

Mathematik III

Marius Hobbhahn, Florian Friedrich

16. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

1	Vektorräume	5
1.1	Definition (Reelle Vektorräume)	5
1.2	Beispiel	5
1.3	Lemma	6
1.4	Definition (Untervektorraum)	7
1.5	Beispiel	7
1.6	Satz (Unterraumkriterium)	8
1.7	Beispiel	8
1.8	Satz	11
1.9	Bemerkung	11
1.10	Beispiel	12
1.11	Beispiel	12
1.12	Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)	14
1.13	Bemerkung	15
1.14	Definition (Lineare Unabhängigkeit)	16
1.15	Beispiel	16
1.16	Satz	17
1.17	Satz	18
1.18	Definition (Basis)	19
1.19	Beispiel	19
1.20	Satz (Existenz von Basen)	19
1.21	Satz (Austauschlemma)	20
1.22	Satz (Steinitz'scher Austauschsatz)	21
1.23	Korollar	21
1.24	Satz	22
1.25	Definition (Dimension)	22
1.26	Korollar	23
1.27	Beispiel	23
1.28	Satz (Dimensionssatz)	24
1.29	Bemerkung (Koordinaten)	26
2	Matrizen und lineare Gleichungssysteme	27
2.1	Beispiel	27
2.2	Definition (Matrix)	27
2.3	Bemerkung	28
2.4	Beispiel:	29

2.5	Bemerkung	30
2.6	Satz	30
2.7	Beispiel (Folien 02.11.2016)	31
2.8	Definition (Matrixprodukt)	31
2.9	Beispiel	31
2.10	Satz + Definition	32
2.11	Beispiel	32
2.12	Definition (Matrizentransponierung)	32
2.13	Beispiel	33
3	Gruppen	34
3.1	Beispiel (Wiederholung zu Permutationen)	34
3.2	Definition (Permutation)	34
3.3	Beispiel	34
3.4	Bemerkung	34
3.5	Beispiel	35
3.6	Bemerkung	35
3.7	Beispiel	36
3.8	Definition (Grundbegriffe)	36
3.9	Definition (Gruppe)	37
3.10	Beispiel	37
3.11	Satz	38
3.12	Beispiel	39
3.13	Satz (Eigenschaften von Gruppen)	41
3.14	Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)	41
3.15	Definition (Untergruppe)	42
3.16	Beispiel	42
3.17	Beispiel	42
3.18	Satz + Definition (Rechtsnebenklasse, Repräsentant)	43
3.19	Beispiel	44
3.20	Kriterium	44
3.21	Definition (Wohldefiniertheit)	44
3.22	Beispiel	44
3.23	Satz (Faktorengruppe/Quotientengruppe)	44
3.24	Lemma	45
3.25	Theorem (Lagrange)	45
3.26	Definition	45
3.27	Satz	46

3.28	Satz + Definition (Ordnung, zyklische Gruppe)	46
3.29	Bemerkung	47
3.30	Korollar	47
4	Ringe und Körper	49
4.1	Definition (Ring)	49
4.2	Beispiel	49
4.3	Satz (Rechenregeln für Ringe)	50
4.4	Bemerkung	50
4.5	Definition (Körper)	51
4.6	Beispiel	51
4.7	Satz (Rechenregeln für Körper: Nullteilerfreiheit)	51
4.8	Definition (Ringhomomorphismus, Ringisomorphismus)	51
4.9	Beispiel	52
4.10	Bemerkung	52
4.11	Chinesischer Restsatz	52
4.12	Beispiel	53
4.13	Satz (Eindeutigkeit Chines. Restsatz)	54
4.14	Beispiel	55
4.15	Korollar	55
4.16	Definition (Polynom)	56
4.17	Beispiel	56
4.18	Satz + Definition	56
4.19	Bemerkung	57
4.20	Beispiel	57
4.21	Definition	57
4.22	Satz	58
4.23	Korollar (Inversen in $\mathcal{K}[x]$)	58
4.24	Bemerkung	58
4.25	Definition	58
4.26	Satz (Division mit Rest in $\mathcal{K}[x]$)	58
4.27	Beispiel	59
4.28	Korollar	59
4.29	Definition (Normiertheit)	60
4.30	Bemerkung	60
4.31	Lemma von Bézout	61
4.32	Satz: Euklidischer Algorithmus EA in $\mathcal{K}[x]$	61
4.33	Satz: Erweiterter Euklidischer Algorithmus EEA in $\mathcal{K}[x]$	62

4.34	Beispiel	63
4.35	Definition (Primelemente = irreduzible Polynome)	64
4.36	Beispiel	64
4.37	Satz	65
4.38	Korollar	65
4.39	Satz	66
4.40	Bemerkung	66
5	Komplexe Zahlen	67
5.1	Definition	67
5.2	Gaußsche Zahlenebene (1831)	67
5.3	Definition	68
5.4	Bemerkung	68
5.5	Formel von Euler	68
5.6	Bemerkung	68
5.7	Bemerkung	68
5.8	Definition	69
5.9	Bemerkung	69
5.10	Satz	70
5.11	Rechenregeln (Konjunktion, Betrag)	70
5.12	Bemerkung	71

1 Vektorräume

Bemerkung: 1.1-1.10 identisch mit 8.1-8.10 aus Mathematik 2, SS16

1.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben, v, w, x, y, \dots), auf der eine Addition $+$ definiert ist, $+: V \times V \rightarrow V$; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \dots$), $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$, so dass gilt:

$$(1.1) \quad u + v + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$$

$$(1.2) \quad \text{Es existiert ein Vektor } \mathcal{O} \in V \text{ ('Nullvektor')} \text{ mit } v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \quad \forall v \in V$$

$$(1.3) \quad \text{Zu jedem } v \in V \text{ existiert ein Vektor } -v \in V \text{ mit } v + (-v) = \mathcal{O}$$

$$(1.4) \quad u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als ' $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe').

$$(2.1) \quad \overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$(2.2) \quad \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$$

$$(2.3) \quad \overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$$

$$(2.4) \quad 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

1.2 Beispiel

- a) trivialer Vektorraum Nullraum: $V = \{\mathcal{O}\}$
Es gilt $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}$, $\lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- b) $V = \mathbb{R}^n$, Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge n über \mathbb{R} , Elemente haben

die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \dots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \dots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

c) \mathbb{R} ist ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Vektoren: reelle Zahlen.

Skalare: reelle Zahlen.

$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:

$M \neq \emptyset$ Menge. $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) := \{f: M \rightarrow \mathbb{R}\}$

Menge der auf M definierten reellen Funktionen.

Für $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$- f + g: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$$

$$- \lambda \cdot f: M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$$

Dann ist V mit $\mathbb{R}, +, \cdot$ ein Vektorraum. Nullvektor ist $f = 0: M \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 0 \quad \forall x \in M$.

(kurz: $f \equiv 0$, identisch Null)

1.3 Lemma

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

a) $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b) $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem $v \in V$ ist der Vektor $-v$ aus (1.3) in 1.1 eindeutig bestimmt.

d) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis

a)

$$\mathcal{O} \stackrel{(1.3)}{=} \underbrace{0 \cdot v}_x + \overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x} = \underbrace{(0 + 0)v}_{\mathcal{O}} + (-0 \cdot v)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v)$$

$$\stackrel{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 * v + (-0 \cdot v))$$

$$\stackrel{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O}$$

$$\stackrel{(1.2)}{=} 0 \cdot v$$

b) Wie a), starte mit $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$, erhalte $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\underline{v + (-1 \cdot v)} = 1 \cdot v + (-1 \cdot v)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} (1 + (-1))v$$

$$= 0 \cdot v$$

$$\stackrel{a)}{=} \mathcal{O}$$

$$\stackrel{(1.3)}{=} v + (-v)$$

Addiere auf beiden Seiten $-v$:

$$\underline{v + (-1)v} + (-v) = v + (-v) + (-v)$$

$$\Rightarrow -1 \cdot v = -v$$

c) Angenommen, zu $v \in V$ gibt es $-v$ und $-v'$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$ und $v + (-v') = \mathcal{O}$. Dann ist $v + (-v) = v + (-v') \stackrel{+(-v) \text{ auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

□

1.4 Definition (Untervektorraum)

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum.

Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ heißt Unter(vektor)raum von V , falls U bezüglich der Addition auf V und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

1.5 Beispiel

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist Unterraum von V

b) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist kein Unterraum von V , z.B. (1.2) ist verletzt,

$$\text{Addition funktioniert auch nicht: } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Unterraum von V (prüfe alle Eigenschaften von Definition 1.1) \rightarrow umständlich, einfacher geht es mit Definition 1.6

1.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei V ein \mathbb{R} -Vektorraum, sei $\emptyset \neq U \subseteq V$.

Dann ist U Unterraum von V genau dann, wenn gilt (\Leftrightarrow):

$$(1) \quad v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$$

$$(2) \quad v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$$

(oder äquivalent: $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$)

Man sagt: U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

Beweis

\Rightarrow ist klar, da U laut Definition 1.4 selbst Vektorraum

\Leftarrow rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 1.1, also z.B. $\mathcal{O} \in U, \dots$)

□

1.7 Beispiel

a)

V ist ein \mathbb{R} -Vektorraum, $\mathcal{O} \neq v \in V$.

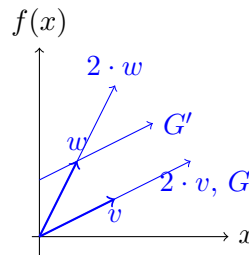
Dann ist $G = \{\lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum.

$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: G ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aber: $G' = \{w + \lambda \cdot v \mid \lambda \in \mathbb{R}, w \in V\}$ ist kein Unterraum für $w \neq \mu \cdot v, \mu \in \mathbb{R}$.

Warum? Z.B. $\mathcal{O} \notin G'$



b) $V = \mathbb{R}^3, \quad U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ ist Unterraum. Wir

zeigen (1), (2) aus 1.6:

$$- U_1 \neq \emptyset, \text{ z.B. } \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1, \text{ denn } \overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$$

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist $\lambda \cdot v \in U_1$? $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, $w_1 +$

$w_2 - w_3 = 0$. Gilt $v + w \in U_1$? $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also $v + w \in U_1$

– Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

D.h. U_1 ist die Ebene durch $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 1 \right\}$ ist kein Unterraum. Z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \notin U_2$: $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.

Anderes Argument: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$, d.h. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Gilt $\lambda \cdot x \in U_2$? $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda}_{\text{nur für } \lambda=1} = 1 \end{aligned}$$

\Rightarrow nicht erfüllt für $\lambda \neq 1$.

Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \right\}$ ist kein Unterraum, z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \quad 1^2 + 0^2 + 0^2 \leq 1 \quad \checkmark, \text{ aber}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3, \text{ denn } 2^2 + 0^2 + 0^2 \not\leq 1$$

Geometrische Interpretation:

U_3 ist eine Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 1

e) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Menge $C(I)$ (C : continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf I ist Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 1.2d)).

Menge der diffbaren Funktionen auf I ist Unterraum von $C(I)$.

1.8 Satz

V ist ein \mathbb{R} -Vektorraum, U_1, U_2 sind Unterräume von V .

- a) $U_1 \cap U_2 = \{u \in V \mid u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$ ist Unterraum von V .
- b) $U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$ Summe von U_1, U_2 ist Unterraum von V
(das ist nicht die Vereinigung $U_1 \cup U_2$!)

Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 1.6

- a) Übung: Prüfe $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$? ✓, (1), (2)
- b) – $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$
– Seien $v = u_1 + u_2$, $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ und
 $w = u'_1 + u'_2$, $u'_1 \in U_1$, $u'_2 \in U_2$,
also $v, w \in U_1 + U_2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \lambda v + \mu w &= \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u'_1 + u'_2) \\ &= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u'_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u'_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2 \end{aligned}$$

1.9 Bemerkung

- a) lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten
- b) lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten
- $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum

1.10 Beispiel

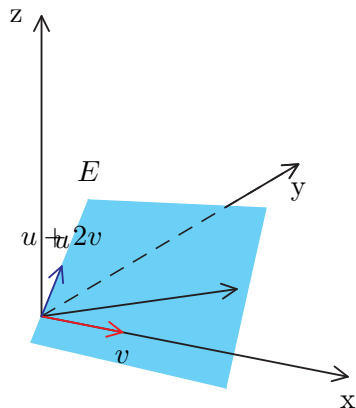
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $G_1 = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $G_2 = \{\mu w | \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 1.7a), Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Unterräume

- $G_1 + G_2$ ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$ ist $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.11 Beispiel

18.10.16



- $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $E = \left\{ \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

- $E \subseteq \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum (UVR) und wird aufgespannt/erzeugt von u und v . Man nennt $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Erzeugendensystem von E .
- D.h. $w \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : w = \underbrace{\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v}_{\text{Linearkombination von } u \text{ und } v}$

- $w \notin E$, z.B. $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Letzte Zeile: } 1 = \lambda_1 \\ \text{Zweite Zeile: } 0 = \lambda_1 \end{array} \right\} \neq$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

Fortsetzung Bsp. 1.11

(Nachtrag
vom
19.10.2016)

a) $E = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

b) \mathbb{R}^n wird erzeugt von $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei j die Stelle ist, an der der Vektor 1

ist.

$$R^n = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \text{ "kanonische Einheitsvektoren"}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + \dots + e_n \cdot v_n$$

c) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den \mathbb{R}^2 auf?

