

Mathematik II

04.05.2016

Inhaltsverzeichnis

1	Reelle Funktionen	3
1.1	Wiederholung Mathe 1: Funktionen	3
1.2	Reelle Funktionen	3
1.3	Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen	4
1.4	Beispiel	4
1.5	Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion	5
1.6	Elementare Funktionen (naive Einführung)	5
2	Folgen	12
2.1	Definition: Folge	12
2.2	Beispiel	12
2.3	Definition: Eigenschaften von Folgen	13
2.4	Beispiel	13
2.5	Definition: Konvergenz	13
2.6	Bemerkung	13
2.7	Beispiel	13
2.8	Bemerkung	14
2.9	Satz: Beschränktheit von Folgen	14
2.10	Bemerkung	15
2.11	Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen)	15
2.12	Beispiel	15
2.13	Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen	16
2.14	Beispiel	17
2.15	Anmerkung (Landau-Symbole, \mathcal{O} -Notation)	17
2.16	Definition	18
2.17	Beispiel	18
2.18	Bemerkung	19
2.19	Satz (Monotone Konvergenz)	19
2.20	Beispiel	19
2.21	Satz (Intervallschachtelungsprinzip)	20
2.22	Beispiel (vgl. Beispiel 2.20 b))	21
2.23	Definition	21
2.24	Beispiel	22
2.25	Bemerkung	22
2.26	Definition	22
2.27	Beispiel	22
2.28	Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)	22
2.29	Bemerkung/Definition	23

2.30	Definition (Cauchyfolge)	24
2.31	Satz (Cauchy Kriterium)	24
2.32	Anwendung (Banachscher Fixpunktsatz)	24

1 Reelle Funktionen

1.1 Wiederholung Mathe 1: Funktionen

Definition

Eine Funktion/Abbildung $f: A \rightarrow B$ besteht aus

- zwei Mengen:
 - A : Definitionsbereich von f
 - B : Bildbereich von f
- und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Wir schreiben dann $b = f(a)$, nennen b das Bild/den Funktionswert von a (unter f) sowie a (ein) Urbild von b (unter f).

Notation

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Beispiel

→ Folien 11.04.2016

1.2 Reelle Funktionen

Definition

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ (oft ist D endliche Vereinigung von Intervallen, z.B.

- $D = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
- $D = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$).

1.3 Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen

Definition

Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Funktionen.

$$\begin{aligned} \text{a) } (f \pm g)(x) &:= f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D \\ &\text{Summe/Differenz von } f \text{ und } g \\ &\text{(genauer:} \\ &\quad f \pm g: D \rightarrow \mathbb{R} \\ &\quad x \mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \quad) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D \\ &\text{Produkt von } f \text{ und } g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) falls } g(x) &\neq 0 \quad \forall x \in D, \text{ dann} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D \\ &\text{Quotient von } f \text{ und } g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Komposition/Hintereinanderausföhrung} \\ f: D_f \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: D_g \rightarrow \mathbb{R}, \text{ wobei } f(D_f) \subseteq D_g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f: D_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

1.4 Beispiel

$$\begin{aligned} f, g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= x^2 + x - 1 \\ (f \cdot g)(x) &= x^2 \cdot (x - 1) = x^3 - x^2 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{x^2}{x - 1} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}) \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

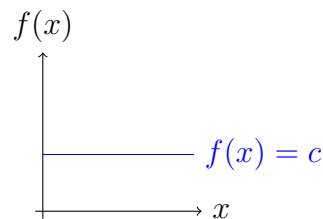
1.5 Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion

→ Folien 13.04.2016

1.6 Elementare Funktionen (naive Einführung)

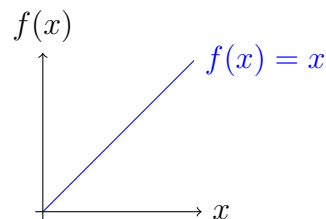
- a) Konstante Funktionen
für $c \in \mathbb{R}$ (fest):

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$



- b) Die identische Funktion (Identität)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$



Durch mehrfache Anwendung von 1.3 entstehen aus a) und b) viele weitere Funktionen.

