Mathematik III

18.10.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Vektorräume

Bemerkung: 1.1-1.10 identisch mit 8.1-8.10 aus Mathematik 2, SS16

1.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine nichtleere Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben, $v, w, x, y, ...$), auf der eine Addition $+$ definiert ist, $+\colon V \times V \to V$; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, ...$), $\cdot\colon \mathbb{R} \times V \to V$, so dass gilt:

(1.1) $u + v + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in V$

(1.2) Es existiert ein Vektor $\mathcal{O} \in V$ ('Nullvektor') mit $v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \qquad \forall v \in V$

(1.3) Zu jedem $v \in V$ existiert ein Vektor $-v \in V$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$

(1.4) $u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als '$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe').

(2.1) $\overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.2) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

(2.3) $\overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.4) $1 \cdot v = v \qquad \forall v \in V$

1.2 Beispiel

a) trivialer Vektorraum Nullraum: $V = \{\mathcal{O}\}$
Es gilt $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}, \quad \lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R}^n$, Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge n über $\mathbb{R}$, Elemente haben die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

c) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Vektoren: reelle Zahlen.
Skalare: reelle Zahlen.
$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:
$M \neq \emptyset$ Menge. $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \coloneqq \{f \colon M \to \mathbb{R}\}$
Menge der auf M definierten reellen Funktionen.
Für $f, g \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ sei

- $f + g \colon M \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$
- $\lambda \cdot f \colon M \to \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$

Dann ist V mit $\mathbb{R}, +, \cdot$ ein Vektorraum. Nullvektor ist $f = 0 \colon M \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \qquad \forall x \in M$.
(kurz: $f \equiv 0$, identisch Null)

1.3 Lemma

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

a) $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b) $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem $v \in V$ ist der Vektor $-v$ aus (1.3) in 8.1 eindeutig bestimmt.

d) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis

a)

$$\mathcal{O} \overset{(1.3)}{=} \overbrace{\underbrace{0 \cdot v}}^{x} + \overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x} = \underbrace{(0+0)}v + (-0 \cdot v)$$

$$\begin{aligned} &\overset{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) \\ &\overset{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 * v + (-0 \cdot v)) \\ &\overset{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O} \\ &\overset{(1.2)}{=} 0 \cdot v \end{aligned}$$

b) Wie a), starte mit $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$, erhalte $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\begin{aligned} \underbrace{v + (-1 \cdot v)} &= 1 \cdot v + (-1 \cdot v) \\ &\overset{(2.1)}{=} (1 + (-1))v \\ &= 0 \cdot v \\ &\overset{\text{a)}}{=} \mathcal{O} \\ &\overset{(1.3)}{=} v + (-v) \end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $-v$:

$$\underbrace{v + (-1)v} + (-v) = v + (-v) + (-v)$$

$$\Rightarrow -1 \cdot v = -v$$

c) Angenommen, zu $v \in V$ gibt es $-v$ und $-v'$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$ und $v + (-v') = \mathcal{O}$. Dann ist $v + (-v) = v + (-v') \overset{+(-v)\text{auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

$\square$

1.4 Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $U \neq \emptyset$ heißt Unter(vektor)raum von V, falls U bezüglich der Addition auf V und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

1.5 Beispiel

a) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ist Unterraum von V

b) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ ist kein Unterraum von V, z.B. (1.2) ist verletzt, Addition funktioniert auch nicht: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$

c) $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum von V (prüfe alle Eigenschaften von Definition 8.1) $\rightarrow$ umständlich, einfacher geht es mit 8.6

1.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $\emptyset \neq U \subseteq V$.
Dann ist U Unterraum von V genau dann, wenn gilt ($\Leftrightarrow$):

(1) $v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$

(2) $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$

(oder äquivalent: $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$)
Man sagt: U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

Beweis

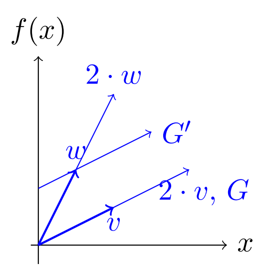
$\Rightarrow$ ist klar, da U laut Definition 8.4 selbst Vektorraum

$\Leftarrow$ rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 8.1, also z.B. $\mathcal{O} \in U$,...)