Wenn ja, dann muss für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha + \beta &= x \\ \alpha + 2\beta &= y \\ \Rightarrow \alpha &= x - \beta \\ &= y - 2\beta \\ \Leftrightarrow \beta &= y - x \\ \alpha &= 2x - y \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Allg. } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x - y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$$

d) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ den \mathbb{R}^2 auf?

Nein, denn $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \{ \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \subsetneq \mathbb{R}^2$

e) $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, d.h. Erzeugendensysteme sind nicht eindeutig!

f) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D.h. $M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}$ ist kein minimales Erzeugendensystem des \mathbb{R}^2 , denn $v \in M$ kann immer dargestellt werden als Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus v$.

Man sagt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig.

1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)

$V : \mathbb{R}$ -VR (V ist Vektorraum in den reellen Zahlen)

- (i) $v_1, \dots, v_m \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$
 Der Vektor $\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m$ heißt Linearkombination von v_1, \dots, v_m .

- (ii) Sei $M \subseteq V$. Dann ist

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot v_k \mid \lambda_k \in \mathbb{R}, v_k \in M, n \in \mathbb{N} \right\}$$

der von M aufgespannte/erzeugte UVR von V

Vereinbarung: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$

Schreibweise: $M = \{v_1, \dots, v_m\}$

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, \dots, v_m \rangle_{\mathbb{R}}$$

- (iii) Ist $V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$, so heißt M ein Erzeugendensystem von V . V heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

1.13 Bemerkung

$M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von V , der M enthält.

Beweis

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist UVR. erfüllt Kriterien von 1.6, daher klar:
 1.6 2) erfüllt. $u \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n \quad (M = \{v_1, \dots, v_n\})$
 $\Rightarrow \lambda \cdot u = \underbrace{\lambda \lambda_1}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 + \dots + \underbrace{\lambda \lambda_n}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_n$
 1.6 3) ähnlich.
- Angenommen U ist der kleinste UVR, so dass $M \subseteq U$.
 Z. z.: $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$.
 Wegen 1.6 enthält U alle Linearkombinationen von Vektoren aus M .
 $\Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U \Rightarrow U$ kann nicht kleiner sein als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U \quad \square$

Ergänzung zu 1.13

19.10.16

Bsp: $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ Gerade

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \supseteq M$

- $E = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \supseteq M$

$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ Gerade, E Ebene, d.h. E ist größer als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$
 $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von \mathbb{R}^3 , der M enthält.

1.14 Definition (Lineare Unabhängigkeit)

- $V: \mathbb{R} - VR, \quad v_1, \dots, v_n$ heißen linear unabhängig, wenn gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_m \cdot v_m = 0 \\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\lambda = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0}_{\text{einzige Lösung!}}$$

- $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn gilt:
Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, \dots, v_m \in M$ paarweise verschieden sind v_1, \dots, v_m linear unabhängig
- Ist in obigen beiden Fällen (mindestens) $\lambda_i \neq 0$, dann sind die Vektoren linear abhängig

1.15 Beispiel

a) \mathcal{O} ist linear abhängig, da $\lambda \cdot \mathcal{O} = 0 \quad \forall \lambda \neq 0$

b) Sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ linear abhängig in \mathbb{R}^2 ?

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

$$\begin{cases} \text{I} & \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \text{II} & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Erfüllt für } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \text{ Aber hier gibt}$$

es noch die Lösung: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1!$

\Rightarrow Vektoren sind linear abhängig

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (l.u.) in \mathbb{R}^3

d) $v \neq \mathcal{O}, \quad v \in V, \quad v$ ist linear unabhängig
Angenommen es existiert $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \cdot v = 0$.
 $\Rightarrow v = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \mathcal{O} \neq$

e)

$$\begin{aligned} v, w \text{ linear abhängig} &\Leftrightarrow v = \lambda w, \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

f) In $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Abbildung}\}$ sind die Vektoren

- $f(x) = x, \quad g(x) = x^2$ linear unabhängig
- $f(x) = \sin^2(x), \quad g(x) = \cos^2(x), \quad h(x) = 2$ linear abhängig:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x \\ 0 &= \underbrace{2}_{\lambda_1} \sin^2 x + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cos^2 x + \underbrace{-1}_{\lambda_3} \cdot 2 \end{aligned}$$

1.16 Satz

$$M = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$$

- (i) M linear unabhängig \Leftrightarrow Zu jedem $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$
- (ii) M linear unabhängig, $v \notin \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow M \cup \{v\}$ linear unabhängig

Beweis

- (i) (\Leftarrow) $\mathcal{O} \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} :$

$$\mathcal{O} = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

Gleichung erfüllt für $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ (eindeutige Lösung)

- (\Rightarrow) Sei M linear unabhängig, $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$

$$\text{Angenommen } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot v_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{=0, \text{ da } M \text{ linear unabhängig}} \cdot v_i = \mathcal{O}$$

$$\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

- (ii) Z.z.: $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i, \lambda = 0$

$$\text{Annahme: } \lambda \neq 0 \Rightarrow v = -\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot v_n$$

$$\Rightarrow v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{. Also } \lambda = 0$$

$\lambda_i = 0$, weil M linear unabhängig.

□

1.17 Satz

$M \subseteq V$ linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow N = M$$

In Worten: Man kann von M keinen Vektor weglassen, ohne dass der von M aufgespannte Raum sich verkleinert.

Beweis

(\Rightarrow) Sei $M \subseteq V$ linear unabhängig.

Angenommen: Man kann doch aus M Vektoren weglassen, d.h.

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$N \neq M \Rightarrow \exists x \in M \setminus N \quad (\text{da } N \subseteq M)$$

$$\Rightarrow \exists v_1, \dots, v_n \in N \quad \text{paarweise verschieden und}$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{so dass}$$

$$x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \quad (\text{da } \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}})$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - x = \mathcal{O}$$

$$\underbrace{v_1, \dots, v_n}_{\in N}, \quad \underbrace{x}_{\in M \setminus N} \text{ paarweise verschieden}$$

Da $N \subseteq M$, ist $\underbrace{v_1, \dots, v_n, x}_{\text{linear abhängig}} \in M \Rightarrow M$ linear abhängig

Also muss $N = M$ gelten.

(\Leftarrow) Sei M linear abhängig.

Z.z. Man kann Vektoren aus M weglassen, d.h.:

$$\exists N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$M \text{ linear abhängig} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists v_1, \dots, v_n \in M$$

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (mit } \lambda_i \neq 0 \text{ für ein } i)$$

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

$$\text{O.B.d.A: } \lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot v_3 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$$

$$\text{Setze } N = M \setminus \{v_1\} \Rightarrow N \neq M$$

Da v_1 Linearkombination von v_2, \dots, v_n folgt:

Jede Linearkombination von v_1, \dots, v_n lässt sich ausdrücken als Linearkombination von $v_2, \dots, v_n \Rightarrow \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ \square

Basis und Dimension

25.10.16

Ein minimales Erzeugendensystem heißt Basis.

1.18 Definition (Basis)

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR. Eine endliche Menge $B \subseteq V$ heißt Basis, falls

- $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$ und
- B linear unabhängig.

Für $V = \{\mathcal{O}\}$ ist $B = \emptyset$ die Basis.

1.19 Beispiel

a) $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist Basis von \mathbb{R}^n ('Standard-/kanonische Basis')

b) Basis ist nicht eindeutig.

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, & B_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \\ \Rightarrow \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}, \text{ da: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\in \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

1.20 Satz (Existenz von Basen)

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR \Rightarrow Jedes endliche Erzeugendensystem enthält Basis.

Beweis

Sei $M \subseteq V$ endlich, $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = V$

- M linear unabhängig \rightarrow fertig
- M linear abhängig $\stackrel{1.17}{\Rightarrow}$ Man kann aus M einen Vektor $v \in M$ weglassen, so dass $\langle M \setminus \{v\} \rangle_{\mathbb{R}} = V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$. Nach endlich vielen Schritten liefert das Verfahren eine Basis. \square

Fragen

- Basis nicht eindeutig. Sind alle Basen gleich groß?
- geg. $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $S = \{e_1, e_2, e_3\}$. Wie kann man w zu einer Basis ergänzen? Welche Vektoren aus S sind geeignet?

$$w = \frac{1}{3}e_1 + e_3 = \{ \underbrace{w, e_1, e_3}_{\text{linear abhängig}} \} \text{ keine Basis, aber}$$

$$\{ \underbrace{w, e_1, e_2}_{\text{linear unabhängig}} \} \text{ Basis und } \{w, e_2, e_3\} \text{ Basis}$$

1.21 Satz (Austauschlemma)

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR. Gegeben: $w \in V$, $w \neq \mathcal{O}$, $w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, wobei $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$ Basis von V .

$\Rightarrow \underbrace{(B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}}_{(*)} \text{ Basis, falls } \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \neq 0$

Beweis

Z.z: $(*)$ ist Basis.

1) $(*)$ ist linear unabhängig.

Z.z:

$$\sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \text{ und } \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w &= \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \right) \\ &= \sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu \lambda_i) v_i + \mu \lambda_j v_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \{v_1, \dots, v_n\} \text{ Basis} &\Rightarrow \mu \lambda_j = 0 \text{ und } \mu_i + \mu \lambda_i = 0 \quad \forall i \neq j \\ \underbrace{\lambda_j}_{\neq 0} \neq 0 &\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu_i + \underbrace{\mu \lambda_i}_{=0} = \mu_i = 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

2) (\star) erzeugt V .

$$\begin{aligned}
 w &= \lambda_j v_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i && | : \lambda_j, \text{ da } \lambda_j \neq 0 \\
 \Leftrightarrow \quad v_j &= \frac{1}{\lambda_j} w - \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \\
 \Rightarrow \quad v_j &\in \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} \\
 \Rightarrow \quad \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} = V
 \end{aligned}$$

1.22 Satz (Steinitz'scher Austauschatz)

Geg. $w_1, \dots, w_m \in V$ linear unabhängig, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V .

Es folgt:

- a) Aus den n Vektoren v_1, \dots, v_n kann man $n - m$ Vektoren auswählen, die mit w_1, \dots, w_m eine Basis bilden.
- b) $m \leq n$

Beweis

- a) 1) $w_1 \in V \Rightarrow w_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$
 Wären alle $\lambda_i = 0$, dann wäre auch $w_1 = 0$. Da $\mathcal{O} \in V$ linear abhängig ist, wäre also auch w_1, \dots, w_m linear abhängig. E
 Also: Mindestens ein $\lambda_i \neq 0$
 O.B.d.A. $\lambda_1 \neq 0$ (sonst umnummerieren) $\xrightarrow{1.20} \{w_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist Basis von V
- 2) $w_2 \in V \Rightarrow w_2 = \mu_1 w_1 + \sum_{i=2}^n \mu_i v_i$
 Wären alle $\mu_2, \dots, \mu_n = 0$, so wäre $w_2 = \mu_1 w_1$, also auch w_1, w_2 linear abhängig. E , da $\{w_1, \dots, w_m\}$ linear unabhängig.
 \Rightarrow Mindestens ein $\mu_i \neq 0$, $i \in \{2, \dots, n\}$
 O.B.d.A. $\mu_2 \neq 0$ $\xrightarrow{1.20} \{w_1, w_2, v_3, \dots, v_n\}$ Basis von V

□

b) \rightarrow Übung

1.23 Korollar

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR

- i) Je zwei Basen von V enthalten gleich viele Elemente.
- ii) Basisergänzungssatz
Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis

- i) B, \tilde{B} Basen
 B linear unabhängig $\stackrel{1.22b)}{\Rightarrow} |B| \leq |\tilde{B}|$
 \tilde{B} linear unabhängig $\stackrel{1.22b)}{\Rightarrow} |\tilde{B}| \leq |B|$
 $\Rightarrow |B| = |\tilde{B}|$
- ii) Wähle beliebige Basis von V und tausche aus(1.22a)).

1.24 Satz

V endlich erzeugter \mathbb{R} -VR, $B \subseteq V$.

Dann sind äquivalent:

- i) B ist Basis
- ii) B ist maximale linear unabhängige Menge in V
- iii) B ist minimales Erzeugendensystem

Beweis

- i) \Rightarrow ii) Wegen 1.23 (linear unabhängige Menge zu Basis ergänzen, alle Basen gleich groß)
- ii) \Rightarrow i) (Bzw. \neg i) \Rightarrow \neg ii.) B keine Basis, B linear unabhängig
 $\Rightarrow \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq V \Rightarrow \exists v \in V \setminus \langle B \rangle_{\mathbb{R}} : B \cup \{v\}$ linear unabhängig
- i) \Rightarrow iii) Satz 1.17

□

1.25 Definition (Dimension)

$V : \mathbb{R}$ -VR

26.10.16

- i) Ist V endlich erzeugbar, B Basis von V , $|B| = n$ so hat V die Dimension n , $\dim(V) = n$
- ii) Ist V nicht endlich erzeugbar, so heißt V unendlichdimensional.

1.26 Korollar

$\dim V = n, B \subseteq V, |B| = n$.

Dann ist B Basis von V , wenn B linear unabhängig oder $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$

Beweis

Folgt aus 1.24

1.27 Beispiel

a) $\{e_1, \dots, e_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

b) $\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow \dim(\{\mathcal{O}\}) = 0$

c) Bilden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis von V ?

