Mathematik II

04.06.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Funktionen

1.1 Wiederholung Mathe 1: Funktionen

Definition

Eine Funktion/Abbildung $f: A \to B$ besteht aus

- zwei Mengen:
  - A: Definitionsbereich von f
  - B: Bildbereich von f
- und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Wir schreiben dann $b = f(a)$, nennen b das Bild/den Funktionswert von a (unter f) sowie a (ein) Urbild von b (unter f).

Notation

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Beispiel

$\to$ Folien 11.04.2016

1.2 Reelle Funktionen

Definition

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung $f: D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ (oft ist D endliche Vereinigung von Intervallen, z.B.

- $D = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
- $D = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$).

1.3 Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen

Definition

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen.

a) $(f \pm g)(x) \coloneqq f(x) \pm g(x) \qquad \forall x \in D$
Summe/Differenz von f und g
(genauer:

$$\begin{aligned} f \pm g\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad) \end{aligned}$$

b) $(f \cdot g)(x) \coloneqq f(x) \cdot g(x) \qquad \forall x \in D$
Produkt von f und g

c) falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, dann
$(\frac{f}{g})(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in D$
Quotient von f und g

d) Komposition/Hintereinanderausführung
$f\colon D_f \to \mathbb{R}, \quad g\colon D_g \to \mathbb{R}$, wobei $f(D_f) \subseteq D_g$

$$\begin{aligned} g \circ f\colon D_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

1.4 Beispiel

$$\begin{aligned} f, g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= x^2 + x - 1 \\ (f \cdot g)(x) &= x^2 \cdot (x-1) = x^3 - x^2 \\ (\frac{f}{g})(x) &= \frac{x^2}{x-1} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}) \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$

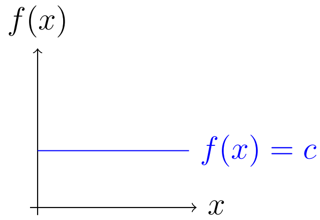
1.5 Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion

→ Folien 13.04.2016

1.6 Elementare Funktionen (naive Einführung)

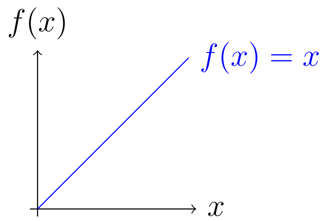
a) Konstante Funktionen
für $c \in \mathbb{R}$ (fest):

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$



b) Die identische Funktion (Identität)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$



Durch mehrfache Anwendung von 1.3 entstehen aus a) und b) viele weitere Funktionen.

c) Potenzen (Monome)
für $n \in \mathbb{N}_0$ (fest):

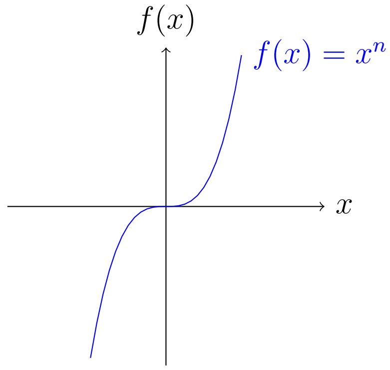
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

- $n = 0$: die konstante 1-Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^0 = 1 \end{aligned}$$

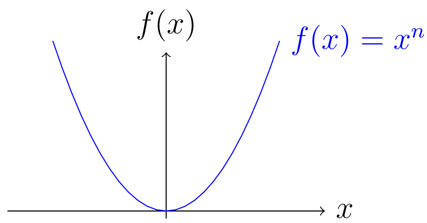
- n ungerade:

  f punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$, bijektiv

- n gerade:

  f achsensymmetrisch zur y-Achse, nicht bijektiv
  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

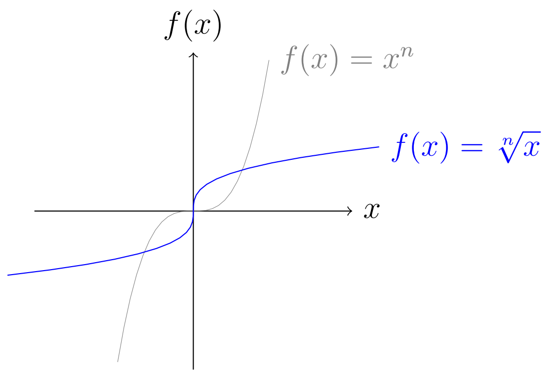
  

d) Wurzelfunktionen
Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Monome. Dazu musss die Gleichung $f(x) = x^n = y$ ($y \in \mathbb{R}$ gegeben) gelöst werden.

- n ungerade:

  f ist bijektiv, dann gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = y$. Dieses wird die n-te Wurzel aus y genannt: $x = \sqrt[n]{y}$.

  $$\begin{aligned} \sqrt[n]{} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

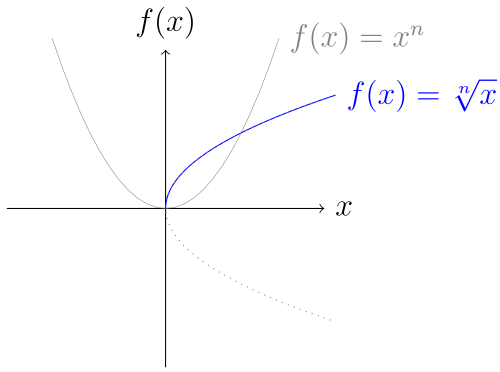
  

- n gerade: Dann hat die Gleichung $x^n = y$ in $\mathbb{R}$
  * keine Lösung, falls $y < 0$
  * genau eine Lösung, falls $y = 0$ (nämlich $x = 0$)
  * zwei Lösungen, falls $y > 0$:

  $$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[n]{y} \quad (> 0) \\ x_2 &= -\sqrt[n]{y} \quad (< 0) \end{aligned}$$

Die positive Lösung wird hier dann als n-te Wurzel bezeichnet:

$$\sqrt[n]{}: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$$
$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$



e) Polynome
$a_0, \quad \dots \quad, a_n \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten)
Ein Polynom ist eine Funktion p mit

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Falls $a_n \neq 0$ ist, heißt n Grad des Polynoms.

f) Rationale Funktionen
Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen (mit p, q...Polynome):

$$f: D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$$

mit $D = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$

g) Exponentialfunktionen
Exponentialfunktionen sind Funktionen

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto q^x$$

wobei die Basis $\mathbb{R} \ni q > 0$, $q \neq 1$ vorgegeben ist.

$$q > 1: f \text{ steigt}$$
$$0 < q < 1: f \text{ fällt}$$

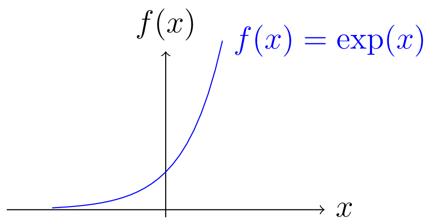
Bekannte Rechenregeln:

- $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$
- $\frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(p \cdot q)^x = p^x \cdot q^x$
- $(\frac{p}{q})^x = \frac{p^x}{q^x}$

