Espace L^p

par

Flavio MENDES, Jaques-Edouard GUTKNECHT, Florian MIRALLES

24 octobre 2016

Table des matières

1 Introduction

Ce travaille s'appuie sur la lecture du chapitre 2 du livre Analysis rédigé par Elliot Lieb et Michael Loss.
On va d'abord définir les espaces L^0, L^p et L^∞.
Tous ces espaces constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivables ni même continues.
Dans ce document, on va principalement se concentrer sur des inégalités, notamment celles de *Jensen*, *Hölder*, *Minkowski* et *Hanner*.
On terminera sur le fait que $||.||_p^p$ est différentiable et que les espaces L^p sont complets par rapport à sa semi-norme.

2 Défintions

Définition 1. *On définit L^0 étant l'ensemble de fonctions mesurables.*

$$L^0 = \{f : \Omega \to \mathbb{C}\ \forall B \in \sigma(\mathbb{C}), f^{-1}(B) \in \sigma(\Omega)\}$$

En particulier, si f est continue, alors f est mesurable.

Définition 1. *Un espace L^p est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où p est un nombre réel strictement positif.*
Soit Ω un espace mesurable, μ une mesure et $1 \leq p < /infty$ tel que :

$$L^p(\Omega, d\mu) = \{f : \Omega \to \mathbb{C}\ telque\ f \in L^0\ et\ \int_\Omega |f|^p\ d\mu < +\infty\}$$

Sur un domaine X d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, la mesure est en général celle de Lebesgue.

On exclut le cas où $p < 1$ car on va définir une application dépendante de p et montrer que celle-ci vérifie les propriétés d'une norme. Or, si $p < 1$, la troisième propriété de la norme (l'inégalité triangulaire, cas particulier de l'inégalité de Minkowski) n'est pas vérifiée.
De plus, $L^p(\Omega, d\mu)$ est un espace vectoriel.

Remarque : Dans la suite, on notera cet espace $L^p(\Omega)$ ou $L^p_\mu(\Omega)$.

2.1 Norme p

Soit $f \in L^p_\mu(\Omega)$
Pour tout p appartenant à $[1, +\infty[$, on définit la norme suivante :

$$\|f\|_p = (\int_\Omega |f(x)|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Qui a les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f \in L^p_\mu(\Omega)$ $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ (homogénéité)
(ii) $f \in L^p_\mu(\Omega)$, $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0\ \mu\ p.p$ (séparation)
(iii) $f, g \in L^p_\mu(\Omega)$, $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (inégalite triangulaire)

Remarque : $\|f\|_p$ est en réalité une semi-norme en raison de la propriété (ii), car il pourrait exister $f \in L^P(\Omega)$ et $x \in \Omega$ tel que : $||f||_p = 0$ et $f(x) \neq 0$
De plus à partir de l'inégalité triangulaire il vient naturellement que :

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \|\lambda f + (1-\lambda) g\|_p \leq \lambda\ \|f\|_p + (1-\lambda)\|g\|_p$$

On utilise la propriété (i) et (ii) en remarquant que $\lambda \in [0,1] \Rightarrow (1-\lambda) > 0$
Commentaire sur la preuve :
(i) et (ii) sont vraies par propriétés de l'intégrale.
(iii) Ce résultat découle de l'inégalité de Minkowski et sera démontré plus tard.

2.2 Norme infini

Remarque : Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction des espaces L^∞ de fonctions bornées. Les espaces L^p sont appelés espaces de Lebesgue.

Soit $f \in L^\infty_\mu(\Omega)$
Pour tout p appartenant à $[1, +\infty[$, on définit la norme suivante :
$\|f\|_\infty$ =inf$\{K : |f(x)| \leq K\ \mu\ p.p\}$
On a les trois propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $f \in L^\infty_\mu(\Omega)$ $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ (homogénéité)
(ii) $f \in L^\infty_\mu(\Omega)$, $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0\ \mu\ p.p$ (séparation)
(iii) $f, g \in L^\infty_\mu(\Omega)$, $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ (inégalité triangulaire)

Les propriétés (i) et (ii) se démontre simplement, la propriété (iii) sera démontrer plus tard, lorsque nous traiterons un cas particulier de l'inégalité de Minkowski.