- c) Potenzen (Monome)
für $n \in \mathbb{N}_0$ (fest):

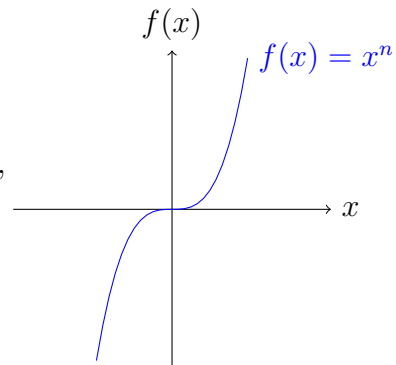
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

– $n = 0$: die konstante 1-Funktion

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^0 = 1 \end{aligned}$$

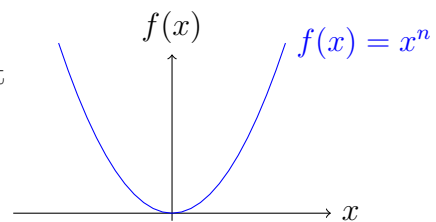
– n ungerade:

f punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$,
bijektiv



– n gerade:

f achsensymmetrisch zur y -Achse, nicht
bijektiv
 $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



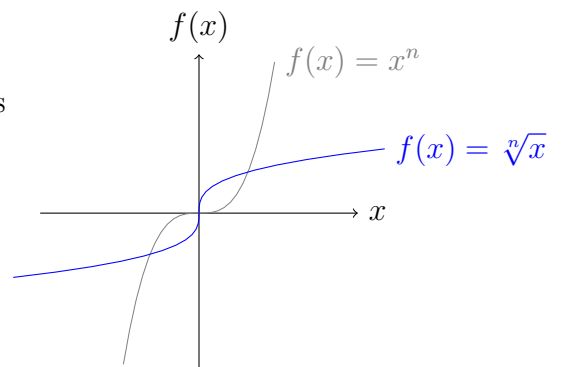
d) Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Monome. Dazu muss die Gleichung $f(x) = x^n = y$ ($y \in \mathbb{R}$ gegeben) gelöst werden.

– n ungerade:

f ist bijektiv, dann gibt es zu jedem
 $y \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = y$. Dieses
wird die n -te Wurzel aus y genannt:
 $x = \sqrt[n]{y}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$



– n gerade: Dann hat die Gleichung $x^n = y$ in \mathbb{R}

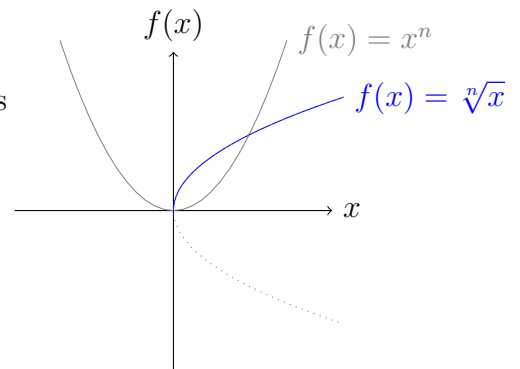
- * keine Lösung, falls $y < 0$
- * genau eine Lösung, falls $y = 0$ (nämlich $x = 0$)
- * zwei Lösungen, falls $y > 0$:

$$x_1 = \sqrt[n]{y} \quad (> 0)$$

$$x_2 = -\sqrt[n]{y} \quad (< 0)$$

Die positive Lösung wird hier dann als n -te Wurzel bezeichnet:

$$\sqrt[n]{}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x \mapsto \sqrt[n]{x}$$



e) Polynome

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten)

Ein Polynom ist eine Funktion p mit

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

Falls $a_n \neq 0$ ist, heißt n Grad des Polynoms.

f) Rationale Funktionen

Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen (mit $p, q \dots$ Polynome):

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit $D = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$

g) Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto q^x$$

wobei die Basis $\mathbb{R} \ni q > 0, q \neq 1$ vorgegeben ist.

$q > 1: f$ steigt

$0 < q < 1: f$ fällt

Bekannte Rechenregeln:

- $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$
- $\frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(p \cdot q)^x = p^x \cdot q^x$
- $\left(\frac{p}{q}\right)^x = \frac{p^x}{q^x}$

Zur Beschreibung von Exponentialfunktionen genügt es, eine bestimmte Basis zu benutzen (man kann $g(x) = p^x$ durch $f(x) = q^x$ ausdrücken, siehe Teil h).

