Mathematik III

Marius Hobbhahn, Florian Friedrich

29. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorräume **5**

1.1 Definition (Reelle Vektorräume) 5
1.2 Beispiel 5
1.3 Lemma 6
1.4 Definition (Untervektorraum) 7
1.5 Beispiel 7
1.6 Satz (Unterraumkriterium) 8
1.7 Beispiel 8
1.8 Satz 11
1.9 Bemerkung 11
1.10 Beispiel 12
1.11 Beispiel 12
1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem) 14
1.13 Bemerkung 15
1.14 Definition (Lineare Unabhängigkeit) 16
1.15 Beispiel 16
1.16 Satz 17
1.17 Satz 18
1.18 Definition (Basis) 19
1.19 Beispiel 19
1.20 Satz (Existenz von Basen) 19
1.21 Satz (Austauschlemma) 20
1.22 Satz (Steinitz'scher Austauschsatz) 21
1.23 Korollar 21
1.24 Satz 22
1.25 Definition (Dimension) 22
1.26 Korollar 23
1.27 Beispiel 23
1.28 Satz (Dimensionssatz) 24
1.29 Bemerkung (Koordinaten) 26

2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme **27**

2.1 Beispiel 27
2.2 Definition (Matrix) 27
2.3 Bemerkung 28
2.4 Beispiel: 29

2.5 Bemerkung . . . 30
2.6 Satz . . . 30
2.7 Beispiel (Folien 02.11.2016) . . . 31
2.8 Definition (Matrixprodukt) . . . 31
2.9 Beispiel . . . 31
2.10 Satz + Definition . . . 32
2.11 Beispiel . . . 32
2.12 Definition (Matrizentransponierung) . . . 32
2.13 Beispiel . . . 33

3 Gruppen **34**
3.1 Beispiel (Wiederholung zu Permutationen) . . . 34
3.2 Definition (Permutation) . . . 34
3.3 Beispiel . . . 34
3.4 Bemerkung . . . 34
3.5 Beispiel . . . 35
3.6 Bemerkung . . . 35
3.7 Beispiel . . . 36
3.8 Definition (Grundbegriffe) . . . 36
3.9 Definition (Gruppe) . . . 37
3.10 Beispiel . . . 37
3.11 Satz . . . 38
3.12 Beispiel . . . 39
3.13 Satz (Eigenschaften von Gruppen) . . . 41
3.14 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen) . . . 41
3.15 Definition (Untergruppe) . . . 42
3.16 Beispiel . . . 42
3.17 Beispiel . . . 42
3.18 Satz + Definition (Rechtsnebenklasse, Repräsentant) . . . 43
3.19 Beispiel . . . 44
3.20 Kriterium . . . 44
3.21 Definition (Wohldefiniertheit) . . . 44
3.22 Beispiel . . . 44
3.23 Satz (Faktorengruppe/Quotientengruppe) . . . 44
3.24 Lemma . . . 45
3.25 Theorem (Lagrange) . . . 45
3.26 Definition . . . 45
3.27 Satz . . . 46

3.28 Satz + Definition (Ordnung, zyklische Gruppe) 46
3.29 Bemerkung 47
3.30 Korollar 47

4 Ringe und Körper 49
4.1 Definition (Ring) 49
4.2 Beispiel 49
4.3 Satz (Rechenregeln für Ringe) 50
4.4 Bemerkung 50
4.5 Definition (Körper) 51
4.6 Beispiel 51
4.7 Satz (Rechenregeln für Körper: Nullteilerfreiheit) 51
4.8 Definition (Ringhomomorphismus, Ringisomorphismus) 51
4.9 Beispiel 52
4.10 Bemerkung 52
4.11 Chinesischer Restsatz 52
4.12 Beispiel 53
4.13 Satz (Eindeutigkeit Chines. Restsatz) 54
4.14 Beispiel 55
4.15 Korollar 55
4.16 Definition (Polynom) 56
4.17 Beispiel 56
4.18 Satz + Definition 56
4.19 Bemerkung 57
4.20 Beispiel 57
4.21 Definition 57
4.22 Satz 58
4.23 Korollar (Inversen in $\mathcal{K}[x]$) 58
4.24 Bemerkung 58
4.25 Definition 58
4.26 Satz (Division mit Rest in $\mathcal{K}[x]$) 58
4.27 Beispiel 59
4.28 Korollar 59
4.29 Definition (Normiertheit) 60
4.30 Bemerkung 60
4.31 Lemma von Bézout 61
4.32 Satz: Euklidischer Algorithmus EA in $\mathcal{K}[x]$ 61
4.33 Satz: Erweiterter Euklidischer Algorithmus EEA in $\mathcal{K}[x]$ . . . 62

4.34 Beispiel . . . 63
4.35 Definition (Primelemente = irreduzible Polynome) . . . 64
4.36 Beispiel . . . 64
4.37 Satz . . . 65
4.38 Korollar . . . 65
4.39 Satz . . . 66
4.40 Bemerkung . . . 66

5 Komplexe Zahlen 67
5.1 Definition . . . 67
5.2 Gaußsche Zahlenebene (1831) . . . 67
5.3 Definition . . . 68
5.4 Bemerkung . . . 68
5.5 Formel von Euler . . . 68
5.6 Bemerkung . . . 68
5.7 Bemerkung . . . 68
5.8 Definition . . . 69
5.9 Bemerkung . . . 70
5.10 Satz . . . 70
5.11 Rechenregeln (Konjunktion, Betrag) . . . 71
5.12 Bemerkung . . . 71

6 Lineare Abbildungen 75
6.1 Definition . . . 75
6.2 Bemerkung . . . 75
6.3 Beispiel . . . 76
6.4 Bemerkung . . . 76
6.5 Definition . . . 77
6.6 Satz . . . 77
6.7 Satz . . . 77
6.8 Definition . . . 78
6.9 Satz . . . 78
6.10 Beispiel . . . 79
6.11 Satz . . . 79
6.12 Beispiel . . . 80

1 Vektorräume

Bemerkung: 1.1-1.10 identisch mit 8.1-8.10 aus Mathematik 2, SS16

1.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben, $v, w, x, y, ...$), auf der eine Addition $+$ definiert ist, $+ \colon V \times V \to V$; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, ...$), $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V$, so dass gilt:

(1.1) $u + v + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in V$

(1.2) Es existiert ein Vektor $\mathcal{O} \in V$ ('Nullvektor') mit $v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \qquad \forall v \in V$

(1.3) Zu jedem $v \in V$ existiert ein Vektor $-v \in V$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$

(1.4) $u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als '$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe').

(2.1) $\overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.2) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

(2.3) $\overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.4) $1 \cdot v = v \qquad \forall v \in V$

1.2 Beispiel

a) trivialer Vektorraum Nullraum: $V = \{\mathcal{O}\}$
Es gilt $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}, \quad \lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R}^n$, Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge n über $\mathbb{R}$, Elemente haben die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

c) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Vektoren: reelle Zahlen.
Skalare: reelle Zahlen.
$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:
$M \neq \emptyset$ Menge. $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) := \{f \colon M \to \mathbb{R}\}$
Menge der auf M definierten reellen Funktionen.
Für $f, g \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ sei

- $f + g \colon M \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$
- $\lambda \cdot f \colon M \to \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$

Dann ist V mit $\mathbb{R}, +, \cdot$ ein Vektorraum. Nullvektor ist $f = 0 \colon M \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \quad \forall x \in M$.
(kurz: $f \equiv 0$, identisch Null)

1.3 Lemma

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

a) $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b) $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem $v \in V$ ist der Vektor $-v$ aus (1.3) in 1.1 eindeutig bestimmt.

d) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis

a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &\overset{(1.3)}{=} \underbrace{\overbrace{0 \cdot v}^{x}}_{} + \overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x} = \underbrace{(0+0)}_{}v + (-0 \cdot v) \\
&\overset{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) \\
&\overset{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 \cdot v + (-0 \cdot v)) \\
&\overset{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O} \\
&\overset{(1.2)}{=} 0 \cdot v
\end{aligned}$$

b) Wie a), starte mit $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$, erhalte $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\begin{aligned} \underbrace{v + (-1 \cdot v)} &= 1 \cdot v + (-1 \cdot v) \\ &\overset{(2.1)}{=} (1 + (-1))v \\ &= 0 \cdot v \\ &\overset{a)}{=} \mathcal{O} \\ &\overset{(1.3)}{=} v + (-v) \end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $-v$:

$$\underbrace{v + (-1)v} + (-v) = v + (-v) + (-v)$$

$$\Rightarrow -1 \cdot v = -v$$

c) Angenommen, zu $v \in V$ gibt es $-v$ und $-v'$ mit $v+(-v) = \mathcal{O}$ und $v+(-v') = \mathcal{O}$. Dann ist $v + (-v) = v + (-v') \overset{+(-v)\text{auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

$\square$

1.4 Definition (Untervektorraum)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $\quad U \neq \emptyset$ heißt Unter(vektor)raum von V, falls U bezüglich der Addition auf V und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

1.5 Beispiel

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ist Unterraum von V

b) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ ist kein Unterraum von V, z.B. (1.2) ist verletzt, Addition funktioniert auch nicht: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$

c) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum von V (prüfe alle Eigenschaften von Definition 1.1) $\rightarrow$ umständlich, einfacher geht es mit Definition 1.6

1.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $\emptyset \neq U \subseteq V$.
Dann ist U Unterraum von V genau dann, wenn gilt ($\Leftrightarrow$):

(1) $v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$

(2) $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$

(oder äquivalent: $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$)
Man sagt: U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

Beweis

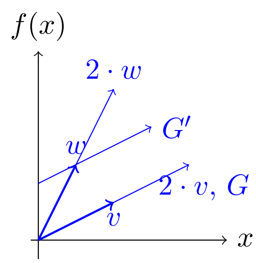
$\Rightarrow$ ist klar, da U laut Definition 1.4 selbst Vektorraum

$\Leftarrow$ rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 1.1, also z.B. $\mathcal{O} \in U$,...)

$\square$

1.7 Beispiel

a)
V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{O} \neq v \in V$.
Dann ist $G = \{\lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum.
$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: G ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.
$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Aber: $G' = \{w + \lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}, \quad w \in V\}$ ist kein Unterraum für $w \neq \mu \cdot v, \quad \mu \in \mathbb{R}$.
Warum? Z.B. $\mathcal{O} \notin G'$



b) $V = \mathbb{R}^3, \qquad U_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ ist Unterraum. Wir zeigen (1), (2) aus 1.6:

- $U_1 \neq \emptyset$, z.B. $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$, denn $\overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist $\lambda \cdot v \in U_1$? $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, $\quad w_1 + w_2 - w_3 = 0$. Gilt $v + w \in U_1$? $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also $v + w \in U_1$

- Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

D.h. U_1 ist die Ebene durch $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $U_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ ist kein Unterraum. Z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \notin U_2$: $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.

Anderes Argument: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$, d.h. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Gilt $\lambda \cdot x \in U_2$? $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda = 1}_{\text{nur für } \lambda=1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nicht erfüllt für $\lambda \neq 1$.
Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $U_3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ ist kein Unterraum, z.B.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \qquad 1^2 + 0^2 +^2 \leq 1 \quad \checkmark$, aber

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$, denn $2^2 + 0^2 + 0^2 \not\leq 1$
Geometrische Interpretation:

U_3 ist eine Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 1

e) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall
Menge $C(I)$ (C: continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf I ist Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 1.2d)).
Menge der diffbaren Funktionen auf I ist Unterraum von $C(I)$.

1.8 Satz

V ist ein $\mathbb{R}$.Vektorraum, U_1, U_2 sind Unterräume von V.

a) $U_1 \cap U_2 = \{u \in V | u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$ ist Unterraum von V.

b) $U_1 + U_2 \coloneqq \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$ Summe von U_1, U_2 ist Unterraum von V
(das ist nicht die Vereinigung $U_1 \cup U_2$!)

Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 1.6

a) Übung: Prüfe $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$? ✓, (1), (2)

b)
- $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$
- Seien $v = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U_1, \quad u_2 \in U_2$ und
$w = u_1' + u_2', \quad u_1' \in U_1, \quad u_2' \in U_2$,
also $v, w \in U_1 + U_2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \lambda v + \mu v &= \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u_1' + u_2') \\ &= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u_1'}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u_2'}_{\in U_2} \qquad \in U_1 + U_2 \end{aligned}$$

1.9 Bemerkung

a) lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten

b) lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten

- $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum

1.10 Beispiel

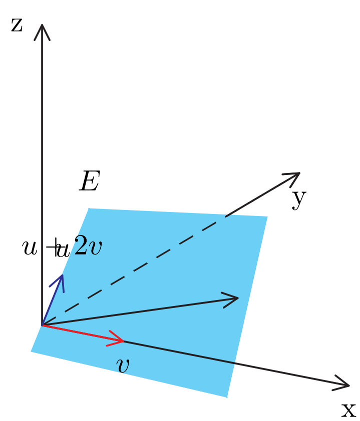
- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad G_1 = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad G_2 = \{\mu w | \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 1.7a), Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Unterräume

- $G_1 + G_2$ ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$ ist $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1.11 Beispiel

18.10.16



- $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $E = \{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

- E $\subseteq \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum (UVR) und wird <u>aufgespannt/erzeugt</u> von u und v. Man nennt $\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ <u>Erzeugendensystem</u> von E.
- D.h. $w \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : w = \underbrace{\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v}_{\text{Linearkombination von } u \text{ und } v}$

- $w \notin E$, z.B. $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Letzte Zeile: } 1 = \lambda_1 \\ \text{Zweite Zeile: } 0 = \lambda_1 \end{array}\right\} \lightning$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

Fortsetzung Bsp. 1.11

(Nachtrag vom 19.10.2016)

a) $E = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

b) $\mathbb{R}^n$ wird erzeugt von $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei j die Stelle ist, an der der Vektor 1 ist.

$$R^n = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \text{ "kanonische Einheitsvektoren"}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + ... + e_n \cdot v_n$$

c) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{R}^2$ auf?

Wenn ja, dann muss für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{aligned}
&& \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow && \alpha + \beta &= x \\
&& \alpha + 2\beta &= y \\
\Rightarrow && \alpha &= x - \beta \\
&& &= y - 2\beta \\
\Leftrightarrow && \beta &= y - x \\
&& \alpha &= 2x - y
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Allg. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x-y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

d) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{R}^2$ auf?

Nein, denn $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2$

e) $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, d.h. Erzeugendensysteme sind <u>nicht</u> eindeutig!

f) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D.h. $M = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ ist kein <u>minimales</u> Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, denn $v \in M$ kann immer dargestellt werden als Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus v$.
Man sagt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind <u>linear abhängig</u>.

1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)

V : $\mathbb{R}$-VR (V ist Vektorraum in den reellen Zahlen)

(i) $v_1, ..., v_m \in V$ und $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$
Der Vektor $\lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m$ heißt Linearkombination von $v_1, ..., v_m$.

(ii) Sei $M \subseteq V$. Dann ist

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \{\textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k | \lambda_k \in \mathbb{R}, v_k \in M, n \in \mathbb{N}\}$$

der von M aufgespannte/erzeugte UVR von V

Vereinbarung: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$
Schreibweise: $M = \{v_1, ..., v_m\}$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, ..., v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

(iii) Ist $V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$, so heißt M ein Erzeugendensystem von V. V heißt endlich erzeugt, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

1.13 Bemerkung

$M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von V, der M enthält.

Beweis

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist UVR. erfüllt Kriterien von 1.6, daher klar:
  1.6 2) erfüllt. $u \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n \quad (M = \{v_1, ..., v_n\})$
  $\Rightarrow \lambda \cdot u = \underbrace{\lambda\lambda_1}_{\in\mathbb{R}} \cdot v_1 + ... + \underbrace{\lambda\lambda_n}_{\in\mathbb{R}} \cdot v_n$
  1.6 3) ähnlich.

- Angenommen U ist der kleinste UVR, so dass $M \subseteq U$.
  Z. z.: $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$.
  Wegen 1.6 enthält U alle Linearkombinationen von Vektoren aus M.
  $\Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U \Rightarrow U$ kann nicht kleiner sein als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = U$ $\square$

Ergänzung zu 1.13

19.10.16

Bsp: $M = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ Gerade

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \supseteq M$

- $E = \{\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \supseteq M$

$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ Gerade, E Ebene, d.h. E ist größer als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von $\mathbb{R}^3$, der M enthält.

