

Mathematik II

25.04.2016

Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Funktionen	2
1.1	Wiederholung Mathe 1: Funktionen	2
1.2	Reelle Funktionen	2
1.3	Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen	3
1.4	Beispiel	3
1.5	Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion	4
1.6	Elementare Funktionen (naive Einführung)	4
2	Folgen	11
2.1	Definition: Folge	11
2.2	Beispiel	11
2.3	Definition: Eigenschaften von Folgen	12
2.4	Beispiel	12
2.5	Definition: Konvergenz	12
2.6	Bemerkung	12
2.7	Beispiel	12
2.8	Bemerkung	13
2.9	Satz: Beschränktheit von Folgen	13
2.10	Bemerkung	14
2.11	Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen)	14
2.12	Beispiel	14
2.13	Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen	15
2.14	Beispiel	16
2.15	Anmerkung (Landau-Symbole, \mathcal{O} -Notation)	16
2.16	Definition	17
2.17	Beispiel	17
2.18	Bemerkung	18
2.19	Satz (Monotone Konvergenz)	18

1 Reelle Funktionen

1.1 Wiederholung Mathe 1: Funktionen

Definition

Eine Funktion/Abbildung $f: A \rightarrow B$ besteht aus

- zwei Mengen:
 - A : Definitionsbereich von f
 - B : Bildbereich von f
- und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Wir schreiben dann $b = f(a)$, nennen b das Bild/den Funktionswert von a (unter f) sowie a (ein) Urbild von b (unter f).

Notation

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Beispiel

→ Folien 11.04.2016

1.2 Reelle Funktionen

Definition

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ (oft ist D endliche Vereinigung von Intervallen, z.B.

- $D = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
- $D = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$).

1.3 Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen

Definition

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen.

$$\begin{aligned} \text{a) } (f \pm g)(x) &:= f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D \\ &\text{Summe/Differenz von } f \text{ und } g \\ &\text{(genauer:} \\ &\quad f \pm g: D \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D \\ &\text{Produkt von } f \text{ und } g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) falls } g(x) &\neq 0 \quad \forall x \in D, \text{ dann} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D \\ &\text{Quotient von } f \text{ und } g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Komposition/Hintereinanderausföhrung} \\ f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: D_g \rightarrow \mathbb{R}, \text{ wobei } f(D_f) \subseteq D_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f: D_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

1.4 Beispiel

$$\begin{aligned} f, g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= x^2 + x - 1 \\ (f \cdot g)(x) &= x^2 \cdot (x - 1) = x^3 - x^2 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{x^2}{x - 1} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}) \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

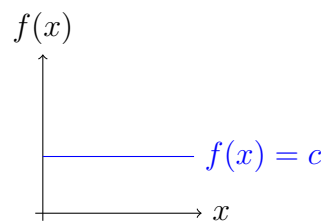
1.5 Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion

→ Folien 13.04.2016

1.6 Elementare Funktionen (naive Einführung)

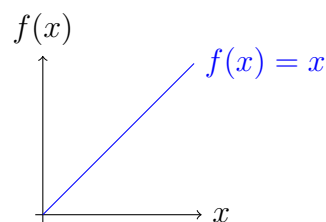
- a) Konstante Funktionen
für $c \in \mathbb{R}$ (fest):

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$



- b) Die identische Funktion (Identität)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$



Durch mehrfache Anwendung von 1.3 entstehen aus a) und b) viele weitere Funktionen.

- c) Potenzen (Monome)
für $n \in \mathbb{N}_0$ (fest):

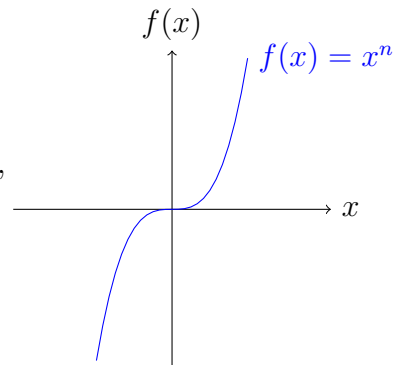
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

– $n = 0$: die konstante 1-Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^0 = 1 \end{aligned}$$

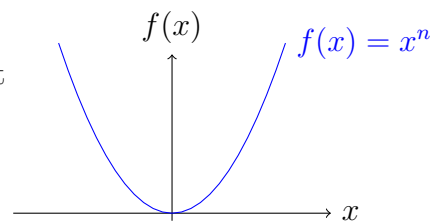
– n ungerade:

f punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$,
bijektiv



– n gerade:

f achsensymmetrisch zur y -Achse, nicht
bijektiv
 $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



