

# Mathematik II

15.06.2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Reelle Funktionen</b>	<b>4</b>
1.1	Wiederholung Mathe 1: Funktionen . . . . .	4
1.2	Reelle Funktionen . . . . .	4
1.3	Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen . . . . .	5
1.4	Beispiel . . . . .	5
1.5	Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion . . . . .	6
1.6	Elementare Funktionen (naive Einführung) . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Folgen</b>	<b>13</b>
2.1	Definition: Folge . . . . .	13
2.2	Beispiel . . . . .	13
2.3	Definition: Eigenschaften von Folgen . . . . .	14
2.4	Beispiel . . . . .	14
2.5	Definition: Konvergenz . . . . .	14
2.6	Bemerkung . . . . .	14
2.7	Beispiel . . . . .	14
2.8	Bemerkung . . . . .	15
2.9	Satz: Beschränktheit von Folgen . . . . .	15
2.10	Bemerkung . . . . .	16
2.11	Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen) . . . . .	16
2.12	Beispiel . . . . .	16
2.13	Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen . . . . .	17
2.14	Beispiel . . . . .	18
2.15	Anmerkung (Landau-Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation) . . . . .	18
2.16	Definition . . . . .	19
2.17	Beispiel . . . . .	19
2.18	Bemerkung . . . . .	20
2.19	Satz (Monotone Konvergenz) . . . . .	20
2.20	Beispiel . . . . .	20
2.21	Satz (Intervallschachtelungsprinzip) . . . . .	21
2.22	Beispiel (vgl. Beispiel 2.20 b)) . . . . .	22
2.23	Definition . . . . .	22
2.24	Beispiel . . . . .	23
2.25	Bemerkung . . . . .	23
2.26	Definition . . . . .	23
2.27	Beispiel . . . . .	23
2.28	Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß) . . . . .	23
2.29	Bemerkung/Definition . . . . .	24

2.30	Definition (Cauchyfolge)	25
2.31	Satz (Cauchy Kriterium)	25
2.32	Anwendung (Banachscher Fixpunktsatz)	25
<b>3</b>	<b>Reihen</b>	<b>27</b>
3.1	Definition	27
3.2	Beispiel	27
3.3	Rechenregeln für Reihen	28
3.4	Konvergenz-/Divergenzkriterien für Reihen	29
3.5	Bemerkung	32
<b>4</b>	<b>Potenzreihen</b>	<b>33</b>
4.1	Definition	33
4.2	Beispiel	33
4.3	definition (Formel von Cauchy-Hadamard)	33
4.4	Satz (Konvergenz von Potenzreihen)	34
4.5	Bemerkung	34
4.6	Beispiel	35
<b>5</b>	<b>Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit</b>	<b>35</b>
5.1	Definition	35
5.2	Beispiel	36
5.3	Bemerkung/Definition	36
5.4	Bemerkung/Definition	37
5.5	Beispiel	37
5.6	Bemerkung/Definition	38
5.7	Definition (Stetigkeit)	38
5.8	Bemerkung	38
5.9	Beispiel	39
5.10	Bemerkung	40
5.11	Satz (Rechenregeln für stetige Funktionen)	40
5.12	Bemerkung	41
5.13	Bemerkung	41
5.14	Bemerkung/Definition (Rationale Funktionen)	41
5.15	Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano, Nullstellensatz, ZWS, IVT [Intermediate Value Theorem])	43
5.16	Satz (ZWS allgemein)	45
5.17	Anwendung	46
5.18	Definition	46
5.19	Satz	46
5.20	Satz (Minimax-Theorem von Weierstraß)	47

5.21	Beispiel/Gegenbeispiel . . . . .	47
5.22	Bemerkung . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Differenzierbare Funktionen</b>	<b>49</b>
6.1	Vorbemerkung . . . . .	49
6.2	Definition . . . . .	49
6.3	Beispiel . . . . .	50
6.4	Satz . . . . .	52
6.5	Korollar (Folgerung) . . . . .	53
6.6	Bemerkung/Beispiel . . . . .	53
6.7	Satz (Ableitungsregeln) . . . . .	53
6.8	Beispiel . . . . .	54
6.9	Satz (Kettenregel) . . . . .	55
6.10	Beispiel . . . . .	55
6.11	Satz (Ableitung der Umkehrfunktion) . . . . .	55
6.12	Beispiel . . . . .	56

# 1 Reelle Funktionen

## 1.1 Wiederholung Mathe 1: Funktionen

### Definition

Eine Funktion/Abbildung  $f: A \rightarrow B$  besteht aus

- zwei Mengen:
  - $A$ : Definitionsbereich von  $f$
  - $B$ : Bildbereich von  $f$
- und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem Element  $a \in A$  genau ein Element  $b \in B$  zuordnet.

Wir schreiben dann  $b = f(a)$ , nennen  $b$  das Bild/den Funktionswert von  $a$  (unter  $f$ ) sowie  $a$  (ein) Urbild von  $b$  (unter  $f$ ).

### Notation

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

### Beispiel

→ Folien 11.04.2016

## 1.2 Reelle Funktionen

### Definition

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $D \subseteq \mathbb{R}$  (oft ist  $D$  endliche Vereinigung von Intervallen, z.B.

- $D = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
- $D = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$  ).

### 1.3 Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen

#### Definition

Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  reelle Funktionen.

$$\begin{aligned} \text{a) } (f \pm g)(x) &:= f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D \\ &\text{Summe/Differenz von } f \text{ und } g \\ &\text{(genauer:} \\ &\quad f \pm g: D \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D \\ &\text{Produkt von } f \text{ und } g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) falls } g(x) &\neq 0 \quad \forall x \in D, \text{ dann} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D \\ &\text{Quotient von } f \text{ und } g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Komposition/Hintereinanderausföhrung} \\ f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: D_g \rightarrow \mathbb{R}, \text{ wobei } f(D_f) \subseteq D_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f: D_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

### 1.4 Beispiel

$$\begin{aligned} f, g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= x^2 + x - 1 \\ (f \cdot g)(x) &= x^2 \cdot (x - 1) = x^3 - x^2 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{x^2}{x - 1} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}) \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

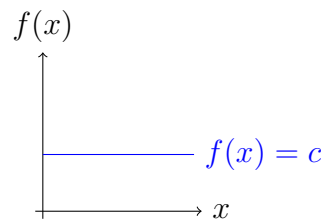
## 1.5 Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion

→ Folien 13.04.2016

## 1.6 Elementare Funktionen (naive Einführung)

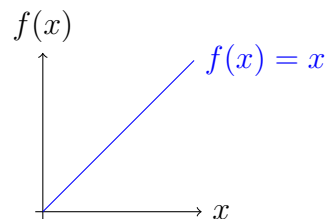
- a) Konstante Funktionen  
für  $c \in \mathbb{R}$  (fest):

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$



- b) Die identische Funktion (Identität)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$



Durch mehrfache Anwendung von 1.3 entstehen aus a) und b) viele weitere Funktionen.

- c) Potenzen (Monome)  
für  $n \in \mathbb{N}_0$  (fest):

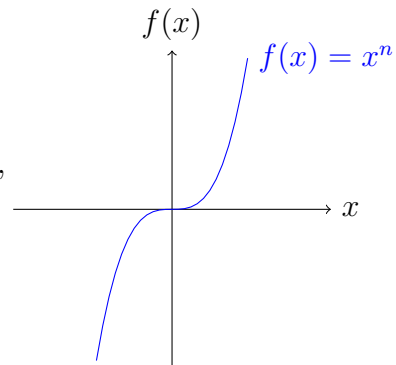
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

–  $n = 0$ : die konstante 1-Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^0 = 1 \end{aligned}$$

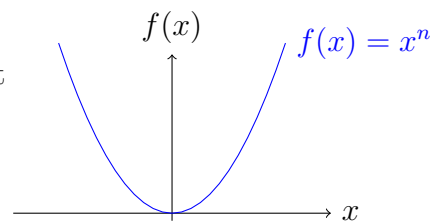
–  $n$  ungerade:

$f$  punktsymmetrisch zum Ursprung  $(0|0)$ ,  
bijektiv



–  $n$  gerade:

$f$  achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, nicht  
bijektiv  
 $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



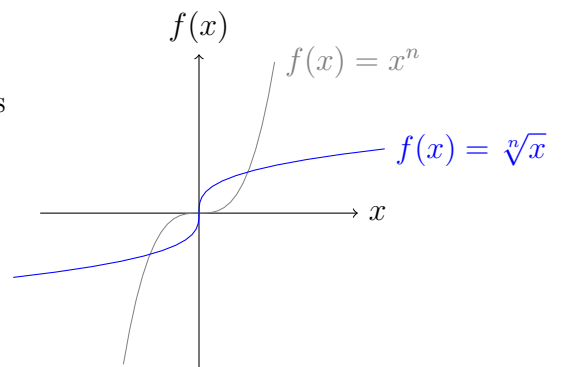
#### d) Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Monome. Dazu muss die Gleichung  $f(x) = x^n = y$  ( $y \in \mathbb{R}$  gegeben) gelöst werden.

–  $n$  ungerade:

$f$  ist bijektiv, dann gibt es zu jedem  
 $y \in \mathbb{R}$  genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x^n = y$ . Dieses  
wird die  $n$ -te Wurzel aus  $y$  genannt:  
 $x = \sqrt[n]{y}$ .

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\phantom{x}}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$



–  $n$  gerade: Dann hat die Gleichung  $x^n = y$  in  $\mathbb{R}$

- \* keine Lösung, falls  $y < 0$
- \* genau eine Lösung, falls  $y = 0$  (nämlich  $x = 0$ )
- \* zwei Lösungen, falls  $y > 0$ :

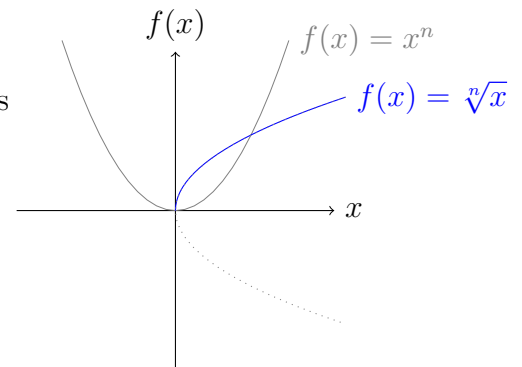
$$x_1 = \sqrt[n]{y} \quad (> 0)$$

$$x_2 = -\sqrt[n]{y} \quad (< 0)$$



Die positive Lösung wird hier dann als  $n$ -te Wurzel bezeichnet:

$$\sqrt[n]{\phantom{x}}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$



e) Polynome

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  (Koeffizienten)

Ein Polynom ist eine Funktion  $p$  mit

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Falls  $a_n \neq 0$  ist, heißt  $n$  Grad des Polynoms.

f) Rationale Funktionen

Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen (mit  $p, q \dots$  Polynome):

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit  $D = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$

g) Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto q^x$$

wobei die Basis  $\mathbb{R} \ni q > 0, q \neq 1$  vorgegeben ist.