On définit ess $\sup\limits_{x \in \Omega} |f(x)| := \|f\|_\infty$

Par définition $\|f\|_\infty$ est égal à un réel K, qui verifie $|f(x)| \leq K\ \mu$ p.p
Donc on a bien $|f(x)| \leq \|f\|_\infty\ \mu$ p.p
Bien que $\|f\|_\infty$ pourrait être confondu avec $\sup\limits_{x \in \Omega} |f(x)|$, il faut bien les distinguer.

Exemple : En effet soit f une fonction non continue définie par :
Soit f: $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto i \text{ si } x \neq 1 \text{ et 2i sinon} \end{cases}$
On obtient alors $\|f\|_\infty = 1$ et $\sup\limits_{x \in \Omega} |f(x)| = 2$

3 Inégalité de *Jensen*

La démonstration du théorème de Jensen se base, dans la majeur partie, sur une inégalité qui découle des fonctions convexes. Ici nous parlerons uniquement de fonctions convexes en dimension 1. On a le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit $J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité :*

$$J(x) \geq J(y) + V(x - y)$$

En particulier pour $y \in \mathbb{R}$, si $J'(y)$ existe on a $V = J'(y)$

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $J'(y)$ existe et $t \in [0, 1]$ on a :

$$J(y + t(x - y)) = J(tx + (1 - t)y) \leq tJ(x) + (1 - t)J(y)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{J(y + t(x - y)) - J(y)}{t} \leq J(x) - J(y)$$

comme $J'(y)$ existe alors quand $t \longrightarrow 0$:

$$J'(y)(x - y) + J(y) \leq J(x)$$

en posant $V = J'(y)$ on obtient le résultat. □

Définition 1. *Soient μ une mesure sur $\sigma(\Omega)$ tel que $\mu(\Omega) < \infty$ et $f \in L^1_\mu(\Omega)$, on appelle et on note moyenne de f, le réel $< f >:= \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f d\mu$.*

On est maintenant prêt à énoncer le théorème de Jensen et le démontrer.

Théorème 1. *Soient μ une mesure sur $\sigma(\Omega)$ tel que $\mu(\Omega) < \infty$. De plus on pose $J : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables et de plus $f \in L^1_\mu(\Omega)$. Alors*

(i) $[J \circ f]_- \in L^1_\mu(\Omega)$ où $[J \circ f]_-$ est la partie négative de $J \circ f$.

(ii) $< J \circ f > \geq J(< f >)$

Démonstration.

(i) On a J convexe alors d'après le lemme énoncé plus haut il vient :

$$\forall s, y \in \mathbb{R} J(s) \geq J(y) + V(s - y)$$

en particulier prenons $s = f(x)$ et $y =< f >$ alors il vient :

$$J \circ f(x) \geq J(< f >) + V(f(x) - < f >)$$

Donc :

$$[J\circ f(x)]_- \leq |J(< f >)+V(f(x)- < f >)| \leq |J(< f >)|+|V||f(x)|+|V|| < f > |$$

En intégrant sur Ω selon μ on obtient :

$$\int_\Omega [J \circ f(x)]_- d\mu \leq |J(< f >)|\mu(\Omega) + |V| \int_\Omega |f(x)|d\mu + |V|| < f > |\mu(\Omega)$$

Et cette quantité est fini car $\mu(\Omega) < \infty$ et que $f \in L^1_\mu(\Omega)$. D'où $[J \circ f]_- \in L^1_\mu(\Omega)$.

(ii) Montrons que $< J \circ f > \geq J(< f >)$ Tout d'abord d'après (i) on a $[J \circ f]_- \in L^1_\mu(\Omega)$ d'où $\int_\Omega J \circ f d\mu$ est bien défini mais peut très bien être égale à l'infini. Reprenons la première inégalité dont on s'est servi pour démontrer (i) :

$$J \circ f(x) \geq J(< f >) + V f(x) - V < f >$$

ce qui entraine en intégrant :

$$\int_\Omega J \circ f(x)d\mu \geq J(< f >)\mu(\Omega) + V \int_\Omega f(x)d\mu - V < f > \mu(\Omega)$$

d'où l'on tire en divisant par $\mu(\Omega)$, les $V < f >$ s'annulent et on a :

$$< J \circ f > \geq J(< f >)$$

$\square$

Remarque : on a l'égalité si et seulement si f est une constante.