Ja, weil linear unabhängig (siehe Korollar 1.26).

d) $V = \mathbb{R}^4, U = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

u_1, u_2 linear unabhängig $\Rightarrow \dim(U) = 2$

Ergänze u_1, u_2 zu Basis von $V = \mathbb{R}^4$

– 1. Möglichkeit (Austauschlemma + Steinitz)

$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ Basis von \mathbb{R}^4

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + e_4 \Rightarrow \{u_1, e_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_3 \Rightarrow \{u_1, u_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

(Basis könnte auch anders aussehen, nur beispielhaft dargestellt)

– 2. Möglichkeit (1.16)

- * $e_1 \notin U$ (*) (nachrechnen)
 $\xRightarrow{1.16} \{u_1, u_2, e_1\}$ linear unabhängig
- * $e_4 \notin \langle \{u_1, u_2, e_1\} \rangle_{\mathbb{R}}$ (nachrechnen)
 $\xRightarrow{1.16} \{u_1, u_2, e_1, e_4\}$ linear unabhängig und damit Basis (Korollar 1.26)

(*) Angenommen:

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 \\ &= \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} I & 1 = \lambda_1 \\ II & 0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ III & 0 = \lambda_2 \\ IV & 0 = \lambda_1 \end{cases} \quad \text{! zu I} \\ &\Rightarrow e_1 \notin \langle \{u_1, u_2\} \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \{u_1, u_2, e_1\} \text{ linear unabhängig} \end{aligned}$$

1.28 Satz (Dimensionssatz)

V \mathbb{R} -VR, $\dim(V) = n$

- i) $U \subseteq V$ ist UVR $\Rightarrow \dim(U) \leq n$
- ii) $U \subseteq W \subseteq V$, U, W sind UVR mit $\dim(U) = \dim(W) \Rightarrow U = W$
- iii) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Beweis

- i) Basis von U kann man zu Basis von V ergänzen $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$
- ii) $\dim(U) = \dim(W) \stackrel{U \subseteq W}{\Rightarrow}$ Basis von U auch Basis von $W \Rightarrow U = W$
- iii) Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ Basis von $U \cap W$
Ergänze $\{v_1, \dots, v_k\}$ zu

a) Basis $\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ von U

b) Basis $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l\}$ Basis von W

Behauptung: $B = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ Basis von $U + W$

1) B linear unabhängig

Sei

$$\overbrace{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k}^{=v} + \overbrace{\mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_m u_m}^{=u} + \overbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l}^{=w} = 0$$

$\lambda_i, \mu_j, \gamma_r \in \mathbb{R}$

Es ist $w \in U \cap W$, da

$$* \quad w = \underbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l}_{\in W} \in W$$

$$* \quad w = - \underbrace{u}_{\in U} - \underbrace{v}_{\in U} \in U$$

Also: $w \in U \cap W$.

$$\Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} : w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow w = \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow \gamma_{k+1} w_{k+1} + \dots + \gamma_l w_l - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_k = 0$$

$\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_l\}$ linear unabhängig

$$\Rightarrow \gamma_{k+1} = \dots = \gamma_l = \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$$

$$\Rightarrow w = 0 \text{ und } v + u + w = v + u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_m u_m = 0$$

$\{v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_m\}$ linear unabhängig (Basis von U)

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \mu_{k+1} = \dots = \mu_m = 0$$

2) $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = U + W$, da:

$$* \quad \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U + W \text{ (da } \underbrace{u + v}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W} \in U + W)$$

$$* \quad U \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \text{ (da Basis von } U \text{ in } B)$$

$$* \quad W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \\ \Rightarrow U + W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$$

□

1.29 Bemerkung (Koordinaten)

Geg.: Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V , Vektor $u \in V$

$$\Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

λ_i eindeutig und heißen Koordinaten von u bezüglich der Basis B .

$$\text{z.B.: } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ hat Koordinaten } 1, 1, 3 \text{ bezüglich}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

02.11.16

2.1 Beispiel

- Ein Bauer besitzt Kühe und Gänse
- Insgesamt 18 Tiere mit 40 Beinen
- Frage: Wieviele der Tiere sind Kühe?

Lineares Gleichungssystem (LGS): $\ast \begin{cases} I: & k + g & = 18 \\ II: & 4k + 2g & = 40 \end{cases} \Leftrightarrow 2k + g = 20$
 $\Rightarrow g = 20 - 2k = 18 - k \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow g = 16$

Vektorenschreibweise von \ast :

$$\begin{pmatrix} k + g \\ 4k + 2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ oder } k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

2.2 Definition (Matrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:
Gegeben:

- Unbekannte $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen
- Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$Ax = b$ mit

$$\bullet A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{Zeile} \\ \uparrow \\ \text{Spalte} \end{matrix}$$

$$\bullet x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\bullet b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Man schreibt $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oder nur $A = (a_{ij})$, wenn m, n schon bekannt.

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ - Eingänge der Matrix A
- A - reelle $m \times n$ - Matrix
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ - Menge aller reellen $m \times n$ - Matrizen
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ - quadratische Matrizen

(**) Dabei ist

$$Ax := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

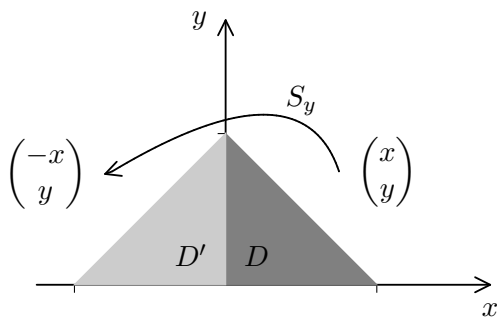
2.3 Bemerkung

Aus (**) ergibt sich: $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \mapsto A \cdot x$ für $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
 A bildet Vektoren auf Vektoren ab.

Matrizen können nicht nur zur Lösung von LGS verwendet werden, sondern auch in der Geometrie:

2.4 Beispiel:

- a) Spiegelung S_y in \mathbb{R}^2 an y -Achse



$$S_y : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$S_y : \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

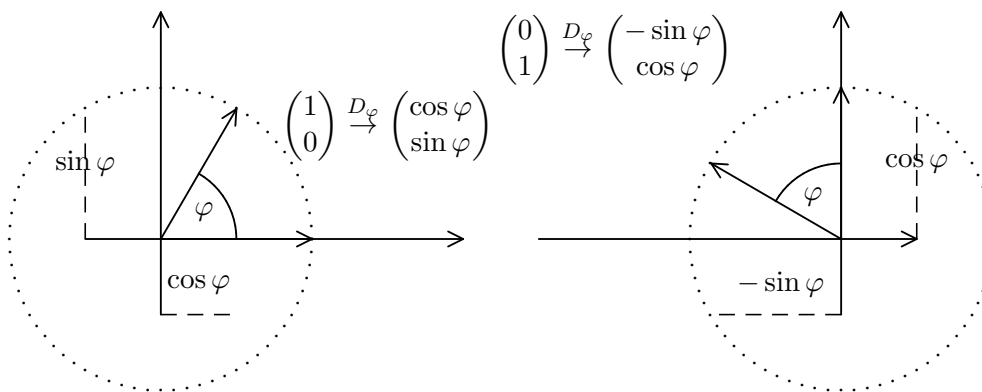
$$S_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} + s_{12} \\ s_{21} + s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

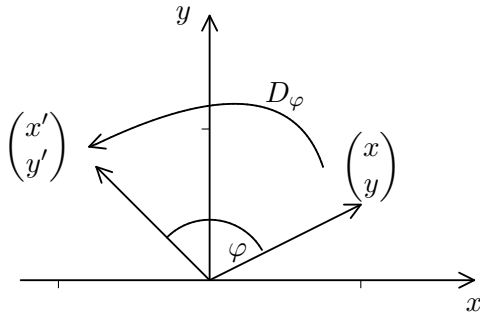
$$\Rightarrow s_{11} = -1 \quad s_{12} = 0 \quad s_{21} = 0 \quad s_{22} = 1$$

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S_y bildet D auf D' ab.

- b) Drehung D_φ um $\varphi \in [0, 2\pi)$
Vorüberlegung am Einheitskreis:





$$\begin{aligned}
 D_\varphi &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\
 D_\varphi &= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ und} \\
 D_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\
 \Rightarrow D_\varphi &= (D_\varphi \cdot e_1, D_\varphi \cdot e_2) = \\
 &\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2.5 Bemerkung

Aus Beispiel 2.4 b) und Definition 2.2 ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 A \cdot e_j &= 1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad (j\text{-te Spalte von } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})) \\
 \Rightarrow A &= \underbrace{(A_{e_1}, A_{e_2}, \dots, A_{e_n})}_{\text{Spalten}}
 \end{aligned}$$

2.6 Satz

$$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{i) } A(\lambda x) = \lambda(A \cdot x) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{ii) } A(x + y) = Ax + Ay$$

Beweis

i)

$$\begin{aligned}
 A(\lambda x) &= (\lambda x_1) \underbrace{A \cdot e_1}_{\text{1. Spalte}} + (\lambda x_2) A e_2 + \dots + (\lambda x_n) \underbrace{A e_n}_{\text{n-te Spalte}} \\
 &= \lambda [x_1 (A e_1) + \dots + x_n (A e_n)] \\
 &= \lambda (Ax)
 \end{aligned}$$

ii) Übung

2.7 Beispiel (Folien 02.11.2016)

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cdot x &= (D_\pi \circ S_y) \cdot x = D_\pi \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Berechnung Matrixprodukt (Verknüpfung) $A \cdot B$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{\left[x_1 \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} \\ &\stackrel{2.6}{=} x_1 \underbrace{\left[e \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} + x_2 \underbrace{\left[f \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right]}_{\in \mathbb{R}^2} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} ea + gb & fa + hb \\ ec + gd & fc + hd \end{pmatrix}}_{\text{Matrixprodukt } A \cdot B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.8 Definition (Matrixprodukt)

$$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \quad B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,l}(\mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (c_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R}) \\ c_{ik} &= (i\text{-te Zeile von } A) \cdot (k\text{-te Spalte von } B) \\ &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \end{aligned}$$

(Skalarprodukt)

2.9 Beispiel

08.11.16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$B \cdot A$ nicht definiert!

2.10 Satz + Definition

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist Vektorraum mit

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
- $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis: Siehe Hausaufgabe 03 Aufgabe 4a)

2.11 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (-2) \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

2.12 Definition (Matrizentransponierung)

i) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})$.

Die zu A transponierte Matrix (Tauschen von Zeilen und Spalten):

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$\text{z.B.: } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ii) } - \text{ Nullmatrix: } \mathcal{O}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$- \text{ Einheitsmatrix (nur Hauptdiagonale): } E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

2.13 Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
 $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ Matrixmultiplikation nicht kommutativ!

b) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
 $A \cdot E_n = A$ und $E_m \cdot A = A$

3 Gruppen

3.1 Beispiel (Wiederholung zu Permutationen)

Geg.: Menge $\{A, B, C\}$

Anordnungen: ABC, CAB, ACB, ... $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ Möglichkeiten

Jede Anordnung kann man auffassen als eineindeutige (bijektive) Abbildung

$\pi : \{A, B, C\} \rightarrow \{A, B, C\}$

$\pi :$	x	A	B	C
	$\pi(x)$	A	C	B

3.2 Definition (Permutation)

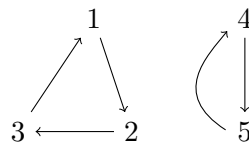
- Eine Permutation ist eine eineindeutige Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst. Im Allgemeinen verwendet man die Menge $\{1, \dots, n\}$ und schreibt eine Permutation π als Wertetabelle $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \pi(1) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$ oder als geordnete Liste der Werte $\pi = \pi(1)\dots\pi(n)$
- \mathcal{S}_n - Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$, $|\mathcal{S}_n| = n!$

Beispiel: $\mathcal{S}_2 = \{\text{id}, (AB)\} = \{\text{id}, (12)\}$, $|\mathcal{S}_2| = 2! = 2$

mit $\text{id} = \begin{pmatrix} AB \\ AB \end{pmatrix}$, $\pi = \begin{pmatrix} AB \\ BA \end{pmatrix}$

3.3 Beispiel

- $M = \{1, 2, \dots, 5\}$
 $\pi = \pi(1)\dots\pi(5) = 23154$
 oder $\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix}$
- $\text{id}(i) = i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$



Graph der Permutation

3.4 Bemerkung

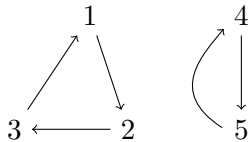
In Literatur oft Zyklenschreibweise:

Zyklus $(a_1 a_2 \dots a_k)$ bedeutet $\pi(a_i) = a_{i+1}$ und $\pi(a_k) = a_1$

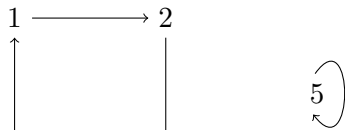
z.B.: $\pi = (123)(45)$

Verknüpfung von Permutationen

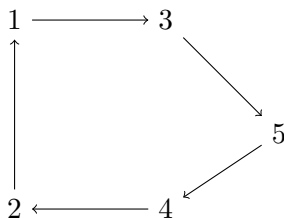
3.5 Beispiel



$$\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix} = (123)(45)$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23415 \end{pmatrix} = (1234)(5)$$



$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 31524 \end{pmatrix} = (13542)$$

3.6 Bemerkung

- Die Verknüpfung von 2 Permutationen π, σ ist wieder Permutation η mit $\eta(i) = \pi \circ \sigma(i) = \pi(\sigma(i))$
- Fixpunkte mit $\pi(i) = i$ lässt man weg, z.B. $\underbrace{(123)(4)}_{\in \mathcal{S}_4} = (123)$
- Jede Permutation kann als Produkt disjunkter Zyklen geschrieben werden, z.B.: $(34) \cdot (345) = (3)(45) = (45)$.
Verkettung \circ
 Zwei Zyklen heißen disjunkt, wenn $\{a_1 \dots a_k\} \cap \{b_1 \dots b_j\} = \emptyset$.
- Permutationen sind nur in sehr seltenen Fällen kommutativ:
 $(123)(23) = (12) \neq (23)(123) = (13)$
- Zyklendarstellung nicht eindeutig, z.B.:
 $(123) = (231)$ oder $(34)(12) = (12)(34)$

3.7 Beispiel

09.11.16

Symmetrieoperationen des Rechtecks	Identität	Spiegelung y-Achse	Spiegelung x-Achse	Drehung 180°
	$\begin{array}{ c c } \hline D & C \\ \hline A & B \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline C & D \\ \hline B & A \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline A & B \\ \hline D & C \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{ c c } \hline B & A \\ \hline C & D \\ \hline \end{array}$
als Matrix	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$D_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
als Permutation der Ecken	id	$\pi = (AB)(CD)$	$\sigma = (AD)(BC)$	$\eta = (AC)(BD)$

Verknüpfungstafel

Matrixmultiplikation	E_2	S_y	S_x	D_π
E_2	E_2	S_y	S_x	D_π
S_y	S_y	E_2	D_π	S_x
S_x	S_x	D_π	E_2	S_y
D_π	D_π	S_x	S_y	E_2

3.8 Definition (Grundbegriffe)

- Seien X, Y nichtleere Mengen, Eine Verknüpfung ' \cdot ' ist eine Abbildung

$$X \times X \rightarrow Y \quad (a, b) \rightarrow a \cdot b \quad (\leftarrow \text{'Produkt' von a und b})$$

- Eine Menge $X \neq \emptyset$ heißt abgeschlossen bzgl. einer Verknüpfung ' \cdot ', falls $a \cdot b \in X \quad \forall a, b \in X$.