1.14 Definition (Lineare Unabhängigkeit)

- $V: \quad \mathbb{R} - VR, \quad v_1, ..., v_n$ heißen linear unabhängig, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m = 0 \\ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\lambda = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0}_{\text{einzige Lösung!}}$$

- $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn gilt:
  Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, ..., v_m \in M$ paarweise verschieden sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig

- Ist in obigen beiden Fällen (mindestens) $\lambda_i \neq 0$, dann sind die Vektoren linear abhängig

1.15 Beispiel

a) $\mathcal{O}$ ist linear abhängig, da $\lambda \cdot \mathcal{O} = 0 \qquad \forall \lambda \neq 0$

b) Sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\mathbb{R}^2$?
$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$
$\begin{cases} \mathrm{I} & \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \mathrm{II} & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$ Erfüllt für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aber hier gibt es noch die Lösung: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$!
$\Rightarrow$ Vektoren sind linear abhängig

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (l.u.) in $\mathbb{R}^3$

d) $v \neq \mathcal{O}, \quad v \in V, \quad v$, ist linear unabhängig
Angenommen es existiert $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \cdot v = 0$.
$\Rightarrow v = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \mathcal{O}$ ↯

e)

$$\begin{aligned} v, w \text{ linear abhängig } &\Leftrightarrow v = \lambda w \text{ , für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

f) In $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \text{ f Abbildung}\}$ sind die Vektoren

- $f(x) = x, \quad g(x) = x^2$ linear unabhängig
- $f(x) = \sin^2(x), \quad g(x) = \cos^2(x), \quad h(x) = 2$ linear abhängig:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x \\ 0 &= \underbrace{2}_{\lambda_1} \sin^2 x + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cos^2 x \underbrace{-1}_{\lambda_3} \cdot 2 \end{aligned}$$

1.16 Satz

$M = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$

(i) M linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Zu jedem $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$

(ii) M linear unabhängig, $v \notin \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow M \cup \{v\}$ linear unabhängig

Beweis

(i) ($\Leftarrow$) $\mathcal{O} \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{O} = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n$$

Gleichung erfüllt für $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ (eindeutige Lösung)

($\Rightarrow$) Sei M linear unabhängig, $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$

Angenommen $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \cdot v_i$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{=0, \text{ da } M \text{ linear unabhängig}} \cdot v_i = \mathcal{O} \\ &\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \qquad \forall i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(ii) Z.z.: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i, \lambda = 0$

Annahme: $\lambda \neq 0 \Rightarrow v = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot v_n$

$$\Rightarrow v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} ⚡. \text{ Also } \lambda = 0$$

$\lambda_i = 0$, weil M linear unabhängig. □

1.17 Satz

$M \subseteq V$ linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow N = M$$

In Worten: Man kann von M keinen Vektor weglassen, ohne dass der von M aufgespannte Raum sich verkleinert.

Beweis

($\Rightarrow$) Sei $M \subseteq V$ linear unabhängig.
Angenommen: Man kann doch aus M Vektoren weglassen, d.h.

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$\begin{aligned}
N \neq M &\Rightarrow \exists x \in M \setminus N && \text{(da } N \subseteq M\text{)} \\
&\Rightarrow \exists v_1, ..., v_n \in N && \text{paarweise verschieden und} \\
&\quad\ \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} && \text{so dass} \\
&\quad\ x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n && \text{(da } \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}\text{)} \\
&\Rightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n - x = \mathcal{O} \\
&\quad\ \underbrace{v_1, ..., v_n,}_{\in N} \quad \underbrace{x}_{\in M \setminus N} \text{ paarweise verschieden}
\end{aligned}$$

Da $N \subseteq M$, ist $\underbrace{v_1, ..., v_n, x}_{\text{linear abhängig}} \in M \Rightarrow M$ linear abhängig↯
Also muss $N = M$ gelten.

($\Leftarrow$) Sei M linear abhängig.
Z.z. Man kann Vektoren aus M weglassen, d.h.:

$$\exists N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$\begin{aligned}
M \text{ linear abhängig} \Rightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists v_1, ..., v_n \in M \\
& \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (mit } \lambda_i \neq 0 \text{ für ein i)} \\
& \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n = 0
\end{aligned}$$

O.B.d.A: $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot v_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$
Setze $N = M \setminus \{v_1\} \Rightarrow N \neq M$
Da v_1 Linearkombination von $v_2, ..., v_n$ folgt:
Jede Linearkombination von $v_1, ..., v_n$ lässt sich ausdrücken als Linearkombination von $v_2, ..., v_n \Rightarrow \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ $\square$

Basis und Dimension

25.10.16

Ein minimales Erzeugendensystem heißt Basis.

1.18 Definition (Basis)

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR. Eine endliche Menge $B \subseteq V$ heißt Basis, falls

- $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$ und
- B linear unabhängig.

Für $V = \{\mathcal{O}\}$ ist $B = \emptyset$ die Basis.

1.19 Beispiel

a) $\{e_1, ..., e_n\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$ ('Standard-/kanonische Basis')

b) Basis ist nicht eindeutig.
$B_1 = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}, \qquad B_2 = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}$, da: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}$

1.20 Satz (Existenz von Basen)

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR $\Rightarrow$ Jedes endliche Erzeugendensystem enthält Basis.

Beweis

Sei $M \subseteq V$ endlich, $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = V$

- M linear unabhängig $\rightarrow$ fertig
- M linear abhängig $\overset{1.17}{\Rightarrow}$ Man kann aus M einen Vektor $v \in M$ weglassen, so dass $\langle M \setminus \{v\} \rangle_{\mathbb{R}} = V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$. Nach endlich vielen Schritten liefert das Verfahren eine Basis. $\square$

Fragen

- Basis nicht eindeutig. Sind alle Basen gleich groß?
- geg. $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\quad S = \{e_1, e_2, e_3\}$. Wie kann man w zu einer Basis ergänzen? Welche Vektoren aus S sind geeignet?

$$w = \frac{1}{3}e_1 + e_3 = \{\underbrace{w, e_1, e_3}_{\text{linear abhängig}}\} \text{ keine Basis, aber}$$

$$\{\underbrace{w, e_1, e_2}_{\text{linear unabhängig}}\} \text{ Basis und } \{w, e_2, e_3\} \text{ Basis}$$

1.21 Satz (Austauschlemma)

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR. Gegeben: $w \in V$, $\quad w \neq \mathcal{O}$, $\quad w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, wobei $B = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ Basis von V.
$\Rightarrow \underbrace{(B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}}_{(\star)}$ Basis, falls $\underline{\lambda_j \neq 0}$

Beweis

Z.z: $(\star)$ ist Basis.

1) $(\star)$ ist linear unabhängig.
   Z.z:

$$\sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \text{ und } \mu = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w &= \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \\
&= \sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu\lambda_i) v_i + \mu\lambda_j v_j \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = \{v_1, ..., v_n\} \text{ Basis } &\Rightarrow \mu\lambda_j = 0 \text{ und } \mu_i + \mu\lambda_i = 0 \quad \forall i \neq j \\
\underline{\lambda_j \neq 0} &\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu_i + \underbrace{\mu\lambda_i}_{=0} = \mu_i = 0 \quad \forall i \neq j
\end{aligned}$$

2) $(\star)$ erzeugt V.

$$
\begin{aligned}
& & w &= \lambda_j v_j + \sum_{i \neq j}^{\lambda_i v_i} & &|: \lambda_j,\text{ da } \lambda_j \neq 0 \\
&\Leftrightarrow & v_j &= \frac{1}{\lambda_j} w - \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \\
&\Rightarrow & v_j &\in \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} \\
&\Rightarrow & \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} = V
\end{aligned}
$$

1.22 Satz (Steinitz'scher Austauschsatz)

Geg. $w_1, ..., w_m \in V$ linear unabhängig, $\{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V.
Es folgt:

a) Aus den n Vektoren $v_1, ..., v_n$ kann man $n - m$ Vektoren auswählen, die mit $w_1, ..., w_m$ eine Basis bilden.

b) $m \leq n$

Beweis

a) 1) $w_1 \in V \Rightarrow w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$
Wären alle $\lambda_i = 0$, dann wäre auch $w_1 = 0$. Da $\mathcal{O} \in V$ linear abhängig ist, wäre also auch $w_1, ..., w_m$ linear abhängig. E
Also: Mindestens ein $\lambda_i \neq 0$
O.B.d.A. $\lambda_1 \neq 0$ (sonst umnummerieren) $\overset{1.20}{\Rightarrow}$ $\{w_1, v_2, ..., v_n\}$ ist Basis von V

2) $w_2 \in V \Rightarrow \mu_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i$
Wären alle $\mu_2, ..., \mu_n = 0$, so wäre $w_2 = \mu_1 w_1$, also auch w_1, w_2 linear abhängig. E, da $\{w_1, ..., w_m\}$ linear unabhängig.
$\Rightarrow$ Mindestens ein $\mu_i \neq 0, \quad i \in \{2, ..., n\}$
O.B.d.A. $\mu_2 \neq 0 \overset{1.20}{\Rightarrow} \{w_1, w_2, v_3, ..., v_n\}$ Basis von V

$\square$

b) $\rightarrow$ Übung

1.23 Korollar

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR

i) Je zwei Basen von V enthalten gleich viele Elemente.

ii) Basisergänzungssatz
Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis

i) $B, \tilde{B}$ Basen
B linear unabhängig $\overset{1.22b)}{\Rightarrow} |B| \leq |\tilde{B}|$
$\tilde{B}$ linear unabhängig $\overset{1.22b)}{\Rightarrow} |\tilde{B}| \leq |B|$
$\Rightarrow |B| = |\tilde{B}|$

ii) Wähle beliebige Basis von V und tausche aus(1.22a)).

1.24 Satz

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR, $B \subseteq V$.
Dann sind äquivalent:

i) B ist Basis

ii) B ist maximale linear unabhängige Menge in V

iii) B ist minimales Erzeugendensystem

Beweis

i)⇒ii) Wegen 1.23 (linear unabhängige Menge zu Basis ergänzen, alle Basen gleich groß)

ii)⇒i) (Bzw. ¬i)⇒ ¬ii).) B keine Basis, B linear unabhängig
$\Rightarrow \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq V \Rightarrow \exists v \in V \setminus \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \colon B \cup \{v\}$ linear unabhängig

i)⇒iii) Satz 1.17

□

1.25 Definition (Dimension)

26.10.16

V : $\mathbb{R}$-VR

i) Ist V endlich erzeugbar, B Basis von V, $\quad |B| = n$ so hat V die Dimension n, $\dim(V) = n$

ii) Ist V nicht endlich erzeugbar, so heißt V unendlichdimensional.

1.26 Korollar

$\dim V = n, B \subseteq V, |B| = n.$
Dann ist B Basis von V, wenn B linear unabhängig oder $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$

Beweis

Folgt aus 1.24

1.27 Beispiel

a) $\{e_1, ..., e_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

b) $\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow dim(\{\mathcal{O}\}) = 0$

c) Bilden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis von V?
Ja, weil linear unabhängig (siehe Korollar 1.26).

d) $V = \mathbb{R}^4, U = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$
u_1, u_2 linear unabhängig $\Rightarrow \dim(U) = 2$
Ergänze u_1, u_2 zu Basis von $V = \mathbb{R}^4$

- 1. Möglichkeit (Austauschlemma + Steinitz)
  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$
  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + e_4 \Rightarrow \{u_1, e_2, e_3, e_4\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$

$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_3 \Rightarrow \{u_1, u_2, e_3, e_4\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$

(Basis könnte auch anders aussehen, nur beispielhaft dargestellt)

- 2. Möglichkeit (1.16)

  * $e_1 \notin U$ $(\star)$(nachrechnen)
    $\overset{1.16}{\Rightarrow} \{u_1, u_2, e_1\}$ linear unabhängig
  * $e_4 \notin \langle \{u_1, u_2, e_1\} \rangle_{\mathbb{R}}$ (nachrechnen)
    $\overset{1.16}{\Rightarrow} \{u_1, u_2, e_1, e_4\}$ linear unabhängig und damit Basis (Korollar 1.26)

  $(\star)$ Angenommen:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I & 1 = \lambda_1 \\ II & 0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ III & 0 = \lambda_2 \\ IV & 0 = \lambda_1 \quad ↯ \text{ zu I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_1 \notin \langle \{u_1, u_2\} \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \{u_1, u_2, e_1\} \text{ linear unabhängig}$$

1.28 Satz (Dimensionssatz)

V $\mathbb{R}$-VR, $\dim(V) = n$

i) $U \subseteq V$ ist UVR $\Rightarrow \dim(U) \leq n$

ii) $U \subseteq W \subseteq V$, $\quad U, W$ sind UVR mit $\dim(U) = \dim(W) \Rightarrow U = W$

iii) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Beweis

i) Basis von U kann man zu Basis von V ergänzen $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$

ii) $\dim(U) = \dim(W) \overset{U \subseteq W}{\Rightarrow}$ Basis von U auch Basis von $W \Rightarrow U = W$

iii) Sei $\{v_1, ..., v_k\}$ Basis von $U \cap W$
Ergänze $\{v_1, ..., v_k\}$ zu

a) Basis $\{v_1, ..., v_k, u_{k+1}, ..., u_m\}$ von U

b) Basis $\{v_1, ..., v_k, w_{k+1}, ..., w_l\}$ Basis von W

Behauptung: $B = \{v_1, ..., v_k, w_{k+1}, ..., w_l, u_{k+1}, ..., u_m\}$ Basis von $U + W$

1) B linear unabhängig
Sei
$$\overbrace{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k}^{=v} + \overbrace{\mu_{k+1} u_{k+1} + ... + \mu_m u_m}^{=u} + \overbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + ... + \gamma_l w_l}^{=w} = 0$$
$\lambda_i, \mu_j, \gamma_r \in \mathbb{R}$

Es ist $w \in U \cap W$, da

* $w = \underbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1}}_{\in W} + ... + \underbrace{\gamma_l w_l}_{\in W} \in W$
* $w = -\underbrace{u}_{\in U} - \underbrace{v}_{\in U} \in U$

Also: $w \in U \cap W$.

$\Rightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} : w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$
$\Rightarrow w = \gamma_{k+1} w_{k+1} + ... + \gamma_l w_l = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$
$\Rightarrow \gamma_{k+1} w_{k+1} + ... + \gamma_l w_l - \alpha_1 v_1 - ... - \alpha_k v_k = 0$
$\{v_1, ..., v_k, w_{k+1}, ..., w_l\}$ linear unabhängig
$\Rightarrow \gamma_{k+1} = ... = \gamma_l = \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$
$\Rightarrow w = \mathcal{O}$ und $v + u + w = v + u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + ... + \mu_m u_m = 0$
$\{v_1, ..., v_k, u_{k+1}, ..., u_m\}$ linear unabhängig (Basis von U)
$\Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = \mu_{k+1} = ... = \mu_m = 0$

2) $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = U + W$, da:

* $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U + W$ (da $\underbrace{u + v}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W} \in U + W$)

* $U \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$ (da Basis von U in B)

* $W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow U + W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$

$\square$

1.29 Bemerkung (Koordinaten)

Geg.: Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ von V, Vektor $u \in V$
$\Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$
λ_i eindeutig und heißen Koordinaten von u bezüglich der Basis B.
z.B.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat Koordinaten 1,1,3 bezüglich
$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

02.11.16

2.1 Beispiel

- Ein Bauer besitzt Kühe und Gänse
- Insgesamt 18 Tiere mit 40 Beinen
- Frage: Wieviele der Tiere sind Kühe?

Lineares Gleichungssystem (LGS): $* \begin{cases} I: & k+g &= 18 \\ II: & 4k+2g &= 40 \quad \Leftrightarrow \quad 2k+g=20 \end{cases}$

$\Rightarrow g = 20 - 2k = 18 - k \Leftrightarrow k = 2 \Rightarrow g = 16$

Vektorenschreibweise von $*$:

$\begin{pmatrix} k+g \\ 4k+2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$ oder $k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise:

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$

2.2 Definition (Matrix)

Allgemeines lineares Gleichungssystem:
Gegeben:

- Unbekannte $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen
- Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

<u>Matrixschreibweise:</u>
$Ax = b$ mit

- $A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spalte}}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}} \leftarrow \text{Zeile}$

- $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

- $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Man schreibt $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oder nur $A = (a_{ij})$, wenn m, n schon bekannt.

