Mathematik II

27.04.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Funktionen

1.1 Wiederholung Mathe 1: Funktionen

Definition

Eine Funktion/Abbildung $f\colon A \to B$ besteht aus

- zwei Mengen:
  - A: Definitionsbereich von f
  - B: Bildbereich von f
- und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Wir schreiben dann $b = f(a)$, nennen b das Bild/den Funktionswert von a (unter f) sowie a (ein) Urbild von b (unter f).

Notation

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Beispiel

→ Folien 11.04.2016

1.2 Reelle Funktionen

Definition

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ (oft ist D endliche Vereinigung von Intervallen, z.B.

- $D = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
- $D = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$).

1.3 Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen

Definition

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen.

a) $(f \pm g)(x) \coloneqq f(x) \pm g(x) \qquad \forall x \in D$
<u>Summe/Differenz</u> von f und g
(genauer:

$$\begin{aligned} f \pm g\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad) \end{aligned}$$

b) $(f \cdot g)(x) \coloneqq f(x) \cdot g(x) \qquad \forall x \in D$
<u>Produkt</u> von f und g

c) falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, dann
$(\frac{f}{g})(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in D$
<u>Quotient</u> von f und g

d) <u>Komposition/Hintereinanderausführung</u>
$f\colon D_f \to \mathbb{R}, \quad g\colon D_g \to \mathbb{R}$, wobei $f(D_f) \subseteq D_g$

$$\begin{aligned} g \circ f\colon D_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

1.4 Beispiel

$$\begin{aligned} f, g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= x^2 + x - 1 \\ (f \cdot g)(x) &= x^2 \cdot (x - 1) = x^3 - x^2 \\ (\frac{f}{g})(x) &= \frac{x^2}{x - 1} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}) \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

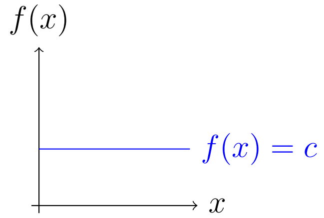
1.5 Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion

→ Folien 13.04.2016

1.6 Elementare Funktionen (naive Einführung)

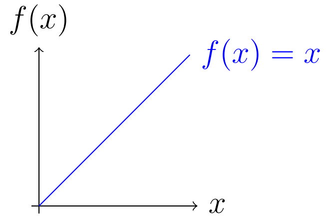
a) Konstante Funktionen
für $c \in \mathbb{R}$ (fest):

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$



b) Die identische Funktion (Identität)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$



Durch mehrfache Anwendung von 1.3 entstehen aus a) und b) viele weitere Funktionen.

c) Potenzen (Monome)
für $n \in \mathbb{N}_0$ (fest):

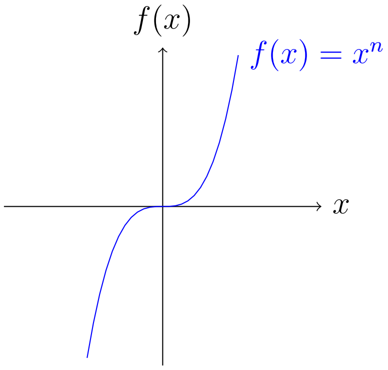
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

- $n = 0$: die konstante 1-Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^0 = 1 \end{aligned}$$

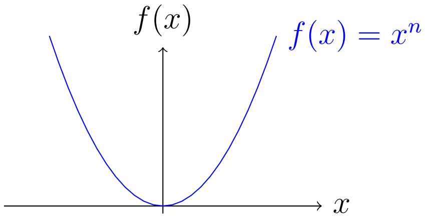
- n ungerade:

  f punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$, bijektiv

- n gerade:

  f achsensymmetrisch zur y-Achse, nicht bijektiv
  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