4 Inégalité de *Hölder*

Théorème 1. *Soient p,q 2 indices tels que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *avec* $1\leq p,q\leq\infty$ *et* $f\in L^p(\Omega)$, $g\in L^q(\Omega)$ *tels que* $(fg)(x)=f(x)g(x)\in L^1(\Omega)$. *On a :*

$$|\int_\Omega fg\ d\mu|\ \leq\ \int_\Omega |f||g|\ d\mu\ \leq\ ||f||_p||g||_q$$

Remarques :

1. Le cas où $p=q=2$, on a l'inégalité de $Cauchy-Schwarz$:

$$|\int_\Omega fg\ d\mu|^2\leq\int_\Omega |f|^2\ d\mu\ \int_\Omega |g|^2\ d\mu$$

2. Soient $f_1,...,f_m$ des fonctions de Ω avec $f_i\in L^{p_i}(\Omega)$ et $\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_m}=1$.
En posant $f=f_1$ et $g=f_2f_3...f_m$,

$$|\int_\Omega f_1f_2...f_m\ d\mu|\ \leq\ ||f_1||_{p_1}||f_2||_{p_2}...||f_m||_{p_m}$$

Démonstration. Distinguons plusieurs cas :

1. Si $p=1$ et $q=\infty$ (ou $q=1$ et $p=\infty$) :
On a que : $|g|\leq||g||_\infty\ \mu-$p.p.
donc : $|fg|=|f||g|\leq||g||_\infty|f|\ \mu-$p.p.
$\Rightarrow\int_\Omega|fg|\ d\mu\leq\int_\Omega||g||_\infty|f|\ d\mu=||g||_\infty\int_\Omega|f|\ d\mu=||g||_\infty||f||_1$
d'où l'inégalité voulue.
2. Si $p\in]1;+\infty[$ et $q\in]1;+\infty[$:
— Si $||f||_p=0$ (ou $||g||_q=0$) :
On a : $\int_\Omega|f|^p\ d\mu=0$ (ou $\int_\Omega|g|^q\ d\mu=0$)
donc : $f=0\ \mu-$p.p. (ou $g=0\ \mu-$)
$\Rightarrow|fg|=0\ \mu-$p.p.
$\Rightarrow\int_\Omega|fg|\ d\mu=0$
d'où l'inégalité voulue.
— Si $||f||_p=+\infty$ ou $||g||_q=+\infty$, alors on a l'inégalité voulue.
— On suppose $||f||_p\in]0;+\infty[$ et $||g||_q\in]0;+\infty[$:
On a que : $\forall u>0\ \forall v>0$ et $t\in[0;1]$

$$u^tv^{1-t}\leq tu+(1-t)v$$

donc par concavité de $x\mapsto ln(x)$: $ln(u^tv^{1-t})=tln(u)+(1-t)ln(v)$
Posons $u=\frac{|f|^p}{||f||_p^p}$ et $v=\frac{|g|^q}{||g||_q^q}$ et $t=\frac{1}{p}$ donc : $(1-t)=\frac{1}{q}$
On a donc :

$$\frac{|f|}{||f||_p}\frac{|g|}{||g||_q}\leq\frac{1}{p}\frac{|f|^p}{||f||_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g|^q}{||g||_q^q}$$

$$\Rightarrow \frac{\int_\Omega |fg|\, d\mu}{||f||_p ||g||_q} \leq \frac{1}{p}\frac{\int_\Omega |f|^p\, d\mu}{||f||_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_\Omega |g|^q\, d\mu}{||g||_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

d'où, multipliant par le dénominateur (qui est strictement positif), on obtient l'inégalité de Hölder.

$\square$

4.1 Conséquence de l'inégalité de *Hölder*

L'inégalité de Hölder nous permet d'affirmer certaines propositions, commençons par mettre en relation (au sens de l'inclusion) les espaces L^p.

Proposition 1. *Soit μ une mesure sur $\sigma(\Omega)$ et telle que $\mu(\Omega) < +\infty$ alors pour $0 < p_1 < p_2$ on a la suite d'inclusion suivante : $L^\infty \subset ... \subset L^{p_2} \subset L^{p_1}$.*

Démonstration.

- On a pour tout $p \in \mathbb{N}*$. $|f|^p \leq \sup_\Omega |f|^p = ||f||_\infty^p$ μ-presque partout, d'où en intégrant selon μ on a :

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq ||f||_\infty^p.\mu(\Omega) \iff ||f||_p \leq ||f||_\infty.\mu(\Omega)^{1/p}$$

cette équivalence est vrai car $x \longrightarrow x^{1/p}$ est croissante. Ceci nous dit que si $f \in L^\infty$ alors $f \in L^p$ pour tout p.