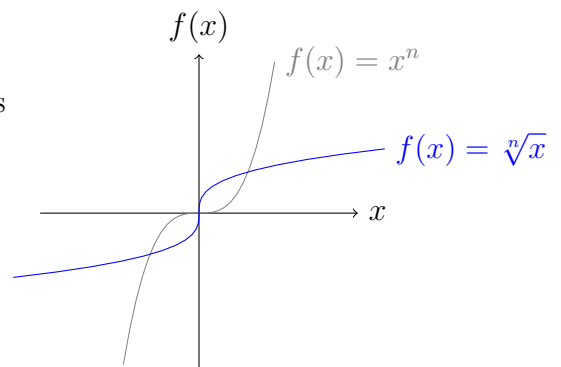
d) Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Monome. Dazu muss die Gleichung $f(x) = x^n = y$ ($y \in \mathbb{R}$ gegeben) gelöst werden.

– n ungerade:

f ist bijektiv, dann gibt es zu jedem
 $y \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = y$. Dieses
wird die n -te Wurzel aus y genannt:
 $x = \sqrt[n]{y}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$



– n gerade: Dann hat die Gleichung $x^n = y$ in \mathbb{R}

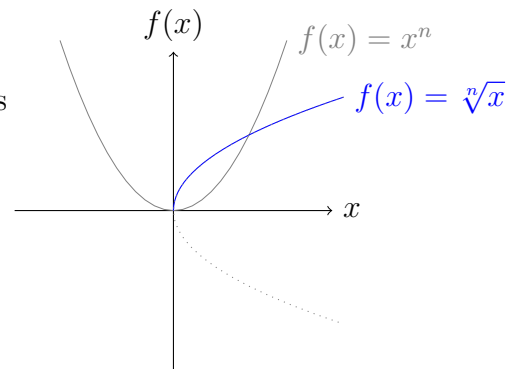
- * keine Lösung, falls $y < 0$
- * genau eine Lösung, falls $y = 0$ (nämlich $x = 0$)
- * zwei Lösungen, falls $y > 0$:

$$x_1 = \sqrt[n]{y} \quad (> 0)$$

$$x_2 = -\sqrt[n]{y} \quad (< 0)$$

Die positive Lösung wird hier dann als n -te Wurzel bezeichnet:

$$\sqrt[n]{}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$



e) Polynome

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten)

Ein Polynom ist eine Funktion p mit

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Falls $a_n \neq 0$ ist, heißt n Grad des Polynoms.

f) Rationale Funktionen

Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen (mit $p, q \dots$ Polynome):

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit $D = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$

g) Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto q^x$$

wobei die Basis $\mathbb{R} \ni q > 0, q \neq 1$ vorgegeben ist.

$q > 1: f$ steigt

$0 < q < 1: f$ fällt

Bekannte Rechenregeln:

- $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$
- $\frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(p \cdot q)^x = p^x \cdot q^x$
- $\left(\frac{p}{q}\right)^x = \frac{p^x}{q^x}$

Zur Beschreibung von Exponentialfunktionen genügt es, eine bestimmte Basis zu benutzen (man kann $g(x) = p^x$ durch $f(x) = q^x$ ausdrücken, siehe Teil h).

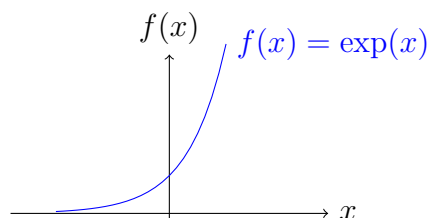
Früher: Basis 10

Heute: Basis $e \approx 2.781828\dots$ (Eulersche Zahl)

Informatik: oft Basis 2

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(0) &= e^0 = 1 \\ \exp(1) &= e^1 = 2.781828\dots \end{aligned}$$



h) Logarithmen

Die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \exp(x): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

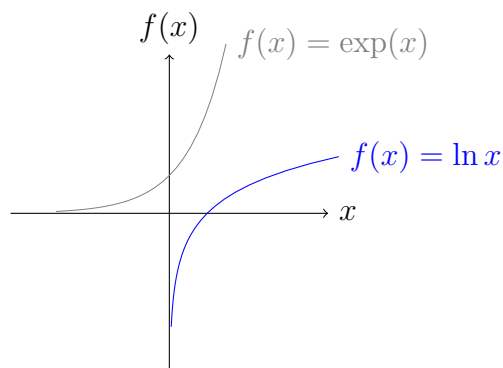
ist bijektiv.

