

# Mathematik III

Marius Hobbhahn, Florian Friedrich

11. April 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vektorräume</b>	<b>7</b>
1.1	Definition (Reelle Vektorräume) . . . . .	7
1.2	Beispiel . . . . .	7
1.3	Lemma . . . . .	8
1.4	Definition (Untervektorraum) . . . . .	9
1.5	Beispiel . . . . .	9
1.6	Satz (Unterraumkriterium) . . . . .	10
1.7	Beispiel . . . . .	10
1.8	Satz (Verknüpfungen von UVR) . . . . .	13
1.9	Bemerkung . . . . .	13
1.10	Beispiel . . . . .	13
1.11	Beispiel . . . . .	14
1.12	Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem) . . . . .	16
1.13	Bemerkung . . . . .	16
1.14	Definition (Lineare Unabhängigkeit) . . . . .	17
1.15	Beispiel . . . . .	17
1.16	Satz (Lineare Unabhängigkeit) . . . . .	18
1.17	Satz (Lineare Unabhängigkeit) . . . . .	19
1.18	Definition (Basis) . . . . .	20
1.19	Beispiel . . . . .	20
1.20	Satz (Existenz von Basen) . . . . .	20
1.21	Satz (Austauschlemma) . . . . .	21
1.22	Satz (Steinitz'scher Austauschsatz) . . . . .	22
1.23	Korollar . . . . .	22
1.24	Satz (Basis) . . . . .	23
1.25	Definition (Dimension) . . . . .	23
1.26	Korollar . . . . .	24
1.27	Beispiel . . . . .	24
1.28	Satz (Dimensionssatz) . . . . .	25
1.29	Bemerkung (Koordinaten) . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Matrizen und lineare Gleichungssysteme</b>	<b>27</b>
2.1	Beispiel . . . . .	27
2.2	Definition (Matrix) . . . . .	27
2.3	Bemerkung . . . . .	28
2.4	Beispiel: . . . . .	29
2.5	Bemerkung . . . . .	30
2.6	Satz (Rechenregeln) . . . . .	30
2.7	Beispiel . . . . .	30

---

2.8	Definition (Matrixprodukt) . . . . .	31
2.9	Beispiel . . . . .	31
2.10	Satz + Definition (Vektorraum $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ) . . . . .	31
2.11	Beispiel . . . . .	32
2.12	Definition (Matrizentransponierung) . . . . .	32
2.13	Beispiel . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Gruppen</b>	<b>33</b>
3.1	Beispiel (Wiederholung zu Permutationen) . . . . .	33
3.2	Definition (Permutation) . . . . .	33
3.3	Beispiel . . . . .	33
3.4	Bemerkung . . . . .	33
3.5	Beispiel . . . . .	34
3.6	Bemerkung . . . . .	34
3.7	Beispiel . . . . .	35
3.8	Definition (Grundbegriffe) . . . . .	35
3.9	Definition (Gruppe) . . . . .	36
3.10	Beispiel . . . . .	36
3.11	Satz (Symmetrische Gruppe) . . . . .	36
3.12	Beispiel . . . . .	38
3.13	Satz (Eigenschaften von Gruppen) . . . . .	39
3.14	Satz (Gleichungen lösen in Gruppen) . . . . .	40
3.15	Definition (Untergruppe) . . . . .	40
3.16	Beispiel . . . . .	41
3.17	Beispiel . . . . .	41
3.18	Satz + Definition (Rechtsnebenklasse, Repräsentant) . . . . .	41
3.19	Beispiel . . . . .	42
3.20	Kriterium . . . . .	43
3.21	Definition (Wohldefiniertheit) . . . . .	43
3.22	Beispiel . . . . .	43
3.23	Satz (Faktorengruppe/Quotientengruppe) . . . . .	43
3.24	Lemma . . . . .	43
3.25	Theorem (Lagrange) . . . . .	44
3.26	Definition (Potenzen) . . . . .	44
3.27	Satz (Rechenregeln) . . . . .	44
3.28	Satz + Definition (Ordnung, zyklische Gruppe) . . . . .	45
3.29	Bemerkung . . . . .	45
3.30	Korollar . . . . .	46

<b>4</b>	<b>Ringe und Körper</b>	<b>47</b>
4.1	Definition (Ring)	47
4.2	Beispiel	47
4.3	Satz (Rechenregeln für Ringe)	48
4.4	Bemerkung	48
4.5	Definition (Körper)	48
4.6	Beispiel	49
4.7	Satz (Rechenregeln für Körper: Nullteilerfreiheit)	49
4.8	Definition (Ringhomomorphismus, Ringisomorphismus)	49
4.9	Beispiel	49
4.10	Bemerkung	50
4.11	Chinesischer Restsatz	50
4.12	Beispiel	51
4.13	Satz (Eindeutigkeit Chines. Restsatz)	52
4.14	Beispiel	52
4.15	Korollar	53
4.16	Definition (Polynom)	53
4.17	Beispiel	54
4.18	Satz + Definition (Polynomring)	54
4.19	Bemerkung	54
4.20	Beispiel	55
4.21	Definition (Grad)	55
4.22	Satz (Grad verknüpfter Funktionen)	55
4.23	Korollar (Inversen in $\mathcal{K}[x]$ )	55
4.24	Bemerkung	56
4.25	Definition (Teilbarkeit)	56
4.26	Satz (Division mit Rest in $\mathcal{K}[x]$ )	56
4.27	Beispiel	56
4.28	Korollar	56
4.29	Definition (Normiertheit)	57
4.30	Bemerkung	57
4.31	Lemma von Bézout	58
4.32	Satz (Euklidischer Algorithmus EA in $\mathcal{K}[x]$ )	58
4.33	Satz (Erweiterter Euklidischer Algorithmus EEA in $\mathcal{K}[x]$ )	59
4.34	Beispiel	60
4.35	Definition (Primelemente = irreduzible Polynome)	61
4.36	Beispiel	61
4.37	Satz (Irreduzibles Polynom)	62
4.38	Korollar	62
4.39	Satz (Existenz eindeutiger irreduzibler Polynome)	63
4.40	Bemerkung	63

---

<b>5</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>64</b>
5.1	Definition (Grundbegriffe)	64
5.2	Gaußsche Zahlenebene (1831)	64
5.3	Definition (Betrag)	64
5.4	Bemerkung	65
5.5	Formel von Euler	65
5.6	Bemerkung	65
5.7	Bemerkung	65
5.8	Definition (Konjugierte)	66
5.9	Bemerkung	66
5.10	Satz ( $\mathbb{C}$ Körper)	66
5.11	Rechenregeln (Konjunktion, Betrag)	67
5.12	Bemerkung	68
5.13	Wiederholung/Zusammenfassung zu $\mathbb{C}$	69
<b>6</b>	<b>Lineare Abbildungen</b>	<b>71</b>
6.1	Definition (Lineare Abbildung, Isomorphismus)	71
6.2	Bemerkung	71
6.3	Beispiel	72
6.4	Bemerkung	72
6.5	Definition (Homogenes LGS, Lösungsraum)	72
6.6	Satz (Lösung eines LGS)	73
6.7	Satz (Lineare Abbildung UVR)	73
6.8	Definition (Rang, Kern)	74
6.9	Satz (Kern)	74
6.10	Beispiel	75
6.11	Satz (Lineare Abbildung)	75
6.12	Beispiel	76
6.13	Beispiel	77
6.14	Satz (Dimensionsformel)	78
6.15	Korollar	79
6.16	Bemerkung	79
<b>7</b>	<b>Lineare Abbildungen und Matrizen</b>	<b>80</b>
7.1	Definition (Koordinatenvektor)	80
7.2	Beispiel	81
7.3	Definition (Basiswechselmatrix)	82
7.4	Satz (Koordinaten umrechnen)	82
7.5	Beispiel	82
7.6	Definition (Darstellungsmatrix)	83
7.7	Satz (Koordinatenvektor und Lineare Abbildung)	84

7.8	Beispiel	84
7.9	Beispiel	85
7.10	Satz (Umrechnen von Darstellungsmatrizen)	86
7.11	Bemerkung zu Darstellungsmatrizen	86
7.12	Satz (Eigenschaften von Darstellungsmatrizen)	87
7.13	Beispiel	88
7.14	Bemerkung	88
7.15	Satz (Invertierbarkeit)	88
7.16	Satz (Invertierbarkeit, Rang)	88
7.17	Beispiel	89
7.18	Berechnung der Matrixinverse ( $A^{-1}$ )	89
7.19	Lemma	91
7.20	Beispiel	91
7.21	Korollar	91
7.22	Beispiel	91
<b>8</b>	<b>Determinanten</b>	<b>93</b>
8.1	Definition ( $A_{ij}$ )	93
8.2	Definition (Rekursive Definition der Determinante)	93
8.3	Beispiel	93
8.4	Satz (Entwicklungssatz von Laplace)	94
8.5	Beispiel	95
8.6	Satz (Eigenschaften von Determinanten)	96
8.7	Beispiel	97
8.8	Satz (Invertierbarkeit von Matrizen)	97
8.9	Bemerkung	97
<b>9</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>99</b>
9.1	Beispiel	99
9.2	Definition (Eigenvektor, Eigenwert, Eigenraum)	99
9.3	Beispiel	99
9.4	Satz ( $A - \lambda E_n$ )	100
9.5	Beispiel	101
9.6	Definition (charakteristisches Polynom)	101
9.7	Bemerkung	101
9.8	Definition (Diagonalmatrix)	102
9.9	Bemerkung	102
9.10	Beispiel	102
9.11	Definition (Diagonalisierbarkeit)	103
9.12	Satz (Spektralsatz)	103
9.13	Beispiel	104

---

<b>10 Norm und Skalarprodukt</b>	<b>105</b>
10.1 Beispiel . . . . .	105
10.2 Definition (Skalarprodukt, Norm, Abstand, Vektorraum) . . .	105
10.3 Beispiel . . . . .	106
10.4 Satz (Eigenschaften Norm) . . . . .	106
10.5 Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung) . . . . .	107
10.6 Bemerkung . . . . .	107
10.7 Beispiel . . . . .	108
 <b>11 Orthonormalsysteme</b>	 <b>109</b>
11.1 Definition (Grundbegriffe) . . . . .	109
11.2 Bemerkung . . . . .	109
11.3 Satz (Gram-Schmidt) . . . . .	110
11.4 Beispiel . . . . .	110
11.5 Definition (Orthogonale Matrix) . . . . .	111
11.6 Beispiel . . . . .	111
11.7 Satz (Orthogonale Matrix) . . . . .	111
11.8 Bemerkung . . . . .	112
 <b>12 Taylorreihen</b>	 <b>113</b>
12.1 Definition (Taylorpolynom, Restglied) . . . . .	113
12.2 Bemerkung . . . . .	114
12.3 Satz von Taylor . . . . .	114
12.4 Beispiel . . . . .	114
12.5 Definition (Taylorreihe) . . . . .	115
12.6 Bemerkung . . . . .	115
12.7 Beispiel . . . . .	115
12.8 Satz (Konvergenz Taylorreihe) . . . . .	116
12.9 Beispiel . . . . .	116

# Vektorräume

Bemerkung: 1.1-1.10 identisch mit 8.1-8.10 aus Mathematik 2, SS16

## 1.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben,  $v, w, x, y, \dots$ ), auf der eine Addition  $+$  definiert ist,  $+: V \times V \rightarrow V$ ; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots$ ),  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , so dass gilt:

$$(1.1) \quad u + v + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$$

$$(1.2) \quad \text{Es existiert ein Vektor } \mathcal{O} \in V \text{ ('Nullvektor')} \text{ mit } v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \quad \forall v \in V$$

$$(1.3) \quad \text{Zu jedem } v \in V \text{ existiert ein Vektor } -v \in V \text{ mit } v + (-v) = \mathcal{O}$$

$$(1.4) \quad u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als ' $(V, +)$  ist eine kommutative Gruppe').

$$(2.1) \quad \overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$(2.2) \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$$

$$(2.3) \quad \overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$(2.4) \quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

## 1.2 Beispiel

a) trivialer Vektorraum Nullraum:  $V = \{\mathcal{O}\}$

Es gilt  $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}$ ,  $\lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b)  $V = \mathbb{R}^n$ , Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge  $n$  über  $\mathbb{R}$ , Elemente haben

die Form  $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  mit  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \dots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$



c)  $\mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Vektoren: reelle Zahlen.

Skalare: reelle Zahlen.

$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:

$M \neq \emptyset$  Menge.  $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) := \{f: M \rightarrow \mathbb{R}\}$

Menge der auf  $M$  definierten reellen Funktionen.

Für  $f, g \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei

$$- f + g: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$$

$$- \lambda \cdot f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$$

Dann ist  $V$  mit  $\mathbb{R}, +, \cdot$  ein Vektorraum. Nullvektor ist  $f = 0: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $f(x) = 0 \quad \forall x \in M$ .

(kurz:  $f \equiv 0$ , identisch Null)

### 1.3 Lemma

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $v \in V$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

a)  $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b)  $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem  $v \in V$  ist der Vektor  $-v$  aus (1.3) in 1.1 eindeutig bestimmt.

d)  $(-1) \cdot v = -v$

#### Beweis

a)

$$\mathcal{O} \stackrel{(1.3)}{=} \underbrace{\overbrace{0 \cdot v}^x} + \underbrace{\overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x}} = \underbrace{(0 + 0)v}_{\mathcal{O}} + (-0 \cdot v)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v)$$

$$\stackrel{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 \cdot v + (-0 \cdot v))$$

$$\stackrel{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O}$$

$$\stackrel{(1.2)}{=} 0 \cdot v$$

b) Wie a), starte mit  $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$ , erhalte  $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\begin{aligned}
 \underline{v + (-1 \cdot v)} &= 1 \cdot v + (-1 \cdot v) \\
 &\stackrel{(2.1)}{=} (1 + (-1))v \\
 &= 0 \cdot v \\
 &\stackrel{a)}{=} \mathcal{O} \\
 &\stackrel{(1.3)}{=} v + (-v)
 \end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten  $-v$ :

$$\begin{aligned}
 \underline{v + (-1)v} + (-v) &= v + (-v) + (-v) \\
 &\Rightarrow -1 \cdot v = -v
 \end{aligned}$$

- c) Angenommen, zu  $v \in V$  gibt es  $-v$  und  $-v'$  mit  $v + (-v) = \mathcal{O}$  und  $v + (-v') = \mathcal{O}$ . Dann ist  $v + (-v) = v + (-v') \stackrel{+(-v) \text{ auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

□

## 1.4 Definition (Untervektorraum)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

Eine Teilmenge  $U \subseteq V$ ,  $U \neq \emptyset$  heißt Unter(vektor)raum von  $V$ , falls  $U$  bezüglich der Addition auf  $V$  und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

## 1.5 Beispiel

- a)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  ist Unterraum von  $V$
- b)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  ist kein Unterraum von  $V$ , z.B. (1.2) ist verletzt,  
Addition funktioniert auch nicht:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$
- c)  $V = \mathbb{R}^2$ ,  $U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$  ist ein Unterraum von  $V$  (prüfe alle Eigenschaften von Definition 1.1)  $\rightarrow$  umständlich, einfacher geht es mit Definition 1.6

## 1.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum, sei  $\emptyset \neq U \subseteq V$ .

Dann ist  $U$  Unterraum von  $V$  genau dann, wenn gilt ( $\Leftrightarrow$ ):

$$(1) \quad v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$$

$$(2) \quad v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$$

(oder äquivalent:  $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist  $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$ )

Man sagt:  $U$  ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

### Beweis

$\Rightarrow$  ist klar, da  $U$  laut Definition 1.4 selbst Vektorraum

$\Leftarrow$  rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 1.1, also z.B.  $\mathcal{O} \in U, \dots$ )

□

## 1.7 Beispiel

a)

$V$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $\mathcal{O} \neq v \in V$ .

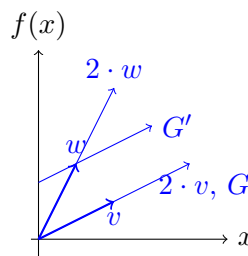
Dann ist  $G = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  ein Unterraum.

$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ :  $G$  ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aber:  $G' = \{w + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}, w \in V\}$  ist kein Unterraum für  $w \neq \mu \cdot v, \mu \in \mathbb{R}$ .

Warum? Z.B.  $\mathcal{O} \notin G'$



b)  $V = \mathbb{R}^3, \quad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$  ist Unterraum. Wir

zeigen (1), (2) aus 1.6:

$$- U_1 \neq \emptyset, \text{ z.B. } \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1, \text{ denn } \overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$$

(1) Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$ , d.h.  $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist  $\lambda \cdot v \in U_1$ ?  $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist  $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$ , d.h.  $v_1 + v_2 - v_3 = 0$ ,  $w_1 +$

$w_2 - w_3 = 0$ . Gilt  $v + w \in U_1$ ?  $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also  $v + w \in U_1$

– Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

D.h.  $U_1$  ist die Ebene durch  $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit den Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c)  $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 1 \right\}$  ist kein Unterraum. Z.B.  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \notin U_2$ :  $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$ .

Anderes Argument: Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$ , d.h.  $x_1 + x_2 - x_3 = 1$ .

Gilt  $\lambda \cdot x \in U_2$ ?  $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda}_{\text{nur für } \lambda=1} = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  nicht erfüllt für  $\lambda \neq 1$ .

Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Ebene durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  mit Richtungsvektoren  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d)  $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$  ist kein Unterraum, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \quad 1^2 + 0^2 + 0^2 \leq 1 \quad \checkmark, \text{ aber}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3, \text{ denn } 2^2 + 0^2 + 0^2 \not\leq 1$$

Geometrische Interpretation:

$U_3$  ist eine Kugel um  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  mit Radius 1

e)  $I \subseteq \mathbb{R}$  Intervall

Menge  $C(I)$  ( $C$ : continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf  $I$  ist Unterraum von  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  (vgl. Beispiel 1.2d)).

Menge der diffbaren Funktionen auf  $I$  ist Unterraum von  $C(I)$ .

## 1.8 Satz (Verknüpfungen von UVR)

$V$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $U_1, U_2$  sind Unterräume von  $V$ .

- $U_1 \cap U_2 = \{u \in V \mid u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$  ist Unterraum von  $V$ .
- $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$  Summe von  $U_1, U_2$  ist Unterraum von  $V$   
(das ist nicht die Vereinigung  $U_1 \cup U_2$ !)

### Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 1.6

- Übung: Prüfe  $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$ ? ✓, (1), (2)
- $U_1 + U_2 \neq \emptyset$ , denn  $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$   
– Seien  $v = u_1 + u_2$ ,  $u_1 \in U_1$ ,  $u_2 \in U_2$  und  
 $w = u'_1 + u'_2$ ,  $u'_1 \in U_1$ ,  $u'_2 \in U_2$ ,  
also  $v, w \in U_1 + U_2$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lambda v + \mu w &= \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u'_1 + u'_2) \\ &= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u'_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u'_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 \end{aligned}$$

## 1.9 Bemerkung

- lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten
- lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten
  - $U_1 \cup U_2$  ist im Allgemeinen kein Unterraum

## 1.10 Beispiel

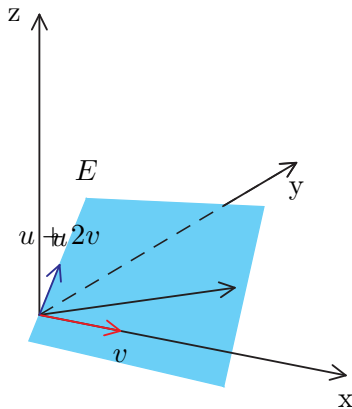
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad G_1 = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad G_2 = \{\mu w \mid \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 1.7a), Geraden durch  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , Unterräume

- $G_1 + G_2$  ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$  ist  $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

## 1.11 Beispiel

18.10.16



$$\bullet u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet E = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- $E \subseteq \mathbb{R}^3$  ist Untervektorraum (UVR) und wird aufgespannt/erzeugt von  $u$

und  $v$ . Man nennt  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  Erzeugendensystem von  $E$ .

- D.h.  $w \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : w = \underbrace{\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v}_{\text{Linearkombination von } u \text{ und } v}$

- $w \notin E$ , z.B.  $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Letzte Zeile: } 1 = \lambda_1 \\ \text{Zweite Zeile: } 0 = \lambda_1 \end{array} \right\} \text{?}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

## Beispiel

$$\text{a) } E = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

(Nachtrag  
vom  
19.10.16)

b)  $\mathbb{R}^n$  wird erzeugt von  $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , wobei j die Stelle ist, an der der Vektor 1

ist.

$$\mathbb{R}^n = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{"kanonische Einheitsvektoren"}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + e_n \cdot v_n$$

c) Spannen  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  den  $\mathbb{R}^2$  auf?

Wenn ja, dann muss für  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$   $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\alpha + \beta = x$$

$$\alpha + 2\beta = y$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = x - \beta$$

$$= y - 2\beta$$

$\Leftrightarrow$

$$\beta = y - x$$

$$\alpha = 2x - y$$

$$\Rightarrow \text{Allg. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

d) Spannen  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  den  $\mathbb{R}^2$  auf?

Nein, denn  $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$  ist  $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subsetneq \mathbb{R}^2$

e)  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ , d.h. Erzeugendensysteme sind nicht eindeutig!



$$\text{f) } \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \text{ da } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

D.h.  $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$  ist kein minimales Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^2$ , denn  $v \in M$  kann immer dargestellt werden als Linearkombination von Vektoren aus  $M \setminus \{v\}$ .

Man sagt:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  sind linear abhängig.

### 1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)

$V : \mathbb{R}$ -VR ( $V$  ist Vektorraum in den reellen Zahlen)

- (i)  $v_1, \dots, v_m \in V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$   
Der Vektor  $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m$  heißt Linearkombination von  $v_1, \dots, v_m$ .

- (ii) Sei  $M \subseteq V$ . Dann ist

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_k \in \mathbb{R}, v_k \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$$

der von  $M$  aufgespannte/erzeugte UVR von  $V$

Vereinbarung:  $\langle \emptyset \rangle = \{\mathcal{O}\}$

Schreibweise:  $M = \{v_1, \dots, v_m\}$

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$$

- (iii) Ist  $V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ , so heißt  $M$  ein Erzeugendensystem von  $V$ .  $V$  heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

### 1.13 Bemerkung

$M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  ist der kleinste UVR von  $V$ , der  $M$  enthält.

#### Beweis

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  ist UVR. erfüllt Kriterien von 1.6, daher klar:  
1.6 2) erfüllt.  $u \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \quad (M = \{v_1, \dots, v_n\})$   
 $\Rightarrow \lambda \cdot u = \underbrace{\lambda \lambda_1}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{\lambda \lambda_n}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_n$   
1.6 3) ähnlich.

- Angenommen  $U$  ist der kleinste UVR, so dass  $M \subseteq U$ .  
 Z. z.:  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$ .  
 Wegen 1.6 enthält  $U$  alle Linearkombinationen von Vektoren aus  $M$ .  
 $\Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U \Rightarrow U$  kann nicht kleiner sein als  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$   $\square$

**Beispiel**

19.10.16

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ Gerade}$$

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \supseteq M$
- $E = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \supseteq M$

$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  Gerade,  $E$  Ebene, d.h.  $E$  ist größer als  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$   
 $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  ist der kleinste UVR von  $\mathbb{R}^3$ , der  $M$  enthält.

**1.14 Definition (Lineare Unabhängigkeit)**

- $V$ :  $\mathbb{R} - VR$ ,  $v_1, \dots, v_n$  heißen linear unabhängig, wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = 0 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\lambda = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0}_{\text{einzige Lösung!}}$$

- $M \subseteq V$  heißt linear unabhängig, wenn gilt:  
 Für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  und  $v_1, \dots, v_m \in M$  paarweise verschieden sind  $v_1, \dots, v_m$  linear unabhängig
- Ist in obigen beiden Fällen (mindestens)  $\lambda_i \neq 0$ , dann sind die Vektoren linear abhängig

**1.15 Beispiel**

- a)  $\mathcal{O}$  ist linear abhängig, da  $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O} \quad \forall \lambda \neq 0$

- b) Sind  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$  linear abhängig in  $\mathbb{R}^2$  ?

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

$$\begin{cases} \text{I} & \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \text{II} & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Erfüllt für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \text{ Aber hier gibt}$$

es noch die Lösung:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1!$

$\Rightarrow$  Vektoren sind linear abhängig

c)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  linear unabhängig (l.u.) in  $\mathbb{R}^3$

d)  $v \neq \mathcal{O}, v \in V, v$  ist linear unabhängig  
 Angenommen es existiert  $\lambda \neq 0$  mit  $\lambda \cdot v = \mathcal{O}$ .  
 $\Rightarrow v = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \mathcal{O} \quad \text{!}$

e)

$$v, w \text{ linear abhängig} \Leftrightarrow v = \lambda w, \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$$

f) In  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung}\}$  sind die Vektoren

- $f(x) = x, g(x) = x^2$  linear unabhängig
- $f(x) = \sin^2(x), g(x) = \cos^2(x), h(x) = 2$  linear abhängig:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x \\ 0 &= \underbrace{2}_{\lambda_1} \sin^2 x + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cos^2 x + \underbrace{-1}_{\lambda_3} \cdot 2 \end{aligned}$$

## 1.16 Satz (Lineare Unabhängigkeit)

$$M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$$

(i)  $M$  linear unabhängig  $\Leftrightarrow$  Zu jedem  $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$  gibt es eindeutig bestimmte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$

(ii)  $M$  linear unabhängig,  $v \notin \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow M \cup \{v\}$  linear unabhängig

### Beweis

(i)  $(\Leftarrow) \mathcal{O} \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists$  eindeutig bestimmte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} :$

$$\mathcal{O} = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

Gleichung erfüllt für  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  (eindeutige Lösung)

$(\Rightarrow)$  Sei  $M$  linear unabhängig,  $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\text{Angenommen } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot v_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{=0, \text{ da } M \text{ linear unabhängig}} \cdot v_i = \mathcal{O}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

(ii) Z.z.:  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i, \lambda = 0$

$$\text{Annahme: } \lambda \neq 0 \Rightarrow v = -\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot v_n$$

$$\Rightarrow v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}. \text{ Also } \lambda = 0$$

$\lambda_i = 0$ , weil  $M$  linear unabhängig.

