.3 Lemma

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

a) $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b) $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem $v \in V$ ist der Vektor $-v$ aus (1.3) in 8.1 eindeutig bestimmt.

d) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} \overset{(1.3)}{=} \overbrace{0 \cdot v}^{x} + \overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x} &= (0+0)v + (-0 \cdot v) \\
&\overset{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) \\
&\overset{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 * v + (-0 \cdot v)) \\
&\overset{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O} \\
&\overset{(1.2)}{=} 0 \cdot v
\end{aligned}$$

b) Wie a), starte mit $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$, erhalte $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\begin{aligned}\underbrace{v + (-1 \cdot v)} &= 1 \cdot v + (-1 \cdot v) \\ &\overset{(2.1)}{=} (1 + (-1))v \\ &= 0 \cdot v \\ &\overset{\text{a)}}{=} \mathcal{O} \\ &\overset{(1.3)}{=} v + (-v)\end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $-v$:

$$\underbrace{v + (-1)v} + (-v) = v + (-v) + (-v)$$

$$\Rightarrow -1 \cdot v = -v$$

c) Angenommen, zu $v \in V$ gibt es $-v$ und $-v'$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$ und $v + (-v') = \mathcal{O}$. Dann ist $v + (-v) = v + (-v') \overset{+(-v)\text{auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

$\square$

1.4 Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $\quad U \neq \emptyset$ heißt Unter(vektor)raum von V, falls U bezüglich der Addition auf V und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

1.5 Beispiel

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ist Unterraum von V

b) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ ist kein Unterraum von V, z.B. (1.2) ist verletzt, Addition funktioniert auch nicht: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$

c) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum von V (prüfe alle Eigenschaften von Definition 8.1) $\rightarrow$ umständlich, einfacher geht es mit 8.6

1.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $\emptyset \neq U \subseteq V$.
Dann ist U Unterraum von V genau dann, wenn gilt ($\Leftrightarrow$):

(1) $v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$

(2) $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$

(oder äquivalent: $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$)
Man sagt: U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

Beweis

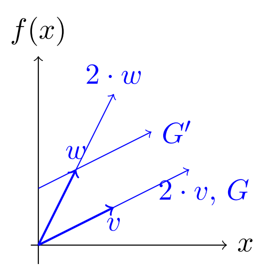
$\Rightarrow$ ist klar, da U laut Definition 8.4 selbst Vektorraum

$\Leftarrow$ rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 8.1, also z.B. $\mathcal{O} \in U$,...)

$\square$

1.7 Beispiel

a) V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{O} \neq v \in V$.
Dann ist $G = \{\lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum.
$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: G ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.
$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Aber: $G' = \{w + \lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}, \quad w \in V\}$ ist kein Unterraum für $w \neq \mu \cdot v, \quad \mu \in \mathbb{R}$.
Warum? Z.B. $\mathcal{O} \notin G'$



b) $V = \mathbb{R}^3, \qquad U_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ ist Unterraum. Wir zeigen (1), (2) aus 8.6:

– $U_1 \neq \emptyset$, z.B. $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$, denn $\overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist $\lambda \cdot v \in U_1$? $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, $\quad w_1 + w_2 - w_3 = 0$. Gilt $v + w \in U_1$? $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also $v + w \in U_1$

– Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

D.h. U_1 ist die Ebene durch $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $U_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ ist kein Unterraum. Z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \notin$ U_2: $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.

Anderes Argument: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$, d.h. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Gilt $\lambda \cdot x \in U_2$? $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda = 1}_{\text{nur für } \lambda=1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nicht erfüllt für $\lambda \neq 1$.
Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $U_3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ ist kein Unterraum, z.B.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \qquad 1^2 + 0^2 +^2 \leq 1 \quad \checkmark$, aber

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$, denn $2^2 + 0^2 + 0^2 \not\leq 1$

Geometrische Interpretation:

U_3 ist eine Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 1

e) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall
Menge $C(I)$ (C: continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf I ist Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 8.2d)).
Menge der diffbaren Funktionen auf I ist Unterraum von $C(I)$.

1.8 Satz

V ist ein $\mathbb{R}$.Vektorraum, U_1, U_2 sind Unterräume von V.

a) $U_1 \cap U_2 = \{u \in V | u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$ ist Unterraum von V.

b) $U_1 + U_2 \coloneqq \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$ Summe von U_1, U_2 ist Unterraum von V
(das ist nicht die Vereinigung $U_1 \cap U_2$!)

Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 8.6

a) Übung: Prüfe $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$? ✓, (1), (2)

b)
- $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$
- Seien $v = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U_1, \quad u_2 \in U_2$ und
$w = u_1' + u_2', \quad u_1' \in U_1, \quad u_2' \in U_2$,
also $v, w \in U_1 + U_2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} \lambda v + \mu v &= \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u_1' + u_2') \\ &= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u_1'}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u_2'}_{\in U_2} \qquad \in U_1 + U_2 \end{aligned}$$

1.9 Bemerkung

a) lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten

b) lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten

- $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum

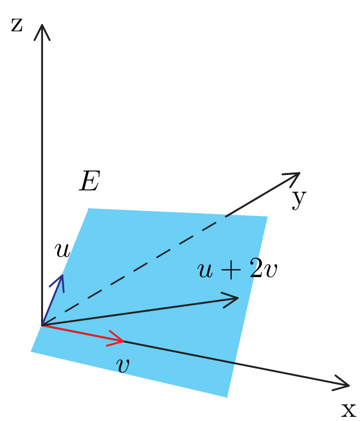
1.10 Beispiel

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad G_1 = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad G_2 = \{\mu w | \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 8.7a), Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Unterräume

- $G_1 + G_2$ ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$ ist $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.11 Beispiel



- $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $E = \{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

- E $\subseteq \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum (UVR) und wird <u>aufgespannt/erzeugt</u> von u und v. Man nennt $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ <u>Erzeugendensystem</u> von E.
- D.h. $w \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : w = \underbrace{\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v}_{\text{Linearkombination von } u \text{ und } v}$

- $w \notin E$, z.B. $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

  $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Letzte Zeile: } 1 = \lambda_1 \\ \text{Zweite Zeile: } 0 = \lambda_1 \end{array}\right\} \lightning$$

  $$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)

V : $\mathbb{R}$-VR (V ist Vektorraum in den reellen Zahlen)

(i) $v_1, ..., v_m \in V$ und $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$
Der Vektor $\lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m$ heißt Linearkombination von $v_1, ..., v_m$.

(ii) Sei $M \subseteq V$. Dann ist

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \{\textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k | \lambda_k \in \mathbb{R}, v_k \in M, n \in \mathbb{N}\}$$

der von M aufgespannte/erzeugte UVR von V

Vereinbarung: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$
Schreibweise: $M = \{v_1, ..., v_m\}_{\mathbb{R}}$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, ..., v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

(iii) Ist $v = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$, so heißt M ein Erzeugendensystem von V. V heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

1.13 Bemerkung

$M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von V, der M enthält.

Beweis

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist UVR. erfüllt Kriterien von 1.6, daher klar:
  1.6 2) erfüllt. $u \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n \quad (M = \{v_1, ..., v_n\}) \Rightarrow$
  $\lambda \cdot u = \underbrace{\lambda\lambda_1}_{\in\mathbb{R}} \cdot v_1 + ... + \underbrace{\lambda\lambda_n}_{\in\mathbb{R}} \cdot v_n$
  1.6 3) ähnlich.

- Angenommen U ist der kleinste UVR, so dass $M \subseteq U$.
  Z. z.: $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$.
  Wegen 1.6 enthält U alle Linearkombinationen von Vektoren aus M.
  $\Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U \Rightarrow U$ kann nicht kleiner sein als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$ $\square$

1.14 Fortsetzung Bsp. 1.11

a) $E = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

b) $\mathbb{R}^n$ wird erzeugt von $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei j die Stelle ist, an der der Vektor 1 ist.

$R^n = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ "kanonische Einheitsvektoren"

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + ... + e_n \cdot v_n$

c) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{R}^2$ auf?

Wenn ja, dann muss für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{aligned} & & \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & & \alpha + \beta &= x \\ & & \alpha + 2\beta &= y \\ \Rightarrow & & \alpha &= x - \beta \\ & & &= y - 2\beta \\ \Leftrightarrow & & \beta &= y - x \\ & & \alpha &= 2x - y \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Allg. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

d) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{R}^2$ auf?

Nein, denn $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2$

e) $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, d.h. Erzeugendensysteme sind <u>nicht</u> eindeutig!

f) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D.h. $M = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ ist kein <u>minimales</u> Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, denn $v \in M$ kann immer dargestellt werden als Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus v$.
Man sagt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind <u>linear abhängig</u>.