Meca cel P III
Rappels de Meca

3.2) Eq de Newton

Selon newton on ~~p~~ connait le mouvement ~~d~~'un corps en connaissant $\vec{x}(t_0)$ et $\vec{v}(t_0)$

On suppose l'existence d'une fonction

$$F ; \begin{cases} \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{(t)} \to \mathbb{R}^{(N)} \\ \ddot{r} = F(r, \dot{r}, \vec{r}) \end{cases}$$

Eq de Newton reformulé par Laplace

?

il suffit de résoudre l'equation diff

$$\boxed{\ddot{r} = F(\cancel{r}, \dot{r}, t) \quad \begin{cases} r(t_0) = x_0 \\ \dot{r}(t_0) = v_0 \end{cases}}$$

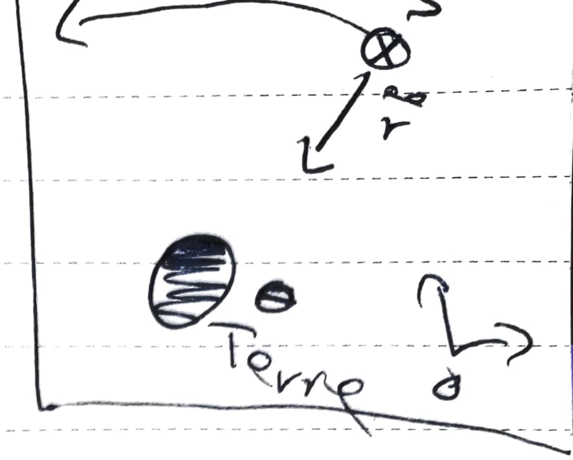
ce système diff est parfaitement décrit donc on connait le mouvement ~~de~~

~~Le mou~~ La chute libre d'un corps est décrit par la fonction

$$\boxed{\ddot{r} = -\mu \frac{r}{\|r\|^3}}$$

avec $r \in \mathbb{R}^3$ (l'espace des position)

3.3.1) Trajectoire dans un champ de gravité central



Le moment cinétique H au point O de m est pour son mouv de révolution

$$\vec{H} = m.\vec{OS} \wedge \frac{\partial \vec{OS}}{\partial t}\Big|_R = m\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}\Big|_R \quad \checkmark$$

S est la position du mobile, le moment cinétique est constant donc

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\Big|_R = m\dot{\vec{r}} \wedge \dot{\vec{r}} + m\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

donc le mouvement est plan !

On choisit de utiliser les coordonées polaire

$$\vec{v}(M)_{R} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(M)_R = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

soit l'équation de Newton

$$\boxed{m\begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} - 2\dot{r}.\dot{\theta} \end{pmatrix}_R = -G\frac{mM}{r^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_R}$$

On remarque alors que

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}.\dot{\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\dot{\theta} = cte$$

Le mobile va parcourir une aire $\frac{1}{2}r(rd\theta)$ pendant un temp dt

$$\boxed{A_{t_1 \to t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} r(r\dot{\theta})\,dt = k(t_2 - t_1)}$$

Loi des aires

$$\int r^2\dot{\theta}\,dt = c\,dt$$

avec le changement de variable $u = 1/r$ les equation (17) (18) donnent

$$\dot{r} = -c\frac{du}{d\theta} \qquad \ddot{r} = -c^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

l'equation de Newton plus la loi des aires donnent

$$\left|\begin{array}{ll} \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} \end{pmatrix} = -G\frac{M}{r^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & (E1) \\ \\ r^2\dot{\theta} = C & (E2) \end{array}\right.$$

on obtient alors finalement une equation differentielle sous sa forme canonique (Eq. 20)

$$u = \frac{\mu}{C^2}\left(1 + e\cos(\theta - \theta_0)\right)$$

avec θ_0 et e des constante d'integrat°

$$\boxed{\Leftrightarrow r = \frac{C^2/\mu}{(1 + e\cos(\theta - \theta_0))}}$$

on reconnait l'equation d'une conique !

avec

$$\begin{cases} C = r^2\dot{\theta} & \text{(~~l'angle~~ l'aire parcourue ~~pendant un temps dt~~ par unité de temps.} \\ \mu = GM. \end{cases}$$

3.3.2) Geometrie de l'ellipse