□

## 1.17 Satz (Lineare Unabhängigkeit)

$M \subseteq V$  linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow N = M$$

In Worten: Man kann von  $M$  keinen Vektor weglassen, ohne dass der von  $M$  aufgespannte Raum sich verkleinert.

### Beweis

( $\Rightarrow$ ) Sei  $M \subseteq V$  linear unabhängig.

Angenommen: Man kann doch aus  $M$  Vektoren weglassen, d.h.

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$N \neq M \Rightarrow \exists x \in M \setminus N \quad (\text{da } N \subseteq M)$$

$$\Rightarrow \exists v_1, \dots, v_n \in N \quad \text{paarweise verschieden und}$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{so dass}$$

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad (\text{da } \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - x = \mathcal{O}$$

$$\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\in N}, \quad \underbrace{x}_{\in M \setminus N} \text{ paarweise verschieden}$$

Da  $N \subseteq M$ , ist  $\underbrace{v_1, \dots, v_n, x}_{\text{linear abhängig}} \in M \Rightarrow M$  linear abhängig!

Also muss  $N = M$  gelten.

( $\Leftarrow$ ) Sei  $M$  linear abhängig.

Z.z. Man kann Vektoren aus  $M$  weglassen, d.h.:

$$\exists N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$M \text{ linear abhängig} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists v_1, \dots, v_n \in M$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (mit } \lambda_i \neq 0 \text{ für ein } i)$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

O.B.d.A:  $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot v_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$

Setze  $N = M \setminus \{v_1\} \Rightarrow N \neq M$

Da  $v_1$  Linearkombination von  $v_2, \dots, v_n$  folgt:

Jede Linearkombination von  $v_1, \dots, v_n$  lässt sich ausdrücken als Linearkombination von  $v_2, \dots, v_n \Rightarrow \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$   $\square$

## Basis und Dimension

25.10.16

Ein minimales Erzeugendensystem heißt Basis.

### 1.18 Definition (Basis)

$V$  endlich erzeugt  $\mathbb{R}$ -VR. Eine endliche Menge  $B \subseteq V$  heißt Basis, falls

- $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$  und
- $B$  linear unabhängig.

Für  $V = \{\mathcal{O}\}$  ist  $B = \emptyset$  die Basis.

### 1.19 Beispiel

a)  $\{e_1, \dots, e_n\}$  ist Basis von  $\mathbb{R}^n$  ('Standard-/kanonische Basis')

b) Basis ist nicht eindeutig.

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}, \text{ da: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}$$

### 1.20 Satz (Existenz von Basen)

$V$  endlich erzeugt  $\mathbb{R}$ -VR  $\Rightarrow$  Jedes endliche Erzeugendensystem enthält Basis.

#### Beweis

Sei  $M \subseteq V$  endlich,  $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = V$

- $M$  linear unabhängig  $\rightarrow$  fertig
- $M$  linear abhängig  $\stackrel{1.17}{\Rightarrow}$  Man kann aus  $M$  einen Vektor  $v \in M$  weglassen, so dass  $\langle M \setminus \{v\} \rangle_{\mathbb{R}} = V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ . Nach endlich vielen Schritten liefert das Verfahren eine Basis.  $\square$

## Fragen

- Basis nicht eindeutig. Sind alle Basen gleich groß?
- geg.  $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ . Wie kann man  $w$  zu einer Basis ergänzen? Welche Vektoren aus  $S$  sind geeignet?

$$w = \frac{1}{3}e_1 + e_3 = \{ \underbrace{w, e_1, e_3}_{\text{linear abhängig}} \} \text{ keine Basis, aber}$$

$$\{ \underbrace{w, e_1, e_2}_{\text{linear unabhängig}} \} \text{ Basis und } \{w, e_2, e_3\} \text{ Basis}$$

## 1.21 Satz (Austauschlemma)

$V$  endlich erzeugter  $\mathbb{R}$ -VR. Gegeben:  $w \in V$ ,  $w \neq \mathcal{O}$ ,  $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ , wobei  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  Basis von  $V$ .

$$\Rightarrow \underbrace{(B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}}_{(*)} \text{ Basis, falls } \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \neq 0$$

## Beweis

Z.z:  $(*)$  ist Basis.

- 1)  $(*)$  ist linear unabhängig.  
Z.z:

$$\sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \text{ und } \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w &= \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) \\ &= \sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu \lambda_i) v_i + \mu \lambda_j v_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ Basis} &\Rightarrow \mu \lambda_j = 0 \text{ und } \mu_i + \mu \lambda_i = 0 \quad \forall i \neq j \\ \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \neq 0 &\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu_i + \underbrace{\mu \lambda_i}_{=0} = \mu_i = 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

2)  $(\star)$  erzeugt  $V$ .

$$\begin{aligned}
 w &= \lambda_j v_j + \sum_{i \neq j}^{\lambda_i v_i} & | : \lambda_j, \text{ da } \lambda_j \neq 0 \\
 \Leftrightarrow v_j &= \frac{1}{\lambda_j} w - \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \\
 \Rightarrow v_j &\in \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} \\
 \Rightarrow \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} = V
 \end{aligned}$$

## 1.22 Satz (Steinitz'scher Austauschatz)

Geg.  $w_1, \dots, w_m \in V$  linear unabhängig,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ .

Es folgt:

- Aus den  $n$  Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  kann man  $n - m$  Vektoren auswählen, die mit  $w_1, \dots, w_m$  eine Basis bilden.
- $m \leq n$

### Beweis

- 1)  $w_1 \in V \Rightarrow w_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$   
 Wären alle  $\lambda_i = 0$ , dann wäre auch  $w_1 = \mathcal{O}$ . Da  $\mathcal{O} \in V$  linear abhängig ist, wäre also auch  $w_1, \dots, w_m$  linear abhängig.  $E$   
 Also: Mindestens ein  $\lambda_i \neq 0$   
 O.B.d.A.  $\lambda_1 \neq 0$  (sonst umnummerieren)  $\stackrel{1.20}{\Rightarrow} \{w_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist Basis von  $V$
- 2)  $w_2 \in V \Rightarrow w_2 = \mu_1 w_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i v_i$   
 Wären alle  $\mu_2, \dots, \mu_n = 0$ , so wäre  $w_2 = \mu_1 w_1$ , also auch  $w_1, w_2$  linear abhängig.  $E$ , da  $\{w_1, \dots, w_m\}$  linear unabhängig.  
 $\Rightarrow$  Mindestens ein  $\mu_i \neq 0$ ,  $i \in \{2, \dots, n\}$   
 O.B.d.A.  $\mu_2 \neq 0$   $\stackrel{1.20}{\Rightarrow} \{w_1, w_2, v_3, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$

□

b)  $\rightarrow$  Übung

## 1.23 Korollar

$V$  endlich erzeugt  $\mathbb{R}$ -VR

- Je zwei Basen von  $V$  enthalten gleich viele Elemente.

ii) Basisergänzungssatz

Jede linear unabhängige Teilmenge von  $V$  lässt sich zu einer Basis von  $V$  ergänzen.

### Beweis

i)  $B, \tilde{B}$  Basen

$B$  linear unabhängig  $\stackrel{1.22b)}{\Rightarrow} |B| \leq |\tilde{B}|$

$\tilde{B}$  linear unabhängig  $\stackrel{1.22b)}{\Rightarrow} |\tilde{B}| \leq |B|$

$\Rightarrow |B| = |\tilde{B}|$

ii) Wähle beliebige Basis von  $V$  und tausche aus(1.22a)).

## 1.24 Satz (Basis)

$V$  endlich erzeugter  $\mathbb{R}$ -VR,  $B \subseteq V$ .

Dann sind äquivalent:

i)  $B$  ist Basis

ii)  $B$  ist maximale linear unabhängige Menge in  $V$

iii)  $B$  ist minimales Erzeugendensystem

### Beweis

i) $\Rightarrow$ ii) Wegen 1.23 (linear unabhängige Menge zu Basis ergänzen, alle Basen gleich groß)

ii) $\Rightarrow$ i) (Bzw.  $\neg$ i) $\Rightarrow \neg$ ii.)  $B$  keine Basis,  $B$  linear unabhängig  
 $\Rightarrow \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq V \Rightarrow \exists v \in V \setminus \langle B \rangle_{\mathbb{R}}: B \cup \{v\}$  linear unabhängig

i) $\Rightarrow$ iii) Satz 1.17

□

## 1.25 Definition (Dimension)

26.10.16

$V : \mathbb{R}$ -VR

i) Ist  $V$  endlich erzeugbar,  $B$  Basis von  $V$ ,  $|B| = n$  so hat  $V$  die Dimension  $n$ ,  $\dim(V) = n$

ii) Ist  $V$  nicht endlich erzeugbar, so heißt  $V$  unendlichdimensional.



## 1.26 Korollar

$\dim V = n, B \subseteq V, |B| = n.$

Dann ist  $B$  Basis von  $V$ , wenn  $B$  linear unabhängig oder  $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$

### Beweis

Folgt aus 1.24

## 1.27 Beispiel

a)  $\{e_1, \dots, e_n\}$  Basis von  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

b)  $\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow \dim(\{\mathcal{O}\}) = 0$

c) Bilden  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  Basis von  $V$ ?

Ja, weil linear unabhängig (siehe Korollar 1.26).

d)  $V = \mathbb{R}^4, U = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$

$u_1, u_2$  linear unabhängig  $\Rightarrow \dim(U) = 2$

Ergänze  $u_1, u_2$  zu Basis von  $V = \mathbb{R}^4$

– 1. Möglichkeit (Austauschlemma + Steinitz)

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  Basis von  $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + e_4 \Rightarrow \{u_1, e_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_3 \Rightarrow \{u_1, u_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

(Basis könnte auch anders aussehen, nur beispielhaft dargestellt)

– 2. Möglichkeit (1.16)

\*  $e_1 \notin U$  (\*) (nachrechnen)

$\stackrel{1.16}{\Rightarrow} \{u_1, u_2, e_1\}$  linear unabhängig

\*  $e_4 \notin \langle \{u_1, u_2, e_1\} \rangle_{\mathbb{R}}$  (nachrechnen)  
 $\xrightarrow{1.16} \{u_1, u_2, e_1, e_4\}$  linear unabhängig und damit Basis (Korollar 1.26)

(\*) Angenommen:

$$\begin{aligned}
 e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} I & 1 = \lambda_1 \\ II & 0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ III & 0 = \lambda_2 \\ IV & 0 = \lambda_1 \end{cases} \quad \text{zu I} \\
 &\Rightarrow e_1 \notin \langle \{u_1, u_2\} \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \{u_1, u_2, e_1\} \text{ linear unabhängig}
 \end{aligned}$$

## 1.28 Satz (Dimensionssatz)

$V$   $\mathbb{R}$ -VR,  $\dim(V) = n$

- i)  $U \subseteq V$  ist UVR  $\Rightarrow \dim(U) \leq n$
- ii)  $U \subseteq W \subseteq V$ ,  $U, W$  sind UVR mit  $\dim(U) = \dim(W) \Rightarrow U = W$
- iii)  $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

### Beweis

- i) Basis von  $U$  kann man zu Basis von  $V$  ergänzen  $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$
- ii)  $\dim(U) = \dim(W) \xrightarrow{U \subseteq W} \text{Basis von } U \text{ auch Basis von } W \Rightarrow U = W$
- iii) Sei  $\{v_1, \dots, v_k\}$  Basis von  $U \cap W$   
 Ergänze  $\{v_1, \dots, v_k\}$  zu
  - a) Basis  $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$  von  $U$
  - b) Basis  $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l\}$  Basis von  $W$

Behauptung:  $B = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l, u_{k+1}, \dots, u_m\}$  Basis von  $U + W$

1)  $B$  linear unabhängig

Sei

$$\overbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k}^{=v} + \overbrace{\mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_m u_m}^{=u} + \overbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l}^{=w} = 0$$

$\lambda_i, \mu_j, \gamma_r \in \mathbb{R}$

Es ist  $w \in U \cap W$ , da

$$* \quad w = \underbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots}_{\in W} + \underbrace{\gamma_l w_l}_{\in W} \in W$$

$$* \quad w = - \underbrace{u}_{\in U} - \underbrace{v}_{\in U} \in U$$

Also:  $w \in U \cap W$ .

$$\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow w = \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_k = 0$$

$\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l\}$  linear unabhängig

$$\Rightarrow \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_l = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

$$\Rightarrow w = 0 \text{ und } v + u + w = v + u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_m u_m = 0$$

$\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$  linear unabhängig (Basis von  $U$ )

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_m = 0$$

2)  $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = U + W$ , da:

$$* \quad \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U + W \text{ (da } \underbrace{u + v}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W} \in U + W)$$

$$* \quad U \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \text{ (da Basis von } U \text{ in } B)$$

$$* \quad W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow U + W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$$

□

## 1.29 Bemerkung (Koordinaten)

Geg.: Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ , Vektor  $u \in V$

$$\Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$\lambda_i$  eindeutig und heißen Koordinaten von  $u$  bezüglich der Basis  $B$ .

$$\text{z.B.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ hat Koordinaten } 1, 1, 3 \text{ bezüglich}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

## 2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

02.11.16

### 2.1 Beispiel

- Ein Bauer besitzt Kühe und Gänse
- Insgesamt 18 Tiere mit 40 Beinen
- Frage: Wieviele der Tiere sind Kühe?

Lineares Gleichungssystem (LGS): \*

$$\begin{cases} I: & k + g & = & 18 \\ II: & 4k + 2g & = & 40 \end{cases} \Leftrightarrow 2k + g = 20$$

$$\Rightarrow g = 20 - 2k = 18 - k \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow g = 16$$

Vektorenschreibweise von \*:

$$\begin{pmatrix} k + g \\ 4k + 2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ oder } k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

### 2.2 Definition (Matrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:  
Gegeben:

- Unbekannte  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $m \in \mathbb{N}$  Gleichungen
- Koeffizienten  $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$Ax = b$  mit

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{c} \text{Zeile} \\ \uparrow \\ \text{Spalte} \end{array}$$

$$\bullet x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\bullet b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Man schreibt  $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$  oder nur  $A = (a_{ij})$ , wenn  $m, n$  schon bekannt.

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$  - Eingänge der Matrix  $A$
- $A$  - reelle  $m \times n$ - Matrix
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  - Menge aller reellen  $m \times n$  - Matrizen
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$  - quadratische Matrizen

(\*\*) Dabei ist

$$Ax := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

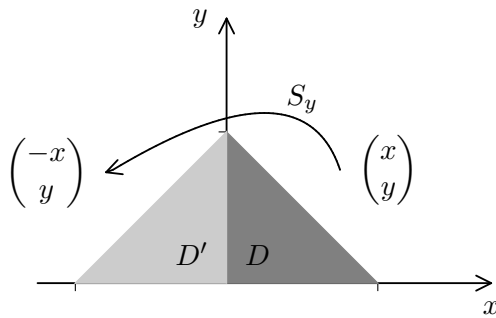
### 2.3 Bemerkung

Aus (\*\*) ergibt sich:  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto A \cdot x$  für  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$   
 $A$  bildet Vektoren auf Vektoren ab.

Matrizen können nicht nur zur Lösung von LGS verwendet werden, sondern auch in der Geometrie:

## 2.4 Beispiel:

a) Spiegelung  $S_y$  in  $\mathbb{R}^2$  an  $y$ -Achse



$$S_y : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$S_y = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

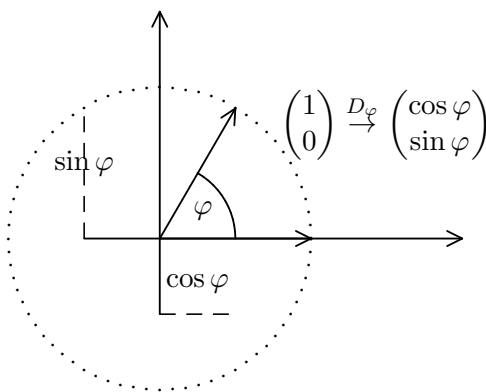
$$S_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} + s_{12} \\ s_{21} + s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow s_{11} = -1 \quad s_{12} = 0 \quad s_{21} = 0 \quad s_{22} = 1$$

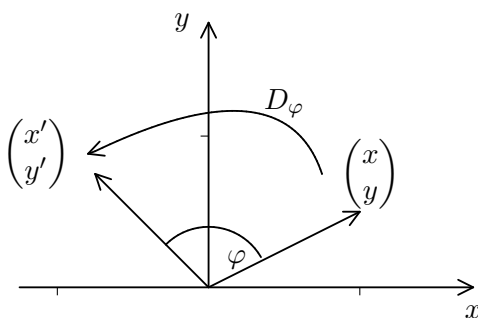
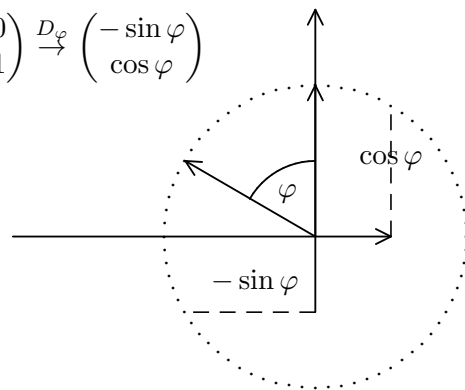
$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$S_y$  bildet  $D$  auf  $D'$  ab.

b) Drehung  $D_\varphi$  um  $\varphi \in [0, 2\pi)$   
Vorüberlegung am Einheitskreis:



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{D_\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$



$$D_\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$D_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D_\varphi = (D_\varphi \cdot e_1, D_\varphi \cdot e_2) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

## 2.5 Bemerkung

Aus Beispiel 2.4 b) und Definition 2.2 ergibt sich:

$$A \cdot e_j = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j\text{-te Spalte von } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$$

$$\Rightarrow A = (\underbrace{A_{e_1}, A_{e_2}, \dots, A_{e_n}}_{\text{Spalten}})$$

## 2.6 Satz (Rechenregeln)

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{i) } A(\lambda x) = \lambda(A \cdot x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } A(x + y) = Ax + Ay$$

### Beweis

i)

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= (\lambda x_1) \underbrace{A \cdot e_1}_{1. \text{ Spalte}} + (\lambda x_2) A e_2 + \dots + (\lambda x_n) \underbrace{A e_n}_{n\text{-te Spalte}} \\ &= \lambda [x_1 (A e_1) + \dots + x_n (A e_n)] \\ &= \lambda (Ax) \end{aligned}$$

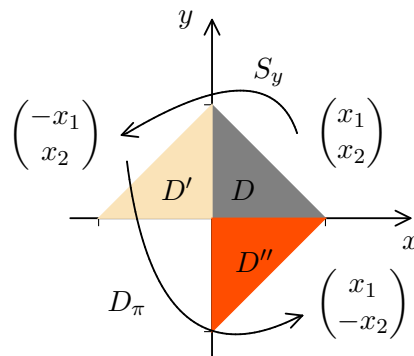
ii) Übung

## 2.7 Beispiel

a)

$$\begin{aligned} A \cdot x &= (D_\pi \circ S_y) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= D_\pi \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A = D_\pi \circ S_y$  bildet  $D$  auf  $D''$  ab.



b) Berechnung Matrixprodukt (Verknüpfung)  $A \cdot B$

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{\left[ x_1 \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} \\
 &\stackrel{2.6}{=} x_1 \underbrace{\left[ e \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} + x_2 \underbrace{\left[ f \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} ea + gb & fa + hb \\ ec + gd & fc + hd \end{pmatrix}}_{\text{Matrixprodukt } A \cdot B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

## 2.8 Definition (Matrixprodukt)

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad B = (b_{jk}) \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot B = (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R})$$

$$c_{ik} = (i\text{-te Zeile von } A) \cdot (k\text{-te Spalte von } B)$$

$$= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$$

(Skalarprodukt)

## 2.9 Beispiel

08.11.16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$  nicht definiert!

## 2.10 Satz + Definition (Vektorraum $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ )

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$  ist Vektorraum mit

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
- $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis: Siehe Hausaufgabe 03 Aufgabe 4a)



### 2.11 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

### 2.12 Definition (Matrizentransponierung)

i)  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ,  $A = (a_{ij})$ .

Die zu  $A$  transponierte Matrix (Tauschen von Zeilen und Spalten):

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\text{z.B.: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix heißt symmetrisch, wenn  $A = A^T$ , z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } - \text{ Nullmatrix: } \mathcal{O}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$- \text{ Einheitsmatrix (nur Hauptdiagonale): } E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

### 2.13 Beispiel

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ Matrixmultiplikation nicht kommutativ!}$$

$$\text{b) } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$A \cdot E_n = A \text{ und } E_m \cdot A = A$$

## 3 Gruppen

### 3.1 Beispiel (Wiederholung zu Permutationen)

Geg.: Menge  $\{A, B, C\}$

Anordnungen: ABC, CAB, ACB, ...  $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$  Möglichkeiten

Jede Anordnung kann man auffassen als eineindeutige (bijektive) Abbildung

$\pi : \{A, B, C\} \rightarrow \{A, B, C\}$

x	A	B	C
$\pi(x)$	A	C	B

### 3.2 Definition (Permutation)

- Eine Permutation ist eine eineindeutige Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst. Im Allgemeinen verwendet man die Menge  $\{1, \dots, n\}$  und schreibt eine Permutation  $\pi$  als Wertetabelle  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$  oder als geordnete Liste der Werte  $\pi = \pi(1)\dots\pi(n)$
- $\mathcal{S}_n$ - Menge aller Permutationen von  $\{1, \dots, n\}$ ,  $|\mathcal{S}_n| = n!$

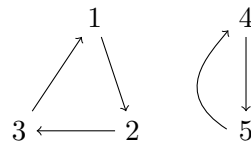
#### Beispiel

$\mathcal{S}_2 = \{\text{id}, (AB)\} = \{\text{id}, (12)\}$ ,  $|\mathcal{S}_2| = 2! = 2$

mit  $\text{id} = \begin{pmatrix} AB \\ AB \end{pmatrix}$ ,  $\pi = \begin{pmatrix} AB \\ BA \end{pmatrix}$

### 3.3 Beispiel

- $M = \{1, 2, \dots, 5\}$   
 $\pi = \pi(1)\dots\pi(5) = 23154$   
oder  $\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix}$
- $\text{id}(i) = i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$



Graph der Permutation

### 3.4 Bemerkung

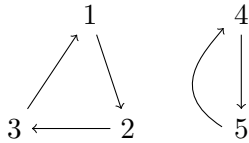
In Literatur oft Zyklenschreibweise:

Zyklus  $(a_1 a_2 \dots a_k)$  bedeutet  $\pi(a_i) = a_{i+1}$  und  $\pi(a_k) = a_1$

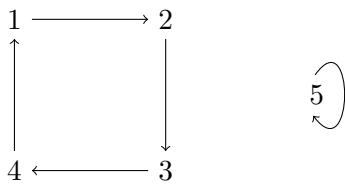
z.B.:  $\pi = (123)(45)$

## Verknüpfung von Permutationen

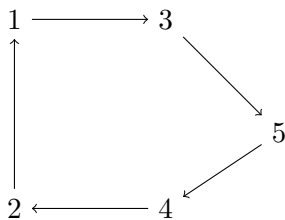
### 3.5 Beispiel



$$\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix} = (123)(45)$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23415 \end{pmatrix} = (1234)(5)$$



$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 31524 \end{pmatrix} = (13542)$$

### 3.6 Bemerkung

- Die Verknüpfung von 2 Permutationen  $\pi, \sigma$  ist wieder Permutation  $\eta$  mit  $\eta(i) = \pi \circ \sigma(i) = \pi(\sigma(i))$
- Fixpunkte mit  $\pi(i) = i$  lässt man weg, z.B.  $\underbrace{(123)}_{\in \mathcal{S}_4}(4) = (123)$
- Jede Permutation kann als Produkt disjunkter Zyklen geschrieben werden, z.B.:  $(34) \cdot (345) = (3)(45) = (45)$ .  
Verkettung  $\circ$   
 Zwei Zyklen heißen disjunkt, wenn  $\{a_1 \dots a_k\} \cap \{b_1 \dots b_j\} = \emptyset$ .
- Permutationen sind nur in sehr seltenen Fällen kommutativ:  
 $(123)(23) = (12) \neq (23)(123) = (13)$
- Zyklendarstellung nicht eindeutig, z.B.:  
 $(123) = (231)$  oder  $(34)(12) = (12)(34)$

### 3.7 Beispiel

09.11.16

Symmetrieoperationen des Rechtecks	Identität	Spiegelung y-Achse	Spiegelung x-Achse	Drehung 180°
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           D C A B         </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           C D B A         </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           A B D C         </div>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">           B A C D         </div>
als Matrix	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$D_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
als Permutation der Ecken	id	$\pi = (AB)(CD)$	$\sigma = (AD)(BC)$	$\eta = (AC)(BD)$

### Verknüpfungstafel

Matrixmultiplikation	$E_2$	$S_y$	$S_x$	$D_\pi$
$E_2$	$E_2$	$S_y$	$S_x$	$D_\pi$
$S_y$	$S_y$	$E_2$	$D_\pi$	$S_x$
$S_x$	$S_x$	$D_\pi$	$E_2$	$S_y$
$D_\pi$	$D_\pi$	$S_x$	$S_y$	$E_2$

### 3.8 Definition (Grundbegriffe)

- Seien  $X, Y$  nichtleere Mengen, Eine Verknüpfung ' $\cdot$ ' ist eine Abbildung

$$X \times X \rightarrow Y \quad (a, b) \rightarrow a \cdot b \quad (\leftarrow \text{'Produkt' von a und b})$$

- Eine Menge  $X \neq \emptyset$  heißt abgeschlossen bzgl. einer Verknüpfung ' $\cdot$ ', falls  $a \cdot b \in X \quad \forall a, b \in X$ .