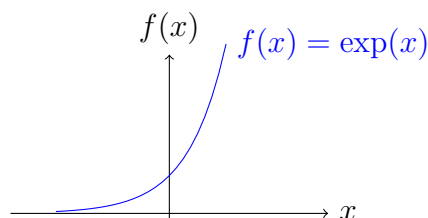
Früher: Basis 10

Heute: Basis $e \approx 2.781828\dots$ (Eulersche Zahl)

Informatik: oft Basis 2

$$\begin{aligned} \exp: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(0) &= e^0 = 1 \\ \exp(1) &= e^1 = 2.781828\dots \end{aligned}$$



h) Logarithmen

Die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \exp(x): \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

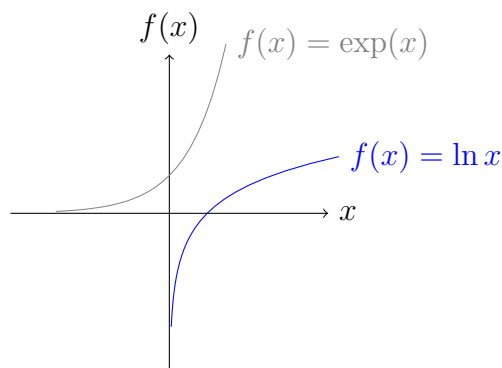
ist bijektiv.

Um sie umzukehren, muss zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $e^x = y$ gelöst werden.

Die Lösung ist für $y > 0$ in \mathbb{R} eindeutig und wird als der natürliche Logarithmus von y bezeichnet: $x = \ln y$.

In \mathbb{R} ist die Gleichung für $y \leq 0$ unlösbar.

$$\begin{aligned} \ln: \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$



Analoges gilt für andere Exponentialfunktionen.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto q^x \quad (q > 0, q \neq 1) \end{aligned}$$

Es gilt: $q^x = y \Leftrightarrow x = \log_q y$ (Logarithmus zur Basis q).

Es genügt wieder, eine feste Basis zu betrachten, z.B. e , denn $q^x = (e^{\ln q})^x = e^{x \cdot \ln q}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} q^x = y &\Leftrightarrow e^{x \cdot \ln q} = y \\ &\Leftrightarrow \ln(e^{x \cdot \ln q}) = \ln y \\ &\Leftrightarrow x \cdot \ln q = \ln y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln q} \quad , \end{aligned}$$

also gilt $\log_q y = \frac{\ln y}{\ln q}$.

Rechenregeln für den Logarithmus lassen sich aus den Regeln für die Exponentialfunktion herleiten:

Sei $u := \ln x$, $v := \ln y$, dann ist $x = e^u$ und $y = e^v$, daraus folgt

$$x \cdot y = e^u \cdot e^v = e^{u+v} \quad ,$$

also ist

$$\ln(x \cdot y) = \ln(e^{u+v}) = u + v = \ln x + \ln y \quad .$$

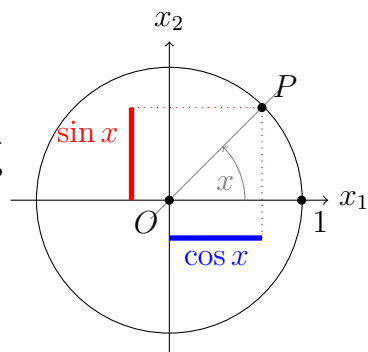
Genauso kann man mit beliebiger Basis $q > 0$, $q \neq 1$ verfahren, wir erhalten für jede Logarithmusfunktion $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$:

- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log x \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

i) Trigonometrische Funktionen

Wir betrachten einen Punkt P auf dem Einheitskreis (Kreis um O , Radius 1).

Der Winkel, der von der positiven x_1 -Achse und der Geraden durch O und P eingeschlossen wird, sei x .



Dann heißt die x_1 -Koordinate von P der Kosinus von x ($\cos x$), die x_2 -Koordinate heißt der Sinus von x ($\sin x$).

Der Winkel x kann im Gradmaß oder im Bogenmaß (Länge des Bogens von $(1|0)$ bis P) gemessen werden, es gilt:

$$\frac{\text{Gradmaß}}{360^\circ} = \frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}$$

So lassen sich die Funktionen \cos und \sin definieren:

$$\begin{aligned} \cos: \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

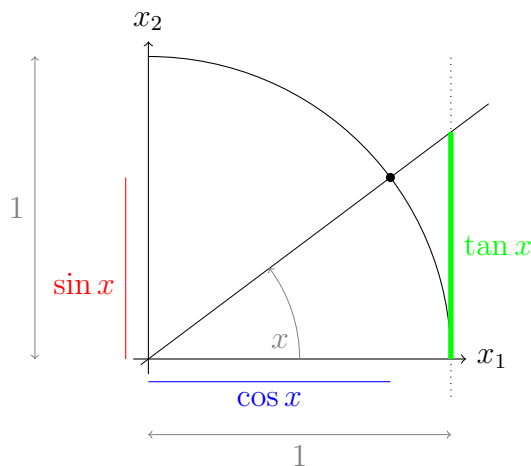
$$\begin{aligned} \sin: \mathbb{R} &\rightarrow [-1; 1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

und weiter

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\text{Tangens}) \quad \text{und}$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad (\text{Kotangens})$$