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ - <u>Eingänge</u> der Matrix A
- A - reelle $m \times n$- Matrix
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ - Menge aller reellen $m \times n$ - Matrizen
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ - quadratische Matrizen

$(**)$ Dabei ist
$$Ax := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

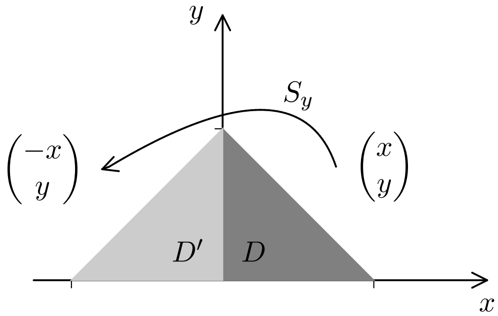
2.3 Bemerkung

Aus $(**)$ ergibt sich: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \longmapsto A \cdot x$ für $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
A bildet Vektoren auf Vektoren ab.

Matrizen können nicht nur zur Lösung von LGS verwendet werden, sondern auch in der Geometrie:

2.4 Beispiel:

a) Spiegelung S_y ain $\mathbb{R}^2$ an y-Achse



$$S_y : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$S_y : \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

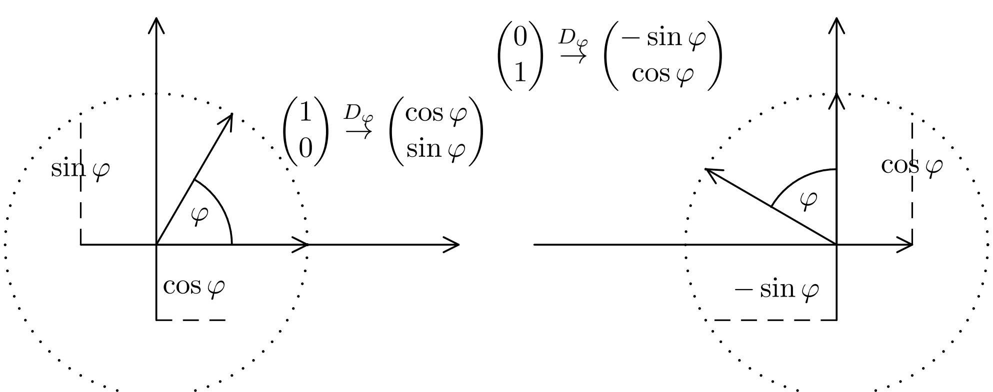
$$S_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} + s_{12} \\ s_{21} + s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

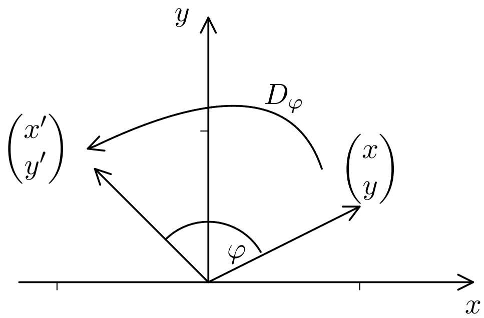
$$\Rightarrow s_{11} = -1 \quad s_{12} = 0 \quad s_{21} = 0 \quad s_{22} = 1$$

$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S_y bildet D auf D' ab.

b) Drehung D_φ um $\varphi \in [0, 2\pi)$
Vorüberlegung am Einheitskreis:





$D_\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$D_\varphi = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und

$D_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_\varphi = (D_\varphi \cdot e_1, D_\varphi \cdot e_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

2.5 Bemerkung

Aus Beispiel 2.4 b) und Definition 2.2 ergibt sich:

$A \cdot e_j = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad$ (j-te Spalte von $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$)

$\Rightarrow A = (\underbrace{A_{e_1}, A_{e_2}, ..., A_{e_n}}_{\text{Spalten}})$

2.6 Satz

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$

i) $A(\lambda x) = \lambda(A \cdot x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

ii) $A(x + y) = Ax + Ay$

Beweis

i)

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= (\lambda x_1) \underbrace{A \cdot e_1}_{\text{1. Spalte}} + (\lambda x_2) A e_2 + ... + (\lambda x_n) \underbrace{A e_n}_{n\text{-te Spalte}} \\ &= \lambda[x_1(Ae_1) + ... + x_n(Ae_n)] \\ &= \lambda(Ax) \end{aligned}$$

ii) Übung

2.7 Beispiel (Folien 02.11.2016)

a) $A \cdot x = (D_\pi \circ S_y) \cdot x = D_\pi \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{A}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Berechnung Matrixprodukt (Verknüpfung) $A \cdot B$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{[x_1 \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}]}_{\in \mathbb{R}^2} \\
&\overset{2.6}{=} \quad x_1 [\underbrace{e \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2}] + x_2 [\underbrace{f \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2}] \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} ea + gb & fa + hb \\ ec + gd & fc + hd \end{pmatrix}}_{\text{Matrixprodukt } A \cdot B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.8 Definition (Matrixprodukt)

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= (c_{ik}) \quad \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R}) \\
c_{ik} &= (i\text{-te Zeile von } A) \cdot (k\text{-te Spalte von } B) \\
&= a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}
\end{aligned}$$

(Skalarprodukt)

2.9 Beispiel

08.11.16

$A = \begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{0} & \underline{-1} \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \underline{2} & -1 \\ 0 & \underline{0} & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & \underline{1} & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$B \cdot A$ nicht definiert!

2.10 Satz + Definition

$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist Vektorraum mit

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
- $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij}) \qquad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

Beweis: Siehe Hausaufgabe 03 Aufgabe 4a)

2.11 Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (-2) \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

2.12 Definition (Matrizentransponierung)

i) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A = (a_{ij})$.
Die zu A transponierte Matrix (Tauschen von Zeilen und Spalten):

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Eine Matix heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$, z.B.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ii)
- Nullmatrix: $\mathcal{O}_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
- Einheitsmatrix (nur Hauptdiagonale): $E_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2.13 Beispiel

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \neq B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ Matrixmultiplikation nicht kommutativ!

b) $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$A \cdot E_n = A$ und $E_m \cdot A = A$

3 Gruppen

3.1 Beispiel (Wiederholung zu Permutationen)

Geg.: Menge $\{A, B, C\}$
Anordnungen: ABC, CAB, ACB, ... $\rightarrow 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ Möglichkeiten
Jede Anordnung kann man auffassen als eineindeutige (bijektive) Abbildung
$\pi : \{A, B, C\} \rightarrow \{A, B, C\}$

$\pi :$

x	A	B	C
$\pi(x)$	A	C	B

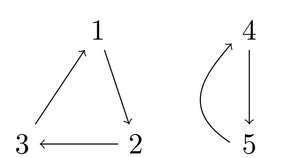
3.2 Definition (Permutation)

- Eine <u>Permutation</u> ist eine eineindeutige Abbildung einer endlichen Menge auf sich selbst. Im Allgemeinen verwendet man die Menge $\{1, ..., n\}$ und schreibt eine Permutation π als Wertetabelle $\pi = \begin{pmatrix} 1 & ... & n \\ \pi(1) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$ oder als geordnete Liste der Werte $\pi = \pi(1)...\pi(n)$
- $\mathscr{S}_n$- Menge aller Permutationen von $\{1, ..., n\}$, $\quad |\mathscr{S}_n| = n!$

Beispiel: $\mathscr{S}_2 = \{\text{id}, (AB)\} = \{\text{id}, (12)\}, \quad |\mathscr{S}_2| = 2! = 2$
mit $\text{id} = \begin{pmatrix} AB \\ AB \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} AB \\ BA \end{pmatrix}$

3.3 Beispiel

- $M = \{1, 2, ..., 5\}$
  $\pi = \pi(1)...\pi(5) = 23154$
  oder $\pi = (\begin{cases} 12345 \\ 23154 \end{cases})$
- $\text{id(i)} = i \qquad \forall i \in \{1, .., n\}$



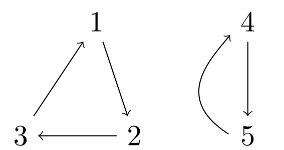
Graph der Permutation

3.4 Bemerkung

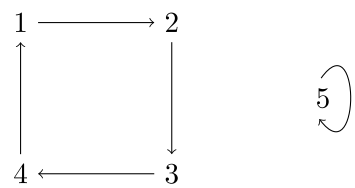
In Literatur oft <u>Zyklenschreibweise:</u>
Zyklus $(a_1 a_2 ... a_k)$ bedeutet $\pi(a_i) = a_{i+1}$ und $\pi(a_k) = a_1$
z.B.: $\pi = (123)(45)$

Verknüpfung von Permutationen

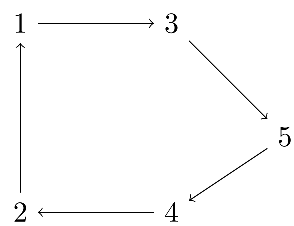
3.5 Beispiel



$$\pi = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23154 \end{pmatrix} = (123)(45)$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23415 \end{pmatrix} = (1234)(5)$$



$$\pi\sigma = \begin{pmatrix} 12345 \\ 31524 \end{pmatrix} = (13542)$$

3.6 Bemerkung

a) Die Verknüpfung von 2 Permutationen π, σ ist wieder Permutation η mit $\eta(i) = \pi \circ \sigma(i) = \pi(\sigma(i))$

b) Fixpunkte mit $\pi(i) = i$ lässt man weg, z.B. $\underbrace{(123)(4)}_{\in \mathscr{S}_4} = (123)$

c) Jede Permutation kann als Produkt disjunkter Zyklen geschrieben werden, z.B.: $(34) \underset{\text{Verkettung } \circ}{\cdot} (345) = (3)(45) = (45)$.
Zwei Zyklen heißen <u>disjunkt</u>, wenn $\{a_1 ... a_k\} \cap \{b_1 ... b_j\} = \emptyset$.

d) Permutationen sind nur in sehr seltenen Fällen kommutativ:
$(123)(23) = (12) \neq (23)(123) = (13)$

e) Zyklendarstellung nicht eindeutig, z.B.:
$(123) = (231)$ oder $(34)(12) = (12)(34)$

3.7 Beispiel

09.11.16

Symmetrieoperationen des Rechtecks	Identität	Spiegelung y-Achse	Spiegelung x-Achse	Drehung 180°
	D C A B	C ¦ D B ¦ A	A B – – – – D C	B A C D
als Matrix	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$D_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
als Permutation der Ecken	id	$\pi = (AB)(CD)$	$\sigma = (AD)(BC)$	$\eta = (AC)(BD)$

Verknüpfungstafel

Matrixmultiplikation $\cdot$	E_2	S_y	S_x	D_π
E_2	E_2	S_y	S_x	D_π
S_y	S_y	E_2	D_π	S_x
S_x	S_x	D_π	E_2	S_y
D_π	D_π	S_x	S_y	E_2

3.8 Definition (Grundbegriffe)

- Seien X, Y nichtleere Mengen, Eine Verknüpfung ' $\cdot$ ' ist eine Abbildung

$$X \times X \to Y \qquad (a,b) \to a \cdot b \qquad (\leftarrow \text{'Produkt' von a und b})$$

- Eine Menge $X \neq \emptyset$ heißt abgeschlossen bzgl. einer Verknüpfung ' $\cdot$ ', falls $a \cdot b \in X \quad \forall a, b \in X$.
  Beispiel: $X = \{-1, 1\}$ mit '$\cdot$' Addition $\Rightarrow (-1) \cdot (1) = -1 + 1 = 0$

Die Menge $\{id, \pi, \sigma, \eta\}$ aus Beispiel 3.7 ist abgeschlossen bzgl. der Verkettung von Permutationen

Bemerkung

Die Verknüpfung von Elementen einer endlichen Menge stellt man anhand der Verknüpfungstafel dar, siehe Beispiel 3.7.

3.9 Definition (Gruppe)

a) Eine <u>Gruppe</u> ist ein Paar $(G, \cdot)$ mit Menge $G \neq \emptyset$ und einer Verknüpfung $\cdot : \underbrace{G \times G \to G}_{\text{abgeschlossen!}}$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

   1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$ Assoziativität
   2) $\exists e \in G : a \cdot e = e \cdot a = a \quad \forall a \in G$ Neutralelement
   3) $\forall a \in G \quad \exists a^{-1} \in G : a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ Inverse

   Falls zusätzlich

   4) $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$ Kommutativität

   gilt, dann heißt G <u>abelsche Gruppe</u>.

b) $|G|$ heißt <u>Ordnung</u> der Gruppe G.

3.10 Beispiel

a) $(\{e\}, \cdot)$ ist Gruppe

b) $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit ' + ' ist abelsche Gruppe. Inverse zu a ist -a.

c) $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit ' $\cdot$ ' keine Gruppen. Problem: 0 besitz keine Inverse, weil $0 \cdot a = 1 \lightning$

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ mit ' $\cdot$ ' Gruppen, wenn man 0 weglässt

d) Einzige <u>endliche</u> Gruppen von reellen Zahlen:

   - $(\{1\}, \cdot)$ bzw. $(\{0\}, +)$
   - $(\{1, -1\}, \cdot)$

   Für weitere endliche Gruppen muss man Restklassen (Beispiel 3.12) Matrizen oder Permutationen betrachten

e) $\mathscr{S}_2 = \{\mathrm{id}, (12)\}$ und
   $\mathscr{S}_3 = \{\mathrm{id}, (12), (23), (13), (123), (132)\}$ sind Gruppen (s. 3.11)

f) $V_4 = \{\mathrm{id}, \pi, \sigma, \eta\}$ aus Beispiel 3.7 ist die Symmetriegruppe des Rechtecks und heißt 'Kleinsche Vierergruppe' (V_4 Gruppe: s. 3.16 e).

3.11 Satz

$\mathscr{S}_n$ ist eine <u>nicht</u> abelsche Gruppe. (Name: Symmetrische Gruppe)

Beweis

- assoziativ: $\pi, \sigma, \eta \in \mathscr{S}_n \Rightarrow \underbrace{(\pi \cdot \sigma) \cdot \eta}_{\text{Verknüpfung von Abbildungen}} = \overset{\text{bijektive Abbildungen}}{\pi \overset{\uparrow}{\cdot} (\sigma \overset{\uparrow}{\cdot} \eta)}$

- Neutralelement: id, denn
  $\mathrm{id} \cdot \pi = \pi \cdot \mathrm{id} = \pi \qquad \forall \pi \in \mathscr{S}_n$

- Inverse: Alle Pfeile eines Zyklus werden umgedreht, d.h. die Zyklen werden rückwärts gelesen:

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dr] & \\ 3 \arrow[ur] & & 2 \arrow[ll] \end{tikzcd} \quad \longrightarrow \quad \begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] & \\ 3 \arrow[rr] & & 2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

  $\pi = (123) \qquad\qquad \pi^{-1} = (132)$
  Fixpunkte und 2er-Zyklen ändern sich dabei nicht:
  $\sigma = (1678)(23) \Rightarrow \sigma^{-1} = (1876)(23)$
  Setzt man die Pfeile von den Graphen π und π^{-1} zusammen, ändert sich nichts, d.h. $\pi \cdot \pi^{-1}(i) = i \Rightarrow \pi \cdot \pi^{-1} = \mathrm{id} = \pi \cdot \pi^{-1}$

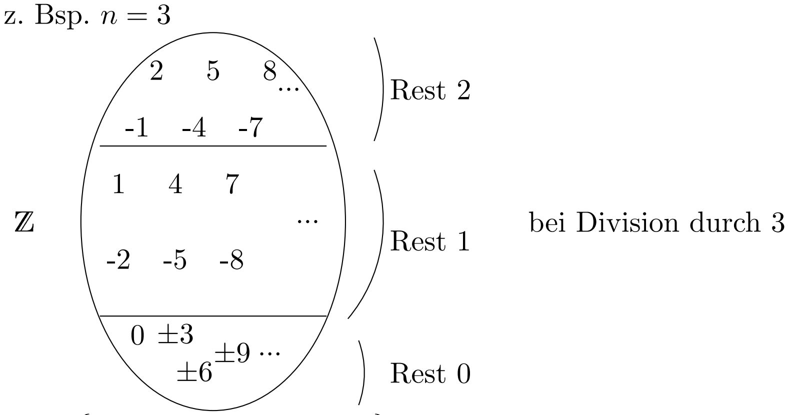
- nicht abelsch: Bemerkung 3.6d)

15.11.2016

3.12 Beispiel

Restklassen modulo $n : \mathbb{Z}_n = \{0, 1, ..., n-1\}$,

z. Bsp. $n = 3$



$$\mathbb{Z}_3 = \{ \underbrace{0, \quad 1, \quad 2}_{\text{Restklassen, Repräsentanten}} \}$$

a) $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ mit $a \oplus b = a + b \mod n$. Z.B. in $\mathbb{Z}_3$ ist $2 \oplus 1 = 0$

<u>$(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ ist abelsche Gruppe:</u>

- abgeschlossen: $a + b \mod n \in \{0, ..., n-1\}$
- assoziativ: $a + (b + c) \mod n = (a + b) + c \mod n$
- Neutralelement: $a + 0 \equiv 0 + a \equiv a \pmod n$
- Inverse zu $a \in \mathbb{Z}_n$: Für welches $b \in \mathbb{Z}_n$ ist $a + b \mod n = 0$?
  Wähle b so, dass $a + b = n$, falls $a \neq 0$ (sonst b = 0)
  z.B. in $\mathbb{Z}_3 : a = 1 \Rightarrow b = 2, \quad a = 2 \Rightarrow b = 1, \quad a = 0, b = 0$
- kommutativ: $a + b \mod n = b + a \mod n$

b) $(\mathbb{Z}_n, \odot)$ mit $a \odot b = ab \mod n$
Ist i.A. keine Gruppe:

- assoziativ ✓
- Neutralelement: $e = 1$ ✓

– Aber: 0 hat keine Inverse! Es gibt kein $a \in \mathbb{Z}_n$: $\underbrace{0 \cdot a \mod n}_{0} = 1$ (↯)

Hat $z \neq 0$ eine Inverse bzgl. $\odot$?