Beispiel: $X = \{-1, 1\}$ mit ' \cdot ' Addition $\Rightarrow (-1) \cdot (1) = -1 + 1 = 0$

Die Menge $\{id, \pi, \sigma, \eta\}$ aus Beispiel 3.7 ist abgeschlossen bzgl. der Verkettung von Permutationen

Bemerkung

Die Verknüpfung von Elementen einer endlichen Menge stellt man anhand der Verknüpfungstafel dar, siehe Beispiel 3.7.

3.9 Definition (Gruppe)

- a) Eine Gruppe ist ein Paar (G, \cdot) mit Menge $G \neq \emptyset$ und einer Verknüpfung $\cdot : \underbrace{G \times G \rightarrow G}_{\text{abgeschlossen!}}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$ Assoziativität
- 2) $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$ Neutralelement
- 3) $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ Inverse

Falls zusätzlich

- 4) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$ Kommutativität

gilt, dann heißt G abelsche Gruppe.

- b) $|G|$ heißt Ordnung der Gruppe G .

3.10 Beispiel

- a) $(\{e\}, \cdot)$ ist Gruppe
- b) $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit $+$ ist abelsche Gruppe. Inverse zu a ist $-a$.
- c) $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit \cdot keine Gruppen. Problem: 0 besitzt keine Inverse, weil $0 \cdot a = 1 \nexists$

$\Rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ mit \cdot Gruppen, wenn man 0 weglässt

- d) Einzige endliche Gruppen von reellen Zahlen:

- $(\{1\}, \cdot)$ bzw. $(\{0\}, +)$
- $(\{1, -1\}, \cdot)$

Für weitere endliche Gruppen muss man Restklassen (Beispiel 3.12) Matrizen oder Permutationen betrachten

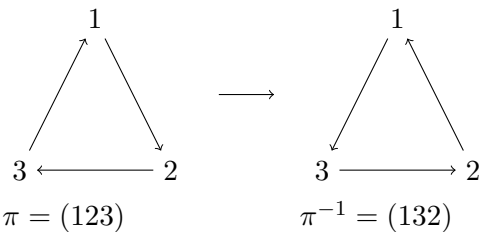
- e) $\mathcal{S}_2 = \{\text{id}, (12)\}$ und $\mathcal{S}_3 = \{\text{id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$ sind Gruppen (s. 3.11)
- f) $V_4 = \{\text{id}, \pi, \sigma, \eta\}$ aus Beispiel 3.7 ist die Symmetriegruppe des Rechtecks und heißt 'Kleinsche Vierergruppe' (V_4 Gruppe: s. 3.16 e).

3.11 Satz

\mathcal{S}_n ist eine nicht abelsche Gruppe. (Name: Symmetrische Gruppe)

Beweis

- assoziativ: $\pi, \sigma, \eta \in \mathcal{S}_n \Rightarrow \underbrace{(\pi \cdot \sigma) \cdot \eta}_{\text{Verknüpfung von Abbildungen}} = \overset{\text{bijektive Abbildungen}}{\pi \cdot (\sigma \cdot \eta)}$
- Neutralelement: id, denn
 $\text{id} \cdot \pi = \pi \cdot \text{id} = \pi \quad \forall \pi \in \mathcal{S}_n$
- Inverse: Alle Pfeile eines Zyklus werden umgedreht, d.h. die Zyklen werden rückwärts gelesen:



Fixpunkte und 2er-Zyklen ändern sich dabei nicht:

$$\sigma = (1678)(23) \Rightarrow \sigma^{-1} = (1876)(23)$$

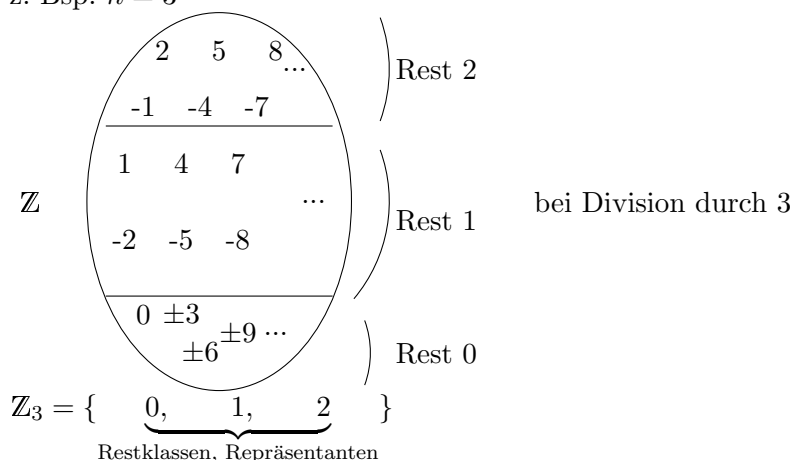
Setzt man die Pfeile von den Graphen π und π^{-1} zusammen, ändert sich nichts, d.h. $\pi \cdot \pi^{-1}(i) = i \Rightarrow \pi \cdot \pi^{-1} = \text{id} = \pi^{-1} \cdot \pi$

- nicht abelsch: Bemerkung 3.6d)

3.12 Beispiel

Restklassen modulo $n : \mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$,

z. Bsp. $n = 3$



a) (\mathbb{Z}_n, \oplus) mit $a \oplus b = a + b \pmod n$. Z.B. in \mathbb{Z}_3 ist $2 \oplus 1 = 0$

(\mathbb{Z}_n, \oplus) ist abelsche Gruppe:

- abgeschlossen: $a + b \pmod n \in \{0, \dots, n-1\}$
- assoziativ: $a + (b + c) \pmod n = (a + b) + c \pmod n$
- Neutralelement: $a + 0 \equiv 0 + a \equiv a \pmod n$
- Inverse zu $a \in \mathbb{Z}_n$: Für welches $b \in \mathbb{Z}_n$ ist $a + b \pmod n = 0$?
Wähle b so, dass $a + b = n$, falls $a \neq 0$ (sonst $b = 0$)
z.B. in \mathbb{Z}_3 : $a = 1 \Rightarrow b = 2$, $a = 2 \Rightarrow b = 1$, $a = 0, b = 0$
- kommutativ: $a + b \pmod n = b + a \pmod n$

b) (\mathbb{Z}_n, \odot) mit $a \odot b = ab \pmod n$

Ist i.A. keine Gruppe:

- assoziativ ✓
- Neutralelement: $e = 1$ ✓

- Aber: 0 hat keine Inverse! Es gibt kein $a \in \mathbb{Z}_n$: $\underbrace{0 \cdot a}_{0} \bmod n = 1$ (!)

Hat $z \neq 0$ eine Inverse bzgl. \odot ?

\bar{z} invers zu z , wenn $\bar{z} \cdot z \equiv 1 \pmod{n}$

z.B. in \mathbb{Z}_{15} gilt:

* $2 \cdot 8 = 16 \equiv 1 \pmod{15}$, d.h. 2 und 8 sind zueinander invers

* Alle Vielfachen von 5 haben Rest 0, 5, 10, d.h.

$k \cdot 5 \bmod 15 \in \{0, 5, 10\} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5$ hat kein Inverses

Allgemein:

$$\begin{aligned} z \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n : z \odot \bar{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n \quad \exists q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z = qn + 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z}, q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z - qn = 1 \\ &\stackrel{*}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(z, n) = 1 \end{aligned}$$

Beweis von *

' \Leftarrow ' Lemma von Bézout/Erweiterter Euklidischer Algorithmus (EEA):

$$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$$

$$\text{Hier: } a = z, \quad b = n, \quad s = \bar{z}, \quad t = -q$$

' \Rightarrow ' Übung (Übungsblatt 5, A1c)

Also: Nur die zu n teilerfremden Zahlen in \mathbb{Z}_n haben Inverse. Z.B.: In \mathbb{Z}_{15} sind 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 bzgl. \odot invertierbar.

Bezeichnung: $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$ ist Gruppe mit Ordnung $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$ (Eulersche φ -Funktion, $\varphi(n)$ ist Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen zwischen 1 und n).

Berechnung der Inversen in \mathbb{Z}_n^* :

$$\begin{aligned} \text{EEA :} \quad z \in \mathbb{Z}_n^* &\Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : sz + tn = 1 \\ &\Rightarrow s \cdot z \equiv 1 \pmod{n} \\ &\Rightarrow s \text{ invers zu } z \end{aligned}$$

3.13 Satz (Eigenschaften von Gruppen)

G Gruppe.

- i) Das Neutralelement von G ist eindeutig.
- ii) Die Inverse zu jedem $a \in G$ ist eindeutig.
- iii) $a, b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Beweis

- i) Angenommen e_1, e_2 Neutralelemente
 $\Rightarrow e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$
- ii) Angenommen $a \in G$ hat 2 Inversen x, y
 $x, y \in G \Rightarrow x = x \underbrace{(ay)}_e = \underbrace{(xa)}_e y = y$
- iii) $* (ab)^{-1} \cdot (ab) \underset{\text{Vor.}}{=} (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1} \underbrace{(a^{-1}a)}_e b = \underbrace{b^{-1}b}_e = e$
 $* (ab)(ab^{-1})$ analog

□

3.14 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)

G Gruppe, $a, b \in G$

- i) $\exists! x \in G : a \cdot x = b$. Es ist $x = a^{-1} \cdot b$
- ii) $\exists! y \in G : y \cdot a = b$. Es ist $y = b \cdot a^{-1}$
- iii) $ax = bx$ für ein $x \in G \Rightarrow a = b$
 bzw. $ya = yb$ für ein $y \in G \Rightarrow a = b$ (Kürzungsregel)

Beweis

- i) $x = a^{-1}b$ erfüllt $ax = a(a^{-1}b) = \underbrace{(aa^{-1})}_e b = b$
- ii) Analog zu i)
- iii) $a = a \underbrace{(xx^{-1})}_e = (ax)x^{-1} = (bx)x^{-1} = b \underbrace{(xx^{-1})}_e = b$

□

Untergruppen und Nebenklassen

3.15 Definition (Untergruppe)

(G, \cdot) Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$.

U heißt Untergruppe von G ($U \leq G$), wenn U bzgl. ' \cdot ' eine Gruppe ist.

Bemerkung

22.11.2016

- Abgeschlossenheit prüfen: $\forall u, v \in U : uv \in U$
- e von G ist auch e von U
- Inversen in U gleich wie in G

(wegen Satz 3.13)

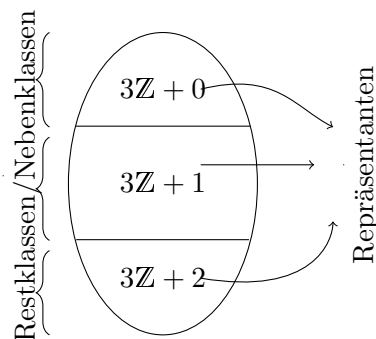
3.16 Beispiel

- a) $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$
- b) $(\{-1, 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- c) $V_4 = \{\text{id}, \underbrace{(AB)(CD)}_{\pi}, \underbrace{(AC)(BD)}_{\sigma}, \underbrace{(AD)(BC)}_{\eta}\} \leq \mathcal{S}_4$ (Bsp. 3.7, 3.10) weil V_4
 abgeschlossen, $\text{id} \in V_4$, $\gamma^{-1} = \gamma \quad \forall \gamma \in V_4$

3.17 Beispiel

Es ist $U = 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

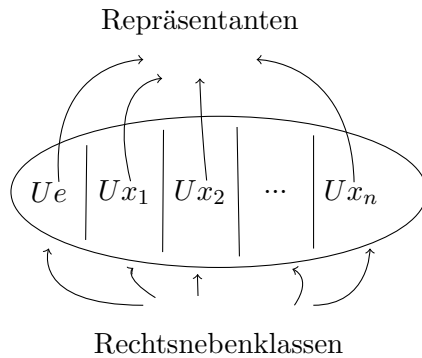
- Mehr Klassen gibt es nicht, da $3\mathbb{Z} + 3 = 3\mathbb{Z} + 0$, $3\mathbb{Z} + 4 = 3\mathbb{Z} + 1$, $3\mathbb{Z} - 1 = 3\mathbb{Z} + 2$
- Repräsentanten sind nicht eindeutig, -1 auch Repräsentant von $3\mathbb{Z} + 2 = 3\mathbb{Z} - 1$
- Grundidee: Nebenklassen von U unterteilen $G = \mathbb{Z}$ in disjunkte Äquivalenzklassen.
 Hier: $x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in 3\mathbb{Z} : u + x = y$, z.B.
 $4 \sim_U 10$, da $\underbrace{6}_{\in 3\mathbb{Z}} + 4 = 10$



3.18 Satz + Definition (Rechtsnebenklasse, Repräsentant)

G Gruppe, $U \leq G$.

