Mathematik II

20.07.2016

Inhaltsverzeichnis

1 Reelle Funktionen

1.1 Wiederholung Mathe 1: Funktionen

Definition

Eine Funktion/Abbildung $f\colon A \to B$ besteht aus

- zwei Mengen:
  - A: Definitionsbereich von f
  - B: Bildbereich von f
- und einer Zuordnungsvorschrift, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $b \in B$ zuordnet.

Wir schreiben dann $b = f(a)$, nennen b das Bild/den Funktionswert von a (unter f) sowie a (ein) Urbild von b (unter f).

Notation

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ a &\mapsto f(a) \end{aligned}$$

Beispiel

$\to$ Folien 11.04.2016

1.2 Reelle Funktionen

Definition

Eine reelle Funktion einer Veränderlichen ist eine Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ (oft ist D endliche Vereinigung von Intervallen, z.B.

- $D = (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$
- $D = \mathbb{R}_0^+ = [0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$
- $D = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
- $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$).

1.3 Neue Funktionen aus Alten, Kompositionen

Definition

Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen.

a) $(f \pm g)(x) \coloneqq f(x) \pm g(x) \qquad \forall x \in D$
   Summe/Differenz von f und g
   (genauer:
   $$\begin{aligned} f \pm g\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad) \end{aligned}$$

b) $(f \cdot g)(x) \coloneqq f(x) \cdot g(x) \qquad \forall x \in D$
   Produkt von f und g

c) falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, dann
   $(\frac{f}{g})(x) \coloneqq \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \forall x \in D$
   Quotient von f und g

d) Komposition/Hintereinanderausführung
   $f\colon D_f \to \mathbb{R}, \quad g\colon D_g \to \mathbb{R}$, wobei $f(D_f) \subseteq D_g$
   $$\begin{aligned} g \circ f\colon D_f &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

1.4 Beispiel

$$\begin{aligned} f, g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= x^2 \\ g(x) &= x - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= x^2 + x - 1 \\ (f \cdot g)(x) &= x^2 \cdot (x-1) = x^3 - x^2 \\ (\frac{f}{g})(x) &= \frac{x^2}{x-1} \quad \text{für } x \neq 1 \quad (D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}) \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2 - 1 \\ (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

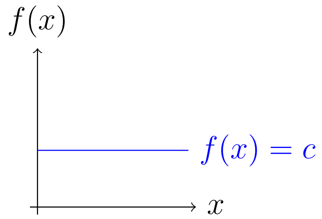
1.5 Wiederholung Mathe 1: Injektivität, Surjektivität, Bijektivität; Umkehrfunktion

$\to$ Folien 13.04.2016

1.6 Elementare Funktionen (naive Einführung)

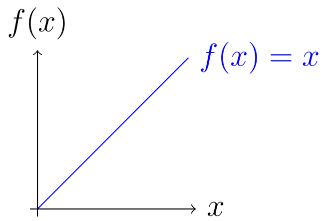
a) Konstante Funktionen
für $c \in \mathbb{R}$ (fest):

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$



b) Die identische Funktion (Identität)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$



Durch mehrfache Anwendung von 1.3 entstehen aus a) und b) viele weitere Funktionen.

c) Potenzen (Monome)
für $n \in \mathbb{N}_0$ (fest):

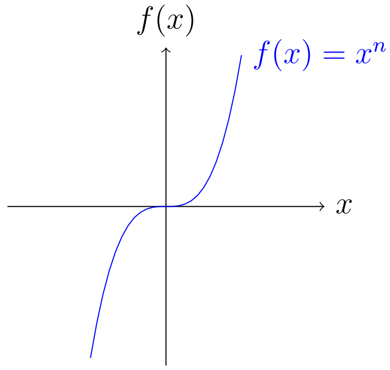
$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^n \end{aligned}$$

- $n = 0$: die konstante 1-Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^0 = 1 \end{aligned}$$

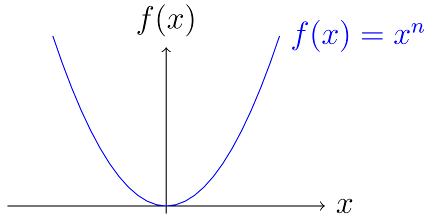
- n ungerade:

  f punktsymmetrisch zum Ursprung $(0|0)$, bijektiv



- n gerade:

  f achsensymmetrisch zur y-Achse, nicht bijektiv
  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

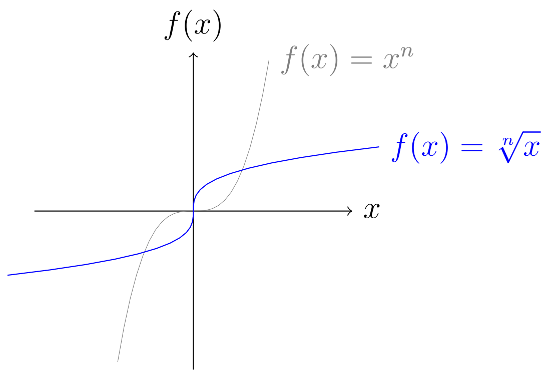


d) Wurzelfunktionen
Wurzelfunktionen sind die Umkehrfunktionen der Monome. Dazu musss die Gleichung $f(x) = x^n = y$ ($y \in \mathbb{R}$ gegeben) gelöst werden.

- n ungerade:

  f ist bijektiv, dann gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}$ genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^n = y$. Dieses wird die n-te Wurzel aus y genannt: $x = \sqrt[n]{y}$.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{} \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x} \end{aligned}$$

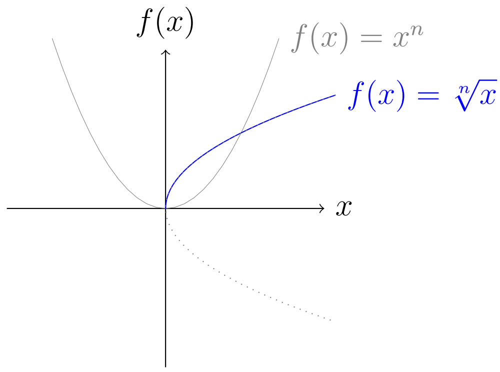


- n gerade: Dann hat die Gleichung $x^n = y$ in $\mathbb{R}$
  * keine Lösung, falls $y < 0$
  * genau eine Lösung, falls $y = 0$ (nämlich $x = 0$)
  * zwei Lösungen, falls $y > 0$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[n]{y} \quad (> 0) \\ x_2 &= -\sqrt[n]{y} \quad (< 0) \end{aligned}$$

Die positive Lösung wird hier dann als n-te Wurzel bezeichnet:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{}\colon \mathbb{R}_0^+ &\to \mathbb{R}_0^+\\ x &\mapsto \sqrt[n]{x}\end{aligned}$$



e) Polynome
$a_0, \quad \ldots \quad, a_n \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten)
Ein Polynom ist eine Funktion p mit

$$\begin{aligned}p\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\end{aligned}$$

Falls $a_n \neq 0$ ist, heißt n Grad des Polynoms.

f) Rationale Funktionen
Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen (mit p, q...Polynome):

$$\begin{aligned}f\colon D &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)}\end{aligned}$$

mit $D = \{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}$

g) Exponentialfunktionen
Exponentialfunktionen sind Funktionen

$$\begin{aligned}f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+\\ x &\mapsto q^x\end{aligned}$$

wobei die Basis $\mathbb{R} \ni q > 0$, $q \neq 1$ vorgegeben ist.

$$\begin{aligned}q > 1\colon & \ f \text{ steigt}\\ 0 < q < 1\colon & \ f \text{ fällt}\end{aligned}$$

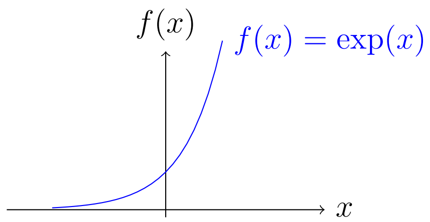
Bekannte Rechenregeln:

- $q^x \cdot q^y = q^{x+y}$
- $\frac{q^x}{q^y} = q^{x-y}$
- $(q^x)^y = q^{x \cdot y}$
- $(p \cdot q)^x = p^x \cdot q^x$
- $(\frac{p}{q})^x = \frac{p^x}{q^x}$

Zur Beschreibung von Exponentialfunktionen genügt es, eine bestimmte Basis zu benutzen (man kann $g(x) = p^x$ durch $f(x) = q^x$ ausdrücken, siehe Teil h).
Früher: Basis 10
Heute: Basis $\mathrm{e} \approx 2.781828...$ (Eulersche Zahl)
Informatik: oft Basis 2

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

$$\exp(0) = \mathrm{e}^0 = 1$$
$$\exp(1) = \mathrm{e}^1 = 2.781828...$$

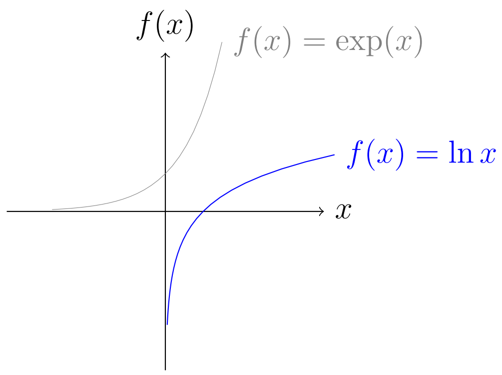


h) Logarithmen
Die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} \exp(x)\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \mathrm{e}^x \end{aligned}$$

ist bijektiv.
Um sie umzukehren, muss zu gegebenem $y \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung $\mathrm{e}^x = y$ gelöst werden.
Die Lösung ist für $y > 0$ in $\mathbb{R}$ eindeutig und wird als der natürliche Logarithmus von y bezeichnet: $x = \ln y$.
In $\mathbb{R}$ ist die Gleichung für $y \leq 0$ unlösbar.

$$\begin{aligned} \ln\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$



Analoges gilt für andere Exponentialfunktionen.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto q^x \quad (q > 0, q \neq 1) \end{aligned}$$

Es gilt: $q^x = y \Leftrightarrow x = \log_q y$ (Logarithmus zur Basis q).

Es genügt wieder, <u>eine</u> feste Basis zu betrachten, z.B. e, denn $q^x = (\mathrm{e}^{\ln q})^x = \mathrm{e}^{x \cdot \ln q}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} q^x = y &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x \cdot \ln q} = y \\ &\Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{x \cdot \ln q}) = \ln y \\ &\Leftrightarrow x \cdot \ln q = \ln y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln y}{\ln q} \quad , \end{aligned}$$

also gilt $\log_q y = \frac{\ln y}{\ln q}$.

<u>Rechenregeln</u> für den Logarihmus lassen sich aus den Regeln für die Exponentialfunktion herleiten:

Sei $u := \ln x$, $v := \ln y$, dann ist $x = \mathrm{e}^u$ und $y = \mathrm{e}^v$, daraus folgt

$$x \cdot y = \mathrm{e}^u \cdot \mathrm{e}^v = \mathrm{e}^{u+v} \quad ,$$

also ist

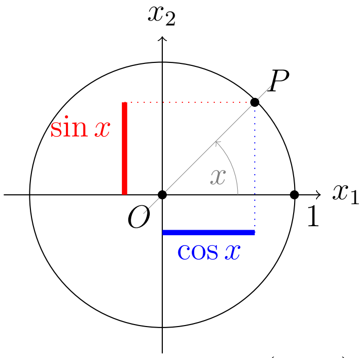
$$\ln(x \cdot y) = \ln(\mathrm{e}^{u+v}) = u + v = \ln x + \ln y \quad .$$

Genauso kann man mit beliebiger Basis $q > 0$, $q \neq 1$ verfahren, wir erhalten für jede Logarithmusfunktion $\log\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$:

- $\log(x \cdot y) = \log x + \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y \quad \forall x, y > 0$
- $\log(x^\alpha) = \alpha \cdot \log x \quad \forall x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$

i) <u>Trigonometrische Funktionen</u>
Wir betrachten einen Punkt P auf dem Einheitskreis (Kreis um O, Radius 1).

Der Winkel, der von der positiven x_1-Achse und der Geraden durch O und P eingeschlossen wird, sei x.



Dann heißt die x_1-Koordinate von P der <u>Kosinus</u> von x ($\cos x$), die x_2-Koordinate heißt der <u>Sinus</u> von x ($\sin x$).

Der Winkel x kann im Gradmaß oder im Bogenmaß (Länge des Bogens von $(1|0)$ bis P) gemessen werden, es gilt:

$$\frac{\text{Gradmaß}}{360°} = \frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}$$

So lassen sich die Funktionen cos und sin definieren:

$$\begin{aligned} \cos\colon \mathbb{R} &\to [-1;1] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

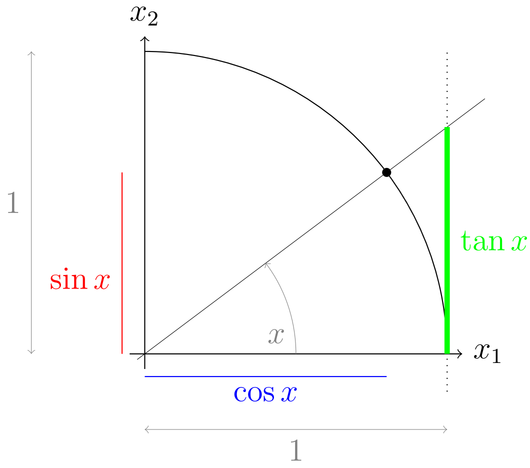
$$\begin{aligned} \sin\colon \mathbb{R} &\to [-1;1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

und weiter

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{(Tangens)} \qquad \text{und}$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{(Kotangens)}$$

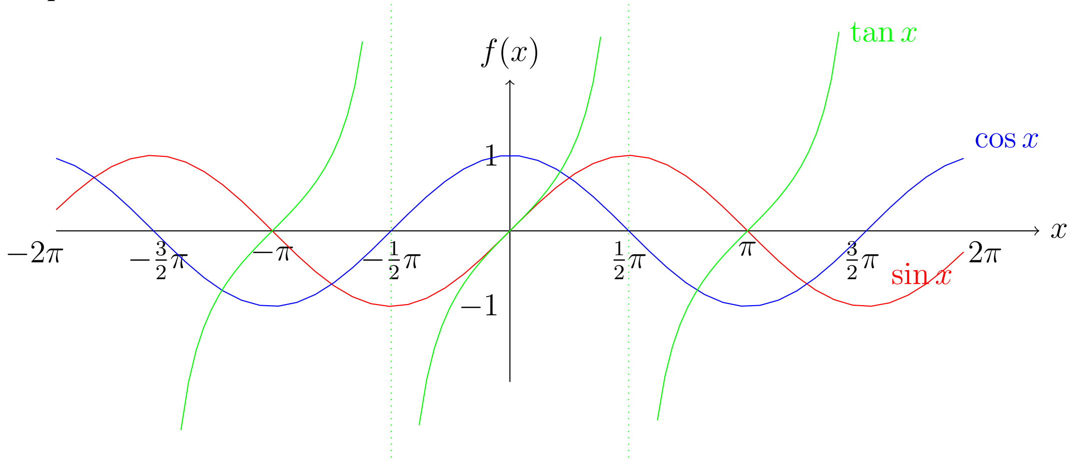
(Tangens und Kotangens sind jeweils nur dort definiert, wo der Nenner $\neq 0$ ist!)



Strahlensatz: $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\tan x}{1}$

Wertetabelle: s. PÜ 02

Graphen:



Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ (\sin x)^2 + (\cos x)^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{(Satz des Pythagoras)} \end{aligned}$$

Es gilt: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ (Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$).

sin und cos sind 2π-periodisch, d.h.