Zur Beschreibung von Exponentialfunktionen genügt es, eine bestimmte Basis zu benutzen (man kann $g(x) = p^x$ durch $f(x) = q^x$ ausdrücken, siehe Teil h).
Früher: Basis 10
Heute: Basis e $\approx$ 2.781828... (Eulersche Zahl)
Informatik: oft Basis 2

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exp(0) &= \mathrm{e}^0 = 1 \\ \exp(1) &= \mathrm{e}^1 = 2.781828... \end{aligned}$$

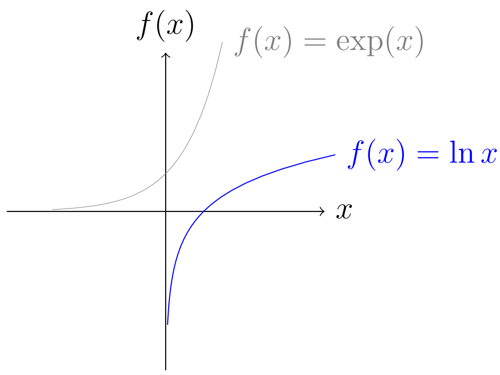


h) Logarithmen
Die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \exp(x)\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

ist bijektiv.
Um sie umzukehren, muss zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $\mathrm{e}^x = y$ gelöst werden.
Die Lösung ist für $y > 0$ in $\mathbb{R}$ eindeutig und wird als der natürliche Logarithmus von y bezeichnet: $x = \ln y$.
In $\mathbb{R}$ ist die Gleichung für $y \leq 0$ unlösbar.

$$\begin{aligned} \ln\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$



Analoges gilt für andere Exponentialfunktionen.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto q^x \quad (q > 0, q \neq 1) \end{aligned}$$

Es gilt: $q^x = y \Leftrightarrow x = \log_q y$ (Logarithmus zur Basis q).

Es genügt wieder, <u>eine</u> feste Basis zu betrachten, z.B. e, denn $q^x = (\mathrm{e}^{\ln q})^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln q}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} q^x = y &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x \cdot \ln q} = y \\ &\Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{x \cdot \ln q}) = \ln y \\ &\Leftrightarrow x \cdot \ln q = \ln y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln q} \quad , \end{aligned}$$

also gilt $\log_q y = \frac{\ln y}{\ln q}$.

<u>Rechenregeln</u> für den Logarihmus lassen sich aus den Regeln für die Exponentialfunktion herleiten:

Sei $u := \ln x$, $v := \ln y$, dann ist $x = \mathrm{e}^u$ und $y = \mathrm{e}^v$, daraus folgt

$$x \cdot y = \mathrm{e}^u \cdot \mathrm{e}^v = \mathrm{e}^{u+v} \quad ,$$

also ist

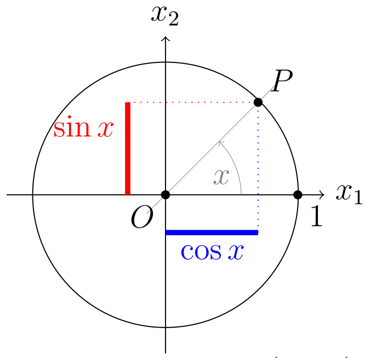
$$\ln(x \cdot y) = \ln(\mathrm{e}^{u+v}) = u + v = \ln x + \ln y \quad .$$

Genauso kann man mit beliebiger Basis $q > 0$, $q \neq 1$ verfahren, wir erhalten für jede Logarithmusfunktion $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log x \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

i) <u>Trigonometrische Funktionen</u>
Wir betrachten einen Punkt P auf dem Einheitskreis (Kreis um O, Radius 1).

Der Winkel, der von der positiven x_1-Achse und der Geraden durch O und P eingeschlossen wird, sei x.



Dann heißt die x_1-Koordinate von P der <u>Kosinus</u> von x ($\cos x$), die x_2-Koordinate heißt der <u>Sinus</u> von x ($\sin x$).

Der Winkel x kann im Gradmaß oder im Bogenmaß (Länge des Bogens von $(1|0)$ bis P) gemessen werden, es gilt:

$$\frac{\text{Gradmaß}}{360°} = \frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}$$

So lassen sich die Funktionen cos und sin definieren:

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\to [-1;1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

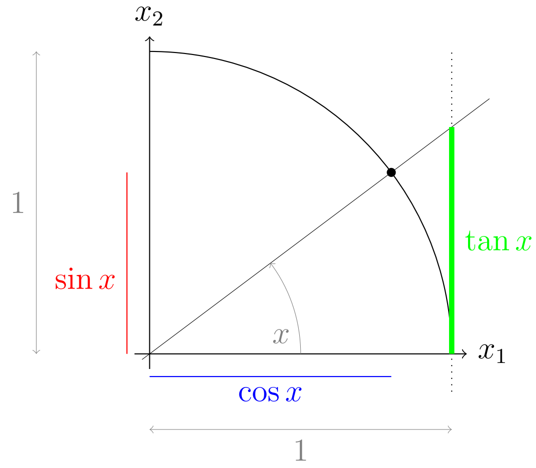
$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\to [-1;1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

und weiter

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{(Tangens)} \qquad \text{und}$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{(Kotangens)}$$

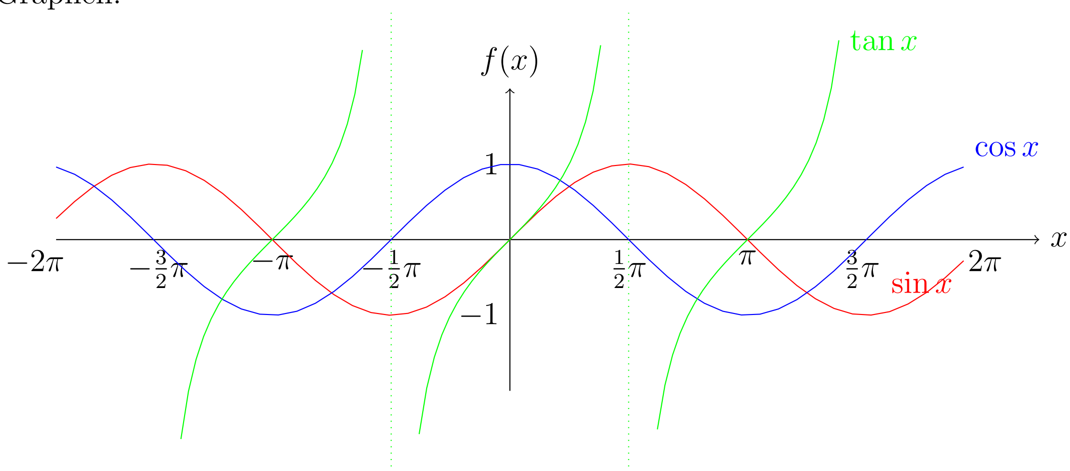
(Tangens und Kotangens sind jeweils nur dort definiert, wo der Nenner $\neq 0$ ist!)



Strahlensatz: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$

Wertetabelle: s. PÜ 02

Graphen:



Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\
(\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)}
\end{aligned}$$

Es gilt: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$).

sin und cos sind 2π-periodisch, d.h.