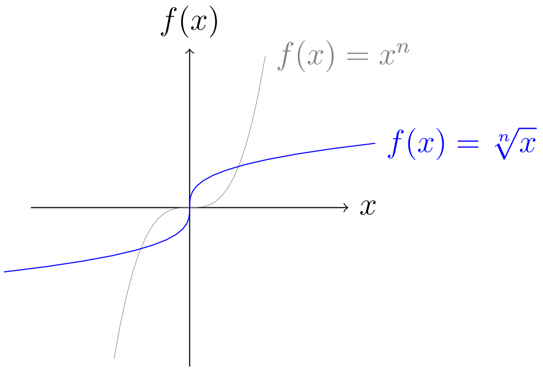
d) Wurzelfunktionen

Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Monome. Dazu musss die Gleichung $f(x) = x^n = y$ ($y \in \mathbb{R}$ gegeben) gelöst werden.

- n ungerade:

  f ist bijektiv, dann gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = y$. Dieses wird die n-te Wurzel aus y genannt: $x = \sqrt[n]{y}$.

  $$\begin{aligned} \sqrt[n]{} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

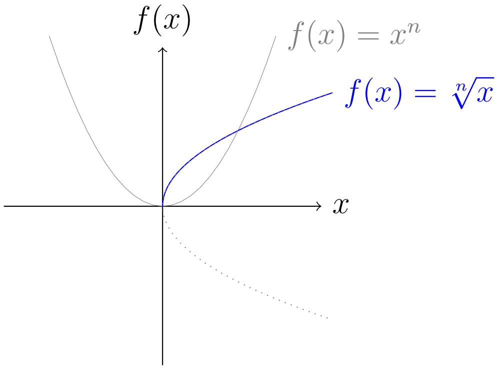
  

- n gerade: Dann hat die Gleichung $x^n = y$ in $\mathbb{R}$
  - keine Lösung, falls $y < 0$
  - genau eine Lösung, falls $y = 0$ (nämlich $x = 0$)
  - zwei Lösungen, falls $y > 0$:

    $$x_1 = \sqrt[n]{y} \quad (> 0)$$
    $$x_2 = -\sqrt[n]{y} \quad (< 0)$$

Die positive Lösung wird hier dann als n-te Wurzel bezeichnet:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{}\colon \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+ \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x}\end{aligned}$$



e) Polynome

$a_0, \quad \dots \quad, a_n \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten)

Ein Polynom ist eine Funktion p mit

$$\begin{aligned}p\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0x^0 = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k\end{aligned}$$

Falls $a_n \neq 0$ ist, heißt n Grad des Polynoms.

f) Rationale Funktionen

Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen (mit p, q...Polynome):

$$\begin{aligned}f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)}\end{aligned}$$

mit $D = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$

g) Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto q^x\end{aligned}$$

wobei die Basis $\mathbb{R} \ni q > 0$, $q \neq 1$ vorgegeben ist.

$$\begin{aligned}q > 1\colon &\ f \text{ steigt} \\ 0 < q < 1\colon &\ f \text{ fällt}\end{aligned}$$

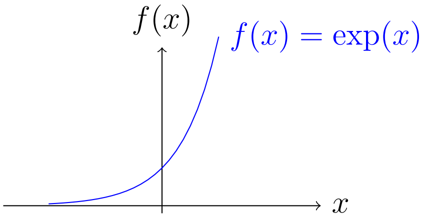
Bekannte Rechenregeln:

- $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$
- $\frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(p \cdot q)^x = p^x \cdot q^x$
- $(\frac{p}{q})^x = \frac{p^x}{q^x}$

Zur Beschreibung von Exponentialfunktionen genügt es, eine bestimmte Basis zu benutzen (man kann $g(x) = p^x$ durch $f(x) = q^x$ ausdrücken, siehe Teil h).
Früher: Basis 10
Heute: Basis e $\approx$ 2.781828... (Eulersche Zahl)
Informatik: oft Basis 2

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

$$\exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$$
$$\exp(1) = \mathrm{e}^1 = 2.781828...$$