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x + 2\pi) \qquad \forall x \\ \cos x &= \cos(x + 2\pi) \qquad \forall x \end{aligned}$$

tan ist π-periodisch:

$$\tan x = \tan(x + \pi) \qquad \forall x \text{ aus Definitionsbereich}$$

2 Folgen

2.1 Definition: Folge

Definition

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in eine Menge M (oft $M \subset \mathbb{R}$).
Die a_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ heißen Glieder der Folge, n heißt Index.
(Bemerkung: Das 1. Glied der Folge muss nicht a_1 sein. durch Umbenennung, z.B. $b_1 := a_7, b_2 := a_8$, ist auch $(a_7, a_8, a_9, ...)$ eine Folge im sinne der Definition 2.1)

Schreibweisen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(a_n)_{n\geq n_0} \qquad \text{(z.B. } (a_n)_{n\geq 7}\text{) oder nur}$$
$$(a_n)$$

2.2 Beispiel

a) $a_n = c \qquad \forall n \geq 1, c \in \mathbb{R}$ konstant
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (c)_n \qquad (c, c, c, c, ...)$

b) $a_n = n \qquad (1, 2, 3, 4, ...)$

c) $a_n = (-1)^n \qquad (-1, 1, -1, 1, -1, ...)$

d) $a_n = \frac{1}{n} \qquad (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$

e) $a_n = [0, \frac{2}{n}) \qquad$ Folge von Intervallen

f) a_n rekursiv definiert:

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_{n+1} &:= (n+1)a_n \qquad (n \geq 1) \\ a_2 &= 2 \cdot a_1 = 2 \\ a_3 &= 3 \cdot a_2 = 6 \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 = 24 \end{aligned}$$

2.3 Definition: Eigenschaften von Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt

a) beschränkt, wenn die Menge der Folgenglieder beschränkt ist (s. Mathe 1), d.h. wenn es eine Zahl $K \geq 0$ gibt mit $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (d.h. alle Folgenglieder liegen im Intervall $[-K, K] \quad \forall n; \quad (-K \leq a_n \leq K)$).

b) alternierend, falls ihre Glieder abwechselnd positiv und negativ sind.

2.4 Beispiel

Beispiele aus 2.2:
beschränkt: a), c), d) [für c) und d) z.B. K=1]
alternierend: c)

2.5 Definition: Konvergenz

a) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn es zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt (das von ε abhängen darf), so dass gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.
(kurz: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N\colon |a_n - a| < \varepsilon$)

b) Die Zahl a heißt dann Grenzwert oder Limes der Folge, wir schreiben:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder
$a_n \to a$ für $n \to \infty$ (a_n strebt gegen a)

c) Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt Nullfolge.

d) Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt divergent (die Folge divergiert).

2.6 Bemerkung

$\rightarrow$ Folien 20.04.16

2.7 Beispiel

a) $a_n = \frac{1}{n}$ ist Nulfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = a = 0$, denn:
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle N als $N > \frac{1}{\varepsilon}$, denn damit gilt für alle a_n mit $n \geq N$:
$|a_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, da $n \geq N$ und $\frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon \Rightarrow |a_n - 0| < \varepsilon$.

(z.B. falls $\varepsilon = \frac{1}{10}$, wähle $N > 10$, z.B. $N = 11$; ab a_{11} haben alle Folgenglieder einen Abstand $< \frac{1}{10}$ von 0)

b) (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{3n}$. Behauptung: $a = \frac{1}{3}$.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann wähle $N > \frac{1}{3\varepsilon}$. Für alle a_n mit $n \geq N$ gilt dann:
$|a_n - a| = |\frac{n+1}{3n} - \frac{1}{3}| = |\frac{n+1-n}{3n}| = \frac{1}{3n} < \frac{1}{3N} < \varepsilon$. $\frac{1}{3N} < \varepsilon$ genau dann, wenn $N > \frac{1}{3\varepsilon}$.

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = c \quad \forall n$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist
$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq 1$, hier ist also $N = 1$, hängt nicht von ε ab, untypisch.

2.8 Bemerkung

N muss nicht optimal gewählt werden.
Beispiel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+n+5} = 0$, [...]
$|\frac{1}{n^3+n+5} - 0| = \frac{1}{n^3+n+5} \leq \frac{1}{N^3+N+5} \overset{!}{<} \varepsilon$. Für optimales N: $\frac{1}{N^3+N+5} < \varepsilon$ nach N auflösen, schwer.
Deshalb grob abschätzen, z.B. so:
$\frac{1}{N^3+N+5} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, also wähle $N > \frac{1}{\varepsilon}$.

2.9 Satz: Beschränktheit von Folgen

Jede konvergente folge ist beschränkt.

Beweis: (zu zeigen: (a_n) konvergente Folge: $\exists K \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen a.
dann existiert für alle $\varepsilon > 0$, also auch speziell für $\varepsilon = 1$, ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1 \quad \forall b \geq N$.
Also gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n| = |a_n + a - a| & \quad \leq |a_n - a| + |a| \\ \text{'Einschiebetrick'} & \quad \text{Dreiecksungleichung} \\ |a_n| & \quad < 1 + |a| \end{aligned}$$

(also für $n \geq N$ sind die $|a_n| < 1 + |a|$; aber für $n = 1, 2, 3, ..., N-1$?)
Definiere K als $K := \max\{|a_1|, |a_2|, |a_3|, ..., |a_{N-1}|, 1 + |a|\}$

Dann gilt $|a_n| \leq K \quad \forall n$.
(Anmerkung: Durch den vorletzten Schritt ist meist $K \in \mathbb{R}^+$.)

2.10 Bemerkung

Nach 2.9 gilt:
(a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt
Das ist äquivalent zu:
(a_n) ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) konvergiert nicht
(Kontraposition). Unbeschränkte Folgen sind also immer divergent.
Bsp. (a_n) mit $a_n = n$

2.11 Wichtiges Beispiel (geometrische Folgen)

Für $q \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, \text{ falls } |q| < 1 \\ 1, \text{ falls } |q| = 1 \end{cases}$
Die Folge $(q^n)_n \in \mathbb{N}$ divergiert, falls $q = -1$ oder $|q| > 1$.
Beweis:

1. Fall $|q| < 1$ (zu zeigen $q^n \to 0$ für $n \to \infty$)
   Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann ist

$$
\begin{aligned}
|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n &< \varepsilon \\
\Leftrightarrow n \cdot \ln|q| &< \ln\varepsilon \\
\Leftrightarrow n &\overset{\text{da}|q|<1}{\geq} \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}
\end{aligned}
$$

   Wähle $\mathbb{N} \ni N > \frac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, dann ist also $|q|^n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.

2. Fall $q = 1 \to$ konstante 1-Folge, konvergiert, s. 2.7 c)

3. Fall $|q| \geq 1, q \neq 1$
   Für $|q| > 1$ ist (q^n) unbeschränkt, also divergent (s. 2,9/2.10).
   Für $q = -1$: können wir erst später beweisen ($\to$ Cauchy-Folgen)

2.12 Beispiel

Nach 2.11 sind die Folgen $((\frac{1}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}, \quad ((-\frac{7}{8})^n)_n \in \mathbb{N}$ Nullfolgen.

2.13 Satz: Rechenregeln für konvergente Folgen

Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann gilt:

a) Die Folge $(c \cdot a_n)$ konvergiert gegen $c \cdot a, c \in \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(a_n \pm b_n)$ konvergiert gegen $a \pm b$.

c) Die Folge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $a \cdot b$.

d) Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergiert gegen $\frac{a}{b}$, falls $b_n, b \neq 0$ und $|a_n| \to |a|$.

Seien weiter $(d_n), (e_n)$ reelle Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$, dann gilt:

e) Ist (e_n) beschränkt, dann ist $(d_n \cdot e_n)$ auch eine Nullfolge.

f) Gilt $|e_n| \leq d_n \quad \forall n$, so ist (e_n) auch eine Nullfolge.

Beweis [exemplarisch für a) und b), Rest s. Moodle]:

a) Falls $c = 0$: klar, konstante 0-Folge.
Falls $c \neq 0$: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (denn $a_n \to a$)

Dann ist aber $|c \cdot a_n - c \cdot a| = |c \cdot (a_n - a)| = |c| \cdot \overbrace{|a_n - a|}^{<\frac{\varepsilon}{|c|}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N$, also $c \cdot a_n \to c \cdot a$

b) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig.
Dann $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1$ (denn $a_n \to a$)
und $\exists N_2 \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2$ (denn $b_n \to b$).
Dann gilt:

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |\overbrace{(a_n - a)}^{<\frac{\varepsilon}{2}} + \overbrace{(b_n - b)}^{<\frac{\varepsilon}{2}}| \overset{\triangle\text{-Ungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \geq N_1 \text{ und } N_2 \end{aligned}$$

(also z.B. für $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$).

Also gilt $(a_n + b_n) \to a + b$. $\square$

2.14 Beispiel

a) $\frac{(-1)^n+5}{n} \to 0$ für $n \to \infty$, denn $\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ und $(-1)^n+5$ ist beschränkt: $|(-1)^n + 5| \leq 6 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (nach 2.13 d)

b) $\frac{3n^2-2n+1}{-n^2+n} \to -3$ für $n \to \infty$, denn $\frac{3n^2-2n+1}{-n^2+n} = \frac{n^2\cdot(3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2\cdot(-1+\frac{1}{n})} = \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{-1+\frac{1}{n}} \quad \frac{\to 3 \text{ für } n\to\infty}{\to -1 \text{ für } n\to\infty} \longrightarrow \frac{3}{-1}$ für $n \to \infty$ (nach 2.13 b,d) [Nullfolgen]

c) Wichtiges Beispiel
Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$, d.h. $|x| = \frac{1}{1+t}$ mit $t > 0$.
Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty}(n^k \cdot x^n) = 0$, denn

$$(1+t)^n \overset{\text{Mathe 1: 7.17}}{\underset{\text{bin. Lehrsatz}}{=}} \sum_{j=0}^{n}[\binom{n}{j} \cdot 1^{n-j} \cdot t^j]$$

$$= \overbrace{1}^{j=0} + \overbrace{nt}^{j=1} + \overbrace{\frac{n\cdot(n-1)}{2!}t^2}^{j=2} + \overbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}t^3}^{j=3} + \ldots$$

$$\overset{\text{nur Term } j=k+1}{\geq} \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}t^{k+1} = \binom{n}{k+1}t^{k+1}$$

Damit gilt:

$$|n^k \cdot x^n| = |\frac{n^k}{(1+t)^n}| \leq \frac{n^k}{\binom{n}{k+1}t^{k+1}} = \frac{n^k}{n^{k+1}+\ldots} \to 0$$

für $n \to \infty$.
Es gilt also z.B. ($k = 10000, x = \frac{1}{2}$): $\frac{n^{10000}}{2^n} \to 0$ für $n \to \infty$
$\Rightarrow \overset{\text{Exponentialfkt.}}{(1+t)^n}$ wächst schneller als jede Potenz $\overset{\textit{Polynom}}{n^k}$!

2.15 Anmerkung (Landau-Symbole, $\mathcal{O}$-Notation)

(Informatik, VL Algorithmen)
Sei (a_n) eine strikt positive Folge, d.h. $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist

a) $\mathcal{O}(a_n) = \mathcal{O}((a_n)) = \{(b_n)|(\frac{b_n}{a_n})$ ist beschränkt $\}$ ("Menge aller Folgen, für die ... gilt")

b) $o(a_n) = \{(b_n)|\frac{b_n}{a_n}$ ist Nullfolge $\}$ ((a_n) wächst schneller als (b_n))

$\mathcal{O}, o$: Landau-Symbole

c) $(a_n) \sim (b_n)$, falls $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n})_n = 1$

Beispiel:

- $(2n^2 + 5n + 1)_n \in \mathcal{O}(n^2)$, denn $(\frac{2n^2+5n+1}{n^2}) = \frac{n^2\cdot(2+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2})}{n^2} \to 2$ für $n \to \infty$, beschränkt
- $(n^2) \in o(n^3)$
- $(n^3) \in o(2^n)$
- $(n^3 - 3) \sim (n^3)$, denn $(\frac{n^3}{n^3-3}) = (\frac{n^3\cdot(1)}{n^3\cdot(1-\frac{3}{n^3})}) \to 1$ für $n \to \infty$
- häufig auch laxe Schreibweise

$$\begin{aligned} 2n^2 + 5n + 1 &= \mathcal{O}(n^2) \\ n^2 &= o(n^3) \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(1) = &\ \text{Menge der beschränkten Folgen} \\ o(1) = &\ \text{Menge der Nullfolgen} \end{aligned}$$

Wichtige Formel: <u>Stirling</u>: $(n!) \sim (\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{\mathrm{e}})^n)$

Problem: Wie zeigt man die Konvergenz einer Folge, wenn man den Grenzwert nicht kennt?

2.16 Definition

Eine Folge reeller Zahle $(a_n)_n$ heißt

a) <u>(streng) monoton steigend/wachsend</u>, falls $a_{n+1} \overset{>}{\geq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, Schreibweise: $(a_n) \nearrow$

b) <u>(streng) monoton fallend</u> $(a_n) \searrow$, falls $a_{n+1} \overset{<}{\leq} a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

c) <u>monoton</u>, falls a) oder b) gilt (oder beides)

2.17 Beispiel

- $(a_n) = (\frac{1}{n})$ ist streng monoton fallend
- $(a_n) = (1)$ ist monoton fallend und monoton steigend
- $(a_n) = ((-1)^n)$ ist nicht monoton

2.18 Bemerkung

$(a_n) \nearrow$ zeigt man so:

$$a_{n-1} - a_n \geq 0 \quad \text{oder}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

2.19 Satz (Monotone Konvergenz)

Jede beschränkte, monotone Folge reeller Zahlen $(a_n)_n$ konvergiert, und zwar gegen

- $\sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton steigend oder gegen
- $\inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, falls (a_n) monoton fallend ist.

Beweis:

Sei $(a_n) \nearrow$ und beschränkt.

$$\Rightarrow \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \quad \text{ist beschränkt}$$
$$\overset{\substack{\text{Vollst.-Axiom} \\ \text{Mathe 1, 8.16}}}{\Rightarrow} S \coloneqq \sup\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} \quad \text{existiert.}$$

Wir zeigen: $a_n \to S$ für $n \to \infty$.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zu zeigen ist $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - S| < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.
Es gilt $a_n \leq S \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also zu zeigen: $S - a_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N$.
S ist <u>kleinste</u> obere Schranke, d.h. $S - \varepsilon$ ist <u>keine</u> obere Schranke

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad a_n > S - \varepsilon \quad \forall n \geq N$$
$$\Rightarrow S - a_n < \varepsilon \qquad \forall n \geq N$$

$(a_n) \searrow$ analog $\square$

2.20 Beispiel

a) $x \in \mathbb{R}^+$, dann $(x^n) \in o(n!) \qquad (x^n = o(n!))$, d.h. $a_n = \frac{x^n}{n!} \to 0$ für $n \to \infty$

- $a_n > 0$
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot x^n} = \frac{x}{n+1} \leq 1$ für $n + 1 \geq x$, also gilt $a_{n+1} \leq a_n$, d.h. $(a_n) \searrow$ und (a_n) ist beschränkt
- $\inf\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\} = 0$

b) wichtige Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((a + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \mathrm{e} \qquad \text{(Eulersche Zahl, e} = 2,71828...)$$

Warum existiert dieser Limes?
Zeige: $(a_n) \nearrow$ und (a_n) beschränkt, benutze Satz 2.19

– $(a_n) \nearrow$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\frac{1+n}{n})^n \cdot (\frac{n-1}{n})^{n-1} = (\frac{n+1}{n})^n \cdot (\frac{n-1}{n})^n \cdot (\frac{n-1}{n})^{-1} \geq 1$$
$$= (\frac{n^2-1}{n^2})^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq 1$$
$$= (1 - \frac{1}{n^2})^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq 1$$

Benutze die Bernoulli-Ungleichung, für $h \in \mathbb{R}$, $\quad n \in \mathbb{N}$ gilt $(1+h)^n \geq 1 + nh$ für $h \geq -1$ (hier: $h = -\frac{1}{n^2}$)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = (1 - \frac{1}{n^2})^n \cdot \frac{n}{n-1} \geq (1 - n \cdot \frac{1}{n^2}) \cdot \frac{n}{n-1}$$
$$= (1 - \frac{1}{n}) \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \qquad ,$$

also $(a_n) \nearrow$

– (a_n) beschränkt: Übung, benutze wieder Bernoulli

2.21 Satz (Intervallschachtelungsprinzip)

Seien (a_n), $\quad (b_n)$ reelle Folgen mit

- $(a_n) \nearrow$ (= linke Intervallgrenze)
- $(b_n) \searrow$ (= rechte Intervallgrenze)
- $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $b_n - a_n \to 0$ für $n \to \infty$

Dann sind beide Folgen konvergent und besitzen denselben Limes.