- i) Für $x, y \in G : x \sim_U y : \Leftrightarrow \exists u \in U : ux = y$.
Behauptung: \sim_U Äquivalenzrelation.
- ii) $Ux := \{ux \mid u \in U\}$ (mit $x \in G$) heißt Rechtsnebenklasse von U in G . x heißt Repräsentant der Klasse Ux [Linksnebenklassen analog: xU]
- iii) $G/U := \{Ux \mid x \in G\}$ Menge der Rechtsnebenklassen von U in G .
Behauptung: G/U ist eine disjunkte Zerlegung von G in Äquivalenzklassen Ux .



Beweis

- i) – $x \sim_U x$, da $\underbrace{e}_{\in U} \cdot x = x$ (Reflexivität)
- (Symmetrie)

$$\begin{aligned}
 x \sim_U y &\Rightarrow \exists u \in U : ux = y \\
 &\Rightarrow x = \underbrace{u^{-1}}_{\in U} y = x \\
 &\Rightarrow y \sim_U x
 \end{aligned}$$

- (Transitivität)

$$\begin{aligned}
 x \sim_U y, y \sim_U z &\Rightarrow \exists u, u' \in U : ux = y, u'y = z \\
 &\Rightarrow u'y = u'(ux) = \underbrace{(u'u)}_{\in U} x = z \\
 &\Rightarrow x \sim_U z
 \end{aligned}$$

- iii) – $Ux = \{ux | u \in U\} = \{y \in G | \underbrace{\exists u : ux = y}_{y \sim_U x}\} = \{y \in G | y \sim_U x\} \Rightarrow Ux$
 Äquivalenzklassen von $x \in G$
 – Für je 2 Äquivalenzklassen Ux, Uy gilt: $Ux = Uy$ oder $Ux \cap Uy = \emptyset$
 (wegen Transitivität)

3.19 Beispiel

$$\mathbb{Z}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z} + 0, 3\mathbb{Z} + 1, 3\mathbb{Z} + 2\} = \{3\mathbb{Z} + 3, 3\mathbb{Z} - 2, 3\mathbb{Z} + 11\}$$

Man schreibt oft $\mathbb{Z}_3 = \{0, \underline{1}, \underline{2}\}$ (wobei $j = 3\mathbb{Z} + j$) oder einfach $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$

Allgemein: $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\cdot\mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$

Beobachtung in \mathbb{Z}_3 : Ist $x \in \underline{1}, y \in \underline{2}$, dann ist immer $x + y \in \underline{0}$

3.20 Kriterium

G Gruppe, $U \leq G$.

Für je 2 beliebige Klassen, Ux, Uy ($x, y \in G$) gelte:

$$x' \in Ux, y' \in Uy \Rightarrow x' \cdot y' \in U(xy)$$

3.21 Definition (Wohldefiniertheit)

Wenn Kriterium 3.20 erfüllt ist, kann man auf G/U eine Verknüpfung definieren:

$* : G/U \times G/U \rightarrow G/U$ mit

$$(Ux) * (Uy) = U(\underbrace{xy}_{\text{Produkt in } G})$$

Man sagt: Wenn 3.20 erfüllt, ist '*' wohldefiniert.

3.22 Beispiel

23.11.2016

- a) * wohldefiniert auf $(\mathbb{Z}_n, +)$ (ohne Beweis)

Bemerkung: $x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in 3\mathbb{Z} : u + x = y$

$$\Leftrightarrow x \equiv y \pmod{3}$$

Daraus ergibt sich die Def. aus Bsp. 3.12 mit $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ und $x \oplus y = x + y \pmod{3}$

- b) $U = \{\text{id}, (12)\} \leq \mathcal{S}_3$. Auf \mathcal{S}_3/U ist * nicht wohldefiniert (Übung).

3.23 Satz (Faktorengruppe/Quotientengruppe)

$U \leq G$, G Gruppe.

Wenn '*' aus Def 3.21 wohldefiniert, dann ist $(G/U, *)$ eine Gruppe.

(Name: Quotientengruppe/Faktorengruppe)

Beweis: Übung.

Bemerkung: G abelsch \Rightarrow $'\cdot'$ immer wohldefiniert, d.h. G/U Gruppe.

3.24 Lemma

G Gruppe, $U \leq G$, U endlich $\Rightarrow |Ux| = |U| \quad \forall x \in G$

Beweis

$\varphi : U \rightarrow Ux, \quad u \mapsto u \cdot x$ bijektiv:

- surjektiv, da $\varphi(U) = Ux$
- injektiv, da $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1x = u_2x$
 $\xRightarrow{\cdot x^{-1}} u_1 = u_2$

$\Rightarrow |U| = |Ux|$

3.25 Theorem (Lagrange)

G endliche Gruppe, $U \leq G \Rightarrow |U|$ teilt $|G|$ und $|G/U| = \frac{|G|}{|U|}$.

Beweis

Seien U_{x_1}, \dots, U_{x_q} die q verschiedenen Rechtsnebenklassen von U in G .

$\Rightarrow G = \bigcup_{i=1}^q Ux_i \Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^q \underbrace{|Ux_i|}_{=|U|} = q \cdot |U|.$

□

Ordnung und zyklische Gruppen

3.26 Definition

(G, \cdot) Gruppe, $a \in G$.

Definiere $a^0 := e, \quad a^1 := a, \quad \underbrace{a^m := (a^{m-1}) \cdot a}_{\text{für } m \in \mathbb{N}}, \quad a^m := \underbrace{(a^{-1})^{-m}}_{\text{für } m \in \mathbb{Z}^-}$

als Potenzen von $a \in G$.

3.27 Satz

G Gruppe, $a \in G$. Es gilt:

$$\text{i) } (a^{-1})^m = (a^m)^{-1} = a^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ii) } a^m a^n = a^{m+n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{iii) } (a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

Beweis

i) a) m positiv:

* Inverses für a^m , wenn $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Es ist } a^m \cdot \underbrace{(a^{-1})^m}_{\text{Inverse}} &= \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-mal}} \cdot \underbrace{a^{-1} \cdot \dots \cdot a^{-1}}_{m\text{-mal}} = e \\ \Rightarrow (a^m)^{-1} &= (a^{-1})^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{* nach Definition: } a^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{Z}^-}} = (a^{-1})^{+m} \\ &\Rightarrow \text{i) gilt für } m \geq 0 \end{aligned}$$

b) m negativ:

$$\text{* } a^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} = \underbrace{((a^{-1})^{-1})^{-m}}_{\in G} \stackrel{\text{Def.}}{=} (a^{-1})^m$$

$$\begin{aligned} \text{* } a^{\overbrace{m}^{\in \mathbb{Z}^-}} &= (a^{-1})^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} \stackrel{\text{a)}}{=} (a^{-m})^{-1} \\ \Rightarrow (a^m)^{-1} &= ((a^{-m})^{-1})^{-1} = a^{-m} \end{aligned}$$

ii) + iii) analog mit m oder n negativ oder positiv

3.28 Satz + Definition (Ordnung, zyklische Gruppe)

G endliche Gruppe, $g \in G$.

i) Es gibt eine kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$. n heißt Ordnung $\mathcal{O}(g)$ von g .

ii) $\{g^0 = e, g^1, g^2, \dots, g^{n-1}\} \leq G$ und heißt die von g erzeugte zyklische Gruppe $\langle g \rangle$.

iii) $g^{|G|} = e$

Beweis

$$\begin{aligned} \text{i) } G \text{ endlich} &\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} : g^i = g^j \text{ und } i > j \\ &\Rightarrow g^{\overbrace{i-j}^{\in \mathbb{N}}} = g^i g^{-j} = \underbrace{g^i}_{=g^j} (g^j)^{-1} = e \end{aligned}$$

Wähle $n = \min\{k \in \mathbb{N} | g^k = e\}$.

- ii)
 - $\langle g \rangle$ abgeschlossen, da $g^m \cdot g^k = g^{m+k} \in \langle g \rangle$
 - $g^0 = e \in \langle g \rangle$
 - $(g^m)^{-1} = g^{-m} = \underbrace{g^n}_e \cdot g^{-m} \in \langle g \rangle$
- iii) Lagrange: $n \mid |G| \Rightarrow n \cdot k = |G|$ für ein $k \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow g^{|G|} = g^{nk} = \underbrace{(g^n)^k}_e = e^k = e$

□

3.29 Bemerkung

Eine endliche Gruppe heißt zyklisch, falls sie von einem Element erzeugt wird.

Beispiel

- (\mathbb{Z}_n, \oplus) zyklisch, da $1 \in \mathbb{Z}_n$ und $1^2 = 1 + 1 = 2$, $1^3 = 1 + 1 + 1 = 3$, ..., $1^n = (1^{n-1}) \cdot 1 = (n-1) + 1 = n$ und $n \equiv 0 \pmod{n}$
 \mathbb{Z}_n hat Ordnung n , da $1^n = 0$
- Drehungen, die ein regelmäßiges n -Eck in sich selbst überführen, sind zyklisch:
 $(ABC)^0 = id$, $(ABC) = (ABC)$, $(ABC)^2 = (ACB)$, $(ABC)^3 = id$
 $\langle (ABC) \rangle = \{id, (ABC), (ACB)\} \leq \mathcal{S}_3$
- \mathcal{S}_3 oder V_4 nicht zyklisch.

3.30 Korollar

- i) Satz von Euler:
 $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $\text{ggT}(a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$
- ii) Kleiner Satz von Fermat:
 p Primzahl, $a \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Beweis

Wir können annehmen, dass $1 \leq a < n$, denn
$$a^{\varphi(n)} \bmod n = \underbrace{(a \bmod n)^{\varphi(n)}}_{\{1, \dots, n-1\}} \bmod n$$

$\Rightarrow a \in \mathbb{Z}_n^*$

\mathbb{Z}_n^* endliche Gruppe $\Rightarrow a^{\overbrace{|\mathbb{Z}_n^*|}^{\varphi(n)}} \equiv 1 \pmod{n}$
ii) Folgt aus i) für $n = p$, $\varphi(p) = p - 1$

□

4 Ringe und Körper

Grundlegende Eigenschaften

4.1 Definition (Ring)

Sei $\mathcal{R} \neq \emptyset$ eine Menge mit 2 Verknüpfungen $+$ und \cdot .

i) Man nennt $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ einen Ring, wenn gilt:

1) $(\mathcal{R}, +)$ ist abelsche Gruppe mit Neutralelement 0 und Inverse $-a$ von a .

2) (\mathcal{R}, \cdot) ist abgeschlossen und assoziativ (Halbgruppe).

3) Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = ab + ac$
 $(a + b) \cdot c = ac + bc \quad \forall a, b, c \in \mathcal{R}$

29.11.2016

ii) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ heißt kommutativ, falls ' \cdot ' zusätzlich kommutativ ist

iii) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ heißt Ring mit Eins, falls es bezüglich ' \cdot ' ein Neutralelement 1 gibt mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \forall a \in \mathcal{R}$.

iv) Ist $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ Ring mit Eins, so heißen die bezüglich ' \cdot ' invertierbaren Elemente Einheiten.

Bezeichnung:

- a^{-1} Inverse von a bzgl. ' \cdot '
- $\mathcal{R}^* :=$ Menge aller Einheiten in \mathcal{R}

4.2 Beispiel

a) Trivialer Ring $(\{0\}, +, 0)$

b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins.

Einheiten: $1, -1 \Rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}}_{\text{kein Ring!}}$

Ebenso $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

mit $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Ring, kommutativ, ohne Eins

d) $n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ kommutativer Ring mit Eins

e) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins: (\cdot und $+$ Komponentenweise)

Bemerkung: $\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_n$ Ringe $\Rightarrow \mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_n$ Ring

f) $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (für $n \geq 2$) Ring mit Eins ($= E_n$). Nicht kommutativ!