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sin(x + 2\pi) \qquad \forall x \\
\cos x &= \cos(x + 2\pi) \qquad \forall x
\end{aligned}$$

tan ist π-periodisch:

$$\tan x = \tan(x + \pi) \qquad \forall x \text{ auf Definitionsbereich}$$

2 Folgen

2.1 Definition: Folge

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in eine Menge M (oft $M \subset \mathbb{R}$).
Die a_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ heißen Glieder der Folge, n heißt Index.
(Bemerkung: Das 1. Glied der Folge muss nicht a_1 sein. durch Umbenennung, z.B. $b_1 := a_7, b_2 := a_8$, ist auch $(a_7, a_8, a_9, ...)$ eine Folge im sinne der Definition 2.1)

Schreibweisen

$$
\begin{aligned}
&(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&(a_n)_{n\geq n_0} \qquad \text{(z.B. } (a_n)_{n\geq 7}\text{) oder nur} \\
&(a_n)
\end{aligned}
$$

2.2 Beispiel

a) $a_n = c \qquad \forall n \geq 1, c \in \mathbb{R}$ konstant
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_n \qquad (c, c, c, c, ...)$

b) $a_n = n \qquad (1, 2, 3, 4, ...)$

c) $a_n = (-1)^n \qquad (-1, 1, -1, 1, -1, ...)$

d) $a_n = \frac{1}{n} \qquad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$

e) $a_n = [0, \frac{2}{n}) \qquad$ Folge von Intervallen

f) a_n rekursiv definiert:

$$
\begin{aligned}
a_1 &:= 1 \\
a_{n+1} &:= (n+1)a_n \qquad (n \geq 1) \\
a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \\
a_3 &= 3 \cdot a_2 = 6 \\
a_4 &= 4 \cdot a_3 = 24
\end{aligned}
$$

2.3 Definition: Eigenschaften von Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

a) beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist (s. Mathe 1), d.h. wenn es eine Zahl $K \geq 0$ gibt mit $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (d.h. alle Folgenglieder liegen im Intervall $[-K, K] \quad \forall n; \quad (-K \leq a_n \leq K)$).

b) alternierend, falls ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

2.4 Beispiel

Beispiele aus 2.2:
beschränkt: a), c), d) [für c) und d) z.B. K=1]
alternierend: c)

2.5 Definition: Konvergenz

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ε abhängen darf), so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
(kurz: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \colon |a_n - a| < \varepsilon$)

b) Die Zahl a heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge, wir schreiben:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder
$a_n \to a$ für $n \to \infty$ (a_n strebt gegen a)

c) Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

d) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent (die Folge divergiert).

2.6 Bemerkung

$\to$ Folien 20.04.16

2.7 Beispiel

a) $a_n = \frac{1}{n}$ ist Nulfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a = 0$, denn:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle N als $N > \frac{1}{\varepsilon}$, denn damit gilt für alle a_n mit $n \geq N$:
$|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, da $n \geq N$ und $\frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$.

(z.B. falls $\varepsilon = \frac{1}{10}$, wähle $N > 10$, z.B. $N = 11$; ab a_{11} haben alle Folgenglieder einen Abstand $< \frac{1}{10}$ von 0)

b) (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$. Behauptung: $a = \frac{1}{3}$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle $N > \frac{1}{3\varepsilon}$. Für alle a_n mit $n \geq N$ gilt dann:
$|a_n - a| = |\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}| = |\frac{n+1-n}{3n}| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N} < \varepsilon$. $\frac{1}{3N} < \varepsilon$ genau dann, wenn $N > \frac{1}{3\varepsilon}$.

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = c \quad \forall n$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist
$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$, hier ist also $N = 1$, hängt nicht von ε ab, untypisch.

2.8 Bemerkung

N muss nicht optimal gewählt werden.
Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+n+5} = 0$, [...]
$|\frac{1}{n^3+n+5} - 0| = \frac{1}{n^3+n+5} \leq \frac{1}{N^3+N+5} \overset{!}{<} \varepsilon$. Für optimales N: $\frac{1}{N^3+N+5} < \varepsilon$ nach N auflösen, schwer.
Deshalb grob abschätzen, z.B. so:
$\frac{1}{N13+N+5} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, also wähle $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

2.9 Satz: Beschränktheit von Folgen

Jede konvergente folge ist beschränkt.

Beweis: (zu zeigen: (a_n) konvergente Folge: $\exists K \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a.
dann existiert für alle $\varepsilon > 0$, also auch speziell für $\varepsilon = 1$, ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \quad \forall b \geq N$.
Also gilt für alle $n \geq N$:

$$
\begin{aligned}
|a_n| = \underbrace{|a_n + a - a|}_{\text{'Einschiebetrick'}} &\underbrace{\leq |a_n - a| + |a|}_{\text{Dreiecksungleichung}} \\
|a_n| &< 1 + |a|
\end{aligned}
$$

(also für $n \geq N$ sind die $|a_n| < 1 + |a|$; aber für $n = 1, 2, 3, ..., N-1$?)
Definiere K als $K := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, ..., |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$

Dann gilt $|a_n| \leq K \quad \forall n$.
(Anmerkung: Durch den vorletzten Schritt ist meist $K \in \mathbb{R}^+$.)

2.10 Bemerkung

Nach 2.9 gilt:
(a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt
Das ist äquivalent zu:
(a_n) ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert nicht
(Kontraposition). Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.
Bsp. (a_n) mit $a_n = n$

2.11 Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen)

Für $q \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ falls } |q| < 1 \\ 1, \text{ falls } |q| = 1 \end{cases}$
Die Folge $(q^n)_n \in \mathbb{N}$ divergiert, falls $q = -1$ oder $|q| > 1$.
Beweis:

1. Fall $|q| < 1$ (zu zeigen $q^n \to 0$ für $n \to \infty$)
   Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} |q^n - 0| = |q^n| = |q|^n &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow n \cdot \ln|q| &< \ln\varepsilon \\ \Leftrightarrow n &\overset{da |q|<1}{\geq} \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|} \end{aligned}$$

   Wähle $\mathbb{N} \ni N > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, dann ist also $|q|^n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

2. Fall $q = 1 \to$ konstante 1-Folge, konvergiert, s. 2.7 c)

3. Fall $|q| \geq 1, q \neq 1$
   Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt, also divergent (s. 2,9/2.10).
   Für $q = -1$: können wir erst später beweisen ($\to$ Cauchy-Folgen)

2.12 Beispiel

Nach 2.11 sind die Folgen $((\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad ((-\frac{7}{8})^n)_n \in \mathbb{N}$ Nullfolgen.

2.13 Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

a) Die Folge $(c \cdot a_n)$ konvergiert gegen $c \cdot a, c \in \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ konvergiert gegen $a \pm b$.

c) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$.

d) Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$, falls $b_n, b \neq 0$ und $|a_n| \to |a|$.

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, dann gilt:

e) Ist (e_n) beschränkt, dann ist $(d_n \cdot e_n)$ auch eine Nullfolge.

f) Gilt $|e_n| \leq d_n \quad \forall n$, so ist (e_n) auch eine Nullfolge.