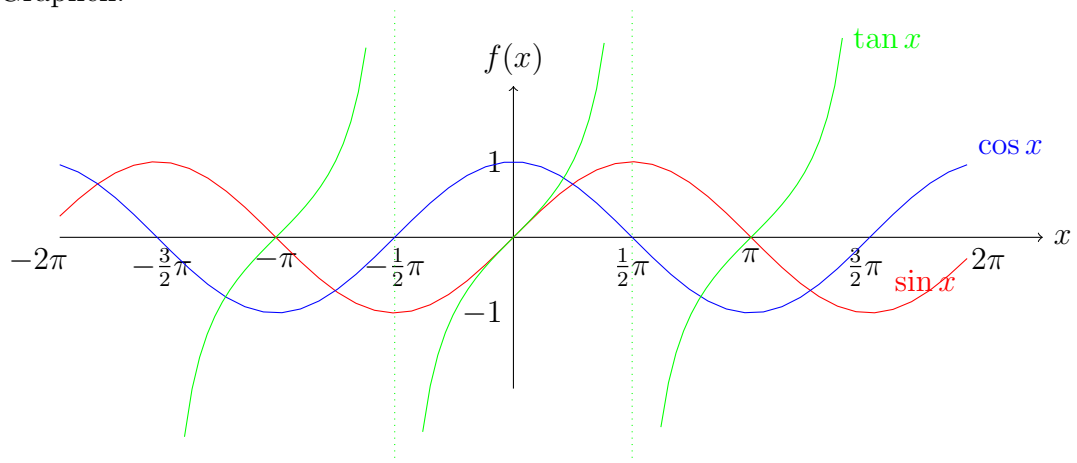
(Tangens und Kotangens sind jeweils nur dort definiert, wo der Nenner $\neq 0$ ist!)



Strahlensatz: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$

Wertetabelle: s. PÜ 02

Graphen:



Additionstheoreme:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

Es gilt: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$).

sin und cos sind 2π -periodisch, d.h.

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) \quad \forall x$$

$$\cos x = \cos(x + 2\pi) \quad \forall x$$

tan ist π -periodisch:

$$\tan x = \tan(x + \pi) \quad \forall x \text{ auf Definitionsbereich}$$

2 Folgen

2.1 Definition: Folge

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} in eine Menge M (oft $M \subset \mathbb{R}$).

Die a_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) heißen Glieder der Folge, n heißt Index.

(Bemerkung: Das 1. Glied der Folge muss nicht a_1 sein. durch Umbenennung, z.B. $b_1 := a_7, b_2 := a_8$, ist auch (a_7, a_8, a_9, \dots) eine Folge im Sinne der Definition 2.1)

Schreibweisen

$$\begin{aligned} & (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ & (a_n)_{n \geq n_0} \quad (\text{z.B. } (a_n)_{n \geq 7}) \text{ oder nur} \\ & (a_n) \end{aligned}$$

2.2 Beispiel

- a) $a_n = c \quad \forall n \geq 1, c \in \mathbb{R} \text{ konstant}$
 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (c)_n \quad (c, c, c, c, \dots)$
- b) $a_n = n \quad (1, 2, 3, 4, \dots)$
- c) $a_n = (-1)^n \quad (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$
- d) $a_n = \frac{1}{n} \quad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
- e) $a_n = [0, \frac{2}{n}) \quad \text{Folge von Intervallen}$
- f) a_n rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_{n+1} &:= (n+1)a_n \quad (n \geq 1) \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 6 \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 = 24 \end{aligned}$$

2.3 Definition: Eigenschaften von Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

- a) beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist (s. Mathe 1), d.h. wenn es eine Zahl $K \geq 0$ gibt mit $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (d.h. alle Folgenglieder liegen im Intervall $[-K, K] \quad \forall n; \quad (-K \leq a_n \leq K)$).
- b) alternierend, falls ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

2.4 Beispiel

Beispiele aus 2.2:

beschränkt: a), c), d) [für c) und d) z.B. $K=1$]

alternierend: c)

2.5 Definition: Konvergenz

- a) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ε abhängen darf), so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
(kurz: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N: |a_n - a| < \varepsilon$)
- b) Die Zahl a heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge, wir schreiben:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder
 $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ (a_n strebt gegen a)
- c) Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.
- d) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent (die Folge divergiert).

2.6 Bemerkung

→ Folien 20.04.16

2.7 Beispiel

- a) $a_n = \frac{1}{n}$ ist Nullfolge, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = a = 0$, denn:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle N als $N > \frac{1}{\varepsilon}$, denn damit gilt für alle a_n mit $n \geq N$:
 $|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, da $n \geq N$ und $\frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$.