Beweis:

(a_n), $\quad (b_n)$ konvergent nach Satz 2.19, denn

- $(a_n) \nearrow$; (a_n) beschränkt, da $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also gilt auch $a_n \leq b$ (alle anderen b_n sind noch kleiner)
- $(b_n) \searrow$; (b_n) beschränkt, da $b_n \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, also $b_n \geq a_n \geq a_1$
- Da $(b_n) - (a_n)$ Nulfolge ist, sind auch die Grenzwerte gleich.

$\square$

2.22 Beispiel (vgl. Beispiel 2.20 b))

$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$
Man kann zeigen: $(a_n) \nearrow$, $(b_n) \searrow$
$a_n \leq b_n$, $b_n - a_n \to 0$, also $\exists \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$

Ähnlich zeigt man $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ existiert $\forall x \in \mathbb{R}$
So definiert man $\mathrm{e}^x := \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$

<u>Bisher:</u>
(a_n) konvergiert $\Rightarrow$ (a_n) beschränkt, Umkehrung gilt nicht; z.B. $((-1)^n)$
Allerdings besitzt diese Folge zwei konvergente Teilfolgen mit $\lim = +1$ und $\lim = -1$.

2.23 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ $(n_1, n_2, ...)$ eine streng monoton steigende Folge von Indizes (d.h. $n_1 < n_2 < n_3 < ...$).
Dann heißt die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ <u>Teilfolge</u> von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ("Teilfolgen entstehen durch Streichung von Gliedern").

2.24 Beispiel

$$\begin{aligned}(a_n) &= ((-1)^n)\\ n_k &:= 2n \quad \text{ergibt } (n_1 = 2;\ n_2 = 4\ n_3 = 6)\\ a_n &= 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{(Teilfolge 1,1,1,1...)}\\ n_k &:= 2n-1 \quad \text{ergibt (Teilfolge -1,-1,-1,...)}\\ a_{2n-1} &= -1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

2.25 Bemerkung

Es gilt: (a_n) konvergiert gegen $a \Rightarrow$ jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a.

2.26 Definition

Sei (a_n) eine reelle Folge. Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_N) gibt, die gegen h konvergiert.

2.27 Beispiel

- $(a_n) = ((-1)^n + \frac{1}{n})$ besitzt zwei Häufungspunkte -1 und 1
- $(a_n) = ((-1)^n)$ besitzt die Häufungspunkte -1 und 1

2.28 Satz (Satz von Bolzano-Weierstraß)

Sei (a_n) eine reelle Folge. Dann gilt:

$$(a_n) \text{ beschränkt } \Rightarrow (a_n) \text{ besitzt eine konvergente Teilfolge}$$

Beweis: Intervallschachtelungsprinzip/Bisektionsverfahren
(s. Folien/Blatt[$\leftarrow$s.u.])
Wir verwenden das Intervallschachtelungsprinzip (Satz 2.21). Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, es existiert also ein $K \in \mathbb{N}$, so dass alle Folgeglieder im Intervall $[-K, K] =: [A_0, B_0]$ liegen. Halbiere dieses Intervall:

- Falls in der ersten Hälfte des Intervalls unendlich viele Folgenglieder liegen: wähle eines davon aus.
- Falls nicht (also falls nur endlich viele Folgenglieder in der ersten Hälfte des Intervalls liegen), dann liegen in der zweiten Hälfte unendlich viele Folgenglieder. Wähle davon eines aus.

Das ausgewählte Folgenglied nennen wir a_{n1}, die Intervallhälfte, aus der es stammt, nennen wir $[A_1, B_1]$. Fahre nun so fort: Halbiere $[A_1, B_1]$, wähle wie oben a_{n2} aus, erhalte damit das Intervall $[A_2, B_2]$, usw. So erhalten wir eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Für die Intervalgrenzen von $[A_k, B_k]$ gilt:

- $A_k \leq a_{n_k} \leq B_k$
- $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \nearrow, \qquad (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \searrow$
- $A_k \leq B_k$
- $B_k - A_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Damit sind alle Voraussetzungen für Satz 2.21 (Intervallschachtelungsprinzip) erfüllt. Die Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind also konvergent und besitzen denselben Limes a. Damit gilt auch $a_{n_k} \to a$ für $k \to \infty$. $\square$

2.29 Bemerkung/Definition

Sei (a_n) reell und beschränkt, dann gibt es einen größten und einen kleinsten Häufungspunkt, den

- Limes superior von (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ oder $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ bzw. den
- Limes inferior von (a_n): $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ oder $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

Weiter setzt man

- $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \begin{cases} \infty, \text{ wenn } (a_n) \text{ nicht nach oben beschränkt ist} \\ -\infty, \text{ wenn } (a_n) \to -\infty \text{ gilt, d.h. } \forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon a_n \leq -K \quad \forall n \geq N \end{cases}$
- $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n := \begin{cases} -\infty, \text{ wenn } (a_n) \text{ nicht nach unten beschränkt ist} \\ \infty, \text{ wenn } (a_n) \to \infty \text{ gilt, d.h. } \forall K > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}\colon a_n \geq K \quad \forall n \geq N \end{cases}$

Achtung: $-\infty, \infty$ sind keine reellen Zahlen!
Man erweitert hier $\mathbb{R}$ um zwei ideelle Elemente $-\infty, \infty$, setzt $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ (Abschluss von $\mathbb{R}$) und erweitert die Ordnungsstruktur auf $\mathbb{R}$ durch
$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Mit dieser Festlegung besitzt jede reelle Zahlenfolge sowohl lim sup als auch lim inf.
Beispiel:

a) $a_n = \frac{n+1}{n} \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1$

b) $a_n = (-1)^n \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = 1 \qquad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -1$

c) $a_n = (-1)^n \cdot n \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \infty \qquad \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = -\infty$

d) $a_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$: Übung

2.30 Definition (Cauchyfolge)

Eine Folge (a_n) heißt <u>Cauchyfolge</u>, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N$
(kurz: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq N \colon |a_n - a_m| < \varepsilon$) mit $|a_n - a_m|$... Abstand zweier Folgenglieder

2.31 Satz (Cauchykriterium)

Eine Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

$$(a_n) \text{ konvergiert } \Leftrightarrow (a_n) \text{ ist eine Cauchyfolge}$$

Beweisskizze (ausführlicher Beweis: s. Moodle):

- "$\Rightarrow$": Einschiebetrick, Dreiecksungleichung verwenden
- "$\Leftarrow$": Idee: (a_n) ist Cauchyfolge (zu zeigen: konvergent)
  zeige: (a_n) ist beschränkt
  $\Rightarrow$ 2.28 $\exists$ konvergente Teilfolge
  zeige: Limes der Teilfolge ist Limes der Folge

2.32 Anwendung (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine Abbildung mit
$$\underbrace{|f(x) - f(y)|}_{\text{Abstand der Bildpunkte}} < \underbrace{|x-y|}_{\text{Abstand von 2 Punkten}} \qquad \forall x, y \in [a,b]$$
("f ist strikte Kontraktion")
Dann hat f genau einen Fixpunkt, d.h.
$$\underbrace{\exists!}_{\text{es gibt genau ein...}} \quad r \in [a,b] \text{ mit } f(r) = r$$

Beweisidee:
Starte mit beliebigem $x_0 \in [a,b]$.
Berechne x_1 als $f(x_0) \qquad x_1 := f(x_0)$
x_2 als $f(x_1) \qquad x_2 := f(x_1)$

also $x_{n+1} \coloneqq f(x_n)$

Zeige: Diese Folge konvergiert (Cauchyfolge), und zwar gegen $r = f(r)$; r ist eindeutig (Annahme: es existieren 2 verschiedene r)

3 Reihen

3.1 Definition

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.
Summiere die ersten n Folgeglieder.

$$S \coloneqq \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)$$

($\underline{n\text{-te Partialsumme}}$)

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{S_1} + a_2}_{S_2} + a_3}_{S_3} + ... + a_n}_{S_n}$$

Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_1, S_2, S_3, ...)$ heißt unendliche Reihe, schreibe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
Falls $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $s \in \mathbb{R}$ konvergiert, heißt die Reihe konvergent gegen s und ihr Grenzwert wird dann ebenfalls mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet.
(Entsprechend kann man für eine Folge $(a_n)_{n\geq n_0}$ die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ definieren)

3.2 Beispiel

a) $\sum_{k=1}^{\infty} k = 1 + 2 + 3 + ...$ divergente Folge

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = (-1) + 1 + (-1) + ...$ divergente Folge

$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 0, \text{ falls } n \text{ gerade} \\ -1, \text{ falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

c) Die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... \qquad \text{divergiert}$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + ... + \frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + ... + \frac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}} + \underbrace{... + \frac{1}{n}}_{\text{usw.}}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ...$$

$\Rightarrow$ divergent (per Induktion: $S_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}$)

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ ist konvergent gegen den Grenzwert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$

e) wichtiges Beispiel: Geometrische Reihe
Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{, denn:}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{(Übung: geom. Summe, Induktion)}$$

Aus 2.11:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad \text{, falls } |q| < 1$$

Geometrische Folge. Also gilt:

$$S_n \to \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q} \qquad \text{für } n \to \infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad \text{divergiert für } |q| \geq 1$$

Nochmal Beispiel d)
$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$, also geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$ $\quad 1 > |q|$, konvergiert gegen $\frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

Weitere Beispiele:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^k = \frac{2}{3}$
- $\sum_{k=3}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+3} = q^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^3}{1-q}$ $\quad$ (falls $|q| < 1$)

3.3 Rechenregeln für Reihen

folgen aus den Rechenregeln für Folgen. Sei

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert gegen a,
- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert gegen b.

Dann gilt mit $c \in \mathbb{R}$:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ konvergiert gegen $a + b$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k)$ konvergiert gegen $c \cdot a$

3.4 Konvergenz-/Divergenzkriterien für Reihen

$\boxed{1}$ Ist S_n mit $S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ beschränkt und $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent (folgt aus Satz 2.19/monotone Konvergenz).

$\boxed{2}$ Cauchy-Kriterium
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}$, so dass $\forall m > n \geq N$ gilt: $|a_{n+1} + ... + a_m| = |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$
$|S_m - S_n|$
(folgt aus 2.31/Cauchykriterium für Folgen)
Daraus ergibt sich:
Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist $(a_n)_n$ Nullfolge (wähle $m = n+1$, dann $|a_{n+1}| < \varepsilon$, d.h. $a_n \to 0$).
$\Rightarrow$[3]

$\boxed{3}$ Divergenzkriterium
Ist $(a_n)_n$ keine Nullfolge, so ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.
Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(1 + \frac{1}{k})}_{\to 1 \text{ für } k \to \infty, \text{ keine Nullfolge!}}$ divergiert

$\boxed{4}$ Majorantenkriterium
Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $|a_n| \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (für fast alle n, d.h. für alle bis auf endlich viele)
Dann gilt:
Ist $\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k}_{\text{Majorante}}$ konvergent, dann auch $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

Beweis:

$$\begin{aligned} |\sum_{k=n+1}^{m} a_k| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k \\ &\leq |\sum_{k=n+1}^{m} b_k| < \varepsilon \text{ , da } \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent,} \end{aligned}$$

also ist Cauchykriterium [2] für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ erfüllt, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert.
Ähnlich: Minorantenkriterium für Divergenz, s. Blatt 5.

$\boxed{5}$ Leibnitzkriterium für alternierende Reihen
Sei $(a_n)_n$ reelle, monoton fallende Nullfolge mit $a_n \geq 0 \quad \forall n$.
Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$

Beweis: Intervallschachtelungsprinzip

$$A_n := \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k \cdot a_k$$
$$B_n := \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \cdot a_k$$

- $A_n \nearrow$, denn

$$\begin{aligned} A_{n1} - A_n &= \sum_{k=0}^{\overbrace{2(n+1)-1}^{2n+1}} (-1)^k \cdot a_k - \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k \cdot a_k \\ &= (-1)^{2n+1}a_{2n+1} + (-1)^{2n}a_{2n} \qquad = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0 \end{aligned}$$

  (da $(a_n) \searrow$)
- ähnlich für $B_n \searrow$
- $B_n - A_n = (-1)^{2n}a_{2n} = a_{2n} \geq 0 \quad \longrightarrow 0$ für $n \to \infty$ (weil $(a_n)_n$ Nullfolge nach Voraussetzung)
  $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$, also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$

Bsp:

a) Leibnitz-Reihe:

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... - ... \\ =&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1} \end{aligned}$$

konvergiert gegen $\frac{\pi}{4}$

b) Die alternierende harmonische Reihe

$$\begin{aligned} &1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - ... + ... \\ =&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

konvergiert gegen $\ln 2$

$\boxed{6}$ Absolute Konvergenz

Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls die Betragsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiel

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}$ konvergiert absolut, da $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k^2}| = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{\text{s. } \boxed{6a}}$ konvergiert

b) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert nicht absolut (aber konvergiert, s. Leibnitzkriterium), da $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (harmonische Reihe, konvergiert nicht)

Es gilt: Reihe konvergiert absolut $\overset{\text{(Majorantenkriterium)}}{\Rightarrow}$ Reihe konvergiert
(aber nicht umgekehrt, s. Beispiel b))

$\boxed{6a}$ Wurzelkriterium
Für $a_k \in \mathbb{R}$ gilt:

- falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert (d.h. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut)
- falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert
- für $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_k|} = 1$ ist keine allgemeine Aussage möglich

Beweis:
Sei $s := \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

- falls $s < 1$: Wähle kleines $\varepsilon > 0$, so dass $s + \varepsilon < 1$
  $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq s + \varepsilon$ für fast alle n
  $\Rightarrow |a_n| \leq (s+\varepsilon)^n$
  Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(s+\varepsilon)}_{<1}{}^n$ ist geometrische Reihe und konvergiert, und ist Majorante für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$

- falls $s > 1$, dann ist $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ für unendlich viele n, also $a_n \nrightarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ divergent nach $\boxed{3}$
- z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ (allgemeine harmonische Reihe) mit $\alpha \geq 1$ liefert $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, aber es gilt (Mitteilung):
  für $\alpha = 1$ ist Reihe divergent (für $0 < \alpha < 1$ ebenso, Blatt 5 Aufgabe 2);
  für $\alpha > 1$ ist Reihe konvergent
  Das Wurzelkriterium kann diese Fälle nicht unterscheiden.