Beispiel:  $X = \{-1, 1\}$  mit ' $\cdot$ ' Addition  $\Rightarrow (-1) \cdot (1) = -1 + 1 = 0$

Die Menge  $\{id, \pi, \sigma, \eta\}$  aus Beispiel 3.7 ist abgeschlossen bzgl. der Verkettung von Permutationen

### Bemerkung

Die Verknüpfung von Elementen einer endlichen Menge stellt man anhand der Verknüpfungstafel dar, siehe Beispiel 3.7.

### 3.9 Definition (Gruppe)

- a) Eine Gruppe ist ein Paar  $(G, \cdot)$  mit Menge  $G \neq \emptyset$  und einer Verknüpfung  $\cdot : \underbrace{G \times G \rightarrow G}_{\text{abgeschlossen!}}$ , die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1)  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$  Assoziativität
- 2)  $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$  Neutralelement  $\uparrow$
- 3)  $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$  Inverse

Falls zusätzlich

- 4)  $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$  Kommutativität

gilt, dann heißt  $G$  abelsche Gruppe.

- b)  $|G|$  heißt Ordnung der Gruppe  $G$ .

### 3.10 Beispiel

- a)  $(\{e\}, \cdot)$  ist Gruppe
- b)  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  mit  $+$  ist abelsche Gruppe. Inverse zu  $a$  ist  $-a$ .
- c)  $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  mit  $\cdot$  keine Gruppen. Problem:  $0$  besitzt keine Inverse, weil  $0 \cdot a = 1 \neq$

$\Rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q}$  mit  $\cdot$  Gruppen, wenn man  $0$  weglässt

- d) Einzige endliche Gruppen von reellen Zahlen:

- $(\{1\}, \cdot)$  bzw.  $(\{0\}, +)$
- $(\{1, -1\}, \cdot)$

Für weitere endliche Gruppen muss man Restklassen (Beispiel 3.12) Matrizen oder Permutationen betrachten

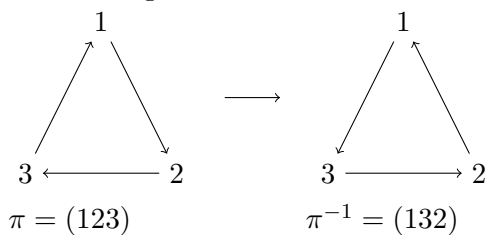
- e)  $\mathcal{S}_2 = \{\text{id}, (12)\}$  und  $\mathcal{S}_3 = \{\text{id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$  sind Gruppen (s. 3.11)
- f)  $V_4 = \{\text{id}, \pi, \sigma, \eta\}$  aus Beispiel 3.7 ist die Symmetriegruppe des Rechtecks und heißt 'Kleinsche Vierergruppe' ( $V_4$  Gruppe: s. 3.16 e).

### 3.11 Satz (Symmetrische Gruppe)

$\mathcal{S}_n$  ist eine nicht abelsche Gruppe. (Name: Symmetrische Gruppe)

**Beweis**

- assoziativ:  $\pi, \sigma, \eta \in \mathcal{S}_n \Rightarrow \underbrace{(\pi \cdot \sigma) \cdot \eta}_{\text{Verknüpfung von Abbildungen}} = \overset{\text{bijektive Abbildungen}}{\pi \cdot (\sigma \cdot \eta)}$
- Neutralelement: id, denn  
 $\text{id} \cdot \pi = \pi \cdot \text{id} = \pi \quad \forall \pi \in \mathcal{S}_n$
- Inverse: Alle Pfeile eines Zyklus werden umgedreht, d.h. die Zyklen werden rückwärts gelesen:



Fixpunkte und 2er-Zyklen ändern sich dabei nicht:

$$\sigma = (1678)(23) \Rightarrow \sigma^{-1} = (1876)(23)$$

Setzt man die Pfeile von den Graphen  $\pi$  und  $\pi^{-1}$  zusammen, ändert sich nichts, d.h.  $\pi \cdot \pi^{-1}(i) = i \Rightarrow \pi \cdot \pi^{-1} = \text{id} = \pi^{-1} \cdot \pi$

- nicht abelsch: Bemerkung 3.6d)

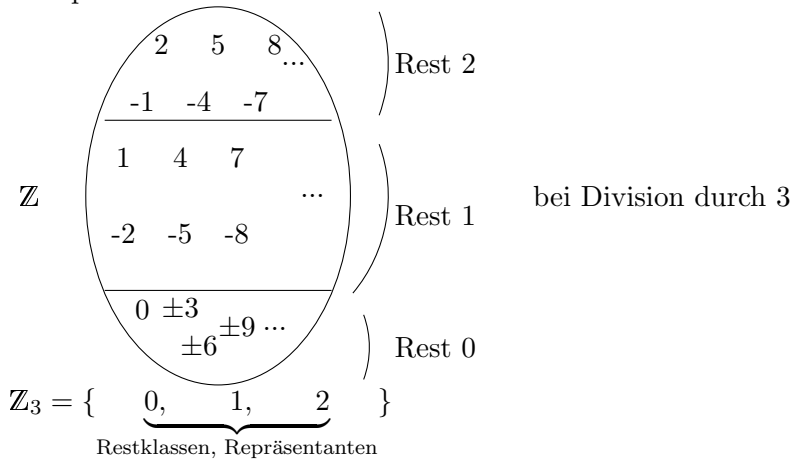
□

15.11.16

### 3.12 Beispiel

Restklassen modulo  $n : \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ ,

z. Bsp.  $n = 3$



a)  $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  mit  $a \oplus b = a + b \mod n$ . Z.B. in  $\mathbb{Z}_3$  ist  $2 \oplus 1 = 0$

$(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  ist abelsche Gruppe:

- abgeschlossen:  $a + b \mod n \in \{0, \dots, n-1\}$
- assoziativ:  $a + (b + c) \mod n = (a + b) + c \mod n$
- Neutralelement:  $a + 0 \equiv 0 + a \equiv a \pmod{n}$
- Inverse zu  $a \in \mathbb{Z}_n$ : Für welches  $b \in \mathbb{Z}_n$  ist  $a + b \mod n = 0$  ?  
Wähle  $b$  so, dass  $a + b = n$ , falls  $a \neq 0$  (sonst  $b = 0$ )  
z.B. in  $\mathbb{Z}_3$  :  $a = 1 \Rightarrow b = 2$ ,  $a = 2 \Rightarrow b = 1$ ,  $a = 0, b = 0$
- kommutativ:  $a + b \mod n = b + a \mod n$

b)  $(\mathbb{Z}_n, \odot)$  mit  $a \odot b = ab \mod n$

Ist i.A. keine Gruppe:

- assoziativ ✓
- Neutralelement:  $e = 1$  ✓
- Aber: 0 hat keine Inverse! Es gibt kein  $a \in \mathbb{Z}_n$  :  $\underbrace{0 \cdot a \mod n}_0 = 1$  (✗)

Hat  $z \neq 0$  eine Inverse bzgl.  $\odot$ ?

$\bar{z}$  invers zu  $z$ , wenn  $\bar{z} \cdot z \equiv 1 \pmod{n}$

z.B. in  $\mathbb{Z}_{15}$  gilt:

\*  $2 \cdot 8 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$ , d.h. 2 und 8 sind zueinander invers

\* Alle Vielfachen von 5 haben Rest 0, 5, 10, d.h.

$k \cdot 5 \pmod{15} \in \{0, 5, 10\} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5 \text{ hat kein Inverses}$

Allgemein:

$$\begin{aligned} z \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n : z \odot \bar{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n \quad \exists q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z = qn + 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z}, q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z - qn = 1 \\ &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(z, n) = 1 \end{aligned}$$

### Beweis von \*

' $\Leftarrow$ ' Lemma von Bézout/Erweiterter Euklidischer Algorithmus (EEA):

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$$

$$\text{Hier: } a = z, \quad b = n, \quad s = \bar{z}, \quad t = -q$$

' $\Rightarrow$ ' Übung (Übungsblatt 5, A1c)

Also: Nur die zu  $n$  teilerfremden Zahlen in  $\mathbb{Z}_n$  haben Inverse. Z.B.: In  $\mathbb{Z}_{15}$  sind 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 bzgl.  $\odot$  invertierbar.

Bezeichnung:  $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$  ist Gruppe mit Ordnung  $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$  (Eulersche  $\varphi$ -Funktion,  $\varphi(n)$  ist Anzahl der zu  $n$  teilerfremden Zahlen zwischen 1 und  $n$ ).

Berechnung der Inversen in  $\mathbb{Z}_n^*$ :

$$\begin{aligned} \text{EEA :} \quad z \in \mathbb{Z}_n^* &\Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : sz + tn = 1 \\ &\Rightarrow s \cdot z \equiv 1 \pmod{n} \\ &\Rightarrow s \text{ invers zu } z \end{aligned}$$

### 3.13 Satz (Eigenschaften von Gruppen)

$G$  Gruppe.

- i) Das Neutralelement von  $G$  ist eindeutig.
- ii) Die Inverse zu jedem  $a \in G$  ist eindeutig.
- iii)  $a, b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$



**Beweis**

- i) Angenommen  $e_1, e_2$  Neutralelemente  
 $\Rightarrow e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$
- ii) Angenommen  $a \in G$  hat 2 Inversen  $x, y$   
 $x, y \in G \Rightarrow x = x \underbrace{(ay)}_e = \underbrace{(xa)}_e y = y$
- iii)  $\ast (ab)^{-1} \cdot (ab) \underset{\text{Vor.}}{=} (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1} \underbrace{(a^{-1}a)}_e b = \underbrace{b^{-1}b}_e = e$   
 $\ast (ab)(ab)^{-1}$  analog

□

**3.14 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)** $G$  Gruppe,  $a, b \in G$ 

- i)  $\exists! x \in G : a \cdot x = b$ . Es ist  $x = a^{-1} \cdot b$
- ii)  $\exists! y \in G : y \cdot a = b$ . Es ist  $y = b \cdot a^{-1}$
- iii)  $ax = bx$  für ein  $x \in G \Rightarrow a = b$   
 bzw.  $ya = yb$  für ein  $y \in G \Rightarrow a = b$  (Kürzungsregel)

**Beweis**

- i)  $x = a^{-1}b$  erfüllt  $ax = a(a^{-1}b) = \underbrace{(aa^{-1})}_e b = b$
- ii) Analog zu i)
- iii)  $a = a \underbrace{(xx^{-1})}_e = (ax)x^{-1} = (bx)x^{-1} = b \underbrace{(xx^{-1})}_e = b$

□

**Untergruppen und Nebenklassen****3.15 Definition (Untergruppe)** $(G, \cdot)$  Gruppe,  $\emptyset \neq U \subseteq G$ . $U$  heißt Untergruppe von  $G$  ( $U \leq G$ ), wenn  $U$  bzgl. ' $\cdot$ ' eine Gruppe ist.

**Bemerkung**

22.11.16

- Abgeschlossenheit prüfen:  $\forall u, v \in U : uv \in U$
- $e$  von  $G$  ist auch  $e$  von  $U$
- Inversen in  $U$  gleich wie in  $G$

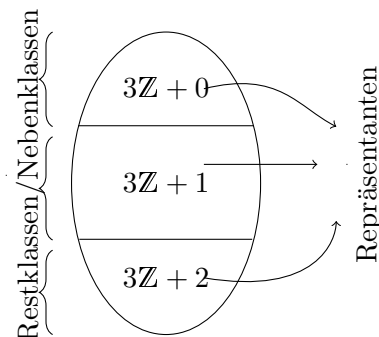
(wegen Satz 3.13)

**3.16 Beispiel**

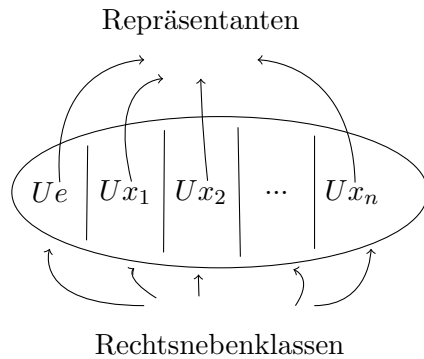
- a)  $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$
- b)  $(\{-1, 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- c)  $V_4 = \{\text{id}, \underbrace{(AB)(CD)}_{\pi}, \underbrace{(AC)(BD)}_{\sigma}, \underbrace{(AD)(BC)}_{\eta}\} \leq \mathcal{S}_4$  (Bsp. 3.7, 3.10) weil  $V_4$  abgeschlossen,  $\text{id} \in V_4$ ,  $\gamma^{-1} = \gamma \quad \forall \gamma \in V_4$

**3.17 Beispiel**Es ist  $U = 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$  eine Untergruppe von  $(\mathbb{Z}, +)$ .

- Mehr Klassen gibt es nicht, da  $3\mathbb{Z} + 3 = 3\mathbb{Z} + 0$ ,  $3\mathbb{Z} + 4 = 3\mathbb{Z} + 1$ ,  $3\mathbb{Z} - 1 = 3\mathbb{Z} + 2$
- Repräsentanten sind nicht eindeutig,  $-1$  auch Repräsentant von  $3\mathbb{Z} + 2 = 3\mathbb{Z} - 1$
- Grundidee: Nebenklassen von  $U$  unterteilen  $G = \mathbb{Z}$  in disjunkte Äquivalenzklassen.  
Hier:  $x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in 3\mathbb{Z} : u + x = y$ , z.B.  $4 \sim_U 10$ , da  $\underbrace{6}_{\in 3\mathbb{Z}} + 4 = 10$

**3.18 Satz + Definition (Rechtsnebenklasse, Repräsentant)** $G$  Gruppe,  $U \leq G$ .

- i) Für  $x, y \in G : x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in U : ux = y$ .  
Behauptung:  $\sim_U$  Äquivalenzrelation.
- ii)  $Ux := \{ux \mid u \in U\}$  (mit  $x \in G$ ) heißt Rechtsnebenklasse von  $U$  in  $G$ .  $x$  heißt Repräsentant der Klasse  $Ux$  [Linksnebenklassen analog:  $xU$ ]
- iii)  $G/U := \{Ux \mid x \in G\}$  Menge der Rechtsnebenklassen von  $U$  in  $G$ .  
Behauptung:  $G/U$  ist eine disjunkte Zerlegung von  $G$  in Äquivalenzklassen  $Ux$ .

**Beweis**

- i) –  $x \sim_U x$ , da  $\underbrace{e}_{\in U} \cdot x = x$  (Reflexivität)  
 – (Symmetrie)

$$\begin{aligned} x \sim_U y &\Rightarrow \exists u \in U : ux = y \\ &\Rightarrow x = \underbrace{u^{-1}}_{\in U} y = x \\ &\Rightarrow y \sim_U x \end{aligned}$$

- (Transitivität)

$$\begin{aligned} x \sim_U y, y \sim_U z &\Rightarrow \exists u, u' \in U : ux = y, u'y = z \\ &\Rightarrow u'y = u'(ux) = \underbrace{(u'u)}_{\in U} x = z \\ &\Rightarrow x \sim_U z \end{aligned}$$

- iii) –  $Ux = \{ux | u \in U\} = \{y \in G | \underbrace{\exists u : ux = y}_{y \sim_U x}\} = \{y \in G | y \sim_U x\} \Rightarrow Ux$

Äquivalenzklassen von  $x \in G$

- Für je 2 Äquivalenzklassen  $Ux, Uy$  gilt:  $Ux = Uy$  oder  $Ux \cap Uy = \emptyset$   
 (wegen Transitivität)

**3.19 Beispiel**

$$\mathbb{Z}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z} + 0, 3\mathbb{Z} + 1, 3\mathbb{Z} + 2\} = \{3\mathbb{Z} + 3, 3\mathbb{Z} - 2, 3\mathbb{Z} + 11\}$$

Man schreibt oft  $\mathbb{Z}_3 = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}$  (wobei  $j = 3\mathbb{Z} + j$ ) oder einfach  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Allgemein:  $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\cdot\mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

Beobachtung in  $\mathbb{Z}_3$ : Ist  $x \in \underline{1}, y \in \underline{2}$ , dann ist immer  $x + y \in \underline{0}$

### 3.20 Kriterium

$G$  Gruppe,  $U \leq G$ .

Für je 2 beliebige Klassen,  $Ux, Uy$  ( $x, y \in G$ ) gelte:

$$x' \in Ux, y' \in Uy \Rightarrow x' \cdot y' \in U(xy)$$

### 3.21 Definition (Wohldefiniertheit)

Wenn Kriterium 3.20 erfüllt ist, kann man auf  $G/U$  eine Verknüpfung definieren:

$*$  :  $G/U \times G/U \rightarrow G/U$  mit

$$(Ux) * (Uy) = U(\underbrace{xy}_{\text{Produkt in } G})$$

Man sagt: Wenn 3.20 erfüllt, ist ' $*$ ' wohldefiniert.

### 3.22 Beispiel

23.11.16

- a)  $*$  wohldefiniert auf  $(\mathbb{Z}_n, +)$  (ohne Beweis)

Bemerkung:  $x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in 3\mathbb{Z} : u + x = y$

$$\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{3}$$

Daraus ergibt sich die Def. aus Bsp. 3.12 mit  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$  und  $x \oplus y = x + y \pmod{3}$

- b)  $U = \{\text{id}, (12)\} \leq \mathcal{S}_3$ . Auf  $\mathcal{S}_3/U$  ist  $*$  nicht wohldefiniert (Übung).

### 3.23 Satz (Faktorengruppe/Quotientengruppe)

$U \leq G$ ,  $G$  Gruppe.

Wenn ' $*$ ' aus Def 3.21 wohldefiniert, dann ist  $(G/U, *)$  eine Gruppe.

(Name: Quotientengruppe/Faktorengruppe)

Beweis: Übung.

Bemerkung:  $G$  abelsch  $\Rightarrow$  ' $*$ ' immer wohldefiniert, d.h.  $G/U$  Gruppe.

### 3.24 Lemma

$G$  Gruppe,  $U \leq G$ ,  $U$  endlich  $\Rightarrow |Ux| = |U| \quad \forall x \in G$

**Beweis**

$\varphi : U \rightarrow Ux, \quad u \mapsto u \cdot x$  bijektiv:

- surjektiv, da  $\varphi(U) = Ux$
- injektiv, da  $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1x = u_2x$   
 $\stackrel{\cdot x^{-1}}{\Rightarrow} u_1 = u_2$

$$\Rightarrow |U| = |Ux|$$

### 3.25 Theorem (Lagrange)

$G$  endliche Gruppe,  $U \leq G \Rightarrow |U|$  teilt  $|G|$  und  $|G/U| = \frac{|G|}{|U|}$ .

#### Beweis

Seien  $U_{x_1}, \dots, U_{x_q}$  die  $q$  verschiedenen Rechtsnebenklassen von  $U$  in  $G$ .

$$\Rightarrow G = \dot{\bigcup}_{i=1}^q Ux_i \Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^q \underbrace{|Ux_i|}_{=|U|} = q \cdot |U|.$$

□

## Ordnung und zyklische Gruppen

### 3.26 Definition (Potenzen)

$(G, \cdot)$  Gruppe,  $a \in G$ .

Definiere  $a^0 := e$ ,  $a^1 := a$ ,  $\underbrace{a^m := (a^{m-1}) \cdot a}_{\text{für } m \in \mathbb{N}}$ ,  $\underbrace{a^m := (a^{-1})^{-m}}_{\text{für } m \in \mathbb{Z}^-}$

als Potenzen von  $a \in G$ .

### 3.27 Satz (Rechenregeln)

$G$  Gruppe,  $a \in G$ . Es gilt:

- i)  $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1} = a^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$
- ii)  $a^m a^n = a^{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$
- iii)  $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$

#### Beweis

i) a)  $m$  positiv:

\* Inverses für  $a^m$ , wenn  $m \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \text{Es ist } a^m \cdot \underbrace{(a^{-1})^m}_{\text{Inverse}} &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{m\text{-mal}} = e \\ \Rightarrow (a^m)^{-1} &= (a^{-1})^m \end{aligned}$$

\* nach Definition:  $\overbrace{a^{-m}}^{\in \mathbb{Z}^-} = (a^{-1})^{+m}$   
 $\Rightarrow$  i) gilt für  $m \geq 0$

b)  $m$  negativ:

$$* \overbrace{a^{-m}}^{\in \mathbb{N}} = ((\underbrace{a^{-1}}_{\in G})^{-1})^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} \stackrel{\text{Def.}}{=} (a^{-1})^m$$

$$\begin{aligned}
 * \quad a^{\overbrace{m}^{\in \mathbb{Z}^-}} &= (a^{-1})^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} \stackrel{a)}{=} (a^{-m})^{-1} \\
 &\Rightarrow (a^m)^{-1} = ((a^{-m})^{-1})^{-1} = a^{-m}
 \end{aligned}$$

ii) + iii) analog mit  $m$  oder  $n$  negativ oder positiv

### 3.28 Satz + Definition (Ordnung, zyklische Gruppe)

$G$  endliche Gruppe,  $g \in G$ .

- i) Es gibt eine kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}$  mit  $g^n = e$ .  $n$  heißt Ordnung  $\mathcal{O}(g)$  von  $g$ .
- ii)  $\{g^0 = e, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}\} \leq G$  und heißt die von  $g$  erzeugte zyklische Gruppe  $\langle g \rangle$ .
- iii)  $g^{|G|} = e$

#### Beweis

- i)  $G$  endlich  $\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} : g^i = g^j$  und  $i > j$

$$\Rightarrow g^{\overbrace{i-j}^{\in \mathbb{N}}} = g^i g^{-j} = \underbrace{g^i}_{=g^j} (g^j)^{-1} = e$$

Wähle  $n = \min\{k \in \mathbb{N} | g^k = e\}$ .

- ii)
  - $\langle g \rangle$  abgeschlossen, da  $g^m \cdot g^k = g^{m+k} \in \langle g \rangle$
  - $g^0 = e \in \langle g \rangle$
  - $(g^m)^{-1} = g^{-m} = \underbrace{g^n}_e \cdot g^{-m} \in \langle g \rangle$

- iii) Lagrange:  $n \mid |G| \Rightarrow n \cdot k = |G|$  für ein  $k \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow g^{|G|} = g^{nk} = \underbrace{(g^n)^k}_e = e^k = e$

□

### 3.29 Bemerkung

Eine endliche Gruppe heißt zyklisch, falls sie von einem Element erzeugt wird.

#### Beispiel

- $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$  zyklisch, da  $1 \in \mathbb{Z}_n$  und  $1^2 = 1 + 1 = 2$ ,  $1^3 = 1 + 1 + 1 = 3$ , ...,  $1^n = (1^{n-1}) \cdot 1 = (n-1) + 1 = n$  und  $n \equiv 0 \pmod{n}$   
 $\mathbb{Z}_n$  hat Ordnung  $n$ , da  $1^n = 0$

- Drehungen, die ein regelmäßiges  $n$ -Eck in sich selbst überführen, sind zyklisch:  
 $(ABC)^0 = id, (ABC) = (ABC), (ABC)^2 = (ACB), (ABC)^3 = id$   
 $\langle (ABC) \rangle = \{id, (ABC), (ACB)\} \leq \mathcal{S}_3$
- $\mathcal{S}_3$  oder  $V_4$  nicht zyklisch.

### 3.30 Korollar

- Satz von Euler:  
 $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$
- Kleiner Satz von Fermat:  
 $p$  Primzahl,  $a \in \mathbb{Z}, p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

#### Beweis

Wir können annehmen, dass  $1 \leq a < n$ , denn

$$a^{\varphi(n)} \pmod{n} = \underbrace{(a \pmod{n})^{\varphi(n)}}_{\{1, \dots, n-1\}} \pmod{n}$$

$$\Rightarrow a \in \mathbb{Z}_n^*$$

$$\mathbb{Z}_n^* \text{ endliche Gruppe} \Rightarrow a^{\overbrace{|\mathbb{Z}_n^*|}^{=\varphi(n)}} \equiv 1 \pmod{n}$$

ii) Folgt aus i) für  $n = p, \varphi(p) = p - 1$

□

## 4 Ringe und Körper

### Grundlegende Eigenschaften

#### 4.1 Definition (Ring)

Sei  $\mathcal{R} \neq \emptyset$  eine Menge mit 2 Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$ .

i) Man nennt  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$  einen Ring, wenn gilt:

- 1)  $(\mathcal{R}, +)$  ist abelsche Gruppe mit Neutralelement 0 und Inverse  $-a$  von  $a$ .
- 2)  $(\mathcal{R}, \cdot)$  ist abgeschlossen und assoziativ (Halbgruppe).
- 3) Distributivgesetze:  $a \cdot (b + c) = ab + ac$   
 $(a + b) \cdot c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in \mathcal{R}$

29.11.16

ii)  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$  heißt kommutativ, falls ' $\cdot$ ' zusätzlich kommutativ ist

iii)  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$  heißt Ring mit Eins, falls es bezüglich ' $\cdot$ ' ein Neutralelement  $1$  gibt mit  $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathcal{R}$ .

iv) Ist  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$  Ring mit Eins, so heißen die bezüglich ' $\cdot$ ' invertierbaren Elemente Einheiten.