$q > 1: f$  steigt

$0 < q < 1: f$  fällt

Bekannte Rechenregeln:

- $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$
- $\frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(p \cdot q)^x = p^x \cdot q^x$
- $\left(\frac{p}{q}\right)^x = \frac{p^x}{q^x}$

Zur Beschreibung von Exponentialfunktionen genügt es, eine bestimmte Basis zu benutzen (man kann  $g(x) = p^x$  durch  $f(x) = q^x$  ausdrücken, siehe Teil h).

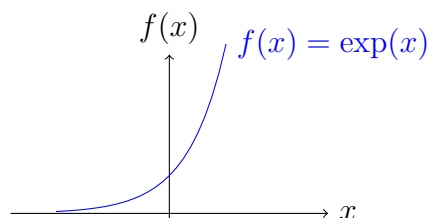
Früher: Basis 10

Heute: Basis  $e \approx 2.781828\dots$  (Eulersche Zahl)

Informatik: oft Basis 2

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(0) &= e^0 = 1 \\ \exp(1) &= e^1 = 2.781828\dots \end{aligned}$$



#### h) Logarithmen

Die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \exp(x): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

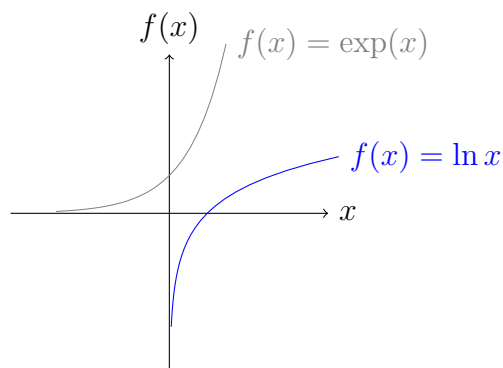
ist bijektiv.

Um sie umzukehren, muss zu gegebenem  $y \in \mathbb{R}^+$  die Gleichung  $e^x = y$  gelöst werden.

Die Lösung ist für  $y > 0$  in  $\mathbb{R}$  eindeutig und wird als der natürliche Logarithmus von  $y$  bezeichnet:  $x = \ln y$ .

In  $\mathbb{R}$  ist die Gleichung für  $y \leq 0$  unlösbar.

$$\begin{aligned} \ln: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$



Analoges gilt für andere Exponentialfunktionen.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto q^x \quad (q > 0, q \neq 1) \end{aligned}$$

Es gilt:  $q^x = y \Leftrightarrow x = \log_q y$  (Logarithmus zur Basis  $q$ ).

Es genügt wieder, eine feste Basis zu betrachten, z.B.  $e$ , denn  $q^x = (e^{\ln q})^x = e^{x \cdot \ln q}$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} q^x = y &\Leftrightarrow e^{x \cdot \ln q} = y \\ &\Leftrightarrow \ln(e^{x \cdot \ln q}) = \ln y \\ &\Leftrightarrow x \cdot \ln q = \ln y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln q} \quad , \end{aligned}$$

also gilt  $\log_q y = \frac{\ln y}{\ln q}$ .

Rechenregeln für den Logarithmus lassen sich aus den Regeln für die Exponentialfunktion herleiten:

Sei  $u := \ln x$ ,  $v := \ln y$ , dann ist  $x = e^u$  und  $y = e^v$ , daraus folgt

$$x \cdot y = e^u \cdot e^v = e^{u+v} \quad ,$$

also ist

$$\ln(x \cdot y) = \ln(e^{u+v}) = u + v = \ln x + \ln y \quad .$$

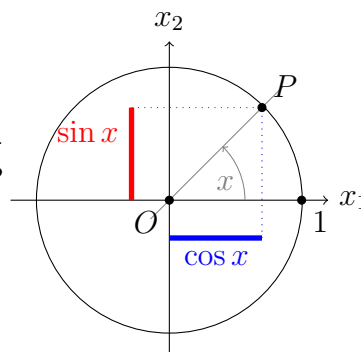
Genauso kann man mit beliebiger Basis  $q > 0$ ,  $q \neq 1$  verfahren, wir erhalten für jede Logarithmusfunktion  $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ :

- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log x \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

#### i) Trigonometrische Funktionen

Wir betrachten einen Punkt  $P$  auf dem Einheitskreis (Kreis um  $O$ , Radius 1).

Der Winkel, der von der positiven  $x_1$ -Achse und der Geraden durch  $O$  und  $P$  eingeschlossen wird, sei  $x$ .



Dann heißt die  $x_1$ -Koordinate von  $P$  der Kosinus von  $x$  ( $\cos x$ ), die  $x_2$ -Koordinate heißt der Sinus von  $x$  ( $\sin x$ ).

Der Winkel  $x$  kann im Gradmaß oder im Bogenmaß (Länge des Bogens von  $(1|0)$  bis  $P$ ) gemessen werden, es gilt:

$$\frac{\text{Gradmaß}}{360^\circ} = \frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}$$

So lassen sich die Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  definieren:

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

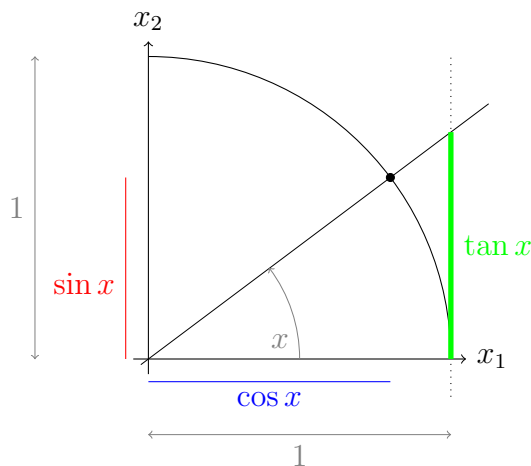
$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

und weiter

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\text{Tangens}) \quad \text{und}$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\text{Kotangens})$$

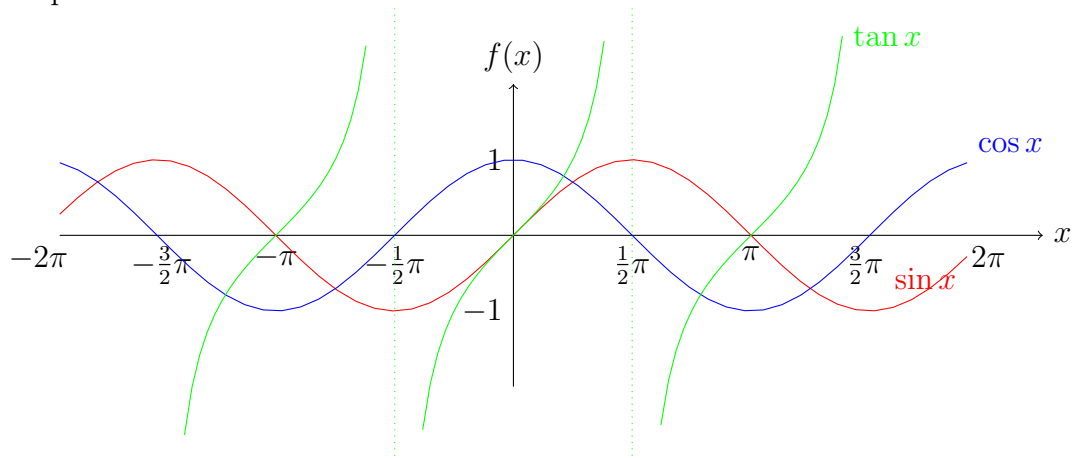
(Tangens und Kotangens sind jeweils nur dort definiert, wo der Nenner  $\neq 0$  ist!)



Strahlensatz:  $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$

Wertetabelle: s. PÜ 02

Graphen:



Additionstheoreme:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

Es gilt:  $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  (Verschiebung um  $\frac{\pi}{2}$ ).

sin und cos sind  $2\pi$ -periodisch, d.h.

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \forall x$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) \quad \forall x$$

tan ist  $\pi$ -periodisch:

$$\tan x = \tan(x + \pi) \quad \forall x \text{ auf Definitionsbereich}$$

## 2 Folgen

### 2.1 Definition: Folge

#### Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  in eine Menge  $M$  (oft  $M \subset \mathbb{R}$ ).

Die  $a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) heißen Glieder der Folge,  $n$  heißt Index.

(Bemerkung: Das 1. Glied der Folge muss nicht  $a_1$  sein. durch Umbenennung, z.B.  $b_1 := a_7, b_2 := a_8$ , ist auch  $(a_7, a_8, a_9, \dots)$  eine Folge im Sinne der Definition 2.1)

#### Schreibweisen

$$\begin{aligned} & (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ & (a_n)_{n \geq n_0} \quad (\text{z.B. } (a_n)_{n \geq 7}) \text{ oder nur} \\ & (a_n) \end{aligned}$$

### 2.2 Beispiel

- a)  $a_n = c \quad \forall n \geq 1, c \in \mathbb{R} \text{ konstant}$   
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_n \quad (c, c, c, c, \dots)$
- b)  $a_n = n \quad (1, 2, 3, 4, \dots)$
- c)  $a_n = (-1)^n \quad (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
- d)  $a_n = \frac{1}{n} \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
- e)  $a_n = [0, \frac{2}{n}) \quad \text{Folge von Intervallen}$
- f)  $a_n$  rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_{n+1} &:= (n+1)a_n \quad (n \geq 1) \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 6 \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 = 24 \end{aligned}$$

## 2.3 Definition: Eigenschaften von Folgen

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt

- a) beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist (s. Mathe 1), d.h. wenn es eine Zahl  $K \geq 0$  gibt mit  $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (d.h. alle Folgenglieder liegen im Intervall  $[-K, K] \quad \forall n; \quad (-K \leq a_n \leq K)$ ).
- b) alternierend, falls ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

## 2.4 Beispiel

Beispiele aus 2.2:

beschränkt: a), c), d) [für c) und d) z.B.  $K=1$ ]

alternierend: c)

## 2.5 Definition: Konvergenz

- a) Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt konvergent gegen  $a \in \mathbb{R}$ , wenn es zu jeder positiven Zahl  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt (das von  $\varepsilon$  abhängen darf), so dass gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ .  
(kurz:  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$ )
- b) Die Zahl  $a$  heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge, wir schreiben:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oder  
 $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$  ( $a_n$  strebt gegen  $a$ )
- c) Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent (die Folge divergiert).

## 2.6 Bemerkung

→ Folien 20.04.16

## 2.7 Beispiel

- a)  $a_n = \frac{1}{n}$  ist Nullfolge, d.h.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = a = 0$ , denn:  
Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann wähle  $N$  als  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ , denn damit gilt für alle  $a_n$  mit  $n \geq N$ :  
 $|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ , da  $n \geq N$  und  $\frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$ .