$\boxed{6b}$ <u>Quotientenkriterium</u>
Sei $a_n \neq 0$ für fast alle k (d.h. für alle bis auf endlich viele)

- falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert
- falls $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergiert
- falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq 1$, so ist keine allgemeine Aussage möglich (wie bei $\boxed{6a}$, dritter Punkt)

Beweis: ähnlich wie $\boxed{6a}$

3.5 Bemerkung

Umordnung einer Reihe, Konvergenzverhalten
$\rightarrow$ s. Folien 11.05.2016

4 Potenzreihen

4.1 Definition

Sei $(a_k)_k$ eine reelle Folge, $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Reihe

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot x^k$$

Potenzreihe mit Koeffizientenfolge $(a_k)_k$ (oft auch $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x-b)^k$, $b \in \mathbb{R}$ heißt Entwicklungspunkt).
Falls $a_k \neq 0$ für nur endlich viele (d.h. $a_k = 0$ für fast alle k), dann heißt $P(x)$ Polynom.
(Unterschied zu bisherigen Reihen: abhängig von x. Für welche Werte von x konvergiert $P(x)$? Klar: für $x = 0$, dann $P(0) = a_0 \cdot 0^0 = a_0$, auch für andere x? Das hängt von der Folge a_k ab)

4.2 Beispiel

a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot x^k \qquad (a_k = 1 \quad \forall k, \quad b = 0)$ konvergiert für alle x mit $|x| < 1$ (geometrische Reihe!), also für $x \in \underbrace{(-1,1)}_{\text{Konvergenzintervall}}$, sonst divergiert sie (z.B. für $x = 2, \quad x = 3, \quad ...$)

b) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot x^k$ (d.h. $a_k = 2^k \quad \forall k$) $= \sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k$ wie in a), konvergiert für alle x mit $|2x| < 1$, also $|x| < \frac{1}{2}$; also für $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

4.3 definition (Formel von Cauchy-Hadamard)

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe.

$$\rho := \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

heißt der Konvergenzradius von $P(x)$ (dabei sei $\frac{1}{0} := +\infty$ und $\frac{1}{\infty} := 0$ gesetzt, es ist also $\rho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Zur Bedeutung von $\rho = \infty$ siehe 4.4.
Oft einfacher: Formel von Euler:

$$\rho = \lim_{\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \qquad ,$$

falls $(|\frac{a_n}{a_{n+1}}|)$ konvergente Folge ist oder "bestimmt gegen ∞ divergiert", d.h. falls $\forall K > 0 \quad \exists N$ mit $|\frac{a_n}{a_{n+1}}| \geq K \quad \forall n \geq N$, dann setze $\rho = +\infty$.

(Achtung: z.B. für $a_n = \begin{cases} 1 & \text{, n gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{, n ungerade} \end{cases}$ ist diese Formel nicht anwendbar!)

4.4 Satz (Konvergenz von Potenzreihen)

Sei $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ. Dann gilt:

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \rho$ konvergiert $P(x)$ absolut (d.h. Reihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$, die im Konvergenzintervall $(-\rho, \rho)$ liegen.
Ist $\rho = \infty$, so heißt das für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$!).

b) Für alle x mit $|x| > \rho$ divergiert $P(x)$.

c) Für $|x| = \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich (Konvergenzintervall kann also $(-\rho, \rho)$, $[-\rho, \rho]$, $[-\rho, \rho)$, $(-\rho, \rho]$ sein).

<u>Beweis:</u>

a) Nach dem Wurzelkriterium 3.4 $\boxed{\text{6a}}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k x^k|$ konvergent, falls $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$ gilt. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} |x| \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} &< 1 \\ \Leftrightarrow |x| &< \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}} = \rho \end{aligned}$$

b) analog

c) Übung (Beispiel suchen) $\square$

Mit dem Quotientenkriterium 3.4 $\boxed{\text{6b}}$ lässt sich der Satz auch für die Formel von Euler für ρ beweisen.

4.5 Bemerkung

Ist ρ Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, so konvergiert die Reihe absolut für $|x| < \rho$ (für $x \in (-\rho, \rho)$), divergiert für $|x| > \rho$.
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ konvergiert dann absolut für $|x-b| < \rho$ (für $x \in (b-\rho, b+\rho)$); divergiert für $|x-b| > \rho$. Für $x = b - \rho$, $x = b + \rho$ ist keine allgemeine Aussage möglich.
(Also: Falls b dabei: erst alles ohne b rechnen (4.3,4.4), dann Bemerkung 4.5 verwenden)

4.6 Beispiel

a) Bsp. 4.2 mit der Formel für ρ nachrechnen (Präsenzübungsblatt 6)

b) wichtiges Beispiel: die Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{x!} \qquad (a_k = \frac{1}{k!}, \quad b = 0)$$
$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

hat Konvergenzradius $\rho = \infty$ nach Euler, d.h. Reihe konvergiert für <u>alle</u> $x \in \mathbb{R}$, deshalb kann man für $x \in \mathbb{R}$ die folgende Funktion definieren (Exponentialfunktion):

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Es gilt (vgl. Präsenzübungsblatt 6) (Cauchyprodukt):
$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \qquad x, y \in \mathbb{R}$
Für $x = 1$ erhält man
$\exp(1) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$
Man kann zeigen: Dies ist e (Eulersche Zahl) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.
Allgemein gilt: Die Folge $((1 + \frac{x}{n})^n)_n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $\exp(x) = \sum_{k=0}^{n\to\infty} \frac{x^k}{k!}$
Daher schreibt man auch
$\mathrm{e}^x = \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$

5 Funktionsgrenzwerte und Stetigkeit

5.1 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0, a \in \mathbb{R}$.

a) f heißt <u>konvergent gegen a für x gegen x_0</u>, wenn gilt:
Für <u>alle</u> Folgen $\underbrace{(x_n)_n \text{ aus } D \setminus \{x_0\}}_{\text{d.h. Glieder der Folge sind alle aus } D\setminus\{x_0\}}$, die gegen x_0 konvergieren, konvergieren die Funktionswerte $f(x_n) \to a$, also $f(x_n) \to a$ für $x_n \to x_0$ (Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$).

b) Analog lässt sich der Grenzwert für $x \to \infty$ oder für $x \to -\infty$ definieren:
f konvergiert gegen a für $\begin{matrix} x \to \infty \\ x \to -\infty \end{matrix}$ falls für alle Folgen $(x_n)_n$ mit $\underbrace{\begin{matrix} x_n \to \infty \\ x_n \to -\infty \end{matrix}}_{\text{d.h. } \forall k \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N}\colon x_n > k \forall n \geq N}$
gilt: $f(x_n) \to a$ ($\lim\limits_{x \to \infty} = a$ bzw. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$)

5.2 Beispiel

zu a)

$$f\colon D = \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R}$$
$$x \to x^2$$

Was ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$?
Sei $(x_n)_n$ Folge mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Nach den Rechenregeln für Folgen (Satz 2.13) gilt:
$f(x_n) = x_n^2 \to x_0^2$ (Voraussetzung $x_n \to x_0$, aus Rechenregeln $x_n^2 \to x_0^2$), also ist $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0^2 =: a$
(Bemerkung: allgemein gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ für alle Polynome)

zu b)

$$f\colon (0, \infty) = \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

Was ist $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$?
Für alle $(x_n)_n$ mit $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt:
$f(x_n) = \frac{1}{x_n} \to 0$, also $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

5.3 Bemerkung/Definition

Definition 5.1 ist nur interessant für die Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$, für die es Folgen $(x_n)_n$ aus $D \setminus \{x_0\}$ gibt, die gegen x_0 konvergieren.
Solche Punkte nennt man Häufungsstellen (HS) von D.
$\overline{D} := D \cup \{x | x \text{ ist HS von } D\}$ heißt Abschluss von D.
Beispiel:

a) $D = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$
   -1 keine HS von D
   1 ist HS von D
   0 ist HS von D

b) $D = \mathbb{R}^+ \cup \{-2\}$
   -2 keine HS von D, aber $-2 \in D$, $-2 \in \overline{D}$

c) $D = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, dann sind a und b HS;
   $\overline{D} = [a, b]$

d) Es gilt: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

5.4 Bemerkung/Definition

In Definition 5.1 muss $f(x_n) \to a$ für alle Folgen $(x_n)_n$ aus $D \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergieren, gelten; also insbesondere für Folgen, die von links ($x_n \to x_0$ mit $x_n < x_0 \forall n$) und für Folgen, die von rechts ($x_n \to x_0$ mit $x_n > x_0 \forall n$) gegen x_0 konvergieren (falls möglich).

Man spricht vom links- bzw. rechtsseitigen Grenzwert. Schreibweise:

links:	rechts:
$\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = a$	$\lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = a$
oder	oder
$\lim\limits_{x \to x_0 -}$	$\lim\limits_{x \to x_0 +}$

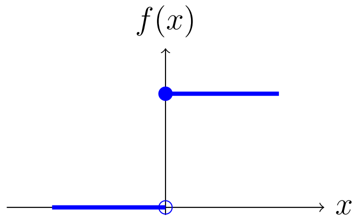
5.5 Beispiel

a) – $D = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$
   Folge aus $D \setminus \{x_0\}$, die von rechts [links] gegen x_0 konvergiert ist z.B.
   $(x_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ $\quad$ $[(x_n)_n = (\frac{-1}{n})_n]$

- $D = [0, \infty]$, $x_0 = 0$
  Nur Folgen, die von rechts gegen x_0 konvergieren, sind möglich (sonst nicht in D)

b) Heavisidefunktion (Schwellenwertfunktion)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x \geq 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = ?$

- für $(x_n)_n = (\frac{1}{n})_n$ gilt $f(x_n) = f(\frac{1}{n}) = 1 \to 1$
- für $(x_n)_n = (-\frac{1}{n})_n$ gilt $f(x_n) = f(-\frac{1}{n}) = 0 \to 0$

Also gibt es kein a, so dass alle Folgen mit $x_n \to x_0$ die Bedingung $f(x_n) \to a$ erfüllen.
$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert hier nicht!

5.6 Bemerkung/Definition

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in \overline{D}$.
Falls für alle Folgen $(x_n)_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt:

$$f(x_n) \to \pm\infty \qquad ,$$

so sagt man, f divergiert bestimmt gegen $\pm\infty$ für $x \to x_0$ (analog für $x \to \pm\infty$).

Beispiel:

$$f\colon D \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

- falls $D = (0, \infty)$:
  $f(x)$ divergiert bestimmt gegen ∞ für $x \to 0$
- falls $D = (-\infty, 0)$:
  $f(x)$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$ für $x \to 0$
- falls $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$:
  dann existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht und $f(x)$ divergiert auch nicht bestimmt.

5.7 Definition (Stetigkeit)

Sei $f(x)$ eine reelle Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$.
Die Funktion heißt stetig an der Stelle $x_0 \in D$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
Die Funktion heißt (überall) stetig in D, falls $f(x)$ in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.

5.8 Bemerkung

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$.

a) Äquivalente Definition der Stetigkeit: ε-δ-Kriterium, siehe z.B. WHK 6.17:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D\colon |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$$

b) Gibt es eine Konstante K mit

$$|f(x) - f(x_0)| \le K \cdot |x - x_0| \quad \forall x \in D \qquad ,$$

dann ist die Funktion stetig.

5.9 Beispiel

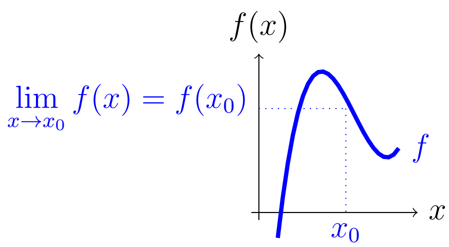
a)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert [vgl. Bsp. 5.2 a)] und ist gleich $f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$)

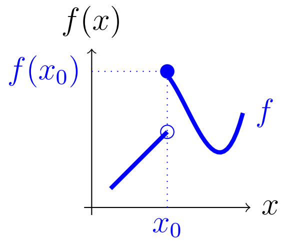
b) (1) Bild:

$f(x)$ ist stetig in x_0



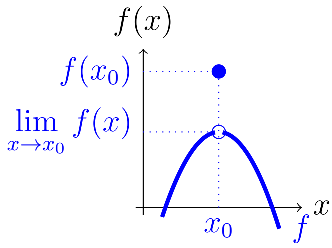
(2) Bild:

$f(x)$ ist nicht stetig in x_0:
$\lim\limits_{x \to x_0}$ existiert nicht!



(3) Bild:

$f(x)$ ist nicht stetig in x_0:
$\lim\limits_{x \to x_0}$ existiert, ist aber ungleich $f(x_0)$.



c)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

ist stetig auf $\mathbb{R}$

5.10 Bemerkung

Eine Funktion $f(x)$ ist stetig, falls der Graph von f keine 'Sprungstelle' hat bzw. "man f ohne abzusetzen zeichnen kann".
$\Rightarrow$ in Ordnung für Intuition, aber unpräzise

<u>Beispiel dazu:</u>

a)

$$\begin{aligned} f\colon D = \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Die Funktion ist stetig auf D, weil die 0 ausgenommen wurde.

b) Dirichlet-Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion ist unstetig in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$.

c) Thomaesche Funktion
Die Funktion ist stetig in jedem $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $[0,1]$
und unstetig in jedem $x_0 \in \mathbb{Q}$ in $[0,1]$.

5.11 Satz (Rechenregeln für stetige Funktionen)

a) Seien $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $c \in \mathbb{R}$. Dann sind auch

- $c \cdot f$
- $f + g$
- $f - g$
- $f \cdot g$
- $\frac{f}{g}$ (für $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$)

stetig in x_0.

b) Die Komposition zweier stetiger Funktionen ist stetig.

$$\begin{aligned} D, D' &\subseteq \mathbb{R} \\ f\colon D &\to \mathbb{R} \\ g\colon D' &\to \mathbb{R} \\ f(D) &\subseteq D' \\ f, g &\text{ stetig} \\ &\Rightarrow \\ (g \circ f)\colon D &\to \mathbb{R} \text{ ist stetig} \end{aligned}$$

Beweis folgt direkt aus Def. 5.1, 5.7 und den Rechenregeln für Folgen 2.13.

5.12 Bemerkung

Es gilt: $D \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f\colon D \to f(D)$ bijektiv, stetig.
Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon f(D) \to D$ stetig.

5.13 Bemerkung

Man kann zeigen (u.a. mit 5.11), dass

a) Potenzreihen mit Konvergenzradius ρ sind stetig für alle x mit $|x| < \rho$.

b) Polynome, Exponentialfunktionen, Logarithmen, Wurzelfunktionen sind stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

c) $\sin(x), \cos(x), \tan(x), \cot(x)$ ebenso (vgl. PÜ 7*).