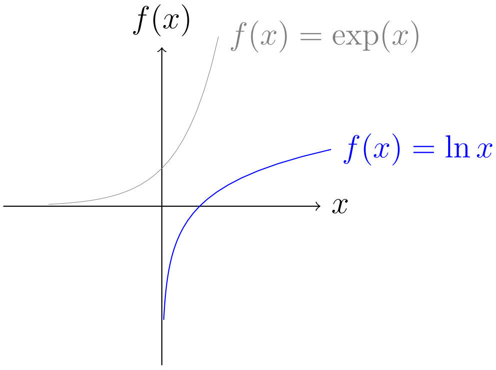


h) Logarithmen
Die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \exp(x)\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

ist bijektiv.
Um sie umzukehren, muss zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $\mathrm{e}^x = y$ gelöst werden.
Die Lösung ist für $y > 0$ in $\mathbb{R}$ eindeutig und wird als der natürliche Logarithmus von y bezeichnet: $x = \ln y$.
In $\mathbb{R}$ ist die Gleichung für $y \leq 0$ unlösbar.

$$\begin{aligned} \ln\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$



Analoges gilt für andere Exponentialfunktionen.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto q^x \quad (q > 0, q \neq 1) \end{aligned}$$

Es gilt: $q^x = y \Leftrightarrow x = \log_q y$ (Logarithmus zur Basis q).

Es genügt wieder, eine feste Basis zu betrachten, z.B. e, denn $q^x = (\mathrm{e}^{\ln q})^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln q}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} q^x = y &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x \cdot \ln q} = y \\ &\Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{x \cdot \ln q}) = \ln y \\ &\Leftrightarrow x \cdot \ln q = \ln y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln q} \quad , \end{aligned}$$

also gilt $\log_q y = \frac{\ln y}{\ln q}$.

Rechenregeln für den Logarihmus lassen sich aus den Regeln für die Exponentialfunktion herleiten:

Sei $u := \ln x$, $v := \ln y$, dann ist $x = \mathrm{e}^u$ und $y = \mathrm{e}^v$, daraus folgt

$$x \cdot y = \mathrm{e}^u \cdot \mathrm{e}^v = \mathrm{e}^{u+v} \quad ,$$

also ist

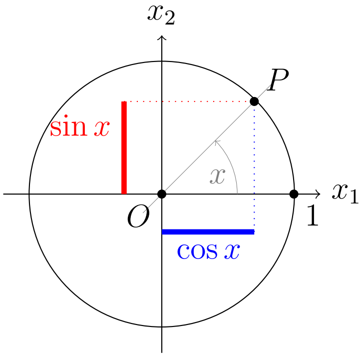
$$\ln(x \cdot y) = \ln(\mathrm{e}^{u+v}) = u + v = \ln x + \ln y \quad .$$

Genauso kann man mit beliebiger Basis $q > 0$, $q \neq 1$ verfahren, wir erhalten für jede Logarithmusfunktion $\log \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log x \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

i) Trigonometrische Funktionen
Wir betrachten einen Punkt P auf dem Einheitskreis (Kreis um O, Radius 1).

Der Winkel, der von der positiven x_1-Achse und der Geraden durch O und P eingeschlossen wird, sei x.



Dann heißt die x_1-Koordinate von P der <u>Kosinus</u> von x ($\cos x$), die x_2-Koordinate heißt der <u>Sinus</u> von x ($\sin x$).