$\square$

1.7 Beispiel

a)
V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{O} \neq v \in V$.
Dann ist $G = \{\lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum.
$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: G ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.
$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Aber: $G' = \{w + \lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}, \quad w \in V\}$ ist kein Unterraum für $w \neq \mu \cdot v, \quad \mu \in \mathbb{R}$.
Warum? Z.B. $\mathcal{O} \notin G'$



b) $V = \mathbb{R}^3, \qquad U_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ ist Unterraum. Wir zeigen (1), (2) aus 8.6:

– $U_1 \neq \emptyset$, z.B. $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$, denn $\overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist $\lambda \cdot v \in U_1$? $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, $\quad w_1 + w_2 - w_3 = 0$. Gilt $v + w \in U_1$? $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also $v + w \in U_1$

– Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

D.h. U_1 ist die Ebene durch $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $U_2 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ ist kein Unterraum. Z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O} \notin$ U_2: $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.

Anderes Argument: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$, d.h. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Gilt $\lambda \cdot x \in U_2$? $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda = 1}_{\text{nur für } \lambda=1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nicht erfüllt für $\lambda \neq 1$.
Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $U_3 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ ist kein Unterraum, z.B.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \qquad 1^2 + 0^2 +^2 \leq 1 \quad \checkmark$, aber

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$, denn $2^2 + 0^2 + 0^2 \nleq 1$

Geometrische Interpretation:

U_3 ist eine Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 1

e) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall
Menge $C(I)$ (C: continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf I ist Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 8.2d)).
Menge der diffbaren Funktionen auf I ist Unterraum von $C(I)$.

1.8 Satz

V ist ein $\mathbb{R}$.Vektorraum, U_1, U_2 sind Unterräume von V.

a) $U_1 \cap U_2 = \{u \in V | u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$ ist Unterraum von V.

b) $U_1 + U_2 \coloneqq \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$ Summe von U_1, U_2 ist Unterraum von V
(das ist nicht die Vereinigung $U_1 \cap U_2$!)

Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 8.6

a) Übung: Prüfe $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$? ✓, (1), (2)

b)
- $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$
- Seien $v = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U_1, \quad u_2 \in U_2$ und
$w = u_1' + u_2', \quad u_1' \in U_1, \quad u_2' \in U_2$,
also $v, w \in U_1 + U_2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \lambda v + \mu v &= \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u_1' + u_2') \\ &= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u_1'}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u_2'}_{\in U_2} \qquad \in U_1 + U_2 \end{aligned}$$

1.9 Bemerkung

a) lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten

b) lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten

- $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum

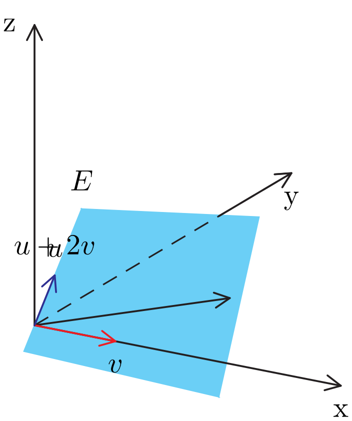
1.10 Beispiel

- $v = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad G_1 = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad G_2 = \{\mu w | \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 8.7a), Geraden durch $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, Unterräume

- $G_1 + G_2$ ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$ ist $\mathcal{O} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

1.11 Beispiel



- $u = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$
- $E = \{\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

- E $\subseteq \mathbb{R}^3$ ist Untervektorraum (UVR) und wird <u>aufgespannt/erzeugt</u> von u und v. Man nennt $\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\}$ <u>Erzeugendensystem</u> von E.
- D.h. $w \in E \Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : w = \underbrace{\lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v}_{\text{Linearkombination von } u \text{ und } v}$

- $w \notin E$, z.B. $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ergibt:

  $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  $$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{Letzte Zeile: } 1 = \lambda_1 \\ \text{Zweite Zeile: } 0 = \lambda_1 \end{array}\right\} \lightning$$

  $$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

1.12 Definition (Linearkombination, Erzeugendensystem)

V : $\mathbb{R}$-VR (V ist Vektorraum in den reellen Zahlen)

(i) $v_1, ..., v_m \in V$ und $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$
Der Vektor $\lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m$ heißt <u>Linearkombination</u> von $v_1, ..., v_m$.

(ii) Sei $M \subseteq V$. Dann ist

$$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \{\textstyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k | \lambda_k \in \mathbb{R}, v_k \in M, n \in \mathbb{N}\}$$

der <u>von M aufgespannte/erzeugte UVR</u> von V

Vereinbarung: $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$
Schreibweise: $M = \{v_1, ..., v_m\}$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v_1, ..., v_m \rangle_{\mathbb{R}}$

(iii) Ist $V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$, so heißt M ein <u>Erzeugendensystem</u> von V. V heißt <u>endlich erzeugt</u>, falls es ein endliches Erzeugendensystem gibt.