4.3 Satz (Rechenregeln für Ringe)

$(\mathcal{R}, +, \cdot)$ Ring, $a, b, c \in \mathcal{R}$

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

ii) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$

iii) $(-a)(-b) = ab$

Beweis

i) Es ist $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$

$$\begin{array}{lcl} \text{Addiere } -a \cdot 0 : & a \cdot 0 - a \cdot 0 & = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 \\ & \Leftrightarrow & 0 = a \cdot 0 \end{array}$$

Analog: $0 = 0 \cdot a$

ii) Es ist $(-a)b + ab = \underbrace{(-a + a)}_{=0} b = 0 \cdot b \stackrel{\text{i)}}{=} 0$

$\Rightarrow (-a)b$ invers zu ab und $(-a)b = -(ab)$

Analog: $a(-b) = -(ab)$

iii) $(-a)(-b) \stackrel{\text{ii)}}{=} -(a(-b)) \stackrel{\text{ii)}}{=} -(-(ab)) = ab$

□

4.4 Bemerkung

a) \mathcal{R} Ring mit Eins $\Rightarrow 1, -1 \in \mathcal{R}^*$

Achtung! Z.B. in $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ ist $1 = -1$

b) In einem kommutativen Ring gilt der binomische Lehrsatz:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$$

c) In 4.3: Rechenregeln für Multiplikation mit additiven Inversen, z.B.: $a \cdot (-b)$

Über Addition mit multiplikativen Inversen keine Aussage möglich (z.B. keine Regel für $a^{-1} + b$).

4.5 Definition (Körper)

Ein kommutativer Ring mit Eins $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ heißt Körper, falls $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$. D.h. jedes $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ ist bezüglich ' \cdot ' invertierbar.

4.6 Beispiel

- a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper $[(\mathbb{C}, +, \cdot)$ auch]
 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper, da $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$.
- b) $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n | \text{ggT}(z, n) = 1\}$ Gruppe bezüglich ' \odot '
 $\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ Körper $\Leftrightarrow n$ Primzahl

4.7 Satz (Rechenregeln für Körper: Nullteilerfreiheit)

$(\mathcal{K}, +, \cdot)$ Körper, $a, b \in \mathcal{K}$. Dann gilt

- a) alle Rechenregeln für Ringe gelten auch für Körper
- b) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ [Gegenbeispiel: $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$, weil $2 \odot 3 = 0$]

Beweis

' \Leftarrow ' klar (Satz 4.3i))

' \Rightarrow ' $ab = 0$. Angenommen $a \neq 0 \Rightarrow b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1} \underbrace{(ab)}_{=0} \stackrel{4.3i)}{=} 0$ □

Strukturgleichheit von Ringen

4.8 Definition (Ringhomomorphismus, Ringisomorphismus)

Geg. $(\mathcal{R}, +, \cdot), (\mathcal{R}', \boxplus, \boxdot)$ Ringe

- i) $\psi : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ heißt Ringhomomorphismus, falls $\psi(x + y) = \psi(x) \boxplus \psi(y)$ und $\psi(xy) = \psi(x) \boxdot \psi(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$
- ii) Wenn ψ bijektiv ist, heißt ψ Ringisomorphismus. In diesem Fall heißen $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ isomorph (d.h. sie sind strukturgleich). Man schreibt $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$

4.9 Beispiel

a) $\psi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$

$$x \mapsto x \bmod n$$

$$x + y \rightarrow x + y \pmod{n}, \quad x \cdot y \rightarrow x \cdot y \pmod{n}$$

ψ Ringhomomorphismus

Nicht injektiv: $\psi(1) = \psi(n+1) = 1$

30.11.2016

b) $(\{w, f\}, \text{XOR}, \wedge) \cong (\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$

Boolsche Algebra, siehe PÜ

Chinesischer Restsatz

4.10 Bemerkung

Gegeben: $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$

$$\Rightarrow \underbrace{(a \bmod M)}_r \bmod m_i = a \bmod m_i \quad \forall i$$

Beweis

Z.z.: $r \equiv a \pmod{m_i}$

Division mit Rest:

$$\begin{aligned} \exists q \in \mathbb{Z} : a &= qM + r \\ &= \underbrace{\left(q \frac{M}{m_i}\right)}_{\in \mathbb{Z}, \text{ da } m_i | M} m_i + r \\ &\Rightarrow a \equiv r \pmod{m_i} \end{aligned}$$

□

4.11 Chinesischer Restsatz

Gegeben:

- $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd
- $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$
- $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

Dann existiert $0 \leq x < M$ mit

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{array} \right\} \underline{\text{Simultane Kongruenz}}$$

Beweis

Es ist $\text{ggT}(m_i, \underbrace{\frac{M}{m_i}}_{M_i}) = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$

$\xrightarrow{\text{EEA}} \exists s_i, t_i \in \mathbb{Z} : t_i m_i + s_i M_i = 1$

Setze: $e_i := s_i M_i \Rightarrow e_i \equiv \begin{cases} 1 \pmod{m_i} \\ 0 \pmod{m_j}, j \neq i \end{cases}$

$\Rightarrow x \stackrel{4.10}{=} \sum_{i=1}^n a_i e_i \pmod{M}$ ist Lösung der simultanen Kongruenz.

4.12 Beispiel

a) $m_1 = 3, m_2 = 4, m_3 = 5 \Rightarrow M = 60$

Finde $x \in [0, 60)$ mit $x \equiv \begin{cases} 2 \pmod{3} (= a_1) \\ 3 \pmod{4} (= a_2) \\ 2 \pmod{5} (= a_3) \end{cases}$

Es ist

$$\begin{aligned} - M_1 &= \frac{M}{m_1} = \frac{60}{3} = 20 \\ - M_2 &= \frac{60}{4} = 15 \\ - M_3 &= \frac{60}{5} = 12 \end{aligned}$$

EEA:

$$\begin{aligned} - 7 \cdot \overbrace{3}^{m_1} + \underbrace{(-1) \cdot \overbrace{20}^{M_1}}_{e_1} &= 1 \\ - 4 \cdot \overbrace{4}^{m_2} + \underbrace{(-1) \cdot \overbrace{15}^{M_2}}_{e_2} &= 1 \end{aligned}$$

$$- 5 \cdot \overbrace{5}^{m_3} + \underbrace{(-2) \cdot \overbrace{12}^{M_3}}_{e_3} = 1$$

$$\Rightarrow x = [2 \cdot (-20) + 3 \cdot (-15) + 2 \cdot (-24)] \bmod 60 = -133 \bmod 60 = 47$$

b) Was ist $2^{1000} \bmod \underbrace{1155}_{\substack{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \\ m_1 m_2 m_3 m_4}} ?$

1) Berechne $2^{1000} \bmod 3, 5, 7$ und 11

$$* 2^{1000} \bmod 3 = (-1)^{1000} \bmod 3 = 1 = a_1$$

$$* 2^{1000} \bmod 5 = 4^{500} \bmod 5 = (-1)^{500} = 1 = a_2$$

$$* 2^{1000} \bmod 7 = \underbrace{2^3}_{=8} \cdot 333+1 \bmod 7 = 1 \cdot 2 \bmod 7 = 2 = a_3$$

$$* 2^{1000} \bmod 11 = \underbrace{2^5}_{=32} \cdot 200 \bmod 11 = (-1)^{200} = 1 = a_4$$

$$2) \text{ Suche } 0 \leq x < 1155 \text{ mit } x \equiv \begin{cases} 1 \pmod{3} \\ 1 \pmod{5} \\ 2 \pmod{7} \\ 1 \pmod{11} \end{cases}$$

Chinesischer Restsatz: $x = 331$

4.13 Satz (Eindeutigkeit Chines. Restsatz)

Die Lösung x aus 4.11 ist eindeutig.

Beweis

Z.z.: $\psi : \mathbb{Z}_M \rightarrow \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}, \quad x \mapsto (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n)$ ist bijektiv (Ringisomorphismus)

- ψ Ringhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \psi(x \oplus y) &= \psi(x + y \bmod M) \\ &= ((x + y \bmod M) \bmod m_1, \dots, (x + y \bmod M) \bmod m_n) \\ &\stackrel{4.10}{=} (x + y \bmod m_n, \dots, x + y \bmod m_n) \\ &= \psi(x) \oplus \psi(y) \end{aligned}$$

Analog mit $\psi(x \odot y) = \psi(x) \odot \psi(y)$

- ψ surjektiv:
Zu jedem n -Tupel aus $\underbrace{\mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}}_{\ni (a_1, \dots, a_n)}$ gibt es Lösung $x \in \mathbb{Z}_M$ (4.11).
- ψ injektiv:
Da $|\mathbb{Z}_M| = |\mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}| \Leftrightarrow M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$
D.h. kein Element wird doppelt 'getroffen'

$\Rightarrow \psi$ bijektiv, also Isomorphismus □

4.14 Beispiel

Gilt $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$? Nein.

z.B. $\underbrace{\mathbb{Z}_2^* = \{1\}}_{\varphi(2)=1}, \quad \underbrace{\mathbb{Z}_4^* = \{1, 3\}}_{\varphi(4)=2}$

Aber: $\mathbb{Z}_8^* = \{1, 3, 5, 7\}$ und $4 = \varphi(8) \neq \varphi(2) \cdot \varphi(4)$

4.15 Korollar

- $M = m_1 \cdot \dots \cdot m_n$ mit m_i paarweise teilerfremd und $m_i \in M$
 $\Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot \dots \cdot \varphi(m_n)$
- Insbesondere:
 $M = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}, \quad p_i \in \mathbb{P} \text{ (Primzahl)}, \quad p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j, \quad a_i \in \mathbb{N}$
 $\Rightarrow \varphi(M) = (p_1 - 1)p_1^{a_1-1} \cdot \dots \cdot (p_k - 1)p_k^{a_k-1}$

Beweis

Wegen 4.13 ist $\mathbb{Z}_M \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_n}$ mittels ψ .

$\Rightarrow x$ Einheit $\Leftrightarrow \psi(x) = (x \bmod m_1, \dots, x \bmod m_n)$ Einheit

$\Leftrightarrow x \bmod m_i$ Einheit $\forall i \Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot \dots \cdot \varphi(m_n)$

Es ist $\varphi(p^a) = \underbrace{p^a}_{|\mathbb{Z}_{p^a}|} - \underbrace{p^{a-1}}_{\text{Vielfache von } p \text{ in } \mathbb{Z}_{p^a}} = (p-1)p^{a-1}$

a	$ \mathbb{Z}_{p^a} $	Vielfache von p	$\varphi(p^a) = \mathbb{Z}_{p^a}^* $
1	p	$0 \cdot p = 0$	$p - 1 = p^1 - p^0$
2	p^2	$k \cdot p, \quad \underbrace{0 \leq k \leq p-1}_{p \text{ Möglichkeiten}}$	$p^2 - p^1$
3	p^3	$kp + k'p^2, \quad \underbrace{0 \leq k, k' \leq p-1}_{p^2 \text{ Möglichkeiten}}$	$p^3 - p^2$

□

Polynomringe

06.12.2016

In Mathe I wurde für den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ folgendes eingeführt:

- Division mit Rest
- Erweiterter Euklidischer Algorithmus
- kgV, ggT, Primzahlzerlegung

4.16 Definition (Polynom)

\mathcal{K} - Körper mit Nullelement \mathcal{O} und Einselement 1 .

- i) Ein Polynom über \mathcal{K} ist ein Ausdruck $f = \underbrace{a_0 x^0}_{a_0} + \underbrace{a_1 x^1}_{a_1 x} + \dots + a_n x^n$ mit
 $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathcal{K}$ Koeffizienten von f (auch $f(x)$ anstatt f).
Ist $a_i = 0 \quad \forall \{1, \dots, n\}$, so schreibt man $f = 0$ (Nullpolynom)

- ii) $\mathcal{K}[x]$ = Menge aller Polynome über \mathcal{K} in einer Variablen x

- iii) $f, g \in \mathcal{K}[x]$ sind gleich, wenn gilt

- a) $f = a_0 + \dots + a_n x^n$
 $g = b_0 + \dots + b_m x^m$ mit $a_n \neq 0, b_m \neq 0$
 $\Rightarrow m = n$ und $a_i = b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$
oder
b) $f = 0$ und $g = 0$

4.17 Beispiel

- a) $f(x) = f = 3x^2 - \frac{2}{3}x + 1 \begin{matrix} \in \mathbb{Q}[x] \\ \in \mathbb{R}[x] \end{matrix}$
b) $g = x^7 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$, d.h. Koeffizienten $\in \{0, 1\}$

4.18 Satz + Definition

\mathcal{K} Körper.

$\mathcal{K}[x]$ ist kommutativer Ring mit Eins. Dabei ist für $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$,
 $g = \sum_{j=0}^m b_j x^j$

- $f + g = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) x^i$

- $f \cdot g = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)$
 $= \underbrace{a_0 \cdot b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)}_{c_1}x + \dots + \underbrace{a_nb_m}_{c_{n+m}}x^{n+m}$
mit $c_i = \sum_{k=0}^i a_k \cdot b_{i-k}$ (Faltungsprodukt)
[Anmerkung: $a_i = 0 = b_j$ für $i > n$ bzw. $j > m$]

- Einselement: $f = 1$
- Nullelement $f = 0$

$\mathcal{K}[x]$ heißt der Polynomring in einer Variablen über \mathcal{K} .