(z.B. falls  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ , wähle  $N > 10$ , z.B.  $N = 11$ ; ab  $a_{11}$  haben alle Folgenglieder einen Abstand  $< \frac{1}{10}$  von 0)

b)  $(a_n)$  mit  $a_n = \frac{n+1}{3n}$ . Behauptung:  $a = \frac{1}{3}$ .

Beweis: Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann wähle  $N > \frac{1}{3\varepsilon}$ . Für alle  $a_n$  mit  $n \geq N$  gilt dann:

$$|a_n - a| = \left| \frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{n+1-n}{3n} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N} < \varepsilon. \quad \frac{1}{3N} < \varepsilon \text{ genau dann, wenn } N > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

c)  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n = c \quad \forall n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann ist

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq 1, \text{ hier ist also } N = 1, \text{ hängt nicht von } \varepsilon \text{ ab, untypisch.}$$

## 2.8 Bemerkung

$N$  muss nicht optimal gewählt werden.

Beispiel:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3+n+5} = 0, [\dots]$

$\left| \frac{1}{n^3+n+5} - 0 \right| = \frac{1}{n^3+n+5} \leq \frac{1}{N^3+N+5} \stackrel{!}{<} \varepsilon$ . Für optimales  $N$ :  $\frac{1}{N^3+N+5} < \varepsilon$  nach  $N$  auflösen, schwer.

Deshalb grob abschätzen, z.B. so:

$$\frac{1}{N^3+N+5} < \frac{1}{N} < \varepsilon, \text{ also wähle } N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

## 2.9 Satz: Beschränktheit von Folgen

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: (zu zeigen:  $(a_n)$  konvergente Folge:  $\exists K \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ )

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent gegen  $a$ .

dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$ , also auch speziell für  $\varepsilon = 1$ , ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N.$$

Also gilt für alle  $n \geq N$ :

$$\begin{array}{ll} |a_n| = |a_n + a - a| & \leq |a_n - a| + |a| \\ \text{'Einschiebetrick'} & \text{Dreiecksungleichung} \\ |a_n| & < 1 + |a| \end{array}$$

(also für  $n \geq N$  sind die  $|a_n| < 1 + |a|$ ; aber für  $n = 1, 2, 3, \dots, N-1$ ?)

Definiere  $K$  als  $K := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$



Dann gilt  $|a_n| \leq K \quad \forall n$ .

(Anmerkung: Durch den vorletzten Schritt ist meist  $K \in \mathbb{R}^+$ .)

## 2.10 Bemerkung

Nach 2.9 gilt:

$(a_n)$  konvergiert  $\Rightarrow (a_n)$  ist beschränkt

Das ist äquivalent zu:

$(a_n)$  ist nicht beschränkt  $\Rightarrow (a_n)$  konvergiert nicht

(Kontraposition). Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

Bsp.  $(a_n)$  mit  $a_n = n$

## 2.11 Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen)

Für  $q \in \mathbb{R}$  gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } |q| = 1 \end{cases}$

Die Folge  $(q^n)_n \in \mathbb{N}$  divergiert, falls  $q = -1$  oder  $|q| > 1$ .

Beweis:

1. Fall  $|q| < 1$  (zu zeigen  $q^n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ )

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} |q^n - 0| &= |q^n| = |q|^n < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \end{aligned}$$

Wähle  $N \in \mathbb{N} \ni N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ , dann ist also  $|q|^n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ .

2. Fall  $q = 1 \rightarrow$  konstante 1-Folge, konvergiert, s. 2.7 c)

3. Fall  $|q| \geq 1, q \neq 1$

Für  $|q| > 1$  ist  $(q^n)$  unbeschränkt, also divergent (s. 2.9/2.10).

Für  $q = -1$ : können wir erst später beweisen ( $\rightarrow$  Cauchy-Folgen)

## 2.12 Beispiel

Nach 2.11 sind die Folgen  $((\frac{1}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $((-\frac{7}{8})^n)_n \in \mathbb{N}$  Nullfolgen.

## 2.13 Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien  $(a_n), (b_n)$  reelle Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gilt:

- a) Die Folge  $(c \cdot a_n)$  konvergiert gegen  $c \cdot a, c \in \mathbb{R}$ .
- b) Die Folge  $(a_n \pm b_n)$  konvergiert gegen  $a \pm b$ .
- c) Die Folge  $(a_n \cdot b_n)$  konvergiert gegen  $a \cdot b$ .
- d) Die Folge  $(\frac{a_n}{b_n})$  konvergiert gegen  $\frac{a}{b}$ , falls  $b_n, b \neq 0$  und  $|a_n| \rightarrow |a|$ .

Seien weiter  $(d_n), (e_n)$  reelle Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ , dann gilt:

- e) Ist  $(e_n)$  beschränkt, dann ist  $(d_n \cdot e_n)$  auch eine Nullfolge.
- f) Gilt  $|e_n| \leq d_n \quad \forall n$ , so ist  $(e_n)$  auch eine Nullfolge.

Beweis [exemplarisch für a) und b), Rest s. Moodle]:

- a) Falls  $c = 0$ : klar, konstante 0-Folge.

Falls  $c \neq 0$ : Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Dann existiert  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (denn  $a_n \rightarrow a$ )

Dann ist aber  $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c \cdot (a_n - a)| = |c| \cdot \overbrace{|a_n - a|}^{< \frac{\varepsilon}{|c|}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ , also  $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot a$

- b) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig.

Dann  $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$  (denn  $a_n \rightarrow a$ )

und  $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ , so dass  $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$  (denn  $b_n \rightarrow b$ ).

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |\overbrace{(a_n - a)}^{< \frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{(b_n - b)}^{< \frac{\varepsilon}{2}}| \stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \text{ und } N_2 \end{aligned}$$

(also z.B. für  $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ ).

Also gilt  $(a_n + b_n) \rightarrow a + b$ . □

## 2.14 Beispiel

a)  $\frac{(-1)^n + 5}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , denn  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  und  $(-1)^n + 5$  ist beschränkt:  
 $|(-1)^n + 5| \leq 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (nach 2.13 d)

b)  $\frac{3n^2 - 2n + 1}{-n^2 + n} \rightarrow -3$  für  $n \rightarrow \infty$ , denn  
 $\frac{3n^2 - 2n + 1}{-n^2 + n} = \frac{n^2 \cdot (3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2 \cdot (-1 + \frac{1}{n})} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\substack{\rightarrow 3 \text{ für } n \rightarrow \infty \\ \rightarrow -1 \text{ für } n \rightarrow \infty}} \frac{3}{-1} \text{ für } n \rightarrow \infty$  (nach 2.13 b,d) [Nullfolgen]

c) Wichtiges Beispiel

Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$ , d.h.  $|x| = \frac{1}{1+t}$  mit  $t > 0$ .

Sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot x^n) = 0$ , denn

$$\begin{aligned} (1+t)^n &\stackrel{\text{Mathe 1: 7.17 bin. Lehrsatz}}{=} \sum_{j=0}^n \left[ \binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot t^j \right] \\ &= \underbrace{1}_{j=0} + \underbrace{nt}_{j=1} + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2!} t^2}_{j=2} + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} t^3}_{j=3} + \dots \\ &\stackrel{\text{nur Term } j=k+1}{\geq} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} t^{k+1} = \binom{n}{k+1} t^{k+1} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$|n^k \cdot x^n| = \left| \frac{n^k}{(1+t)^n} \right| \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} t^{k+1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} + \dots} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ .

Es gilt also z.B.  $(k = 10000, x = \frac{1}{2})$ :  $\frac{n^{10000}}{2^n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow (1+t)^n$  wächst schneller als jede Potenz  $n^k$  !  
Exponentialfkt. Polynom

## 2.15 Anmerkung (Landau-Symbole, $\mathcal{O}$ -Notation)

(Informatik, VL Algorithmen)

Sei  $(a_n)$  eine strikt positive Folge, d.h.  $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Dann ist

a)  $\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}((a_n)) = \{(b_n) | (\frac{b_n}{a_n}) \text{ ist beschränkt} \}$  ("Menge aller Folgen, für die ... gilt")

b)  $o(a_n) = \{(b_n) | \frac{b_n}{a_n} \text{ ist Nullfolge} \}$  ( $(a_n)$  wächst schneller als  $(b_n)$ )

$\mathcal{O}, o$ : Landau-Symbole

c)  $(a_n) \sim (b_n)$ , falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n = 1$

Beispiel:

- $(2n^2 + 5n + 1)_n \in \mathcal{O}(n^2)$ , denn  
 $\left(\frac{2n^2+5n+1}{n^2}\right) = \frac{n^2 \cdot (2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2} \rightarrow 2$  für  $n \rightarrow \infty$ , beschränkt
- $(n^2) \in o(n^3)$
- $(n^3) \in o(2^n)$
- $(n^3 - 3) \sim (n^3)$ , denn  $\left(\frac{n^3}{n^3-3}\right) = \left(\frac{n^3 \cdot (1)}{n^3 \cdot (1 - \frac{3}{n^3})}\right) \rightarrow 1$  für  $n \rightarrow \infty$
- häufig auch laxe Schreibweise

$$\begin{aligned} 2n^2 + 5n + 1 &= \mathcal{O}(n^2) \\ n^2 &= o(n^3) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) &= \text{Menge der beschränkten Folgen} \\ o(1) &= \text{Menge der Nullfolgen} \end{aligned}$$

Wichtige Formel: Stirling:  $(n!) \sim (\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)$

Problem: Wie zeigt man die Konvergenz einer Folge, wenn man den Grenzwert nicht kennt?

## 2.16 Definition

Eine Folge reeller Zahlen  $(a_n)_n$  heißt

- ([streng](#)) monoton steigend/wachsend, falls  $a_{n+1} \overset{>}{\geq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , Schreibweise:  $(a_n) \nearrow$
- ([streng](#)) monoton fallend  $(a_n) \searrow$ , falls  $a_{n+1} \overset{<}{\leq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton, falls a) oder b) gilt (oder beides)

## 2.17 Beispiel

- $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$  ist streng monoton fallend
- $(a_n) = (1)$  ist monoton fallend und monoton steigend
- $(a_n) = ((-1)^n)$  ist nicht monoton

## 2.18 Bemerkung

$(a_n) \nearrow$  zeigt man so:

$$a_{n-1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

## 2.19 Satz (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte, monotone Folge reeller Zahlen  $(a_n)_n$  konvergiert, und zwar gegen

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , falls  $(a_n)$  monoton steigend oder gegen
- $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ , falls  $(a_n)$  monoton fallend ist.

Beweis:

Sei  $(a_n) \nearrow$  und beschränkt.

$$\Rightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \quad \text{ist beschränkt} \\ \xRightarrow[\text{Mathe 1, 8.16}]{\text{Vollst.-Axiom}} S := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{existiert.}$$

Wir zeigen:  $a_n \rightarrow S$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Zu zeigen ist  $\exists N \in \mathbb{N}$  mit  $|a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ .

Es gilt  $a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , also zu zeigen:  $S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$ .

$S$  ist kleinste obere Schranke, d.h.  $S - \varepsilon$  ist keine obere Schranke

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad a_n > S - \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$(a_n) \searrow$  analog

□

## 2.20 Beispiel

a)  $x \in \mathbb{R}^+$ , dann  $(x^n) \in o(n!)$  ( $x^n = o(n!)$ ), d.h.  $a_n = \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

$$- a_n > 0$$

$$- \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} = \frac{x}{n+1} \leq 1 \quad \text{für } n+1 \geq x, \text{ also gilt } a_{n+1} \leq a_n, \text{ d.h.}$$

$(a_n) \searrow$  und  $(a_n)$  ist beschränkt

$$- \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

b) wichtige Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \left( a + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = e \quad (\text{Eulersche Zahl, } e = 2,71828\dots)$$

Warum existiert dieser Limes?

Zeige:  $(a_n) \nearrow$  und  $(a_n)$  beschränkt, benutze Satz 2.19

–  $(a_n) \nearrow$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left( \frac{1+n}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{n-1}{n} \right)^{n-1} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{n-1}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{n-1}{n} \right)^{-1} \geq 1 \\ &= \left( \frac{n^2-1}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq 1 \end{aligned}$$

Benutze die Bernoulli-Ungleichung, für  $h \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $(1+h)^n \geq 1 + nh$  für  $h \geq -1$  (hier:  $h = -\frac{1}{n^2}$ )

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq \left( 1 - n \cdot \frac{1}{n^2} \right) \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \quad , \end{aligned}$$

also  $(a_n) \nearrow$

–  $(a_n)$  beschränkt: Übung, benutze wieder Bernoulli

## 2.21 Satz (Intervallschachtelungsprinzip)

Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$  (= linke Intervallgrenze)
- $(b_n) \searrow$  (= rechte Intervallgrenze)
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

Dann sind beide Folgen konvergent und besitzen denselben Limes.

Beweis:

$(a_n), (b_n)$  konvergent nach Satz 2.19, denn

- $(a_n) \nearrow$ ;  $(a_n)$  beschränkt, da  $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , also gilt auch  $a_n \leq b$  (alle anderen  $b_n$  sind noch kleiner)
- $(b_n) \searrow$ ;  $(b_n)$  beschränkt, da  $b_n \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , also  $b_n \geq a_n \geq a_1$
- Da  $(b_n) - (a_n)$  Nullfolge ist, sind auch die Grenzwerte gleich.

□

## 2.22 Beispiel (vgl. Beispiel 2.20 b))

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Man kann zeigen:  $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$

$$a_n \leq b_n, b_n - a_n \rightarrow 0, \text{ also } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Ähnlich zeigt man  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$  existiert  $\forall x \in \mathbb{R}$

So definiert man  $e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

Bisher:

$(a_n)$  konvergiert  $\Rightarrow (a_n)$  beschränkt, Umkehrung gilt nicht; z.B.  $((-1)^n)$

Allerdings besitzt diese Folge zwei konvergente Teilfolgen mit  $\lim +1$  und  $\lim -1$ .

## 2.23 Definition

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge und  $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} (n_1, n_2, \dots)$  eine streng monoton steigende Folge von Indizes (d.h.  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ).

Dann heißt die Folge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  Teilfolge von  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ("Teilfolgen entstehen durch Streichung von Gliedern").

## 2.24 Beispiel

$$\begin{aligned}(a_n) &= ((-1)^n) \\ n_k &:= 2n \quad \text{ergibt } (n_1 = 2; n_2 = 4; n_3 = 6) \\ a_n &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{Teilfolge } 1, 1, 1, \dots) \\ n_k &:= 2n - 1 \quad \text{ergibt (Teilfolge } -1, -1, -1, \dots) \\ a_{2n-1} &= -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

## 2.25 Bemerkung

Es gilt:  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a \Rightarrow$  jede Teilfolge von  $(a_n)$  konvergiert gegen  $a$ .

## 2.26 Definition

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge. Eine Zahl  $h \in \mathbb{R}$  heißt Häufungspunkt von  $(a_n)$ , wenn es eine Teilfolge von  $(a_n)$  gibt, die gegen  $h$  konvergiert.

## 2.27 Beispiel

- $(a_n) = ((-1)^n + \frac{1}{n})$  besitzt zwei Häufungspunkte  $-1$  und  $1$
- $(a_n) = ((-1)^n)$  besitzt die Häufungspunkte  $-1$  und  $1$

## 2.28 Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge. Dann gilt:

$$(a_n) \text{ beschränkt} \Rightarrow (a_n) \text{ besitzt eine konvergente Teilfolge}$$

Beweis: Intervallschachtelungsprinzip/Bisektionsverfahren  
(s. Folien/Blatt[←s.u.] )

Wir verwenden das Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.21). Nach Voraussetzung ist  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt, es existiert also ein  $K \in \mathbb{N}$ , so dass alle Folgenglieder im Intervall  $[-K, K] =: [A_0, B_0]$  liegen. Halbiere dieses Intervall:

- Falls in der ersten Hälfte des Intervalls unendlich viele Folgenglieder liegen: wähle eines davon aus.
- Falls nicht (also falls nur endlich viele Folgenglieder in der ersten Hälfte des Intervalls liegen), dann liegen in der zweiten Hälfte unendlich viele Folgenglieder. Wähle davon eines aus.



Das ausgewählte Folgenglied nennen wir  $a_{n_1}$ , die Intervallhälfte, aus der es stammt, nennen wir  $[A_1, B_1]$ . Fahre nun so fort: Halbiere  $[A_1, B_1]$ , wähle wie oben  $a_{n_2}$  aus, erhalte damit das Intervall  $[A_2, B_2]$ , usw. So erhalten wir eine Teilfolge  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Für die Intervallgrenzen von  $[A_k, B_k]$  gilt:

- $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$
- $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \nearrow, \quad (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $B_k - A_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Damit sind alle Voraussetzungen für Satz 2.21 (Intervallschachtelungsprinzip) erfüllt. Die Folgen  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sind also konvergent und besitzen denselben Limes  $a$ . Damit gilt auch  $a_{n_k} \rightarrow a$  für  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$

## 2.29 Bemerkung/Definition

Sei  $(a_n)$  reell und beschränkt, dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von  $(a_n)$ :  $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  bzw. den
- Limes inferior von  $(a_n)$ :  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

Weiter setzt man

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} \infty, & \text{wenn } (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt ist} \\ -\infty, & \text{wenn } (a_n) \rightarrow -\infty \text{ gilt, d.h. } \forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: a_n \leq -K \quad \forall n \geq N \end{cases}$
- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} -\infty, & \text{wenn } (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt ist} \\ \infty, & \text{wenn } (a_n) \rightarrow \infty \text{ gilt, d.h. } \forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: a_n \geq K \quad \forall n \geq N \end{cases}$

Achtung:  $-\infty, \infty$  sind keine reellen Zahlen!

Man erweitert hier  $\mathbb{R}$  um zwei ideelle Elemente  $-\infty, \infty$ , setzt  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$  (Abschluss von  $\mathbb{R}$ ) und erweitert die Ordnungsstruktur auf  $\mathbb{R}$  durch  $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Mit dieser Festlegung besitzt jede reelle Zahlenfolge sowohl  $\limsup$  als auch  $\liminf$ .

Beispiel:

$$\text{a) } a_n = \frac{n+1}{n} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\text{b) } a_n = (-1)^n \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

$$\text{c) } a_n = (-1)^n \cdot n \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$\text{d) } a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) : \text{Übung}$$

## 2.30 Definition (Cauchyfolge)

Eine Folge  $(a_n)$  heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  
 $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$   
 (kurz:  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$ ) mit  $|a_n - a_m|$ ... Abstand zweier Folgenglieder

## 2.31 Satz (Cauchy Kriterium)

Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

$$(a_n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow (a_n) \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Beweisskizze (ausführlicher Beweis: s. Moodle):

- "⇒": Einschiebetrick, Dreiecksungleichung verwenden
- "⇐": Idee:  $(a_n)$  ist Cauchyfolge (zu zeigen: konvergent)  
 zeige:  $(a_n)$  ist beschränkt  
 ⇒ 2.28  $\exists$  konvergente Teilfolge  
 zeige: Limes der Teilfolge ist Limes der Folge

## 2.32 Anwendung (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$  eine Abbildung mit

$$\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\text{Abstand der Bildpunkte}} < \underbrace{|x - y|}_{\text{Abstand von 2 Punkten}} \quad \forall x, y \in [a, b]$$

("f ist strikte Kontraktion")

Dann hat  $f$  genau einen Fixpunkt, d.h.

$$\underbrace{\exists!}_{\text{es gibt genau ein...}} r \in [a, b] \text{ mit } f(r) = r$$

es gibt genau ein...

Beweisidee:

Starte mit beliebigem  $x_0 \in [a, b]$ .

Berechne  $x_1$  als  $f(x_0)$   $x_1 := f(x_0)$

$x_2$  als  $f(x_1)$   $x_2 := f(x_1)$

also  $x_{n+1} := f(x_n)$

Zeige: Diese Folge konvergiert (Cauchyfolge), und zwar gegen  $r = f(r)$ ;  $r$  ist eindeutig (Annahme: es existieren 2 verschiedene  $r$ )

### 3 Reihen

#### 3.1 Definition

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge.

Summiere die ersten  $n$  Folgenglieder.

$$S := \sum_{k=1}^n a_k \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$$

( $n$ -te Partialsumme)

$$\begin{array}{c} \underbrace{a_1}_{S_1} + a_2 + a_3 + \dots + a_n \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{S_2} \\ \underbrace{\hspace{2.5cm}}_{S_3} \\ \underbrace{\hspace{3.5cm}}_{S_n} \end{array}$$

Die Folge  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = (S_1, S_2, S_3, \dots)$  heißt unendliche Reihe, schreibe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$   
 Falls  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $s \in \mathbb{R}$  konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen  $s$  und ihr Grenzwert wird dann ebenfalls mit  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bezeichnet.  
 (Entsprechend kann man für eine Folge  $(a_n)_{n \geq n_0}$  die Reihe  $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$  definieren)

#### 3.2 Beispiel

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + \dots$  divergente Folge

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = (-1) + 1 + (-1) + \dots$  divergente Folge

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

c) Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \quad \text{divergiert}$$

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\dots + \frac{1}{n}}_{\text{usw.}} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  divergent (per Induktion:  $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$ )

d)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$  it konvergent gegen den Grenzwert  
 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

e) wichtiges Beispiel: Geometrische Reihe

Für  $q \in \mathbb{R}$  mit  $|q| < 1$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad , \text{ denn:}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{Übung: geom. Summe, Induktion})$$

Aus 2.11:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad , \text{ falls } |q| < 1$$

Geometrische Folge. Also gilt:

$$S_n \rightarrow \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad \text{divergiert für } |q| \geq 1$$

Nochmal Beispiel d)

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ , also geometrische Reihe mit  $q = \frac{1}{2}$   $1 > |q|$ , konvergiert gegen  $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Weitere Beispiele:

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{3}$$

$$- \sum_{k=3}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+3} = q^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^3}{1-q} \quad (\text{falls } |q| < 1)$$

### 3.3 Rechenregeln für Reihen

folgen aus den Rechenregeln für Folgen. Sei

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert gegen  $a$ ,
- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergiert gegen  $b$ .