(z.B. falls $\varepsilon = \frac{1}{10}$, wähle $N > 10$, z.B. $N = 11$; ab a_{11} haben alle Folgenglieder einen Abstand $< \frac{1}{10}$ von 0)

b) (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$. Behauptung: $a = \frac{1}{3}$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle $N > \frac{1}{3\varepsilon}$. Für alle a_n mit $n \geq N$ gilt dann:

$$|a_n - a| = \left| \frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{n+1-n}{3n} \right| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N} < \varepsilon. \quad \frac{1}{3N} < \varepsilon \text{ genau dann, wenn } N > \frac{1}{3\varepsilon}.$$

c) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = c \quad \forall n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq 1, \text{ hier ist also } N = 1, \text{ hängt nicht von } \varepsilon \text{ ab, untypisch.}$$

2.8 Bemerkung

N muss nicht optimal gewählt werden.

Beispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3+n+5} = 0, [\dots]$

$\left| \frac{1}{n^3+n+5} - 0 \right| = \frac{1}{n^3+n+5} \leq \frac{1}{N^3+N+5} \stackrel{!}{<} \varepsilon$. Für optimales N : $\frac{1}{N^3+N+5} < \varepsilon$ nach N auflösen, schwer.

Deshalb grob abschätzen, z.B. so:

$$\frac{1}{N^3+N+5} < \frac{1}{N} < \varepsilon, \text{ also wähle } N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

2.9 Satz: Beschränktheit von Folgen

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: (zu zeigen: (a_n) konvergente Folge: $\exists K \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen a .

dann existiert für alle $\varepsilon > 0$, also auch speziell für $\varepsilon = 1$, ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq N.$$

Also gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{array}{ll} |a_n| = |a_n + a - a| & \leq |a_n - a| + |a| \\ \text{'Einschiebetrick'} & \text{Dreiecksungleichung} \\ |a_n| & < 1 + |a| \end{array}$$

(also für $n \geq N$ sind die $|a_n| < 1 + |a|$; aber für $n = 1, 2, 3, \dots, N-1$?)

Definiere K als $K := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$

Dann gilt $|a_n| \leq K \quad \forall n$.

(Anmerkung: Durch den vorletzten Schritt ist meist $K \in \mathbb{R}^+$.)

2.10 Bemerkung

Nach 2.9 gilt:

(a_n) konvergiert $\Rightarrow (a_n)$ ist beschränkt

Das ist äquivalent zu:

(a_n) ist nicht beschränkt $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert nicht

(Kontraposition). Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.

Bsp. (a_n) mit $a_n = n$

2.11 Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen)

Für $q \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } |q| < 1 \\ 1, & \text{falls } |q| = 1 \end{cases}$

Die Folge $(q^n)_n \in \mathbb{N}$ divergiert, falls $q = -1$ oder $|q| > 1$.

Beweis:

1. Fall $|q| < 1$ (zu zeigen $q^n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$)

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} |q^n - 0| &= |q^n| = |q|^n < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n \cdot \ln |q| < \ln \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|} \end{aligned}$$

Wähle $N \ni N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$, dann ist also $|q|^n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

2. Fall $q = 1 \rightarrow$ konstante 1-Folge, konvergiert, s. 2.7 c)

3. Fall $|q| \geq 1, q \neq 1$

Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt, also divergent (s. 2.9/2.10).

Für $q = -1$: können wir erst später beweisen (\rightarrow Cauchy-Folgen)

2.12 Beispiel

Nach 2.11 sind die Folgen $((\frac{1}{2})^n)_{n \in \mathbb{N}} = (\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$, $((-\frac{7}{8})^n)_n \in \mathbb{N}$ Nullfolgen.

2.13 Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt:

- a) Die Folge $(c \cdot a_n)$ konvergiert gegen $c \cdot a, c \in \mathbb{R}$.
- b) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ konvergiert gegen $a \pm b$.
- c) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$.
- d) Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$, falls $b_n, b \neq 0$ und $|a_n| \rightarrow |a|$.

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, dann gilt:

- e) Ist (e_n) beschränkt, dann ist $(d_n \cdot e_n)$ auch eine Nullfolge.
- f) Gilt $|e_n| \leq d_n \quad \forall n$, so ist (e_n) auch eine Nullfolge.

Beweis [exemplarisch für a) und b), Rest s. Moodle]:

- a) Falls $c = 0$: klar, konstante 0-Folge.