Beweis

Ringeigenschaften nachrechnen

□

4.19 Bemerkung

- $a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_nx^n$ heißen Monome
- a_nx^n heißt Leitterm von $f = a_0 + \dots + a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$

4.20 Beispiel

In $\mathbb{Z}_3[x]$:

$f = 2x^3 + 1, \quad g = x - 1 = x + 2$, da $-1 \equiv 2 \pmod{3}$

- $f + g = 2x^3 + x + \underbrace{1+2}_{\equiv 0 \pmod{3}} = 2x^3 + x$
- $f \cdot g = (2x^3 + 1)(x + 2) = 2x^4 + x + \underbrace{4x^3}_{\equiv 1 \pmod{3}} + 2 = 2x^4 + x + x^3 + 2$

Grad eines Polynoms

4.21 Definition

$f \in \mathcal{K}[x], \quad f = a_0 + \dots + a_nx^n \quad a_n \neq 0$

n heißt der Grad von f , $\text{grad}(f) = n$

$\text{grad}(0) = -\infty, \quad \text{grad}(g) = 0$, falls g konstant

4.22 Satz

\mathcal{K} Körper, $f, g \in \mathcal{K}[x]$.

$$\Rightarrow \text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

Konvention: $-\infty - \infty = -\infty = -\infty + n = -\infty$

Beweis

- Stimmt für $f = 0$ oder $g = 0$
- Angenommen die Leitterme von f bzw. g sind $a_n x^n$ bzw. $b_m x^m$ mit $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.
 $\Rightarrow \text{grad}(f) = n, \text{grad}(g) = m$ und $\underbrace{a_n \cdot b_m x^{n+m}}_{\neq 0, \text{ da } \mathcal{K} \text{ Körper (4.7)}} \text{ ist Leitterm von } f \cdot g$
 $\Rightarrow \text{grad}(fg) = n + m$ □

4.23 Korollar (Inversen in $\mathcal{K}[x]$)

$\mathcal{K}[x]^* = \{f \in \mathcal{K}[x] \mid \text{grad}(f) = 0\}$ (nur konstante Polynome $\neq 0$ invertierbar)

Beweis

$$\begin{aligned} f \cdot f^{-1} = 1 &\Rightarrow \text{grad}(ff^{-1}) = \text{grad}(f) + \text{grad}(f^{-1}) \stackrel{4.22}{=} \text{grad}(1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{grad}(f) = \text{grad}(f^{-1}) = 0 \end{aligned}$$
 □

Polynomdivision mit Rest

4.24 Bemerkung

Für $b \in \mathcal{K}$ ist $f(b) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot b^i$, falls $f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \in \mathcal{K}[x]$.

Man kann zeigen, dass $\psi_b : \mathcal{K}[x] \rightarrow \mathcal{K}$

$f \mapsto f(b)$ ein surjektiver Homomorphismus ist.

4.25 Definition

\mathcal{K} Körper, $f, g \in \mathcal{K}[x]$.

$f|g$, falls $q \in \mathcal{K}[x]$ existiert mit $f = qg$ (nach 4.22: $\text{grad}(f) \leq \text{grad}(g)$).

4.26 Satz (Division mit Rest in $\mathcal{K}[x]$)

\mathcal{K} Körper, $f \in \mathcal{K}[x], 0 \neq g \in \mathcal{K}[x]$.

Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathcal{K}[x]$ mit $f = qg + r$ und

$\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$.

Bezeichnung: $r = f \bmod g$, $q = f \text{ div } g$

Beweis

vgl. Mathe I für \mathbb{Z} , Literatur

□

4.27 Beispiel

$f = x^4 + 2x^3 - x + 2$ und $g = 3x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$

$$\begin{array}{r} (x^4 + 2x^3 - x + 2) : (3x^2 - 1) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2 - 1} \\ \underline{-x^4 \quad + \frac{1}{3}x^2} \\ 2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x \\ \underline{-2x^3 \quad + \frac{2}{3}x} \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 2 \\ \underline{-\frac{1}{3}x^2 \quad + \frac{1}{9}} \\ -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} \end{array}$$

Mit $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = q$ und $-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} = r$ (Rest).

Aufhören bei $\text{grad}(r) < \text{grad}(g)$!

4.28 Korollar

\mathcal{K} Körper, $a \in \mathcal{K}$, $f \in \mathcal{K}[x]$

$$\underbrace{(x - a)}_{\text{teilt } f \text{ restlos}} \mid f \Leftrightarrow f(a) = 0$$

07.12.2016

Beweis

$$(\Rightarrow) \exists q \in \mathcal{K}[x] : f = q(x - a) \Rightarrow f(a) = q(a) \underbrace{(a - a)}_0 = 0$$

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \text{ Division mit Rest: } f &= q(x - a) + r, \text{ grad}(r) < \text{grad}(x - a) \quad (\text{da } q \mid f) \\ &\Rightarrow \text{grad}(r) \leq 0, \text{ d.h. } r = c \neq 0 \text{ konstant oder } r = 0 \\ 0 &= f(a) = q(a) \underbrace{(a - a)}_{=0} + r(a) \Rightarrow r = 0 \end{aligned}$$

□

Euklidischer Algorithmus in $\mathcal{K}[x]$

4.29 Definition (Normiertheit)

\mathcal{K} Körper.

- i) $f = a_0 + \dots + a_n x^n \in \mathcal{K}[x]$, $a_n \neq 0$ heißt normiert, wenn $a_n = 1$
- ii) $g, h \in \mathcal{K}[x]$, g, h nicht beide 0.
 $f = \text{ggT}(g, h)$, falls $f \in \mathcal{K}[x]$ normiertes Polynom von maximalem Grad ist, das g und h teilt.
- iii) $g, h \in \mathcal{K}[x] \setminus \{0\}$.
 $f = \text{kgV}(g, h)$, falls $f \in \mathcal{K}[x]$ ein normiertes Polynom von minimalem Grad ist, das von g und h geteilt wird.

4.30 Bemerkung

- a) $g = x$, $h = x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$
 - $g|x(x+1)$, $h|x(x+1)$
 - $g|2x(x+1)$, $h|2x(x+1)$
 - $\text{kgV}(g, h) = x(x+1) = x^2 + x$, da $2x^2 + 2x$ nicht normiert!
→ Normierung macht Ergebnisse eindeutig.
- b) Normierung erfolgt, indem man durch Koeffizienten des Leitterms 'teilt':
$$f = a_n x^n + \dots + a_0 \Rightarrow a_n^{-1} \cdot f = \underbrace{x^n + \dots + a_n^{-1} a_0}_{\text{normiert}}$$
- c) $\text{kgV}(g, h)$ existiert und ist eindeutig.
 - Existenz: $g|gh$, $h|gh$ (gh gemeinsames Vielfaches)
 - Eindeutig : $f_1 = \text{kgV}(g, h)$, $f_2 = \text{kgV}(g, h)$
 $\Rightarrow g, h|f_1$ und $g, h|f_2$
 $\Rightarrow g, h|(f_1 - f_2)$
 f_1, f_2 normiert und von gleichem (minimalen) Grad.
 $\Rightarrow \text{grad}(f_1 - f_2) < \text{grad}(f_1)$
 $\Rightarrow f_1 - f_2 = 0$, denn sonst wäre $\text{kgV}(g, h) = f_1 - f_2$ zur Minimalität des Grades
 $\Rightarrow \text{kgV}$ eindeutig.
- d) $\text{ggT}(g, h)$ existiert und ist eindeutig. Beweis folgt wie in Mathe I für \mathbb{Z} aus:

4.31 Lemma von Bézout

$g, h \in \mathcal{K}[x]$ nicht beide gleich 0.
 $\Rightarrow \exists s, t \in \mathcal{K}[x] : sg + th = \text{ggT}(g, h)$

Beweis

Siehe 4.33 (EEA).

Beweis Eindeutigkeit von ggT

$f = \text{ggT}(g, h), \quad f' = \text{ggT}(g, h)$
 $(f, f'$ Funktionen desselben Grades und normiert)
 $\Rightarrow \exists s', t' \in \mathcal{K}[x] : f' = s' \cdot g + t' \cdot h$

$f|g \wedge f|h \Rightarrow f|f'$
 $\Rightarrow \exists q \in \mathcal{K}[x] : f' = qf$
 $\Rightarrow \text{grad}(f') = \text{grad}(q) + \text{grad}(f)$

$\text{grad}(f) = \text{grad}(f') \Rightarrow \text{grad}(q) = 0$
 $\text{grad}(q) = 0 \Rightarrow q = c \neq 0, \quad c \in \mathcal{K}$
 $\Rightarrow f' = cf$
 f, f' normiert $\Rightarrow c = 1$

□

4.32 Satz: Euklidischer Algorithmus EA in $\mathcal{K}[x]$

Eingabe: $g, h \in \mathcal{K}[x]$, nicht beide gleich 0

```

1: if  $h = 0$  then
2:    $y := g$ 
3: end if
4: if  $h|g$  then
5:    $y := h$ 
6: end if
7: if  $h \neq 0 \wedge h \nmid g$  then
8:    $x := g, \quad y := h$ 
9:   while  $(x \bmod y) \neq 0$  do
10:     $r := x \bmod y$ 
11:     $x := y, \quad y := r$ 
12:   end while

```

13: **end if**
 14: $d := a_n^{-1}y$ (Normierung von y , siehe 4.30)
Ausgabe: $d = \text{ggT}(g, h)$

Beweis

Wie für \mathbb{Z} in Mathe I.

Hinweis: $d|g$ und $d|h \Leftrightarrow d|(g \bmod h)$ und $d|h$.

Begründung: $g = qh + (g \bmod h)$.

4.33 Satz: Erweiterter Euklidischer Algorithmus EEA in $\mathcal{K}[x]$

Eingabe: $g, h \in \mathcal{K}[x]$, nicht beide gleich 0

```

1: if  $h = 0$  then
2:    $y := g, \quad s := 1, \quad t := 0$ 
3: end if
4: if  $h|g$  then
5:    $y := h, \quad s := 0, \quad t := 1$ 
6: end if
7: if  $h \neq 0 \wedge h \nmid g$  then
8:   while  $(x \bmod y) \neq 0$  do
9:      $q := x \text{ div } y, \quad r := x \bmod y$ 
10:     $s := s_1 - qs_2, \quad t := t_1 - qt_2$ 
11:     $s_1 := s_2, \quad s_2 := s$ 
12:     $t_1 := t_2, \quad t_2 := t$ 
13:     $x := y, \quad y := r$ 
14:   end while
15: end if
16:  $d := a_n^{-1}y$  (Normierung von  $y$ , siehe 4.30)
17:  $s := a_n^{-1}s, \quad t := a_n^{-1}t$  (Normierung von  $s, t$ , siehe 4.30)
Ausgabe:  $d = \text{ggT}(g, h), \quad s, t$  für  $\text{ggT}(g, h) = sh + tg$ 

```

4.34 Beispiel

$g = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1, \quad h = x^3 + 2x^2 + 2$		$g, h \in \mathbb{Z}_3[x]$							
x	y	s_1	s_2	s	t_1	t_2	t	q	r
g	h	1	0		0	1			
h	$x^2 + x$	0	1	1	1	$2x + 1$	$2x + 1$	$x + 2$	$x^2 + x$
$x^2 + x$	$\underbrace{2x + 2}_{\text{ggT unnormiert}}$	1	$2x + 2$	$2x + 2$	$2x + 1$	x^2	x^2	$x + 1$	$2x + 2$

NR: (Achtung: Polynomdivision in $\mathbb{Z}_3[x]$, nicht normale Polynomdivision!)

- $$\begin{array}{r} (x^4 + x^3 + 2x^2 + 1) : (x^3 + 2x^2 + 2) = \overbrace{x + 2}^q \\ \underline{-x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x} \\ 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\ \underline{-2x^3 - x^2 - 1} \\ x^2 + x \end{array} \quad (= r)$$

- $$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 + 2) : (x^2 + x) = x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ x^2 + 2 \\ \underline{-x^2 - x} \\ 2x + 2 \end{array} \quad (= r)$$

- $$t = 1 - (x + 1)(2x + 1) = 1 - (2x^2 + 1) = x^2$$

- $$\begin{array}{r} (x^2 + x) : (2x + 2) = 2^{-1}x \\ \underline{-x^2 - x} \\ 0 \end{array}$$

- Normierung von y:

$$\begin{aligned} d &= a_n^{-1}y = 2^{-1}(2x + 2) \\ &= x + 1 \\ s &= 2^{-1}(2x + 2) = x + 1 \\ t &= 2^{-1} \cdot x^2 = 2x^2, \text{ da } 2^{-1} = 2 \end{aligned}$$

- Probe:

$$\begin{aligned}
 d = sg + th &= (x+1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 1) + (2x^2)(x^3 + 2x^2 + 2) \\
 &= x^5 + x^4 + 2x^3 + x + x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 + 2x^5x^4 + x^2 \\
 &= 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 \\
 &= 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1 \\
 &= x + 1 = \text{ggT}(g, h)
 \end{aligned}$$

Primelemente in $\mathcal{K}[x]$

Primelemente sind Polynome, die sich nicht als Produkt von zwei Polynomen vom Grad ≥ 1 darstellen lassen. So ist z.B. $2x^2 + 2x = 2x(x+1)$ kein Primelement, jedoch sind die Faktoren $2x$ und $x+1$ Primelemente.

4.35 Definition (Primelemente = irreduzible Polynome)

13.12.2016

$p \in \mathcal{K}[x]$ mit $\text{grad}(p) \geq 1$ heißt irreduzibel, falls gilt:

$$\forall f, g \in \mathcal{K}[x] : p = f \cdot g \text{ ist } \text{grad}(f) = 0 \text{ oder } \text{grad}(g) = 0$$

4.36 Beispiel

a) $x+1, 2x \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel.