Der Winkel x kann im Gradmaß oder im Bogenmaß (Länge des Bogens von $(1|0)$ bis P) gemessen werden, es gilt:

$$\frac{\text{Gradmaß}}{360^\circ} = \frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}$$

So lassen sich die Funktionen cos und sin definieren:

$$\begin{aligned}\cos\colon \mathbb{R} &\to [-1;1]\\ x &\mapsto \cos x\end{aligned}$$

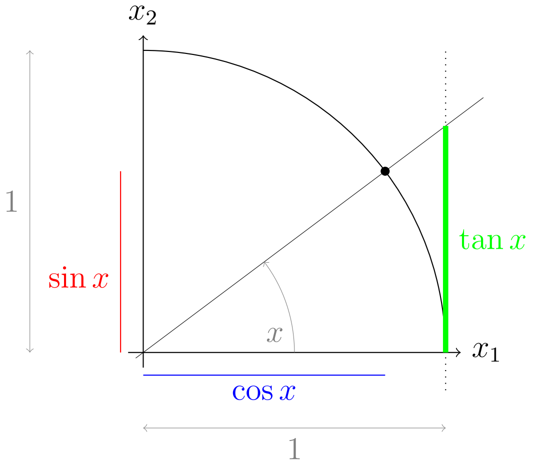
$$\begin{aligned}\sin\colon \mathbb{R} &\to [-1;1]\\ x &\mapsto \sin x\end{aligned}$$

und weiter

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{(Tangens)} \qquad \text{und}$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{(Kotangens)}$$

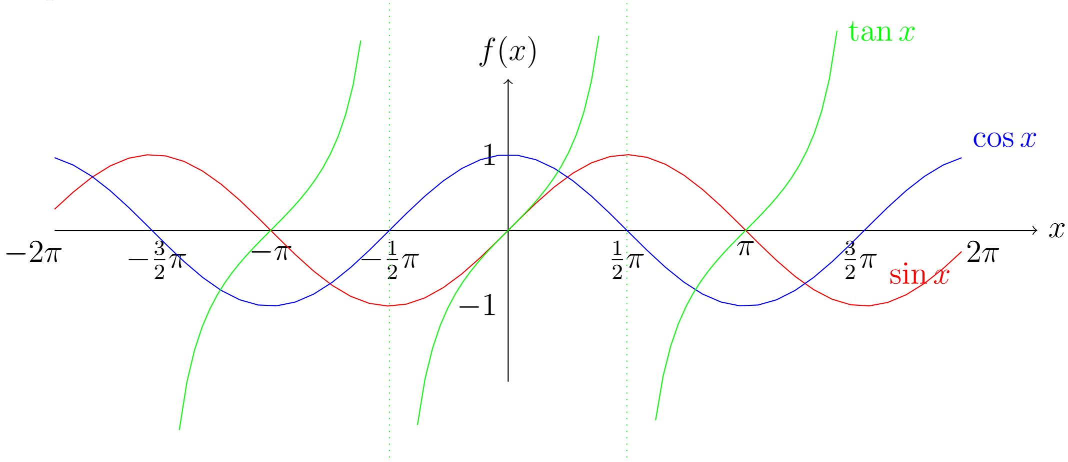
(Tangens und Kotangens sind jeweils nur dort definiert, wo der Nenner $\neq 0$ ist!)



Strahlensatz: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$

Wertetabelle: s. PÜ 02

Graphen:



Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ (\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)} \end{aligned}$$

Es gilt: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$).

sin und cos sind 2π-periodisch, d.h.

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x + 2\pi) \qquad \forall x \\ \cos x &= \cos(x + 2\pi) \qquad \forall x \end{aligned}$$

tan ist π-periodisch:

$$\tan x = \tan(x + \pi) \qquad \forall x \text{ auf Definitionsbereich}$$

2 Folgen

2.1 Definition: Folge

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in eine Menge M (oft $M \subset \mathbb{R}$).
Die a_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ heißen Glieder der Folge, n heißt Index.
(Bemerkung: Das 1. Glied der Folge muss nicht a_1 sein. durch Umbenennung, z.B. $b_1 \coloneqq a_7, b_2 \coloneqq a_8$, ist auch $(a_7, a_8, a_9, ...)$ eine Folge im sinne der Definition 2.1)

Schreibweisen

$$\begin{aligned}&(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\\&(a_n)_{n\geq n_0} \qquad \text{(z.B. } (a_n)_{n\geq 7}\text{) oder nur}\\&(a_n)\end{aligned}$$