Falls $c \neq 0$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (denn $a_n \rightarrow a$)

Dann ist aber $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c \cdot (a_n - a)| = |c| \cdot \overbrace{|a_n - a|}^{< \frac{\varepsilon}{|c|}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, also $c \cdot a_n \rightarrow c \cdot a$

- b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.

Dann $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$ (denn $a_n \rightarrow a$)

und $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$ (denn $b_n \rightarrow b$).

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |\overbrace{(a_n - a)}^{< \frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{(b_n - b)}^{< \frac{\varepsilon}{2}}| \stackrel{\Delta\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \text{ und } N_2 \end{aligned}$$

(also z.B. für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$).

Also gilt $(a_n + b_n) \rightarrow a + b$. □

2.14 Beispiel

a) $\frac{(-1)^n + 5}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, denn $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und $(-1)^n + 5$ ist beschränkt:
 $|(-1)^n + 5| \leq 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (nach 2.13 d)

b) $\frac{3n^2 - 2n + 1}{-n^2 + n} \rightarrow -3$ für $n \rightarrow \infty$, denn
 $\frac{3n^2 - 2n + 1}{-n^2 + n} = \frac{n^2 \cdot (3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2 \cdot (-1 + \frac{1}{n})} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{-1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow[\rightarrow -1 \text{ für } n \rightarrow \infty]{\rightarrow 3 \text{ für } n \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{3}{-1} \text{ für } n \rightarrow \infty$ (nach 2.13 b,d) [Nullfolgen]

c) Wichtiges Beispiel

Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, d.h. $|x| = \frac{1}{1+t}$ mit $t > 0$.

Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^k \cdot x^n) = 0$, denn

$$\begin{aligned} (1+t)^n &\stackrel{\text{Mathe 1: 7.17 bin. Lehrsatz}}{=} \sum_{j=0}^n \left[\binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot t^j \right] \\ &= \underbrace{1}_{j=0} + \underbrace{nt}_{j=1} + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1)}{2!} t^2}_{j=2} + \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} t^3}_{j=3} + \dots \\ &\stackrel{\text{nur Term } j=k+1}{\geq} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k)}{(k+1)!} t^{k+1} = \binom{n}{k+1} t^{k+1} \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$|n^k \cdot x^n| = \left| \frac{n^k}{(1+t)^n} \right| \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1} t^{k+1}} = \frac{n^k}{n^{k+1} + \dots} \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$.

Es gilt also z.B. $(k = 10000, x = \frac{1}{2})$: $\frac{n^{10000}}{2^n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

$\Rightarrow (1+t)^n$ wächst schneller als jede Potenz n^k !
Exponentialfkt. Polynom

2.15 Anmerkung (Landau-Symbole, \mathcal{O} -Notation)

(Informatik, VL Algorithmen)

Sei (a_n) eine strikt positive Folge, d.h. $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}((a_n)) = \{(b_n) | (\frac{b_n}{a_n}) \text{ ist beschränkt} \}$ ("Menge aller Folgen, für die ... gilt")

b) $o(a_n) = \{(b_n) | \frac{b_n}{a_n} \text{ ist Nullfolge} \}$ ((a_n) wächst schneller als (b_n))

\mathcal{O}, o : Landau-Symbole

c) $(a_n) \sim (b_n)$, falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n = 1$

Beispiel:

- $(2n^2 + 5n + 1)_n \in \mathcal{O}(n^2)$, denn
 $\left(\frac{2n^2+5n+1}{n^2}\right) = \frac{n^2 \cdot (2 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2} \rightarrow 2$ für $n \rightarrow \infty$, beschränkt
- $(n^2) \in o(n^3)$
- $(n^3) \in o(2^n)$
- $(n^3 - 3) \sim (n^3)$, denn $\left(\frac{n^3}{n^3-3}\right) = \left(\frac{n^3 \cdot (1)}{n^3 \cdot (1 - \frac{3}{n^3})}\right) \rightarrow 1$ für $n \rightarrow \infty$
- häufig auch laxe Schreibweise

$$\begin{aligned} 2n^2 + 5n + 1 &= \mathcal{O}(n^2) \\ n^2 &= o(n^3) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) &= \text{Menge der beschränkten Folgen} \\ o(1) &= \text{Menge der Nullfolgen} \end{aligned}$$

Wichtige Formel: Stirling: $(n!) \sim (\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)$

Problem: Wie zeigt man die Konvergenz einer Folge, wenn man den Grenzwert nicht kennt?