1.13 Bemerkung

$M \subseteq V \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von V, der M enthält.

Beweis

- $\langle M\rangle_{\mathbb{R}}$ ist UVR. erfüllt Kriterien von 1.6, daher klar:
  1.6 2) erfüllt. $u \in \langle M\rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow u = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n \quad (M = \{v_1, ..., v_n\})$
  $\Rightarrow \lambda \cdot u = \underbrace{\lambda\lambda_1}_{\in\mathbb{R}} \cdot v_1 + ... + \underbrace{\lambda\lambda_n}_{\in\mathbb{R}} \cdot v_n$
  1.6 3) ähnlich.

- Angenommen U ist der kleinste UVR, so dass $M \subseteq U$.
  Z. z.: $\langle M\rangle_{\mathbb{R}} = U$.
  Wegen 1.6 enthält U alle Linearkombinationen von Vektoren aus M.
  $\Rightarrow \langle M\rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U \Rightarrow U$ kann nicht kleiner sein als $\langle M\rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \langle M\rangle_{\mathbb{R}} = U$ $\square$

Fortsetzung Bsp. 1.11

a) $E = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

b) $\mathbb{R}^n$ wird erzeugt von $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei j die Stelle ist, an der der Vektor 1 ist.

   $R^n = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, ..., \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ "kanonische Einheitsvektoren"

   $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot e_1 + v_2 \cdot e_2 + ... + e_n \cdot v_n$

c) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{R}^2$ auf?

Wenn ja, dann muss für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{aligned} && \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow && \alpha + \beta &= x \\ && \alpha + 2\beta &= y \\ \Rightarrow && \alpha &= x - \beta \\ && &= y - 2\beta \\ \Leftrightarrow && \beta &= y - x \\ && \alpha &= 2x - y \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Allg. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2x-y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y-x) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$

d) Spannen $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ den $\mathbb{R}^2$ auf?

Nein, denn $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2$

e) $\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$, d.h. Erzeugendensysteme sind <u>nicht</u> eindeutig!

f) $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D.h. $M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \}$ ist kein <u>minimales</u> Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$, denn $v \in M$ kann immer dargestellt werden als Linearkombination von Vektoren aus $M \setminus v$.
Man sagt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sind <u>linear abhängig</u>.

Ergänzung zu 1.13

Bsp: $M = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \Rightarrow \langle M \rangle_{\mathbb{R}} = \{\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ Gerade

- $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} \supseteq M$

- $E = \{\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \supseteq M$

$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ Gerade, E Ebene, d.h. E ist größer als $\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$
$\langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ ist der kleinste UVR von $\mathbb{R}^3$, der M enthält.

1.14 Definition: Lineare Unabhängigkeit

- $V: \quad \mathbb{R} - VR, \quad v_1, ..., v_n$ heißen linear unabhängig, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_m \cdot v_m = 0 \\ \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\lambda = \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0}_{\text{einzige Lösung!}}$$

- $M \subseteq V$ heißt linear unabhängig, wenn gilt:
  Für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, ..., v_m \in M$ paarweise verschieden sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig

- Ist in obigen beiden Fällen (mindestens) $\lambda_i \neq 0$, dann sind die Vektoren linear abhängig

1.15 Beispiel

a) $\mathcal{O}$ ist linear abhängig, da $\lambda \cdot \mathcal{O} = 0 \qquad \forall \lambda \neq 0$

b) Sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ linear abhängig in $\mathbb{R}^2$?
   $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$
   $\begin{cases} \text{I} & \lambda_1 - 3\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \text{II} & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases}$ Erfüllt für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aber hier gibt es noch die Lösung: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1!$
   $\Rightarrow$ Vektoren sind linear abhängig

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (l.u.) in $\mathbb{R}^3$

d) $v \neq \mathcal{O}, \quad v \in V, \quad v$, ist linear unabhängig
   Angenommen es existiert $\lambda \neq 0$ mit $\lambda \cdot v = 0$.
   $\Rightarrow v = (\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda) \cdot v = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot v) = \mathcal{O}$ ↯

e)

$$\begin{aligned} v, w \text{ linear abhängig } &\Leftrightarrow v = \lambda w \text{ , für ein } \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow v \in \langle w \rangle_{\mathbb{R}} \end{aligned}$$

f) In $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \text{ f Abbildung}\}$ sind die Vektoren

- $f(x) = x, \quad g(x) = x^2$ linear unabhängig
- $f(x) = \sin^2(x), \quad g(x) = \cos^2(x), \quad h(x) = 2$ linear abhängig:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x \\ 0 &= \underbrace{2}_{\lambda_1} \sin^2 x + \underbrace{2}_{\lambda_2} \cos^2 x \underbrace{-1}_{\lambda_3} \cdot 2 \end{aligned}$$