Beweis [exemplarisch für a) und b), Rest s. Moodle]:

a) Falls $c = 0$: klar, konstante 0-Folge.
Falls $c \neq 0$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (denn $a_n \to a$)

Dann ist aber $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c \cdot (a_n - a)| = |c| \cdot \overbrace{|a_n - a|}^{<\frac{\varepsilon}{|c|}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, also $c \cdot a_n \to c \cdot a$

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Dann $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$ (denn $a_n \to a$)
und $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$ (denn $b_n \to b$).
Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |\overbrace{(a_n - a)}^{<\frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{(b_n - b)}^{<\frac{\varepsilon}{2}}| \overset{\triangle\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \text{ und } N_2 \end{aligned}$$

(also z.B. für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$).

Also gilt $(a_n + b_n) \to a + b$. $\square$

2.14 Beispiel

a) $\frac{(-1)^n+5}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, denn $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ und $(-1)^n+5$ ist beschränkt: $|(-1)^n+5| \leq 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (nach 2.13 d)

b) $\frac{3n^2-2n+1}{-n^2+n} \to -3$ für $n \to \infty$, denn $\frac{3n^2-2n+1}{-n^2+n} = \frac{n^2\cdot(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot(-1+\frac{1}{n})} = \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{-1+\frac{1}{n}} \quad \frac{\to 3 \text{ für } n\to\infty}{\to -1 \text{ für } n\to\infty} \longrightarrow \frac{3}{-1}$ für $n \to \infty$ (nach 2.13 b,d) [Nullfolgen]

c) Wichtiges Beispiel
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, d.h. $|x| = \frac{1}{1+t}$ mit $t > 0$.
Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}(n^k \cdot x^n) = 0$, denn

$$(1+t)^n \overset{\substack{\text{Mathe 1: 7.17}\\ \text{bin. Lehrsatz}}}{=} \sum_{j=0}^{n}[\binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot t^j]$$

$$= \overbrace{1}^{j=0} + \overbrace{nt}^{j=1} + \overbrace{\frac{n\cdot(n-1)}{2!}t^2}^{j=2} + \overbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}t^3}^{j=3} + \ldots$$

$$\overset{\substack{\text{nur Term}\\ j=k+1}}{\geq} \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}t^{k+1} = \binom{n}{k+1}t^{k+1}$$

Damit gilt:

$$|n^k \cdot x^n| = |\frac{n^k}{(1+t)^n}| \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}t^{k+1}} = \frac{n^k}{n^{k+1}+\ldots} \to 0$$

für $n \to \infty$.
Es gilt also z.B. $(k = 10000, x = \frac{1}{2})$: $\frac{n^{10000}}{2^n} \to 0$ für $n \to \infty$
$\Rightarrow \underset{\text{Exponentialfkt.}}{(1+t)^n}$ wächst schneller als jede Potenz $\underset{\textit{Polynom}}{n^k}$!

2.15 Anmerkung (Landau-Symbole, $\mathcal{O}$-Notation)

(Informatik, VL Algorithmen)
Sei (a_n) eine strikt positive Folge, d.h. $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}((a_n)) = \{(b_n) | (\frac{b_n}{a_n})$ ist beschränkt $\}$ ("Menge aller Folgen, für die ... gilt")

b) $o(a_n) = \{(b_n) | \frac{b_n}{a_n}$ ist Nullfolge $\}$ ((a_n) wächst schneller als (b_n))

$\mathcal{O}, o$: Landau-Symbole

c) $(a_n) \sim (b_n)$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n})_n = 1$

Beispiel:

- $(2n^2 + 5n + 1)_n \in \mathcal{O}(n^2)$, denn
  $(\frac{2n^2+5n+1}{n^2}) = \frac{n^2\cdot(2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2} \to 2$ für $n \to \infty$, beschränkt
- $(n^2) \in o(n^3)$
- $(n^3) \in o(2^n)$
- $(n13 - 3) \sim (n^3)$, denn $(\frac{n^3}{n^3-3}) = (\frac{n^3\cdot(1)}{n^3\cdot(1-\frac{3}{n^3})}) \to 1$ für $n \to \infty$
- häufig auch laxe Schreibweise
  $$\begin{aligned} 2n^2 + 5n + 1 &= \mathcal{O}(n^2) \\ n^2 &= o(n^3) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) = &\ \text{Menge der beschränkten Folgen} \\ o(1) = &\ \text{Menge der Nullfolgen} \end{aligned}$$

Wichtige Formel: Stirling: $(n!) \sim (\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n)$

Problem: Wie zeigt man die Konvergenz einer Folge, wenn man den Grenzwert nicht kennt?

2.16 Definition

Eine Folge reeller Zahle $(a_n)_n$ heißt

a) (streng) monoton steigend/wachsend, falls $a_{n+1} \overset{>}{\geq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, Schreibweise: $(a_n) \nearrow$

b) (streng) monoton fallend $(a_n) \searrow$, falls $a_{n+1} \overset{<}{\leq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) monoton, falls a) oder b) gilt (oder beides)

2.17 Beispiel

- $(a_n) = (\frac{1}{n})$ ist streng monoton fallend
- $(a_n) = (1)$ ist monoton fallend und monoton steigend
- $(a_n) = ((-1)^n)$ ist nicht monoton

2.18 Bemerkung

$(a_n) \nearrow$ zeigt man so:

$$a_{n-1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

2.19 Satz (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte, monotone Folge reeller Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert, und zwar gegen

- $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton steigend oder gegen
- $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton fallend ist.

Beweis:

Sei $(a_n) \nearrow$ und beschrönkt.

$$\Rightarrow \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \quad \text{ist beschränkt}$$
$$\overset{\substack{\text{Vollst.-Axiom} \\ \text{Mathe 1, 8.16}}}{\Rightarrow} S := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{existiert.}$$

Wir zeigen: $a_n \to S$ für $n \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.
Es gilt $a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also zu zeigen: $S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.
S ist <u>kleinste</u> obere Schranke, d.h. $S - \varepsilon$ ist <u>keine</u> obere Schranke

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad a_n > S - \varepsilon \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow S - a_n < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

$(a_n) \searrow$ analog □

2.20 Beispiel

a) $x \in \mathbb{R}^+$, dann $(x^n) \in o(n!) \qquad (x^n = o(n!))$, d.h. $a_n = \frac{x^n}{n!} \to 0$ für $n \to \infty$

- $a_n > 0$
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} = \frac{x}{n+1} \leq 1$ für $n + 1 \geq x$, also gilt $a_{n+1} \leq a_n$, d.h. $(a_n) \searrow$ und (a_n) ist beschränkt
- $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$

b) wichtige Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((a+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \mathrm{e} \qquad (\text{Eulersche Zahl, } \mathrm{e} = 2,71828...)$$

Warum existiert dieser Limes?
Zeige: $(a_n) \nearrow$ und (a_n) beschränkt, benutze Satz 2.19

– $(a_n) \nearrow$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\frac{1+n}{n})^n \cdot (\frac{n-1}{n})^{n-1} = (\frac{n+1}{n})^n \cdot (\frac{n-1}{n})^n \cdot (\frac{n-1}{n})^{-1} \geq 1$$
$$= (\frac{n^2-1}{n^2})^n \cdot \frac{n}{n-1}$$
$$= (1-\frac{1}{n^2})^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq 1$$

Benutze die Bernoulli-Ungleichung, für $h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+h)^n \geq 1+nh$ für $h \geq -1$ (hier: $h = -\frac{1}{n^2}$)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = (1-\frac{1}{n^2})^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq (1-n\cdot\frac{1}{n^2}) \cdot \frac{n}{n-1}$$
$$= (1-\frac{1}{n}) \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \qquad ,$$

also $(a_n) \nearrow$

– (a_n) beschränkt: Übung, benutze wieder Bernoulli

2.21 Satz (Intervallschachtelungsprinzip)

Seien (a_n), (b_n) reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$ (= linke Intervallgrenze)
- $(b_n) \searrow$ (= rechte Intervallgrenze)
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$

Dann sind beide Folgen konvergent und besitzen denselben Limes.