2.2 Beispiel

a) $a_n = c \qquad \forall n \geq 1, c \in \mathbb{R}$ konstant
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_n \qquad (c, c, c, c, ...)$

b) $a_n = n \qquad (1, 2, 3, 4, ...)$

c) $a_n = (-1)^n \qquad (-1, 1, -1, 1, -1, ...)$

d) $a_n = \frac{1}{n} \qquad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$

e) $a_n = [0, \frac{2}{n})$ Folge von Intervallen

f) a_n rekursiv definiert:

$$\begin{aligned}a_1 &\coloneqq 1\\a_{n+1} &\coloneqq (n+1)a_n \qquad (n \geq 1)\\a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2\\a_3 &= 3 \cdot a_2 = 6\\a_4 &= 4 \cdot a_3 = 24\end{aligned}$$

2.3 Definition: Eigenschaften von Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

a) beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist (s. Mathe 1), d.h. wenn es eine Zahl $K \geq 0$ gibt mit $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (d.h. alle Folgenglieder liegen im Intervall $[-K, K] \quad \forall n; \quad (-K \leq a_n \leq K)$).

b) alternierend, falls ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

2.4 Beispiel

Beispiele aus 2.2:
beschränkt: a), c), d) [für c) und d) z.B. K=1]
alternierend: c)

2.5 Definition: Konvergenz

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ε abhängen darf), so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
(kurz: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N\colon |a_n - a| < \varepsilon$)

b) Die Zahl a heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge, wir schreiben:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder
$a_n \to a$ für $n \to \infty$ (a_n strebt gegen a)

c) Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

d) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent (die Folge divergiert).

2.6 Bemerkung

→ Folien 20.04.16

2.7 Beispiel

a) $a_n = \frac{1}{n}$ ist Nulfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a = 0$, denn:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle N als $N > \frac{1}{\varepsilon}$, denn damit gilt für alle a_n mit $n \geq N$:
$|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, da $n \geq N$ und $\frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$.

(z.B. falls $\varepsilon = \frac{1}{10}$, wähle $N > 10$, z.B. $N = 11$; ab a_{11} haben alle Folgenglieder einen Abstand $< \frac{1}{10}$ von 0)

b) (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$. Behauptung: $a = \frac{1}{3}$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle $N > \frac{1}{3\varepsilon}$. Für alle a_n mit $n \geq N$ gilt dann:
$|a_n - a| = |\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}| = |\frac{n+1-n}{3n}| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N} < \varepsilon$. $\frac{1}{3N} < \varepsilon$ genau dann, wenn $N > \frac{1}{3\varepsilon}$.

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = c \quad \forall n$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist
$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$, hier ist also $N = 1$, hängt nicht von ε ab, untypisch.

2.8 Bemerkung

N muss nicht optimal gewählt werden.
Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+n+5} = 0$, [...]
$|\frac{1}{n^3+n+5} - 0| = \frac{1}{n^3+n+5} \leq \frac{1}{N^3+N+5} \overset{!}{<} \varepsilon$. Für optimales N: $\frac{1}{N^3+N+5} < \varepsilon$ nach N auflösen, schwer.
Deshalb grob abschätzen, z.B. so:
$\frac{1}{N13+N+5} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, also wähle $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

2.9 Satz: Beschränktheit von Folgen

Jede konvergente folge ist beschränkt.

Beweis: (zu zeigen: (a_n) konvergente Folge: $\exists K \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a.
dann existiert für alle $\varepsilon > 0$, also auch speziell für $\varepsilon = 1$, ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \quad \forall b \geq N$.
Also gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n| = |a_n + a - a| & \qquad \leq |a_n - a| + |a| \\ \text{'Einschiebetrick'} & \qquad \text{Dreiecksungleichung} \\ |a_n| & \qquad < 1 + |a| \end{aligned}$$

(also für $n \geq N$ sind die $|a_n| < 1 + |a|$; aber für $n = 1, 2, 3, ..., N-1$?)
Definiere K als $K := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, ..., |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$

Dann gilt $|a_n| \leq K \quad \forall n$.
(Anmerkung: Durch den vorletzten Schritt ist meist $K \in \mathbb{R}^+$.)