Bezeichnung:

- $a^{-1}$  Inverse von  $a$  bzgl. ' $\cdot$ '
- $\mathcal{R}^* :=$  Menge aller Einheiten in  $\mathcal{R}$

#### 4.2 Beispiel

a) Trivialer Ring  $(\{0\}, +, \cdot)$

b)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  kommutativer Ring mit Eins.

Einheiten:  $1, -1 \Rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}}_{\text{kein Ring!}}$

Ebenso  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

mit  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  und  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c)  $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$  Ring, kommutativ, ohne Eins

d)  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  kommutativer Ring mit Eins

e)  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$  kommutativer Ring mit Eins: ( $\cdot$  und  $+$  Komponentenweise)

Bemerkung:  $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$  Ringe  $\Rightarrow \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_n$  Ring

f)  $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$  (für  $n \geq 2$ ) Ring mit Eins ( $= E_n$ ). Nicht kommutativ!



### 4.3 Satz (Rechenregeln für Ringe)

$(\mathcal{R}, +, \cdot)$  Ring,  $a, b, c \in \mathcal{R}$

- i)  $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
- ii)  $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$
- iii)  $(-a)(-b) = ab$

#### Beweis

- i) Es ist  $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$   
 Addiere  $-a \cdot 0$ :  $a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0$   
 $\Leftrightarrow 0 = a \cdot 0$   
 Analog:  $0 = 0 \cdot a$
- ii) Es ist  $(-a)b + ab = \underbrace{(-a + a)}_{=0} b = 0 \cdot b \stackrel{i)}{=} 0$   
 $\Rightarrow (-a)b$  invers zu  $ab$  und  $(-a)b = -(ab)$   
 Analog:  $a(-b) = -(ab)$
- iii)  $(-a)(-b) \stackrel{ii)}{=} -(a(-b)) \stackrel{ii)}{=} -(-(ab)) = ab$

□

### 4.4 Bemerkung

- a)  $\mathcal{R}$  Ring mit Eins  $\Rightarrow 1, -1 \in \mathcal{R}^*$   
 Achtung! Z.B. in  $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$  ist  $1 = -1$
- b) In einem kommutativen Ring gilt der binomische Lehrsatz:  
 $(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$
- c) In 4.3: Rechenregeln für Multiplikation mit additiven Inversen, z.B.:  $a \cdot (-b)$   
 Über Addition mit multiplikativen Inversen keine Aussage möglich (z.B. keine Regel für  $a^{-1} + b$ ).

### 4.5 Definition (Körper)

Ein kommutativer Ring mit Eins  $(\mathcal{K}, +, \cdot)$  heißt Körper, falls  $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$ . D.h. jedes  $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$  ist bezüglich  $\cdot$  invertierbar.

## 4.6 Beispiel

- a)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ,  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  Körper  $[(\mathbb{C}, +, \cdot)$  auch]  
 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  kein Körper, da  $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ .
- b)  $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$  Gruppe bezüglich  $'\odot'$   
 $\Rightarrow (\mathbb{Z}_n^*, \oplus, \odot)$  Körper  $\Leftrightarrow n$  Primzahl

## 4.7 Satz (Rechenregeln für Körper: Nullteilerfreiheit)

$(\mathcal{K}, +, \cdot)$  Körper,  $a, b \in \mathcal{K}$ . Dann gilt

- a) alle Rechenregeln für Ringe gelten auch für Körper
- b)  $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$  [Gegenbeispiel:  $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$ , weil  $2 \odot 3 = 0$ ]

### Beweis

$'\Leftarrow'$  klar (Satz 4.3i))

$'\Rightarrow'$   $ab = 0$ . Angenommen  $a \neq 0 \Rightarrow b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1} \underbrace{(ab)}_{=0} \stackrel{4.3i)}{=} 0$  □

## Strukturgleichheit von Ringen

### 4.8 Definition (Ringhomomorphismus, Ringisomorphismus)

Geg.  $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ ,  $(\mathcal{R}', \boxplus, \boxdot)$  Ringe

- i)  $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$  heißt Ringhomomorphismus, falls  $\psi(x + y) = \psi(x) \boxplus \psi(y)$  und  $\psi(xy) = \psi(x) \boxdot \psi(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$
- ii) Wenn  $\psi$  bijektiv ist, heißt  $\psi$  Ringisomorphismus. In diesem Fall heißen  $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$  isomorph (d.h. sie sind strukturgleich). Man schreibt  $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$

## 4.9 Beispiel

- a)  $\psi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$   
 $x \mapsto x \bmod n$   
 $x + y \mapsto x + y \pmod{n}, \quad x \cdot y \mapsto x \cdot y \pmod{n}$   
 $\psi$  Ringhomomorphismus  
 Nicht injektiv:  $\psi(1) = \psi(n+1) = 1$
- b)  $(\{w, f\}, \text{XOR}, \wedge) \cong (\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$   
 Boolesche Algebra, siehe PÜ

30.11.16

## Chinesischer Restsatz

### 4.10 Bemerkung

Gegeben:  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$   
 $\Rightarrow \underbrace{(a \bmod M)}_r \bmod m_i = a \bmod m_i \quad \forall i$

#### Beweis

Z.z.:  $r \equiv a \pmod{m_i}$

Division mit Rest:

$$\begin{aligned} \exists q \in \mathbb{Z} : a &= qM + r \\ &= \underbrace{\left(q \frac{M}{m_i}\right)}_{\in \mathbb{Z}, \text{ da } m_i | M} m_i + r \\ &\Rightarrow a \equiv r \pmod{m_i} \end{aligned}$$

□

### 4.11 Chinesischer Restsatz

Gegeben:

- $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  paarweise teilerfremd
- $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$
- $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

Dann existiert  $0 \leq x < M$  mit

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{array} \right\} \underline{\text{Simultane Kongruenz}}$$

#### Beweis

Es ist  $\text{ggT}\left(m_i, \underbrace{\frac{M}{m_i}}_{M_i}\right) = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

$\stackrel{\text{EEA}}{\Rightarrow} \exists s_i, t_i \in \mathbb{Z} : t_i m_i + s_i M_i = 1$

Setze:  $e_i := s_i M_i \Rightarrow e_i \equiv \begin{cases} 1 \pmod{m_i} \\ 0 \pmod{m_j}, j \neq i \end{cases}$   
 $\Rightarrow x \stackrel{4.10}{=} \sum_{i=1}^n a_i e_i \pmod{M}$  ist Lösung der simultanen Kongruenz.

## 4.12 Beispiel

a)  $m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5 \Rightarrow M = 60$

Finde  $x \in [0, 60)$  mit  $x \equiv \begin{cases} 2 \pmod{3} (= a_1) \\ 3 \pmod{4} (= a_2) \\ 2 \pmod{5} (= a_3) \end{cases}$

Es ist

$$\begin{aligned} - M_1 &= \frac{M}{m_1} = \frac{60}{3} = 20 \\ - M_2 &= \frac{60}{4} = 15 \\ - M_3 &= \frac{60}{5} = 12 \end{aligned}$$

EEA:

$$\begin{aligned} - 7 \cdot \overbrace{3}^{m_1} + \underbrace{(-1) \cdot 20}_{e_1} &= 1 \\ - 4 \cdot \overbrace{4}^{m_2} + \underbrace{(-1) \cdot 15}_{e_2} &= 1 \\ - 5 \cdot \overbrace{5}^{m_3} + \underbrace{(-2) \cdot 12}_{e_3} &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = [2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-15) + 2 \cdot (-24)] \pmod{60} = -133 \pmod{60} = 47$$

b) Was ist  $2^{1000} \pmod{\underbrace{1155}_{= \underbrace{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}_{m_1 m_2 m_3 m_4}}}$  ?

1) Berechne  $2^{1000} \pmod{3, 5, 7}$  und 11

$$\begin{aligned} * 2^{1000} \pmod{3} &= (-1)^{1000} \pmod{3} = 1 = a_1 \\ * 2^{1000} \pmod{5} &= 4^{500} \pmod{5} = (-1)^{500} = 1 = a_2 \\ * 2^{1000} \pmod{7} &= \underbrace{2^3}_{=8}^{333+1} \pmod{7} = 1 \cdot 2 \pmod{7} = 2 = a_3 \\ * 2^{1000} \pmod{11} &= \underbrace{2^5}_{=32}^{200} \pmod{11} = (-1)^{200} = 1 = a_4 \end{aligned}$$

$$2) \text{ Suche } 0 \leq x < 1155 \text{ mit } x \equiv \begin{cases} 1 \pmod{3} \\ 1 \pmod{5} \\ 2 \pmod{7} \\ 1 \pmod{11} \end{cases}$$

Chinesischer Restsatz:  $x = 331$

### 4.13 Satz (Eindeutigkeit Chines. Restsatz)

Die Lösung  $x$  aus 4.11 ist eindeutig.

#### Beweis

Z.z.:  $\psi : \mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}, \quad x \mapsto (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n)$  ist bijektiv (Ringisomorphismus)

- $\psi$  Ringhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \psi(x \oplus y) &= \psi(x + y \bmod M) \\ &= ((x + y \bmod M) \bmod m_1, \dots, (x + y \bmod M) \bmod m_n) \\ &\stackrel{4.10}{=} (x + y \bmod m_1, \dots, x + y \bmod m_n) \\ &= \psi(x) \oplus \psi(y) \end{aligned}$$

Analog mit  $\psi(x \odot y) = \psi(x) \odot \psi(y)$

- $\psi$  surjektiv:

Zu jedem  $n$ -Tupel aus  $\underbrace{\mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}}_{\ni (a_1, \dots, a_n)}$  gibt es Lösung  $x \in \mathbb{Z}_M$  (4.11).

- $\psi$  injektiv:

Da  $|\mathbb{Z}_M| = |\mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}| \Leftrightarrow M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$

D.h. kein Element wird doppelt 'getroffen'

$\Rightarrow \psi$  bijektiv, also Isomorphismus

□

### 4.14 Beispiel

Gilt  $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  ? Nein.

z.B.  $\underbrace{\mathbb{Z}_2^* = \{1\}}_{\varphi(2)=1}, \quad \underbrace{\mathbb{Z}_4^* = \{1, 3\}}_{\varphi(4)=2}$

Aber:  $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$  und  $4 = \varphi(8) \neq \varphi(2) \cdot \varphi(4)$

### 4.15 Korollar

- $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$  mit  $m_i$  paarweise teilerfremd und  $m_i \in M$   
 $\Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot \dots \cdot \varphi(m_n)$
- Insbesondere:  
 $M = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ ,  $p_i \in \mathbb{P}$  (Primzahl),  $p_i \neq p_j$  für  $i \neq j$ ,  $a_i \in \mathbb{N}$   
 $\Rightarrow \varphi(M) = (p_1 - 1)p_1^{a_1-1} \cdot \dots \cdot (p_k - 1)p_k^{a_k-1}$

#### Beweis

Wegen 4.13 ist  $\mathbb{Z}_M \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$  mittels  $\psi$ .

$\Rightarrow x$  Einheit  $\Leftrightarrow \psi(x) = (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n)$  Einheit

$\Leftrightarrow x \bmod m_i$  Einheit  $\forall i \Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot \dots \cdot \varphi(m_n)$

Es ist  $\varphi(p^a) = \underbrace{p^a}_{|\mathbb{Z}_{p^a}|} - \underbrace{p^{a-1}}_{\text{Vielfache von } p \text{ in } \mathbb{Z}_{p^a}} = (p-1)p^{a-1}$

$a$	$ \mathbb{Z}_{p^a} $	Vielfache von $p$	$\varphi(p^a) =  \mathbb{Z}_{p^a}^* $
1	$p$	$0 \cdot p = 0$	$p - 1 = p^1 - p^0$
2	$p^2$	$k \cdot p, \underbrace{0 \leq k \leq p-1}_{p \text{ Möglichkeiten}}$	$p^2 - p^1$
3	$p^3$	$kp + k'p^2, \underbrace{0 \leq k, k' \leq p-1}_{p^2 \text{ Möglichkeiten}}$	$p^3 - p^2$

□

### Polynomringe

06.12.16

In Mathe I wurde für den Ring  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  folgendes eingeführt:

- Division mit Rest
- Erweiterter Euklidischer Algorithmus
- kgV, ggT, Primzahlzerlegung

### 4.16 Definition (Polynom)

$\mathcal{K}$  - Körper mit Nullelement  $\mathcal{O}$  und Einselement  $1$ .

i) Ein Polynom über  $\mathcal{K}$  ist ein Ausdruck  $f = \underbrace{a_0 x^0}_{a_0} + \underbrace{a_1 x^1}_{a_1 x} + \dots + a_n x^n$  mit

$n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \in \mathcal{K}$  Koeffizienten von  $f$  (auch  $f(x)$  anstatt  $f$ ).

Ist  $a_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , so schreibt man  $f = 0$  (Nullpolynom)

ii)  $\mathcal{K}[x]$  = Menge aller Polynome über  $\mathcal{K}$  in einer Variablen  $x$

iii)  $f, g \in \mathcal{K}[x]$  sind gleich, wenn gilt

- a)  $f = a_0 + \dots + a_n x^n$   
 $g = b_0 + \dots + b_m x^m$  mit  $a_n \neq 0, b_m \neq 0$   
 $\Rightarrow m = n$  und  $a_i = b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$   
 oder  
 b)  $f = 0$  und  $g = 0$

### 4.17 Beispiel

- a)  $f(x) = f = 3x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \begin{smallmatrix} \in \mathbb{Q}[x] \\ \in \mathbb{R}[x] \end{smallmatrix}$   
 b)  $g = x^7 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$ , d.h. Koeffizienten  $\in \{0, 1\}$

### 4.18 Satz + Definition (Polynomring)

$\mathcal{K}$  Körper.

$\mathcal{K}[x]$  ist kommutativer Ring mit Eins. Dabei ist für  $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  
 $g = \sum_{j=0}^m b_j x^j$

- $f + g = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) x^i$
- $f \cdot g = (a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m)$   
 $= \underbrace{a_0 \cdot b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)}_{c_1} x + \dots + \underbrace{a_n b_m}_{c_{n+m}} x^{n+m}$

mit  $c_i = \sum_{k=0}^i a_k \cdot b_{i-k}$  (Faltungsprodukt)

[Anmerkung:  $a_i = 0 = b_j$  für  $i > n$  bzw.  $j > m$ ]

- Einselement:  $f = 1$
- Nullelement  $f = 0$

$\mathcal{K}[x]$  heißt der Polynomring in einer Variablen über  $\mathcal{K}$ .

### Beweis

Ringeigenschaften nachrechnen

□

### 4.19 Bemerkung

- $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$  heißen Monome
- $a_n x^n$  heißt Leitterm von  $f = a_0 + \dots + a_n x^n$  mit  $a_n \neq 0$

## 4.20 Beispiel

In  $\mathbb{Z}_3[x]$ :

$$f = 2x^3 + 1, \quad g = x - 1 = x + 2, \text{ da } -1 \equiv 2 \pmod{3}$$

- $f + g = 2x^3 + x + \underbrace{1+2}_{\equiv 0 \pmod{3}} = 2x^3 + x$
- $f \cdot g = (2x^3 + 1)(x + 2) = 2x^4 + x + \underbrace{4x^3}_{\equiv 1 \pmod{3}} + 2 = 2x^4 + x + x^3 + 2$

## Grad eines Polynoms

### 4.21 Definition (Grad)

$$f \in \mathcal{K}[x], \quad f = a_0 + \dots + a_n x^n \quad a_n \neq 0$$

$n$  heißt der Grad von  $f$ ,  $\text{grad}(f) = n$

$\text{grad}(0) = -\infty$ ,  $\text{grad}(g) = 0$ , falls  $g$  konstant

### 4.22 Satz (Grad verknüpfter Funktionen)

$\mathcal{K}$  Körper,  $f, g \in \mathcal{K}[x]$ .

$$\Rightarrow \text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

Konvention:  $-\infty - \infty = -\infty = -\infty + n = -\infty$

#### Beweis

- Stimmt für  $f = 0$  oder  $g = 0$
- Angenommen die Leitterme von  $f$  bzw.  $g$  sind  $a_n x^n$  bzw.  $b_m x^m$  mit  $a_n \neq 0$ ,  $b_m \neq 0$ .  
 $\Rightarrow \text{grad}(f) = n$ ,  $\text{grad}(g) = m$  und  $\underbrace{a_n \cdot b_m x^{n+m}}_{\neq 0, \text{ da } \mathcal{K} \text{ Körper (4.7)}} \text{ ist Leitterm von } f \cdot g$   
 $\Rightarrow \text{grad}(fg) = n + m$  □

### 4.23 Korollar (Inversen in $\mathcal{K}[x]$ )

$\mathcal{K}[x]^* = \{f \in \mathcal{K}[x] \mid \text{grad}(f) = 0\}$  (nur konstante Polynome  $\neq 0$  invertierbar)

#### Beweis

$$f \cdot f^{-1} = 1 \Rightarrow \text{grad}(ff^{-1}) = \text{grad}(f) + \text{grad}(f^{-1}) \stackrel{4.22}{=} \text{grad}(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{grad}(f) = \text{grad}(f^{-1}) = 0$$
□



## Polynomdivision mit Rest

### 4.24 Bemerkung

Für  $b \in \mathcal{K}$  ist  $f(b) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot b^i$ , falls  $f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \in \mathcal{K}[x]$ .

Man kann zeigen, dass  $\psi_b : \mathcal{K}[x] \rightarrow \mathcal{K}$

$f \mapsto f(b)$  ein surjektiver Homomorphismus ist.

### 4.25 Definition (Teilbarkeit)

$\mathcal{K}$  Körper,  $f, g \in \mathcal{K}[x]$ .

$f|g$ , falls  $q \in \mathcal{K}[x]$  existiert mit  $g = qf$  (nach 4.22:  $\text{grad}(f) \leq \text{grad}(g)$ ).

### 4.26 Satz (Division mit Rest in $\mathcal{K}[x]$ )

$\mathcal{K}$  Körper,  $f \in \mathcal{K}[x]$ ,  $0 \neq g \in \mathcal{K}[x]$ .

Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome  $q, r \in \mathcal{K}[x]$  mit  $f = qg + r$  und  $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ .

Bezeichnung:  $r = f \bmod g$ ,  $q = f \text{ div } g$

### Beweis

vgl. Mathe I für  $\mathbb{Z}$ , Literatur

□

### 4.27 Beispiel

$f = x^4 + 2x^3 - x + 2$  und  $g = 3x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 - x + 2) : (3x^2 - 1) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2 - 1} \\ \underline{-x^4} \quad + \frac{1}{3}x^2 \\ 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x \\ \underline{-2x^3} \quad + \frac{2}{3}x \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \\ \underline{-\frac{1}{3}x^2} \quad + \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} \end{array}$$

Mit  $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = q$  und  $-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} = r$  (Rest).

Aufhören bei  $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$ !

### 4.28 Korollar

$\mathcal{K}$  Körper,  $a \in \mathcal{K}$ ,  $f \in \mathcal{K}[x]$

$$\underbrace{(x - a)}_{\text{teilt } f \text{ restlos}} \mid f \Leftrightarrow f(a) = 0$$

07.12.16

**Beweis**

$$(\Rightarrow) \exists q \in \mathcal{K}[x] : f = q(x-a) \Rightarrow f(a) = q(a) \underbrace{(a-a)}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \text{ Division mit Rest: } f &= q(x-a) + r, \text{ grad}(r) < \text{grad}(x-a) \quad (\text{da } q|f) \\ &\Rightarrow \text{grad}(r) \leq 0, \text{ d.h. } r = c \neq 0 \text{ konstant oder } r = 0 \\ 0 &= f(a) = q(a) \underbrace{(a-a)}_{=0} + r(a) \Rightarrow r = 0 \end{aligned}$$

□

**Euklidischer Algorithmus in  $\mathcal{K}[x]$** **4.29 Definition (Normiertheit)** $\mathcal{K}$  Körper.

- i)  $f = a_0 + \dots + a_n x^n \in \mathcal{K}[x]$ ,  $a_n \neq 0$  heißt normiert, wenn  $a_n = 1$
- ii)  $g, h \in \mathcal{K}[x]$ ,  $g, h$  nicht beide 0.  
 $f = \text{ggT}(g, h)$ , falls  $f \in \mathcal{K}[x]$  normiertes Polynom von maximalem Grad ist, das  $g$  und  $h$  teilt.
- iii)  $g, h \in \mathcal{K}[x] \setminus \{0\}$ .  
 $f = \text{kgV}(g, h)$ , falls  $f \in \mathcal{K}[x]$  ein normiertes Polynom von minimalem Grad ist, das von  $g$  und  $h$  geteilt wird.

**4.30 Bemerkung**

- a)  $g = x, \quad h = x+1 \in \mathbb{Q}[x]$ 
  - $g|x(x+1), \quad h|x(x+1)$
  - $g|2x(x+1), \quad h|2x(x+1)$
  - $\text{kgV}(g, h) = x(x+1) = x^2 + x$ , da  $2x^2 + 2x$  nicht normiert!  
 $\rightarrow$  Normierung macht Ergebnisse eindeutig.
- b) Normierung erfolgt, indem man durch Koeffizienten des Leitterms 'teilt':  
 $f = a_n x^n + \dots + a_0 \Rightarrow a_n^{-1} \cdot f = \underbrace{x^n + \dots + a_n^{-1} a_0}_{\text{normiert}}$
- c)  $\text{kgV}(g, h)$  existiert und ist eindeutig.
  - Existenz:  $g|gh, \quad h|gh$  ( $gh$  gemeinsames Vielfaches)
  - Eindeutig:  $f_1 = \text{kgV}(g, h), \quad f_2 = \text{kgV}(g, h)$   
 $\Rightarrow g, h|f_1$  und  $g, h|f_2$   
 $\Rightarrow g, h|(f_1 - f_2)$   
 $f_1, f_2$  normiert und von gleichem (minimalen) Grad.

$\Rightarrow \text{grad}(f_1 - f_2) < \text{grad}(f_1)$   
 $\Rightarrow f_1 - f_2 = 0$ , denn sonst wäre  $\text{kgV}(g, h) = f_1 - f_2$   $\not\rightarrow$  zur Minimalität des Grades  
 $\Rightarrow \text{kgV}$  eindeutig.

d)  $\text{ggT}(g, h)$  existiert und ist eindeutig. Beweis folgt wie in Mathe I für  $\mathbb{Z}$  aus:

### 4.31 Lemma von Bézout

$g, h \in \mathcal{K}[x]$  nicht beide gleich 0.

$\Rightarrow \exists s, t \in \mathcal{K}[x] : sg + th = \text{ggT}(g, h)$

#### Beweis

Siehe 4.33 (EEA).

#### Beweis Eindeutigkeit von $\text{ggT}$

$f = \text{ggT}(g, h), \quad f' = \text{ggT}(g, h)$   
 $(f, f')$  Funktionen desselben Grades und normiert  
 $\Rightarrow \exists s', t' \in \mathcal{K}[x] : f' = s' \cdot g + t' \cdot h$

$f|g \wedge f|h \Rightarrow f|f'$   
 $\Rightarrow \exists q \in \mathcal{K}[x] : f' = qf$   
 $\Rightarrow \text{grad}(f') = \text{grad}(q) + \text{grad}(f)$

$\text{grad}(f) = \text{grad}(f') \Rightarrow \text{grad}(q) = 0$   
 $\text{grad}(q) = 0 \Rightarrow q = c \neq 0, \quad c \in \mathcal{K}$   
 $\Rightarrow f' = cf$   
 $f, f'$  normiert  $\Rightarrow c = 1$

□

### 4.32 Satz (Euklidischer Algorithmus EA in $\mathcal{K}[x]$ )

**Eingabe:**  $g, h \in \mathcal{K}[x]$ , nicht beide gleich 0

```

1: if  $h = 0$  then
2:    $y := g$ 
3: end if
4: if  $h|g$  then
5:    $y := h$ 
6: end if
7: if  $h \neq 0 \wedge h \nmid g$  then
8:    $x := g, \quad y := h$ 

```

```

9:   while  $(x \bmod y) \neq 0$  do
10:      $r := x \bmod y$ 
11:      $x := y, \quad y := r$ 
12:   end while
13: end if
14:  $d := a_n^{-1}y$  (Normierung von  $y$ , siehe 4.30)
Ausgabe:  $d = \text{ggT}(g, h)$ 

```

### Beweis

Wie für  $\mathbb{Z}$  in Mathe I.

Hinweis:  $d|g$  und  $d|h \Leftrightarrow d|(g \bmod h)$  und  $d|h$ .

Begründung:  $g = qh + (g \bmod h)$ .