$\bar{z}$ invers zu z, wenn $\bar{z} \cdot z \equiv 1 \pmod n$
z.B. in $\mathbb{Z}_{15}$ gilt:

* $2 \cdot 8 = \quad 16 \equiv 1 \pmod{15}$, d.h. 2 und 8 sind zueinander invers
* Alle Vielfachen von 5 haben Rest $0, 5, 10$, d.h.
  $k \cdot 5 \mod 15 \in \{0, 5, 10\} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5$ hat kein Inverses

Allgemein:

$$\begin{aligned} z \text{ invertierbar } &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n : z \odot \bar{z} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z} \in \mathbb{Z}_n \quad \exists q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z = qn + 1 \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{z}, q \in \mathbb{Z} : \bar{z} \cdot z - qn = 1 \\ &\overset{*}{\Leftrightarrow} \text{ggT}(z, n) = 1 \end{aligned}$$

Beweis von *

'⇐' Lemma von Bézout/Erweiterter Euklidischer Algorithmus (EEA):
$a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$
Hier: $a = z, \quad b = n, \quad s = \bar{z}, \quad t = -q$

'⇒' Übung (Übungsblatt 5, A1c)

Also: Nur die zu n teilerfremden Zahlen in $\mathbb{Z}_n$ haben Inverse. Z.B.: In $\mathbb{Z}_{15}$ sind $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ bzgl. $\odot$ invertierbar.
<u>Bezeichnung</u>: $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n \mid \text{ggT}(z, n) = 1\}$ ist Gruppe mit Ordnung $|\mathbb{Z}_n^*| = \varphi(n)$ (Eulersche φ–Funktion, $\varphi(n)$ ist Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen zwischen 1 und n).

Berechnung der Inversen in $\mathbb{Z}_n^*$:

$$\begin{aligned} \text{EEA}: \qquad z \in \mathbb{Z}_n^* &\Rightarrow \exists s, t \in \mathbb{Z} : sz + tn = 1 \\ &\Rightarrow s \cdot z \equiv 1 \pmod n \\ &\Rightarrow s \text{ invers zu } z \end{aligned}$$

3.13 Satz (Eigenschaften von Gruppen)

G Gruppe.

i) Das Neutralelement von G ist eindeutig.

ii) Die Inverse zu jedem $a \in G$ ist eindeutig.

iii) $a, b \in G \Rightarrow (ab)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$

Beweis

i) Angenommen e_1, e_2 Neutralelemente
$\Rightarrow e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$

ii) Angenommen $a \in G$ hat 2 Inversen x, y
$x, y \in G \Rightarrow x = x \underbrace{(ay)}_{e} = \underbrace{(xa)}_{e} y = y$

iii)
- $(ab)^{-1} \cdot (ab) \underset{\text{Vor.}}{=} (b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1} \underbrace{(a^{-1}a)}_{e} b = \underbrace{b^{-1}b}_{e} = e$
- $(ab)(ab)^{-1}$ analog

$\square$

3.14 Satz (Gleichungen lösen in Gruppen)

G Gruppe, $a, b \in G$

i) $\exists! x \in G : a \cdot x = b.$ Es ist $x = a^{-1} \cdot b$

ii) $\exists! y \in G : y \cdot a = b.$ Es ist $y = b \cdot a^{-1}$

iii) $ax = bx$ für ein $x \in G \Rightarrow a = b$
bzw. $ya = yb$ für ein $y \in G \Rightarrow a = b$ (Kürzungsregel)

Beweis

i) $x = a^{-1}b$ erfüllt $ax = a(a^{-1}b) = \underbrace{(aa^{-1})}_{e} b = b$

ii) Analog zu i)

iii) $a = a \underbrace{(xx^{-1})}_{e} = (ax)x^{-1} = (bx)x^{-1} = b \underbrace{(xx^{-1})}_{e} = b$

$\square$

Untergruppen und Nebenklassen

3.15 Definition (Untergruppe)

$(G, \cdot)$ Gruppe, $\emptyset \neq U \subseteq G$.
U heißt <u>Untergruppe</u> von G ($U \leq G$), wenn U bzgl. '$\cdot$' eine Gruppe ist.

Bemerkung

22.11.2016

- Abgeschlossenheit prüfen: $\forall u, v \in U : uv \in U$
- e von G ist auch e von U
- Inversen in U gleich wie in G

(wegen Satz 3.13)

3.16 Beispiel

a) $(\mathbb{Z}, +) \leq (\mathbb{Q}, +) \leq (\mathbb{R}, +)$

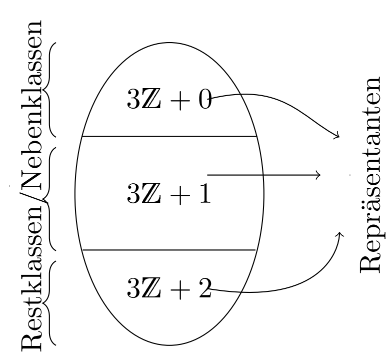
b) $(\{-1, 1\}, \cdot) \leq (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \leq (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$

c) $V_4 = \{\mathrm{id}, \underbrace{(AB)(CD)}_{\pi}, \underbrace{(AC)(BD)}_{\sigma} \underbrace{(AD)(BC)}_{\eta}\} \leq \mathscr{S}_4$ (Bsp. 3.7, 3.10) weil V_4 abgeschlossen, $id \in V_4$, $\quad \gamma^{-1} = \gamma \qquad \forall \gamma \in V_4$

3.17 Beispiel

Es ist $U = 3\mathbb{Z} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$.

- Mehr Klassen gibt es nicht, da $3\mathbb{Z} + 3 = 3\mathbb{Z} + 0$, $3\mathbb{Z} + 4 = 3\mathbb{Z} + 1$, $3\mathbb{Z} - 1 = 3\mathbb{Z} + 2$
- Repräsentanten sind nicht eindeutig, -1 auch Repräsentant von $3\mathbb{Z} + 2 = 3\mathbb{Z} - 1$
- Grundidee: Nebenklassen von U unterteilen $G = \mathbb{Z}$ in disjunkte Äquivalenzklassen.
  Hier: $x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in 3\mathbb{Z} : u + x = y$, z.B. $4 \sim_U 10$, da $\underbrace{6}_{\in 3\mathbb{Z}} + 4 = 10$



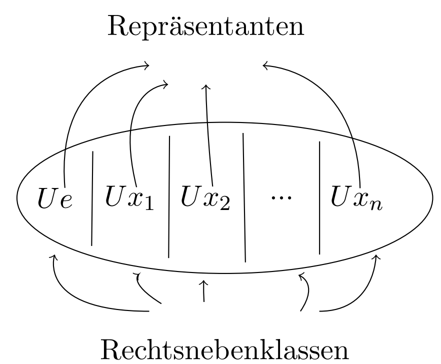
3.18 Satz + Definition (Rechtsnebenklasse, Repräsentant)

G Gruppe, $U \leq G$.

i) Für $x, y \in G : x \sim_U y :\Leftrightarrow \exists u \in U : ux = y$.
Behauptung: $\sim_U$ Äquivalenzrelation.

ii) $Ux := \{ux \mid u \in U\}$ (mit $x \in G$) heißt Rechtsnebenklasse von U in G. x heißt Repräsentant der Klasse Ux [Linksnebenklassen analog: xU]

iii) ${}^{G}/_{U} := \{Ux \mid x \in G\}$ Menge der Rechtsnebenklassen von U in G.
Behauptung: ${}^{G}/_{U}$ ist eine disjunkte Zerlegung von G in Äquivalenzklassen Ux.



Beweis

i) – $x \sim_U x$, da $\underbrace{e}_{\in U} \cdot x = x$ (Reflexivität)

– (Symmetrie)

$$\begin{aligned} x \sim_U y &\Rightarrow \exists u \in U : ux = y \\ &\Rightarrow x = \underbrace{u^{-1}}_{\in U} y = x \\ &\Rightarrow y \sim_U x \end{aligned}$$

– (Transitivität)

$$\begin{aligned} x \sim_U y,\ y \sim_U z &\Rightarrow \exists u, u' \in U : ux = y,\ u'y = z \\ &\Rightarrow u'y = u'(ux) = \underbrace{(u'u)}_{\in U} x = z \\ &\Rightarrow x \sim_U z \end{aligned}$$

iii) – $Ux = \{ux | u \in U\} = \{y \in G | \underbrace{\exists u : ux = y}_{y \sim_U x}\} = \{y \in G | y \sim_U x\} \Rightarrow Ux$ Äquivalenzklassen von $x \in G$

– Für je 2 Äquivalenzklassen Ux, Uy gilt: $Ux = Uy$ oder $Ux \cap Uy = \emptyset$ (wegen Transitivität)

3.19 Beispiel

$\mathbb{Z}_3 := \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{3\mathbb{Z}+0,\ 3\mathbb{Z}+1,\ 3\mathbb{Z}+2\} = \{3\mathbb{Z}+3,\ 3\mathbb{Z}-2,\ 3\ Z+11\}$
Man schreibt oft $\mathbb{Z}_3 = \{\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}\}$ (wobei $\underline{j} = 3\mathbb{Z}+j$) oder einfach $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$
Allgemein: $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\cdot\mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$
Beobachtung in $\mathbb{Z}_3$: Ist $x \in \underline{1}, y \in \underline{2}$, dann ist immer $x+y \in \underline{0}$

3.20 Kriterium

G Gruppe, $U \leq G$.
Für je 2 beliebige Klassen, $Ux, Uy \quad (x, y \in G)$ gelte:
$x' \in Ux,\ y' \in Uy \Rightarrow x' \cdot y' \in U(xy)$

3.21 Definition (Wohldefiniertheit)

Wenn Kriterium 3.20 erfüllt ist, kann man auf G/U eine Verknüpfung definieren:
$* : G/U \times G/U \to G/U$ mit
$(Ux) * (Uy) = U(\underbrace{xy}_{\text{Produkt in } G})$
Man sagt: Wenn 3.20 erfüllt, ist '$*$' <u>wohldefiniert</u>.

3.22 Beispiel

23.11.2016

a) $*$ wohldefiniert auf $(\mathbb{Z}_n, +)$ (ohne Beweis)
<u>Bemerkung:</u> $x \sim_U y \Leftrightarrow \exists u \in 3\mathbb{Z} : u + x = y$
$\Leftrightarrow x \equiv y \pmod 3$
Daraus ergibt sich die Def. aus Bsp. 3.12 mit $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ und $x \oplus y = x + y \pmod 3$

b) $U = \{\mathrm{id}, (12)\} \leq \mathscr{S}_3$. Auf $\mathscr{S}_3/U$ ist $*$ nicht wohldefiniert (Übung).

3.23 Satz (Faktorengruppe/Quotientengruppe)

$U \leq G, \quad G$ Gruppe.
Wenn '$*$' aus Def 3.21 wohldefiniert, dann ist $(G/U, *)$ eine Gruppe.

(Name: Quotientengruppe/Faktorengruppe)
Beweis: Übung.
Bemerkung: G abelsch $\Rightarrow$ '$*$' immer wohldefiniert, d.h. ${}^{G}/_{U}$ Gruppe.

3.24 Lemma

G Gruppe, $U \leq G$, U endlich $\Rightarrow |Ux| = |U| \quad \forall x \in G$

Beweis

$\varphi : U \to Ux, \quad u \mapsto u \cdot x$ bijektiv:

- surjektiv, da $\varphi(U) = Ux$
- injektiv, da $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Rightarrow u_1 x = u_2 x$
  $\overset{\cdot x^{-1}}{\Rightarrow} u_1 = u_2$

$\Rightarrow |U| = |Ux|$

3.25 Theorem (Lagrange)

G endliche Gruppe, $U \leq G \Rightarrow |U|$ teilt $|G|$ und $|{}^{G}/_{U}| = \frac{|G|}{|U|}$.

Beweis

Seien $U_{x_1}, ..., U_{x_q}$ die q verschiedenen Rechtsnebenklassen von U in G.
$\Rightarrow G = \dot{\bigcup}_{i=1}^{q} Ux_i \Rightarrow |G| = \sum_{i=1}^{q} \underbrace{|Ux_i|}_{=|U|} = q \cdot |U|$. $\square$

Ordnung und zyklische Gruppen

3.26 Definition

$(G, \cdot)$ Gruppe, $a \in G$.
Definiere $a^0 := e, \quad a^1 := a, \quad \underbrace{a^m := (a^{m-1}) \cdot a}_{\text{für } m \in \mathbb{N}}, \quad a^m := \underbrace{(a^{-1})^{-m}}_{\text{für } m \in \mathbb{Z}^-}$
als Potenzen von $a \in G$.

3.27 Satz

G Gruppe, $a \in G$. Es gilt:

i) $(a^{-1})^m = (a^m)^{-1} = a^{-m} \qquad \forall m \in \mathbb{Z}$

ii) $a^m a^n = a^{m+n} \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}$

iii) $(a^m)^n = a^{m \cdot n} \qquad \forall m, n \in \mathbb{Z}$

Beweis

i) a) m positiv:

* Inverses für a^m, wenn $m \geq 0$:
Es ist $a^m \cdot \underbrace{(a^{-1})^m}_{\text{Inverse}} = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{\text{m-mal}} \cdot \underbrace{a^{-1} \cdot ... \cdot a^{-1}}_{\text{m -mal}} = e$
$\Rightarrow (a^m)^{-1} = (a^{-1})^m$

* nach Definition: $a^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{Z}^-}} = (a^{-1})^{+m}$
$\Rightarrow$ i) gilt für $m \geq 0$

b) m negativ:

* $a^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} = ((\underbrace{a^{-1}}_{\in G})^{-1})^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} \overset{\text{Def.}}{=} (a^{-1})^m$

* $a^{\overbrace{m}^{\in \mathbb{Z}^-}} = (a^-1)^{\overbrace{-m}^{\in \mathbb{N}}} \overset{\text{a)}}{=} (a^{-m})^{-1}$
$\Rightarrow (a^m)^{-1} = ((a^{-m})^{-1})^{-1} = a^{-m}$

ii) + iii) analog mit m oder n negativ oder positiv

3.28 Satz + Definition (Ordnung, zyklische Gruppe)

G endliche Gruppe, $g \in G$.

i) Es gibt eine kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e$. n heißt Ordnung $\mathcal{O}(g)$ von g.

ii) $\{g^0 = e, g^1, g^2, ..., g^{n-1}\} \leq G$ und heißt die von g erzeugte zyklische Gruppe $\langle g \rangle$.

iii) $g^{|G|} = e$

Beweis

i) G <u>endlich</u> $\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} : g^i = g^j$ und $i > j$

$$\Rightarrow g^{\overbrace{i-j}^{\in\mathbb{N}}} = g^i g^{-j} = \underbrace{g^i}_{=g^j} (g^j)^{-1} = e$$

Wähle $n = \min\{k \in \mathbb{N} | g^k = e\}$.

ii)
- $\langle g \rangle$ abgeschlossen, da $g^m \cdot g^k = g^{m+k} \in \langle g \rangle$
- $g^0 = e \in \langle g \rangle$
- $(g^m)^{-1} = g^{-m} = \underbrace{g^n}_{e} \cdot g^{-m} \in \langle g \rangle$

iii) Lagrange: $n \mid |G| \Rightarrow n \cdot k = |G|$ für ein $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow g^{|G|} = g^{nk} = \underbrace{(g^n)}_{e}{}^k = e^k = e$$

□

3.29 Bemerkung

Eine endliche Gruppe heißt zyklisch, falls sie von einem Element erzeugt wird.