1.16 Satz

$M = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$

(i) M linear unabhängig $\Leftrightarrow$ Zu jedem $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, ... \lambda_n \in \mathbb{R} : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i$

(ii) M linear unabhängig, $v \notin \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow M \cup \{v\}$ linear unabhängig

Beweis

(i) $(\Leftarrow)$ $\mathcal{O} \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists$ eindeutig bestimmte $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{O} = \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n$$

Gleichung erfüllt für $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$ (eindeutige Lösung)

$(\Rightarrow)$ Sei M linear unabhängig, $v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$

Angenommen $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \cdot v_i$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \underbrace{(\lambda_i - \mu_i)}_{=0, \text{ da } M \text{ linear unabhängig}} \cdot v_i = \mathcal{O} \\ &\Rightarrow \lambda_i = \mu_i \qquad \forall i = 1, ..., n \end{aligned}$$

(ii) Z.z.: $\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot v_i + \lambda \cdot v = \mathcal{O} \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i, \lambda = 0$

Annahme: $\lambda \neq 0 \Rightarrow v = \underbrace{-\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{\in \mathbb{R}} \cdot v_1 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda} \cdot v_n$

$$\Rightarrow v \in \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \lightning. \text{ Also } \lambda = 0$$

$\lambda_i = 0$, weil M linear unabhängig. □

1.17 Satz

$M \subseteq V$ linear unabhängig genau dann, wenn gilt:

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow N = M$$

In Worten: Man kann von M keinen Vektor weglassen, ohne dass der von M aufgespannte Raum sich verkleinert.

Beweis

($\Rightarrow$) Sei $M \subseteq V$ linear unabhängig.
Angenommen: Man kann doch aus M Vektoren weglassen, d.h.

$$N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$\begin{aligned} N \neq M &\Rightarrow \exists x \in M \setminus N && \text{(da } N \subseteq M\text{)} \\ &\Rightarrow \exists v_1, ..., v_n \in N && \text{paarweise verschieden und} \\ &\quad\ \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} && \text{so dass} \\ &\quad\ x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n && \text{(da } \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}\text{)} \\ &\Rightarrow \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n - x = \mathcal{O} \\ &\quad\ \underbrace{v_1, ..., v_n,}_{\in N} \quad \underbrace{x}_{\in M \setminus N} \ \text{paarweise verschieden} \end{aligned}$$

Da $N \subseteq M$, ist $\underbrace{v_1, ..., v_n, x}_{\text{linear abhängig}} \in M \Rightarrow M$ linear abhängig↯
Also muss $N = M$ gelten.

($\Leftarrow$) Sei M linear abhängig.
Z.z. Man kann Vektoren aus M weglassen, d.h.:

$$\exists N \subseteq M, \quad \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}} \text{ und } N \neq M$$

$$\begin{aligned} M \text{ linear abhängig} \Rightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists v_1, ..., v_n \in M \\ & \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (mit } \lambda_i \neq 0 \text{ für ein i)} \\ & \lambda_1 \cdot v_1 + ... + \lambda_n \cdot v_n = 0 \end{aligned}$$

O.B.d.A: $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot v_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \cdot v_3 - ... - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot v_n$
Setze $N = M \setminus \{v_1\} \Rightarrow N \neq M$
Da v_1 Linearkombination von $v_2, ..., v_n$ folgt:
Jede Linearkombination von $v_1, ..., v_n$ lässt sich ausdrücken als Linearkombination von $v_2, ..., v_n \Rightarrow \langle N \rangle_{\mathbb{R}} = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$ $\square$

Basis und Dimension

Ein minimales Erzeugendensystem heißt Basis.

1.18 Definition (Basis)

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR. Eine endliche Menge $B \subseteq V$ heißt Basis, falls

- $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$ und
- B linear unabhängig.

Für $V = \{\mathcal{O}\}$ ist $B = \emptyset$ die Basis.

1.19 Beispiel

a) $\{e_1, ..., e_n\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^n$ ('Standard-/kanonische Basis')

b) Basisi ist nicht eindeutig.
$B_1 = \{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}, \qquad B_2 = \{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}$, da: $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R}^2 = \langle B_1 \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \langle B_2 \rangle_{\mathbb{R}}$

1.20 Satz (Existenz von Basen)

V andlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR $\Rightarrow$ Jedes endliche Erzeugendensystem enthält Basis.