5.14 Bemerkung/Definition (Rationale Funktionen)

$$\begin{aligned} f\colon D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

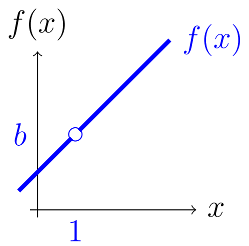
sei rationale Funktion mit $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} | q(x) = 0\}$.
Dann ist f stetig auf ganz D.
Lässt sich f auf ganz $\mathbb{R}$ definieren ("fortsetzen"), so dass man eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion erhält?
Beispiel:

a)

$$\begin{aligned} f\colon D = \mathbb{R} \setminus \{1\} &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

ist stetig auf D.
Setze f auf $\mathbb{R}$ fort.

$$\begin{aligned} \tilde{f}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \tilde{f}(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{falls } x \neq 1 \\ b & \text{falls } x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$



$\tilde{f}$ ist stetig in $x_0 = 1$ genau dann, wenn $b = 2$ gewählt wird,
denn $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.
$x_0 = 1$ ist eine (stetig) hebbare Definitionslücke von f
Allgemein:
Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, es existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) =: r \quad r \in \mathbb{R}$, dann ist x_0 stetig

hebbare Definitionslücke von f, die Funktion

$$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0 \\ r & \text{für } x = x_0 \end{cases}$$

ist dann die stetige Fortsetzung von f auf $\mathbb{R}$.

b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{(x^2-1)(x-1)}{(x-1)}$
Definitionslücke $x_0 = 1$ hebbar durch $0 = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$,
$\tilde{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ stetig.

c) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$
Definitionslücke $x_0 = 1$ nicht hebbar: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existiert nicht

d) Gilt für die Nullstelle x_0 des Nenners einer rationalen Funktion $f(x) \to \pm\infty$ für $x \to x_0\mp$, so nennt man x_0 Polstelle.
Z.B. $f, g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$
$x_0 = 0$

- $f(x) \to \infty$ für $x \to 0+$
- $f(x) \to -\infty$ für $x \to 0-$
- $g(x) \to \infty$ für $x \to 0+$ und $x \to 0-$

e) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ hat bei $x_0 = 0$ Oszillationsstelle:

- für $(x_n)_n = (\frac{1}{n\pi})_n$ ist $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0 \to 0$
- für $(x_n)_n = (\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n})_n$ ist $f(x_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \to 1$

d.h. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existiert nicht

f) Es gilt aber:
$f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x}) \to 0$ für $x \to 0$ (vgl. ÜB 7)
stetig hebbare Definitionslücke, hebbar durch 0

g) Wichtig: (ohne Beweis hier, später)
$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \to 1$ für $x \to 0$
stetig hebbare Definitionslücke, hebbar durch 1

Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen ($f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$) besitzen wichtige Eigenschaften, u.a.:

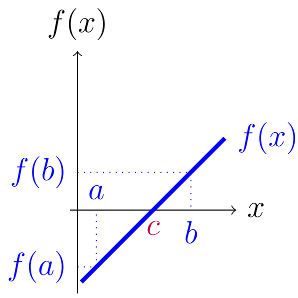
- Zwischenwerteigenschaft
- Existenz von Minimum und Maximum

5.15 Satz (Zwischenwertsatz von Bolzano, Nullstellensatz, ZWS, IVT [Intermediate Value Theorem])

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$
(genauso: $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ bzw. "$f(a) - f(b) < 0$")

Dann existiert ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = 0$, d.h. f hat Nullstelle in $[a,b]$.
Anschaulich klar:

f stetig ('ohne absetzen'), keine Sprünge möglich



Beweis: mittels Bisektionsverfahren

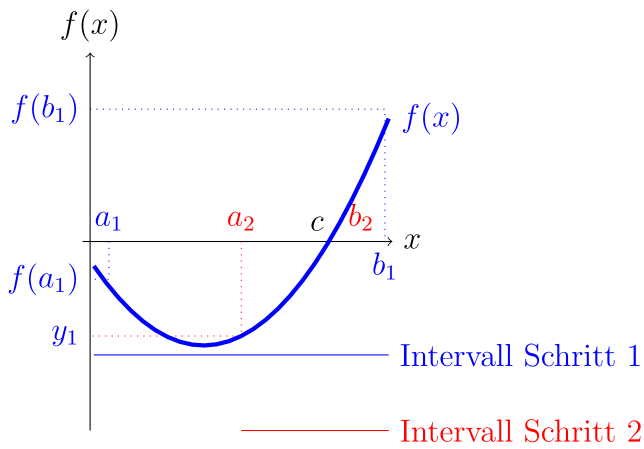
Start:

$[a,b] =: [a_1, b_1]$

Schritt 1:

halbiere das Intervall
berechne $y_1 = f(\frac{a_1+b_1}{2})$

- $y_1 < 0$
  neues Intervall: $[a_2, b_2] := [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$
- $y_1 > 0$
  neues Intervall:$[a_2, b_2] := [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$
- $y_1 = 0$
  habe c schon gefunden, $c = \frac{a_1+b_1}{2}$



Nach Schritt 1 gilt:
$[a_2, b_2]$ (neues Intervall) ist halb so groß wie $[a_1, b_1]$, und (hier)
$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0$

Schritt 2:

halbiere Intervall, berechne $y_2 = f(\frac{a_2+b_2}{2})$

- $y_2 < 0 \Rightarrow [a_3, b_3] \coloneqq [\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$
- $y_2 > 0 \Rightarrow [a_3, b_3] \coloneqq ...$
- $y_2 = 0 \Rightarrow ...$

usw.

Für die Folge $([a_n, b_n])_n$ gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} (a_n) \nearrow & \text{(monoton steigend)} \\ (b_n) \searrow & \text{(monoton fallend)} \\ (b_n - a_n) \to 0 \text{ für } n \to \infty & \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(Intervallschachtelungsprinzip)}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n =: c$$

Es ist $f(a_n) \leq 0, \qquad f(b_n) \geq 0$
Da f stetig ist, gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(a_n)}_{\leq 0} \overset{\text{Def. Stetigkeit}}{=} f(c) \leq 0 \\ \underbrace{\lim_{n\to\infty} f(b_n)}_{\geq 0} \overset{\text{Def. Stetigkeit}}{=} f(c) \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(c) = 0, \text{ also hat } f \text{ Nullstelle bei } c$$

□

Dieses Verfahren wird auch zur Berechnung von Nullstellen verwendet.
Folgerung: 5.16

5.16 Satz (ZWS allgemein)

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, y eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$.
Dann gibt es ein $\overline{x} \in [a, b]$ mit $f(\overline{x}) = y$ (f nimmt auf dem Intervall $[a, b]$ jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Wert an).

Beweis

OBdA sei $f(a) \leq y \leq f(b)$.
Definiere Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - y \end{aligned}$$

Dann ist

$$\left.\begin{array}{l} \underbrace{g(a)}_{f(a)-y,\quad f(a)\leq y} \leq 0 \\[2em] \underbrace{g(b)}_{f(b)-y,\quad f(b)\geq y} \geq 0 \\[2em] g \text{ ist stetig} \\ \text{(als Verknüpfung stetiger Funktionen)} \end{array}\right\} \overset{5.15/\text{ZWS}}{\Rightarrow} \exists c \in [a,b] \text{ mit } g(c) = 0$$

$g(c) = f(c) - y = 0$, dann ist $f(c) = g(c) + y = 0 + y = y$

□

5.17 Anwendung

a) Existenz von Nullstellen, Bsp π (s. PÜ)

b) Existenz von Lösungen einer Gleichung (PÜ 8)

c) Kamel, Antipoden, Käsebrot, Tisch (s. Folien 06.06.2016)

d) Der ZWS liefert auch ein Kriterium zur Existenz von stetigen Umkehrfunktionen.

5.18 Definition

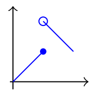
$f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt <u>(streng) monoton fallend [wachsend]</u>, falls gilt:
Sind $x, y \in D$, $\quad x < y$, dann ist $f(x) \overset{(<)}{\leq} f(y) \quad [f(x) \overset{(>)}{\geq} f(y)]$.
Wenn f (streng) monoton wachsend oder fallend: f ist (streng) monoton.

5.19 Satz

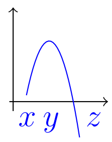
D Intervall, $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig.
Dann gilt: f ist injektiv auf $D \Leftrightarrow \quad f$ streng monoton auf D.

Beweis

"$\Leftarrow$": Sei $x \neq y$, also etwa $x < y$.
f streng monoton $\Rightarrow \quad f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$, also $f(x) \neq f(y)$; also f injektiv.

"$\Rightarrow$": (Achtung: falls f nicht stetig: injektiv $\not\Rightarrow$ streng monoton, z.B. )

Wir zeigen (Kontraposition):
f nicht stetig$\Rightarrow$ f nicht injektiv
Sei f nicht streng monoton, dann gilt für ein y mit $x < y < z$ aus D:



$$f(x) \underset{\geq}{\leq} f(y), \quad f(y) \underset{\leq}{\geq} f(z)$$

Nach ZWS: f nimmt in $[x, y]$ jeden Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ an, f nimmt in $[y, z]$ jeden Wert zwischen $f(y)$ und $f(z)$ an.
$\Rightarrow$ mind. ein Wert wird doppelt angenommen
$\Rightarrow$ f ist nicht injektiv $\square$

5.20 Satz (Minimax-Theorem von Weierstraß)

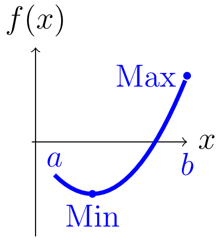
Jede stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$

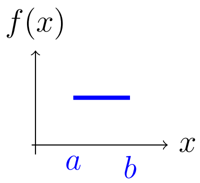
(i) ist beschränkt (d.h. $\exists K \in \mathbb{N}$, so dass $f(x) \in [-K, K] \quad \forall x \in [a, b]$)

(ii) besitzt sowohl Minimum als auch Maximum, d.h. $\exists x_*, x^* \in [a, b]$ mit
$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*) \quad \forall x \in [a, b]$
(x_* heißt dann $\overset{\text{Minimum-}}{\text{Minimalstelle}}$, x^* heißt $\overset{\text{Maximum-}}{\text{Maximalstelle}}$)

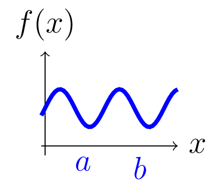
<u>Beweis</u> nutzt wieder Bisektionsverfahren, s. WHK Theorem 6.24 $\square$
(Achtung: Aussage über <u>globale Maxima/Minima</u> nicht eindeutig)

5.21 Beispiel/Gegenbeispiel

a) 

b) 

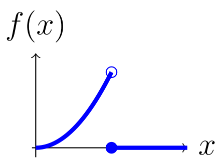
Für $f(x) = c$: Alle $x \in [a, b]$ sind Maximal-/Minimalstellen!

c) 

$f(x) = \sin(x) + c$, $D = [0, n \cdot \pi]$: mehrere Maximal-/Mininmalstellen

d) Falls nicht alle Voraussetzungen erfüllt sind, gilt der Satz i.A. nicht, z.B.

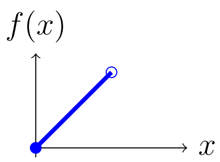
- f nicht stetig:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} \text{ auf } [0, 2]$$

f hat kein Maximum auf $[0, 2]$

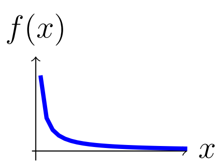
- Definitionsbereich von f nicht abgeschlossen



$$f\colon [0, 3) \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

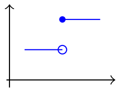
kein Maximum

- Definitionsbereich von f nicht beschränkt:



$$f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

kein Maximum/Minimum

Bemerkung: Es gibt aber auch nicht stetige Funktionen, die Maximum/Minimum besitzen! Z.B. 

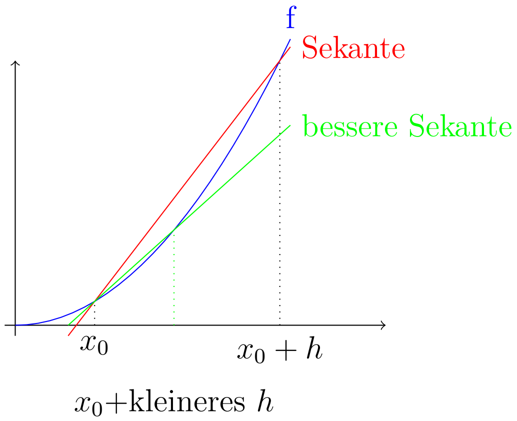
5.22 Bemerkung

Satz 5.20 liefert nur die Existenz von Maxima/Minima, aber keine Aussage darüber, wie man Maximum-/Minimumstelle (insbesondere "lokale") finden kann!
$\rightarrow$ 6 Differentialrechnung

6 Differenzierbare Funktionen

6.1 Vorbemerkung

s. Folien
Idee:



Die Gerade (Sekante) durch die Punkte $(x_0|f(x_0))$ und $(x_0 + h|f(x_0 + h))$ hat die Steigung $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}$ ('Differenzenquotient').
Je kleiner h, desto besser beschreibt die Sekante die 'Steigung von f in x_0'.
Für $h \to 0$ erhält man (falls Grenzwert existiert) die Tangente in x_0 mit Steigung $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

In diesem Kapitel ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

6.2 Definition

$f : I \to \mathbb{R}, \qquad x_0 \in I$

a) f heißt differenzierbar (diffbar) in x_0 (an der Stelle x_0), falls $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existiert. Dieser Grenzwert heißt erste Ableitung von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ ['f Strich'] oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ bezeichnet.

b) Ist f in jedem $x_0 \in I$ diffbar, so heißt f differenzierbar (auf I) und man nennt die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto f'(x)$ die Ableitung(-sfunktion) von f.

6.3 Beispiel

a)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2, \qquad x_0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2-2^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (4+h) \\ &= 4 \end{aligned}$$

allgemein für x^2:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) \\ &= 2x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

<u>Bemerkung:</u> '$\lim\limits_{h\to 0}$' nicht weglassen/vergessen!

b) konstante Fkt:

$$f(x) = c \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

c) $f(x) = x^n \qquad (n \in \mathbb{N})$
$\Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
(Beweis durch vollst. Induktion)

d)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ f(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x-(x+h)}{x\cdot(x+h)} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{x^2+xh} \cdot \frac{1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x\cdot(x+h)} \\ &= -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

e)

$$f(x) = \sin x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x}^{\text{Additionstheorem}} - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos(h)+1}{h}}_{\to 0\text{, Mitteilung oder Übung}} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1\text{, Bsp. 5.14 g}} \\ &= \sin(x)\cdot 0 + \cos(x)\cdot 1 \\ &= \cos x \end{aligned}$$

f) $f(x) = \cos x$
$f'(x) = -\sin x \qquad$ (Übung)

6.4 Satz

$f\colon I \to \mathbb{R}, \qquad x_0 \in I$
Dann sind äquivalent:

a) f ist in x_0 diffbar.

b) Es gibt eine Funktion $R\colon I \to \mathbb{R}$ stetig in x_0, $R(x_0) = 0$, und ein $m \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$f(x) = \underbrace{\overbrace{f(x_0)}^{\text{Zahl}} + m(x - x_0)}_{\text{Gerade durch } (x_0|f(x_0) \text{ mit Steigung } m \,=\, \text{Tangente})} + \underbrace{R(x)(x - x_0)}_{\text{wird 0 an der Stelle } x_0\text{, wird klein in der Nähe von } x_0}$$

Gilt b), so ist $m = f'(x_0)$ (d.h. die Ableitung ist die Steigung der Tangente).
b) besagt: f lässt sich in der Nähe von x_0 gut durch eine (affin-)lineare Funktion (Gerade) approximieren.

Beweis:

a⇒b: Setze $R(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & x \neq x_0 \\ 0 & x = x_0 \end{cases}$, dann ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} R(x) &= \lim_{h \to 0} R(x_0 + h) \\ &= \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0}}_{\text{existiert, da } f \text{ diffbar und } = f'(x_0)} - f'(x_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

nach Definition 6.2, weil f diffbar in x_0;
also ist R stetig mit $R(x_0) = 0$.

b⇒a: Sei $f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + R(x)(x - x_0)$ (Voraussetzung)
$\Rightarrow \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + m(x_0 + h - x_0) + R(x_0 + h - x_0)$
$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = m + R(x_0 + h)$
$\Rightarrow \quad \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} m + R(x_0 + h)$
$= m + \underbrace{R(x_0)}_{=0 \text{ (Voraussetzung)}}$
$= m$
D.h. lim existiert, f ist diffbar in x_0, $f'(x_0) = m$

□

6.5 Korollar (Folgerung)

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in I$, dann ist f auch stetig in x_0 (Beweis folgt aus 6.4 b).

6.6 Bemerkung/Beispiel

Umkehrung von 6.5 gilt nicht!