- Montrons maintenant que pour $0 < p_1 < p_2$ on a $||f||_{p_2} \leq K||f||_{p_1}$. En effet, on applique Hölder à $f = f^{p_1}$ et $g = \chi_\Omega$, ainsi on se retrouve avec l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega |f|^{p_1} d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^{p_1 \times s} d\mu\right)^{1/s} \left(\int_\Omega \chi_\Omega d\mu\right)^{1/p_1}$$

$\iff$ pour $p_2 = p_1 \times s$:

$$\int_\Omega |f|^{p_1} d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^{p_2} d\mu\right)^{p_1/p_2} \mu(\Omega)^{1-\frac{p_1}{p_2}}$$

$\iff$

$$\left(\int_\Omega |f|^{p_1} d\mu\right)^{1/p_1} \leq \left(\int_\Omega |f|^{p_2} d\mu\right)^{1/p_2} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$$

$\iff$ pour $K = \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}$:

$$||f||_{p_1} \leq K||f||_{p_2}$$

Ainsi pour tout $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$ on a $f \in L^{p_2} \Longrightarrow f \in L^{p_1}$. $\square$

Cependant dans le cas où Ω n'est pas de mesure fini nous avons tout de même la proposition suivante :

Proposition 1. *Soit* $f \in L^p_\mu(\Omega) \bigcap L^q_\mu(\Omega)$ *avec* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *alors on a l'inégalité*

$$||f||_r \leq ||f||_p^\alpha ||f||_q^{1-\alpha}$$

et

$$f \in L^r_\mu(\Omega)$$

avec $p \leq r \leq q$ *satisfaisant* $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$ *et* $0 \leq \alpha \leq 1$.

Démonstration. Nous allons distinguer deux cas, le cas où $q < \infty$ et le cas où $q = \infty$:

- Commençons par le cas où $q = \infty$, donc pour p fixé fini et pour tout $p \leq r < \infty$ on a :

$$||f||_r = \left(\int_\Omega |f|^r d\mu\right)^{1/r} = \left(\int_\Omega |f|^{p+r-p} d\mu\right)^{1/r}$$

$$= \left(\int_\Omega |f|^p |f|^{r-p} d\mu\right) \leq ||f||_\infty^{\frac{r-p}{r}} \left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}\frac{p}{r}} = ||f||_\infty^{1-\frac{p}{r}} ||f||_p^{\frac{p}{r}}$$

Nous sommes passé de l'égalité à l'inégalité grâce à :$|f|^{\frac{r-p}{r}} \leq ||f||_\infty^{\frac{r-p}{r}}$
De plus, en posant $\alpha = \frac{p}{r}$ on a bien $0 < \alpha \leq 1$ et aussi $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p}$.

- Maintenat traitons le cas où q est fini. Posons ,pour $0 < \alpha \leq 1$, $r = r\alpha + (1-\alpha)r$ de là on obtient :

$$\int_\Omega |f|^r d\mu = \int_\Omega |f|^{r\alpha} |f|^{(1-\alpha)} d\mu$$

par Hölder :

$$\int_\Omega |f|^{r\alpha} |f|^{(1-\alpha)} d\mu \leq ||f||_p^{r\alpha} ||f||_q^{r(1-\alpha)}$$

D'où l'on tire :

$$||f||_r \leq ||f||_p^\alpha ||f||_q^{1-\alpha}$$

Donc puisque $f \in L^p_\mu(\Omega) \bigcap L^q_\mu(\Omega)$ alors $||f||_p^\alpha < \infty$ et $||f||_q^{1-\alpha} < \infty$ et donc $||f||_r < \infty$ de là $f \in L^r_\mu(\Omega)$. $\square$

Remarque : Grâce à ce qui a été dis plus haut on déduit que $\lim_{r \longrightarrow +\infty} ||f||_r = ||f||_\infty$.