Beweis

Sei $M \subseteq V$ endlich, $\langle M \rangle_{\mathbb{R}} = V$

- M linear unabhängig $\rightarrow$ fertig
- M linear abhängig $\overset{1.17}{\Rightarrow}$ Man kann aus M einen Vektor $v \in M$ weglassen, so dass $\langle M \setminus \{v\} \rangle_{\mathbb{R}} = V = \langle M \rangle_{\mathbb{R}}$. Nach endlich vielen Schritten liefert das Verfahren eine Basis. $\square$

Fragen

- Basis nicht eindeutig. Sind alle Basen gleich groß?
- geg. $w = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \qquad S = \{e_1, e_2, e_3\}$. Wie kann man w zu einer Basis ergänzen? Welche Vektoren aus S sind geeignet?

$$w = \frac{1}{3}e_1 + e_3 = \{ \underbrace{w, e_1, e_3}_{\text{linear abhängig}} \} \text{ keine Basis, aber}$$

$$\{ \underbrace{w, e_1, e_2}_{\text{linear unabhängig}} \} \text{ Basis und } \{w, e_2, e_3\} \text{ Basis}$$

1.21 Satz (Austauschlemma)

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR. Gegeben: $w \in V, \quad w \neq \mathcal{O}, \quad w = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$, wobei $B = \{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ Basis von V.
$\Rightarrow \underbrace{(B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\}}_{(\star)}$ Basis, falls $\lambda_j \neq 0$

Beweis

Z.z: $(\star)$ ist Basis.

1) $(\star)$ ist linear unabhängig.
   Z.z:

$$\sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w = 0 \Rightarrow \mu_i = 0 \text{ und } \mu = 0$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu w &= \sum_{i \neq j} \mu_i v_i + \mu(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \\ &= \sum_{i \neq j} (\mu_i + \mu\lambda_i) v_i + \mu\lambda_j v_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \{v_1, ..., v_n\} \text{ Basis } &\Rightarrow \mu\lambda_j = 0 \text{ und } \mu_i + \mu\lambda_i = 0 \quad \forall i \neq j \\ \lambda_j \neq 0 &\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow \mu_i + \underbrace{\mu\lambda_i}_{=0} = \mu_i = 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

2) $(\star)$ erzeugt V.

$$
\begin{aligned}
& & w &= \lambda_j v_j + \sum_{i\neq j}^{\lambda_i v_i} & &|: \lambda_j, \text{ da } \lambda_j \neq 0 \\
&\Leftrightarrow & v_j &= \frac{1}{\lambda_j} w - \sum_{i\neq j} \frac{\lambda_i}{\lambda_j} v_i \\
&\Rightarrow & v_j &\in \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} \\
&\Rightarrow & \langle (B \setminus \{v_j\}) \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} &= \langle B \cup \{w\} \rangle_{\mathbb{R}} = V
\end{aligned}
$$

1.22 Satz (Steinitz'scher Austauschsatz)

Geg. $w_1, ..., w_m \in V$ linear unabhängig, $\{v_1, ..., v_n\}$ Basis von V.
Es folgt:

a) Aus den n Vektoren $v_1, ..., v_n$ kann man $n - m$ Vektoren auswählen, die mit $w_1, ..., w_m$ eine Basis bilden.

b) $m \leq n$

Beweis

a) 1) $w_1 \in V \Rightarrow w_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$
Wären alle $\lambda_i = 0$, dann wäre auch $w_1 = 0$. Da $\mathcal{O} \in V$ linear abhängig ist, wäre also auch $w_1, ..., w_m$ linear abhängig. E
Also: Mindestens ein $\lambda_i \neq 0$
O.B.d.A. $\lambda_1 \neq 0$ (sonst umnummerieren) $\overset{1.20}{\Rightarrow}$ $\{w_1, v_2, ..., v_n\}$ ist Basis von V

2) $w_2 \in V \Rightarrow \mu_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} \mu_i v_i$
Wären alle $\mu_2, ..., \mu_n = 0$, so wäre $w_2 = \mu_1 w_1$, also auch w_1, w_2 linear abhängig. E, da $\{w_1, ..., w_m\}$ linear unabhängig.
$\Rightarrow$ Mindestens ein $\mu_i \neq 0, \quad i \in \{2, ..., n\}$
O.B.d.A. $\mu_2 \neq 0 \overset{1.20}{\Rightarrow} \{w_1, w_2, v_3, ..., v_n\}$ Basis von V

□

b) $\rightarrow$ Übung

1.23 Korollar

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR

i) Je zwei Basen von V enthalten gleich viele Elemente.

ii) Basisergänzungssatz
Jede linear unabhängige Teilmenge von V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis

i) $B, \tilde{B}$ Basen
B linear unabhängig $\overset{1.22b)}{\Rightarrow} |B| \leq |\tilde{B}|$
$\tilde{B}$ linear unabhängig $\overset{1.22b)}{\Rightarrow} |\tilde{B}| \leq |B|$
$\Rightarrow |B| = |\tilde{B}|$

ii) Wähle beliebige Basis von V und tausche aus(1.22a)).