2.10 Bemerkung

Nach 2.9 gilt:
(a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt
Das ist äquivalent zu:
(a_n) ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert nicht
(Kontraposition). Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.
Bsp. (a_n) mit $a_n = n$

2.11 Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen)

Für $q \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ falls } |q| < 1 \\ 1, \text{ falls } |q| = 1 \end{cases}$
Die Folge $(q^n)_n \in \mathbb{N}$ divergiert, falls $q = -1$ oder $|q| > 1$.
Beweis:

1. Fall $|q| < 1$ (zu zeigen $q^n \to 0$ für $n \to \infty$)
   Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow n \cdot \ln|q| < \ln\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow n \overset{da|q|<1}{\geq} \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$$

   Wähle $\mathbb{N} \ni N > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, dann ist also $|q|^n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

2. Fall $q = 1 \to$ konstante 1-Folge, konvergiert, s. 2.7 c)

3. Fall $|q| \geq 1, q \neq 1$
   Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt, also divergent (s. 2,9/2.10).
   Für $q = -1$: können wir erst später beweisen ($\to$ Cauchy-Folgen)

2.12 Beispiel

Nach 2.11 sind die Folgen $((\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad ((-\frac{7}{8})^n)_n \in \mathbb{N}$ Nullfolgen.

2.13 Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

a) Die Folge $(c \cdot a_n)$ konvergiert gegen $c \cdot a, c \in \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ konvergiert gegen $a \pm b$.

c) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$.

d) Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$, falls $b_n, b \neq 0$ und $|a_n| \to |a|$.

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, dann gilt:

e) Ist (e_n) beschränkt, dann ist $(d_n \cdot e_n)$ auch eine Nullfolge.

f) Gilt $|e_n| \leq d_n \quad \forall n$, so ist (e_n) auch eine Nullfolge.

Beweis [exemplarisch für a) und b), Rest s. Moodle]:

a) Falls $c = 0$: klar, konstante 0-Folge.
Falls $c \neq 0$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (denn $a_n \to a$)

Dann ist aber $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c \cdot (a_n - a)| = |c| \cdot \overbrace{|a_n - a|}^{<\frac{\varepsilon}{|c|}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, also $c \cdot a_n \to c \cdot a$

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Dann $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$ (denn $a_n \to a$)
und $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$ (denn $b_n \to b$).
Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a + b)| = |\overbrace{(a_n - a)}^{<\frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{(b_n - b)}^{<\frac{\varepsilon}{2}}| &\overset{\triangle\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \text{ und } N_2
\end{aligned}
$$

(also z.B. für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$).

Also gilt $(a_n + b_n) \to a + b$. ☐

2.14 Beispiel

a) $\frac{(-1)^n+5}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, denn $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ und $(-1)^n+5$ ist beschränkt: $|(-1)^n + 5| \leq 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (nach 2.13 d)

b) $\frac{3n^2-2n+1}{-n^2+n} \to -3$ für $n \to \infty$, denn $\frac{3n^2-2n+1}{-n^2+n} = \frac{n^2\cdot(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot(-1+\frac{1}{n})} = \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{-1+\frac{1}{n}} \quad \frac{\to 3 \text{ für } n\to\infty}{\to -1 \text{ für } n\to\infty} \longrightarrow \frac{3}{-1}$ für $n \to \infty$ (nach 2.13 b,d) [Nullfolgen]

c) Wichtiges Beispiel
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, d.h. $|x| = \frac{1}{1+t}$ mit $t > 0$.
Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} (n^k \cdot x^n) = 0$, denn