### 4.33 Satz (Erweiterter Euklidischer Algorithmus EEA in $\mathcal{K}[x]$ )

**Eingabe:**  $g, h \in \mathcal{K}[x]$ , nicht beide gleich 0

```

1: if  $h = 0$  then
2:    $y := g, \quad s := 1, \quad t := 0$ 
3: end if
4: if  $h|g$  then
5:    $y := h, \quad s := 0, \quad t := 1$ 
6: end if
7: if  $h \neq 0 \wedge h \nmid g$  then
8:    $x := g, \quad y := h$ 
9:    $s_1 := 1, \quad s_2 := 0, \quad t_1 := 0, \quad t_2 := 1$ 
10:  while  $(x \bmod y) \neq 0$  do
11:     $q := x \text{ div } y, \quad r := x \bmod y$ 
12:     $s := s_1 - qs_2, \quad t := t_1 - qt_2$ 
13:     $s_1 := s_2, \quad s_2 := s$ 
14:     $t_1 := t_2, \quad t_2 := t$ 
15:     $x := y, \quad y := r$ 
16:  end while
17: end if
18:  $d := a_n^{-1}y$  (Normierung von  $y$ , siehe 4.30)
19:  $s := a_n^{-1}s, \quad t := a_n^{-1}t$  (Normierung von  $s, t$ , siehe 4.30)
Ausgabe:  $d = \text{ggT}(g, h), \quad s, t$  für  $\text{ggT}(g, h) = sg + th$ 

```

## 4.34 Beispiel

$$g = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1, \quad h = x^3 + 2x^2 + 2, \quad g, h \in \mathbb{Z}_3[x]$$

$x$	$y$	$s_1$	$s_2$	$s$	$t_1$	$t_2$	$t$	$q$	$r$
g	h	1	0		0	1			
h	$x^2 + x$	0	1	1	1	$2x + 1$	$2x + 1$	$x + 2$	$x^2 + x$
$x^2 + x$	$\underbrace{2x + 2}_{\text{ggT unnormiert}}$	1	$2x + 2$	$2x + 2$	$2x + 1$	$x^2$	$x^2$	$x + 1$	$2x + 2$

## Nebenrechnung

Achtung: Polynomdivision in  $\mathbb{Z}_3[x]$ , nicht normale Polynomdivision!

$$\bullet \quad \begin{array}{r} (x^4 + x^3 + 2x^2 + 1) : (x^3 + 2x^2 + 2) = \overbrace{x + 2}^q \\ \underline{-(x^4 - 2x^3 - 2x)} \phantom{+ 1} \\ 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ \underline{-(2x^3 - x^2 - 1)} \\ x^2 + x \end{array} \quad (= r)$$

$$\bullet \quad \begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 + 2) : (x^2 + x) = x + 1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} \phantom{+ 2} \\ x^2 + 2 \\ \underline{-(x^2 - x)} \\ 2x + 2 \end{array} \quad (= r)$$

$$\bullet \quad t = 1 - (x + 1)(2x + 1) = 1 - (2x^2 + 1) = x^2$$

$$\bullet \quad \begin{array}{r} (x^2 + x) : (2x + 2) = 2^{-1}x \\ \underline{-(x^2 - x)} \\ 0 \end{array}$$

- Normierung von y:

$$d = a_n^{-1}y = 2^{-1}(2x + 2) \\ = x + 1$$

$$s = 2^{-1}(2x + 2) = x + 1$$

$$t = 2^{-1} \cdot x^2 = 2x^2, \text{ da } 2^{-1} = 2$$

- Probe:

$$\begin{aligned}
 d = sg + th &= (x+1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 1) + (2x^2)(x^3 + 2x^2 + 2) \\
 &= x^5 + x^4 + 2x^3 + x + x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 + 2x^5x^4 + x^2 \\
 &= 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 \\
 &= 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1 \\
 &= x + 1 = \text{ggT}(g, h)
 \end{aligned}$$

### Primelemente in $\mathcal{K}[x]$

Primelemente sind Polynome, die sich nicht als Produkt von zwei Polynomen vom Grad  $\geq 1$  darstellen lassen. So ist z.B.  $2x^2 + 2x = 2x(x+1)$  kein Primelement, jedoch sind die Faktoren  $2x$  und  $x+1$  Primelemente.

### 4.35 Definition (Primelemente = irreduzible Polynome)

13.12.16

$p \in \mathcal{K}[x]$  mit  $\text{grad}(p) \geq 1$  heißt irreduzibel, falls gilt:

$$\forall f, g \in \mathcal{K}[x] : p = f \cdot g \text{ ist } \text{grad}(f) = 0 \text{ oder } \text{grad}(g) = 0$$

### 4.36 Beispiel

- a)  $x+1, 2x \in \mathbb{R}[x]$  irreduzibel.

Allg.:  $ax+b$  ( $a \neq 0$ ) irreduzibel in  $\mathcal{K}[x]$

- b)  $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  ist irreduzibel:

$$\text{Angenommen nicht, dann } x^2 - 2 = \underbrace{(ax+b)}_{\text{Nullstelle: } -\frac{b}{a}} \underbrace{(cx+d)}_{\text{Nullstelle: } -\frac{d}{c}} \quad (a, c \neq 0)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \text{ hat auch Nullstelle } -\frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \nmid$$

Widerspruch: Nullstelle von  $x^2 - 2$  sind aus  $\mathbb{R}$

- c)  $x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$  nicht irreduzibel:

$$x^2 - 2 = \underbrace{(x - \sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]} \cdot \underbrace{(x + \sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]}$$

- d)  $x^2 + 1$  hat in  $\mathbb{R}$  keine Nullstelle und ist somit irreduzibel in  $\mathbb{R}[x]$ .

Anmerkung: In  $\mathbb{C}[x]$  ist  $x^2 + 1$  kein Primelement (siehe Kapitel 5)

- e)  $x^2 + 1 = (x+2)(x+3)$  in  $\mathbb{Z}_5[x]$   
 $\rightarrow$  nicht irreduzibel in  $\mathbb{Z}_5[x]$

**4.37 Satz (Irreduzibles Polynom)**

$f \in \mathcal{K}[x]$ ,  $\text{grad}(f) \geq 1$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $f$  irreduzibel
- (2)  $g, h \in \mathcal{K}[x], f|g \cdot h \Rightarrow f|g \vee f|h$

**Beweis**

(1)  $\Rightarrow$  (2)

$$\begin{aligned}
 \text{Angenommen } f \nmid g &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \text{ggT}(f, g) = 1 \\
 &\stackrel{\text{Bézout}}{\Rightarrow} \exists s, t \in \mathcal{K}[x] : sf + tg = 1 \\
 &\Rightarrow sfh + tgh = h \\
 \text{Wissen: } f|fsh \text{ und } f|tgh &\quad (f|gh \text{ Voraussetzung von (2)}) \\
 &\Rightarrow f|h
 \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (1)

Angenommen  $f = gh$ . Zeigen:  $\text{grad}(h) = 0$ .

$$\begin{aligned}
 f = gh &\stackrel{(2)}{\Rightarrow} f|g \vee f|h \quad \text{O.B.d.A: } f|g \\
 &\Rightarrow \underset{f|g}{\text{grad}(f)} \leq \underset{h \neq 0}{\text{grad}(g)} \leq \text{grad}(h) + \text{grad}(g) = \text{grad}(\underbrace{h \cdot g}_{=f})
 \end{aligned}$$

(damit müssen also alle ' $\leq$ ' sein: ' $=$ ')  
 $\Rightarrow \text{grad}(h) = 0$

□

**4.38 Korollar**

$f \in \mathcal{K}[x]$ ,  $\text{grad}(f) = n \geq 1$ . Dann:

- 1)  $f$  hat höchstens  $n$  Nullstellen  $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{K}$
- 2)  $f = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_k) \cdot \bar{f}$  mit  $\text{grad}(\bar{f}) = \text{grad}(f - k)$ .  
 $[f \text{ normiert, } k = n \Rightarrow f = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)]$

**Beweis**

$n = 1$ :  $f = ax + b$  hat Nullstelle  $-a^{-1}b$

$n > 1$ : Hat  $f$  keine Nullstelle, so fertig. Sonst:

Sei  $a$  Nullstelle  $\Rightarrow f = (x - a)g$ ,  $\text{grad}(g) = n - 1$ .

Sei  $b \neq a$  weitere Nullstelle  $\Rightarrow (x - b)|(x - a)g$

$x - b$  irreduzibel,  $(x - b) \nmid (x - a) \Rightarrow (x - b)|g$

$\Rightarrow b$  Nullstelle von  $g$

Per Induktion hat  $g$   $n - 1$  Nullstellen. Behauptung folgt.  $\square$

### 4.39 Satz (Existenz eindeutiger irreduzibler Polynome)

$f \in \mathcal{K}[x]$  mit Leitterm  $a_n x^n$ ,  $n \geq 1$

$\Rightarrow$  Es existieren eindeutig bestimmte irreduzible Polynome  $p_1, \dots, p_l$  und  $m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}$  mit  $f = a_n p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_l^{m_l}$

#### Beweis

Wie in  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

### 4.40 Bemerkung

$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$  Körper  $\Leftrightarrow n$  Primzahl

Analog in  $\mathcal{K}[x]$ :

Sei  $f \in \mathcal{K}[x]$ ,  $\text{grad}(f) = n$

$(\mathcal{K}[x]_n, +, \odot_f)$  mit

- $\mathcal{K}[x]_n := \{g \in \mathcal{K}[x] \mid \text{grad}(g) < n\}$
- $g \odot_f h = (g \cdot h) \bmod f$

ist kommutativer Ring mit Eins.

$$\mathcal{K}[x]_n^* = \{g \in \mathcal{K}[x]_n \mid \text{ggT}(g, f) = 1\}$$

Man kann zeigen:

- a)  $\mathbb{Z}_p[x]_n$  Körper der Ordnung  $p^n \Leftrightarrow f$  irreduzibel,  $p$  Primzahl.
- b) Jeder endliche Körper hat Primzahlpotenzordnung und ist durch seine Ordnung bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.



## 5 Komplexe Zahlen

**Problem (16 Jhdt.):**

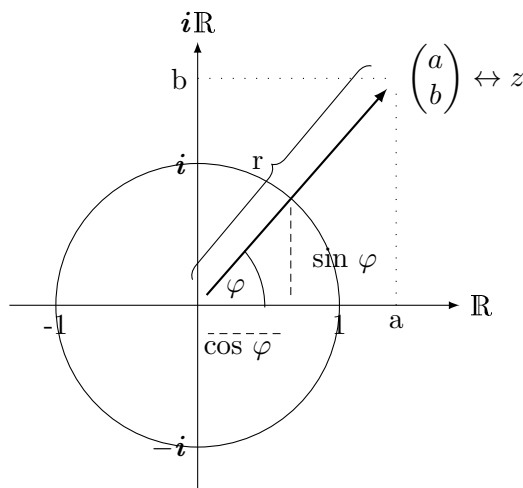
- Gleichungen wie z.B.  $x^2 = -1$  haben keine reelle Lösung. Dagegen hat  $x^2 = -1$  imaginäre Lösungen ('imaginaires' - Descartes)  $x_{1/2} = \pm\sqrt{-1}$
- $x^4 = 1$  hat zwei reelle Lösungen  $x = \pm 1$  und zwei imaginäre Lösungen  $x = \pm\sqrt{-1}$
- $x^2 + 2x + 2$  hat die imaginären Lösungen  $-1 \pm \sqrt{-1}$

### 5.1 Definition (Grundbegriffe)

- $i := \sqrt{-1}$  heißt imaginäre Einheit (Euler 1777)
- $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  Menge der komplexen Zahlen
- Für  $z = a + bi$  heißt  $\operatorname{Re}(z) := a$  Realteil von  $z$  und  $\operatorname{Im}(z) := b$  Imaginärteil von  $z$

## Gaußsche Zahlenebene und Polarkoordinaten

### 5.2 Gaußsche Zahlenebene (1831)



Beobachtung:  $a + bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$   
(‘korrespondiert eindeutig zu’)

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ a &= r \cdot \cos(\varphi) \\ b &= r \cdot \sin(\varphi) \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Darstellung in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} r &\geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \text{ bzw. } (r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \\ \Rightarrow a + bi &= r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

### 5.3 Definition (Betrag)

Für  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  ist  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$  der Betrag von  $z$ .

14.12.16

## 5.4 Bemerkung

Jede Zahl  $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  lässt sich durch den Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und durch den Betrag  $|z|$  eindeutig darstellen:  $z = |z| \underbrace{(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))}_{e^{i\varphi}}$

## 5.5 Formel von Euler

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

**Beweisidee (später mit Taylorreihen)**

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}}_{\text{später: } e^{i\varphi}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(\varphi), \text{ gerade } k} + i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(\varphi), \text{ ungerade } k}$$

Anmerkung:  $i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = i^0 = 1$   
 $\Rightarrow \langle i \rangle$  zyklische Gruppe der Ordnung 4

## 5.6 Bemerkung

Damit ergibt sich für  $z \in \mathbb{C}$  die Darstellung  $z = |z|e^{i\varphi}$ ,  $\varphi$  wie in Abbildung 5.2

## 5.7 Bemerkung

$e^{i\varphi}$  liegt für  $\varphi \in \mathbb{R}$  auf dem Einheitskreis, d.h.  $\varphi \rightarrow e^{i\varphi}$  ist Kreisfunktion. Für Frequenzanalyse (Fourierreihen):

$t \dots$  Zeit,  $\omega \in \mathbb{Z} \dots$  Frequenz.

Dann beschreibt  $e^{i(t \cdot 2\pi)\omega}$  eine Schwingung, z.B.:

- $\omega = 1$  : in einer Zeiteinheit (ZE) wird Einheitskreis 1 mal durchlaufen
- $\omega = k$  : in einer ZE wird Einheitskreis  $k$  mal durchlaufen

## Verknüpfungen auf $\mathbb{C}$

1)  $(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R}^2, +)$ , d.h.  $(a+bi) + (a'+b'i) = (a+a') + (b+b')i$  (Vektoraddition)

2) Wie wählt man Multiplikation, so daß  $\mathbb{C}$  Körper wird?

Man möchte, dass Potenzregel gilt, z.B:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')} \Leftrightarrow$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')$$

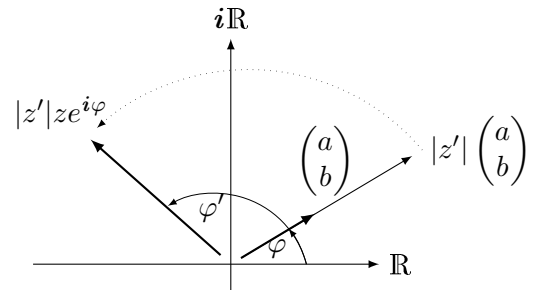
Damit scheidet die komponentenweise Multiplikation aus. Mit den üblichen Rechenregeln aus  $\mathbb{R}$ :

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' + i \sin \varphi') =$$

$$\underbrace{\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi'}_{\cos(\varphi+\varphi')} + i \underbrace{(\sin \varphi \cos \varphi' + \cos \varphi \sin \varphi')}_{\sin(\varphi+\varphi')}$$

Für  $z = a + bi = |z|e^{i\varphi}$  und  $z' = a' + b'i = |z'|e^{i\varphi'}$  ist das Produkt  $zz' = z|z'|e^{i\varphi'} = |z'||z|e^{i(\varphi+\varphi')}$  eine

Drehstreckung des Vektors  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



- 3) Die Inverse einer Drehstreckung  $re^{i\varphi}$  ist dann eine Stauchung  $\frac{1}{r}$  verknüpft mit einer Drehung um  $-\varphi$ :

$$z = re^{i\varphi} \Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}, \text{ da } zz^{-1} = r\frac{1}{r}e^{i(\varphi-\varphi)} = 1 \cdot e^0 = 1$$

In der Schreibweise  $z = a + bi$ ,  $z' = a' + b'i$  ergibt sich:

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + ba')i, \text{ denn}$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad a' = r' \cos \varphi', \quad b' = r' \sin \varphi'.$$

Für  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  ist die Inverse

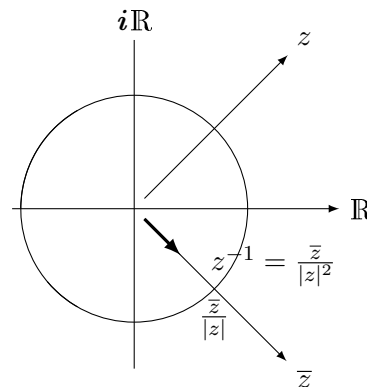
$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-i^2b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

## 5.8 Definition (Konjugierte)

Falls  $z = a + bi \in \mathbb{C}$ , heißt  $\bar{z} := a - bi$  die zu  $z$  Konjugierte.

## 5.9 Bemerkung

- Es folgt  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$



## 5.10 Satz ( $\mathbb{C}$ Körper)

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$  mit

- $(a + b\mathbf{i}) + (a' + b'\mathbf{i}) = (a + a') + (b + b')\mathbf{i}$  und
- $(a + b\mathbf{i})(a' + b'\mathbf{i}) = aa' - bb' + (ab' + a'b)\mathbf{i}$

ist ein Körper.

Nullelement:  $\mathcal{O} = 0 + 0\mathbf{i}$

Einselement:  $\mathbb{1} = 1 + 0\mathbf{i}$

### Beweis

Nachrechnen. □

### Beispiel

- $(1 + \mathbf{i}) = \sqrt{2}e^{\mathbf{i} \cdot \frac{\pi}{4}}$
- $(2 + \mathbf{i})(3 - 4\mathbf{i}) = 6 + 4 + (3 - 8)\mathbf{i} = 10 - 5\mathbf{i}$
- $\frac{\mathbf{i}+1}{2\mathbf{i}-1} = \frac{\underbrace{(\mathbf{i}+1)}_z \underbrace{(2\mathbf{i}+1)}_{\bar{z}}}{\underbrace{(2\mathbf{i}-1)}_z \underbrace{(2\mathbf{i}+1)}_{\bar{z}}} = \frac{1-2+\mathbf{i}(2+1)}{-4-1} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\mathbf{i}$

## 5.11 Rechenregeln (Konjunktion, Betrag)

$w, z \in \mathbb{C}$

- $\overline{w \pm z} = \overline{w} \pm \overline{z}$   
 $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$   
 $\overline{\overline{z}} = z$   
 $\Rightarrow z \mapsto \overline{z}$  Körperisomorphismus
- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2\mathbf{i}}$
- $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$  (positive Definitheit)
- $|z| = |\overline{z}| = \sqrt{z\overline{z}}$
- $|wz| = |w| \cdot |z|$
- $|w + z| \leq |w| + |z|$  Dreiecksungleichung  
 $|w - z| \geq ||w| - |z||$  (Beweis: Übung)

## 5.12 Bemerkung

a) Alternative Konstruktion von  $\mathbb{C}$ :

4.40:  $\mathcal{K}[x]_n$  wird Körper, wenn man durch irreduzibles Polynom  $f$  vom Grad  $n$  teilt (Modulorechnung).

Mit  $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ ,  $n = 2$ ,  $f = x^2 + 1$  ist

$$\begin{aligned}(a + bx) \odot_f (a' + b'x) &= aa' + bb'x^2 + (ab' + ba')x \mod f \\ &= (aa' - bb') + (ab' + ba')x\end{aligned}$$

Statt  $x$  schreibt man  $i$ ,  $i^2 = -1$

b)  $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$  ist nicht irreduzibel in  $\mathbb{C}[x]$ .

Tatsächlich besitzt in  $\mathbb{C}$  jede quadratische Gleichung 2 Lösungen.

Allgemein: Fundamentalsatz der Algebra:

$f \in \mathbb{C}[x]$ ,  $a_n x^n$  Leitterm,  $n \geq 1$ .

$\Rightarrow f$  hat genau  $n$  Nullstellen  $b_1, \dots, b_n$  (nicht notw. verschieden) mit

$$f = a_n(x - b_1) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$$

Das heißt, lineare Polynome  $ax + b$  mit  $a \neq 0$  sind die einzigen Primelemente in  $\mathbb{C}[x]$ .

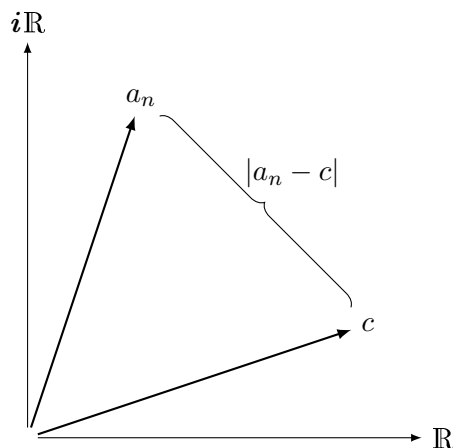
20.12.16

c) Wurzelberechnung:  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

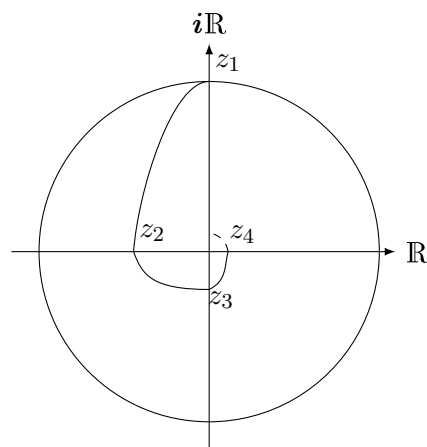
$$\Rightarrow \pm \sqrt{z} = \pm \sqrt{|z|}(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}), \text{ da}$$

$$(e^{i\psi})^2 = e^{i2\psi} = e^{i\psi} \cdot e^{i\psi}$$

d) Übertragung des Grenzwertes von Folgen/Funktionen in  $\mathbb{R}$  auf Folgen in  $\mathbb{C}$ :



$$\begin{aligned}a_n \rightarrow c, \quad a_n, c \in \mathbb{C} &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \underbrace{|a_n - c|}_{\text{Abstand von } a \text{ und } c} < \epsilon\end{aligned}$$



$$z_n = \frac{1}{n} e^{in\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$z_2 = \frac{1}{2} e^{i\pi} = -0.5$$

...

- Konvergenz von Reihen in  $\mathbb{C}$
- Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz (mit  $\Delta$ -Ungleichung)  
 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  ist absolut konvergent, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  konvergiert.  
 Beispiel:  $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}_{\text{später } = e^z}$  konvergiert  $\forall z \in \mathbb{C}$ , insbesondere für  $z = i\varphi$  (5.5)

- e)  $\mathbb{C}$  hat alle analytischen Eigenschaften von  $\mathbb{R}$ , außer:  
 Auf  $\mathbb{C}$  gilt es keine vollständige Ordnung  $\leq$ , die mit  $+$  und  $\cdot$  verträglich wäre, d.h. für die gelten würde

$$a \leq b, \quad c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$$

$$a \leq b, \quad r \geq 0 \Rightarrow ra \leq rb$$

### 5.13 Wiederholung/Zusammenfassung zu $\mathbb{C}$

(Selbst Zeichnungen analog zu 5.x anfertigen ist hilfreich)

- Komplexe Zahl:  $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$   
 Im Folgenden ist  $z = a + bi, z' = a' + b'i \in \mathbb{C}$   
 z.B.  $x^2 + 2x + 3$  hat in  $\mathbb{C}$  Nst.  
 $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i$

- Es gibt 2 Darstellungen:

$$1) \quad z = a + bi, \text{ z.B. } z = 2 + 2i$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8}$$

2) Polarkoordinaten:

$$z = |z|e^{i\varphi} \quad z^* = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow z = |z|z^* = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

- Formel von Euler:  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$

- Addition:  $z + z' = a + a' + (b + b')i$   
Man sieht hier :  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

- Multiplikation:

$$\begin{aligned} zz' &= (a + bi)(a' + b'i) \\ &= aa' - bb' + (ab' + a'b)i \\ &= |z||z'|e^{i\varphi}e^{i\varphi'} \\ &= |z||z'|e^{i(\varphi+\varphi')} \end{aligned}$$

- (Drehstreckung)

z.B.:

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$(1 + i)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$$

(Drehung um  $60^\circ$  von  $1 + i$ )

- $\bar{z} = a - bi$

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

$$\text{z.B. } z = 1 + 3i, \bar{z} = 1 - 3i, z\bar{z} = 1 + 9 \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$$

## 6 Lineare Abbildungen

### Bemerkung

Ein  $\mathcal{K}$ -VR besitzt Skalare  $\lambda \in \mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K}$  Körper.

Bisher  $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ .

Speziell:  $\mathcal{K}^n = \{v = (v_1, \dots, v_n) \mid v_i \in \mathcal{K} \ \forall i = 1, \dots, n\}$  ist  $\mathcal{K}$ -Vektorraum.

$\mathbb{Z}_2^2$  ist  $\mathbb{Z}_2$ -Vektorraum:

$$\mathbb{Z}_2^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \mod 2 \\ v_2 + w_2 \mod 2 \end{pmatrix} \quad v, w \in \mathbb{Z}_2^2$
- $\lambda v = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \mod 2 \\ \lambda v_2 \mod 2 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{Z}_2, \ v \in \mathbb{Z}_2^2$
- Nullelement:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

### 6.1 Definition (Lineare Abbildung, Isomorphismus)

$V, W$   $\mathcal{K}$ -Vektorräume.

i)  $\varphi : V \rightarrow W$  heißt lineare Abbildung, falls

- a)  $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- b)  $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \quad \forall v \in V \ \forall \lambda \in \mathcal{K}$

ii) Ist die lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow W$  bijektiv, so heißt  $\varphi$  (Vektorraum-)Isomorphismus, man schreibt  $V \cong W$  ( $V$  isomorph zu  $W$ )

### Bemerkung

Erfüllt  $\varphi$  Bedingung i), so heißt  $\varphi$  auch (Vektorraum-)Homomorphismus.