1.24 Satz

V endlich erzeugter $\mathbb{R}$-VR, $B \subseteq V$.
Dann sind äquivalent:

i) B ist Basis

ii) B ist maximale linear unabhängige Menge in V

iii) B ist minimales Erzeugendensystem

Beweis

i)$\Rightarrow$ii) Wegen 1.23 (linear unabhängige Menge zu Basis ergänzen, alle Basen gleich groß)

ii)$\Rightarrow$i) (Bzw. $\neg$i)$\Rightarrow$ $\neg$ii).) B keine Basis, B linear unabhängig
$\Rightarrow \langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subsetneq V \Rightarrow \exists v \in V \setminus \langle B \rangle_{\mathbb{R}} : B \cup \{v\}$ linear unabhängig

i)$\Rightarrow$iii) Satz 1.17

$\square$

1.25 Definition: Dimension

V : $\mathbb{R}$-VR

i) Ist V endlich erzeugbar, B Basis von V, $\quad |B| = n$ so hat V die Dimension n, $\dim(V) = n$

ii) Ist V nicht endlich erzeugbar, so heißt V unendlichdimensional.

1.26 Korollar

$\dim V = n, B \subseteq V, |B| = n.$
Dann ist B Basis von V, wenn B linear unabhängig oder $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = V$

Beweis

Folgt aus 1.24

1.27 Beispiel

a) $\{e_1, ..., e_n\}$ Basis von $\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$

b) $\langle \emptyset \rangle_{\mathbb{R}} = \{\mathcal{O}\} \Rightarrow dim(\{\mathcal{O}\}) = 0$

c) Bilden $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Basis von V?
Ja, weil linear unabhängig (siehe Korollar 1.26).

d) $V = \mathbb{R}^4, U = \langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$
u_1, u_2 linear unabhängig $\Rightarrow \dim(U) = 2$
Ergänze u_1, u_2 zu Basis von $V = \mathbb{R}^4$

- 1. Möglichkeit (Austauschlemma + Steinitz)
  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$
  $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_1 + 2e_2 + e_4 \Rightarrow \{u_1, e_2, e_3, e_4\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_2 + e_3 \Rightarrow \{u_1, u_2, e_3, e_4\} \text{ Basis von } \mathbb{R}^4$$

(Basis könnte auch anders aussehen, nur beispielhaft dargestellt)

- 2. Möglichkeit (1.16)

  * $e_1 \notin U$ ($\star$)(nachrechnen)
    $\overset{1.16}{\Rightarrow} \{u_1, u_2, e_1\}$ linear unabhängig
  * $e_4 \notin \langle\{u_1, u_2, e_1\}\rangle_{\mathbb{R}}$ (nachrechnen)
    $\overset{1.16}{\Rightarrow} \{u_1, u_2, e_1, e_4\}$ linear unabhängig und damit Basis (Korollar 1.26)

  ($\star$) Angenommen:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I & 1 = \lambda_1 \\ II & 0 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ III & 0 = \lambda_2 \\ IV & 0 = \lambda_1 \qquad \lightning \quad \text{zu I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_1 \notin \langle\{u_1, u_2\}\rangle_{\mathbb{R}} \Rightarrow \{u_1, u_2, e_1\} \text{ linear unabhängig}$$

1.28 Dimensionssatz

V $\mathbb{R}$-VR, $\dim(V) = n$

i) $U \subseteq V$ ist UVR $\Rightarrow \dim(U) \leq n$

ii) $U \subseteq W \subseteq V$, $\quad U, W$ sind UVR mit $\dim(U) = \dim(W) \Rightarrow U = W$

iii) $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

Beweis

i) Basis von U kann man zu Basis von V ergänzen $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$

ii) $\dim(U) = \dim(W) \overset{U \subseteq W}{\Rightarrow}$ Basis von U auch Basis von $W \Rightarrow U = W$

iii) Sei $\{v_1, ..., v_k\}$ Basis von $U \cap W$
Ergänze $\{v_1, ..., v_k\}$ zu

a) Basis $\{v_1, ..., v_k, u_{k+1}, ..., u_m\}$ von U

b) Basis $\{v_1, ..., v_k, w_{k+1}, ..., w_l\}$ Basis von W

<u>Behauptung:</u> $B = \{v_1, ..., v_k, w_{k+1}, ..., w_l, u_{k+1}, ..., u_m\}$ Basis von $U + W$