Die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$ ist bei $x_0 = 0$ stetig, aber nicht diffbar!

$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

Denn: $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|x+h|-|x|}{h}$ existiert nicht für $x = 0$!

- $\lim\limits_{h\to 0+} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1$
- $\lim\limits_{h\to 0-} \frac{|0+h|-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0-} \frac{-h}{h} = -1$
- $\Rightarrow 1 \neq -1$

Also: stetig $\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ differenzierbar

6.7 Satz (Ableitungsregeln)

$f, g\colon I \to \mathbb{R}$ diffbar in $x \in I$. Dann sind auch

- $c \cdot f$, $c \in \mathbb{R}$
- $f \pm g$
- $f \cdot g$ und
- $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$)

diffbar in x mit

a) $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

b) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

c) $(f \cdot g')(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ [Produktregel]

d) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ [Quotientenregel]

Beweis:

(nur a,c; Rest ähnlich)

a) $\frac{c\cdot f(x+h)-c\cdot f(x)}{h} = c \cdot \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x) \text{ für } h\to 0}$
$\overset{h\to 0}{\to} c\cdot f'(x)$

c)

$$\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} \overset{\text{Regeln für Fkt.}}{=} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$\to \text{Einschiebetrick: } - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h)$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\overset{h\to 0}{\to} f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\overset{h\to 0}{\to} g(x) \text{ (da stetig)}}$$

$$+ \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\overset{h\to 0}{\to} g'(x)} \cdot f(x)$$

$$\overset{h\to 0}{\to} f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$\square$

6.8 Beispiel

a) Jedes Polynom ist diffbar (wegen a, b, c); jede rationale Funktion ist diffbar (a, b, d).

b) $(4x^3+7x+5)' = 4\cdot 3x^2+7+0 = 12x^2+7$

c) $(\frac{3}{x})' = \frac{0\cdot x - 3\cdot 1}{x^2} = -\frac{3}{x^2}$

d) $(\frac{1}{x^2})' = (\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})$
$= -\frac{2}{x^3}$

e) Allgemein:
$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \qquad n\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow f'(x) = -n\cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$

f) $(\frac{\sin x}{x})' = \frac{\cos(x)\cdot x - \sin(x)\cdot 1}{x^2} \qquad \frac{x\cdot\cos(x)-\sin x}{x^2}$

g)

$$\begin{aligned}
(\tan x)' &= (\frac{\sin x}{\cos x})' \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} \\
&\overset{\text{Additionstheoreme}}{=} \frac{1}{(\cos x)^2} \\
\text{oder (kürzen, aufspalten)} &= \frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} + \frac{(\sin x)^2}{(\sin x)^2} \\
&= 1 + (\tan x)^2
\end{aligned}$$

6.9 Satz (Kettenregel)

Die Komposition $f \circ g$ zweier diffbarer Funktionen f, g ist diffbar und es gilt:
$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$
Beweis ähnlich wie Satz 6.7 □
Zum Merken:
$(f \circ g)(x) = \overset{\text{'äußere'}}{f} \quad (\quad \overset{'innere' Funktion}{g(x)} \quad)$
$\rightarrow \qquad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

6.10 Beispiel

a) $((3x^2 - x)^5)' = 5 \cdot (3x^2 - x)^4 \cdot (6x - 1)$
innere Fkt: $g(x) = 3x^2 - x$
äußere Fkt: $f(x) = x^5$

b) $(\sin(3x))' = (\cos 3x) \cdot 3$
innere Fkt: $g(x) = 3x$
äußere Fkt: $f(x) = \sin x$

6.11 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

$I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, $f \colon I \to J$ bijektiv, diffbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0$
Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} \colon J \to I$ diffbar in $y_0 = f(x_0)$ und es gilt:
$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{f'(x_0) \neq 0}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$

Beweis mittels Definition der Ableitung (Differenzenquotient), hier nur Merkregel.

$$\begin{aligned} && y &= f(f^{-1}(y)) \\ &\overset{\text{nach } y \text{ ableiten mit 6.9}}{\Rightarrow} & 1 &= f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) \\ &\Leftrightarrow & (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \end{aligned}$$

6.12 Beispiel

a) $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad f(x) = \sqrt{x}$
Was ist $f'(x)$?
f ist Umkehrfunktion h^{-1} von $h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \qquad h(x) = x^2$. $h'(x) = 2x$

$$\begin{aligned} (h^{-1})'(y) &= \frac{1}{h'(h^{-1}(y))} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{y}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ ist h^{-1} von $h(x) = x^3$.
...
$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
da:
$h'(x) = 3x^2, \qquad (h^{-1})'(y) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2} = \frac{1}{3(y^{\frac{1}{3}})^2}$
$h'(0) = 0 \Rightarrow$ Ableitung von h^{-1} existiert nicht in $x = 0$
$\Rightarrow \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c)

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{>0} \qquad f(y) = \mathrm{e}^y \\ f^{-1}\colon \mathbb{R}_{>0} &\to \mathbb{R} \qquad f^{-1}(x) = \ln x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad (\ln x)' &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{\ln x}} = \frac{1}{x} \\ \Rightarrow \qquad (\ln |x|)' &= \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} & x < 0 (\text{Kettenregel}) \end{cases} \\ &= \frac{1}{x} \qquad x \neq 0 \end{aligned}$$

Wir nutzen 6.12 c, um Produkte von Funktionen abzuleiten

6.13 Bemerkung (Logarithmische Ableitung)

Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, f diffbar ist $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ (6.12c, Kettenregel).

Beispiel

$$\begin{aligned}
f(x) &= \mathrm{e}^x(\sin(x)+2)\cdot x^5 \qquad x>0 \quad (\Rightarrow f(x)>0)\\
\ln f(x) &= x + \ln(\sin(x)+2) + 5\cdot \ln x\\
(\ln f(x))' &= 1 + \frac{\cos x}{\sin(x)+2} + 5\cdot\frac{1}{x} = \frac{f'(x)}{f(x)}\\
f'(x) &= (1+\frac{\cos x}{\sin(x)+2}+\frac{5}{x})(\mathrm{e}^x(\sin(x)+2)\cdot x^5)\\
&= \mathrm{e}^x[(\sin(x)+2)\cdot x^5 + \cos(x)\cdot x^5 + (\sin(x)+2)\cdot 5x^4]
\end{aligned}$$

Bemerkung

Man kann zeigen, dass die logarithmische Ableitung auch auf Funktionen mit Werten in ganz $\mathbb{R}$ anwendbar ist (berechne $(\ln|f(x)|)'$ und stetige Fortsetzung in x mit $f(x)=0$).
$\Rightarrow$ Beispiel gilt sogar $\forall x \in \mathbb{R}$

6.14 Satz (Ableitungen der elementaren Funktionen)

- $(a^x)' = (\ln a)a^x \qquad a \in \mathbb{R}_{>0}$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad x>0$
- $(x^x)' = (1+\ln x)x^x \qquad x>0$

Beweis

- $(a^x)' \overset{\text{Logarithmus}}{=} (\mathrm{e}^{\ln(a^x)})' = (\mathrm{e}^{x\cdot\ln a})' \overset{\text{Kettenregel}}{=} (\ln a)a^x$
- Rest analog

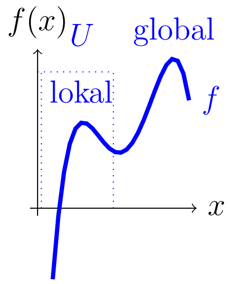
Ab jetzt:

Kurvendiskussion

6.15 Definition

$f\colon D \to \mathbb{R}$ besitzt in $x_0 \in D$ ein <u>lokales</u> $\overbrace{\text{Maximum/Minimum}}^{\text{Extremum}}$, wenn es ein Intervall $U = (x_0 - s, x_0 + s) \subseteq D, s > 0$ gibt, so dass $f(x_0) \underset{\geq}{\leq} f(x) \quad \forall x \in U$ (U heißt Umgebung von x_0).

f besitzt ein <u>globales Maximum/Minimum</u> in x_0, wenn $f(x_0) \underset{\geq}{\leq} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$



6.16 Satz (notwendige Bedingungen für lokale Extrema)

Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ diffbar. Falls f in $x_0 \in D$ ein Extremum besitzt, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Beweis

Sei $U = (x_0 - s, x_0 + s), \quad s > 0, \quad U \subseteq D$ und $\underbrace{f(x_0) \geq f(x)}_{\text{Maximum}} \qquad \forall x \in U$.

$\underset{f \text{ diffbar}}{\Rightarrow} f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Da $f(x_0) \geq f(x_0 + h) \quad \forall h < s$, ist $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall h < s$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0+} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{\geq 0}} \leq 0$ und $\lim_{h \to 0-} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{\leq 0}} \geq 0$

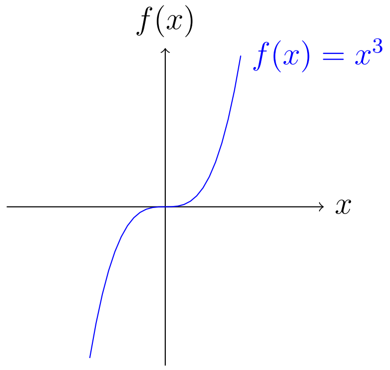
$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ (für Minimum analog) $\square$

6.17 Bemerkung

$f'(x_0) = 0$ notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung

Beispiel

$f(x) = x^3$ hat in $x = 0$ Sattelpunkt mit Steigung 0

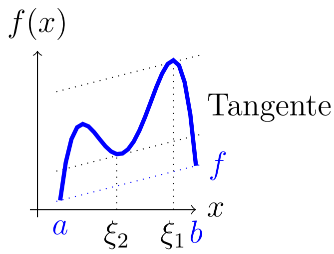


f hat lokales Extremum in $x_0 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f'(x_0) = 0$
Für hinreichende Bedingung und weitere Ergebnisse der Kurvendiskussion: die zentralen Sätze der Differentialrechnung

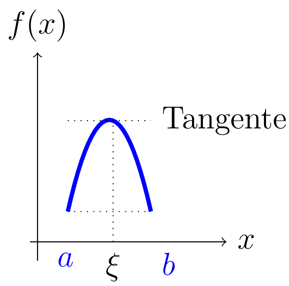
6.18 Satz (Mittelwertsätze, Satz von Rolle)

Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b); $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

1) $\Rightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)\colon \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$
   1. Mittelwertsatz



2) $f(a) = f(b) \Rightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)\colon f'(\xi) = 0$
   Satz von Rolle



3) $\Rightarrow \quad \exists \xi \in (a,b)\colon \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$
   2. Mittelwertsatz

Beweis

2) f stetig auf $[a,b] \Rightarrow \quad f$ besitzt Maximum/Minimum $M \in \mathbb{R}/m \in \mathbb{R}$ in $[a,b]$, d.h. $m \le f(x) \le M$

1. Fall Beide Extreme werden auf Rand angenommen
$f(a) = f(b) \Rightarrow m = M$
$\Rightarrow \quad f$ konstant $\Rightarrow f'(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in (a, b)$

2. Fall Ein Extremum wird nicht auf Rand angenommen
$\Rightarrow \quad \exists \xi \in (a, b)\colon \xi$ ist Extremstelle
$\overset{6.16}{\Rightarrow} f'(\xi) = 0$

3) Es ist $g(b) \neq g(a)$, denn sonst gäbe es $x \in (a, b)$ mit $g'(x) = 0$ (in Voraussetzung ausgeschlossen, Rolle).
Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g(x)$
Man kann nachrechnen, dass $h(a) = h(b)$
h stetig auf $[a, b]$ und h diffbar auf (a, b)
$\underset{\text{Rolle}}{\Rightarrow} \exists \xi \in (a, b)\colon f'(\xi) = 0$
$\Rightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

1) folgt aus 3) für $g(x) = x$

$\square$

6.19 Satz (Monotoniekriterium)

Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) diffbar.

i) $f'(x) \underset{\leq}{\geq} 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ monoton $\underset{\text{fallend}}{\text{wachsend}}$ auf $[a, b]$

ii) $f'(x) \underset{<}{>} 0 \quad \forall x \in (a, b) \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ streng monoton $\underset{\text{fallend}}{\text{wachsend}}$ auf $[a, b]$

iii) $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Leftrightarrow f$ konstant auf $[a, b]$

Beweis

i) '$\Rightarrow$' Sei $a \leq x_1 < x_2 \leq b$
$\Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2)\colon f(x_2) \cdot f(x_1) = \underbrace{\underbrace{f'(\xi)}_{>0} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}}_{>0}$
$\Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

'$\Leftarrow$' Sei f monoton wachsend auf $[a, b]$, f diffbar auf (a, b)
$\Rightarrow f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \forall x \in (a, b)$

$$\text{Da } \frac{\overbrace{f(x+h)-f(x)}^{\geq 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geq 0 \text{ für } h>0 \text{ und}$$

$$\frac{\overbrace{f(x+h)-f(x)}^{\leq 0}}{\underbrace{h}_{<0}} \geq 0 \text{ für } h<0, \text{ ist } f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

ii), iii) analog

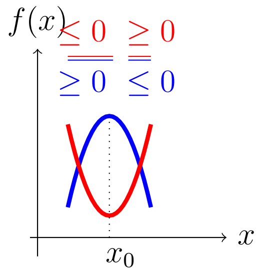
□

6.20 Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema I)

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar auf (a,b) und sei $x_0 \in (a,b)$ mit $f(x_0) = 0$

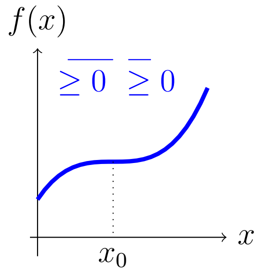
i)

$f'(x) \underset{\geq}{\leq} 0 \quad \forall x \in (x_0 - s, x_0)$ und
$f'(x) \underset{\leq}{\geq} 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + s)$, $s > 0$
$\Rightarrow f$ hat lokales $\underset{\text{Maximum}}{\text{Minimum}}$ in x_0
Vorzeichenwechsel



ii)

$f'(x) \underset{>}{<} 0 \quad \forall x \in (x_0 - s, x_0) \cap (x_0, x_0 + s)$,
$s > 0$
$\Rightarrow f$ hat kein lokales Extremum in x_0



Beweis (für Minimum)

Zu zeigen: $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (x_0 - s, x_0 + s) = U$
Sei $x \in U \setminus \{x_0\}$. Wegen 1. MWS: $\exists \xi \in (x, x_0)$
(*) $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$

1. Fall $x \in (x_0 - s, x_0)$
$\Rightarrow x - x_0 < 0, \quad f'(\xi) \leq 0$ nach Voraussetzung

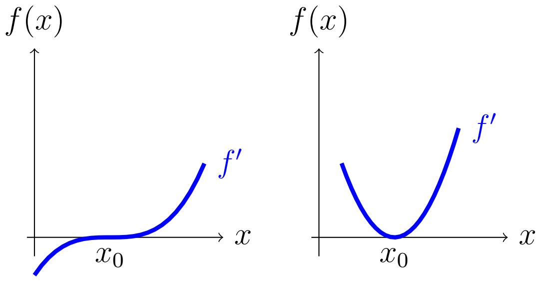
$\overset{*}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) \geq 0$
$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

2. Fall $x \in (x_0, x_0 + s)$
$\Rightarrow x - x_0 > 0, \quad f'(\xi) \geq 0$ nach Voraussetzung
$\overset{*}{\Rightarrow} f(x) - f(x_0) \geq 0$
$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$

Insgesamt also $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U$
Rest analog $\square$

6.21 Bemerkung

Steigung von f' ist positiv in x_0, d.h. $f''(x_0) > 0$
Wenn $f''(x_0) = 0$, ist keine Aussage über Vorzeichenwechsel möglich, z.b. s. Skizze, jeweils $f''(x_0) = 0$



6.22 Satz (Hinreichende Bedingung für lokale Extrema II)

Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar auf (a,b) und in $x_0 \in (a,b)$ 2-mal diffbar
$[f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \underset{<}{>}] \Rightarrow f$ besitzt in x_0 lokales $\underset{\text{Maximum}}{\text{Minimum}}$

Beweis (für Minimum)

Es ist $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - \overbrace{f(x_0)}^{=0}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h)}{h} \overset{h \to 0}{\to} f''(x_0) > 0$

$\Rightarrow \exists s > 0\colon \overbrace{\frac{f'(x_0+h)}{h}}^{*} > 0 \forall |h| < s, h \neq 0$

1. Fall $-s < h < 0$
$\overset{*}{\Rightarrow} f'(x_0 + h) < 0$

2. Fall $0 < h < s$
$\overset{*}{\Rightarrow} f'(x_0 + h) > 0$

$\underset{6.20}{\Rightarrow}$ lokales Minimum in x_0
(Anm.: Für Randpunkte: Monotonieargumente, notwendige Bedingung gilt nicht)

Die regeln von l'Hospital

Problem: Grenzwerte vom Typ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty$ usw.