Dann gilt mit  $c \in \mathbb{R}$ :

- $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  konvergiert gegen  $a + b$
- $\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k)$  konvergiert gegen  $c \cdot a$

### 3.4 Konvergenz-/Divergenzkriterien für Reihen

- [1] Ist  $S_n$  mit  $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  beschränkt und  $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent (folgt aus Satz 2.19/monotone Konvergenz).

- [2] Cauchy-Kriterium  
 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\forall m > n \geq N$  gilt:  $|a_{n+1} + \dots + a_m| = |\sum_{k=n+1}^m a_k| < \varepsilon$   
 $|S_m - S_n|$   
(folgt aus 2.31/Cauchykriterium für Folgen)  
Daraus ergibt sich:  
Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent, so ist  $(a_n)_n$  Nullfolge (wähle  $m = n+1$ , dann  $|a_{n+1}| < \varepsilon$ , d.h.  $a_n \rightarrow 0$ ).  
 $\Rightarrow$ [3]

- [3] Divergenzkriterium  
Ist  $(a_n)_n$  keine Nullfolge, so ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.  
Bsp:  $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{k}\right)}_{\rightarrow 1 \text{ für } k \rightarrow \infty, \text{ keine Nullfolge!}}$  divergiert

- [4] Majorantenkriterium  
Seien  $(a_n), (b_n)$  Folgen mit  $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$  (für fast alle  $n$ , d.h. für alle bis auf endlich viele)  
Dann gilt:  
Ist  $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}_{\text{Majorante}}$  konvergent, dann auch  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^m b_k \\ &\leq \left| \sum_{k=n+1}^m b_k \right| < \varepsilon, \text{ da } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent,} \end{aligned}$$

also ist Cauchy Kriterium [2] für  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  erfüllt,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert.  
Ähnlich: Minorantenkriterium für Divergenz, s. Blatt 5.

5 Leibnitzkriterium für alternierende Reihen

Sei  $(a_n)_n$  reelle, monoton fallende Nullfolge mit  $a_n \geq 0 \quad \forall n$ .  
 Dann konvergiert die alternierende Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$

Beweis: Intervallschachtelungsprinzip

$$A_n := \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cdot a_k$$

$$B_n := \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cdot a_k$$

–  $A_n \nearrow$ , denn

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= \sum_{k=0}^{\overbrace{2(n+1)-1}^{2n+1}} (-1)^k \cdot a_k - \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cdot a_k \\ &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n} a_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0 \end{aligned}$$

(da  $(a_n) \searrow$ )

– ähnlich für  $B_n \searrow$

–  $B_n - A_n = (-1)^{2n} a_{2n} = a_{2n} \geq 0 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  (weil  $(a_n)_n$  Nullfolge nach Voraussetzung)

$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ , also konvergiert  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

Bsp:

a) Leibnitz-Reihe:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

konvergiert gegen  $\frac{\pi}{4}$

b) Die alternierende harmonische Reihe

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

konvergiert gegen  $\ln 2$

## 6 Absolute Konvergenz

### Definition

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt absolut konvergent, falls die Betragsreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

### Beispiel

a)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$  konvergiert absolut, da  $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k^2}| = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{s. 6a}}$  konver-

giert

b)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$  konvergiert nicht absolut (aber konvergiert, s. Leibnitzkriterium), da  $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  (harmonische Reihe, konvergiert nicht)

(Majorantenkriterium)

Es gilt: Reihe konvergiert absolut  $\Rightarrow$  Reihe konvergiert  
(aber nicht umgekehrt, s. Beispiel b))

### 6a Wurzelkriterium

Für  $a_k \in \mathbb{R}$  gilt:

- falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert (d.h.  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergiert absolut)
- falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergiert
- für  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$  ist keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:

Sei  $s := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

- falls  $s < 1$ : Wähle kleines  $\varepsilon > 0$ , so dass  $s + \varepsilon < 1$   
 $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq s + \varepsilon$  für fast alle  $n$   
 $\Rightarrow |a_n| \leq (s + \varepsilon)^n$   
Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(s + \varepsilon)^k}_{< 1}$  ist geometrische Reihe und konvergiert, und  
ist Majorante für die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$



- falls  $s > 1$ , dann ist  $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$  für unendlich viele  $n$ , also  $a_n \not\rightarrow 0$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergent nach [3]
- z.B.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  (allgemeine harmonische Reihe) mit  $\alpha \geq 1$  liefert  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ , aber es gilt (Mitteilung):  
für  $\alpha = 1$  ist Reihe divergent (für  $0 < \alpha < 1$  ebenso, Blatt 5 Aufgabe 2);  
für  $\alpha > 1$  ist Reihe konvergent  
Das Wurzelkriterium kann diese Fälle nicht unterscheiden.

#### [6b] Quotientenkriterium

Sei  $a_n \neq 0$  für fast alle  $k$  (d.h. für alle bis auf endlich viele)

- falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert
- falls  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$  divergiert
- falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$  und  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1$ , so ist keine allgemeine Aussage möglich (wie bei [6a], dritter Punkt)

Beweis: ähnlich wie [6a]

### 3.5 Bemerkung

Umordnung einer Reihe, Konvergenzverhalten  
→ s. Folien 11.05.2016

## 4 Potenzreihen

### 4.1 Definition

Sei  $(a_k)_k$  eine reelle Folge,  $x \in \mathbb{R}$ . Dann heißt die Reihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

Potenzreihe mit Koeffizientenfolge  $(a_k)_k$  (oft auch  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-b)^k$ ,  $b \in \mathbb{R}$  heißt Entwicklungspunkt).

Falls  $a_k \neq 0$  für nur endlich viele (d.h.  $a_k = 0$  für fast alle  $k$ ), dann heißt  $P(x)$  Polynom.

(Unterschied zu bisherigen Reihen: abhängig von  $x$ . Für welche Werte von  $x$  konvergiert  $P(x)$ ? Klar: für  $x = 0$ , dann  $P(0) = a_0 \cdot 0^0 = a_0$ , auch für andere  $x$ ? Das hängt von der Folge  $a_k$  ab)

### 4.2 Beispiel

- a)  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k$  ( $a_k = 1 \quad \forall k$ ,  $b = 0$ ) konvergiert für alle  $x$  mit  $|x| < 1$  (geometrische Reihe!), also für  $x \in \underbrace{(-1, 1)}_{\text{Konvergenzintervall}}$ , sonst divergiert

sie (z.B. für  $x = 2$ ,  $x = 3$ , ...)

- b)  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$  (d.h.  $a_k = 2^k \quad \forall k$ )  $= \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k$  wie in a), konvergiert für alle  $x$  mit  $|2x| < 1$ , also  $|x| < \frac{1}{2}$ ; also für  $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

### 4.3 definition (Formel von Cauchy-Hadamard)

Sei  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe.

$$\rho := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

heißt der Konvergenzradius von  $P(x)$  (dabei sei  $\frac{1}{0} := +\infty$  und  $\frac{1}{\infty} := 0$  gesetzt, es ist also  $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ). Zur Bedeutung von  $\rho = \infty$  siehe 4.4.

Oft einfacher: Formel von Euler:

$$\rho = \lim_{\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad ,$$

falls  $(|\frac{a_n}{a_{n+1}}|)$  konvergente Folge ist oder "bestimmt gegen  $\infty$  divergiert", d.h. falls  $\forall K > 0 \quad \exists N$  mit  $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| \geq K \quad \forall n \geq N$ , dann setze  $\rho = +\infty$ .

(Achtung: z.B. für  $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$  ist diese Formel nicht anwendbar!)

## 4.4 Satz (Konvergenz von Potenzreihen)

Sei  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $\rho$ . Dann gilt:

- a) Für alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < \rho$  konvergiert  $P(x)$  absolut (d.h. Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ , die im Konvergenzintervall  $(-\rho, \rho)$  liegen. Ist  $\rho = \infty$ , so heißt das für alle  $x \in \mathbb{R}$ !).
- b) Für alle  $x$  mit  $|x| > \rho$  divergiert  $P(x)$ .
- c) Für  $|x| = \rho$  ist keine allgemeine Aussage möglich (Konvergenzintervall kann also  $(-\rho, \rho)$ ,  $[-\rho, \rho]$ ,  $[-\rho, \rho)$ ,  $(-\rho, \rho]$  sein).

Beweis:

- a) Nach dem Wurzelkriterium 3.4 [6a] ist  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$  konvergent, falls  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$  gilt. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} |x| \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} &< 1 \\ \Leftrightarrow |x| &< \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho \end{aligned}$$

- b) analog

- c) Übung (Beispiel suchen) □

Mit dem Quotientenkriterium 3.4 [6b] lässt sich der Satz auch für die Formel von Euler für  $\rho$  beweisen.

## 4.5 Bemerkung

Ist  $\rho$  Konvergenzradius von  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ , so konvergiert die Reihe absolut für  $|x| < \rho$  (für  $x \in (-\rho, \rho)$ ), divergiert für  $|x| > \rho$ .

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - b)^k$  konvergiert dann absolut für  $|x - b| < \rho$  (für  $x \in (b - \rho, b + \rho)$ ); divergiert für  $|x - b| > \rho$ . Für  $x = b - \rho$ ,  $x = b + \rho$  ist keine allgemeine Aussage möglich.

(Also: Falls  $b$  dabei: erst alles ohne  $b$  rechnen (4.3, 4.4), dann Bemerkung 4.5 verwenden)

## 4.6 Beispiel

- a) Bsp. 4.2 mit der Formel für  $\rho$  nachrechnen (Präsenzübungsblatt 6)
- b) wichtiges Beispiel: die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (a_k = \frac{1}{k!}, \quad b = 0)$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

hat Konvergenzradius  $\rho = \infty$  nach Euler, d.h. Reihe konvergiert für alle  $x \in \mathbb{R}$ , deshalb kann man für  $x \in \mathbb{R}$  die folgende Funktion definieren (Exponentialfunktion):

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Es gilt (vgl. Präsenzübungsblatt 6) (Cauchyprodukt):

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Für  $x = 1$  erhält man

$$\exp(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Man kann zeigen: Dies ist e (Eulersche Zahl)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ .

Allgemein gilt: Die Folge  $((1 + \frac{x}{n})^n)_n$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Daher schreibt man auch

$$e^x = \exp(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

## 5 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

### 5.1 Definition

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion,  $x_0, a \in \mathbb{R}$ .