1) B linear unabhängig
Sei
$$\overbrace{\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k}^{=v} + \overbrace{\mu_{k+1} u_{k+1} + ... + \mu_m u_m}^{=u} + \overbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1} + ... + \gamma_l w_l}^{=w} = 0$$
$\lambda_i, \mu_j, \gamma_r \in \mathbb{R}$

Es ist $w \in U \cap W$, da

* $w = \underbrace{\gamma_{k+1} w_{k+1}}_{\in W} + ... + \underbrace{\gamma_l w_l}_{\in W} \in W$
* $w = -\underbrace{u}_{\in U} - \underbrace{v}_{\in U} \in U$

Also: $w \in U \cap W$.

$\Rightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{R} : w = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$
$\Rightarrow w = \gamma_{k+1} w_{k+1} + ... + \gamma_l w_l = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$
$\Rightarrow \gamma_{k+1} w_{k+1} + ... + \gamma_l w_l - \alpha_1 v_1 - ... - \alpha_k v_k = 0$
$\{v_1, ..., v_k, w_{k+1}, ..., w_l\}$ linear unabhängig
$\Rightarrow \gamma_{k+1} = ... = \gamma_l = \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$
$\Rightarrow w = \mathcal{O}$ und $v + u + w = v + u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + ... + \mu_m u_m = 0$
$\{v_1, ..., v_k, u_{k+1}, ..., u_m\}$ linear unabhängig (Basis von U)
$\Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = \mu_{k+1} = ... = \mu_m = 0$

2) $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} = U + W$, da:

* $\langle B \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq U + W$ (da $\underbrace{u + v}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in W} \in U + W$)

- $U \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$ (da Basis von U in B)

- $W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow U + W \subseteq \langle B \rangle_{\mathbb{R}}$

$\square$

1.29 Bemerkung (Koordinaten)

Geg.: Basis $\{v_1, ..., v_n\}$ von V, Vektor $u \in V$
$\Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$
λ_i eindeutig und heißen Koordinaten von u bezüglich der Basis B.
z.B.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ hat Koordinaten 1,1,3 bezüglich
$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

2 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

2.1 Beispiel

- Ein Bauer besitzt Kühe und Gänse
- Insgesamt 18 Tiere mit 40 Beinen
- Frage: Wieviele der Tiere sind Kühe?

Lineares Gleichungssystem (LGS): $* \begin{cases} I: & k+g & =18 \\ II: & 4k+2g & =40 \qquad \Leftrightarrow \quad 2k+g=20 \end{cases}$

$$\Rightarrow g = 20-2k = 18-k \Leftrightarrow k=2 \Rightarrow g=16$$

Vektorenschreibweise von $*$:

$$\begin{pmatrix} k+g \\ 4k+2g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ oder } k\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{Matrix}} \cdot \begin{pmatrix} k \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 40 \end{pmatrix}$$

2.2 Definition

Allgemeines lineares Gleichungssystem:
Gegeben:

- Unbekannte $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$
- $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen
- Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Matrixschreibweise:
$Ax = b$ mit

- $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spalte}}}{a_{m2}} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Zeile}$$

- $$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- $$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Man schreibt $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ oder nur $A = (a_{ij})$, wenn m, n schon bekannt.

- $a_{ij} \in \mathbb{R}$ - Eingänge der Matrix A
- A - reelle $m \times n$- Matrix
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ - Menge aller reellen $m \times n$ - Matrizen
- $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = M_n(\mathbb{R})$ - quadratische Matrizen

$(**)$ Dabei ist
$$Ax := x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

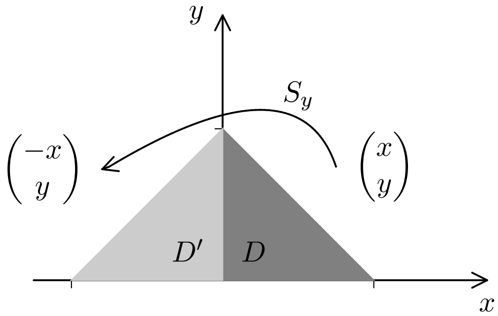
2.3 Bemerkung

Aus $(**)$ ergibt sich: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \longmapsto A \cdot x$ für $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
A bildet Vektoren auf Vektoren ab.