5 Inégalite de *Minkowski*

Soient Ω et Γ deux espaces de mesures μ et ν respectivement finies.
Soit f une fonction strictement positive de $\Omega \times \Gamma$ qui est $\mu \times \nu$ mesurable.
Et soit $p \in [1, +\infty[$ alors,

$$\int_\Gamma (\int_\Omega f(x,y)^p d\mu)^{\frac{1}{p}} d\nu \geq (\int_\Omega (\int_\Gamma f(x,y) d\nu)^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$$

Démonstration. Pour alléger la démonstration on pose :

$$H(x) := \int_\Gamma f(x,y) d\nu$$

Les fonctions H et $\int_\Omega f(x,y) d\mu$ sont mesurables.
On a :
$\int_\Omega H(x)^p d\mu = \int_\Omega (\int_\Gamma f(x,y) d\nu)) H(x)^{p-1} d\mu$ (car $H(x)^p = H(x) * H(x)^{p-1}$)
$= \int_\Gamma (\int_\Omega f(x,y) H(x)^{p-1} d\mu) d\nu$ (par Fubini positif)
On va maintenant appliquer l'inégalité de Hölder, en remarquant que :

$$\frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1 \text{ (on a choisi } p = p \text{ et } q = \frac{p}{p-1})$$
$$\text{et que } (p-1) \times \frac{p}{p-1} = p$$

Cela nous donne que :
$\int_\Omega H(x)^p d\mu \leq \int_\Gamma (\int_\Omega f(x,y)^p d\mu)^{\frac{1}{p}} \times (\int_\Omega \mathrm{H}(x)^p d\mu)^{\frac{p-1}{p}} d\nu$
On divise maintenant a gauche et à droite par :
$(\int_\Omega H(x)^p d\mu)^{\frac{p-1}{p}}$ (qui est toujours non nul, car f strictement positive)
Et on obtient l'inégalité de Minkowski :
$\int_\Gamma (\int_\Omega f(x,y)^p d(\mu))^{\frac{1}{p}} d\nu \geq (\int_\Omega (\int_\Gamma f(x,y) d\nu)^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$

□

5.1 Inégalité triangulaire

Soit $p \in [1, +\infty[$, $f, g \in L^p_\mu(\Omega)$, f et g strictement positives on a alors :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Démonstration. Tout d'abord étudions les cas particuliers ou $p = 1$ et $p = \infty$
Pour $p = 1$ on retrouve l'inégalité triangulaire classique :
$|f(x)| + |g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

Pour $p = \infty$ on rappelle que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ μ p.p
et de même que $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ μ p.p
Ainsi on a donc avec l'inégalité triangulaire que :
$|f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ μ p.p

$\Rightarrow \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

On étudie maintenant le cas où $1 < p < \infty$
On pose $F(x,1) = |f(x)|$ et $F(x,2) = |g(x)|$
Et soit ν la mesure de comptage de l'ensemble : $\Gamma = \{1,2\}$,
on a alors : $\nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = 1$

On s'intéresse tout d'abord à la partie droite de l'inégalité de Minkowski.
$(\int_\Gamma f(x,y)d\nu))^p = ((F(x,2) + F(x,1))^p$
$= (|f(x)|+|g(x)|)^p = (f(x)+g(x))^p$ (car f et g sont strictement positives)
On obtient donc que :
$(\int_\Omega(\int_\Gamma f(x,y)d\nu)^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = (\int_\Omega (f(x)+g(x))^p d\mu)^{\frac{1}{p}} = \|f+g\|_p$

Intéressons nous maintenant à la partie gauche de l'inégalité.
On pose $F(y) := \int_\Omega f(x,y)^p d\mu$, on a alors :
$\int_\Gamma(\int_\Omega f(x,y)^p d(\mu))^{\frac{1}{p}} d\nu = \int_\Gamma (F(y))^{\frac{1}{p}} d\nu$
$= F(1)^{\frac{1}{p}} + F(2)^{\frac{1}{p}}$
$= (\int_\Omega f(x)^p d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int_\Omega f(y)^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$
$= \|f\|_p + \|g\|_p$

Ainsi nous avons bien l'inégalité triangulaire :
$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

$\square$

6 Théorème de *Hanner*

Théorème 1. *Soient $f, g \in L^p_\mu(\Omega)$ avec μ une mesure sur $\sigma(\Omega)$. Nous avons les inégalités suivantes :*

(1) Pour $1 \leq p \leq 2$:

$$||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p \geq (||f||_p + ||g||_p)^p + |||f||_p - ||g||_p|^p$$

(2) Et pour $2 \leq p < \infty$

$$(||f+g||_p + ||f-g||_p)^p + |||f+g||_p - ||f-g||_p|^p \geq 2^p(||f||_p^p + ||g||_p^p)$$

Démonstration.