Um sie umzukehren, muss zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $e^x = y$ gelöst werden.

Die Lösung ist für $y > 0$ in \mathbb{R} eindeutig und wird als der natürliche Logarithmus von y bezeichnet: $x = \ln y$.

In \mathbb{R} ist die Gleichung für $y \leq 0$ unlösbar.

$$\begin{aligned} \ln: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$



Analoges gilt für andere Exponentialfunktionen.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto q^x \quad (q > 0, q \neq 1) \end{aligned}$$

Es gilt: $q^x = y \Leftrightarrow x = \log_q y$ (Logarithmus zur Basis q).

Es genügt wieder, eine feste Basis zu betrachten, z.B. e , denn $q^x = (e^{\ln q})^x = e^{x \cdot \ln q}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} q^x = y &\Leftrightarrow e^{x \cdot \ln q} = y \\ &\Leftrightarrow \ln(e^{x \cdot \ln q}) = \ln y \\ &\Leftrightarrow x \cdot \ln q = \ln y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln q} \quad , \end{aligned}$$

also gilt $\log_q y = \frac{\ln y}{\ln q}$.

Rechenregeln für den Logarithmus lassen sich aus den Regeln für die Exponentialfunktion herleiten:

Sei $u := \ln x$, $v := \ln y$, dann ist $x = e^u$ und $y = e^v$, daraus folgt

$$x \cdot y = e^u \cdot e^v = e^{u+v} \quad ,$$

also ist

$$\ln(x \cdot y) = \ln(e^{u+v}) = u + v = \ln x + \ln y \quad .$$

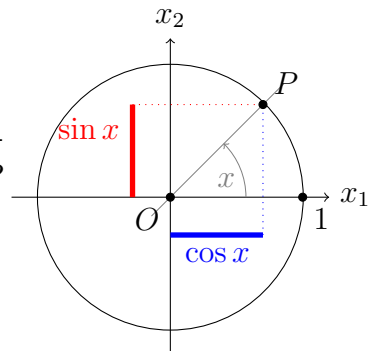
Genauso kann man mit beliebiger Basis $q > 0$, $q \neq 1$ verfahren, wir erhalten für jede Logarithmusfunktion $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$:

- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log x \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

i) Trigonometrische Funktionen

Wir betrachten einen Punkt P auf dem Einheitskreis (Kreis um O , Radius 1).

Der Winkel, der von der positiven x_1 -Achse und der Geraden durch O und P eingeschlossen wird, sei x .



Dann heißt die x_1 -Koordinate von P der Kosinus von x ($\cos x$), die x_2 -Koordinate heißt der Sinus von x ($\sin x$).

Der Winkel x kann im Gradmaß oder im Bogenmaß (Länge des Bogens von $(1|0)$ bis P) gemessen werden, es gilt:

$$\frac{\text{Gradmaß}}{360^\circ} = \frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}$$

So lassen sich die Funktionen \cos und \sin definieren:

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

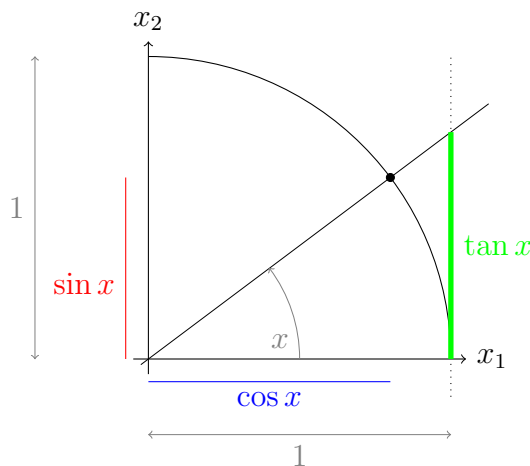
$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

und weiter

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\text{Tangens}) \quad \text{und}$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\text{Kotangens})$$