- a)  $f$  heißt konvergent gegen  $a$  für  $x$  gegen  $x_0$ , wenn gilt:

Für alle Folgen  $\underbrace{(x_n)_n}_{\text{d.h. Glieder der Folge sind alle aus } D \setminus \{x_0\} \text{ aus } D \setminus \{x_0\}}$ , die gegen  $x_0$  konvergieren,

konvergieren die Funktionswerte  $f(x_n) \rightarrow a$ , also  $f(x_n) \rightarrow a$  für  $x_n \rightarrow x_0$  (Schreibweise:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ).

b) Analog lässt sich der Grenzwert für  $x \rightarrow \infty$  oder für  $x \rightarrow -\infty$  definieren:

$f$  konvergiert gegen  $a$  für  $\begin{matrix} x \rightarrow \infty \\ x \rightarrow -\infty \end{matrix}$  falls für alle Folgen  $(x_n)_n$  mit  $\underbrace{\begin{matrix} x_n \rightarrow \infty \\ x_n \rightarrow -\infty \end{matrix}}_{\text{d.h. } \forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N}: x_n > k \forall n \geq N}$

gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$  ( $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$ )

## 5.2 Beispiel

zu a)

$$f: D = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow x^2$$

Was ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ?

Sei  $(x_n)_n$  Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ . Nach den Rechenregeln für Folgen (Satz 2.13) gilt:

$f(x_n) = x_n^2 \rightarrow x_0^2$  (Voraussetzung  $x_n \rightarrow x_0$ , aus Rechenregeln  $x_n^2 \rightarrow x_0^2$ ), also ist  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = x_0^2 =: a$

(Bemerkung: allgemein gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  für alle Polynome)

zu b)

$$f: (0, \infty) = \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Was ist  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ?

Für alle  $(x_n)_n$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gilt:

$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \rightarrow 0$ , also  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

## 5.3 Bemerkung/Definition

Definition 5.1 ist nur interessant für die Punkte  $x_0 \in \mathbb{R}$ , für die es Folgen  $(x_n)_n$  aus  $D \setminus \{x_0\}$  gibt, die gegen  $x_0$  konvergieren.

Solche Punkte nennt man Häufungsstellen (HS) von  $D$ .

$\overline{D} := D \cup \{x | x \text{ ist HS von } D\}$  heißt Abschluss von  $D$ .

Beispiel:

- a)  $D = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$
- 1 keine HS von  $D$
- 1 ist HS von  $D$
- 0 ist HS von  $D$

- b)  $D = \mathbb{R}^+ \cup \{-2\}$   
 $-2$  keine HS von  $D$ , aber  $-2 \in D$ ,  $-2 \in \overline{D}$
- c)  $D = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , dann sind  $a$  und  $b$  HS;  
 $\overline{D} = [a, b]$
- d) Es gilt:  $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

## 5.4 Bemerkung/Definition

In Definition 5.1 muss  $f(x_n) \rightarrow a$  für alle Folgen  $(x_n)_n$  aus  $D \setminus \{x_0\}$ , die gegen  $x_0$  konvergieren, gelten; also insbesondere für Folgen, die von links ( $x_n \rightarrow x_0$  mit  $x_n < x_0 \forall n$ ) und für Folgen, die von rechts ( $x_n \rightarrow x_0$  mit  $x_n > x_0 \forall n$ ) gegen  $x_0$  konvergieren (falls möglich).

Man spricht vom links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert. Schreibweise:

links:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x)$$

rechts:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$$

oder

$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$$

## 5.5 Beispiel

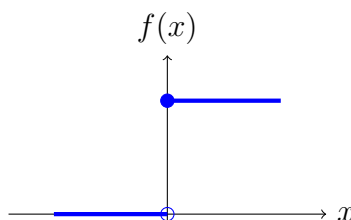
- a) –  $D = \mathbb{R}$ ,  $x_0 = 0$   
 Folge aus  $D \setminus \{x_0\}$ , die von rechts [links] gegen  $x_0$  konvergiert ist z.B.  
 $(x_n)_n = (\frac{1}{n})_n$        $[(x_n)_n = (\frac{-1}{n})_n]$
- $D = [0, \infty]$ ,  $x_0 = 0$   
 Nur Folgen, die von rechts gegen  $x_0$  konvergieren, sind möglich (sonst nicht in  $D$ )

- b) Heavisidefunktion (Schwellenwertfunktion)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$



- für  $(x_n)_n = (\frac{1}{n})_n$  gilt  $f(x_n) = f(\frac{1}{n}) = 1 \rightarrow 1$
- für  $(x_n)_n = (-\frac{1}{n})_n$  gilt  $f(x_n) = f(-\frac{1}{n}) = 0 \rightarrow 0$

Also gibt es kein  $a$ , so dass alle Folgen mit  $x_n \rightarrow x_0$  die Bedingung  $f(x_n) \rightarrow a$  erfüllen.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert hier nicht!

## 5.6 Bemerkung/Definition

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \overline{D}$ .

Falls für alle Folgen  $(x_n)_n \in D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:

$$f(x_n) \rightarrow \pm\infty \quad ,$$

so sagt man,  $f$  divergiert bestimmt gegen  $\pm\infty$  für  $x \rightarrow x_0$  (analog für  $x \rightarrow \pm\infty$ ).

Beispiel:

$$\begin{aligned} f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- falls  $D = (0, \infty)$ :  
 $f(x)$  divergiert bestimmt gegen  $\infty$  für  $x \rightarrow 0$
- falls  $D = (-\infty, 0)$ :  
 $f(x)$  divergiert bestimmt gegen  $-\infty$  für  $x \rightarrow 0$
- falls  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :  
dann existiert  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  nicht und  $f(x)$  divergiert auch nicht bestimmt.

## 5.7 Definition (Stetigkeit)

Sei  $f(x)$  eine reelle Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die Funktion heißt stetig an der Stelle  $x_0 \in D$ , falls  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  gilt.

Die Funktion heißt (überall) stetig in  $D$ , falls  $f(x)$  in jedem Punkt  $x_0 \in D$  stetig ist.

## 5.8 Bemerkung

Sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ .

a) Äquivalente Definition der Stetigkeit:  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium, siehe z.B. WHK 6.17:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D: |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

b) Gibt es eine Konstante  $K$  mit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K \cdot |x - x_0| \quad \forall x \in D \quad ,$$

dann ist die Funktion stetig.

## 5.9 Beispiel

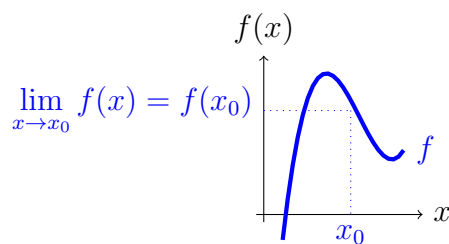
a)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$f(x)$  ist stetig auf  $\mathbb{R}$  ( $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert [vgl. Bsp. 5.2 a]) und ist gleich  $f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$ )

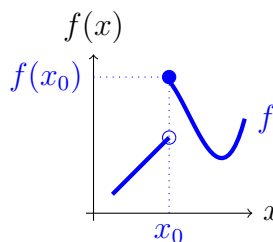
b) (1) Bild:

$f(x)$  ist stetig in  $x_0$



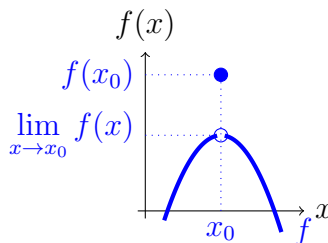
(2) Bild:

$f(x)$  ist nicht stetig in  $x_0$ :  
 $\lim_{x \rightarrow x_0}$  existiert nicht!



(3) Bild:

$f(x)$  ist nicht stetig in  $x_0$ :  
 $\lim_{x \rightarrow x_0}$  existiert, ist aber ungleich  $f(x_0)$ .





c)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

ist stetig auf  $\mathbb{R}$

### 5.10 Bemerkung

Eine Funktion  $f(x)$  ist stetig, falls der Graph von  $f$  keine „SSprungstelle“ hat bzw. „man  $f$  ohne abzusetzen zeichnen kann“.

$\Rightarrow$  in Ordnung für Intuition, aber unpräzise

Beispiel dazu:

a)

$$\begin{aligned} f: D = \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Die Funktion ist stetig auf  $D$ , weil die 0 ausgenommen wurde.

b) Dirichlet-Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion ist unstetig in jedem Punkt  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

c) Thomaesche Funktion

Die Funktion ist stetig in jedem  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  in  $[0, 1]$   
und unstetig in jedem  $x_0 \in \mathbb{Q}$  in  $[0, 1]$ .

### 5.11 Satz (Rechenregeln für stetige Funktionen)

a) Seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Dann sind auch

- $c \cdot f$
- $f + g$
- $f - g$

- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$  (für  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$ )

stetig in  $x_0$ .

b) Die Komposition zweier stetiger Funktionen ist stetig.

$$\begin{aligned}
 D, D' &\subseteq \mathbb{R} \\
 f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\
 g: D' &\rightarrow \mathbb{R} \\
 f(D) &\subseteq D' \\
 f, g &\text{ stetig} \\
 &\Rightarrow \\
 (g \circ f): D &\rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig}
 \end{aligned}$$

Beweis folgt direkt aus Def. 5.1, 5.7 und den Rechenregeln für Folgen 2.13.

## 5.12 Bemerkung

Es gilt:  $D \subseteq \mathbb{R}$  Intervall,  $f: D \rightarrow f(D)$  bijektiv, stetig.

Dann ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$  stetig.

## 5.13 Bemerkung

Man kann zeigen (u.a. mit 5.11), dass

- a) Potenzreihen mit Konvergenzradius  $\rho$  sind stetig für alle  $x$  mit  $|x| < \rho$ .
- b) Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmen, Wurzelfunktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.
- c)  $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$  ebenso (vgl. PÜ 7\*).

## 5.14 Bemerkung/Definition (Rationale Funktionen)

$$\begin{aligned}
 f: D &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)}
 \end{aligned}$$

sei rationale Funktion mit  $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} | q(x) = 0\}$ .

Dann ist  $f$  stetig auf ganz  $D$ .

Lässt sich  $f$  auf ganz  $\mathbb{R}$  definieren ("fortsetzen"), so dass man eine auf ganz  $\mathbb{R}$  stetige Funktion erhält?

Beispiel:

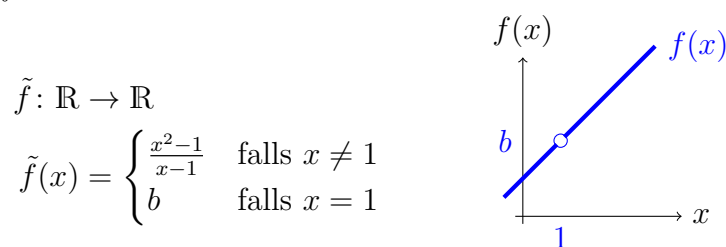
a)

$$f: D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ist stetig auf  $D$ .