- La preuve va se faire en plusieurs étape tout d'abord nous allons poser deux fonctions :

$$\forall r \in [0,1] \alpha(r) = (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}$$

et

$$\beta(r) = ((1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1})r^{1-p}$$

avec $\beta(0) = 0$ si p<2 et $\beta(0) = +\infty$ si p>2, puis nous définissons : pour $R := \frac{||g||_p}{||f||_p}$, $F_R(r) = \alpha(r) + \beta(r)R^p$. Montrons que F_R est maximum en $r = R$ si p<2. on a pour tout $r \in]0,1[$:

$$dF_R(r) = (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}] + (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}]\frac{R^p}{r^{p-1}}$$

$-(p-1)[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}]\frac{R^p}{r^p}$
en développant $(1+r)^{p-1} = (1+r)^{p-2}(1+r)$ et $(1-r)^{p-1} = (1-r)^{p-2}(1-r)$ on a :

$$F_R'(r) = (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}](1 - R^p/r^p)$$

de là on remarque que cette dérivé s'annule si r=R. De plus étudions le signe de F'

* supposons tout d'abord p>2 alors p-2>0 et donc par conséquent : pour $0 < r \leq 1$ $(1+r)^{p-2} \geq (1-r)^{p-2}$.
-Alors pour $R < r$ entraine $R/r < 1$ ceci implique que $F'(r) > 0$
-Et pour $R > r \implies F'(r) < 0$ donc R est un mimimum pour p>2.

** Même procédé pour p<2 seulement l'inégalité qui change le signe de F' au alentour de R est pour $0 < r \leq 1$ $(1+r)^{p-2} \leq (1-r)^{p-2}$.

- Calculons $F_R(R)$:

$$F_R(R) = (1+R)^{p-1} + (1-R)^{p-1} + (1+R)^{p-1}R - (1-R)^{p-1}R$$

en factorisant il vient :

$$F_R(R) = (1+R)^{p-1}(1+R) + (1-R)^{p-1}(1-R)$$

d'où si p<2 (inversement si p>2) :

$$\alpha(r) + \beta(r)R^p \leq |1+R|^p + |1-R|^p$$

$\Longleftrightarrow$ en posant $R = b/a$ avec a et b positif :

$$\alpha(r)a^p + \beta(r)b^p \leq |a+b|^p + |a-b|^p$$

- D'une manière générale pour A et B complexes on a :

$$\alpha(r)|A|^p + \beta(r)|B|^p \leq |A+B|^p + |A-B|^p$$

pour prouver cela il suffit de poser $A = a$ et $B = be^{i\theta}$ de ce fait on a, par ce qui a été dit plus haut, qu'il suffit de prouver :

$$\alpha(r)a^p + \beta(r)b^p \leq |a+b|^p + |a-b|^p \leq |a+be^{i\theta}|^p + |a-be^{i\theta}|^p$$

c'est a dire que $|a+be^{i\theta}|^p + |a-be^{i\theta}|^p$ est minimum pour $\theta = 0$ pour p<2. Et maximum pour p>2.

- (On se place toujours dans le cas où p<2) De là on écrit pour $f, g \in L^p_\mu(\Omega)$ et pour $x \in \Omega$

$$\alpha(r)|f(x)|^p + \beta(r)|g(x)|^p \leq |f(x)+g(x)|^p + |f(x)-g(x)|^p$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha(r)\int_\Omega |f|^p d\mu + \beta(r)\int_\Omega |g|^p d\mu \leq \int_\Omega |f+g|^p + |f-g|^p d\mu$$

$\Longrightarrow$ en divisant par $||f||_p^p$ puis en passant au sup à gauche et en se rappelant que $R = ||g||_p/||f||_p$ on a :

$$(1+||g||_p/||f||_p)^p + |1-||g||_p/||f||_p|^p \leq ||f||_p^{-p}[||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p]$$

et de là :

$$(||f||_p + ||g||_p)^p + |||f||_p - ||g||_p|^p \leq ||f+g||_p^p + ||f-g||_p^p$$

pour démontrer l'autre inégalité il suffit de se placer dans le cas où p>2 pour cette dernière étape.