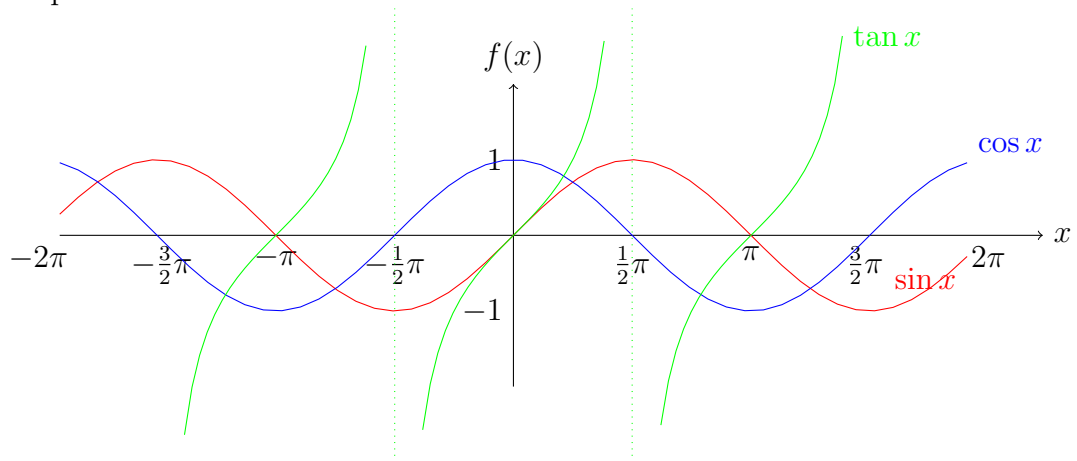
(Tangens und Kotangens sind jeweils nur dort definiert, wo der Nenner $\neq 0$ ist!)



Strahlensatz: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$

Wertetabelle: s. PÜ 02

Graphen:



Additionstheoreme:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

Es gilt: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$).

sin und cos sind 2π -periodisch, d.h.

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \forall x$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) \quad \forall x$$

tan ist π -periodisch:

$$\tan x = \tan(x + \pi) \quad \forall x \text{ auf Definitionsbereich}$$

2 Folgen

2.1 Definition: Folge

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} in eine Menge M (oft $M \subset \mathbb{R}$).

Die a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) heißen Glieder der Folge, n heißt Index.

(Bemerkung: Das 1. Glied der Folge muss nicht a_1 sein. durch Umbenennung, z.B. $b_1 := a_7, b_2 := a_8$, ist auch (a_7, a_8, a_9, \dots) eine Folge im Sinne der Definition 2.1)

Schreibweisen

$$\begin{aligned} & (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ & (a_n)_{n \geq n_0} \quad (\text{z.B. } (a_n)_{n \geq 7}) \text{ oder nur} \\ & (a_n) \end{aligned}$$

2.2 Beispiel

- a) $a_n = c \quad \forall n \geq 1, c \in \mathbb{R} \text{ konstant}$
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_n \quad (c, c, c, c, \dots)$
- b) $a_n = n \quad (1, 2, 3, 4, \dots)$
- c) $a_n = (-1)^n \quad (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
- d) $a_n = \frac{1}{n} \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
- e) $a_n = [0, \frac{2}{n}) \quad \text{Folge von Intervallen}$
- f) a_n rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_{n+1} &:= (n+1)a_n \quad (n \geq 1) \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 6 \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 = 24 \end{aligned}$$

2.3 Definition: Eigenschaften von Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

- a) beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist (s. Mathe 1), d.h. wenn es eine Zahl $K \geq 0$ gibt mit $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (d.h. alle Folgenglieder liegen im Intervall $[-K, K] \quad \forall n; \quad (-K \leq a_n \leq K)$).
- b) alternierend, falls ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

2.4 Beispiel

Beispiele aus 2.2:

beschränkt: a), c), d) [für c) und d) z.B. $K=1$]

alternierend: c)

2.5 Definition: Konvergenz

- a) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ε abhängen darf), so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
(kurz: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$)
- b) Die Zahl a heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge, wir schreiben:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder
 $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ (a_n strebt gegen a)
- c) Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent (die Folge divergiert).

2.6 Bemerkung

→ Folien 20.04.16

2.7 Beispiel

- a) $a_n = \frac{1}{n}$ ist Nullfolge, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = a = 0$, denn:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle N als $N > \frac{1}{\varepsilon}$, denn damit gilt für alle a_n mit $n \geq N$:
 $|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, da $n \geq N$ und $\frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$.