Beweis:

(a_n), (b_n) konvergent nach Satz 2.19, denn

- $(a_n) \nearrow$; (a_n) beschränkt, da $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also gilt auch $a_n \leq b$ (alle anderen b_n sind noch kleiner)
- $(b_n) \searrow$; (b_n) beschränkt, da $b_n \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also $b_n \geq a_n \geq a_1$
- Da $(b_n) - (a_n)$ Nulfolge ist, sind auch die Grenzwerte gleich.

□

2.22 Beispiel (vgl. Beispiel 2.20 b))

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
Man kann zeigen: $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$
$a_n \leq b_n$, $b_n - a_n \to 0$, also $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Ähnlich zeigt man $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}$
So definiert man $\mathrm{e}^x := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

<u>Bisher:</u>
(a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt, Umkehrung gilt nicht; z.B. $((-1)^n)$
Allerdings besitzt diese Folge zwei konvergente Teilfolgen mit lim $+1$ und lim -1.

2.23 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(n_1, n_2, ...)$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes (d.h. $n_1 < n_2 < n_3 < ...$).
Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ <u>Teilfolge</u> von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ("Teilfolgen entstehen durch Streichung von Gliedern").

2.24 Beispiel

$$(a_n) = ((-1)^n)$$
$$n_k := 2n \quad \text{ergibt } (n_1 = 2;\ n_2 = 4\ n_3 = 6)$$
$$a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(Teilfolge 1,1,1,1...)}$$
$$n_k := 2n - 1 \quad \text{ergibt (Teilfolge -1,-1,-1,...)}$$
$$a_{2n-1} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2.25 Bemerkung

Es gilt: (a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a.

2.26 Definition

Sei (a_n) eine reelle Folge. Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_N) gibt, die gegen h konvergiert.

2.27 Beispiel

- $(a_n) = ((-1)^n + \frac{1}{n})$ esitzt zwei Häufungspunkte -1 und 1
- $(a_n) = ((-1)^n)$ besitzt die Häufungspunkte -1 und 1

2.28 Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt:

$$(a_n) \text{ beschränkt } \Rightarrow (a_n) \text{ besitzt eine konvergente Teilfolge}$$

Beweis: Intervallschachtelungsprinzip/Bisektionsverfahren
(s. Folien/Blatt[←s.u.])
Wir verwenden das Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.21). Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, es existiert also ein $K \in \mathbb{N}$, so dass ale Folgeglieder im Intervall $[-K, K] =: [A_0, B_0]$ liegen. Halbiere dieses Intervall:

- Falls in der ersten Hälfte des Intervalls unendlich viele Folgenglieder liegen: wähle eines davon aus.
- Falls nicht (also falls nur endlich viele Folgenglieder in der ersten Hälfte des Intervalls liegen), dann liegen in der zweiten Hälfte unendlich viele Folgenglieder. Wähle davon eines aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n1}, die Intervallhälfte, aus der es stammt, nennen wir $[A_1, B_1]$. Fahre nun so fort: Halbiere $[A_1, B_1]$, wähle wie oben a_{n2} aus, erhalte damit das Intervall $[A_2, B_2]$, usw. So erhalten wir eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Für die Intervalgrenzen von $[A_k, B_k]$ gilt:

- $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$
- $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \qquad (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $B_k - A_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Damit sind alle Voraussetzungen für Satz 2.21 (Intervallschachtelungsprinzip) erfüllt. Die Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind also konvergent und besitzen denselben Limes a. Damit gilt auch $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. □

2.29 Bemerkung/Definition

Sei (a_n) reell und beschränkt, dann gibt es inen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ oder $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ bzw. den
- Limes inferior von (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ oder $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Weiter setzt man

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \begin{cases} \infty, \text{ wenn } (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt ist} \\ -\infty, \text{ wenn } (a_n) \to -\infty \text{ gilt, d.h. } \forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon a_n \leq -K \quad \forall n \geq N \end{cases}$
- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \begin{cases} -\infty, \text{ wenn } (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt ist} \\ \infty, \text{ wenn } (a_n) \to \infty \text{ gilt, d.h. } \forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon a_n \geq K \quad \forall n \geq N \end{cases}$

Achtung: $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen!
Man erweitert hier $\mathbb{R}$ um zwei ideelle Elemente $-\infty, \infty$, setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ (Abschluss von $\mathbb{R}$) und erweitert die Ordnungsstruktur auf $\mathbb{R}$ durch
$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Mit dieser Festlegung besitzt jede reelle Zahlenfolge sowohl lim sup als auch lim inf.
Beispiel:

a) $a_n = \frac{n+1}{n} \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1$

b) $a_n = (-1)^n \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1 \qquad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$

c) $a_n = (-1)^n \cdot n \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \infty \qquad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$

d) $a_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$: Übung

2.30 Definition (Cauchyfolge)

Eine Folge (a_n) heißt <u>Cauchyfolge</u>, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$
(kurz: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \colon |a_n - a_m| < \varepsilon$) mit $|a_n - a_m|$... Abstand zweier Folgenglieder

2.31 Satz (Cauchykriterium)

Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

$$(a_n) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow (a_n) \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Beweisskizze (ausführlicher Beweis: s. Moodle):

- "$\Rightarrow$": Einschiebetrick, Dreiecksungleichung verwenden
- "$\Leftarrow$": Idee: (a_n) ist Cauchyfolge (zu zeigen: konvergent)
  zeige: (a_n) ist beschränkt
  $\Rightarrow$ 2.28 $\exists$ konvergente Teilfolge
  zeige: Limes der Teilfolge ist Limes der Folge

2.32 Anwendung (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine Abbildung mit
$$\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\text{Abstand der Bildpunkte}} < \underbrace{|x-y|}_{\text{Abstand von 2 Punkten}} \qquad \forall x, y \in [a,b]$$
("f ist strikte Kontraktion")
Dann hat f genau einen Fixpunkt, d.h.
$$\underbrace{\exists!}_{\text{es gibt genau ein...}} \quad r \in [a,b] \text{ mit } f(r) = r$$

Beweisidee:
Starte mit beliebigem $x_0 \in [a,b]$.
Berechne x_1 als $f(x_0) \qquad x_1 := f(x_0)$
x_2 als $f(x_1) \qquad x_2 := f(x_1)$

also $x_{n+1} \coloneqq f(x_n)$

Zeige: Diese Folge konvergiert (Cauchyfolge), und zwar gegen $r = f(r)$; r ist eindeutig (Annahme: es existieren 2 verschiedene r)

3 Reihen

3.1 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.
Summiere die ersten n Folgeglieder.

$$S := \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$$

(n-te Partialsumme)

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{S_1} + a_2}_{S_2} + a_3}_{S_3} + ... + a_n}_{S_n}$$