$$(1+t)^n \overset{\substack{\text{Mathe 1: 7.17}\\ \text{bin. Lehrsatz}}}{=} \sum_{j=0}^{n}[\binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot t^j]$$

$$= \overbrace{1}^{j=0} + \overbrace{nt}^{j=1} + \overbrace{\frac{n\cdot(n-1)}{2!}t^2}^{j=2} + \overbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}t^3}^{j=3} +\ldots$$

$$\overset{\substack{\text{nur Term}\\ j=k+1}}{\geq} \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}t^{k+1} = \binom{n}{k+1}t^{k+1}$$

Damit gilt:

$$|n^k \cdot x^n| = |\frac{n^k}{(1+t)^n}| \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}t^{k+1}} = \frac{n^k}{n^{k+1}+\ldots} \to 0$$

für $n \to \infty$.
Es gilt also z.B. $(k = 10000, x = \frac{1}{2})$: $\frac{n^{10000}}{2^n} \to 0$ für $n \to \infty$
$\Rightarrow \quad \overset{\text{Exponentialfkt.}}{(1+t)^n}$ wächst schneller als jede Potenz $\overset{\textit{Polynom}}{n^k}$!

2.15 Anmerkung (Landau-Symbole, $\mathcal{O}$-Notation)

(Informatik, VL Algorithmen)
Sei (a_n) eine strikt positive Folge, d.h. $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}((a_n)) = \{(b_n)|(\frac{b_n}{a_n})$ ist beschränkt $\}$ ("Menge aller Folgen, für die ... gilt")

b) $o(a_n) = \{(b_n)|\frac{b_n}{a_n}$ ist Nullfolge $\}$ ((a_n) wächst schneller als (b_n))

$\mathcal{O}, o$: Landau-Symbole

c) $(a_n) \sim (b_n)$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n})_n = 1$

Beispiel:

- $(2n^2 + 5n + 1)_n \in \mathcal{O}(n^2)$, denn $(\frac{2n^2+5n+1}{n^2}) = \frac{n^2\cdot(2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2} \to 2$ für $n \to \infty$, beschränkt
- $(n^2) \in o(n^3)$
- $(n^3) \in o(2^n)$
- $(n13 - 3) \sim (n^3)$, denn $(\frac{n^3}{n^3-3}) = (\frac{n^3\cdot(1)}{n^3\cdot(1-\frac{3}{n^3})}) \to 1$ für $n \to \infty$
- häufig auch laxe Schreibweise

$$\begin{aligned} 2n^2 + 5n + 1 &= \mathcal{O}(n^2) \\ n^2 &= o(n^3) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) = &\text{ Menge der beschränkten Folgen} \\ o(1) = &\text{ Menge der Nullfolgen} \end{aligned}$$

Wichtige Formel: Stirling: $(n!) \sim (\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n)$

Problem: Wie zeigt man die Konvergenz einer Folge, wenn man den Grenzwert nicht kennt?

2.16 Definition

Eine Folge reeller Zahle $(a_n)_n$ heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls $a_{n+1} \overset{>}{\geq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, Schreibweise: $(a_n) \nearrow$

b) (streng) monoton fallend $(a_n) \searrow$, falls $a_{n+1} \overset{<}{\leq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) monoton, falls a) oder b) gilt (oder beides)

2.17 Beispiel

- $(a_n) = (\frac{1}{n})$ ist streng monoton fallend
- $(a_n) = (1)$ ist monoton fallend und monoton steigend
- $(a_n) = ((-1)^n)$ ist nicht monoton

2.18 Bemerkung

$(a_n) \nearrow$ zeigt man so:

$$\begin{aligned} a_{n-1} - a_n &\geq 0 \qquad \text{oder} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} &\geq 1 \end{aligned}$$

2.19 Satz (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte, monotone Folge reeller Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert, und zwar gegen

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton steigend oder gegen
- $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton falend ist.