(z.B. falls $\varepsilon = \frac{1}{10}$, wähle $N > 10$, z.B. $N = 11$; ab a_{11} haben alle Folgenglieder einen Abstand $< \frac{1}{10}$ von 0)

b) (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$. Behauptung: $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle $N > \frac{1}{3\varepsilon}$. Für alle a_n mit $n \geq N$ gilt dann:

$$|a_n - a| = \left| \frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{n+1-n}{3n} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N} < \varepsilon. \quad \frac{1}{3N} < \varepsilon \text{ genau dann, wenn } N > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = c \quad \forall n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq 1, \text{ hier ist also } N = 1, \text{ hängt nicht von } \varepsilon \text{ ab, untypisch.}$$

2.8 Bemerkung

N muss nicht optimal gewählt werden.

Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3+n+5} = 0, [\dots]$

$\left| \frac{1}{n^3+n+5} - 0 \right| = \frac{1}{n^3+n+5} \leq \frac{1}{N^3+N+5} \stackrel{!}{<} \varepsilon$. Für optimales N : $\frac{1}{N^3+N+5} < \varepsilon$ nach N auflösen, schwer.

Deshalb grob abschätzen, z.B. so:

$$\frac{1}{N^3+N+5} < \frac{1}{N} < \varepsilon, \text{ also wähle } N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

2.9 Satz: Beschränktheit von Folgen

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: (zu zeigen: (a_n) konvergente Folge: $\exists K \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen a .

dann existiert für alle $\varepsilon > 0$, also auch speziell für $\varepsilon = 1$, ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N.$$

Also gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{array}{ll} |a_n| = |a_n + a - a| & \leq |a_n - a| + |a| \\ \text{'Einschiebetrick'} & \text{Dreiecksungleichung} \\ |a_n| & < 1 + |a| \end{array}$$

(also für $n \geq N$ sind die $|a_n| < 1 + |a|$; aber für $n = 1, 2, 3, \dots, N-1$?)

Definiere K als $K := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$

Dann gilt $|a_n| \leq K \quad \forall n$.

(Anmerkung: Durch den vorletzten Schritt ist meist $K \in \mathbb{R}^+$.)

2.10 Bemerkung

Nach 2.9 gilt:

(a_n) konvergiert $\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt

Das ist äquivalent zu:

(a_n) ist nicht beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert nicht

(Kontraposition). Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

Bsp. (a_n) mit $a_n = n$

2.11 Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen)

Für $q \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } |q| = 1 \end{cases}$

Die Folge $(q^n)_n \in \mathbb{N}$ divergiert, falls $q = -1$ oder $|q| > 1$.

Beweis:

1. Fall $|q| < 1$ (zu zeigen $q^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} |q^n - 0| &= |q^n| = |q|^n < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \end{aligned}$$

Wähle $N \in \mathbb{N} \ni N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$, dann ist also $|q|^n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

2. Fall $q = 1 \rightarrow$ konstante 1-Folge, konvergiert, s. 2.7 c)

3. Fall $|q| \geq 1, q \neq 1$

Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt, also divergent (s. 2.9/2.10).

Für $q = -1$: können wir erst später beweisen (\rightarrow Cauchy-Folgen)

2.12 Beispiel

Nach 2.11 sind die Folgen $((\frac{1}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$, $((-\frac{7}{8})^n)_n \in \mathbb{N}$ Nullfolgen.

2.13 Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

- a) Die Folge $(c \cdot a_n)$ konvergiert gegen $c \cdot a, c \in \mathbb{R}$.
- b) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ konvergiert gegen $a \pm b$.
- c) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$.
- d) Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$, falls $b_n, b \neq 0$ und $|a_n| \rightarrow |a|$.

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, dann gilt:

- e) Ist (e_n) beschränkt, dann ist $(d_n \cdot e_n)$ auch eine Nullfolge.
- f) Gilt $|e_n| \leq d_n \quad \forall n$, so ist (e_n) auch eine Nullfolge.

Beweis [exemplarisch für a) und b), Rest s. Moodle]:

- a) Falls $c = 0$: klar, konstante 0-Folge.

Falls $c \neq 0$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (denn $a_n \rightarrow a$)

Dann ist aber $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c \cdot (a_n - a)| = |c| \cdot \overbrace{|a_n - a|}^{< \frac{\varepsilon}{|c|}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, also $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot a$

- b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Dann $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$ (denn $a_n \rightarrow a$)

und $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$ (denn $b_n \rightarrow b$).

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |\overbrace{(a_n - a)}^{< \frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{(b_n - b)}^{< \frac{\varepsilon}{2}}| \stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \text{ und } N_2 \end{aligned}$$

(also z.B. für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$).