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_1, S_2, S_3, ...)$ heißt unendliche Reihe, schreibe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
Falls $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s und ihr Grenzwert wird dann ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.
(Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ definieren)

3.2 Beispiel

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + ...$ divergente Folge

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = (-1) + 1 + (-1) + ...$ divergente Folge

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0, \text{ falls } n \text{ gerade} \\ -1, \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

c) Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... \qquad \text{divergiert}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \underbrace{... + \frac{1}{n}}_{\text{usw.}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$$

$\Rightarrow$ divergent (per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$)

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ it konvergent gegen den Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

e) wichtiges Beispiel: Geometrische Reihe
Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{, denn:}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{(Übung: geom. Summe, Induktion)}$$

Aus 2.11:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad \text{, falls } |q| < 1$$

Geometrische Folge. Also gilt:

$$S_n \to \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } n \to \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad \text{divergiert für } |q| \geq 1$$

Nochmal Beispiel d)
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$, also geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ $1 > |q|$, konvergiert gegen $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Weitere Beispiele:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k = \frac{2}{3}$
- $\sum_{k=3}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+3} = q^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^3}{1-q}$ (falls $|q| < 1$)

3.3 Rechenregeln für Reihen

folgen aus den Rechenregeln für Folgen. Sei

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert gegen a,
- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert gegen b.

Dann gilt mit $c \in \mathbb{R}$:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergiert gegen $a + b$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k)$ konvergiert gegen $c \cdot a$

3.4 Konvergenz-/Divergenzkriterien für Reihen

$\boxed{1}$ Ist S_n mit $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ beschränkt und $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (folgt aus Satz 2.19/monotone Konvergenz).

$\boxed{2}$ <u>Cauchy-Kriterium</u>
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m > n \geq N$ gilt: $|a_{n+1} + ... + a_m| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$
$|S_m - S_n|$
(folgt aus 2.31/Cauchykriterium für Folgen)
Daraus ergibt sich:
Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $(a_n)_n$ Nullfolge (wähle $m = n+1$, dann $|a_{n+1}| < \varepsilon$, d.h. $a_n \to 0$).
$\Rightarrow$[3]

$\boxed{3}$ <u>Divergenzkriterium</u>
Ist $(a_n)_n$ keine Nullfolge, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.
Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(1 + \frac{1}{k})}_{\to 1 \text{ für } k \to \infty, \text{ keine Nullfolge!}}$ divergiert

$\boxed{4}$ <u>Majorantenkriterium</u>
Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (für fast alle n, d.h. für alle bis auf endlich viele)
Dann gilt:
Ist $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}_{\text{Majorante}}$ konvergent, dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Beweis:

$$\begin{aligned} |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k \\ &\leq |\sum_{k=n+1}^{m} b_k| < \varepsilon \text{ , da } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent,} \end{aligned}$$

also ist Cauchykriterium [2] für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ erfüllt, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.
Ähnlich: <u>Minorantenkriterium</u> für Divergenz, s. Blatt 5.

$\boxed{5}$ Leibnitzkriterium für alternierende Reihen

Sei $(a_n)_n$ reelle, monoton fallende Nullfolge mit $a_n \geq 0 \quad \forall n$.
Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$

Beweis: Intervallschachtelungsprinzip

$$A_n := \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k \cdot a_k$$

$$B_n := \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \cdot a_k$$

- $A_n \nearrow$, denn

$$A_{n1} - A_n = \sum_{k=0}^{\overbrace{2(n+1)-1}^{2n+1}} (-1)^k \cdot a_k - \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k \cdot a_k$$
$$= (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n}a_{2n} \qquad = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$$

  (da $(a_n) \searrow$)
- ähnlich für $B_n \searrow$
- $B_n - A_n = (-1)^{2n}a_{2n} = a_{2n} \geq 0 \quad \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ (weil $(a_n)_n$ Nullfolge nach Voraussetzung)
  $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$

Bsp:

a) Leibnitz-Reihe:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - ...$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

   konvergiert gegen $\frac{\pi}{4}$

b) Die alternierende harmonische Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... + ...$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1}$$

   konvergiert gegen $\ln 2$

$\boxed{6}$ Absolute Konvergenz

Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt <u>absolut konvergent</u>, falls die Betragsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut, da $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k^2}| = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{s. } \boxed{6a}}$ konvergiert

b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert nicht absolut (aber konvergiert, s. Leibnitzkriterium), da $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (harmonische Reihe, konvergiert nicht)

Es gilt: Reihe konvergiert absolut $\overset{\text{(Majorantenkriterium)}}{\Rightarrow}$ Reihe konvergiert
(aber nicht umgekehrt, s. Beispiel b))

$\boxed{6a}$ Wurzelkriterium

Für $a_k \in \mathbb{R}$ gilt:

- falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert (d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut)
- falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert
- für $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_k|} = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:
Sei $s := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- falls $s < 1$: Wähle kleines $\varepsilon > 0$, so dass $s + \varepsilon < 1$
  $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq s + \varepsilon$ für fast alle n
  $\Rightarrow |a_n| \leq (s + \varepsilon)^n$
  Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(s + \varepsilon)}_{<1}{}^n$ ist geometrische Reihe und konvergiert, und ist Majorante für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$

- falls $s > 1$, dann ist $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ für unendlich viele n, also $a_n \nrightarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ divergent nach $\boxed{3}$
- z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (allgemeine harmonische Reihe) mit $\alpha \geq 1$ liefert $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, aber es gilt (Mitteilung):
  für $\alpha = 1$ ist Reihe divergent (für $0 < \alpha < 1$ ebenso, Blatt 5 Aufgabe 2);
  für $\alpha > 1$ ist Reihe konvergent
  Das Wurzelkriterium kann diese Fälle nicht unterscheiden.

$\boxed{6b}$ Quotientenkriterium
Sei $a_n \neq 0$ für fast alle k (d.h. für alle bis auf endlich viele)

- falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
- falls $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert
- falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich (wie bei $\boxed{6a}$, dritter Punkt)

Beweis: ähnlich wie $\boxed{6a}$

3.5 Bemerkung

Umordnung einer Reihe, Konvergenzverhalten
$\rightarrow$ s. Folien 11.05.2016

4 Potenzreihen

4.1 Definition

Sei $(a_k)_k$ eine reelle Folge, $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Reihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

Potenzreihe mit Koeffizientenfolge $(a_k)_k$ (oft auch $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-b)^k$, $b \in \mathbb{R}$ heißt Entwicklungspunkt).
Falls $a_k \neq 0$ für nur endlich viele (d.h. $a_k = 0$ für fast alle k), dann heißt $P(x)$ Polynom.
(Unterschied zu bisherigen Reihen: abhängig von x. Für welche Werte von x konvergiert $P(x)$? Klar: für $x = 0$, dann $P(0) = a_0 \cdot 0^0 = a_0$, auch für andere x? Das hängt von der Folge a_k ab)

4.2 Beispiel

a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k \qquad (a_k = 1 \quad \forall k, \quad b = 0)$ konvergiert für alle x mit $|x| < 1$ (geometrische Reihe!), also für $x \in \underbrace{(-1,1)}_{\text{Konvergenzintervall}}$, sonst divergiert sie (z.B. für $x = 2, \quad x = 3, \quad ...$)

b) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$ (d.h. $a_k = 2^k \quad \forall k$) $= \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k$ wie in a), konvergiert für alle x mit $|2x| < 1$, also $|x| < \frac{1}{2}$; also für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