Matrizen können nicht nur zur Lösung von LGS verwendet werden, sondern auch in der Geometrie:

2.4 Beispiel:

a) Spiegelung S_y ain $\mathbb{R}^2$ an y-Achse



$$S_y : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$S_y : \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

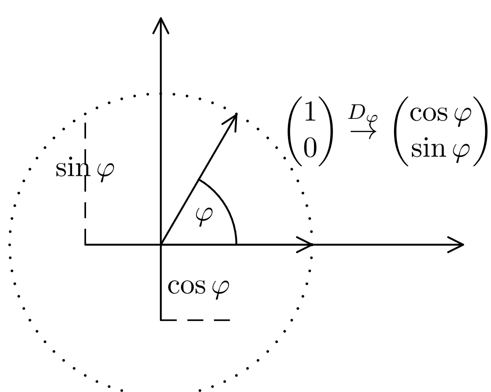
$$S_y \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} + s_{12} \\ s_{21} + s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

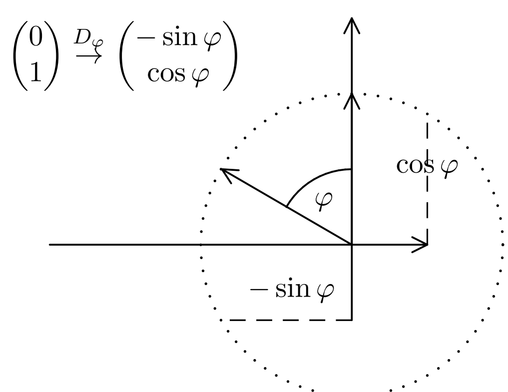
$$\Rightarrow s_{11} = -1 \quad s_{12} = 0 \quad s_{21} = 0 \quad s_{22} = 1$$

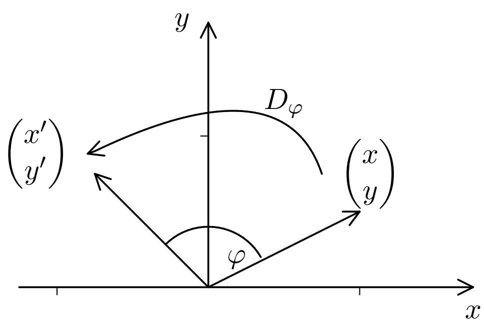
$$S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S_y bildet D auf D' ab.

b) Drehung D_φ um $\varphi \in [0, 2\pi)$
Vorüberlegung am Einheitskreis:







$D_\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$D_\varphi = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ und

$D_\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_\varphi = (D_\varphi \cdot e_1, D_\varphi \cdot e_2) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

2.5 Bemerkung

Aus Beispiel 2.4 b) und Def 2.2 ergibt sich:

$A \cdot e_j = 1 \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ (j-te Spalte von $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$)

$\Rightarrow A = (\underbrace{A_{e_1}, A_{e_2}, ..., A_{e_n}}_{\text{Spalten}})$

2.6 Satz

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$

i) $A(\lambda x) = \lambda(A \cdot x) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

ii) $A(x + y) = Ax + Ay$

Beweis

i)

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= (\lambda x_1) \underbrace{A \cdot e_1}_{\text{1. Spalte}} + (\lambda x_2) A e_2 + ... + (\lambda x_n) \underbrace{A e_n}_{n\text{-te Spalte}} \\ &= \lambda[x_1(Ae_1) + ... + x_n(Ae_n)] \\ &= \lambda(Ax) \end{aligned}$$

ii) Übung

2.7 Beispiel (Folien 02.11.2016)

a) $A \cdot x = (D_\pi \circ S_y) \cdot x = D_\pi \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{A}{\mapsto} \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Berechnung Matrixprodukt (Verknüpfung) $A \cdot B$

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}}_{B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underbrace{[x_1 \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}]}_{\in \mathbb{R}^2} \\
&\overset{2.6}{=} \quad x_1 \underbrace{[e \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}]}_{\in \mathbb{R}^2} + x_2 \underbrace{[f \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}]}_{\in \mathbb{R}^2} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} ea + gb & fa + hb \\ ec + gd & fc + hd \end{pmatrix}}_{\text{Matrixprodukt } A \cdot B} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2.8 Definition (Matrixprodukt)

$A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \qquad B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= (c_{ik}) \quad \in \mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{R}) \\
c_{ik} &= (i\text{-te Zeile von } A) \cdot (k\text{-te Spalte von } B) \\
&= a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + \cdots + a_{in} b_{nk} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}
\end{aligned}$$