2.16 Definition

Eine Folge reeller Zahle $(a_n)_n$ heißt

- ([streng](#)) monoton steigend/wachsend, falls $a_{n+1} \overset{>}{\geq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, Schreibweise: $(a_n) \nearrow$
- ([streng](#)) monoton fallend $(a_n) \searrow$, falls $a_{n+1} \overset{<}{\leq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- monoton, falls a) oder b) gilt (oder beides)

2.17 Beispiel

- $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ ist streng monoton fallend
- $(a_n) = (1)$ ist monoton fallend und monoton steigend
- $(a_n) = ((-1)^n)$ ist nicht monoton

2.18 Bemerkung

$(a_n) \nearrow$ zeigt man so:

$$a_{n-1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

2.19 Satz (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte, monotone Folge reeller Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert, und zwar gegen

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton steigend oder gegen
- $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton fallend ist.

Beweis:

Sei $(a_n) \nearrow$ und beschränkt.

$$\Rightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \quad \text{ist beschränkt} \\ \xRightarrow[\text{Mathe 1, 8.16}]{\text{Vollst.-Axiom}} S := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{existiert.}$$

Wir zeigen: $a_n \rightarrow S$ für $n \rightarrow \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

Es gilt $a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also zu zeigen: $S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

S ist kleinste obere Schranke, d.h. $S - \varepsilon$ ist keine obere Schranke

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad a_n > S - \varepsilon \quad \forall n \geq N \\ \Rightarrow S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$$

$(a_n) \searrow$ analog

□

2.20 Beispiel

a) $x \in \mathbb{R}^+$, dann $(x^n) \in o(n!)$ ($x^n = o(n!)$), d.h. $a_n = \frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

$$- a_n > 0$$

$$- \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} = \frac{x}{n+1} \leq 1 \quad \text{für } n+1 \geq x, \text{ also gilt } a_{n+1} \leq a_n, \text{ d.h.}$$

$(a_n) \searrow$ und (a_n) ist beschränkt

$$- \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

b) wichtige Folge

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\left(a + \frac{1}{n} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = e \quad (\text{Eulersche Zahl, } e = 2,71828\dots)$$

Warum existiert dieser Limes?

Zeige: $(a_n) \nearrow$ und (a_n) beschränkt, benutze Satz 2.19

– $(a_n) \nearrow$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= \left(\frac{1+n}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n} \right)^{-1} \geq 1 \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq 1 \end{aligned}$$

Benutze die Bernoulli-Ungleichung, für $h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+h)^n \geq 1 + nh$ für $h \geq -1$ (hier: $h = -\frac{1}{n^2}$)

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq \left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2} \right) \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \quad , \end{aligned}$$

also $(a_n) \nearrow$

– (a_n) beschränkt: Übung, benutze wieder Bernoulli

2.21 Satz (Intervallschachtelungsprinzip)

Seien (a_n) , (b_n) reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$ (= linke Intervallgrenze)
- $(b_n) \searrow$ (= rechte Intervallgrenze)
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

Dann sind beide Folgen konvergent und besitzen denselben Limes.

Beweis:

$(a_n), (b_n)$ konvergent nach Satz 2.19, denn

- $(a_n) \nearrow$; (a_n) beschränkt, da $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also gilt auch $a_n \leq b$ (alle anderen b_n sind noch kleiner)
- $(b_n) \searrow$; (b_n) beschränkt, da $b_n \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also $b_n \geq a_n \geq a_1$
- Da $(b_n) - (a_n)$ Nullfolge ist, sind auch die Grenzwerte gleich.

□

2.22 Beispiel (vgl. Beispiel 2.20 b))

$$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Man kann zeigen: $(a_n) \nearrow, (b_n) \searrow$

$$a_n \leq b_n, b_n - a_n \rightarrow 0, \text{ also } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$$

Ähnlich zeigt man $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}$

So definiert man $e^x := \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

Bisher:

(a_n) konvergiert $\Rightarrow (a_n)$ beschränkt, Umkehrung gilt nicht; z.B. $((-1)^n)$

Allerdings besitzt diese Folge zwei konvergente Teilfolgen mit $\lim +1$ und $\lim -1$.

2.23 Definition

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} (n_1, n_2, \dots)$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes (d.h. $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$).

Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ("Teilfolgen entstehen durch Streichung von Gliedern").

2.24 Beispiel

$$\begin{aligned}(a_n) &= ((-1)^n) \\ n_k &:= 2n \quad \text{ergibt } (n_1 = 2; n_2 = 4; n_3 = 6) \\ a_n &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{Teilfolge } 1, 1, 1, \dots) \\ n_k &:= 2n - 1 \quad \text{ergibt (Teilfolge } -1, -1, -1, \dots) \\ a_{2n-1} &= -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

2.25 Bemerkung

Es gilt: (a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a .