Setze  $f$  auf  $\mathbb{R}$  fort.



$\tilde{f}$  ist stetig in  $x_0 = 1$  genau dann, wenn  $b = 2$  gewählt wird, denn  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ .

$x_0 = 1$  ist eine (stetig) hebbare Definitionslücke von  $f$

Allgemein:

Sei  $f: \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , es existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =: r \quad r \in \mathbb{R}$ , dann ist  $x_0$  stetig hebbare Definitionslücke von  $f$ , die Funktion

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ r & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

ist dann die stetige Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{R}$ .

b)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x - 1)}{(x - 1)}$   
 Definitionslücke  $x_0 = 1$  hebbar durch  $0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,

$$\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \text{ stetig.}$$

c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{(x - 1)^2} = \frac{x + 1}{x - 1}$   
 Definitionslücke  $x_0 = 1$  nicht hebbar:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  existiert nicht

d) Gilt für die Nullstelle  $x_0$  des Nenners einer rationalen Funktion  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  für  $x \rightarrow x_0 \mp$ , so nennt man  $x_0$  Polstelle.

Z.B.  $f, g: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$   
 $x_0 = 0$

- $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0+$
- $f(x) \rightarrow -\infty$  für  $x \rightarrow 0-$
- $g(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow 0+$  und  $x \rightarrow 0-$

e)  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$  hat bei  $x_0 = 0$  Oszillationsstelle:

- für  $(x_n)_n = (\frac{1}{n\pi})_n$  ist  $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0$
- für  $(x_n)_n = (\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n})_n$  ist  $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \rightarrow 1$

d.h.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existiert nicht

f) Es gilt aber:

$f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \rightarrow 0$  für  $x \rightarrow 0$  (vgl. ÜB 7)  
 stetig hebbare Definitionslücke, hebbbar durch 0

g) Wichtig: (ohne Beweis hier, später)

$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow 0$   
 stetig hebbare Definitionslücke, hebbbar durch 1

Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen ( $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ) besitzen wichtige Eigenschaften, u.a.:

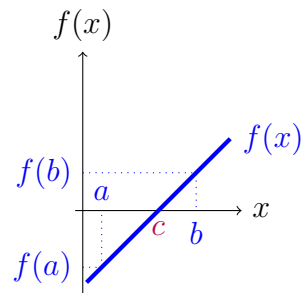
- Zwischenwerteigenschaft
- Existenz von Minimum und Maximum

### 5.15 Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano, Nullstellensatz, ZWS, IVT [Intermediate Value Theorem])

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$   
 (genauso:  $f(a) > 0$  und  $f(b) < 0$  bzw. " $f(a) - f(b) < 0$ ")

Dann existiert ein  $c \in [a, b]$  mit  $f(c) = 0$ , d.h.  $f$  hat Nullstelle in  $[a, b]$ .  
 Anschaulich klar:

$f$  stetig ('ohne absetzen'), keine Sprünge möglich



Beweis: mittels Bisektionsverfahren

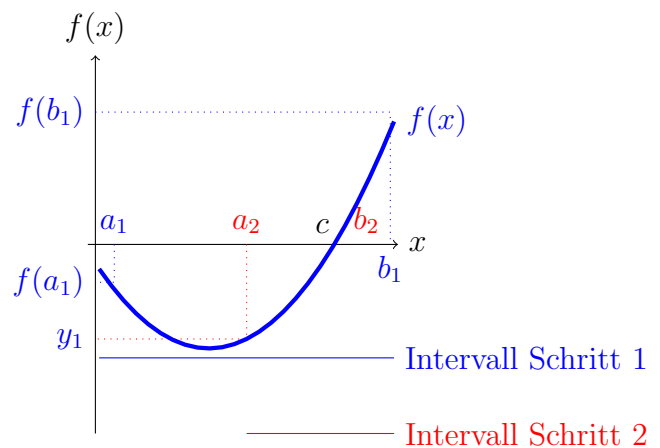
**Start:**

$$[a, b] := [a_1, b_1]$$

**Schritt 1:**

halbiere das Intervall  
 berechne  $y_1 = f(\frac{a_1+b_1}{2})$

- $y_1 < 0$   
 neues Intervall:  $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$
- $y_1 > 0$   
 neues Intervall:  $[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $y_1 = 0$   
 habe  $c$  schon gefunden,  $c = \frac{a_1+b_1}{2}$



Nach Schritt 1 gilt:

$[a_2, b_2]$  (neues Intervall) ist halb so groß wie  $[a_1, b_1]$ , und (hier)  
 $f(a_2) < 0$ ,  $f(b_2) > 0$

**Schritt 2:**

halbiere Intervall, berechne  $y_2 = f(\frac{a_2+b_2}{2})$

- $y_2 < 0 \Rightarrow [a_3, b_3] := [\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$
- $y_2 > 0 \Rightarrow [a_3, b_3] := \dots$
- $y_2 = 0 \Rightarrow \dots$

usw.

Für die Folge  $([a_n, b_n])_n$  gilt:

$$\left. \begin{array}{l} (a_n) \nearrow \quad (\text{monoton steigend}) \\ (b_n) \searrow \quad (\text{monoton fallend}) \\ (b_n - a_n) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Rightarrow (\text{Intervallschachtelungsprinzip})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: c$$

Es ist  $f(a_n) \leq 0$ ,  $f(b_n) \geq 0$

Da  $f$  stetig ist, gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)}_{\leq 0} \stackrel{\text{Def. Stetigkeit}}{=} f(c) \leq 0 \\ \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)}_{\geq 0} \stackrel{\text{Def. Stetigkeit}}{=} f(c) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(c) = 0, \text{ also hat } f \text{ Nullstelle bei } c$$

□

Dieses Verfahren wird auch zur Berechnung von Nullstellen verwendet.

Folgerung: 5.16

## 5.16 Satz (ZWS allgemein)

Sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $y$  eine Zahl zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$ .

Dann gibt es ein  $\bar{x} \in [a, b]$  mit  $f(\bar{x}) = y$  ( $f$  nimmt auf dem Intervall  $[a, b]$  jeden zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  liegenden Wert an).

### Beweis

OBdA sei  $f(a) \leq y \leq f(b)$ .

Definiere Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - y \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l}
\text{Dann ist} \\
\underbrace{g(a)}_{f(a)-y, \quad f(a) \leq y} \leq 0 \\
\\
\underbrace{g(b)}_{f(b)-y, \quad f(b) \geq y} \geq 0 \\
\\
g \text{ ist stetig} \\
(\text{als Verknüpfung stetiger Funktionen})
\end{array} \right\} \stackrel{5.15/\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists c \in [a, b] \text{ mit } g(c) = 0$$

$g(c) = f(c) - y = 0$ , dann ist  $f(c) = g(c) + y = 0 + y = y$

□

## 5.17 Anwendung

- a) Existenz von Nullstellen, Bsp  $\pi$  (s. PÜ)
- b) Existenz von Lösungen einer Gleichung (PÜ 8)
- c) Kamel, Antipoden, Käsebrot, Tisch (s. Folien 06.06.2016)
- d) Der ZWS liefert auch ein Kriterium zur Existenz von stetigen Umkehrfunktionen.

## 5.18 Definition

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt (streng) monoton fallend [wachsend], falls gilt:

Sind  $x, y \in D$ ,  $x < y$ , dann ist  $f(x) \stackrel{(<)}{\leq} f(y)$  [ $f(x) \stackrel{(>)}{\geq} f(y)$ ].

Wenn  $f$  (streng) monoton wachsend oder fallend:  $f$  ist (streng) monoton.

## 5.19 Satz


$D$  Intervall,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig.

Dann gilt:  $f$  ist injektiv auf  $D \Leftrightarrow f$  streng monoton auf  $D$ .

### Beweis

" $\Leftarrow$ ": Sei  $x \neq y$ , also etwa  $x < y$ .

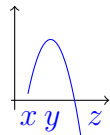
$f$  streng monoton  $\Rightarrow f(x) < f(y)$  bzw.  $f(x) > f(y)$ , also  $f(x) \neq f(y)$ ;  
also  $f$  injektiv.

" $\Rightarrow$ ": (Achtung: falls  $f$  nicht stetig: injektiv  $\nRightarrow$  streng monoton, z.B. )

Wir zeigen (Kontraposition):

$f$  nicht stetig  $\Rightarrow f$  nicht injektiv

Sei  $f$  nicht streng monoton, dann gilt für ein  $y$  mit  $x < y < z$  aus  $D$ :



$$f(x) \leq f(y), \quad f(y) \geq f(z)$$

Nach ZWS:  $f$  nimmt in  $[x, y]$  jeden Wert zwischen  $f(x)$  und  $f(y)$  an,  $f$  nimmt in  $[y, z]$  jeden Wert zwischen  $f(y)$  und  $f(z)$  an.

$\Rightarrow$  mind. ein Wert wird doppelt angenommen

$\Rightarrow f$  ist nicht injektiv □

## 5.20 Satz (Minimax-Theorem von Weierstraß)

Jede stetige Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

(i) ist beschränkt (d.h.  $\exists K \in \mathbb{N}$ , so dass  $f(x) \in [-K, K] \quad \forall x \in [a, b]$ )

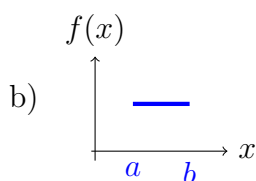
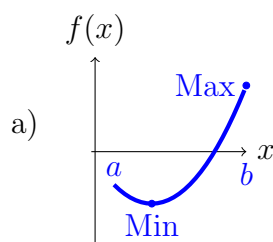
(ii) besitzt sowohl Minimum als auch Maximum, d.h.  $\exists x_*, x^* \in [a, b]$  mit  $f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a, b]$

Minimum-Maximum-  
( $x_*$  heißt dann Minimalstelle,  $x^*$  heißt Maximalstelle)

Beweis nutzt wieder Bisektionsverfahren, s. WHK Theorem 6.24 □

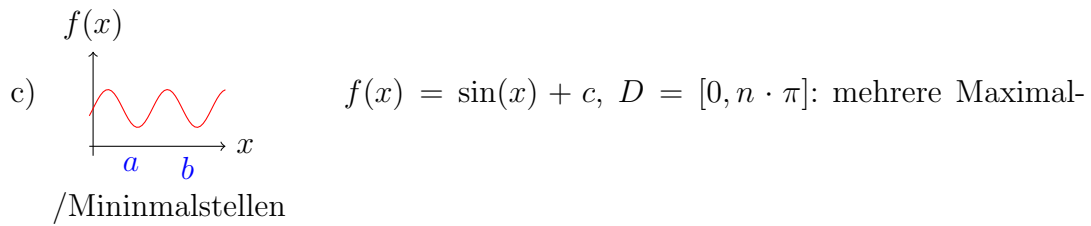
(Achtung: Aussage über globale Maxima/Minima nicht eindeutig)

## 5.21 Beispiel/Gegenbeispiel



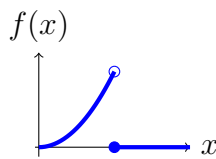
Für  $f(x) = c$ : Alle  $x \in [a, b]$  sind Maximal-/Minimalstellen!





d) Falls nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind, gilt der Satz i.A. nicht, z.B.

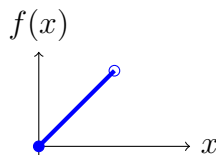
–  $f$  nicht stetig:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} \text{ auf } [0, 2]$$

$f$  hat kein Maximum auf  $[0, 2]$

– Definitionsbereich von  $f$  nicht abgeschlossen

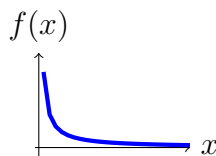


$$f: [0, 3) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

kein Maximum

– Definitionsbereich von  $f$  nicht beschränkt:

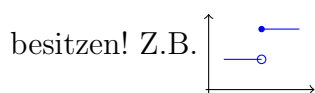


$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

kein Maximum/Minimum

Bemerkung: Es gibt aber auch nicht stetige Funktionen, die Maximum/Minimum



## 5.22 Bemerkung

Satz 5.20 liefert nur die Existenz von Maxima/Minima, aber keine Aussage darüber, wie man Maximum-/Minimumstelle (insbesondere "lokale") finden kann!

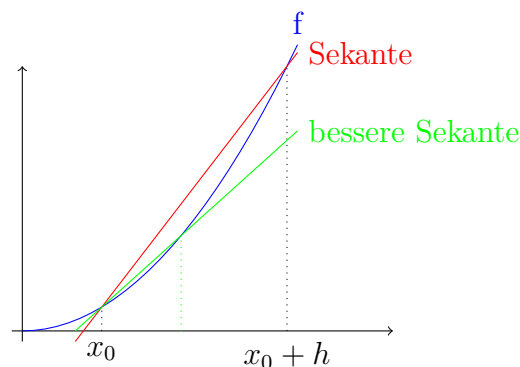
→ 6 Differentialrechnung

## 6 Differenzierbare Funktionen

### 6.1 Vorbemerkung

s. Folien

Idee:



$x_0 + \text{kleineres } h$

Die Gerade (Sekante) durch die Punkte  $(x_0 | f(x_0))$  und  $(x_0 + h | f(x_0 + h))$  hat die Steigung  $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}$  ('Differenzenquotient').

Je kleiner  $h$ , desto besser beschreibt die Sekante die 'Steigung von  $f$  in  $x_0$ '.

Für  $h \rightarrow 0$  erhält man (falls Grenzwert existiert) die Tangente in  $x_0$  mit Steigung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

In diesem Kapitel ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall.

### 6.2 Definition

$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in I$

- $f$  heißt differenzierbar (diffbar) in  $x_0$  (an der Stelle  $x_0$ ), falls  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  existiert. Dieser Grenzwert heißt erste Ableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  und wird mit  $f'(x_0)$  [ $f$  Strich] oder  $\frac{df}{dx}(x_0)$  bezeichnet.
- Ist  $f$  in jedem  $x_0 \in I$  diffbar, so heißt  $f$  differenzierbar (auf  $I$ ) und man nennt die Funktion  $f': I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$  die Ableitung(-sfunktion) von  $f$ .

## 6.3 Beispiel

a)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \quad x_0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) \\ &= 4 \end{aligned}$$

allgemein für  $x^2$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Bemerkung: 'lim' nicht weglassen/vergessen!

b) konstante Fkt:

$$f(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- c)  $f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N})$   
 $\Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$   
 (Beweis durch vollst. Induktion)

d)

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - (x+h)}{x \cdot (x+h)} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{x^2 + xh} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x \cdot (x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

e)

$$f(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x}^{\text{Additionstheorem}} - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos(h) + 1}{h}}_{\rightarrow 0, \text{ Mitteilung oder Übung}} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\rightarrow 1, \text{ Bsp. 5.14 g}} \\ &= \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

- f)  $f(x) = \cos x$   
 $f'(x) = -\sin x \quad (\text{Übung})$

## 6.4 Satz

$f: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in I$

Dann sind äquivalent:

- a)  $f$  ist in  $x_0$  diffbar.  
 b) Es gibt eine Funktion  $R: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ ,  $R(x_0) = 0$ , und ein  $m \in \mathbb{R}$ , so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{\overbrace{f(x_0)}^{\text{Zahl}} + m(x - x_0)}_{\text{Gerade durch } (x_0|f(x_0)) \text{ mit Steigung } m = \text{Tangente}} + \underbrace{R(x)(x - x_0)}_{\text{wird 0 an der Stelle } x_0, \text{ wird klein in der Nähe von } x_0}$$

Gilt b), so ist  $m = f'(x_0)$  (d.h. die Ableitung ist die Steigung der Tangente).  
 b) besagt:  $f$  lässt sich in der Nähe von  $x_0$  gut durch eine (affin-)lineare Funktion (Gerade) approximieren.

**Beweis:**

$$\text{a} \Rightarrow \text{b: Setze } R(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}, \text{ dann ist nach Voraussetzung}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} R(x_0 + h) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}}_{\text{existiert, da } f \text{ diffbar und } = f'(x_0)} - f'(x_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

nach Definition 6.2, weil  $f$  diffbar in  $x_0$ ;  
 also ist  $R$  stetig mit  $R(x_0) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{b} \Rightarrow \text{a: Sei } f(x) &= f(x_0) + m(x - x_0) + R(x)(x - x_0) \text{ (Voraussetzung)} \\ \Rightarrow f(x_0 + h) &= f(x_0) + m(x_0 + h - x_0) + R(x_0 + h)(x_0 + h - x_0) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= m + R(x_0 + h) \\ \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} m + R(x_0 + h) \\ &= m + \underbrace{R(x_0)}_{=0 \text{ (Voraussetzung)}} \\ &= m \end{aligned}$$

D.h.  $\lim$  existiert,  $f$  ist diffbar in  $x_0$ ,  $f'(x_0) = m$

□

## 6.5 Korollar (Folgerung)

Ist  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar in  $x_0 \in I$ , dann ist  $f$  auch stetig in  $x_0$  (Beweis folgt aus 6.4 b).

## 6.6 Bemerkung/Beispiel

Umkehrung von 6.5 gilt nicht!

Die Betragsfunktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$  ist bei  $x_0 = 0$  stetig, aber nicht diffbar!

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Denn:  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x+h|-|x|}{h}$  existiert nicht für  $x = 0$ !

- $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{h}{h} = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{-h}{h} = -1$
- $\Rightarrow 1 \neq -1$

Also: stetig  $\nRightarrow$  differenzierbar  
 $\Leftarrow$

## 6.7 Satz (Ableitungsregeln)

$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  diffbar in  $x \in I$ . Dann sind auch

- $c \cdot f, c \in \mathbb{R}$
- $f \pm g$
- $f \cdot g$  und
- $\frac{f}{g}$  (falls  $g(x) \neq 0$ )

diffbar in  $x$  mit

a)  $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

b)  $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

c)  $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  [Produktregel]

d)  $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$  [Quotientenregel]

### Beweis:

(nur a,c; Rest ähnlich)

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} &= c \cdot \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\rightarrow f'(x) \text{ für } h \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} c \cdot f'(x) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h} &\stackrel{\text{Regeln für Fkt.}}{=} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} \\ &\rightarrow \text{Einschiebetrick: } -f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) \\ &= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \rightarrow f'(x)}} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} g(x) \text{ (da stetig)}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(x)} \cdot f(x) \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \end{aligned}$$

□

## 6.8 Beispiel

a) Jedes Polynom ist diffbar (wegen a, b, c); jede rationale Funktion ist diffbar (a, b, d).

$$\text{b) } (4x^3 + 7x + 5)' = 4 \cdot 3x^2 + 7 + 0 = 12x^2 + 7$$

$$\text{c) } \left(\frac{3}{x}\right)' = \frac{0 \cdot x - 3 \cdot 1}{x^2} = -\frac{3}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \left(\frac{1}{x^2}\right)' &= \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

e) Allgemein:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow f'(x) &= -n \cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{f) } \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos(x) \cdot x - \sin(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{x \cdot \cos(x) - \sin x}{x^2}$$

g)

$$\begin{aligned}
 (\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\
 &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
 &\stackrel{\text{Additionstheoreme}}{=} \frac{1}{(\cos x)^2} \\
 \text{oder (kürzen, aufspalten)} &= \frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} + \frac{(\sin x)^2}{(\sin x)^2} \\
 &= 1 + (\tan x)^2
 \end{aligned}$$

## 6.9 Satz (Kettenregel)

Die Komposition  $f \circ g$  zweier diffbarer Funktionen  $f, g$  ist diffbar und es gilt:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

Beweis ähnlich wie Satz 6.7

□

Zum Merken:

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= \overset{\text{'äußere'}}{f} \left( \overset{\text{'innere Funktion'}}{g(x)} \right) \\
 \rightarrow (f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

## 6.10 Beispiel

$$\text{a) } ((3x^2 - x)^5)' = 5 \cdot (3x^2 - x)^4 \cdot (6x - 1)$$

innere Fkt:  $g(x) = 3x^2 - x$

äußere Fkt:  $f(x) = x^5$

$$\text{b) } (\sin(3x))' = (\cos 3x) \cdot 3$$

innere Fkt:  $g(x) = 3x$

äußere Fkt:  $f(x) = \sin x$

## 6.11 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

$I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle,  $f: I \rightarrow J$  bijektiv, diffbar in  $x_0 \in I$  mit  $f'(x_0) \neq 0$

Dann ist auch die Umkehrfunktion  $f^{-1}: J \rightarrow I$  diffbar in  $y_0 = f(x_0)$  und es gilt:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{f'(x_0) \neq 0}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$



Beweis mittels Definition der Ableitung (Differenzenquotient), hier nur Merkgel.

$$\begin{array}{lcl}
 & & y = f(f^{-1}(y)) \\
 \text{nach } y \text{ ableiten mit 6.9} & \Rightarrow & 1 = f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \\
 & \Leftrightarrow & (f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}
 \end{array}$$

## 6.12 Beispiel

a)  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \sqrt{x}$

Was ist  $f'(x)$ ?

$f$  ist Umkehrfunktion  $h^{-1}$  von  $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad h(x) = x^2, \quad h'(x) = 2x$

$$\begin{aligned}
 (h^{-1})'(y) &= \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} \\
 &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b)  $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$  ist  $h^{-1}$  von  $h(x) = x^3$ .

...

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

da:

$$h'(x) = 3x^2, \quad (h^{-1})'(y) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2} = \frac{1}{3(y^{\frac{1}{3}})^2}$$