Also gilt $(a_n + b_n) \rightarrow a + b$. □

2.14 Beispiel

a) $\frac{(-1)^n + 5}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, denn $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $(-1)^n + 5$ ist beschränkt:
 $|(-1)^n + 5| \leq 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (nach 2.13 d)

b) $\frac{3n^2 - 2n + 1}{-n^2 + n} \rightarrow -3$ für $n \rightarrow \infty$, denn
 $\frac{3n^2 - 2n + 1}{-n^2 + n} = \frac{n^2 \cdot (3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2 \cdot (-1 + \frac{1}{n})} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[\rightarrow -1 \text{ für } n \rightarrow \infty]{\rightarrow 3 \text{ für } n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{3}{-1} \text{ für } n \rightarrow \infty$ (nach 2.13 b,d) [Nullfolgen]

c) Wichtiges Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, d.h. $|x| = \frac{1}{1+t}$ mit $t > 0$.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot x^n) = 0$, denn

$$\begin{aligned} (1+t)^n &\stackrel{\text{Mathe 1: 7.17 bin. Lehrsatz}}{=} \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot t^j \right] \\ &= \underbrace{1}_{j=0} + \underbrace{nt}_{j=1} + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2!} t^2}_{j=2} + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} t^3}_{j=3} + \dots \\ &\stackrel{\text{nur Term } j=k+1}{\geq} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} t^{k+1} = \binom{n}{k+1} t^{k+1} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$|n^k \cdot x^n| = \left| \frac{n^k}{(1+t)^n} \right| \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} t^{k+1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} + \dots} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt also z.B. ($k = 10000, x = \frac{1}{2}$): $\frac{n^{10000}}{2^n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow (1+t)^n$ wächst schneller als jede Potenz n^k !
Exponentialfkt. Polynom

2.15 Anmerkung (Landau-Symbole, \mathcal{O} -Notation)

(Informatik, VL Algorithmen)

Sei (a_n) eine strikt positive Folge, d.h. $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}((a_n)) = \{(b_n) | (\frac{b_n}{a_n}) \text{ ist beschränkt} \}$ ("Menge aller Folgen, für die ... gilt")

b) $o(a_n) = \{(b_n) | \frac{b_n}{a_n} \text{ ist Nullfolge} \}$ ((a_n) wächst schneller als (b_n))

\mathcal{O}, o : Landau-Symbole

c) $(a_n) \sim (b_n)$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n = 1$

Beispiel:

- $(2n^2 + 5n + 1)_n \in \mathcal{O}(n^2)$, denn
 $\left(\frac{2n^2+5n+1}{n^2}\right) = \frac{n^2 \cdot (2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2} \rightarrow 2$ für $n \rightarrow \infty$, beschränkt
- $(n^2) \in o(n^3)$
- $(n^3) \in o(2^n)$
- $(n^3 - 3) \sim (n^3)$, denn $\left(\frac{n^3}{n^3-3}\right) = \left(\frac{n^3 \cdot (1)}{n^3 \cdot (1 - \frac{3}{n^3})}\right) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$
- häufig auch laxe Schreibweise

$$\begin{aligned} 2n^2 + 5n + 1 &= \mathcal{O}(n^2) \\ n^2 &= o(n^3) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) &= \text{Menge der beschränkten Folgen} \\ o(1) &= \text{Menge der Nullfolgen} \end{aligned}$$

Wichtige Formel: Stirling: $(n!) \sim (\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)$

Problem: Wie zeigt man die Konvergenz einer Folge, wenn man den Grenzwert nicht kennt?

2.16 Definition

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_n$ heißt

- ([streng](#)) monoton steigend/wachsend, falls $a_{n+1} \overset{>}{\geq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, Schreibweise: $(a_n) \nearrow$
- ([streng](#)) monoton fallend $(a_n) \searrow$, falls $a_{n+1} \overset{<}{\leq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton, falls a) oder b) gilt (oder beides)

2.17 Beispiel

- $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ ist streng monoton fallend
- $(a_n) = (1)$ ist monoton fallend und monoton steigend
- $(a_n) = ((-1)^n)$ ist nicht monoton

2.18 Bemerkung

$(a_n) \nearrow$ zeigt man so:

$$a_{n-1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

2.19 Satz (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte, monotone Folge reeller Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert, und zwar gegen

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton steigend oder gegen
- $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton fallend ist.