Allg.: $ax+b$ ($a \neq 0$) irreduzibel in $\mathcal{K}[x]$

b) $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel:

$$\text{Angenommen nicht, dann } x^2 - 2 = \underbrace{(ax+b)}_{\text{Nullstelle: } -\frac{b}{a}} \underbrace{(cx+d)}_{\text{Nullstelle: } -\frac{d}{c}} \quad (a, c \neq 0)$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \text{ hat auch Nullstelle } -\frac{b}{a} \in \mathbb{Q} \nmid$$

Widerspruch: Nullstelle von $x^2 - 2$ sind aus \mathbb{R}

c) $x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$ nicht irreduzibel:

$$x^2 - 2 = \underbrace{(x\sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]} \cdot \underbrace{(x + \sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]}$$

d) $x^2 + 1$ hat in \mathbb{R} keine Nullstelle und ist somit irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.

Anmerkung: In $\mathbb{C}[x]$ ist $x^2 + 1$ kein Primelement (siehe Kapitel 5)

e) $x^2 + 1 = (x+2)(x+3)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$

\rightarrow nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}_5[x]$

4.37 Satz

$f \in \mathcal{K}[x]$, $\text{grad}(f) \geq 1$. Dann sind äquivalent:

- (1) f irreduzibel
- (2) $g, h \in \mathcal{K}[x], f|g \cdot h \Rightarrow f|g \vee f|h$

Beweis

(1) \Rightarrow (2)

Angenommen $f \nmid g \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \text{ggT}(f, g) = 1$
 $\stackrel{\text{Bézout}}{\Rightarrow} \exists s, t \in \mathcal{K}[x] : sf + tg = 1$
 $\Rightarrow sfh + tgh = h$
 Wissen: $f|fsh$ und $f|tgh$ ($f|gh$ Voraussetzung von (2))
 $\Rightarrow f|h$

(2) \Rightarrow (1)

Angenommen $f = gh$. Zeigen: $\text{grad}(h) = 0$.

$$f = gh \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f|g \vee f|h \quad \text{O.B.d.A: } f|g$$

$$\Rightarrow \text{grad}(f) \underset{f|g}{\leq} \text{grad}(g) \underset{h \neq 0}{\leq} \text{grad}(h) + \text{grad}(g) = \text{grad}(\underbrace{h \cdot g}_{=f})$$

(damit müssen also alle ' \leq ' sein: ' $=$ ')
 $\Rightarrow \text{grad}(h) = 0$

□

4.38 Korollar

$f \in \mathcal{K}[x]$, $\text{grad}(f) = n \geq 1$. Dann:

- 1) f hat höchstens n Nullstellen $a_1, \dots, a_k \in \mathcal{K}$
- 2) $f = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_k) \cdot \bar{f}$ mit $\text{grad}(\bar{f}) = \text{grad}(f - k)$.
 $[f \text{ normiert}, k = n \Rightarrow f = (x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_n)]$

Beweis

$n = 1$: $f = ax + b$ hat Nullstelle $-a^{-1}b$

$n > 1$: Hat f keine Nullstelle, so fertig. Sonst:

Sei a Nullstelle $\Rightarrow f = (x - a)g$, $\text{grad}(g) = n - 1$.

Sei $b \neq a$ weitere Nullstelle $\Rightarrow (x - b)|(x - a)g$

$x - b$ irreduzibel, $(x - b) \nmid (x - a) \Rightarrow (x - b)|g$

$\Rightarrow b$ Nullstelle von g

Per Induktion hat g $n - 1$ Nullstellen. Behauptung folgt. \square

4.39 Satz

$f \in \mathcal{K}[x]$ mit Leitterm $a_n x^n$, $n \geq 1$

\Rightarrow Es existieren eindeutig bestimmte irreduzible Polynome p_1, \dots, p_l und $m_1, \dots, m_l \in$

\mathbb{N} mit $f = a_n p_1^{m_1} \cdot \dots \cdot p_l^{m_l}$

Beweis

Wie in \mathbb{Z} . \square

4.40 Bemerkung

$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ Körper $\Leftrightarrow n$ Primzahl

Analog in $\mathcal{K}[x]$:

Sei $f \in \mathcal{K}[x]$, $\text{grad}(f) = n$

$(\mathcal{K}[x]_n, +, \odot_f)$ mit

- $\mathcal{K}[x]_n := \{g \in \mathcal{K}[x] \mid \text{grad}(g) < n\}$
- $g \odot_f h = (g \cdot h) \bmod f$

ist kommutativer Ring mit Eins.

$$\mathcal{K}[x]_n^* = \{g \in \mathcal{K}[x]_n \mid \text{ggT}(g, f) = 1\}$$

Man kann zeigen:

- a) $\mathbb{Z}_p[x]_n$ Körper der Ordnung $p^n \Leftrightarrow f$ irreduzibel, p Primzahl.
- b) Jeder endliche Körper hat Primzahlpotenzordnung und ist durch seine Ordnung bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.

5 Komplexe Zahlen

Problem (16 Jhdt.):

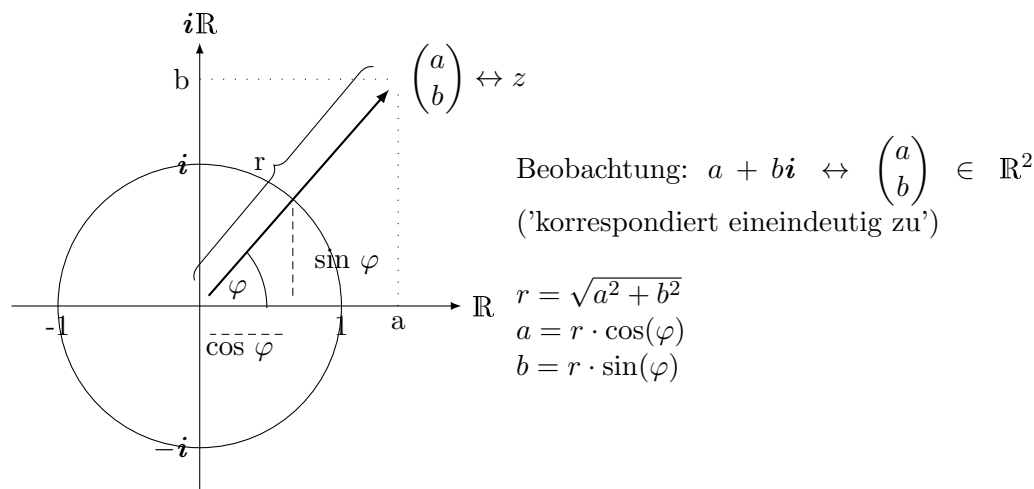
- Gleichungen wie z.B. $x^2 = -1$ haben keine reelle Lösung. Dagegen hat $x^2 = -1$ imaginäre Lösungen ('imaginaires' - Descartes) $x_{1/2} = \pm\sqrt{-1}$
- $x^4 = 1$ hat zwei reelle Lösungen $x = \pm 1$ und zwei imaginäre Lösungen $x = \pm\sqrt{-1}$
- $x^2 + 2x + 2$ hat die imaginären Lösungen $-1 \pm \sqrt{-1}$

5.1 Definition

- $i := \sqrt{-1}$ heißt imaginäre Einheit (Euler 1777)
- $\mathbb{C} := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ Menge der komplexen Zahlen
- Für $z = a + bi$ heißt $\operatorname{Re}(z) := a$ Realteil von z und $\operatorname{Im}(z) := b$ Imaginärteil von z

Gaußsche Zahlenebene und Polarkoordinaten

5.2 Gaußsche Zahlenebene (1831)



Daraus ergibt sich die Darstellung in Polarkoordinaten:

$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \text{ bzw. } (r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$$

$$\Rightarrow a + bi = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

5.3 Definition

14.12.2016

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ der Betrag von z .

5.4 Bemerkung

Jede Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich durch den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ und durch den Betrag $|z|$ eindeutig darstellen: $z = |z| \underbrace{(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))}_{e^{i\varphi}}$

5.5 Formel von Euler

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

Beweisidee (später mit Taylorreihen)

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!}}_{\text{später: } e^{i\varphi}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(\varphi), \text{ gerade } k} + i \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(\varphi), \text{ ungerade } k}$$

Anmerkung: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = i^0 = 0$
 $\Rightarrow \langle i \rangle$ zyklische Gruppe der Ordnung 4

5.6 Bemerkung

Damit ergibt sich für $z \in \mathbb{C}$ die Darstellung $z = |z|e^{i\varphi}$, φ wie in Abbildung 5.2

5.7 Bemerkung

$e^{i\varphi}$ liegt für $\varphi \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis, d.h. $\varphi \rightarrow e^{i\varphi}$ ist Kreisfunktion. Für Frequenzanalyse (Fourierreihen):

$t \dots$ Zeit, $\omega \in \mathbb{Z} \dots$ Frequenz.

Dann beschreibt $e^{i(t \cdot 2\pi)\omega}$ eine Schwingung, z.B.:

- $\omega = 1$: in einer Zeiteinheit (ZE) wird Einheitskreis 1 mal durchlaufen
- $\omega = k$: in einer ZE wird Einheitskreis k mal durchlaufen

Verknüpfungen auf \mathbb{C}

- 1) $(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R}^2, +)$, d.h. $(a + bi)(a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$ (Vektoraddition)

- 2) Wie wählt man Multiplikation, so daß \mathbb{C} Körper wird?

Man möchte, dass Potenzregel gilt, z.B:

$$e^{i\varphi} \cdot e^{i\varphi'} = e^{i(\varphi+\varphi')} \Leftrightarrow$$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')$$

Damit scheidet die komponentenweise Multiplikation aus. Mit den üblichen Rechenregeln aus \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} & (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \\ & \underbrace{\cos \varphi \cos \varphi' - \sin \varphi \sin \varphi'}_{\cos(\varphi+\varphi')} + i \underbrace{(\sin \varphi \cos \varphi' + \cos \varphi \sin \varphi')}_{\sin(\varphi+\varphi')} \end{aligned}$$

Für $z = a + bi = |z|e^{i\varphi}$ und SKIZZE

$z' = a' + b'i = |z'|e^{i\varphi'}$ ist das Produkt SKIZZE

$zz' = |z||z'|e^{i\varphi'} = |z||z'|e^{i(\varphi+\varphi')}$ eine SKIZZE

Drehstreckung des Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ SKIZZE

- 3) Die Inverse einer Drehstreckung $re^{i\varphi}$ ist dann eine Stauchung $\frac{1}{r}$ verknüpft mit einer Drehung um $-\varphi$:

$$z = re^{i\varphi} \Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}, \text{ da } zz^{-1} = r\frac{1}{r}e^{i(\varphi-\varphi)} = 1 \cdot e^0 = 1$$

In der Schreibweise $z = a + bi, \quad z' = a' + b'i$ ergibt sich:

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + ba')i, \text{ denn}$$

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad a' = r' \cos \varphi', \quad b' = r' \sin \varphi'.$$

Für $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ist die Inverse

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2-i^2b^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

5.8 Definition

Falls $z = a + bi \in \mathbb{C}$, heißt $\bar{z} := a - bi$ die zu z Konjugierte.

5.9 Bemerkung

- Es folgt $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ SKIZZE
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ SKIZZE

5.10 Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit

- $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$ und
- $(a + bi)(a' + b'i) = aa' - bb' + (ab' + a'b)i$

ist ein Körper.

Nullelement: $\mathcal{O} = 0 + 0i$

Einselement: $1 = 1 + 0i$

Beweis

Nachrechnen. □

Beispiel

- $(1 + i) = \sqrt{2}e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$
- $(2 + i)(3 - 4i) = 6 + 4 + (3 - 8)i = 10 - 5i$
- $\frac{i+1}{2i-1} = \frac{(i+1)(2i+1)}{\underbrace{(2i-1)(2i+1)}_{\bar{z}}} = \frac{1-2+i(2+1)}{2^2+1^2} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

5.11 Rechenregeln (Konjunktion, Betrag)

$w, z \in \mathbb{C}$

- a) $\overline{w \pm z} = \overline{w} \pm \overline{z}$
 $\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$
 $\overline{\overline{z}} = z$
 $\Rightarrow z \mapsto \bar{z}$ Körperisomorphismus
- b) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- c) $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (positive Definitheit)
- d) $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$
- e) $|wz| = |w| \cdot |z|$
- f) $|w + z| \leq |w| + |z|$ Dreiecksungleichung
 $|w - z| \geq ||w| - |z||$ (Beweis: Übung)

5.12 Bemerkung

a) Alternative Konstruktion von \mathbb{C} :

4.40: $\mathcal{K}[x]_n$ wird Körper, wenn man durch irreduzibles Polynom f vom Grad n teilt (Modulorechnung).

Mit $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$, $f = x^2 + 1$ ist

$$\begin{aligned}(a + bx) \odot_f (a' + b'x) &= aa' + bb'x^2 + (ab' + ba')x \mod f \\ &= (aa' - bb') + (ab' + ba')x\end{aligned}$$

Statt x schreibt man \mathbf{i} , $\mathbf{i}^2 = -1$

b) $x^2 + 1 = (x - \mathbf{i})(x + \mathbf{i})$ ist nicht irreduzibel in $\mathbb{C}[x]$.

Tatsächlich besitzt in \mathbb{C} jede quadratische Gleichung 2 Lösungen.

Allgemein: Fundamentalsatz der Algebra:

$f \in \mathbb{C}[x]$, $a_n x^n$ Leitterm, $n \geq 1$.

$\Rightarrow f$ hat genau n Nullstellen b_1, \dots, b_n (nicht notw. verschieden) mit

$$f = a_n(x - b_1) \cdot \dots \cdot (x - b_n)$$

Das heißt, lineare Polynome $ax + b$ mit $a \neq 0$ sind die einzigen Primelemente in $\mathbb{C}[x]$.