4.3 definition (Formel von Cauchy-Hadamard)

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe.

$$\rho := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

heißt der Konvergenzradius von $P(x)$ (dabei sei $\frac{1}{0} := +\infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ gesetzt, es ist also $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Zur Bedeutung von $\rho = \infty$ siehe 4.4.
Oft einfacher: Formel von Euler:

$$\rho = \lim_{\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \qquad ,$$

falls $(|\frac{a_n}{a_{n+1}}|)$ konvergente Folge ist oder "bestimmt gegen ∞ divergiert", d.h. falls $\forall K > 0 \quad \exists N$ mit $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| \geq K \quad \forall n \geq N$, dann setze $\rho = +\infty$.
(Achtung: z.B. für $a_n = \begin{cases} 1 & \text{, n gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{, n ungerade} \end{cases}$ ist diese Formel nicht anwendbar!)

4.4 Satz (Konvergenz von Potenzreihen)

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann gilt:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \rho$ konvergiert $P(x)$ absolut (d.h. Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, die im Konvergenzintervall $(-\rho, \rho)$ liegen.
Ist $\rho = \infty$, so heißt das für alle $x \in \mathbb{R}$!).

b) Für alle x mit $|x| > \rho$ divergiert $P(x)$.

c) Für $|x| = \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich (Konvergenzintervall kann also $(-\rho, \rho)$, $[-\rho, \rho]$, $[-\rho, rho)$, $(-\rho, \rho]$ sein).

Beweis:

a) Nach dem Wurzelkriterium 3.4 $\boxed{6a}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ konvergent, falls $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$ gilt. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} |x| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} & < 1 \\ \Leftrightarrow |x| & < \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho \end{aligned}$$

b) analog

c) Übung (Beispiel suchen) $\square$

Mit dem Quotientenkriterium 3.4 $\boxed{6b}$ lässt sich der Satz auch für die Formel von Euler für ρ beweisen.

4.5 Bemerkung

Ist ρ Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, so konvergiert die Reihe absolut für $|x| < \rho$ (für $x \in (-\rho, \rho)$), divergiert für $|x| > \rho$.
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ konvergiert dann absolut für $|x-b| < \rho$ (für $x \in (b-\rho, b+\rho)$); divergiert für $|x-b| > \rho$. Für $x = b - \rho$, $x = b + \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich.
(Also: Falls b dabei: erst alles ohne b rechnen (4.3,4.4), dann Bemerkung 4.5 verwenden)

4.6 Beispiel

a) Bsp. 4.2 mit der Formel für ρ nachrechnen (Präsenzübungsblatt 6)

b) wichitges Beispiel: die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{x!} \qquad (a_k = \frac{1}{k!}, \quad b = 0)$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

hat Konvergenzradius $\rho = \infty$ nach Euler, d.h. Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, deshalb kann man für $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion definieren (Exponentialfunktion):

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Es gilt (vgl. Präsenzübungsblatt 6) (Cauchyprodukt):
$exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$
Für $x = 1$ erhält man
$\exp(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$
Man kann zeigen: Dies ist e (Eulersche Zahl) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.
Allgemein gilt: Die Folge $((1+\frac{x}{n})^n)_n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n\to\infty} \frac{x^k}{k!}$
Daher schreibt man auch
$\mathrm{e}^x = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

5 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

5.1 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0, a \in \mathbb{R}$.

a) f heißt konvergent gegen a für x gegen x_0, wenn gilt:
Für alle Folgen $\underbrace{(x_n)_n \text{ aus } D \setminus \{x_0\}}_{\text{d.h. Glieder der Folge sind alle aus } D\setminus\{x_0\}}$, die gegen x_0 konvergieren, konvergieren die Funktionswerte $f(x_n) \to a$, also $f(x_n) \to a$ für $x_n \to x_0$ (Schreibweise: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$).

b) Analog lässt sich der Grenzwert für $x \to \infty$ oder für $x \to -\infty$ definieren:
f konvergiert gegen a für $\begin{matrix} x \to \infty \\ x \to -\infty \end{matrix}$ falls für alle Folgen $(x_n)_n$ mit $\underbrace{\begin{matrix} x_n \to \infty \\ x_n \to -\infty \end{matrix}}_{\text{d.h. } \forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N}:\, x_n > k \forall n \geq N}$
gilt: $f(x_n) \to a$ ($\lim\limits_{x\to\infty} = a$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$)

5.2 Beispiel

zu a)

$$f\colon D = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R}$$
$$x \to x^2$$

Was ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?
Sei $(x_n)_n$ Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach den Rechenregeln für Folgen (Satz 2.13) gilt:
$f(x_n) = x_n^2 \to x_0^2$ (Voraussetzung $x_n \to x_0$, aus Rechenregeln $x_n^2 \to x_0^2$), also ist $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = x_0^2 =: a$
(Bemerkung: allgemein gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ für alle Polynome)

zu b)

$$f\colon (0,\infty) = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Was ist $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?
Für alle $(x_n)_n$ mit $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt:
$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0$, also $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

5.3 Bemerkung/Definition

Definition 5.1 ist nur interessant für die Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$, für die es Folgen $(x_n)_n$ aus $D \setminus \{x_0\}$ gibt, die gegen x_0 konvergieren.
Solche Punkte nennt man <u>Häufungsstellen (HS)</u> von D.
$\overline{D} := D \cup \{x | x \text{ ist HS von } D\}$ heißt <u>Abschluss</u> von D.
Beispiel:

a) $D = (0,\infty) = \mathbb{R}^+$
-1 keine HS von D
1 ist HS von D
0 ist HS von D

b) $D = \mathbb{R}^+ \cup \{-2\}$
-2 keine HS von D, aber $-2 \in D$, $-2 \in \overline{D}$

c) $D = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, dann sind a und b HS;
$\overline{D} = [a, b]$

d) Es gilt: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

5.4 Bemerkung/Definition

In Definition 5.1 muss $f(x_n) \to a$ für alle Folgen $(x_n)_n$ aus $D \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergieren, gelten; also insbesondere für Folgen, die von links ($x_n \to x_0$ mit $x_n < x_0 \forall n$) und für Folgen, die von rechts ($x_n \to x_0$ mit $x_n > x_0 \forall n$) gegen x_0 konvergieren (falls möglich).

Man spricht vom links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert. Schreibweise:

links:

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = a$$

oder

$$\lim_{x \to x_0 -}$$

rechts:

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = a$$

oder

$$\lim_{x \to x_0 +}$$

5.5 Beispiel

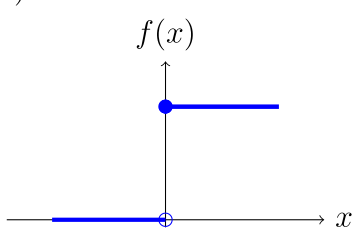
a) – $D = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$
Folge aus $D \setminus \{x_0\}$, die von rechts [links] gegen x_0 konvergiert ist z.B. $(x_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ $\quad [(x_n)_n = (\frac{-1}{n})_n]$

– $D = [0, \infty]$, $x_0 = 0$
Nur Folgen, die von rechts gegen x_0 konvergieren, sind möglich (sonst nicht in D)

b) Heavisidefunktion (Schwellenwertfunktion)

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



$\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

– für $(x_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ gilt $f(x_n) = f(\frac{1}{n}) = 1 \to 1$

– für $(x_n)_n = (-\frac{1}{n})_n$ gilt $f(x_n) = f(-\frac{1}{n}) = 0 \to 0$

Also gibt es kein a, so dass alle Folgen mit $x_n \to x_0$ die Bedingung $f(x_n) \to a$ erfüllen.
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert hier nicht!