Beispiel

- $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ zyklisch, da $1 \in \mathbb{Z}_n$ und $1^2 = 1 + 1 = 2$, $1^3 = 1 + 1 + 1 = 3$, ..., $1^n = (1^{n-1}) \cdot 1 = (n-1) + 1 = n$ und $n \equiv 0 \pmod n$
  $\mathbb{Z}_n$ hat Ordnung n, da $1^n = 0$
- Drehungen, die ein regelmäßiges $n-$Eck in sich selbst überführen, sind zyklisch:
  $(ABC)^0 = id$, $(ABC) = (ABC)$, $(ABC)^2 = (ACB)$, $(ABC)^3 = id$
  $\langle (ABC) \rangle = \{\mathrm{id}, (ABC), (ACB)\} \leq \mathscr{S}_3$
- $\mathscr{S}_3$ oder V_4 nicht zyklisch.

3.30 Korollar

i) Satz von Euler:
$n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{ggT}(a, n) = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$

ii) Kleiner Satz von Fermat:
p Primzahl, $a \in \mathbb{Z}$, $p \nmid a \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$

Beweis

Wir können annehmen, dass $1 \leq a < n$, denn
$a^{\varphi(n)} \mod n = \underbrace{(a \mod n)}_{\{1,\ldots,n-1\}}^{\varphi(n)} \mod n$

$\Rightarrow a \in \mathbb{Z}_n^*$

$\mathbb{Z}_n^*$ endliche Gruppe $\Rightarrow a^{\overbrace{|\mathbb{Z}_n^*|}^{=\varphi(n)}} \equiv 1 \pmod n$
ii) Folgt aus i) für $n = p, \quad \varphi(p) = p - 1$ $\square$

4 Ringe und Körper

Grundlegende Eigenschaften

4.1 Definition (Ring)

Sei $\mathcal{R} \neq \emptyset$ eine Menge mit 2 Verknüpfungen $+$ und $\cdot$.

i) Man nennt $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ einen <u>Ring</u>, wenn gilt:

   1) $(\mathbb{R}, +)$ ist abelsche Gruppe mit Neutralelement 0 und Inverse $-a$ von a.
   2) $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist abgeschlossen und assoziativ (Halbgruppe).
   3) Distributivgesetze: $a \cdot (b + c) = ab + ac$
      $(a + b) \cdot c = ac + bc \qquad \forall a, b, c \in \mathcal{R}$

29.11.2016

ii) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ heißt <u>kommutativ</u>, falls '$\cdot$' zusätzlich kommutativ ist

iii) $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ heißt <u>Ring mit Eins</u>, falls es bezüglich '$\cdot$' ein Neutralelement $\mathbb{1}$ gibt mit $a \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot a = a \qquad \forall a \in \mathcal{R}$.

iv) Ist $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ Ring mit Eins, so heißen die bezüglich '$\cdot$' invertierbaren Elemente <u>Einheiten</u>.
Bezeichnung:

   - a^{-1} Inverse von a bzgl. '$\cdot$'
   - $\mathcal{R}^* :=$ Menge aller Einheiten in $\mathcal{R}$

4.2 Beispiel

a) Trivialer Ring $(\{0\}, +, \cdot)$

b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins.
Einheiten: $1, -1 \Rightarrow \underbrace{\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}}_{\text{kein Ring!}}$
Ebenso $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
mit $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ Ring, kommutativ, ohne Eins

d) $n \in \mathbb{N}_{\geq 2} : (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ kommutativer Ring mit Eins

e) $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ kommutativer Ring mit Eins: ($\cdot$ und $+$ Komponentenweise)
Bemerkung: $\mathcal{R}_1, ..., \mathcal{R}_n$ Ringe $\Rightarrow \mathcal{R}_1 \times ... \times \mathcal{R}_n$ Ring

f) $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (für $n \geq 2$) Ring mit Eins ($= E_n$). Nicht kommutativ!

4.3 Satz (Rechenregeln für Ringe)

$(\mathcal{R}, +, \cdot)$ Ring, $a, b, c \in \mathcal{R}$

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

ii) $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(ab)$

iii) $(-a)(-b) = ab$

Beweis

i) Es ist $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$
Addiere $-a \cdot 0$: $\quad a \cdot 0 - a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0$
$\Leftrightarrow \quad 0 = a \cdot 0$
Analog: $0 = 0 \cdot a$

ii) Es ist $(-a)b + ab = \underbrace{(-a + a)}_{=0} b = 0 \cdot b \overset{\text{i)}}{=} 0$
$\Rightarrow (-a)b$ invers zu ab und $(-a)b = -(ab)$
Analog: $a(-b) = -(ab)$

iii) $(-a)(-b) \overset{\text{ii)}}{=} -(a(-b)) \overset{\text{ii)}}{=} -(-(ab)) = ab$

$\square$

4.4 Bemerkung

a) $\mathcal{R}$ Ring mit Eins $\Rightarrow 1, -1 \in \mathcal{R}^*$
Achtung! Z.B. in $(\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$ ist $1 = -1$

b) In einem kommutativen Ring gilt der binomische Lehrsatz:
$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i \cdot b^{n-i}$

c) In 4.3: Rechenregeln für Multiplikation mit additiven Inversen, z.B.: $a \cdot (-b)$
Über Addition mit multiplikativen Inversen keine Aussage möglich (z.B. keine Regel für $a^{-1} + b$).

4.5 Definition (Körper)

Ein kommutativer Ring mit Eins $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ heißt Körper, falls $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$. D.h. jedes $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ ist bezüglich '$\cdot$' invertierbar.

4.6 Beispiel

a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Körper [$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ auch]
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kein Körper, da $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$.

b) $\mathbb{Z}_n^* = \{z \in \mathbb{Z}_n | \mathrm{ggT}(z, n) = 1\}$ Gruppe bezüglich '$\odot$'
$\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ Körper $\Leftrightarrow n$ Primzahl

4.7 Satz (Rechenregeln für Körper: Nullteilerfreiheit)

$(\mathcal{K}, +, \cdot)$ Körper, $a, b \in \mathcal{K}$. Dann gilt

a) alle Rechenregeln für Ringe gelten auch für Körper

b) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$ [Gegenbeispiel: $(\mathbb{Z}_6, \oplus, \odot)$, weil $2 \odot 3 = 0$]

Beweis

'$\Leftarrow$' klar (Satz 4.3i))

'$\Rightarrow$' $ab = 0$. Angenommen $a \neq 0 \Rightarrow b = 1 \cdot b = (a^{-1}a)b = a^{-1} \underbrace{(ab)}_{=0} \overset{4.3i)}{=} 0$ $\square$

Strukturgleichheit von Ringen

4.8 Definition (Ringhomomorphismus, Ringisomorphismus)

Geg. $(\mathcal{R}, +, \cdot)$, $(\mathcal{R}', \boxplus, \boxdot)$ Ringe

i) $\psi : \mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ heißt Ringhomomorphismus, falls $\psi(x + y) = \psi(x) \boxplus \psi(y)$ und $\psi(xy) = \psi(x) \boxdot \psi(y)$ $\forall x, y \in \mathcal{R}$

ii) Wenn ψ bijektiv ist, heißt ψ Ringisomorphismus. In diesem Fall heißen $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ isomorph (d.h. sie sind strukturgleich). Man schreibt $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$

4.9 Beispiel

a) $\psi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$
$\quad x \mapsto x \mod n$
$x + y \to x + y \pmod n, \quad x \cdot y \to x \cdot y \pmod n$
ψ Ringhomomorphismus
Nicht injektiv: $\psi(1) = \psi(n+1) = 1$ 30.11.2016

b) $(\{w, f\}, \mathrm{XOR}, \wedge) \cong (\mathbb{Z}_2, \oplus, \odot)$
Boolsche Algebra, siehe PÜ

Chinesischer Restsatz

4.10 Bemerkung

Gegeben: $m_1, ..., m_n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad M = m_1 \cdot ... \cdot m_n$
$\Rightarrow \underbrace{(a \mod M)}_{r} \mod m_i = a \mod m_i \quad \forall i$

Beweis

Z.z.: $r \equiv a \pmod{m_i}$
Division mit Rest:

$$\begin{aligned} \exists q \in \mathbb{Z} : a &= qM + r \\ &= \underbrace{(q\frac{M}{m_i})}_{\in \mathbb{Z}, \text{ da } m_i | M} \quad m_i + r \\ \Rightarrow a &\equiv r \pmod{m_i} \end{aligned}$$

□

4.11 Chinesischer Restsatz

Gegeben:

- $m_1, ..., m_n \in \mathbb{N}$ paarweise teilerfremd
- $M = m_1 \cdot ... \cdot m_n$
- $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$

Dann existiert $0 \leq x < M$ mit

$$\left.\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}\right\} \underline{\text{Simultane Kongruenz}}$$

Beweis

Es ist $\mathrm{ggT}(m_i, \underbrace{\frac{M}{m_i}}_{M_i}) = 1 \qquad \forall i \in \{1, ..., n\}$.

$\overset{\text{EEA}}{\Rightarrow} \exists\ s_i, t_i \in \mathbb{Z} : t_i m_i + s_i M_i = 1$

Setze: $e_i := s_i M_i \Rightarrow e_i \equiv \begin{cases} 1 \pmod{m_i} \\ 0 \pmod{m_j},\ j \neq i \end{cases}$

$\Rightarrow x \overset{4.10}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \pmod{M}$ ist Lösung der simultanen Kongruenz.

4.12 Beispiel

a) $m_1 = 3, \quad m_2 = 4, \quad m_3 = 5 \Rightarrow M = 60$

Finde $x \in [0, 60)$ mit $x \equiv \begin{cases} 2 \pmod 3 & (= a_1) \\ 3 \pmod 4 & (= a_2) \\ 2 \pmod 5 & (= a_3) \end{cases}$

Es ist

- $M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{60}{3} = 20$
- $M_2 = \frac{60}{4} = 15$
- $M_3 = \frac{60}{5} = 12$

EEA:

- $7 \cdot \overbrace{3}^{m_1} + \underbrace{(-1) \cdot \overbrace{20}^{M_1}}_{e_1} = 1$
- $4 \cdot \overbrace{4}^{m_2} + \underbrace{(-1) \cdot \overbrace{15}^{M_2}}_{e_2} = 1$

$$-\ 5\cdot\overbrace{5}^{m_3}\underbrace{+(-2)\cdot\overbrace{12}^{M_3}}_{e_3}=1$$

$$\Rightarrow x=[2\cdot(-20)+3\cdot(-15)+2\cdot(-24)] \mod 60=-133 \mod 60=47$$

b) Was ist $2^{1000} \mod \underbrace{1155}_{=\underset{m_1}{3}\cdot\underset{m_2}{5}\cdot\underset{m_3}{7}\cdot\underset{m_4}{11}}$?

1) Berechne $2^{1000} \mod 3, 5, 7$ und 11

- $2^{1000} \mod 3=(-1)^{1000} \mod 3=1=a_1$
- $2^{1000} \mod 5=4^{500} \mod 5=(-1)^{500}=1=a_2$
- $2^{1000} \mod 7=\underbrace{2^3}_{=8}{}^{\cdot 333+1} \mod 7=1\cdot 2 \mod 7=2=a_3$
- $2^{1000} \mod 11=\underbrace{2^5}_{=32}{}^{\cdot 200} \mod 11=(-1)^{200}=1=a_4$

2) Suche $0\leq x<1155$ mit $x\equiv\begin{cases}1 \pmod 3\\ 1 \pmod 5\\ 2 \pmod 7\\ 1 \pmod{11}\end{cases}$

Chinesischer Restsatz: $x=331$

4.13 Satz (Eindeutigkeit Chines. Restsatz)

Die Lösung x aus 4.11 ist eindeutig.

Beweis

Z.z.: $\psi:\mathbb{Z}_M\to\mathbb{Z}_{m_1}\times\ldots\times\mathbb{Z}_{m_n},\quad x\mapsto(x \mod m_1,\ldots,\ x \mod m_n)$ ist bijektiv (Ringisomorphismus)

- ψ Ringhomomorphismus:

$$\begin{aligned}\psi(x\oplus y)&=\psi(x+y \mod M)\\&=((x+y \mod M) \mod m_1,\ldots,(x+y \mod M) \mod m_n)\\&\overset{4.10}{=}(x+y \mod m_n,\ \ldots,\ x+y \mod m_n)\\&=\psi(x)\oplus\psi(y)\end{aligned}$$

Analog mit $\psi(x\odot y)=\psi(x)\odot\psi(y)$

- ψ surjektiv:
  Zu jedem n-Tupel aus $\underbrace{\mathbb{Z}_{m_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{m_n}}_{\ni(a_1,...,a_n)}$ gibt es Lösung $x \in \mathbb{Z}_M$ (4.11).

- ψ injektiv:
  Da $|\mathbb{Z}_M| = |\mathbb{Z}_{m_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{m_n}| \Leftrightarrow M = m_1 \cdot ... \cdot m_n$
  D.h. kein Element word doppelt 'getroffen'

$\Rightarrow \psi$ bijektiv, also Isomorphismus $\square$

4.14 Beispiel

Gilt $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$? Nein.
z.B. $\underbrace{\mathbb{Z}_2^* = \{1\}}_{\varphi(2=1)}, \quad \underbrace{\mathbb{Z}_4^* = \{1,3\}}_{\varphi(4)=2}$
Aber: $\mathbb{Z}_8^* = \{1,3,5,7\}$ und $4 = \varphi(8) \neq \varphi(2) \cdot \varphi(4)$

4.15 Korollar

- $M = m_1 \cdot .... \cdot m_n$ mit m_i paarweise teilerfremd und $m_i \in M$
  $\Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot ... \cdot \varphi(m_n)$

- Insbesondere:
  $M = p_1^{a_1} \cdot ... \cdot p_k^{a_k}, \quad p_i \in \mathbb{P}$ (Primzahl), $p_i \neq p_j$ für $i \neq j, \quad a_i \in \mathbb{N}$
  $\Rightarrow \varphi(M) = (p_1 - 1)p_1^{a_1-1} \cdot ... \cdot (p_k - 1)p_k^{a_k-1}$

Beweis

Wegen 4.13 ist $\mathbb{Z}_M \cong \mathbb{Z}_{m_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{m_n}$ mittels ψ.
$\Rightarrow x$ Einheit $\Leftrightarrow \psi(x) = (x \mod m_1, ..., x \mod m_n)$ Einheit
$\Leftrightarrow x \mod m_i$ Einheit $\forall i \Rightarrow \varphi(M) = \varphi(m_1) \cdot ... \cdot \varphi(m_n)$
Es ist $\varphi(p^a) = \underbrace{p^a}_{|\mathbb{Z}_{p^a}|} - \underbrace{p^{a-1}}_{\text{Vielfache von p in } \mathbb{Z}_{p^a}} = (p-1)p^{a-1}$

a	$\lvert\mathbb{Z}_{p^a}\rvert$	Vielfache von p	$\varphi(p^a) = \lvert\mathbb{Z}_{p^a}^*\rvert$
1	p	$0 \cdot p = 0$	$p - 1 = p^1 - p^0$
2	p^2	$k \cdot p, \underbrace{0 \leq k \leq p-1}_{p \text{ Möglichkeiten}}$	$p^2 - p^1$
3	p^3	$kp + k'p^2, \underbrace{0 \leq k, k' \leq p-1}_{p^2 \text{ Möglichkeiten}}$	$p^3 - p^2$

$\square$

Polynomringe

06.12.2016

In Mathe I wurde für den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ folgendes eingeführt:

- Division mit Rest
- Erweiterter Euklidischer Algorithmus
- kgV, ggT, Primzahlzerlegung

4.16 Definition (Polynom)

$\mathcal{K}$ - Körper mit Nullelement $\mathcal{O}$ und Einselement $\mathbb{1}$.

i) Ein Polynom über $\mathcal{K}$ ist ein Ausdruck $f = \underbrace{a_0 x^0}_{a_0} + \underbrace{a_1 x^1}_{a_1 x} + ... + a_n x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathcal{K}$ Koeffizienten von f (auch $f(x)$ anstatt f).
Ist $a_i = 0 \quad \forall \{1, ..., n\}$, so schreibt man $f = 0$ (Nullpolynom)

ii) $\mathcal{K}[x]$ = Menge aller Polynome über $\mathcal{K}$ in einer Variablen x

iii) $f, g \in \mathcal{K}[x]$ sind gleich, wenn gilt

  a) $f = a_0 + ... + a_n x^n$
  $g = b_0 + ... + b_m x^m$ mit $a_n \neq 0,\ b_m \neq 0$
  $\Rightarrow m = n$ und $a_i = b_i \quad \forall i = 1, ..., n$
  oder

  b) $f = 0$ und $g = 0$

4.17 Beispiel

a) $f(x) = f = 3x^2 - \frac{2}{3}x + 1_{\in \mathbb{R}[x]}^{\in \mathbb{Q}[x]}$

b) $g = x^7 + x^2 \in \mathbb{Z}_2[x]$, d.h. Koeffizienten $\in \{0, 1\}$

4.18 Satz + Definition

$\mathcal{K}$ Körper.
$\mathcal{K}[x]$ ist kommutativer Ring mit Eins. Dabei ist für $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$

- $f + g = \sum_{i=0}^{\max\{m,n\}} (a_i + b_i) x^i$

- $f \cdot g = (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)(b_0 + b_1x + ... + b_mxm)$
  $= \underbrace{a_0 \cdot b_0}_{c_0} + \underbrace{(a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)}_{c_1} x + ... + \underbrace{a_nb_m}_{c_{n+m}} x^{n+m}$
  mit $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k \cdot b_{i-k}$ (Faltungsprodukt)
  [Anmerkung: $a_i = 0 = b_j$ für $i > n$ bzw. $j > m$]
- Einselement: $f = 1$
- Nullelement $f = 0$

$\mathcal{K}[x]$ heißt der Polynomring in einer Variablen über $\mathcal{K}$.

Beweis

Ringeigenschaften nachrechnen □

4.19 Bemerkung

- $a_0,\ a_1x,\ a_2x^2, ...,\ a_nx^n$ heißen Monome
- a_nx^n heißt Leitterm von $f = a_0 + ... + a_nx^n$ mit $a_n \neq 0$

4.20 Beispiel

In $\mathbb{Z}_3[x]$:
$f = 2x^3 + 1, \quad g = x - 1 = x + 2$, da $-1 \equiv 2 \pmod 3$

- $f + g = 2x^3 + x + \underbrace{1 + 2}_{\equiv 0 \pmod 3} = 2x^3 + x$
- $f \cdot g = (2x^3 + 1)(x + 2) = 2x^4 + x + \underbrace{4x^3}_{\equiv 1 \pmod 3} + 2 = 2x^4 + x + x^3 + 2$

Grad eines Polynoms

4.21 Definition

$f \in \mathcal{K}[x], \quad f = a_0 + ... + a_nx^n \qquad a_n \neq 0$
n heißt der Grad von f, $\mathrm{grad}(f) = n$
$\mathrm{grad}(0) = -\infty, \quad \mathrm{grad}(g) = 0$, falls g konstant

4.22 Satz

$\mathcal{K}$ Körper, $f, g \in \mathcal{K}[x]$.
$\Rightarrow \mathrm{grad}(f \cdot g) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$
<u>Konvention:</u> $\quad -\infty - \infty = -\infty = -\infty + n = -\infty$

Beweis

- Stimmt für $f = 0$ oder $g = 0$
- Angenommen die Leitterme von f bzw. g sind $a_n x^n$ bzw. $b_m x^m$ mit $a_n \neq 0, \quad b_m \neq 0$.
  $\Rightarrow \mathrm{grad}(f) = n, \quad \mathrm{grad}(g) = m$ und $\underbrace{a_n \cdot b_m x^{n+m}}_{\neq 0, \text{ da } \mathcal{K} \text{ Körper } (4.7)}$ ist Leitterm von $f \cdot g$
  $\Rightarrow \mathrm{grad}(fg) = n + m$ $\square$

4.23 Korollar (Inversen in $\mathcal{K}[x]$)

$\mathcal{K}[x]^* = \{f \in \mathcal{K}[x] \mid \mathrm{grad}(f) = 0\}$ (nur konstante Polynome $\neq 0$ invertierbar)

Beweis

$$f \cdot f^{-1} = 1 \Rightarrow \mathrm{grad}(ff^{-1}) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(f^{-1}) \overset{4.22}{=} \mathrm{grad}(1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{grad}(f) = \mathrm{grad}(f^{-1}) = 0$$ $\square$

Polynomdivision mit Rest

4.24 Bemerkung

Für $b \in \mathcal{K}$ ist $f(b) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i$, falls $f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \in \mathcal{K}[x]$.
Man kann zeigen, dass $\psi_b : \mathcal{K}[x] \to \mathcal{K}$, $f \mapsto f(b)$ ein surjektiver Homomorphismus ist.

4.25 Definition

$\mathcal{K}$ Körper, $f, g \in \mathcal{K}[x]$.
$f | g$, falls $q \in \mathcal{K}[x]$ existiert mit $g = gf$ (nach 4.22: $\mathrm{grad}(f) \leq \mathrm{grad}(g)$).

4.26 Satz (Division mit Rest in $\mathcal{K}[x]$)

$\mathcal{K}$ Körper, $f \in \mathcal{K}[x], \quad 0 \neq g \in \mathcal{K}[x]$.
Dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathcal{K}[x]$ mit $f = qg + r$ und

grad$(r) <$ grad(g).
<u>Bezeichnung</u>: $r = f \mod g, \quad q = f \text{ div } g$

Beweis

vgl. Mathe I für $\mathbb{Z}$, Literatur $\square$

4.27 Beispiel

$f = x^4 + 2x^3 - x + 2$ und $g = 3x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x]$

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^4 + 2x^3 \qquad\qquad - x \quad + 2 \big) : \big(3x^2 - 1\big) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \dfrac{-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}}{3x^2 - 1} \\
\underline{\;-x^4 \qquad\quad + \tfrac{1}{3}x^2} \\
\qquad\quad 2x^3 + \tfrac{1}{3}x^2 \quad - x \\
\qquad \underline{-2x^3 \qquad\quad + \tfrac{2}{3}x} \\
\qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}x \quad + 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\tfrac{1}{3}x^2 \qquad\quad + \tfrac{1}{9}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\tfrac{1}{3}x + \tfrac{19}{9}
\end{array}
$$

Mit $\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = q$ und $-\frac{1}{3}x + \frac{19}{9} = r$ (Rest).
Aufhören bei grad$(r) <$ grad(g)!

4.28 Korollar

$\mathcal{K}$ Körper, $a \in \mathcal{K}, \quad f \in \mathcal{K}[x]$

$\underbrace{(x - a)}_{\text{teilt f restlos}} \; |f \Leftrightarrow f(a) = 0$ 07.12.2016

Beweis

($\Rightarrow$) $\exists q \in \mathcal{K}[x] : f = q(x - a) \Rightarrow f(a) = q(a) \underbrace{(a - a)}_{0} = 0$

($\Leftarrow$) Division mit Rest: $f = q(x - a) + r$, grad$(r) <$ grad$(x - a)$ (da $q|f$)
$\Rightarrow$ grad$(r) \leq 0$, d.h. $r = c \neq 0$ konstant oder $r = 0$
$0 = f(a) = q(a) \underbrace{(a - a)}_{=0} + r(a) \Rightarrow r = 0$ $\square$

Euklidischer Algorithmus in $\mathcal{K}[x]$

4.29 Definition (Normiertheit)

$\mathcal{K}$ Körper.

i) $f = a_0 + ... + a_n x^n \in \mathcal{K}[x], \quad a_n \neq 0$ heißt <u>normiert</u>, wenn $a_n = 1$

ii) $g, h \in \mathcal{K}[x], \quad g, h$ nicht beide 0.
$f = \text{ggT}(g, h)$, falls $f \in \mathcal{K}[x]$ normiertes Polynom von maximalem Grad ist, das g und h teilt.

iii) $g, h \in \mathcal{K}[x] \setminus \{0\}$.
$f = \text{kgV}(g, h)$, falls $f \in \mathcal{K}[x]$ ein normiertes Polynom von minimalem Grad ist, das von g und h geteilt wird.

4.30 Bemerkung

a) $g = x, \quad h = x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$

- $g | x(x+1), \quad h | x(x+1)$
- $g | 2x(x+1), \quad h | 2x(x+1)$
- $\text{kgV}(g, h) = x(x+1) = x^2 + x$, da $2x^2 + 2x$ nicht normiert!
  $\rightarrow$ Normierung macht Ergebnisse eindeutig.

b) Normierung erfolgt, indem man durch Koeffizienten des Leitterms 'teilt':
$f = a_n x^n + ... + a_0 \Rightarrow a_n^{-1} \cdot f = \underbrace{x^n + ... + a_n^{-1} a_0}_{\text{normiert}}$

c) $\text{kgV}(g, h)$ existiert und ist eindeutig.

- Existenz: $g | gh, \quad h | gh$ (gh gemeinsames Vielfaches)
- Eindeutig : $f_1 = \text{kgV}(g, h), \quad f_2 = \text{kgV}(g, h)$
  $\Rightarrow g, h | f_1$ und $g, h | f_2$
  $\Rightarrow g, h | (f_1 - f_2)$
  f_1, f_2 normiert und von gleichem (minimalen) Grad.
  $\Rightarrow$ grad $(f_1 - f_2) <$ grad (f_1)
  $\Rightarrow f_1 - f_2 = 0$, denn sonst wäre $\text{kgV}(g, h) = f_1 - f_2$ $\lightning$zur Minimalität des Grades
  $\Rightarrow$ kgV eindeutig.

d) $\text{ggT}(g, h)$ existiert und ist eindeutig. Beweis folgt wie in Mathe I für $\mathbb{Z}$ aus:

4.31 Lemma von Bézout

$g, h \in \mathcal{K}[x]$ nicht beide gleich 0.
$\Rightarrow \exists s, t \in \mathcal{K}[x] : sg + th = \text{ggT}(g, h)$

Beweis

Siehe 4.33 (EEA).

Beweis Eindeutigkeit von ggT

$f = \text{ggT}(g, h), \quad f' = \text{ggT}(g, h)$
$(f, f'$ Funktionen desselben Grades und normiert)
$\Rightarrow \exists s', t' \in \mathcal{K}[x] : f' = s' \cdot g + t' \cdot h$

$f|g \wedge f|h \Rightarrow f|f'$
$\Rightarrow \exists q \in \mathcal{K}[x] : f' = qf$
$\Rightarrow \text{grad}(f') = \text{grad }(q) + \text{grad }(f)$

$\text{grad }(f) = \text{grad }(f') \Rightarrow \text{grad }(q) = 0$
$\text{grad }(q) = 0 \Rightarrow q = c \neq 0, \quad c \in \mathcal{K}$
$\Rightarrow f' = cf$
f, f' normiert $\Rightarrow c = 1$ $\square$

4.32 Satz: Euklidischer Algorithmus EA in $\mathcal{K}[x]$

Eingabe: $g, h \in \mathcal{K}[x]$, nicht beide gleich 0

if $h = 0$ **then**
    $y := g$
end if
if $h|g$ **then**
    $y := h$
end if
if $h \neq 0 \wedge h \nmid g$ **then**
    $x := g, \quad y := h$
    while $(x \mod y) \neq 0$ **do**
        $r := x \mod y$
        $x := y, \quad y := r$
    end while

end if
$d \coloneqq a_n^{-1} y$ (Normierung von y, siehe 4.30)
Ausgabe: $d = \mathrm{ggT}(g, h)$

Beweis

Wie für $\mathbb{Z}$ in Mathe I.
Hinweis: $d|g$ und $d|h \Leftrightarrow d|(g \mod h)$ und $d|h$.
Begründung: $g = qh + (g \mod h)$.

4.33 Satz: Erweiterter Euklidischer Algorithmus EEA in $\mathcal{K}[x]$

Eingabe: $g, h \in \mathcal{K}[x]$, nicht beide gleich 0
if $h = 0$ **then**
  $y \coloneqq g, \quad s \coloneqq 1, \quad t \coloneqq 0$
end if
if $h|g$ **then**
  $y \coloneqq h, \quad s \coloneqq 0, \quad t \coloneqq 1$
end if
if $h \neq 0 \wedge h \nmid g$ **then**
  while $(x \mod y) \neq 0$ **do**
    $q \coloneqq x \operatorname{div} y, \quad r \coloneqq x \mod y$
    $s \coloneqq s_1 - qs_2, \quad t \coloneqq t_1 - qt2$
    $s_1 \coloneqq s_2, \quad s_2 \coloneqq s$
    $t_1 \coloneqq t_2, \quad t_2 \coloneqq t$
    $x \coloneqq y, \quad y \coloneqq r$
  end while
end if
$d \coloneqq a_n^{-1} y$ (Normierung von y, siehe 4.30)
$s \coloneqq a_n^{-1} s, \quad t \coloneqq a_n^{-1} t$ (Normierung von s, t, siehe 4.30)
Ausgabe: $d = \mathrm{ggT}(g, h), \quad s, t$ für $\mathrm{ggT}(g, h) = sh + tg$

4.34 Beispiel

$g = x^4 + x^3 + 2x^2 + 1, \quad h = x^3 + 2x^2 + 2 \qquad g, h \in \mathbb{Z}_3[x]$

x	y	s_1	s_2	s	t_1	t_2	t	q	r
g	h	1	0		0	1			
h	$x^2 + x$	0	1	1	1	$2x + 1$	$2x + 1$	$x + 2$	$x^2 + x$
$x^2 + x$	$\underbrace{2x + 2}_{\text{ggT unnormiert}}$	1	$2x + 2$	$2x + 2$	$2x + 1$	x^2	x^2	$x + 1$	$2x + 2$

NR: (Achtung: Polynomdivision in $\mathbb{Z}_3[x]$, nicht normale Polynomdivision!)

- $$\begin{array}{l}
(x^4 + x^3 + 2x^2 \qquad +1) \;:\; (x^3 + 2x^2 + 2) = \overbrace{x + 2}^{q} \\
\underline{-x^4 - 2x^3 \qquad -2x} \\
\quad 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \\
\quad \underline{-2x^3 - x^2 \qquad - 1} \\
\qquad x^2 + x \qquad\qquad (= r)
\end{array}$$

- $$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 \qquad + 2) \;:\; (x^2 + x) = x + 1 \\
\underline{-x^3 - x^2} \\
\qquad x^2 \qquad +2 \\
\quad \underline{-x^2 - x} \\
\qquad 2x + 2 \qquad\qquad (= r)
\end{array}$$

- $t = 1 - (x + 1)(2x + 1) = 1 - (2x^2 + 1) = x^2$

- $$\begin{array}{l}
(x^2 + x) \;:\; (2x + 2) = 2^{-1}x \\
\underline{-x^2 - x} \\
\qquad 0
\end{array}$$

- Normierung von y:

$$\begin{aligned}
d &= a_n^{-1} y = 2^{-1}(2x + 2) \\
&= x + 1 \\
s &= 2^{-1}(2x + 2) = x + 1 \\
t &= 2^{-1} \cdot x^2 = 2x^2, \text{ da } 2^{-1} = 2
\end{aligned}$$

- Probe:

$$\begin{aligned} d = sg + th &= (x+1)(x^4 + x^3 + 2x^2 + 1) + (2x^2)(x^3 + 2x^2 + 2) \\ &= x^5 + x^4 + 2x^3 + x + x^4 + x^3 + 2x^2 + 1 + 2x^5x^4 + x^2 \\ &= 3x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1 \\ &= 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 1 \\ &= x + 1 = \text{ggT}(g, h) \end{aligned}$$

Primelemente in $\mathcal{K}[x]$

Primelemente sind Polynome, die sich nicht als Produkt von zwei Polynomen vom Grad ≥ 1 darstellen lassen. So ist z.B. $2x^2 + 2x = 2x(x+1)$ kein Primelement, jedoch sind die Faktoren $2x$ und $x+1$ Primelemente.

4.35 Definition (Primelemente = irreduzible Polynome)

13.12.2016

$p \in \mathcal{K}[x]$ mit $\text{grad}(p) \geq 1$ heißt irreduzibel, falls gilt:

$$\forall f, g \in \mathcal{K}[x] : p = f \cdot g \text{ ist } \text{grad}(f) = 0 \text{ oder } \text{grad}(g) = 0$$

4.36 Beispiel

a) $x + 1, \quad 2x \in \mathbb{R}[x]$ irreduzibel.
Allg.: $ax + b \quad (a \neq 0)$ irreduzibel in $\mathcal{K}[x]$

b) $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ ist irreduzibel:
Angenommen nicht, dann $x^2 - 2 = \underbrace{(ax+b)}_{\text{Nullstelle:} -\frac{b}{a}} \underbrace{(cx+d)}_{\text{Nullstelle:} -\frac{d}{c}} \qquad (a, c \neq 0)$
$\Rightarrow x^2 - 2$ hat auch Nullstelle $-\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ ↯
Widerspruch: Nullstelle von $x^2 - 2$ sind aus $\mathbb{R}$

c) $x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$ nicht irreduzibel:
$x^2 - 2 = \underbrace{(x\sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]} \cdot \underbrace{(x + \sqrt{2})}_{\in \mathbb{R}[x]}$

d) $x^2 + 1$ hat in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle und ist somit irreduzibel in $\mathbb{R}[x]$.
Anmerkung: In $\mathbb{C}[x]$ ist $x^2 + 1$ kein Primelement (siehe Kapitel 5)

e) $x^2 + 1 = (x+2)(x+3)$ in $\mathbb{Z}_5[x]$
$\rightarrow$ nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}_5[x]$

4.37 Satz

$f \in \mathcal{K}[x], \quad \text{grad}(f) \geq 1$. Dann sind äquivalent:

(1) f irreduzibel

(2) $g, h \in \mathcal{K}[x], f | g \cdot h \Rightarrow f|g \vee f|h$

Beweis

(1) $\Rightarrow$ (2)

$$
\begin{aligned}
\text{Angenommen } f \nmid g &\overset{(1)}{\Rightarrow} \text{ggT}(f,g) = 1 \\
&\overset{\text{Bézout}}{\Rightarrow} \exists s,t \in \mathcal{K}[x] : sf + tg = 1 \\
&\Rightarrow sfh + tgh = h \\
&\text{Wissen:} f|fsh \text{ und } f|tgh \quad (f|gh \text{ Voraussetzung von (2)}) \\
&\Rightarrow f|h
\end{aligned}
$$

(2) $\Rightarrow$ (1)

Angenommen $f = gh$. Zeigen: $\text{grad}(h) = 0$.

$$
\begin{aligned}
f = gh &\overset{(2)}{\Rightarrow} f|g \vee f|h \quad \text{O.B.d.A: } f|g \\
&\Rightarrow \text{grad}(f) \underset{f|g}{\leq} \text{grad}(g) \underset{h \neq 0}{\leq} \text{grad}(h) + \text{grad}(g) = \text{grad}(\underbrace{h \cdot g}_{=f})
\end{aligned}
$$

(damit müssen also alle '$\leq$' sein: '$=$')

$\Rightarrow \text{grad}(h) = 0$

$\square$

4.38 Korollar

$f \in \mathcal{K}[x], \quad \text{grad}(f) = n \geq 1$. Dann:

1) f hat höchstens n Nullstellen $a_1, ..., a_k \in \mathcal{K}$

2) $f = (x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_k) \cdot \bar{f}$ mit $\text{grad}(\bar{f}) = \text{grad}(f - k)$.
[f normiert, $k = n \Rightarrow f = (x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_n)$]

Beweis

$\underline{n = 1}$: $f = ax + b$ hat Nullstelle $-a^{-1}b$

$\underline{n > 1}$: Hat f keine Nullstelle, so fertig. Sonst:
Sei a Nullstelle $\Rightarrow f = (x-a)g, \quad \text{grad}(g) = n-1$.
Sei $b \neq a$ weitere Nullstelle $\Rightarrow (x-b)|(x-a)g$
$x - b$ irreduzibel, $(x-b) \not| (x-a) \Rightarrow (x-b)|g$
$\Rightarrow b$ Nullstelle von g

Per Induktion hat $g \quad n-1$ Nullstellen. Behauptung folgt. □

4.39 Satz

$f \in \mathcal{K}[x]$ mit Leitterm $a_n x^n, \quad n \geq 1$
$\Rightarrow$ Es existieren eindeutig bestimmte irreduzible Polynome $p_1, ..., p_l$ und $m_1, ..., m_l \in \mathbb{N}$ mit $f = a_n p_1^{m_1} \cdot ... \cdot p_l^{m_l}$

Beweis

Wie in $\mathbb{Z}$. □

4.40 Bemerkung

$(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ Körper $\Leftrightarrow n$ Primzahl
Analog in $\mathcal{K}[x]$:
Sei $f \in \mathcal{K}[x], \quad \text{grad}(f) = n$
$(\mathcal{K}[x]_n, +, \odot_f)$ mit

- $\mathcal{K}[x]_n := \{g \in \mathcal{K}[x] \mid \text{grad}(g) < n\}$
- $g \odot_f h = (g \cdot h) \mod f$

ist kommutativer Ring mit Eins.

$\mathcal{K}[x]_n^* = \{g \in \mathcal{K}[x]_n \mid \text{ggT}(g, f) = 1\}$

Man kann zeigen:

a) $\mathbb{Z}_p[x]_n$ Körper der Ordnung $p^n \Leftrightarrow f$ irreduzibel, p Primzahl.

b) Jeder endliche Körper hat Primzahlpotenzordnung und ist durch seine Ordnung bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt.

5 Komplexe Zahlen

Problem (16 Jhdt.):

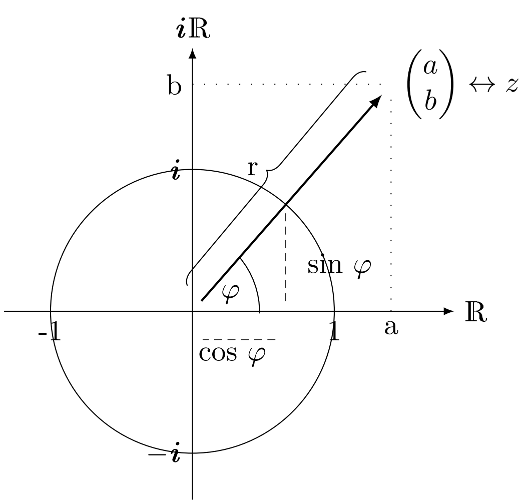
- Gleichungen wie z.B. $x^2 = -1$ haben keine reelle Lösung. Dagegen hat $x^2 = -1$ imaginäre Lösungen ('imaginaires' - Descartes) $x_{1/2} = \pm\sqrt{-1}$
- $x^4 = 1$ hat zwei reelle Lösungen $x = \pm 1$ und zwei imaginäre Lösungen $x = \pm\sqrt{-1}$
- $x^2 + 2x + 2$ hat die imaginären Lösungen $-1 \pm \sqrt{-1}$

5.1 Definition

- $\boldsymbol{i} := \sqrt{-1}$ heißt imaginäre Einheit (Euler 1777)
- $\mathbb{C} := \{a + b\boldsymbol{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ Menge der komplexen Zahlen
- Für $z = a + b\boldsymbol{i}$ heißt $\operatorname{Re}(z) := a$ Realteil von z und $\operatorname{Im}(z) := b$ Imaginärteil von z

Gaußsche Zahlenebene und Polarkoordinaten

5.2 Gaußsche Zahlenebene (1831)



Beobachtung: $a + b\boldsymbol{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
('korrespondiert eineindeutig zu')

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$a = r \cdot \cos(\varphi)$
$b = r \cdot \sin(\varphi)$

Daraus ergibt sich die Darstellung in Polarkoordinaten:
$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$ bzw. $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$
$\Rightarrow a + b\boldsymbol{i} = r(\cos(\varphi) + \boldsymbol{i}\sin(\varphi))$

5.3 Definition

14.12.2016

Für $z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ ist $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ der Betrag von z.

5.4 Bemerkung

Jede Zahl $z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich durch den Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ und durch den Betrag $|z|$ eineindeutig darstellen: $z = |z| \underbrace{(\cos(\varphi) + \boldsymbol{i}\sin(\varphi))}_{e^{i\varphi}}$

5.5 Formel von Euler

$e^{\boldsymbol{i}\varphi} = \cos(\varphi) + \boldsymbol{i}\sin(\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R}$

Beweisidee (später mit Taylorreihen)

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{i}\varphi)^k}{k!}}_{\text{später: } e^{i\varphi}} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!}}_{\cos(\varphi),\text{ gerade } k} + \boldsymbol{i} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin(\varphi),\text{ ungerade } k}$$

Anmerkung: $\boldsymbol{i}^0 = 1, \quad \boldsymbol{i}^1 = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i}^2 = -1, \quad \boldsymbol{i}^3 = -\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i}^4 = \boldsymbol{i}^0 = 0$
$\Rightarrow \langle \boldsymbol{i} \rangle$ zyklische Gruppe der Ordnung 4

5.6 Bemerkung

Damit ergibt sich für $z \in \mathbb{C}$ die Darstellung $z = |z|e^{\boldsymbol{i}\varphi}, \quad \varphi$ wie in Abbildung 5.2

5.7 Bemerkung

$e^{\boldsymbol{i}\varphi}$ liegt für $\varphi \in \mathbb{R}$ auf dem Einheitskreis, d.h. $\varphi \to e^{\boldsymbol{i}\varphi}$ ist Kreisfunktion. Für Frequenzanalyse (Fourierreihen):
t... Zeit, $\omega \in \mathbb{Z}$... Frequenz.
Dann beschreibt $e^{\boldsymbol{i}(t \cdot 2\pi)\omega}$ eine Schwingung, z.B.:

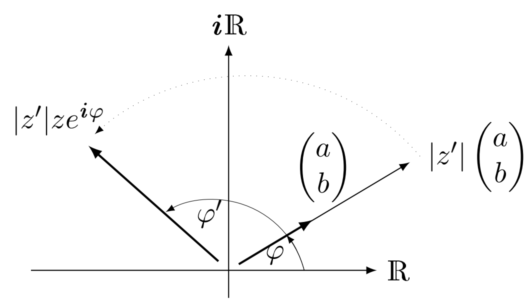
- $\omega = 1$: in einer Zeiteinheit (ZE) wird Einheitskreis 1 mal durchlaufen
- $\omega = k$: in einer ZE wird Einheitskreis k mal durchlaufen

Verknüpfungen auf $\mathbb{C}$

1) $(\mathbb{C}, +) \cong (\mathbb{R}^2, +)$, d.h. $(a + b\boldsymbol{i})(a' + b'\boldsymbol{i}) = (a + a') + (b + b')\boldsymbol{i}$ (Vektoraddition)

2) Wie wählt man Multiplikation, so daß $\mathbb{C}$ Körper wird?
Man möchte, dass Potenzregel gilt, z.B:
$e^{\boldsymbol{i}\varphi} \cdot e^{\boldsymbol{i}\varphi'} = e^{\boldsymbol{i}(\varphi+\varphi')} \Leftrightarrow$
$(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \boldsymbol{i}\sin\varphi') = \cos(\varphi+\varphi') + \boldsymbol{i}\sin(\varphi+\varphi')$
Damit scheidet die komponentenweise Multiplikation aus. Mit den üblichen Rechenregeln aus $\mathbb{R}$:
$(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)(\cos\varphi' + \boldsymbol{i}\sin\varphi') =$
$\underbrace{\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'}_{\cos(\varphi+\varphi')} + \boldsymbol{i}\underbrace{(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi')}_{\sin(\varphi+\varphi')}$

Für $z = a + b\boldsymbol{i} = |z|e^{\boldsymbol{i}\varphi}$ und $z' = a' + b'\boldsymbol{i} = |z'|e^{\boldsymbol{i}\varphi'}$ ist das Produkt $zz' = z|z|e^{\boldsymbol{i}\varphi'} = |z'||z|e^{\boldsymbol{i}(\varphi+\varphi')}$ eine Drehstreckung des Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



3) Die Inverse einer Drehstreckung $re^{\boldsymbol{i}\varphi}$ ist dann eine Stauchung $\frac{1}{\varphi}$ verknüpft mit einer Drehung um $-\varphi$:
$z = re^{\boldsymbol{i}\varphi} \Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{r}e^{\boldsymbol{i}-\varphi}$, da $zz^{-1} = r\frac{1}{r}e^{\boldsymbol{i}(\varphi-\varphi)} = 1 \cdot e^0 = 1$

In der Schreibweise $z = a + b\boldsymbol{i}, \quad z' = a' + b'\boldsymbol{i}$ ergibt sich:
$zz' = (a + b\boldsymbol{i})(a' + b'\boldsymbol{i}) = aa' - bb' + (ab' + ba')\boldsymbol{i}$, denn
$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi, \quad a' = r'\cos\varphi', \quad b' = r'\sin\varphi'$.

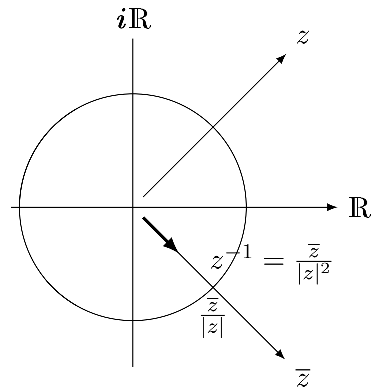
Für $z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$ ist die Inverse
$z^{-1} = \frac{1}{a+b\boldsymbol{i}} = \frac{a-b\boldsymbol{i}}{(a+b\boldsymbol{i})(a-b\boldsymbol{i})} = \frac{a-b\boldsymbol{i}}{a^2-\boldsymbol{i}^2b^2} = \frac{a-b\boldsymbol{i}}{a^2+b^2}$

5.8 Definition

Falls $z = a + b\boldsymbol{i} \in \mathbb{C}$, heißt $\bar{z} := a - b\boldsymbol{i}$ die zu z Konjugierte.

5.9 Bemerkung

- Es folgt $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$
- $z \cdot \bar{Z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$



5.10 Satz

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit

- $(a + b\boldsymbol{i}) + (a' + b'\boldsymbol{i}) = (a + a') + (b + b')\boldsymbol{i}$ und
- $(a + b\boldsymbol{i})(a' + b'\boldsymbol{i}) = aa' - bb' + (ab' + a'b)\boldsymbol{i}$

ist ein Körper.

Nullelement: $\mathcal{O} = 0 + 0\boldsymbol{i}$
Einselement: $\mathbb{1} = 1 + 0\boldsymbol{i}$

Beweis

Nachrechnen. $\square$

Beispiel

- $(1 + \boldsymbol{i}) = \sqrt{2}e^{\boldsymbol{i} \cdot \frac{\pi}{4}}$
- $(2 + \boldsymbol{i})(3 - 4\boldsymbol{i}) = 6 + 4 + (3 - 8)\boldsymbol{i} = 10 - 5\boldsymbol{i}$
- $\frac{\boldsymbol{i}+1}{2\boldsymbol{i}-1} = \frac{(\boldsymbol{i}+1)(2\boldsymbol{i}+1)}{\underbrace{(2\boldsymbol{i} - 1)}_{z}\underbrace{(2\boldsymbol{i} + 1)}_{\bar{z}}} = \frac{1-2+\boldsymbol{i}(2+1)}{2^2+1^2} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\boldsymbol{i}$

5.11 Rechenregeln (Konjunktion, Betrag)

$w, z \in \mathbb{C}$

a) $\overline{w \pm z} = \overline{w} \pm \overline{z}$
$\overline{w \cdot z} = \overline{w} \cdot \overline{z}$
$\overline{\overline{z}} = z$
$\Rightarrow z \mapsto \bar{z}$ Körperisomorphismus

b) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2\boldsymbol{i}}$

c) $|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (positive Definitheit)

d) $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$

e) $|wz| = |w| \cdot |z|$

f) $|w + z| \leq |w| + |z|$ Dreiecksungleichung
$|w - z| \geq |w| - |z|$ (Beweis: Übung)

5.12 Bemerkung

a) Alternative Konstruktion von $\mathbb{C}$.:
4.40: $\mathcal{K}[x]_n$ wird Körper, wenn man durch irreduzibles Polynom f vom Grad n teilt (Modulorechnung).
Mit $\mathcal{K} = \mathbb{R}, \quad n = 2, \quad f = x^2 + 1$ ist

$$\begin{aligned}(a + bx) \odot_f (a' + b'x) &= aa' + bb'x^2 + (ab' + ba')x \quad \mathrm{mod}\ f \\ &= (aa' - bb') + (ab' + ba')x\end{aligned}$$

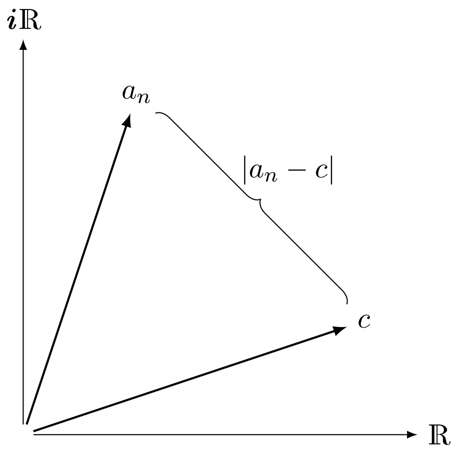
Statt x schreibt man $\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{i}^2 = -1$

b) $x^2 + 1 = (x - \boldsymbol{i})(x + \boldsymbol{i})$ ist nicht irreduzibel in $\mathbb{C}[x]$.
Tatsächlich besitzt in $\mathbb{C}$ jede quadratische Gleichung 2 Lösungen.

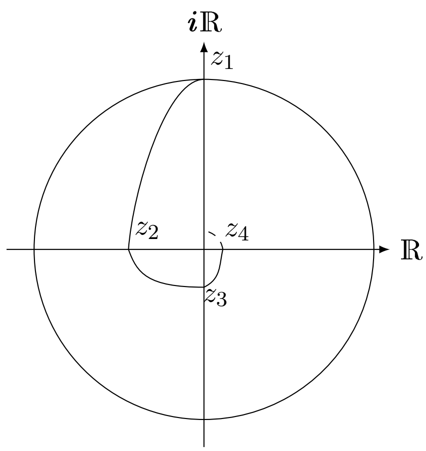
Allgemein: Fundamentalsatz der Algebra:
$f \in \mathbb{C}[x], \quad a_n x^n$ Leitterm, $n \geq 1$.
$\Rightarrow f$ hat genau n Nullstellen $b_1, ..., b_n$ (nicht notw. verschieden) mit
$f = a_n(x - b_1) \cdot ... \cdot (x - b_n)$
Das heißt, lineare Polynome $ax+b$ mit $a \neq 0$ sind die einzigen Primelemente in $\mathbb{C}[x]$. 20.12.2016

c) Wurzelberechnung: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$\Rightarrow \pm\sqrt{z} = \pm\sqrt{|z|}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$, da
$(e^{i\psi})^2 = e^{i2\psi} = e^{i\psi} \cdot e^{i\psi}$

d) Übertragung des Grenzwertes von Folgen/Funktionen in $\mathbb{R}$ auf Folgen in $\mathbb{C}$:



$a_n \to c, \quad a_n, c \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : \quad \underbrace{|a_n - c|}_{\text{Abstand von a und c}} \quad < \epsilon$



$z_n = \frac{1}{n} e^{in\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$

$z_1 = e^{\boldsymbol{i}\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{i}$
$z_2 = \frac{1}{2} e^{\boldsymbol{i}\pi} = -0.5$
...

- Konvergenz von Reihen in $\mathbb{C}$
- Aus absoluter Konvergenz folgt Konvergenz (mit $\triangle$-Ungleichung)
  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ist absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ konvergiert.
  Beispiel: $\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}}_{\text{später } = e^z}$ konvergiert $\forall z \in \mathbb{C}$, insbesondere für $z = \boldsymbol{i}\varphi$ (5.5)

e) $\mathbb{C}$ hat alle analytischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$, außer:
Auf $\mathbb{C}$ gilt es keine vollständige Ordnung $\leq$, die mit $+$ und $\cdot$ verträglich wäre, d.h. für die gelten würde

$$a \leq b, \quad c \leq d \Rightarrow a + c \leq b + d$$
$$a \leq b, \quad r \geq 0 \Rightarrow ra \leq rb$$

Wdh. zu $\mathbb{C}$ (falls Skizzen aus der Vorlesung gewünscht: Mail schreiben, wird dann hinzugefügt)

- Komplexe Zahl: $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$
  Im Folgenden ist $z = a + bi, z' = a' + b'i \in \mathbb{C}$
  z.B. $x^2 + 2x + 3$ hat in $\mathbb{C}$ Nst.
  $x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}i$

- Es gibt 2 Darstellungen:

  1) $z = a + bi, z.B. z = 2 + 2i$
     $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8}$
  2) Polarkoordinaten:
     $z = |z|e^{i\varphi}\ z^* = \cos(\frac{\pi}{4}) \cdot i \sin(\frac{\pi}{4}) = e^{i\frac{\pi}{4}}$
     $\Rightarrow z = |z|z^* = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi}{4}}$

- Formel von Euler $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

- Addition: $z + z' = a + a' + (b + b')i$
  Man sieht hier : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

- Multiplikation:

$$\begin{aligned} zz' &= (a + bi)(a' + b'i) \\ &= aa' - bb' + (ab' + a'b)i \\ &= |z||z'|e^{i\varphi}e^{i\varphi'} \\ &= |z||z'|e^{i(\varphi+\varphi')} \end{aligned}$$

- (Drehstreckung)
  z.B.:
  $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$
  $(1 + i)(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{2}e^{i(\frac{7\pi}{12})}$
  (Drehung um 60° von $1 + i$)

- $\bar{z} = a - bi$
  $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$
  z.B. $z = 1 + 3i, \bar{z} = 1 - 3i, z\bar{z} = 1 + 9 \Rightarrow |z| = \sqrt{10}$

6 Lineare Abbildungen

Bemerkung

Ein $\mathcal{K}-$VR besitzt Skalare $\lambda \in \mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ Körper.
Bisher $\mathcal{K} = \mathbb{R}$.
Speziell: $\mathcal{K}^n = \{v = (v_1, ..., v_n) \mid v_i \in \mathcal{K} \ \ \forall i = 1, ..., n\}$ ist $\mathcal{K}-$Vektorraum.
$\mathbb{Z}_2^2$ ist $\mathbb{Z}_2-$Vektorraum:
$\mathbb{Z}_2^2 = \{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$

- $v + w = \begin{pmatrix}v_1 + w_1 \mod 2\\ v_2 + w_2 \mod 2\end{pmatrix} \qquad v, w \in \mathbb{Z}_2^2$
- $\lambda v = \begin{pmatrix}\lambda v_1 \mod 2\\ \lambda v_2 \mod 2\end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{Z}_2, \ \ v \in \mathbb{Z}_2^2$
- Nullelement: $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

6.1 Definition

V, W $\mathcal{K}-$Vektorräume.

i) $\varphi : V \to W$ heißt lineare Abbildung, falls

  a) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

  b) $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) \quad \forall v \in V \ \ \forall\lambda \in \mathcal{K}$

ii) Ist die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ bijektiv, so heißt φ (Vektorraum-)Isomorphismus, man schreibt $V \cong W \quad (V$ isomorph zu $W)$

Bemerkung

Erfüllt φ Bedingung i), so heißt φ auch (Vektorraum-)Homomorphismus.

6.2 Bemerkung

i) $\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$

ii) $\varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(v_i)$

6.3 Beispiel

a) Nullabbildung $\varphi : V \to W, \quad v \mapsto \mathcal{O}$ linear

b) $\varphi : V \to V, \quad v \mapsto \mu v$ für festes $\mu \in \mathcal{K}$ linear

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix}$ Spiegelung an x_1x_2- Ebene, linear

d) $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ nicht linear [$x \mapsto x^2$ nicht linear]

6.4 Bemerkung

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K}$ Körper $\overset{2.6}{\Rightarrow} \varphi : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m, \quad v \mapsto Av$ linear
Zeigen später: Alle linearen Abbildungen $\varphi : \mathcal{K}^n \to \mathcal{K}^m$ lassen sich durch Matrix $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K})$ darstellen.

Kern und Rang

Motivation

Gegeben: LGS $Ax = b$ mit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{K}), \quad b \in \mathcal{K}^m$
Gesucht: Lösung $x \in \mathcal{K}^n$
z.B.: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Spezielle Lösung: $x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ist auch

$$\underbrace{A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\text{Gerade}} = A(x_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}) = \underbrace{Ax_0}_{b} + \underbrace{A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\mathcal{O}} = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \text{ ist Lösung von } Ax = b$$

$$\Rightarrow H' = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \}, \quad H = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \} \text{ (s.u.)}$$

6.5 Definition

$Ah = \mathcal{O}, \quad h \in \mathcal{K}^n$ heißt <u>homogenes LGS.</u>
$\underbrace{H}_{\ker A\text{ , vgl. 6.8}} := \{h \in \mathcal{K}^n \mid Ah = \mathcal{O}\}$ <u>Lösungsraum</u> des homogenen LGS.

6.6 Satz

21.12.2016

Angenommen, es existiert eine Lösung x_0 von $Ax = b$. Dann ist
x Lösung $\Leftrightarrow x = x_0 + h, \quad h \in H$

Beweis

($\Rightarrow$) x Lösung $\Rightarrow \mathcal{O} = Ax - Ax_0 = A(\underbrace{x - x_0}_{=:h}) \Rightarrow h \in H$

($\Leftarrow$) $x = x_0 + h, \quad h \in H \Rightarrow Ax = A(x_0 + h) = Ax_0 + \underbrace{Ah}_{=\mathcal{O}} = b$ $\square$

Bemerkung

- Wenn x Lösung von $Ax = b$, so setzt sich x zusammen aus spezieller Lösung x_0+Lösung von homogenem LGS.
- Anzahl Lösungen von $Ax = b$ ist gleich der Anzahl der Lösungen von $Ax = \mathcal{O}$ dim(Lösungsraum) = dim(H)
- H heißt Kern von A

6.7 Satz

$\varphi : V \to W$ linear

i) $U \leq V$ UVR $\Rightarrow \underbrace{\varphi(U)}_{\text{Bild von } U} \leq W$ UVR von W.

ii) $\dim(U) < \infty \Rightarrow \dim(\varphi(U)) \leq \dim(U)$

Beweis

i) – $\mathcal{O} \in U \Rightarrow \varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \in \varphi(U)$
  – $v, w \in U \Rightarrow \varphi(v) + \varphi(w) = \varphi(\underbrace{v + w}_{\in U}) \in \varphi(U)$

- $\lambda \in \mathcal{K}, \quad v \in U \Rightarrow \lambda\varphi(v) = \varphi(\underbrace{\lambda v}_{\in U}) \in \varphi(U)$

ii) $\varphi : V \to W$ linear
$\{u_1, ..., u_k\}$ Basis von U $[u \in U \Rightarrow u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_k u_k]$
$\Rightarrow$ $\{\varphi(u_1), ..., \varphi(u_k)\}$ Erzeugendensystem von U, enthält Basis von U $\Rightarrow$ Behauptung $\square$

6.8 Definition

i) $\varphi : V \to W$ linear, $\dim(V) < \infty$.
Dann heißt $\dim(\underbrace{\varphi(V)}_{\text{UVR wegen 6.7}})$ Rang von φ, $\mathrm{rg}(\varphi)$.
Im Beispiel (Motivation) ist $\mathrm{rg}(A) = 2$, weil die Matrix auf eine Ebene abbildet.
$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} v_2 + \underbrace{\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}}_{\mathcal{O}} v_3$$

ii) $\varphi : V \to W$ linear.
$\ker(\varphi) = \{v \in V \mid \varphi(v) = \mathcal{O}\}$ heißt Kern von φ.
Im Beispiel (Motivation) ist $H = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\} = \ker(A)$, da jeder Gerade dieser Form auf den Nullvektor, $\mathcal{O}$, abgebildet wird.

6.9 Satz

$\varphi : V \to W$ linear

i) $\ker(\varphi)$ ist UVR von V

ii) φ injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker(\varphi) = \{\mathcal{O}\}$

Beweis

i)
- $\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O} \in \ker(\varphi)$
- $u, v \in \ker(\varphi) \Rightarrow \underbrace{\varphi(u)}_{=\mathcal{O}} + \underbrace{\varphi(v)}_{=\mathcal{O}} = \mathcal{O} = \varphi(u + v) \Rightarrow u + v \in \ker(\varphi)$
- $\lambda \in \mathcal{K}, v \in \ker(\varphi) \Rightarrow \mathcal{O} = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \Rightarrow \lambda v \in \ker(\varphi)$

ii) $(\Rightarrow)$ φ injektiv, $\varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$.
Da φ injektiv, kannn kein weiteres Element auf $\mathcal{O}$ abgebildet werden.

$(\Leftarrow)$ Angenommen, $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) \quad v_1, v_2 \in V$
$\Rightarrow \mathcal{O} = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = \varphi(v_1 - v_2)$
$\Rightarrow v_1 - v_2 = \mathcal{O}$, da $\ker(\varphi) = \{\mathcal{O}\}$
$\Rightarrow v_1 = v_2$ $\square$

6.10 Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto Ax$$

- $\mathbb{R}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \varphi(\mathbb{R}^3) = \langle \varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} =$
  $\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$
  $\Rightarrow \mathrm{rg}(\varphi) = 2$

- $\varphi(x) = \mathcal{O} \Leftrightarrow Ax = \mathcal{O} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

  $\ker(\varphi) = H = \{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$

Bemerkung

$\dim(\ker(\varphi))$	$+\mathrm{rg}(\varphi)$	$= \dim(\mathbb{R}^3)$
1	+2	=3

6.11 Satz

V, W sind $\mathcal{K}-$Vektorräume, $\dim(V) = n$
Gegeben: $\{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V, $\ w_1, ..., w_n \in W$ nicht notw. verschieden
$\exists!$ lin.Abb. $\varphi : V \to W$ mit $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i$
und zwar

$$(\triangle) \qquad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \xrightarrow{\varphi} w = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\varphi(v_i)}_{w_i}$$

Das heißt: Wenn man weiß, wie die Basisvektoren abgebildet werden, dann kennt man die lineare Abbildung vollständig. (vgl. Bemerkung 2.5 + Beispiel 2.4b))

Beweis

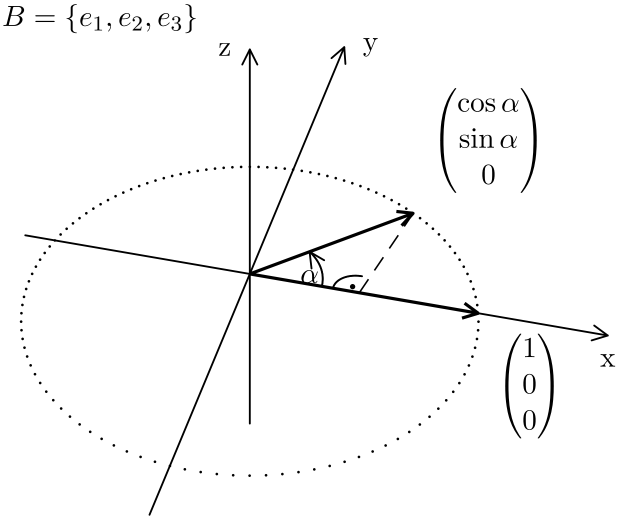
Für φ aus $(\triangle)$ gilt:

- φ linear ✓
- $\varphi(v_i) = w_i \ \forall i$✓
- φ eindeutig: Angenommen es gibt $\psi : V \to W$ linear mit $\psi(v_i) = w_i \Rightarrow$ $\psi(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i}_{v}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\psi(v_i)}_{=w_i} = \varphi(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i}_{v})$

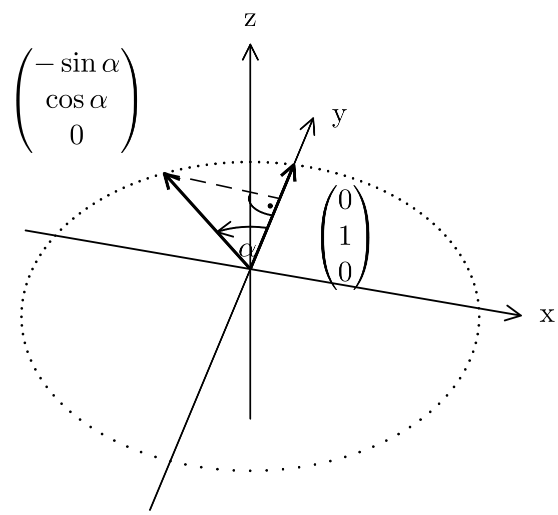
□

6.12 Beispiel

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Drehung um Winkel α um $z-$Achse.
$B = \{e_1, e_2, e_3\}$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\varphi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = (Ae_1,\ Ae_2,\ Ae_3) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ vgl. Bsp. 2.4b}$$