2.26 Definition

Sei (a_n) eine reelle Folge. Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n) , wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen h konvergiert.

2.27 Beispiel

- $(a_n) = ((-1)^n + \frac{1}{n})$ besitzt zwei Häufungspunkte -1 und 1
- $(a_n) = ((-1)^n)$ besitzt die Häufungspunkte -1 und 1

2.28 Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt:

$$(a_n) \text{ beschränkt} \Rightarrow (a_n) \text{ besitzt eine konvergente Teilfolge}$$

Beweis: Intervallschachtelungsprinzip/Bisektionsverfahren
(s. Folien/Blatt[←s.u.])

Wir verwenden das Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.21). Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, es existiert also ein $K \in \mathbb{N}$, so dass alle Folgenglieder im Intervall $[-K, K] =: [A_0, B_0]$ liegen. Halbiere dieses Intervall:

- Falls in der ersten Hälfte des Intervalls unendlich viele Folgenglieder liegen: wähle eines davon aus.
- Falls nicht (also falls nur endlich viele Folgenglieder in der ersten Hälfte des Intervalls liegen), dann liegen in der zweiten Hälfte unendlich viele Folgenglieder. Wähle davon eines aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n_1} , die Intervallhälfte, aus der es stammt, nennen wir $[A_1, B_1]$. Fahre nun so fort: Halbiere $[A_1, B_1]$, wähle wie oben a_{n_2} aus, erhalte damit das Intervall $[A_2, B_2]$, usw. So erhalten wir eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Für die Intervallgrenzen von $[A_k, B_k]$ gilt:

- $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$
- $(A_k)_{k \in \mathbb{N}} \nearrow, \quad (B_k)_{k \in \mathbb{N}} \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $B_k - A_k \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Damit sind alle Voraussetzungen für Satz 2.21 (Intervallschachtelungsprinzip) erfüllt. Die Folgen $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind also konvergent und besitzen denselben Limes a . Damit gilt auch $a_{n_k} \rightarrow a$ für $k \rightarrow \infty$. \square

2.29 Bemerkung/Definition

Sei (a_n) reell und beschränkt, dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n) : $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ bzw. den
- Limes inferior von (a_n) : $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ oder $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Weiter setzt man

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} \infty, & \text{wenn } (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt ist} \\ -\infty, & \text{wenn } (a_n) \rightarrow -\infty \text{ gilt, d.h. } \forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: a_n \leq -K \quad \forall n \geq N \end{cases}$
- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} -\infty, & \text{wenn } (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt ist} \\ \infty, & \text{wenn } (a_n) \rightarrow \infty \text{ gilt, d.h. } \forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: a_n \geq K \quad \forall n \geq N \end{cases}$

Achtung: $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen!

Man erweitert hier \mathbb{R} um zwei ideelle Elemente $-\infty, \infty$, setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ (Abschluss von \mathbb{R}) und erweitert die Ordnungsstruktur auf \mathbb{R} durch $-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Mit dieser Festlegung besitzt jede reelle Zahlenfolge sowohl \limsup als auch \liminf .

Beispiel:

$$\text{a) } a_n = \frac{n+1}{n} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

$$\text{b) } a_n = (-1)^n \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

$$\text{c) } a_n = (-1)^n \cdot n \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

$$\text{d) } a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) : \text{Übung}$$

2.30 Definition (Cauchyfolge)

Eine Folge (a_n) heißt Cauchyfolge, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$
(kurz: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N: |a_n - a_m| < \varepsilon$) mit $|a_n - a_m|$... Abstand zweier Folgenglieder

2.31 Satz (Cauchy Kriterium)

Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

$$(a_n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow (a_n) \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Beweisskizze (ausführlicher Beweis: s. Moodle):

- " \Rightarrow ": Einschiebetrick, Dreiecksungleichung verwenden
- " \Leftarrow ": Idee: (a_n) ist Cauchyfolge (zu zeigen: konvergent)
zeige: (a_n) ist beschränkt
 \Rightarrow 2.28 \exists konvergente Teilfolge
zeige: Limes der Teilfolge ist Limes der Folge

2.32 Anwendung (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine Abbildung mit

$$\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\text{Abstand der Bildpunkte}} < \underbrace{|x - y|}_{\text{Abstand von 2 Punkten}} \quad \forall x, y \in [a, b]$$

("f ist strikte Kontraktion")

Dann hat f genau einen Fixpunkt, d.h.

$$\underbrace{\exists!}_{\text{es gibt genau ein...}} r \in [a, b] \text{ mit } f(r) = r$$

es gibt genau ein...