$\square$

Remarque : On a l'égalité pour $p = 2$ et cette égalité est appelé **égalité du parallélogramme**. En effet pour $p = 2$ on a :
$||f + g||^2 + ||f - g||^2 \geq 2(||f||^2 + ||g||^2)$
et de la même manière $2(||f + g||^2 + ||f - g||^2 \leq 4(||f||^2 + ||g||^2)$ De ces deux inégalité on tire l'égalité du parallélogramme

$$||f + g||^2 + ||f - g||^2 = 2(||f||^2 + ||g||^2)$$

7 Différentiabilité des normes

Théorème 1. *Soient $f, g \in L^p(\Omega)$ et $1 < p < +\infty$. Alors :*

$$N : t \in \mathbb{R} \longmapsto N(t) = \int_\Omega |f(x) + tg(x)|^p \, d\mu \ \in \mathbb{R}$$

est dérivable et sa différentielle en $t = 0$ est :

$$\frac{d}{dt} N_{|t=0} = \frac{p}{2} \int_\Omega |f(x)|^{p-2} \{\bar{f}(x) g(x) + f(x)\bar{g}(x)\} d\mu$$

Remarques :

1. $|f|^{p-2} f$ est bien défini pour $p > 1$, même si f=0, $|f|^{p-2} f = 0$
2. Cette notion de différentiabilité est aussi appelée Gâteaux-différentiable.

Démonstration.

1. En termes de nombres complexes on a : $|z|^2 = z\bar{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$
   donc : $|f + tg|^p = [(f + tg)(\bar{f} + t\bar{g})]^{\frac{p}{2}} = (f\bar{f} + t(f\bar{g} + \bar{f}g + tg\bar{g}))^{\frac{p}{2}}$
   Faisons un développement limité en t=0 :

   $$\frac{(f\bar{f} + t(f\bar{g} + \bar{f}g + tg\bar{g}))^{\frac{p}{2}} - (f\bar{f})^{\frac{p}{2}}}{t} = \frac{p}{2}(f\bar{f})^{\frac{p}{2}-1}(f\bar{g} + \bar{f}g + tg\bar{g}) + o(t^2)$$

   d'où
   $$\lim_{t \to 0} \frac{|f + tg|^p - |f|^p}{t} = \frac{p}{2}|f|^{p-2}(f\bar{g} + \bar{f}g)$$
   donc $|f + tg|^p$ est différentiable.

2. De plus, on a par convexité de $x \mapsto x^p$:

   $$|f + tg|^p = |(1 - t)f + t(f + g)| \leq (1 - t)|f|^p + t|f + g|^p$$

   et finalement pour $-1 \leq t \leq 1$:

   $$|f|^p - |f - g|^p \leq \frac{1}{t}\{|f + tg|^p - |f|^p\} \leq |f + g|^p - |f|^p$$

   Donc par 1) et 2), on peut utiliser le théorème de convergence dominée et finalement on a :

   $$\frac{d}{dt} N_{|t=0} = \frac{p}{2} \int_\Omega |f(x)|^{p-2} \{\bar{f}(x) g(x) + f(x)\bar{g}(x)\} d\mu$$

□

8 Complétude

Théorème 1. *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy, alors il existe une unique fonction $f \in L^p_\mu(\Omega)$ telle que, quand $n \longrightarrow +\infty$ $f_n \longrightarrow f$ μ-presque partout.*
Ce qui donne en d'autres termes que l'espace semi normé $L^p_\mu(\Omega)$ est complet.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Si f_n converge vers une fonction f, alors on a :

$$||f_n - f||_p \leq ||f_n - f_{n_k}||_p + ||f_{n_k} - f||_p$$

pour f_{n_k} tel que $||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \frac{1}{2^k}$, comme f_n est de Cauchy alors $||f_n - f_{n_k}|| < \epsilon/2$ pour $\epsilon > 0$ quelconque. Il nous faut maintenant prouver que pour n'importe quel $\epsilon > 0$ $||f_{n_k} - f||_p < \epsilon/2$. On pose :

$$g_N = \sum_{k=1}^{N} f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$$

par conséquent :

$$||g_N||_p \leq \sum_{k=0}^{N} ||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_p \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

on en déduit que $g_N \longrightarrow g \in L^p_\mu(\Omega)$ quand $N \longrightarrow +\infty$ et puisque $g_{N-1} = f_{n_N} - f_{n_0}$ par passage à la limite on a :

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} f_{n_N} = g + f_{n_0} = f \in L^p_\mu(\Omega)$$

et donc pour $\epsilon > 0$ quelconque on a :

$$||f_{n_k} - f||_p < \epsilon/2$$

. $\square$