Beispiel

- $\frac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{\to} ?$
  $f(x) = \sin x$ und $g(x) = x$ haben in $x = 0$ dieselbe Tangente ($t(x) = x$)
  $\Rightarrow f, g$ konvergieren mit derselben Geschwindigkeit gegen 0 für $x \to 0$
  $\Rightarrow \frac{\sin x}{x} \underset{x \to 0}{\to} 1$

- $\frac{\sin x}{x^2} \underset{x \to 0}{\to} ?$
  $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$: f, g haben unterschiedliche Tangenten in $x_0 = 0$, x^2 konvergiert schneller gegen 0 als $\sin x$
  $\Rightarrow \frac{\sin x}{x^2} \begin{cases} \underset{x \to 0+}{\to} \infty \\ \underset{x \to 0-}{\to} -\infty \end{cases}$

Grundidee

Wenn $f(a) = g(a) = 0$, f, g diffbar mit $g'(x) \neq 0$, dann

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f(a+h) - \overbrace{f(a)}^{=0}}{g(a+h) - \underbrace{g(a)}_{=0}} = \frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}$$

$$\underset{h \to 0}{\to} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Im Beispiel: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

6.23 Satz (l'Hospital)

$f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ seien diffbar auf (a, b) mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und es sei $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ gilt:

$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \begin{cases} 0 \text{ oder} \\ \infty \text{ oder} \\ -\infty \end{cases}$ und weiter existiert $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch
$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt

$\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
Entsprechendes gilt für $x \to b-$

6.24 Beispiel

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{x}_{\to 0}} \overset{6.23}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$
(vgl. 5.14g, hier ist jetzt der Beweis)

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{1-\cos x}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\to 0}} \overset{6.23}{=} \underbrace{\lim\limits_{x\to 0}}_{\text{nicht vergessen!}} \frac{\overbrace{\sin x}^{\to 0}}{\underbrace{2x}_{\to 0}} \overset{6.23}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3}$ =...3x 6.23 anwenden...= $-\frac{1}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to\infty}}{\underbrace{\sqrt{x}}_{\to\infty}} \overset{6.23}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

Allgemein kann man zeigen: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$, d.h. $\ln x$ geht langsamer gegen ∞ als jede Potenz von x

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\overbrace{x^2}^{\to\infty}}{\underbrace{e^x}_{\to\infty}} \overset{6.23}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{6.23}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

Allgemein: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0$, d.h. jede Exponentialfunktion ($a > 0$) geht schneller gegen ∞ als jede Potenz von x

f) $\lim\limits_{x\to 0+} \underbrace{\underbrace{x \cdot \ln x}_{\text{Informationstheorie}}}_{\text{Begriff der Entropie}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\overbrace{\ln x}^{\to -\infty}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}} \overset{6.23}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} \frac{-x^2}{x} = 0$

g) Achtung! $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} = 0$
mit falsche Anwendung von 6.23 erhält man z.B.
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x^2-1} \overset{6.23}{=} \lim\limits_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{2x} \underset{\text{Vor. l'Hospital wird nicht erfüllt}}{\neq} \lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{2} = 1$
Wo steckt der Fehler?

7 Integralrechnung

Berechnung von Flächen, das Bestimmte Integral

7.1 Motivation/Herleitung

$\rightarrow$s. Folien/Blatt 27.06.2016

7.2 Definition (Riemannintegral)

Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Konvergieren U_n (Untersumme) und O_n (Obersumme) für jede Folge von Zerlegungen $(Z_n)_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(Z_n) = 0$ (Feinheit der Zerlegung) für $n \to \infty$ gegen denselben Wert A, so heißt f (Riemann-)integrierbar über $[a,b]$. Man nennt diesen Grenzwert A auch Integral von f über $[a,b]$ und bezeichnet ihn mit

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

(Name der Integrationsvariablen spielt keine Rolle, also z.B. auch $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ oder $\int_a^b f(\xi)\mathrm{d}\xi$ etc.)
Wir legen fest:

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$
$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

7.3 Beispiel

a) $f(x) = c \qquad \forall x \in [a,b]$, dann
$y_i = c = Y_i \quad \forall i = 1...n$
$U_n = \sum_{i=1}^n c \cdot (x_i - x_{i-1}) = c \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})$
$\overset{\text{Teleskopsumme}}{=} c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b-a)$
$O_n = \sum_{i=1}^n c \cdot (x_i - x_{i-1}) = ... = c \cdot (b-a)$
Egal wie x_i gewählt werden, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = \lim\limits_{n\to\infty} O_n = c \cdot (b-a)$

b) Es gibt auch Funktionen, die nicht integrierbar sind:
$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x \notin \mathbb{R} \end{cases}$
Egal, wie Zerlegung Z_n gewählt wird: es ist immer $\inf f(x) = 0$,

$\sup f(x) = 1$ in den Teilintervallen
$\Rightarrow U_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot 0 = 0$
$O_n = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot 1 \overset{\text{Teleksops.}}{=} x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$
U_n und O_n konvergieren <u>nie</u> gegen denselben Wert!

7.4 Bemerkung

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ existiert beispielweise, wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

- stetig ist oder
- monoton ist
- beschränkt und 'fast überall' stetig ist (Graph von f besitzt nur endlich viele Sprungstellen)

7.5 Bemerkung

Wir haben in 7.1 f positiv gewählt.
In diesem Fall ist $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ der Flächeninhalt der von f und der x-Achse begrenzten Fläche.
Andere Fälle:

- $A = \underbrace{\int_a^c f(x)\mathrm{d}x}_{f \text{ positiv}} + \underbrace{\int_c^b -f(x)\mathrm{d}x}_{\text{hier ist } f \text{ negativ, also } -f \text{ positiv}}$
  $= \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$
- $A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, falls $f \geq g$ auf $[a,b]$

Die folgenden Regeln sind leicht nachzuprüfen:

7.6 Satz (Rechenregeln für Integrale)

Seien f, g auf $[a,b]$ integrierbar. Dann ist

a) $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

a und b zusammen heißen Linearität.

c) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \quad \forall c \in [a,b]$
(Zwischenstelle)

d) $f(x) \leq g(x) \quad \forall x$, dann auch
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
(Monotonie)

e) falls $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$, dann ist
$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$

7.7 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
Dann existiert $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$

Beweis

f stetig auf $[a,b] \overset{\text{Minimaxth.}}{\underset{5.20}{\Rightarrow}} f$ nimmt auf $[a,b]$ Minimum m und Maximum M an, d.h.

$$
\begin{aligned}
&m \leq f(x) \leq M \\
&\overset{7.6\text{ d}}{\Rightarrow} m(b-a) && \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a) \\
&\Rightarrow m && \leq \underbrace{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{y \text{ aus ZWS}} \leq M \\
&\overset{\text{ZWS}}{\underset{5.16}{\Rightarrow}} && \exists \xi \in [a,b] \text{ mit } f(\xi) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$\square$

Stammfunktionen und der HDI (Haupdsatz der Differential- und Integralrechnung)

Wir können Flächeninhalte bisher nur über Riemannsummen/-integrale (U_n, O_n, lim usw.) berechnen, das ist umständlich.

7.8 Definition (Stammfunktion)

a) Sei $g\colon [a, b \to \mathbb{R}]$ eine stetige Funktion. Der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0^+} \frac{g(a+h)-g(a)}{h} =: g'_+(a)$ heißt (falls existent) <u>rechtsseitige Ableitung</u> von g in a.
Analog: $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{g(b+h)-g(b)}{h} =: g'_-(b)$ ist <u>linksseitige Ableitung</u> von g in b.

b) Stammfunktion
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.
Dann nennt man eine diffbare Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von f über $[a,b]$, wenn gilt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \qquad \forall x \in (a,b) \\ F'_{+}(a) &= f(a) \\ F'_{-}(b) &= f(b) \end{aligned}$$

[Korrektur: Unterschied: F' ist auch für a, b definiert!]

7.9 Beispiel

a) $f(x) = 3 \qquad F(x) = 3x$ oder $3x+1; \quad 3x+2$; etc.

b) $f(x) = x^2 \qquad F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$ für $c \in \mathbb{R}$
allgemein $f(x) = x^n \qquad F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

c) $f(x) = \sin x \qquad F(x) = -\cos x + c$ usw.

7.10 Bemerkung

Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt!
Ist F eine Stammfunktion von f, dann auch $F + c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ (denn: $F' = f$ und $(F+c)' = F' + 0 = f$).
Sind F und G Stammfunktionen von f, so können sie sich nur durch eine Konstante unterscheiden:

$$\begin{aligned} (F-G)' = F' - G' = f - f = 0 \\ \underset{6.19\text{ iii}}{\Rightarrow} F - G \text{ ist konstant} \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zwischen dem in 7.1/7.2 behandelten Integral von f und einer Stammfunktion von f wird im folgenden Satz hergestellt.

7.11 Satz (HDI, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.

a) Dann ist $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t \qquad x \in [a,b]$ eine Stammfunktion von f (also diffbar, $F'(x) = f(x)$) und es gilt:

b) $$\underbrace{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{\text{bish. Flächeninh., nur mit } U_n, O_n \text{berechenbar}} = F(b) - F(a) \stackrel{\text{Schreibweise}}{=} [F(x)]_{x=a}^{x=b} = [F(x)]_a^b$$

Beweis:

a) (zu Zeigen: das so definierte F ist Stammfunktion, also $F' = f$)

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h} \cdot \left(\int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{h} \cdot \left(\int_x^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{x+h} f(t)\mathrm{d}t\right) \\ &\stackrel{7.16\text{ c}}{=} \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Nach dem MWS der Integralrechnung (7.7) existiert ein $\xi \in [x, x+h]$ mit $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(\xi)$. Für $h \to 0$ erhalten wir ($\xi \in [x, x+h]$) also $\xi \to 0$ für $h \to 0$:
$\underbrace{\frac{F(x+h) - F(x)}{h}}_{\to F'(x)} = \underbrace{f(\xi)}_{\to f(x)}$ (f ist stetig)
Also ist F Stammfunktion von f

b) folgt aus a)

□

7.12 Beispiel

Der HDI hilft bei der Berechnung von Integralen:

a) $\int_0^3 \underbrace{2}_{f(x)} \mathrm{d}x = [\underbrace{2x}_{F(x)}]_0^3 = \underbrace{2 \cdot 3}_{F(3)} - \underbrace{2 \cdot 0}_{F(0)} = 6$

b) $\int_1^2 x^2 + x + 1\mathrm{d}x = [\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x]_1^2 = (\frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2) - (\frac{1}{3} \cdot 1^3 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1) = \frac{29}{6}$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-1) = 1$

7.13 Bemerkung

a) Der HDI besagt:
Die Integration ist die inverse Operation zur Differentiation.

b) Schreibweise:
Um auszudrücken, dass $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist ($F'(x) = f(x)$), schreibt man auch $F(x) \underbrace{= \int}_{\text{'ist Stammfunktion von'}} f(x)\mathrm{d}x$

Ohne Grenzen heißt das auch 'unbestimmtes Integral'.
Beispiel: $\int 5x^2 \mathrm{d}x = \frac{5}{3}x^3 (+c)$; $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$ usw.
Achtung:

$$\begin{aligned} \sin x = \int \cos x \mathrm{d}x \qquad & = \sin x + 1 \\ {}' \Rightarrow' 0 \qquad & = 1 \end{aligned}$$

Gleichheitszeichen wird hier (in der Schreibweise) nicht im üblichen Sinne benutzt! Gleichheit gilt nur für ABleitungen

c) Es spielt keine Rolle, welche Stammfunktion man im HDI b) bei der Berechnung von $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ benutzt.
$F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$

Techniken zur Bestimmung von Stammfunktionen

7.14 Stammfunktionen elementarer Funktionen

(Beweis durch Differenzieren)

- $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \qquad a \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| \qquad x \neq 0$
- $\int \ln x \mathrm{d}x = x \cdot \ln x - x$ vgl. 7.15 c)
- $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$
- $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x \qquad a > 0, a \neq 1$
- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x$
- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \tan x$

7.15 Partielle Integration

Es gilt:

$$\underbrace{\int \underbrace{f'(x)\cdot g(x)}_{2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{f(x)\cdot g(x)}_{1} - \underbrace{\int f(x)\cdot g'(x)\mathrm{d}x}_{3}}$$

Diese Methode ist abgeleitet von der Produktregel der Differentialrechnung:

$$\underbrace{(f(x)\cdot g(x))'}_{1} = \underbrace{f'(x)\cdot g(x)}_{2} + \underbrace{f(x)\cdot g'(x)}_{3}$$

Bem.: Polynome von kleinem Grad sind oft eine gute Wahl für $g(x)$, s. Beispiele

Beispiel

a)

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\sin x}_{f'(x)}\cdot\underbrace{x}_{g(x)}\,\mathrm{d}x &= (-\cos x)\cdot x - \int \underbrace{(-\cos x)}_{f'(x)}\cdot\underbrace{1}_{g(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= (-\cos x)\cdot x + \sin x\end{aligned}$$

$(f'(x) = -\cos x, g'(x) = 1 \rightarrow \text{ gut})$

b)

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x^2}_{g(x)}\cdot\underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'(x)}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x\cdot x^2 - \int \mathrm{e}^x\cdot 2x\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x\cdot x^2 - 2\cdot\int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'(x)}\cdot\underbrace{x}_{g(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x\cdot x^2 - 2\cdot(\mathrm{e}^x\cdot x - \int \mathrm{e}^x\cdot 1\mathrm{d}x) \\ &= \mathrm{e}^x\cdot x^2 - 2\mathrm{e}^x x + 2\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x\cdot(x^2 - 2x + 2)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int \ln x \mathrm{d}x &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} \mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln x - \int 1 \mathrm{d}x \\ &= x \cdot \ln x - x\end{aligned}$$

d) 'Phoenix aus der Asche'
Integral, das eine Funktion enthält, die beim partiellen Integrieren in absehbarer Zeit wieder erscheint (aus ihrer Asche wieder auftaucht).

$$\begin{aligned}\int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g(x)} \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x \cos x + \int \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cdot \cos x \mathrm{d}x \\ \Rightarrow 2 \cdot \int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x &= \mathrm{e}^x (\cos x + \sin x) \\ \Rightarrow \int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^x (\cos x + \sin x)}{2}\end{aligned}$$

7.16 Substitution

Es gilt:

$$\int \underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x) \mathrm{d}x}_{2} = \underbrace{f(g(x))}_{1}$$

Diese Methode ist aus der Kettenregel der Differentialrechnung abgeleitet:

$$\underbrace{(f(g(x)))'}_{1} = \underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x)}_{2}$$

Man hat mit ihr gute Aussichten auf Erfolg, wenn im Integral neben einer Funktion auch deren Ableitung vorkommt.

Beispiel

a) $\int \underbrace{\mathrm{e}^{\overbrace{x^2}^{g(x)}}}_{f(x)} \cdot \underbrace{2x}_{g'(x)} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$, da: innere Funktion: $g(x) = x^2$
$g'(x) = 2x$
äußere Funktion: $f'(u) = \mathrm{e}^u$
$f'(g(x)) = \mathrm{e}^{x^2}$
$\Rightarrow \quad f(u) = \mathrm{e}^u$
$f(g(x)) = \mathrm{e}^{x^2}$
Falls nicht alles so gut passt wie hier: hinbiegen.
Oft einfacher: formales Rezept

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) \mathrm{d}x$$

Substitution: $u = g(x)$; $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x)$ ('leite die Funktion u ab nach der Variablen x')
$\Leftrightarrow g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$

$$\Rightarrow \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \int f'(u)\mathrm{d}u = f(u)$$

Rücksubstitution: $u = g(x)$
$\Rightarrow f(u) = f(g(x))$

b) $\int \underbracket{x} \cdot \sqrt{2x^2 + 1}\, \underbracket{\mathrm{d}x}$

Substitution: $u = 2x^2 + 1$; $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 4x \Leftrightarrow \mathrm{d}u = 4x\mathrm{d}x$
$\frac{\mathrm{d}u}{4} = \underbracket{x\mathrm{d}x}$

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{4} \\ &= \frac{1}{4} \int \underbrace{\sqrt{u}}_{u^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Rücksubstitution: $u = 2x^2 + 1$

$$= \frac{1}{6} \cdot (2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$$

c) $\int g'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$

Substitution: $u = g(x)$; $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g'(x) \Leftrightarrow \mathrm{d}u = g'(x)\mathrm{d}x$

$\int g'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2$
Rücksubstitution: $u = g(x)$
$\int g'(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(g(x))^2$

d) $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\mathrm{d}x$: Übung

7.17 Bemerkung (Bestimmtes Integral berechnen)

z.B. $\int_0^1 x\sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x \qquad f(x) = x\sqrt{2x^2+1}$
bestimme zuerst Stammfunktion:
$\int x\sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x \overset{7.16\text{ b)}}{=} \frac{1}{6}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} = F(x)$
Benutze den HDI:
$\int_0^1 x\sqrt{2x^2+1}\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{6}(3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6}$

Uneigentliche Integrale

Bei der bestimmten Integration hatten wir vorausgesetzt, dass

- die zu integrierende Funktion beschränkt ist
- die Intervall-(Integrations-)grenzen endlich sind.

Was passiert, wenn diese Voraussetzungen nicht erfüllt sind?
Z.B.: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.
Für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ existiert $\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, also kann man den Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ untersuchen:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} [2x^{\frac{1}{2}}]_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) \\
&= 2
\end{aligned}$$

7.18 Definition (Uneigentliches Integral)

Sei $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}, \qquad a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
f heißt über $(a,b]$ uneigentlich integrierbar, falls der Grenzwert $\lim\limits_{T\to a+} \int_T^b f(x)\mathrm{d}x$ existiert (und alle Integrale $\int_T^b f(x)\mathrm{d}x$).
Entsprechend definiert man uneigentliche Integrale über $[a,b)$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ als $\lim\limits_{T\to b-} \int_a^T f(x)\mathrm{d}x$ und über (a,b) als $\lim\limits_{T\to a+} \int_T^c f(x)\mathrm{d}x + \lim\limits_{T\to b-} \int_c^T f(x)\mathrm{d}x$ für ein festes $c \in (a,b)$.

7.19 Beispiel

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2$ (s.o.)

b)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{T\to\infty} [-\frac{1}{x}]_1^T \\ &= \lim_{T\to\infty} (-\frac{1}{T} - (-\frac{1}{1})) \\ &= 0 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x &= \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{T\to\infty} [\ln|x|]_1^T \\ &= \lim_{T\to\infty} (\ln T - \underbrace{\ln 1}_{=0})\end{aligned}$$

existiert nicht ($\ln T \to \infty$ für $T \to \infty$), das Integral divergiert bestimmt gegen ∞, der Flächeninhalt ist unendlich groß.
Ebenso: $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ divergiert.

d) allgemein gilt:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \begin{cases} \text{divergiert für} & \alpha \geq 1 \\ = \frac{1}{1-\alpha} \text{ für} & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \begin{cases} = \frac{1}{\alpha-1} \text{ für} & \alpha > 1 \\ \text{divergiert für} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

8 Vektorräume

8.1 Definition (Reelle Vektorräume)

Ein <u>$\mathbb{R}$-Vektorraum V</u> ist eine nichtleere Menge, deren Elemente <u>Vektoren</u> genannt werden (Bezeichnung mittels kleiner lateinischer Buchstaben, $v, w, x, y, ...$), auf der eine Addition $+$ definiert ist, $+ \colon V \times V \to V$; und eine Multiplikation mit reellen Zahlen ('Skalare') (Bezeichnung mittels kleiner griechischer Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, ...$), $\cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V$, so dass gilt:

(1.1) $u + v + w = u + (v + w) \qquad \forall u, v, w \in V$

(1.2) Es existiert ein Vektor $\mathcal{O} \in V$ ('<u>Nullvektor</u>') mit $v + \mathcal{O} = \mathcal{O} + v = v \qquad \forall v \in V$

(1.3) Zu jedem $v \in V$ existiert ein Vektor $-v \in V$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$

(1.4) $u + v = v + u \qquad \forall u, v \in V$

(Diese Eigenschaften (1.1) bis (1.4) kann man zusammenfassen als '$(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe').

(2.1) $\overset{\text{Addition in } \mathbb{R}}{(\lambda + \mu)} \cdot v = \lambda \cdot v \overset{\text{Addition in } V}{+} \mu \cdot v \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.2) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, v, w \in V$

(2.3) $\overset{\text{Multiplikation in } \mathbb{R}}{(\lambda \cdot \mu)} \cdot v = \lambda \cdot \overset{\text{Multiplikation mit Skalar}}{(\mu \cdot v)} \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, v \in V$

(2.4) $1 \cdot v = v \qquad \forall v \in V$

8.2 Beispiel

a) trivialer Vektorraum Nullraum: $V = \{\mathcal{O}\}$
Es gilt $\mathcal{O} + \mathcal{O} := \mathcal{O}, \quad \lambda \cdot \mathcal{O} := \mathcal{O} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

b) $V = \mathbb{R}^n$, Raum aller 'Spaltenvektoren' der Länge n über $\mathbb{R}$, Elemente haben die Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ ... \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ ... \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

c) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Vektoren: reelle Zahlen.
Skalare: reelle Zahlen.
$\mathcal{O} = 0$

d) Funktionenraum:
$M \neq \emptyset$ Menge. $V = \mathcal{F}(M, \mathbb{R}) \coloneqq \{f \colon M \to \mathbb{R}\}$
Menge der auf M definierten reellen Funktionen.
Für $f, g \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$ sei

- $f + g \colon M \to \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in M$
- $\lambda \cdot f \colon M \to \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in M$

Dann ist V mit $\mathbb{R}, +, \cdot$ ein Vektorraum. Nullvektor ist $f = 0 \colon M \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 0 \qquad \forall x \in M$.
(kurz: $f \equiv 0$, identisch Null)

8.3 Lemma

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

a) $0 \cdot v = \mathcal{O}$

b) $\lambda \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$

c) Zu jedem $v \in V$ ist der Vektor $-v$ aus (1.3) in 8.1 eindeutig bestimmt.

d) $(-1) \cdot v = -v$

Beweis

a)

$$\mathcal{O} \overset{(1.3)}{=} \overbrace{\underbracket{0 \cdot v}}^{x} + \overbrace{(-0 \cdot v)}^{-x} = \underbracket{(0+0)v} + (-0 \cdot v)$$

$$\begin{aligned} &\overset{(2.1)}{=} (0 \cdot v + 0 \cdot v) + (-0 \cdot v) \\ &\overset{(1.1)}{=} 0 \cdot v + (0 * v + (-0 \cdot v)) \\ &\overset{(1.3)}{=} 0 \cdot v + \mathcal{O} \\ &\overset{(1.2)}{=} 0 \cdot v \end{aligned}$$

b) Wie a), starte mit $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O} + (-\lambda \cdot \mathcal{O})$, erhalte $\mathcal{O} = \lambda \cdot \mathcal{O}$

d)

$$\begin{aligned}\underbrace{v + (-1 \cdot v)} &= 1 \cdot v + (-1 \cdot v) \\ &\overset{(2.1)}{=} (1 + (-1))v \\ &= 0 \cdot v \\ &\overset{a)}{=} \mathcal{O} \\ &\overset{(1.3)}{=} v + (-v)\end{aligned}$$

Addiere auf beiden Seiten $-v$:

$$\underbrace{v + (-1)v} + (-v) = v + (-v) + (-v)$$

$$\Rightarrow -1 \cdot v = -v$$

c) Angenommen, zu $v \in V$ gibt es $-v$ und $-v'$ mit $v + (-v) = \mathcal{O}$ und $v + (-v') = \mathcal{O}$. Dann ist $v + (-v) = v + (-v') \overset{+(-v)\text{auf beiden Seiten}}{\Rightarrow} -v = -v'$

$\square$

8.4 Definition

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Eine Teilmenge $U \subseteq V$, $\quad U \neq \emptyset$ heißt Unter(vektor)raum von V, falls U bezüglich der Addition auf V und der Multiplikation mit Skalaren selbst ein Vektorraum ist.

8.5 Beispiel

a) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ ist Unterraum von V

b) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ ist kein Unterraum von V, z.B. (1.2) ist verletzt, Addition funktioniert auch nicht: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \notin U$

c) $V = \mathbb{R}^2, \quad U = \{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum von V (prüfe alle Eigenschaften von Definition 8.1) $\rightarrow$ umständlich, einfacher geht es mit 8.6

8.6 Satz (Unterraumkriterium)

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, sei $\emptyset \neq U \subseteq V$.
Dann ist U Unterraum von V genau dann, wenn gilt ($\Leftrightarrow$):

(1) $v \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot v \in U$

(2) $v, w \in U \Rightarrow v + w \in U$

(oder äquivalent: $\forall v, w \in U, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\lambda \cdot v + \mu \cdot w \in U$)
Man sagt: U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und der Multiplikation mit Skalaren.

Beweis

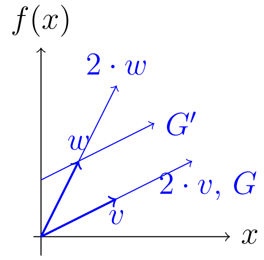
$\Rightarrow$ ist klar, da U laut Definition 8.4 selbst Vektorraum

$\Leftarrow$ rechne die Vektorraumaxiome nach (Definition 8.1, also z.B. $\mathcal{O} \in U$,...)

$\square$

8.7 Beispiel

a) V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{O} \neq v \in V$.
Dann ist $G = \{\lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum.
$V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: G ist Gerade durch Nullpunkt (geometrisch), z.B.
$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Aber: $G' = \{w + \lambda \cdot v | \lambda \in \mathbb{R}, \quad w \in V\}$ ist kein Unterraum für $w \neq \mu \cdot v, \quad \mu \in \mathbb{R}$.
Warum? Z.B. $\mathcal{O} \notin G'$



b) $V = \mathbb{R}^3, \qquad U_1 = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ ist Unterraum. Wir zeigen (1), (2) aus 8.6:

- $U_1 \neq \emptyset$, z.B. $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1$, denn $\overset{x_1}{0} + \overset{x_2}{0} - \overset{x_3}{0} = 0$

(1) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Prüfe: Ist $\lambda \cdot v \in U_1$? $\lambda \cdot v = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \\ \lambda \cdot v_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 - \lambda \cdot v_3 &= \lambda(v_1 + v_2 - v_3) \\ &= \lambda \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda \cdot v \in U_1$

(2) Seien $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $\quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in U_1$, d.h. $v_1 + v_2 - v_3 = 0$, $\quad w_1 + w_2 - w_3 = 0$. Gilt $v + w \in U_1$? $v + w = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) - (v_3 + w_3) &= \underbrace{(v_1 + v_2 - v_3)}_{=0} + \underbrace{(w_1 + w_2 - w_3)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also $v + w \in U_1$

– Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

D.h. U_1 ist die Ebene durch $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $U_2 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ ist kein Unterraum. Z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$ $\mathcal{O} \notin U_2$: $0 + 0 - 0 = 0 \neq 1$.

Anderes Argument: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in U_2$, d.h. $x_1 + x_2 - x_3 = 1$.

Gilt $\lambda \cdot x \in U_2$? $\lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lambda x_1 + \lambda x_2 - \lambda x_3 &= \lambda \underbrace{(x_1 + x_2 - x_3)}_{=1} \\ &= \underbrace{\lambda = 1}_{\text{nur für } \lambda=1} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nicht erfüllt für $\lambda \neq 1$.
Geometrische Interpretation:

$$\begin{aligned} U_2 &= \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1, \quad x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Ebene durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $U_3 = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ ist kein Unterraum, z.B.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3, \qquad 1^2 + 0^2 +^2 \leq 1 \quad \checkmark$, aber

$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$, denn $2^2 + 0^2 + 0^2 \not\leq 1$

Geometrische Interpretation:

U_3 ist eine Kugel um $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit Radius 1

e) $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall
Menge $C(I)$ (C: continuous, stetig) der stetigen Funktionen auf I ist Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (vgl. Beispiel 8.2d)).
Menge der diffbaren Funktionen auf I ist Unterraum von $C(I)$.

8.8 Satz

V ist ein $\mathbb{R}$.Vektorraum, U_1, U_2 sind Unterräume von V.

a) $U_1 \cap U_2 = \{u \in V | u \in U_1 \wedge u \in U_2\}$ ist Unterraum von V.

b) $U_1 + U_2 \coloneqq \{u_1 + u_2 | u_1 \in U_1 \wedge u_2 \in U_2\}$ Summe von U_1, U_2 ist Unterraum von V
(das ist nicht die Vereinigung $U_1 \cap U_2$!)

Beweis

Prüfe Unterraumkriterium 8.6

a) Übung: Prüfe $\mathcal{O} \in U_1 \cap U_2$? ✓, (1), (2)

b)
- $U_1 + U_2 \neq \emptyset$, denn $U_1 + U_2 \ni \mathcal{O} = \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_1} + \underbrace{\mathcal{O}}_{\in U_2}$
- Seien $v = u_1 + u_2, \quad u_1 \in U_1, \quad u_2 \in U_2$ und
  $w = u_1' + u_2', \quad u_1' \in U_1, \quad u_2' \in U_2$,
  also $v, w \in U_1 + U_2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \qquad \lambda v + \mu v = \lambda(u_1 + u_2) + \mu(u_1' + u_2')$$
$$= \underbrace{\lambda u_1 + \mu u_1'}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda u_2 + \mu u_2'}_{\in U_2} \qquad \in U_1 + U_2$$

8.9 Bemerkung

a) lässt sich für unendlich viele Unterräume ausweiten

b) lässt sich für endlich viele Unterräume ausweiten

- $U_1 \cup U_2$ ist im Allgemeinen kein Unterraum

8.10 Beispiel

- $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad G_1 = \{\lambda v | \lambda \in \mathbb{R}\}$
- $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ $\qquad G_2 = \{\mu w | \mu \in \mathbb{R}\}$

(vgl. 8.7a), Geraden durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, Unterräume

- $G_1 + G_2$ ist Ebene
- $G_1 \cap G_2$ ist $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$