### 6.2 Bemerkung

- i)  $\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$
- ii)  $\varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i)$



### 6.3 Beispiel

- a) Nullabbildung  $\varphi : V \rightarrow W, \quad v \mapsto \mathcal{O}$  linear
- b)  $\varphi : V \rightarrow V, \quad v \mapsto \mu v$  für festes  $\mu \in \mathcal{K}$  linear
- c)  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$  Spiegelung an  $x_1x_2$ -Ebene, linear
- d)  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$  nicht linear [ $x \mapsto x^2$  nicht linear]

### 6.4 Bemerkung

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K}$  Körper  $\stackrel{2.6}{\Rightarrow} \varphi : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^m, \quad v \mapsto Av$  linear

Zeigen später: Alle linearen Abbildungen  $\varphi : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^m$  lassen sich durch Matrix  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$  darstellen.

## Kern und Rang

### Motivation

Gegeben: LGS  $Ax = b$  mit  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}), \quad b \in \mathcal{K}^m$

Gesucht: Lösung  $x \in \mathcal{K}^n$

$$\text{z.B.: } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spezielle Lösung:  $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Da  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , ist auch

$$\underbrace{A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\text{Gerade}} = A \left( x_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \right) = \underbrace{Ax_0}_b + \underbrace{A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\mathcal{O}} = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ ist Lösung von } Ax = b$$

$$\Rightarrow H' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ (s.u.)}$$

### 6.5 Definition (Homogenes LGS, Lösungsraum)

$Ah = \mathcal{O}, \quad h \in \mathcal{K}^n$  heißt homogenes LGS.

$\underbrace{H}_{\ker A, \text{ vgl. 6.8}} := \{h \in \mathcal{K}^n \mid Ah = \mathcal{O}\}$  Lösungsraum des homogenen LGS.

## 6.6 Satz (Lösung eines LGS)

21.12.16

Angenommen, es existiert eine Lösung  $x_0$  von  $Ax = b$ . Dann ist  
 $x$  Lösung  $\Leftrightarrow x = x_0 + h, \quad h \in H$

### Beweis

$$(\Rightarrow) \quad x \text{ Lösung} \Rightarrow \mathcal{O} = Ax - Ax_0 = A \underbrace{(x - x_0)}_{=:h} \Rightarrow h \in H$$

$$(\Leftarrow) \quad x = x_0 + h, \quad h \in H \Rightarrow Ax = A(x_0 + h) = Ax_0 + \underbrace{Ah}_{=\mathcal{O}} = b \quad \square$$

### Bemerkung

- Wenn  $x$  Lösung von  $Ax = b$ , so setzt sich  $x$  zusammen aus spezieller Lösung  $x_0$  + Lösung von homogenem LGS.
- Anzahl Lösungen von  $Ax = b$  ist gleich der Anzahl der Lösungen von  $Ax = \mathcal{O}$   
 $\dim(\text{Lösungsraum}) = \dim(H)$
- $H$  heißt Kern von  $A$

## 6.7 Satz (Lineare Abbildung UVR)

$\varphi : V \rightarrow W$  linear

$$\text{i) } U \leq V \text{ UVR} \Rightarrow \underbrace{\varphi(U)}_{\text{Bild von } U} \leq W \text{ UVR von } W.$$

$$\text{ii) } \dim(U) < \infty \Rightarrow \dim(\varphi(U)) \leq \dim(U)$$

### Beweis

$$\begin{aligned} \text{i) } & - \mathcal{O} \in U \Rightarrow \varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \in \varphi(U) \\ & - v, w \in U \Rightarrow \varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(\underbrace{v+w}_{\in U}) \in \varphi(U) \\ & - \lambda \in \mathcal{K}, \quad v \in U \Rightarrow \lambda\varphi(v) = \varphi(\underbrace{\lambda v}_{\in U}) \in \varphi(U) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } & \varphi : V \rightarrow W \text{ linear} \\ & \{u_1, \dots, u_k\} \text{ Basis von } U \quad [u \in U \Rightarrow u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k] \\ & \Rightarrow \{\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_k)\} \text{ Erzeugendensystem von } \varphi(U), \text{ enthält Basis von } \varphi(U) \Rightarrow \\ & \text{Behauptung} \quad \square \end{aligned}$$

### 6.8 Definition (Rang, Kern)

i)  $\varphi : V \rightarrow W$  linear,  $\dim(V) < \infty$ .

Dann heißt  $\dim(\underbrace{\varphi(V)}_{\text{UVR wegen 6.7}})$  Rang von  $\varphi$ ,  $\text{rg}(\varphi)$ .

Im Beispiel (Motivation) ist  $\text{rg}(A) = 2$ , weil die Matrix auf eine Ebene abbildet.

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} v_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathcal{O}} v_3$$

ii)  $\varphi : V \rightarrow W$  linear.

$\ker(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathcal{O}\}$  heißt Kern von  $\varphi$ .

Im Beispiel (Motivation) ist  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \ker(A)$ , da jeder

Gerade dieser Form auf den Nullvektor,  $\mathcal{O}$ , abgebildet wird.

### 6.9 Satz (Kern)

$\varphi : V \rightarrow W$  linear

i)  $\ker(\varphi)$  ist UVR von  $V$

ii)  $\varphi$  injektiv  $\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{\mathcal{O}\}$

#### Beweis

i) –  $\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O} \in \ker(\varphi)$

–  $u, v \in \ker(\varphi) \Rightarrow \underbrace{\varphi(u)}_{=\mathcal{O}} + \underbrace{\varphi(v)}_{=\mathcal{O}} = \mathcal{O} = \varphi(u+v) \Rightarrow u+v \in \ker(\varphi)$

–  $\lambda \in \mathbb{K}, v \in \ker(\varphi) \Rightarrow \mathcal{O} = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow \lambda v \in \ker(\varphi)$

ii)  $(\Rightarrow)$   $\varphi$  injektiv,  $\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ .

Da  $\varphi$  injektiv, kann kein weiteres Element auf  $\mathcal{O}$  abgebildet werden.

$(\Leftarrow)$  Angenommen,  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$   $v_1, v_2 \in V$

$\Rightarrow \mathcal{O} = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = \varphi(v_1 - v_2)$

$\Rightarrow v_1 - v_2 = \mathcal{O}$ , da  $\ker(\varphi) = \{\mathcal{O}\}$

$\Rightarrow v_1 = v_2$

□

### 6.10 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto Ax$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \varphi(\mathbb{R}^3) &= \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \rangle_{\mathbb{R}} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} = \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ &\Rightarrow \text{rg}(\varphi) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \varphi(x) = \mathcal{O} &\Leftrightarrow Ax = \mathcal{O} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ \ker(\varphi) = H &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

#### Bemerkung

$$\begin{array}{lll} \dim(\ker(\varphi)) & + \text{rg}(\varphi) & = \dim(\mathbb{R}^3) \\ 1 & + 2 & = 3 \end{array}$$

### 6.11 Satz (Lineare Abbildung)

$V, W$  sind  $\mathcal{K}$ -Vektorräume,  $\dim(V) = n$

Gegeben:  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ ,  $w_1, \dots, w_n \in W$  nicht notw. verschieden

$\exists!$  lin. Abb.  $\varphi: V \rightarrow W$  mit  $\varphi(v_i) = w_i \quad \forall i$ , und zwar

$$(\triangle) \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \xrightarrow{\varphi} w = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\varphi(v_i)}_{w_i}$$

Das heißt: Wenn man weiß, wie die Basisvektoren abgebildet werden, dann kennt man die lineare Abbildung vollständig. (vgl. Bemerkung 2.5 + Beispiel 2.4b))

#### Beweis

Für  $\varphi$  aus  $(\triangle)$  gilt:

- $\varphi$  linear ✓
- $\varphi(v_i) = w_i \quad \forall i$  ✓

- $\varphi$  eindeutig: Angenommen es gibt  $\psi : V \rightarrow W$  linear mit  $\psi(v_i) = w_i \Rightarrow$

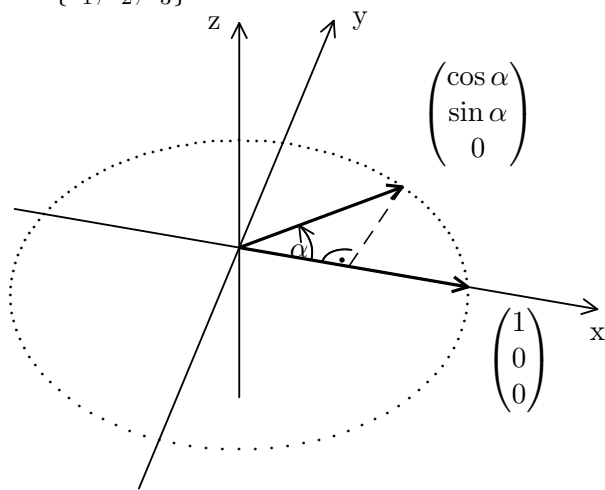
$$\psi\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i}_v\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\psi(v_i)}_{=w_i} = \varphi\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i}_v\right)$$

□

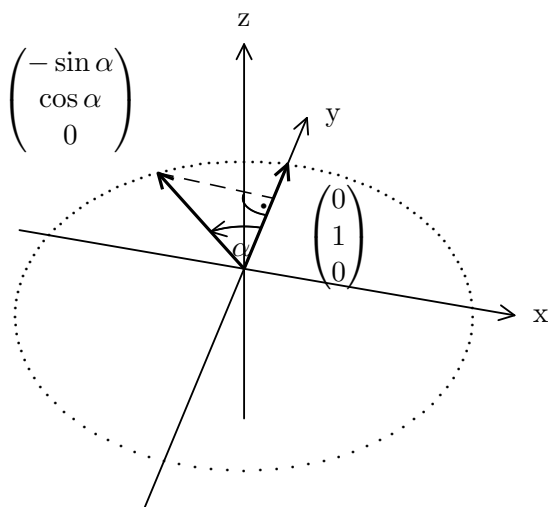
## 6.12 Beispiel

$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  Drehung um Winkel  $\alpha$  um  $z$ -Achse.

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = (Ae_1, Ae_2, Ae_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ vgl. Bsp. 2.4b}$$

### 6.13 Beispiel

10.01.17

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto Av, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

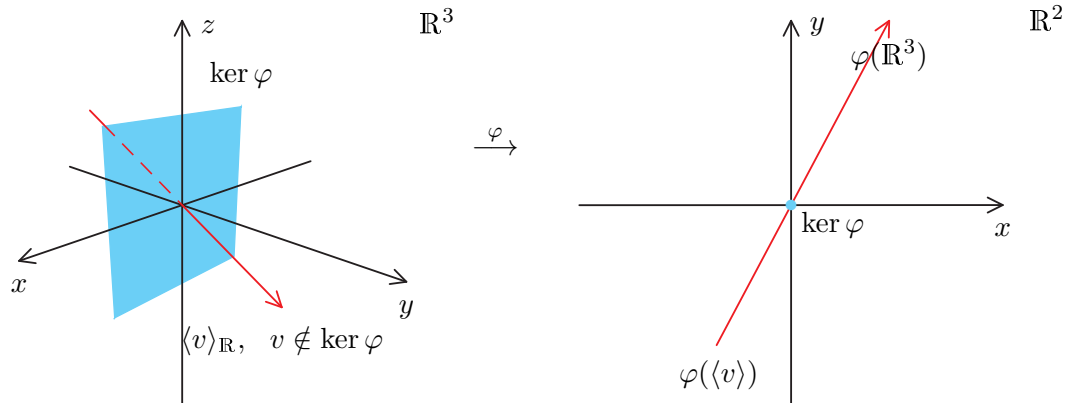
$$\bullet \ker(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

• Bild von  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbb{R}^3) &= \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$- \varphi : \ker(\varphi) \rightarrow \{\mathcal{O}\}$$

$$- v \notin \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi(v) \neq 0$$



### 6.14 Satz (Dimensionsformel)

$V, W$   $\mathcal{K}$ -Vektorräume,  $\dim(V) = n$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.  
Dann ist

$$\dim(V) = \underbrace{\dim(\ker \varphi)}_{\text{'Defekt von } \varphi'} + \operatorname{rg}(\varphi)$$

#### Beweis:

Sei  $\{u_1, \dots, u_k\}$  Basis von  $\ker \varphi$ . Ergänze zu Basis  $\{u_1, \dots, u_n\}$  von  $V$  und setze

$$U := \langle u_{k+1}, \dots, u_n \rangle_{\mathcal{K}}$$

Da  $\ker \varphi \cap U = \{\mathcal{O}\}$  und  $V = U + \ker \varphi$ , ist

$$\dim(V) = \dim(\ker \varphi) + \dim(U) - \underbrace{\dim(U \cap \ker \varphi)}_{=0}$$

$$\text{Zeige: } \dim(U) \stackrel{1)}{=} \dim(\varphi(U)) \stackrel{2)}{=} \underbrace{\dim(\varphi(V))}_{\operatorname{rg}(\varphi)}$$

1)

$$\ker \varphi \cap U = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow \ker(\varphi|_U) = \{\mathcal{O}\}$$

$$\stackrel{6.9}{\Rightarrow} \varphi|_U \text{ injektiv}$$

$$\Rightarrow \dim(U) = \dim(\varphi(U))$$

$$\left[ \text{Bem: } \{u_{k+1}, \dots, u_n\} \text{ Basis von } U \xrightarrow{\varphi|_U \text{ injektiv}} \{\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)\} \text{ Basis von } \varphi(U) \right]$$

2)

$$\begin{aligned}
\dim(\varphi(U)) &= \dim(\varphi(V)), \text{ da} \\
\varphi(V) &= \varphi(U + \ker \varphi) \\
&\stackrel{\varphi \text{ linear}}{=} \varphi(U) + \underbrace{\varphi(\ker \varphi)}_{\{\mathcal{O}\}} \\
&= \varphi(U)
\end{aligned}$$

### 6.15 Korollar

$V, W$   $\mathcal{K}$ -Vektorräume mit  $\dim(V) = \dim(W) = n$ ,  $\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

- i)  $\varphi$  surjektiv,
- ii)  $\varphi$  injektiv,
- iii)  $\varphi$  bijektiv.

#### Beweis

$$6.14 \Rightarrow n = \dim(\ker \varphi) + \operatorname{rg} \varphi$$

$$\varphi \text{ surjektiv} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \varphi = n \Leftrightarrow \dim(\ker \varphi) = 0 \stackrel{6.9}{\Leftrightarrow} \varphi \text{ injektiv}$$

□

### Lösungen von LGS, Rang von Matrizen

Gegeben: LGS mit  $Ax = b$ ,  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$ ,  $b \in \mathcal{K}^m$ ,  $\mathcal{K}$  Körper.

Gesucht:  $\mathcal{L} := \{x \in \mathcal{K}^n \mid Ax = b\}$  Lösungsraum

Sei  $x_0 \in \mathcal{L}$  eine spezielle Lösung.

$$\stackrel{6.6}{\Rightarrow} \mathcal{L} = x_0 + \ker \varphi, \quad \varphi : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^m, \quad x \mapsto Ax$$

D.h. Größe von  $\mathcal{L}$  gegeben durch  $\dim(\ker \varphi)$ .

### 6.16 Bemerkung

$$\dim(\ker \varphi) = n - \underbrace{\operatorname{rg} \varphi}_{=\dim(\varphi(\mathcal{K}^n))} \quad (6.14)$$

$$\varphi(\mathcal{K}^n) = \langle \varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n) \rangle_{\mathcal{K}} = \underbrace{\langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle_{\mathcal{K}}}_{\text{Spalten von } A}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} \varphi = \text{Anzahl der linear unabhängigen Spalten von } A = \underline{\text{Spaltenrang}} \text{ von } A$$

Man kann zeigen: Spaltenrang von  $A$  = Zeilenrang von  $A$  (Anzahl linear unabhängiger Zeilen von  $A$ )

Insgesamt:  $\dim(\ker \varphi) = n - \text{Spaltenrang von } A = n - \text{Zeilenrang von } A$



## 7 Lineare Abbildungen und Matrizen

### Erinnerung

(1.29): Ein Vektor hat bezüglich unterschiedlicher Basen unterschiedliche Linearkombinationen und damit auch unterschiedliche Koordinaten, z.B.

$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  hat bezüglich  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$  die Linearkombination  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{3}_{\lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{1}_{\lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , das heißt  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = 1$  sind die Koordinaten von  $v$  bezüglich der Basis  $B$ . Bezüglich der Standardbasis hat  $v$  die Koordinaten  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{4}_{\lambda_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{3}_{\lambda_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### 7.1 Definition (Koordinatenvektor)

$V$   $\mathcal{K}$ -Vektorraum,  $B \subseteq V$  Basis,  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ .

Wenn  $v \in V$  und  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ , dann heißt  $K_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{K}^n$

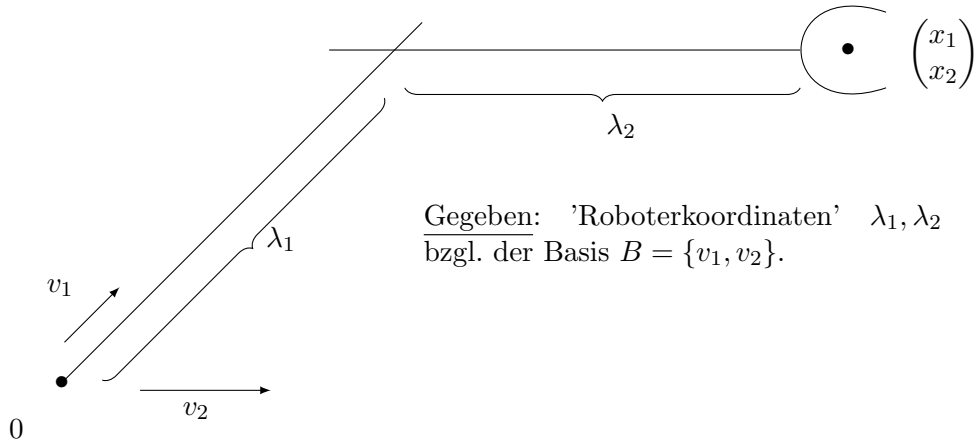
Koordinatenvektor von  $v$  bezüglich der Basis  $B$ .

$\left[ \text{Im Beispiel oben ist } K_B \left( \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \right]$

## Basistransformationen

Umrechnung von Koordinaten bezüglich verschiedener Basen.

### 7.2 Beispiel



- 1) Gesucht: 'Weltkoordinaten'  $(x_1, x_2)^T$  bzgl. Basis  $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ .

$$\text{Es ist } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Mit z.B.:  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1$ :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Basiswechselmatrix } S_{BC} \text{ (7.3)}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Koordinaten bzgl. } B} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Koordinaten bzgl. } C, \text{ Position des Greifarms}}$$

11.01.17

- 2) Gesucht: Koordinaten  $\mu_1, \mu_2$  bezüglich Basis  $D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ .

$$\text{Es ist } \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0 : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Basiswechselmatrix } S_{B,D}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Z.B.:  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \text{Koordinaten (-vektor) bzgl. } D$

### 7.3 Definition (Basiswechselmatrix)

$V$  Vektorraum,  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $C = \{w_1, \dots, w_n\}$  Basen von  $V$ .

Schreibe  $v_i$  als Linearkombination der Vektoren aus  $C$ :

$$v_1 = \boxed{s_{11}w_1 + \dots + s_{n1}w_n}$$

$\vdots$

$$v_n = s_{1n}w_1 + \dots + s_{nn}w_n$$

Dann heißt die Matrix  $S_{B,C} = \begin{pmatrix} \boxed{s_{11}} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{s_{n1}} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$  Basiswechselmatrix von Basis B nach C.

Spalte  $i$  enthält die Koordinaten von  $v_i$  bzgl.  $C$ .

### 7.4 Satz (Koordinaten umrechnen)

$V, B, C$  wie in 7.3.

Für  $v \in V$  ist  $K_C(v) = S_{BC} \cdot K_B(v)$

**Beweis**

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \underbrace{\sum_{l=1}^n s_{lk} w_l}_{v_k \text{ (7.3)}} \Rightarrow K_B(v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot s_{lk} \right) w_l \\ &= \mu_l \quad (\text{Koordinaten in Basis } C) \end{aligned}$$

□

## Darstellungsmatrizen

### 7.5 Beispiel

Skizze: Siehe 7.2.

Roboter soll folgende Operation  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ausführen:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Gegeben: Aktuelle Position  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,  $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Gesucht:  $\lambda_1, \lambda_2$ , so dass Greifarm in neuer Position  $\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Methode aus 7.3:

$$\left. \begin{aligned} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Matrixschreibweise:}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A_\varphi^{C,B} \text{ (Def. 7.6) \quad aktuelle Pos. bzgl. C}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\text{Koord. bzgl. B, nachdem } \varphi \text{ ausgeführt wurde}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\text{Koord. bzgl. B, nachdem } \varphi \text{ ausgeführt wurde}} = K_B\left(\varphi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right)$$

Z.B. Greifarm in  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  soll nach  $\varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$  bewegt werden. Dazu

muss man  $\lambda_1, \lambda_2$  auf  $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  einstellen.

$$\text{Probe: } \underbrace{\lambda_1}_{=2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \underbrace{\lambda_2}_{=4} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \checkmark$$

## 7.6 Definition (Darstellungsmatrix)

$V, W$  Vektorraum endlicher Dimension mit Basen  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  und  $C = \{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ .  $\varphi: V \rightarrow W$  lineare Abbildung.

Schreibe  $\varphi(v_i)$  als Linearkombination der Vektoren aus  $C$ :

$$\varphi(v_1) = \boxed{a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m}$$

$\vdots$

$$\varphi(v_n) = a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m$$

$$\text{Dann hei\ss t } A_\varphi^{B,C} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{m1}} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Darstellungsmatrix von } \varphi \text{ bzgl. } B \text{ und } C}.$$

### Schreibweisen

$$1) \quad A_\varphi^{B,B} = A_\varphi^B$$

$$2) \quad \text{Falls } B = \{e_1, \dots, e_n\} = C, \text{ (also } V = W), \text{ schreibe } A_\varphi$$

[Bem.:  $\varphi$  durch  $A_\varphi^{B,C}$  eindeutig bestimmt.]

## 7.7 Satz (Koordinatenvektor und Lineare Abbildung)

$V, W, B, C, \varphi$  wie in 7.6

Gegeben:  $v \in V, K_B(v)$ .

Dann ist  $K_C(\varphi(v)) = A_\varphi^{B,C} \cdot K_B(v)$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \bullet K_B(v) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A_\varphi^{B,C} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ A_\varphi^{B,C} \cdot K_B(v) &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} \lambda_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} \lambda_i \end{pmatrix} \\ \bullet \varphi(v) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^n v_i \lambda_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot \underbrace{\varphi(v_i)}_{= \sum_{k=1}^m a_{ki} w_k \text{ (7.6)}} \\ &= \sum_{k=1}^m \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot a_{ki}\right)}_{\text{Koord. von } \varphi(v) \text{ bzgl } C} w_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow K_C(\varphi(v)) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{1i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_{mi} \end{pmatrix}$$

□

## 7.8 Beispiel

Gegeben: Basis  $B = \{v_1, v_2, v_3\}$  von  $V$  und Basis  $C = \{w_1, w_2\}$  von  $W$ ,

$\varphi : V \rightarrow W$  mit  $A_\varphi^{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

Angenommen,  $v \in V$  mit  $K_B(v) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$$\Rightarrow \underbrace{K_C(\varphi(v))}_{\substack{\text{Koordinaten bzgl. } C, \\ \text{nachdem } \varphi \text{ ausgeführt wurde}}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot K_B(v) = \begin{pmatrix} -5 \\ 22 \end{pmatrix}$$

**Bemerkung (Geordnete Basen)**

17.01.17

In 7.3 und 7.6 haben die Basisvektoren von  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $C = \{w_1, \dots, w_m\}$  eine bestimmte Reihenfolge (Nummerierung). Man sagt es sind geordnete Basen und schreibt dafür  $B = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $C = (w_1, \dots, w_m)$ , um anzuzeigen, dass die Basiselemente nicht vertauscht werden dürfen.

**Beispiel**

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow S_{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ da:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**7.9 Beispiel**

$$\text{In 7.5 ist } A_{\varphi}^{C,B} = \underbrace{S_{C,B}}_{2)} \cdot \underbrace{A_{\varphi}^C}_{1)}$$

- 1) Streckung im Faktor 2 bezüglich  $C = (e_1, e_2)$

$$A_{\varphi}^C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 2) Basiswechsel von  $C$  nach  $B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_{C,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{S_{C,B}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A_\varphi^C} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A_\varphi^{C,B}}$$

### 7.10 Satz (Umrechnen von Darstellungsmatrizen)

$\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung,  $B, B'$  Basen von  $V$ ,  $C, C'$  Basen von  $W$ .

$$\Rightarrow A_\varphi^{B',C'} = S_{C,C'} \cdot A_\varphi^{B,C} \cdot S_{B',B}$$

Bemerkung: in 7.9:  $A_\varphi^{C,B} = S_{C,B} \cdot A_\varphi^{C,C} \cdot S_{C,C}$  mit  $S_{C,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$  ist 'Spezialfall'.

**Beweis:**

Sei  $v \in V$ .

$$\begin{aligned} A_\varphi^{B',C'} \cdot K_{B'}(v) &\stackrel{7.7}{=} K_{C'}(\varphi(v)) \\ &\stackrel{7.4}{=} S_{C,C'} \cdot \overbrace{K_C(\varphi(v))} \\ &\stackrel{7.7}{=} S_{C,C'} \cdot \overbrace{A_\varphi^{B,C} \cdot K_B(v)} \\ &\stackrel{7.4}{=} S_{C,C'} \cdot A_\varphi^{B,C} \cdot \underbrace{S_{B',B} \cdot K_{B'}(v)} \end{aligned}$$

□

### 7.11 Bemerkung zu Darstellungsmatrizen

$V$  bzw.  $W$   $\mathcal{K}$ -Vektorraum mit Basen  $B = (v_1, \dots, v_n)$  bzw.  $C = (w_1, \dots, w_m)$ ,

$\varphi : V \rightarrow W$  lineare Abbildung.

Für  $v \in V$  kann  $K_B(v)$  aufgefasst werden als Bild der Koordinatenabbildung.

$$K_B : V \rightarrow \mathcal{K}^n, \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Übersicht:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & W \\ K_B \downarrow & & \downarrow K_C \\ \mathcal{K}^n & \xrightarrow{A_\varphi^{B,C}} & \mathcal{K}^m \end{array}$$

$\Rightarrow$  Jede lineare Abbildung  $\varphi : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^m$  ( $\mathcal{K}$  Körper) ist von der Form  $\varphi(x) = A \cdot x$  für eine geeignete Matrix  $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$ .

### Beweis

Wenn  $V = \mathcal{K}^n$  und  $W = \mathcal{K}^m$ , benutze für  $B$  und  $C$  kanonische Basis.

$$\Rightarrow K_C(\varphi(v)) = \varphi(v) \stackrel{7.4}{=} A_\varphi^{B,C} \cdot K_B(v) = \underbrace{A_\varphi^{B,C}}_{\text{Matrix} \cdot \text{Vektor}} \cdot v \quad \square$$

## 7.12 Satz (Eigenschaften von Darstellungsmatrizen)

$U, V, W$  Vektorräume mit Basen  $B, C, D$ .  $\varphi, \psi$  lineare Abbildungen.

- i) Sei  $\varphi, \psi : V \rightarrow W$ . Dann ist  

$$A_{\varphi+\psi}^{B,C} = A_\varphi^{B,C} + A_\psi^{B,C}$$
- ii) Sei  $\varphi : U \rightarrow W$ . Dann ist  

$$A_{\lambda\varphi}^{B,C} = \lambda A_\varphi^{B,C}, \quad \lambda \in \mathcal{K}$$
- iii) Sei  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\psi : V \rightarrow W$ . Dann ist  

$$A_{\psi \circ \varphi}^{B,D} = A_\psi^{C,D} \cdot A_\varphi^{B,C}$$

[Bemerkung: Verknüpfung linearer Abbildungen entspricht dem Matrixprodukt der Darstellungsmatrizen.]

**7.12 hier ohne Beweis.**

## Matrixinversen

### Erinnerung

(4.2):  $\mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  mit Matrixaddition und -multiplikation ist ein Ring mit Eins ( $= E_n$ ).

D.h.  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  kann Inverse  $A^{-1}$  besitzen.

Für  $A^{-1}$  gilt:  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$ .

Fragen:

- Welche  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  besitzen Inverse  $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ ?
- Wie berechnet man  $A^{-1}$ ?



### 7.13 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ hat Inverse } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \text{ da:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

### 7.14 Bemerkung

Idee:  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  kann als Darstellungsmatrix  $A_\varphi^B$  der linearen Abbildung  $\varphi : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n$ ,  $\varphi(v) = Av$  bezüglich Basis  $B$  aufgefasst werden.

### 7.15 Satz (Invertierbarkeit)

$V$   $\mathcal{K}$ -Vektorraum,  $\dim(V) = n$ ,  $B$  Basis,  $\varphi : V \rightarrow V$  linear mit Darstellungsmatrix  $A_\varphi^B$ . Dann:

$$\varphi \text{ invertierbar} \Leftrightarrow A_\varphi^B \text{ invertierbar}$$

Das heißt:  $A_{\varphi^{-1}}^B = (A_\varphi^B)^{-1}$

#### Beweis

$$(\Rightarrow) \text{ Zeige: } (A_\varphi^B) \cdot (A_{\varphi^{-1}}^B) = E_n$$

$$\varphi \text{ invertierbar} \Rightarrow A_\varphi^B \cdot A_{\varphi^{-1}}^B \stackrel{7.12}{=} A_{\varphi \circ \varphi^{-1}}^B = E_n$$

$$\text{Analog: } A_{\varphi^{-1}}^B \cdot A_\varphi^B = E_n$$

$$(\Leftarrow) \text{ Sei nun } A_\varphi^B \text{ invertierbar.}$$

$$\Rightarrow \exists Y \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K}) : A_\varphi^B \cdot Y = Y \cdot A_\varphi^B = E_n$$

$$\stackrel{7.14}{\Rightarrow} Y = A_\psi^B \text{ mit } \psi(v) = Y \cdot v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_n = A_\varphi^B \cdot A_\psi^B \stackrel{7.12}{=} A_{\varphi \circ \psi}^B \\ E_n = A_\psi^B \cdot A_\varphi^B \stackrel{7.12}{=} A_{\psi \circ \varphi}^B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = id_v$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ hat Inverse } \psi$$

□

### 7.16 Satz (Invertierbarkeit, Rang)

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K}) \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \underbrace{\text{rg}(A) = n}_{\text{d.h. alle Spalten \& Zeilen linear unabhängig}}$$

18.01.17

**Beweis**

$$7.14 \Rightarrow A = A_\varphi^B \text{ für } \varphi : \mathcal{K}^n \rightarrow \mathcal{K}^n, \quad \varphi(v) = Av$$

$$\begin{aligned} A \text{ invertierbar} &\stackrel{7.15}{\Leftrightarrow} \varphi \text{ invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \varphi \text{ bijektiv} \\ &\stackrel{6.15}{\Leftrightarrow} \varphi \text{ surjektiv} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{rg}(\varphi) = n \\ &\stackrel{6.16}{\Leftrightarrow} \operatorname{rg}(A) = n \end{aligned}$$

□

**7.17 Beispiel**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 1 \Rightarrow A \text{ nicht invertierbar}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2 \Rightarrow A \text{ invertierbar (weil Rang voll).}$$

**7.18 Berechnung der Matrixinverse ( $A^{-1}$ )**

Gegeben: Quadratische Matrix  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K} \text{ Körper.}$

Gesucht: Matrixinverse  $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ .

**Voraussetzungen**

Das sogenannte Gauß-Jordan-Verfahren zur Berechnung der Matrixinversen baut auf der Berechnung der Lösungen von Gleichungssystemen  $Ax = b$  mit **quadratischer** Matrix  $A$  auf. Deswegen werden zunächst einige Regeln angegeben, die zur Lösung linearer Gleichungssysteme benutzt werden. Dabei wird im Folgenden das LGS mit Hilfe der erweiterten Koeffizientenmatrix  $(A|b)$  beschrieben: Wenn

$$b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathcal{K}^n \text{ schreibt man } (A|b) = \left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right).$$

Die Lösungsmenge des LGS ändert sich nicht, wenn man an  $(A|b)$  folgende elementaren Zeilenumformungen aus dem Gaußverfahren durchführt:

1. Erweiterung einer Zeile mit einem Skalar  $\lambda \in \mathcal{K}, \quad \lambda \neq 0$ ,

2. Addition von Zeilen,
3. Tauschen von Zeilen.

### Gauß-Jordan-Algorithmus

Im Unterschied zum Gauß-Algorithmus bringt man das LGS  $Ax = b$  nicht auf Dreiecksform, sondern man formt die Zeilen so um, dass  $A$  zur Einheitsmatrix  $E_n$  wird. Dabei wird  $b$  automatisch zum Lösungsvektor  $x$  umgeformt: Man erhält das System  $(E_n|x)$ .

### Berechnung der Inversen $A^{-1}$

Zur Berechnung der Inversen muss nun das System  $AX = E_n$  gelöst werden. Man erreicht dies, indem der Gauß-Jordan-Algorithmus simultan auf die  $n$  LGS  $Ay = e_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  angewendet wird. Dazu stellt man das System  $(A|E_n)$  auf. Durch Zeilenumformungen überführt man nun  $A$  in die Einheitsmatrix, wobei die rechte Seite in die Lösungsmatrix  $X$  überführt wird. Man erhält so das System  $(E_n|X)$  mit  $X = A^{-1}$ .

Anmerkung: Das Verfahren zeigt auch, ob  $A$  überhaupt eine Inverse besitzt. Besitzt  $A$  keine Inverse, so kann man  $A$  nicht in die Einheitsmatrix umformen.

### Beispiel

Gegeben:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Algorithmus zur Berechnung von  $A^{-1}$  erweitert den Gauß-Algorithmus zur Lösung von LGS.

z.B.  $Ax = b$  mit  $b = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$

Gauß-Jordan-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 10 \\ 1 & 3 & | & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow{II=I-2 \cdot II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 10 \\ 0 & -5 & | & -20 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5} \cdot II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 10 \\ 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I=I-II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2} \cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & | & 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  Lösung

Für Inverse: Suche Matrix, die  $A \cdot X = E_n$  löst.

$$AX = E_n \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{A \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}}_{(*)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \underbrace{A \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}}_{(**)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wende Gauß-Jordan-Algorithmus simultan auf LGS (\*) und (\*\*) an.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 1 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II=I-2II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -5 & | & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{5}II} \begin{pmatrix} 2 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{I=I-II} \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}I} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & | & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = X = A^{-1}$$

## 7.19 Lemma

$V$   $\mathcal{K}$ -Vektorraum,  $B, C$  Basen  $\Rightarrow S_{B,C} = (S_{C,B})^{-1}$

### Beweis

Sei  $v \in V$ .

$$\underbrace{S_{C,B} \cdot \left( S_{B,C} \cdot K_B(v) \right)}_{=E_n} = S_{C,B} \cdot K_C(v) = K_B(v) \quad \square$$

## 7.20 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \quad B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Aus 7.2: } S_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ aus 7.9: } S_{C,B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tatsächlich ist } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 7.21 Korollar

$\varphi : V \rightarrow V$ ,  $B, C$  Basen von  $V$ ,  $S := S_{B,C}$

$$\Rightarrow A_\varphi^C = S A_\varphi^B S^{-1}$$

### Beweis

$$S A_\varphi^B S^{-1} \stackrel{7.19}{=} S_{B,C} A_\varphi^{B,B} S_{C,B} = A_\varphi^{C,C} = A_\varphi^C \quad \square$$

## 7.22 Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \quad B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad C = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Wie sieht Darstellungsmatrix von einer Drehung  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  bzgl.  $B$  aus?

$$\text{Wissen: } D_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A_\varphi^C \text{ Drehung um } \frac{\pi}{2} \text{ bzgl. } C$$

$$\begin{aligned} A_{\varphi}^B &= S_{C,B} \underbrace{D_{\frac{\pi}{2}}}_{A_{\varphi}^{C,C}} S_{B,C} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 8 Determinanten

7.16 :  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  invertierbar  $\Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$

In diesem Kapitel werden invertierbare Matrizen mit Hilfe der Determinante charakterisiert.

Das ist einfacher zu implementieren.

### 8.1 Definition ( $A_{ij}$ )

$A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .  $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathcal{K})$  sei die Matrix, die man aus  $A$  durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte erhält.

$$\text{z.B.: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 8.2 Definition (Rekursive Definition der Determinante)

24.01.17

$A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ .

$n = 1$  :  $A = (a)$ ,  $\det(A) := a \in \mathcal{K}$

$n \geq 2$  : Entwicklung nach der 1. Zeile (7.4):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= +a_{11} \cdot \det(A_{11}) - a_{12} \cdot \det(A_{12}) + a_{13} \cdot \det(A_{13}) \pm \dots (-1)^{n+1} a_{1n} \cdot \det(A_{1n}) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot \det(A_{1j}) \end{aligned}$$

### 8.3 Beispiel

$$\text{a) } \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-3) - 1 \cdot 2 = -5$$

$$\det \begin{pmatrix} \overline{+} a_{11} & \overline{-} a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Man multipliziert die Werte auf der Hauptdiagonale und zieht die der Nebendiagonale ab.

$$\text{b) } \det \begin{pmatrix} \overline{+} a_{11} & \overline{-} a_{12} & \overline{+} a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$a_{13}(a_{21}a_{33} - a_{22}a_{31}) \\ = \dots$$

**Regel von Sarrus:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

-   -   -   +   +   +

Zum Beispiel:  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 + 4 + 0 - (-1) - 0 - 0 = 8$

- c) Für  $n \times n$ -Matrizen gibt es im Allgemeinen  $n!$  Summanden.  
Viele Nullen in der Matrix machen die Berechnung einfacher, z.B.:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 - (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 0 = 26$$

Falls Nullen nicht in 1. Zeile stehen: Man kann nach jeder beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln:

## Regeln zur Berechnung der Determinante

### 8.4 Satz (Entwicklungssatz von Laplace)

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$$

- i) Entwicklung nach  $i$ -ter Zeile:  
 $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$
- ii) Entwicklung nach  $j$ -ter Spalte:  
 $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A_{ij})$

**8.4 hier ohne Beweis, zu lang.**

### 8.5 Beispiel

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \leftarrow (\text{Vorzeichen, } (-1)^{i+j}, \text{ Schachbrettmuster})$$

– nach 1. Spalte:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - (-1) \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3) \\ &= -10 \end{aligned}$$

– nach 2. Spalte:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -(-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 0 + 0 \\ &= -10 \end{aligned}$$

Also: Am Besten, man entwickelt nach Zeile oder Spalte, in der viele Nullen stehen.

b) Falls es nur wenige Nullen gibt: Erzeuge möglichst viele Nullen mit Gauß, denn:

$$\begin{aligned} A &= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{obere Dreiecksmatrix}} \\ \Rightarrow \det(A) &= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &= \dots \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn} \end{aligned}$$

Analog für unter Dreiecksmatrix:



$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Für den Gauß-Algorithmus müssen folgende Regeln beachtet werden:

## 8.6 Satz (Eigenschaften von Determinanten)

$$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K}), \quad A = (S_1, \dots, S_n), \quad s_1, \dots, s_n \in \mathcal{K}^n, \quad s'_i \in \mathcal{K}^n$$

Folgende Eigenschaften gelten sowohl für Spalten als auch für Zeilen:

$$\text{D1) } \det(s_1, \dots, \underbrace{s_i + s'_i}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, s_n) = \det(s_1, \dots, s_i, \dots, s_n) + \det(s_1, \dots, s'_i, \dots, s_n)$$

**Beweis:** Nach Spalte  $i$  entwickeln.

$$\text{D2) } \text{Beim Vertauschen von 2 Spalten ändert sich das Vorzeichen der Determinante.}$$

**Beweis** Hier ohne Beweis.

$$\text{D3) } \det(s_1, \dots, \lambda s_i, \dots, s_n) = \lambda \cdot \det(s_1, \dots, s_n), \quad \lambda \in \mathcal{K}$$

**Beweis:** Nach Spalte  $i$  entwickeln.

$$\text{D4) } \det(\lambda \cdot A) = \det(\lambda s_1, \dots, \lambda s_n) \stackrel{D3}{=} \lambda^n \det(A)$$

$$\text{D5) } \text{Ist } s_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ so ist } \det(A) = 0$$

**Beweis:** Nach Spalte  $i$  entwickeln.

$$\text{D6) } \text{Besitzt } A \text{ zwei identische Spalten, so ist } \det(A) = 0.$$

**Beweis:** Vertausche Spalten und erhalte Matrix  $A'$  mit  $A' = A$ .

Nach D2:  $\det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$ , falls  $\mathcal{K} \neq \mathbb{Z}_2$ .

Falls  $\mathcal{K} = \mathbb{Z}_2$ : Es gilt auch  $\det(A) = 0$  mit vollständiger Induktion.

$$\text{D7) } \det(s_1, \dots, \underbrace{s_i + \lambda s_j}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, s_n) = \det(A) \quad (i \neq j, j \in [1, n])$$

**Beweis:** D1, D3, D6.

$$\text{D8) } \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

**Beweis** Hier ohne Beweis.

$$\text{D9) } \det(A^T) = \det(A)$$

**Beweis:** Folgt aus 8.4.

### 8.7 Beispiel

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{z_1 \leftrightarrow z_2}{=} -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{III=III+2II}{=} -\det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = -14$$

## Charakterisierung invertierbarer Matrizen

### 8.8 Satz (Invertierbarkeit von Matrizen)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  invertierbar  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

In diesem Fall gilt:  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ .

#### Beweis

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad \det(A) \cdot \det(A^{-1}) &\stackrel{D8}{=} \det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1 \\ &\Rightarrow \det(A) \neq 0, \quad \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad \text{Sei } A \text{ nicht invertierbar} &\stackrel{7.16}{\Rightarrow} \text{rg}(A) < n \\ &\Rightarrow \text{Spalten von } A \text{ sind linear abhängig, d.h.:} \end{aligned}$$

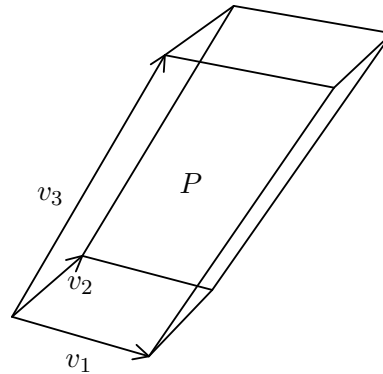
$$\begin{aligned} \exists i : s_i &= \sum_{k=1, k \neq i}^n \lambda_k s_k \\ s_1, \dots, s_n &\text{ Spalten von } A \\ \Rightarrow \det(A) &\stackrel{D7}{=} \det(s_1, \dots, s_i - \underbrace{\sum_{k=1, k \neq i}^n \lambda_k s_k}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, s_n) \\ &= \det(s_1, \dots, \underbrace{0}_{i\text{-te Spalte}}, \dots, s_n) \stackrel{D5}{=} 0 \quad \square \end{aligned}$$

### 8.9 Bemerkung

a) Seien  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ , z.B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das von  $v_1, v_2, v_3$  gebildete Parallelepiped  $P$ :



Man kann ausrechnen, dass  $|\det(v_1, v_2, v_3)|$  das Volumen von  $P$  ist. Es ist  $\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = 2$ . Dies gilt in analoger Weise in  $\mathbb{R}^2$  für ein Parallelogramm, das von  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  gebildet wird und für höhere Dimensionen  $n \geq 4$ .

- b) Es gibt eine alternative Berechnung von  $A^{-1}$ , z.B. wenn  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathcal{K}) \Rightarrow A^{-1} = (\det(A))^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ , denn  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & \underbrace{ad - bc}_{\det(A)} \end{pmatrix}$

Allgemeine Formel für  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  komplizierter (auf unserem Level nicht verständlich).

## 9 Eigenwerte und Eigenvektoren

### Anwendungen

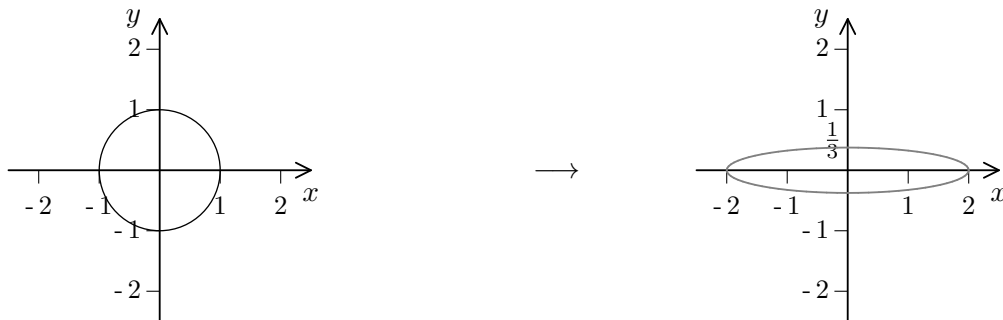
Markov-Ketten (Kaufverhalten), Eigenfaces, Page-Rank-Algorithm, etc.

### 9.1 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Da  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , streckt  $A$  in Richtung  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  um den Faktor 2 und staucht in Richtung  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  um den Faktor  $\frac{1}{3}$ .

Man nennt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  Eigenvektor (EV) von  $A$  zum Eigenwert (EW) 2 und  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\frac{1}{3}$ .



### 9.2 Definition (Eigenvektor, Eigenwert, Eigenraum)

Sei  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ ,  $v \in \mathcal{K}^n$ ,  $v \neq \mathcal{O}$ , heißt Eigenvektor (EV) zum Eigenwert (EW)  $\lambda \in \mathcal{K}$ , falls  $Av = \lambda v$ .

Die Menge  $Eig(\lambda) := \{v \in \mathcal{K}^n | Av = \lambda v\}$  heißt Eigenraum von  $\lambda$ .

[z.B. ist  $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$  auch EV zum EW 2 von  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ]

### 9.3 Beispiel

Konstruiere Matrix  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , die in Richtung  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  um  $\lambda_1 = 2$  streckt und in Richtung  $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  um  $\lambda_2 = \frac{2}{3}$  staucht.

Man erhält:

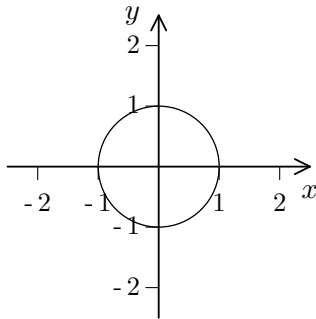
$$\text{a) } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} I & a_{11} + a_{12} = 2 \\ II & a_{21} + a_{22} = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} III & 3a_{11} - a_{12} = 2 \\ IV & 3a_{21} - a_{22} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

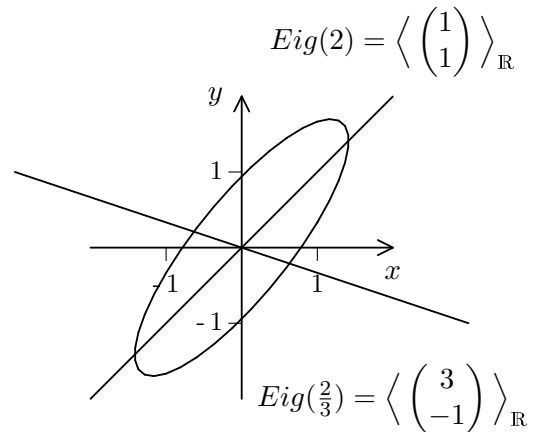
$$III = III + I: \quad 4a_{11} = 4, \quad a_{11} = 1 \xrightarrow{I} a_{12} = 1$$

$$IV = IV + II: \quad 4a_{21} = \frac{4}{3}, \quad a_{21} = \frac{1}{3} \xrightarrow{II} a_{22} = \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$



→



## Eigenwertproblem

Geg.:  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ . Ges.: Eigenvektor und Eigenwert

Grundidee zur Berechnung von EV + EW:

Ang.  $v \neq \mathcal{O}$  ist EV von  $A$  zum EW  $\lambda \in \mathcal{K}$ .

$$\begin{aligned} Av = \lambda v &\Leftrightarrow Av = (\lambda \cdot E_n)v \\ &\Leftrightarrow Av - \lambda E_n v = \mathcal{O} \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(A - \lambda E_n)}_{\in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})} v = \mathcal{O} \end{aligned}$$

D.h.  $v \in \ker(A - \lambda E_n)$ ! Da  $v \neq \mathcal{O}$ , ist  $\ker(A - \lambda E_n) \neq \{\mathcal{O}\}$  und somit  $A - \lambda E_n$  weder injektiv (6.9) noch umkehrbar (6.15). Ergebnis:

### 9.4 Satz ( $A - \lambda E_n$ )

Sei  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ .

- 1)  $\lambda$  EW von  $A \Leftrightarrow \det(A - \lambda E_n) = 0$
- 2)  $\text{Eig}(\lambda) = \ker(A - \lambda E_n)$
- 3) EV  $v \neq \mathcal{O}$  ist Lösung  $(A - \lambda E_n)v = \mathcal{O}$ .

**Beweis**Siehe oben. □**9.5 Beispiel**Gegeben:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Gesucht: EW + EV

Benutze 9.4.1): Es ist  $\det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2$   
 $= \lambda^2 - 5\lambda + 6$   
 $\stackrel{9.4.1)}{=} 0$

 $\Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2 \stackrel{9.4.1)}{\Rightarrow} A \text{ hat EW } \lambda_1 \text{ und } \lambda_2.$ Die EV  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$  erfüllen somit

$$\begin{aligned} \text{a) } (A - \lambda_1 E_2)v_1 &= \mathcal{O} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow I: -2x + y = 0, \quad II: -2x + y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 2x \\ &\stackrel{x=1}{\Rightarrow} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ EV zum EW } \lambda_1 = 3. \\ \text{Eig}(3) &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

$$\text{b) Analog für } \lambda_2 = 2. \text{ Zu Lösen } \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}_{v_2} = \mathcal{O} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Eig}(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

**9.6 Definition (charakteristisches Polynom)**

31.01.17

Für  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  heißt  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$  das charakteristische Polynom von  $A$ .**9.7 Bemerkung** $P_A(\lambda)$  ist Polynom vom Grad  $n$ , falls  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  (folgt aus Definition der Determinante 8.2). Die Nullstellen von  $P_A(\lambda)$  sind die Eigenwerte von  $A$ . $\Rightarrow$  für  $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ :  $A$  hat  $\leq n$  Eigenwerte. $K = \mathbb{C}$ : genau  $n$  Eigenwerte (nicht notwendigerweise verschieden), 5.11 b).

## Diagonalisierbarkeit von Matrizen

### 9.8 Definition (Diagonalmatrix)

$D \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  heißt Diagonalmatrix, wenn  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$

### 9.9 Bemerkung

a) Mit Diagonalmatrizen kann man leichter rechnen, denn:

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \mu_n \end{pmatrix} \\ & \bullet \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

b) Deswegen folgende Grundidee:

Sei  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$ .

Bringe  $A$  auf Diagonalgestalt: Fasse dazu  $A$  als Darstellungsmatrix von  $\varphi(v) = Av$  bzgl. Standardbasis  $E$  auf, d.h.  $A = A_\varphi^E$ . Suche Basis  $B$ , so dass  $A_\varphi^B$  Diagonalmatrix ist. Wenn es eine solche Basis  $B$  gibt, dann gilt:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}^n & \xrightarrow{A=A_\varphi^E} & \mathcal{K}^n \\ \downarrow S^{-1}=S_{E,B} & & \uparrow S_{B,E}=S \\ \mathcal{K}^n & \xrightarrow{A_\varphi^B=D} & \mathcal{K}^n \end{array} \quad A = SDS^{-1}$$

### 9.10 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Aus 9.5 EV:  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . EW:  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 2$ .

Wähle als Basis  $B = (v_1, v_2)$ .

$$\Rightarrow S_{B,E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = S \Rightarrow S_{E,B} = S^{-1} \stackrel{8.9b)}{=} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{aligned} \text{Somit ist z.B. } A^5 &= \underbrace{SDS^{-1}}_A \cdot \underbrace{SDS^{-1}}_A \cdot \dots \cdot \underbrace{SDS^{-1}}_A \\ &= SD^5S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 243 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -179 & 211 \\ -422 & 454 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Fragen

- 1) Ist jede Matrix  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  diagonalisierbar?
- 2) Wie diagonalisiert man  $A$ ?

### 9.11 Definition (Diagonalisierbarkeit)

- i)  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  heißt diagonalisierbar, wenn es eine invertierbare Matrix  $S \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  gibt, so dass  $A = SDS^{-1}$ ,  $D$  Diagonalmatrix.
- ii) Eine lineare Abbildung  $\varphi : V \rightarrow V$ ,  $\dim(V) < \infty$ , heißt diagonalisierbar, falls es eine Basis  $B$  gibt, so dass  $A_\varphi^B$  Diagonalmatrix.

### 9.12 Satz (Spektralsatz)

- i)  $A \in \mathcal{M}_n(\mathcal{K})$  diagonalisierbar  $\Leftrightarrow \exists n$  linear unabhängig EV  $\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\text{Basis von } \mathcal{K}^n}$ . In diesem Fall ist  $A = SDS^{-1}$ , wobei  $S = (v_1, \dots, v_n)$  und  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$  mit  $v_i$  EV zum EW  $\lambda_i$  von  $A$ .
- ii)  $A$  hat  $n$  verschiedene EW  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \Rightarrow A$  diagonalisierbar.

## Beweis

$$\begin{aligned} \text{i) } A \text{ diagonalisierbar} &\stackrel{9.11i)}{\Leftrightarrow} \exists S \text{ mit } S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow AS = S \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}. \\ \text{Sei } S &= (s_1, \dots, s_n). \text{ F\"ur Spalte } i : As_i = \mu_i s_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$



$\Leftrightarrow s_i$  EV zum EW  $\mu_i$ , damit muss  $s_i = v_i$ ,  $\mu_i = \lambda_i$ .

Insgesamt:  $\underbrace{S \text{ invertierbar}}_{A \text{ diagonalisierbar}} \Leftrightarrow \underbrace{\text{rg}(S) = n}_{\text{d.h. Spalten l.u.}}$

ii)  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sind paarweise verschiedene EW. Zeige per Induktion, dass EV linear unabhängig:

$n = 1 \rightarrow \checkmark$

Induktion:  $n - 1 \rightarrow n$

IV:  $\underbrace{v_1, \dots, v_{n-1}}_{\text{EV}}$  linear unabhängig

IA:  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig

Angenommen nicht, dann ist  $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i v_i \quad (*) \Rightarrow$

$$\text{a) } \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda_n v_i$$

$$\text{b) } \lambda_n v_n = A v_n \stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n-1} a_i A v_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \lambda_i v_i$$

IV:  $v_1, \dots, v_{n-1}$  linear unabhängig  $\Rightarrow$  mind. ein  $a_i \neq 0$

$$\stackrel{\text{a)=b)}}{\Rightarrow} \lambda_i = \lambda_n \quad \text{!}$$

□

### 9.13 Beispiel

a)  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ist nicht diagonalisierbar, da  $P_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$  keine Nullstellen in  $\mathbb{R}$  hat.

b) Nicht jede Matrix hat  $n$  verschiedene EW, z.B.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  hat EW

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1 \text{ mit EV } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{wobei } Eig(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}, \quad Eig(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

## 10 Norm und Skalarprodukt

### 10.1 Beispiel

Im  $\mathbb{R}^2$  hat man folgende Möglichkeiten:

- Längenmessung: Norm eines Vektors  $v \in \mathbb{R}^2$ ,  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\|v\| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Abstandsmessung zwischen 2 Elementen  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $v' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$d(v, v') := \|v - v'\|$$

- Winkelberechnung mit Skalarprodukt: Sei  $\alpha$  der Winkel, der von  $v$  und  $v'$  eingeschlossen wird und

$$(v|v') = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) := xx' + yy'$$

das Skalarprodukt von  $v$  und  $v'$ . Dann ist

$$\cos(\alpha) = \frac{(v|v')}{\|v\| \cdot \|v'\|}$$

Wenn  $\|v\| = \|v'\| = 1$ , so ist  $\cos(\alpha) = (v|v')$ .

Es ist für  $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ :  $\|v\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ,

$$\|v'\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad d(v, v') = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = 1,$$

$$(v|v') = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 1, \quad \cos(\alpha) = \frac{(v|v')}{\|v\| \cdot \|v'\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} (45^\circ)$$

Wie kann man Norm (Länge, Abstand) und Skalarprodukt (Winkel) für beliebige  $\mathbb{R}$ -Vektorräume verallgemeinern?

### 10.2 Definition (Skalarprodukt, Norm, Abstand, Vektorraum)

01.02.17

Sei  $V$   $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

- a) Eine Abbildung  $(\cdot|\cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, w) \mapsto (v|w)$  heißt Skalarprodukt, falls:

- i) (Positive Definitheit)
    - $(v|v) \geq 0 \quad \forall v \in V$
    - $(v|v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  - ii) (Symmetrie)
    - $(v|w) = (w|v) \quad \forall v, w \in V$
  - iii) (Bilinearität)
    - $\ast (\lambda v|w) = (v|\lambda w) = \lambda(v|w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v, w \in V$
    - $\ast (u + v|w) = (u|w) + (v|w) \quad \forall u, v, w \in V$
- b) Ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt heißt Euklidischer Vektorraum.
- c)  $\|v\| := \sqrt{(v|v)}$  heißt (Euklidische) Norm und  $d(v, w) = \|v - w\|$  (Euklidischer) Abstand.

### 10.3 Beispiel

- a) Das Skalarprodukt in 10.1 erfüllt a)i)-iii) von Def 10.2

$$\text{i) } (v|v) = \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = x^2 + y^2 \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R} \text{ und}$$

$$(v|v) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad \checkmark$$

ii),iii) nachrechnen  $\checkmark$

b) Allgemein heißt im  $\mathbb{R}^n$   $(v|w) := \sum_{i=1}^n v_i w_i$ ,  $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ ,  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$  das

Standardskalarprodukt  $\|v\| = \sqrt{(v|v)} = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ .

- c) Für  $V = \mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$  kann man leicht nachrechnen, dass

$$(f|g) := \int_a^b f(t) \cdot g(t) dt$$

ein Skalarprodukt ist. Die Norm ist dann

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

und erfüllt folgende Eigenschaften:

### 10.4 Satz (Eigenschaften Norm)

$V$   $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

i) (Positive Definitheit)

$$\|v\| \geq 0 \quad \forall v \in V$$

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \mathcal{O}$$

ii)  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$

iii) ( $\triangle$ -Ungleichung)

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \forall v, w \in V$$

### Bemerkung

i) und ii) sind klar.

iii) beweist man mit 10.5, Cauchy-Schwarz-Ungleichung (C-S).

## 10.5 Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)

$$|(v|w)| \leq \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall v, w \in V, \quad V \text{ } \mathbb{R}\text{-Vektorraum}$$

Gleichheit  $\Leftrightarrow v, w$  linear abhängig

### Beweis

Hier ohne Beweis, siehe Literatur oder Wikipedia: Cauchy-Schwartzsche Ungleichung.  $\square$

### Beweis von $\triangle$ -Ungleichung aus 10.4

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= (v + w|v + w) \\ &= \underbrace{(v|v)}_{\|v\|^2} + \underbrace{2(v|w)}_{\leq 2\|v\| \cdot \|w\|} + \underbrace{(w|w)}_{\|w\|^2} \\ &\stackrel{C-S}{\leq} (\|v\| + \|w\|)^2 \end{aligned}$$

$\square$

## 10.6 Bemerkung

Es ist  $(v|w) = \underbrace{v^T \cdot w}_{\text{Matrixprodukt}}$  für  $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\text{z.B. } \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (1, 0, 3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 3 = 2$$

**10.7 Beispiel**

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$(v|w) = -2 + 4 + 4 = 6$$

$$\|v\| = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\|w\| = \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24}$$

$$d(v, w) = \|v - w\| = \sqrt{9 + 0 + 9} = \sqrt{18}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{(v|w)}{\|v\| \cdot \|w\|} = \frac{6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$$

## 11 Orthonormalsysteme

### 11.1 Definition (Grundbegriffe)

$V$  euklidischer Vektorraum

- i)  $v, w$  heißen orthogonal (senkrecht),  $v \perp w$ , falls  $(v|w) = 0$ , ( $\mathcal{O}$  ist  $\perp$  zu allen  $v \in V$ ).
- ii)  $M \subseteq V$  heißt Orthogonalsystem (OGS), falls  $(v|w) = 0 \quad \forall v, w \in M$  und  $v \neq w$ .  
Wenn zusätzlich  $\|v\| = 1 \quad \forall v \in M$ , so heißt  $M$  Orthonormalsystem (ONS).
- iii) Ist  $\dim(V) < \infty$ , so heißt  $M$  Orthonormalbasis von  $V$ , falls  $M$  ONS und  $M$  ist Basis von  $V$ .

### 11.2 Bemerkung

Jedes ONS ist linear unabhängig:  $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$  ONS.

$\mathcal{O} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ , zu zeigen:  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

$$\Leftrightarrow 0 = (v_1 | \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 \underbrace{(v_1 | v_1)}_{=\|v\|=1} + \lambda_2 \underbrace{(v_1 | v_2)}_{\perp, \text{ also } 0} + \dots + \lambda_k \underbrace{(v_1 | v_k)}_{\perp, \text{ also } 0} = \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 0$$

Analog für  $\lambda_2, \dots, \lambda_k$

## Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Grundidee im  $\mathbb{R}^n$  mit 3 Vektoren  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$ :

Gegeben:  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$

Gesucht: OGS  $\{w_1, w_2, w_3\}$  mit  $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle_{\mathbb{R}}$

1.  $w_1 = v_1$
2.  $w_2 = \lambda \cdot w_1 + v_2$   
(verlängere/verkürze  $w_1$ , so dass  $w_2 \perp w_1$ )  $\mathcal{O} = (w_1 | w_2) = (w_1 | \lambda w_1 + v_2) = \lambda \|w_1\|^2 + (w_1 | v_2) \Leftrightarrow \lambda = -\frac{(w_1 | v_2)}{\|w_1\|^2}$
3.  $w_3 = \lambda'_1 w_1 + \lambda'_2 w_2 + v_3$   
 $\mathcal{O} = (w_3 | w_2) = (\lambda'_1 w_1 + \lambda'_2 w_2 + v_3 | w_2) = \lambda'_2 \|w_2\|^2 + (v_3 | w_2) \Rightarrow \lambda'_2 = -\frac{(v_3 | w_2)}{\|w_2\|^2}$   
 $\mathcal{O} = (w_3 | w_1) \Leftrightarrow \lambda'_1 = -\frac{(w_1 | v_3)}{\|w_1\|^2}$

Allgemein:

### 11.3 Satz (Gram-Schmidt)

Gegeben:  $v_1, \dots, v_k \in V$ ,  $V$  euklidischer Vektorraum.

Gesucht: ONS von  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Definiere dazu  $w_1 := v_1$ ,  $w_{r+1} = v_{r+1} + \sum_{i=1}^r \lambda_i^{(r+1)} w_i$  mit  $\lambda_i^{(r+1)} = -\frac{(w_i | v_{r+1})}{\|w_i\|^2}$  (falls  $w_i \neq \mathcal{O}$ ) und  $y_r := \frac{w_r}{\|w_r\|}$  (falls  $w_r \neq \mathcal{O}$ ).

Dann gilt

- 1) Bricht die Iteration  $\overbrace{\text{nach } i \text{ Schritten}}^{\text{d.h. } w_i \neq 0 \text{ f\"ur } i=1, \dots, k}$  ab mit  $i \leq k$  nicht ab, so ist  $\{w_1, \dots, w_k\}$  OGS und  $\{y_1, \dots, y_k\}$  ONS von  $\langle v_1, \dots, v_k \rangle_{\mathbb{R}}$
- 2) Bricht die Iteration nach  $r$  Schritten ab (d.h.  $w_r = 0$ ), so gilt:  $v_1, \dots, v_{r-1}$  linear unabhängig und  $v_1, \dots, v_r$  linear abhängig

#### Beweis

Wie oben, vollständige Induktion. □

### 11.4 Beispiel

07.02.17

$$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Suche ONB der Ebene  $\langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ .

Gram-Schmidt:

$$1. \quad w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2. \quad w_2 = v_2 + \lambda_1 w_1 \text{ mit } \lambda_1 = -\frac{(v_2, w_1)}{\|w_1\|^2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\Rightarrow w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{OGB} : \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{ONB} : \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

### 11.5 Definition (Orthogonale Matrix)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  heißt orthogonal, falls ihre Spalten eine Orthogonalbasis des  $\mathbb{R}^n$  bilden.

$\mathcal{O}(n) := \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ orthogonal}\}$  heißt orthogonale Gruppe ( $\mathcal{O}(n)$  ist tatsächlich Gruppe).

### 11.6 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

- $\left( \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right) = 0$
- $\left\| \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1$

$E_n$  ist auch orthogonal (Ist die Eins  $\uparrow$  in der Gruppe  $\mathcal{O}(n)$ , 3.9).

### 11.7 Satz (Orthogonale Matrix)

Für  $A \in \mathcal{O}(n)$  gilt:

- i)  $A^T \cdot A = E_n$ , d.h.  $A^{-1} = A^T$
- ii)  $\|Av\| = \|v\|$       Längentreue
- iii)  $\underbrace{|\det(A)|}_{\in \mathbb{R}} = 1$

#### Beweis

$$A = (s_1, \dots, s_n)$$

- i)  $\{s_1, \dots, s_n\}$  ONB  $\Rightarrow (s_i, s_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow A^T \cdot A = E_n$
- ii)  $\|Av\|^2 = (\underbrace{Av}_{\in \mathbb{R}^n}, \underbrace{Av}_{\in \mathbb{R}^n}) = (Av)^T \cdot (Av) = v^T \cdot \underbrace{A^T \cdot A}_{=E_n} \cdot v = (v|v) = \|v\|^2$
- iii)  $1 = \det(E_n) = \det(A^T \cdot A) \stackrel{8.6, D9}{=} \det(A^T) \cdot \det(A) = (\det(A))^2 \Rightarrow \det(A) = \pm 1$

□



### 11.8 Bemerkung

Man kann zeigen, dass jede symmetrische Matrix  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$   $n$  (nicht notwendigerweise verschiedene) reelle Eigenwerte hat und orthogonal diagonalisierbar ist, d.h.  $\exists S \in \mathcal{O}(n) : \underbrace{S^{-1} \cdot A \cdot S}_{S^T A S} = D$  ( $D$  Diagonalmatrix, die die EW von  $A$  enthält).

Die Spalten von  $S$  sind die EV von  $A$ .

## 12 Taylorreihen

### Ziel

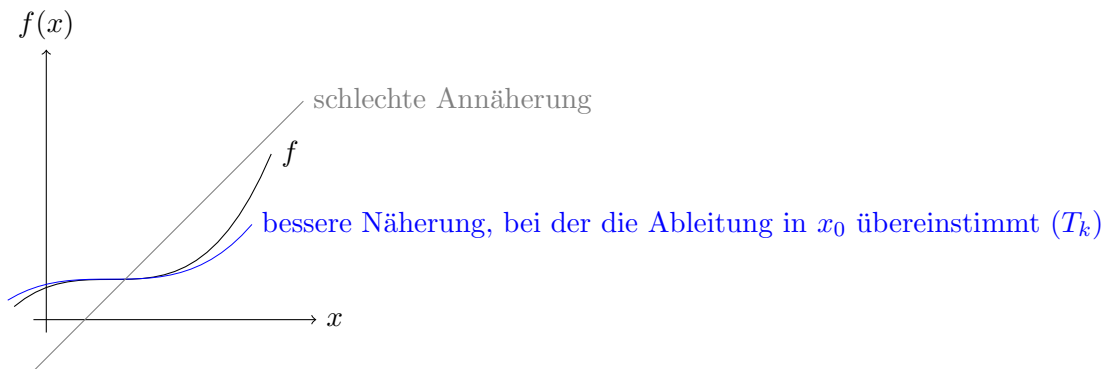
Beweis von  $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ ,  $(\varphi \in \mathbb{R})$ .

Dazu zeigt man

1.  $e^x = \exp(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$   $(x \in \mathbb{R})$
2. Man erweitert für  $z \in \mathbb{C}$   $\exp(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$
3. Zum Schluss zeigt man  $\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ , indem man  $\cos(\varphi)$  und  $\sin(\varphi)$  als Reihen darstellt.

Hier wird nur ein Teil von 1) bewiesen. Dabei wird  $(e^x)' = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  als bekannt vorausgesetzt. 3) wird ebenfalls gezeigt.

Dazu Taylorpolynome:



Man möchte  $k$ -mal diffbare Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  durch ein Polynom  $T_k(x)$  möglichst gut annähern. Dazu wählt man  $T_k$  so, dass  $T_k^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$  für ein  $x_0 \in I$ ,  $j = 0, \dots, k$ .

### 12.1 Definition (Taylorpolynom, Restglied)

Sei  $I = (a, b)$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $k$ -mal differenzierbar, dann heißt

$$T_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T_k(x) := \sum_{j=0}^k \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

$k$ -tes Taylorpolynom von  $f$  in  $x_0$ .

Die Fehlerdifferenz

$$R_k : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad R_k(x) := f(x) - T_k(x)$$

nennt man  $k$ -tes Restglied von  $f$  in  $x_0$ .

## 12.2 Bemerkung

$T_k$  ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad  $\leq k$ , das  $T_k^{(j)}(x_0) = f^{(j)}(x_0)$  erfüllt  $\forall j = 0, \dots, k$ :

$$\begin{aligned} T_k(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_j(x - x_0)^j + \dots + a_k(x - x_0)^k \\ a_j &= \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} \\ \Rightarrow T_k^{(j)}(x) &= j!a_j + c_j(x - x_0) + \dots + c_k(x - x_0)^{k-j} \\ \Rightarrow T_k^{(j)}(x_0) &= j! \cdot a_j = f^{(j)}(x_0) \end{aligned}$$

## 12.3 Satz von Taylor

Sei  $x_0 \in I = (a, b)$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   $(k+1)$ -mal diffbar,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in I$  eine Stelle  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ , so dass

$$R_k(x) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1}$$

(Lagrange-Form des Restgliedes).

### Beweis

Sei  $g(x) = (x - x_0)^{k+1}$ . Es gilt  $g^{(j)}(x_0) = 0$  und  $R_k^{(j)}(x_0) = 0 \quad \forall j = 0, \dots, k$ . Verwendet wird der 2. Mittelwertsatz (Mathe II).

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{R_k(x)}{g(x)} &= \frac{\overbrace{R_k(x) - R_k(x_0)}^{=0}}{\overbrace{g(x) - g(x_0)}^{=0}} \stackrel{2.MWS}{=} \frac{R'_k(\xi_1)}{g'(\xi_1)} && \xi_1 \text{ zwischen } x \text{ und } x_0 \\ &= \frac{R'_k(\xi_1) - R'_k(x_0)}{g'(\xi_1) - g'(x_0)} \stackrel{2.MWS}{=} \frac{R''_k(\xi_2)}{g''(\xi_2)} && \xi_2 \text{ zwischen } \xi_1 \text{ und } x_0. \\ &\vdots \\ &\stackrel{2.MWS}{=} \frac{R_k^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{g^{k+1}(\xi_{k+1})} = \frac{f^{(k+1)}(\xi_{k+1})}{(k+1)!} && \xi_{k+1} \text{ zwischen } \xi_k \text{ und } x_0 \end{aligned}$$

Setze  $\xi = \xi_{k+1}$ , Behauptung folgt.  $\square$

## 12.4 Beispiel

08.02.17

Berechne  $\sin(1)$  mit einer Fehlerdifferenz kleiner als  $10^{-3}$ .

Aus 12.3  $f(x) = T_k(x) + \overbrace{R_k(x)}^{\text{Fehler}}$

$$\Rightarrow |R_k(x)| = \frac{|f^{(k+1)}(\xi)|}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1} < 10^{-3} \text{ mit } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } x_0.$$

Suche  $k \in \mathbb{N}$ , für das Ungleichung erfüllt ist:

$$f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x),$$

$$f'''(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x), \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x) \quad n \geq 0$$

Wähle als Entwicklungspunkt  $x_0 = 0$ .

$$\text{Damit ist } |R_k(x)| = |R_k(1)| = \frac{|f^{(k+1)}(\xi)|}{(k+1)!} |1-0|^{k+1} \leq \frac{1}{(k+1)!} \stackrel{!}{<} \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow (k+1)! > 1000 \Leftrightarrow k \geq 6$$

Wähle  $k = 6$ :

Dann ist  $f(1) = \sin(1)$

$$\begin{aligned} \approx T_6(1) &= \frac{\sin(0)}{0!}(1-0)^0 + \frac{\cos(0)}{1!}(1-0)^1 + \frac{-\sin(0)}{2!}(1-0)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{-\sin(0)}{6!}(1-0)^6 \\ &= 0 + 1 + 0 + -\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{120} - 0 = \frac{101}{120} \\ &= 0,841\bar{6} \end{aligned}$$

Für Funktionen, die unendlich oft differenzierbar sind (z.B.  $e^x, \sin x$ ), kann man sogar eine Taylorreihe aufstellen:

## 12.5 Definition (Taylorreihe)

Sei  $x_0 \in I = (a, b)$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  unendlich oft diffbar. Dann heißt

$$T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x - x_0)^j$$

Taylorreihe von  $f$  in  $x_0$ .

## 12.6 Bemerkung

- 1)  $T(x)$  muss nicht konvergent sein.
- 2) Wenn  $T(x)$  konvergiert für ein  $x \neq x_0$ , so muss  $T(x)$  nicht notwendig gegen  $f(x)$  konvergieren.

## 12.7 Beispiel

Man kann zeigen, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$  beliebig oft diffbar

ist.

Da  $f^{(j)}(0) = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$ , ist  $T(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ , aber  $f(x) \neq 0$  für  $x > 0$ .

## 12.8 Satz (Konvergenz Taylorreihe)

Seien  $x_0, x \in I$  und sei  $f$  unendlich oft diffbar.

$T(x)$  konvergiert genau dann gegen  $f(x)$ , wenn  $R_k(x) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

### Beweis

Da  $T_k(x)$  die  $k$ -te Partialsumme von  $T(x)$  ist und  $|f(x) - T_k(x)| = |R_k(x)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ , ist  $f(x)$  der Grenzwert von  $T_k(x)$  für  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 12.9 Beispiel

- a)  $f(x) = \sin(x)$ ,  $x_0 = 0$  (nur ungerade Ableitungen relevant, sonst  $= 0$ ) :

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

Da  $|R_k(x)| = \frac{|f^{(k+1)}(\xi)|}{(k+1)!} |x - x_0|^{k+1} \leq \frac{1}{(k+1)!} |x|^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  (weil Fakultät schneller wächst als jedes Polynom, Mathe II)

ist  $T(x) = \sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- b) Ebenso ist für  $f(x) = \cos(x)$ ,  $x_0 = 0$ :

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} (x - 0)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}$$

Beweis Konvergenz analog zu a)

- c)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ :

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^0}{j!} x^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  ist  $|R_k(x)| = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} |x|^{k+1} \leq \frac{e^{|x|}}{(k+1)!} |x|^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$  (Begründung wie bei a))

$\stackrel{12.8}{\Rightarrow} T(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Somit ist  $\exp(x) = e^x$  gezeigt.

- d) Für  $z \in \mathbb{C}$  definiert man nun  $e^z := \exp(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$ .

Der Konvergenzradius  $\rho$  von  $\exp(z)$  ist nach Euler (Mathe II)

$$\rho = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \frac{a_j}{a_{j+1}} \right| \text{ mit } a_j = \frac{1}{j!}$$

Da  $\left| \frac{a_j}{a_{j+1}} \right| = \frac{(j+1)!}{j!} = j+1 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$ , ist  $\rho = \infty$  und  $\exp(z)$  ist absolut konvergent  $\forall z \in \mathbb{C}$  (5.11 d).

Deswegen kann man  $\exp(z)$  umordnen und für  $z = ix$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , ergibt sich Formel von Euler (5.5) :

$$e^{ix} = \exp(ix) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(ix)^j}{j!} = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j}}{(2j)!}}_{\cos(x)} + i \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j x^{2j+1}}{(2j+1)!}}_{\sin(x)},$$

$$\text{da } i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = i$$

$$\text{e) Wegen c): } e^1 = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$