5.6 Bemerkung/Definition

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in \overline{D}$.
Falls für alle Folgen $(x_n)_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$f(x_n) \to \pm\infty \qquad ,$$

so sagt man, f divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$ für $x \to x_0$ (analog für $x \to \pm\infty$).

Beispiel:

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

- falls $D = (0, \infty)$:
  $f(x)$ divergiert bestimmt gegen ∞ für $x \to 0$
- falls $D = (-\infty, 0)$:
  $f(x)$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$ für $x \to 0$
- falls $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
  dann existiert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ nicht und $f(x)$ divergiert auch nicht bestimmt.

5.7 Definition (Stetigkeit)

Sei $f(x)$ eine reelle Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$.
Die Funktion heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, falls $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
Die Funktion heißt (überall) stetig in D, falls $f(x)$ in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

5.8 Bemerkung

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Äquivalente Definition der Stetigkeit: ε-δ-Kriterium, siehe z.B. WHK 6.17:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D\colon |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

b) Gibt es eine Konstante K mit

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K \cdot |x - x_0| \quad \forall x \in D \qquad ,$$

dann ist die Funktion stetig.

5.9 Beispiel

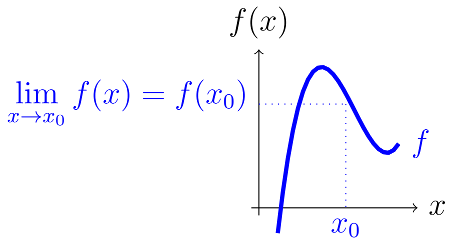
a)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ ($\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert [vgl. Bsp. 5.2 a)] und ist gleich $f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$)

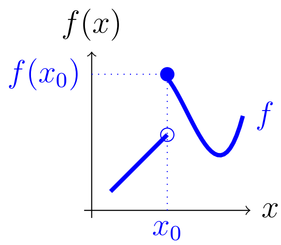
b) (1) Bild:

$f(x)$ ist stetig in x_0



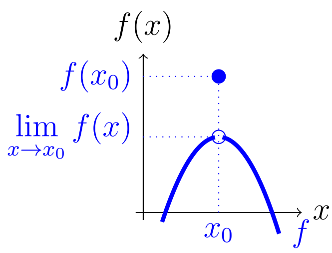
(2) Bild:

$f(x)$ ist nicht stetig in x_0:
$\lim\limits_{x\to x_0}$ existiert nicht!



(3) Bild:

$f(x)$ ist nicht stetig in x_0:
$\lim\limits_{x\to x_0}$ existiert, ist aber ungleich $f(x_0)$.



c)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x|$$

ist stetig auf $\mathbb{R}$

5.10 Bemerkung

Eine Funktion $f(x)$ ist stetig, falls der Graph von f keine SSprungstelle"hat bzw. "man f ohne abzusetzen zeichnen kann".
$\Rightarrow$ in Ordnung für Intuition, aber unpräzise

Beispiel dazu:

a)

$$f\colon D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Die Funktion ist stetig auf D, weil die 0 ausgenommen wurde.

b) Dirichlet-Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Die Funktion ist unstetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

c) Thomaesche Funktion
Die Funktion ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $[0, 1]$
und unstetig in jedem $x_0 \in \mathbb{Q}$ in $[0, 1]$.

5.11 Satz (Rechenregeln für stetige Funktionen)

a) Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch

- $c \cdot f$
- $f + g$
- $f - g$

- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ (für $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$)

stetig in x_0.

b) Die Komposition zweier stetiger Funktionen ist stetig.

$$\begin{aligned} D, D' &\subseteq \mathbb{R} \\ f\colon D &\to \mathbb{R} \\ g\colon D' &\to \mathbb{R} \\ f(D) &\subseteq D' \\ f, g &\text{ stetig} \\ &\Rightarrow \\ (g \circ f)\colon D &\to \mathbb{R} \text{ ist stetig} \end{aligned}$$

Beweis folgt direkt aus Def. 5.1, 5.7 und den Rechenregeln für Folgen 2.13.

5.12 Bemerkung

Es gilt: $D \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f\colon D \to f(D)$ bijektiv, stetig.
Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to D$ stetig.

5.13 Bemerkung

Man kann zeigen (u.a. mit 5.11), dass

a) Potenzreihen mit Konvergenzradius ρ sind stetig für alle x mit $|x| < \rho$.

b) Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmen, Wurzelfunktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

c) $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$ ebenso (vgl. PÜ 7*).

5.14 Bemerkung/Definition (Rationale Funktionen)

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

sei rationale Funktion mit $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} | q(x) = 0\}$.
Dann ist f stetig auf ganz D.

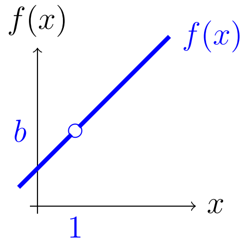
Lässt sich f auf ganz $\mathbb{R}$ definieren ("fortsetzen"), so dass man eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion erhält?
Beispiel:

a)

$$f\colon D = \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ist stetig auf D.
Setze f auf $\mathbb{R}$ fort.

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{falls } x \neq 1 \\ b & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$



$\tilde{f}$ ist stetig in $x_0 = 1$ genau dann, wenn $b = 2$ gewählt wird, denn $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.
$x_0 = 1$ ist eine (stetig) hebbare Definitionskücke von f
Allgemein:
Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, es existiert $\lim_{x \to x_0} f(x) =: r \quad r \in \mathbb{R}$, dann ist x_0 stetig hebbare Definitionslücke von f, die Funktion

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ r & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

ist dann die stetige Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$.

b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x^2-1)(x-1)}{(x-1)}$
Definitionslücke $x_0 = 1$ hebbar durch $0 = \lim_{x \to 1} f(x)$,
$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ stetig.

c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$
Definitionslücke $x_0 = 1$ nicht hebbar: $\lim_{x \to 1} f(x)$ existiert nicht

d) Gilt für die Nullstelle x_0 des Nenners einer rationalen Funktion $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to x_0\mp$, so nennt man x_0 Polstelle.
Z.B. $f, g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$
$x_0 = 0$

- $f(x) \to \infty$ für $x \to 0+$
- $f(x) \to -\infty$ für $x \to 0-$
- $g(x) \to \infty$ für $x \to 0+$ und $x \to 0-$

e) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ hat bei $x_0 = 0$ Oszillationsstelle:

- für $(x_n)_n = (\frac{1}{n\pi})_n$ ist $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$
- für $(x_n)_n = (\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n})_n$ ist $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \to 1$

d.h. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht