Inégalités d'intégrales

par

Mendes Flavio, Miralles Florian

4 décembre 2016

1 Introduction

Ce travail s'appuie sur la lecture du chapitre 4 du livre Analysis , en particulier sur les sections 4.2 et 4.3, à savoir l'inégalité de Young et celle de Sobolev-Hardy-Littlewood. Nous les traiterons respectivement dans cet ordre. Dans la suite nous considérerons seulement la mesure comme celle de Lebesgue. Aussi p' sera le conjugué de p au sens $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

2 Inégalité de Young

2.1 Théorème de Young

Théorème 1. *Soient $p, q, r \geq 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$. Let $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,$g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$.*
Alors

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(g * h)(x)dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)h(y)dxdy \right| \leq C_{p,q,r,n}||f||_p||g||_q||h||_r$$

La constante $C_{p,q,r,n} = (C_pC_qC_r)^n$ avec $C_p^2 = p^{1/p}p'^{1/p'}$, où p' est le conjugué de p au sens où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$.

Remarque :

(1) On a égalité si et et seulement

$$f(x) = Aexp(-p'(x-a, J(x-a)) + ik.x)$$

$$g(x) = Bexp(-q'(x-b, J(x-b)) - ik.x)$$

$$h(x) = Cexp(-r'(x-c, J(x-c)) + ik.x)$$

Où A,B,C sont des complexes, a,b,c,k sont des vecteurs réels de $\mathbb{R}^n$ et J une matrice symétrique définie positive.

(2) Aussi $C_p = 1/C'_p$.

Démonstration. On va traiter le cas de version simple sans la constante.
On sait que f, g et h sont réelles et non-négatives.
Posons :

$$\alpha(x,y) = f(x)^{\frac{p}{r'}} g(x-y)^{\frac{q}{r'}}$$

$$\beta(x,y) = g(x-y)^{\frac{q}{p'}} h(x)^{\frac{r}{p'}}$$

$$\gamma(x,y) = f(x)^{\frac{p}{q'}} h(x)^{\frac{r}{q'}}$$

donc :

$$\alpha(x,y)\beta(x,y)\gamma(x,y) = f(x)^{\frac{p}{r'}+\frac{p}{q'}} g(x-y)^{\frac{q}{r'}+\frac{q}{p'}} h(x)^{\frac{r}{p'}+\frac{r}{q'}}$$

Or $\frac{p(r'+q')}{r'q'} = p(1-\frac{1}{p'}) = 1$, $\frac{q(r'+p')}{r'p'} = q(1-\frac{1}{q'}) = 1$, $\frac{r(p'+q')}{q'p'} = r(1-\frac{1}{r'}) = 1$, et finalement on a :

$$I := \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \alpha(x,y)\beta(x,y)\gamma(x,y)dxdy$$

étant le terme de gauche de l'inégalité.
Vu que, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1$, on peut appliquer l'inégalité de *Hölder*, donc :

$$I \leq ||\alpha||_{r'}||\beta||_{p'}||\gamma||_{q'}$$

De plus,

$$||\alpha||_{r'} = \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p g(x-y)^q dxdy\right)^{\frac{1}{r'}} = ||f||_p^{\frac{p}{r'}}||g||_q^{\frac{q}{r'}}$$

$$||\beta||_{p'} = \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x-y)^q h(x)^r dxdy\right)^{\frac{1}{p'}} = ||g||_q^{\frac{q}{p'}}||h||_r^{\frac{r}{p'}}$$

$$||\gamma||_{q'} = \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)^p h(x)^r dxdy\right)^{\frac{1}{q'}} = ||f||_p^{\frac{p}{q'}}||h||_r^{\frac{r}{q'}}$$

L'inégalité de droite est conséquence d'un changement de variable de $y \mapsto y - x$ et d'intégration par rapport à y. $\square$

2.2 Inégalité faible de Young

Introduisons maintenant l'espace faible $L^q_\omega(\mathbb{R}^n)$. Contrairement à l'espace L^q, L^q_ω est composé de fonctions mesurables telles que :

$$\sup_{\alpha>0} \alpha|\{x \in \mathbb{R}^n,\ |f(x)| > \alpha\}|^{\frac{1}{q}} < \infty$$

Cette assertion est équivalente à :

$$||f||_{q,\omega} := \sup_{A\subset\mathbb{R}^n} |A|^{\frac{-1}{q'}} \int_A |f(x)|dx < \infty$$

Remarquons que $||\cdot||_{q,\omega}$ est bien une norme. Notons qu'on a l'inégalité suivante :

$$||f||_q^q := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q dx \geq \int_{|f|>a} |f(x)|^q dx \geq \alpha^q|\{x \in \mathbb{R}^n,\ |f(x)| > \alpha\}|$$

On en déduit que toute fonction de $L^q(\mathbb{R}^n)$ est aussi dans $L^q_\omega(\mathbb{R}^n)$

Théorème 1. *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q_\omega(\mathbb{R}^n)$ et $1 < p, q, r < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 2$. on a :*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(x-y) h(y) dx dy \right| \leq K_{p,q,r,n} ||f||_p ||g||_{q,\omega} ||h||_r$$

Remarque : La fonction $x \longmapsto g(x) = |x|^{-\lambda}$ appartient à l'espace faible $L^{n/\lambda}_\omega(\mathbb{R}^n)$. on peut, dès lors, énoncer l'inégalité HLS.

3 Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev

Théorème 1. *Soient* $p, r > 1$ *et* $0 < \lambda < n$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{r} = 2$. *Soit* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
Alors il existe une constante $C(n, \lambda, p)$ *qui ne dépend pas de* f *et* h *telle que :*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)|x-y|^{-\lambda} h(y) dx dy \right| \leq C(n, \lambda, p) ||f||_p ||h||_r$$

De plus la constante satisfait l'inégalité :

$$C(n, \lambda, p) \leq \frac{n}{n-\lambda} (|\mathbb{S}^{n-1}|/n)^{\lambda/n} \frac{1}{pr} \left(\left(\frac{\lambda/n}{1-1/p} \right) \right)^{\lambda/n} + \left(\frac{\lambda/n}{1-1/r}^{\lambda/n} \right)$$

Remarque :
— On a égalité si et seulement si $\exists k$ tel que $h \equiv kf$
— Nous ne démontrerons pas ce cas mais supposons que $p = r = 2n/(2n - \lambda)$, alors

$$C(n, \lambda, p) = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(n - \lambda/2)} \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right)^{-1+\lambda/n}$$

Dans les cas où $p \neq r$ la constante n'est toujours pas déterminer.

Démonstration. On suppose que f et g sont des fonctions non-négatives et, sans perte de généralité, on peut supposer que $||f||_p = ||h||_r = 1$.
De plus, on a les formules suivantes :

$$|x|^{-\lambda} = \lambda \int_0^\infty c^{-\lambda-1} \chi_{\{|x|<c\}}(x) dc$$

$$f(x) = \int_0^\infty \chi_{\{f>a\}}(x) da$$

$$h(x) = \int_0^\infty \chi_{\{h>b\}}(x) db$$

En insérant ces 3 fonctions sur le terme de gauche on obtient : I

$$:= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)|x-y|^{-\lambda} h(y) dx dy$$

$$= \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} c^{-\lambda-1} \chi_{\{f>a\}}(x) \chi_{\{h>b\}}(y) \chi_{\{|x|<c\}}(x-y) dx dy da db dc$$

Remarquons que :

$$\chi_{\{x\in\mathbb{R}^n,\ |x|<c\}}(x-y) = \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n,\ |x-y|<c\}}(x) = \chi_{B(y,c)}(x)$$

De plus :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(y,c)}(x)dx = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}c^n$$

Donc :

$$I \leq \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty c^{-\lambda-1} I(a,b,c)dadbdc$$

$$I(a,b,c) := \frac{v(a)w(b)u(c)}{max\{v(a),w(b),u(c)\}},$$

$$w(b) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{h>b\}}(x)dx$$

$$v(a) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>a\}}(x)dx$$

$$u(c) = \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\right)c^n$$

Les normes de f et g peuvent s'écrire :

$$||f||_p^p = p\int_0^\infty a^{p-1}v(a)da = 1,$$

$$||h||_r^r = r\int_0^\infty b^{r-1}w(b)db = 1$$

Supposons d'abord que $w(b) \leq v(a)$, on a donc :

$$\int_0^\infty c^{-\lambda-1}I(a,b,c)dc \leq \int_{u(c)\leq v(a)} c^{-\lambda-1}w(b)u(c)dc + \int_{u(c)>v(a)} c^{-\lambda-1}w(b)v(a)dc$$

$$= w(b)\left(\frac{|\mathbb{S}|^{n-1}}{n}\right)\int_0^{(v(a)n/|\mathbb{S}|^{n-1}|)^{1/n}} c^{-\lambda-1+n}dc + w(b)v(a)\int_{(v(a)n/|\mathbb{S}|^{n-1}|)^{1/n}}^\infty c^{-\lambda-1}dc$$

$= \frac{1}{n-\lambda}(|\mathbb{S}^{n-1}/n|)^{\lambda/n}w(b)v(a)^{1-\lambda/n} + \frac{1}{\lambda}(|\mathbb{S}^{n-1}/n|)^{\lambda/n}w(b)v(a)^{1-\lambda/n}$
$= \frac{n}{\lambda(n-\lambda)}(|\mathbb{S}^{n-1}/n|)^{\lambda/n}w(b)v(a)^{1-\lambda/n}$

Supposons maintenant que $v(a) \leq w(b)$, on a donc :

$$\int_0^\infty c^{-\lambda-1}I(a,b,c)dc \leq \int_{u(c)\leq w(b)} c^{-\lambda-1}v(a)u(c)dc + \int_{u(c)>w(b)} c^{-\lambda-1}w(b)v(a)dc$$

$$= v(a)\left(\frac{|\mathbb{S}|^{n-1}}{n}\right)\int_0^{(w(b)n/|\mathbb{S}|^{n-1}|)^{1/n}} c^{-\lambda-1+n}dc + w(b)v(a)\int_{(w(b)n/|\mathbb{S}|^{n-1}|)^{1/n}}^{\infty} c^{-\lambda-1}dc$$
$= \frac{1}{n-\lambda}(|\mathbb{S}^{n-1}/n|)^{\lambda/n}v(a)w(b)^{1-\lambda/n} + \frac{1}{\lambda}(|\mathbb{S}^{n-1}/n|)^{\lambda/n}v(a)w(b)^{1-\lambda/n}$
$= \frac{n}{\lambda(n-\lambda)}(|\mathbb{S}^{n-1}/n|)^{\lambda/n}v(a)w(b)^{1-\lambda/n}$

En rassemblant tous les termes on a :

$$I \le \frac{n}{n-\lambda}(|\mathbb{S}^{n-1}|/n)^{\lambda/n} \times \int_0^\infty\int_0^\infty min\{w(b)v(a)^{1-\lambda/n}, v(a)w(b)^{1-\lambda/n}\}dadb$$

Par les éléments de preuve un peu plus haut on remarque que si $w(b) \le v(a)$ alors $min\{w(b)v(a)^{1-\lambda/n}, v(a)w(b)^{1-\lambda/n}\} = w(b)v(a)^{1-\lambda/n}$ et donc $w(b)v(a)^{1-\lambda/n} \le w(b)^{1-\lambda/n}v(a)$.
Ensuite on coupe l'intégrale en deux suivant b et s'en suit la majoration suivante :

$$I \le \int_0^\infty v(a)\int_0^{a^{p/r}} w(b)^{1-\lambda/n}dbda + \int_0^\infty v(a)^{1-\lambda/n}\int_{a^{p/r}}^\infty w(b)dbda$$

On a, par Fubini positif et un changement de variable, que :

$$\int_0^\infty v(a)^{1-\lambda/n}\int_{a^{p/r}}^\infty w(b)dbda = \int_0^\infty w(s)\int_0^{s^{r/p}} v(t)^{1-\lambda/n}dtds$$

Grace au théorème de Hölder, en prenant $m = (r-1)(1-\lambda/n)$, on a l'inégalité :

$$\int_0^{a^{p/r}} w(b)^{1-\lambda/n}b^{-m}b^m db \le \left(\int_0^{a^{p/r}} w(b)^{(1-\lambda/n)/(1-\lambda/n)}b^{r-1}db\right)^{1-\lambda/n}\left(\int_0^{a^{p/r}} b^{-mn/\lambda}db\right)^{\lambda/n}$$

Or pour que $\int_0^{a^{p/r}} b^{-mn/\lambda}$ soit définie il est nécessaire que $-mn/\lambda > 1$, en effet par l'absurde supposons $-mn/\lambda \le 1$ dans ce cas on a :

$$(r-1)(1-\lambda/n)n/\lambda \le 1$$

$\iff$

$$1 - \frac{\lambda}{n} \ge \frac{1}{r}$$

$\iff$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1 \ge \frac{1}{r}$$

$\iff$

$$\frac{1}{p} \ge 1$$

ce qui est absurde car $p > 1$. De plus calculons maintenant $\int_0^{a^{p/r}} b^{-mn/\lambda} db$ on a :

$$‘\left(\int_0^{a^{p/r}} b^{-mn/\lambda} db\right)^{\lambda/n} = \frac{a^{-\frac{pm}{r}+\frac{p\lambda}{rn}}}{-mn/\lambda+1}$$

remarquons que $-\frac{pm}{r} + \frac{p\lambda}{rm} = -p + \frac{\lambda}{n}p + \frac{p}{r} - \frac{\lambda p}{rm} + \frac{\lambda p}{rm} = p(1-\frac{1}{p})$.
Donc $-\frac{pm}{r} + \frac{p\lambda}{rm} = p - 1$ De plus

$$\frac{1}{-mn/\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda - (r-1)(1-\lambda/n)n}$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - (r-1)(n-\lambda)} = \frac{\lambda}{\lambda - rn - r\lambda + n - \lambda}$$

$$= \frac{\lambda}{n - r(n-\lambda)}$$

on obtient alors :

$$\int_0^{a^{p/r}} b^{-mn/\lambda} db = a^{p-1}\left(\frac{\lambda}{n-r(n-\lambda)}\right)^{\lambda/n}$$

De là on a la majoration :

$$\int_0^\infty v(a)\int_0^{a^{p/r}} w(b)^{1-\lambda/n} dbda \leq \left(\frac{\lambda}{n-r(n-\lambda)}\right)^{\lambda/n}\left(\int_0^\infty v(a)a^{p-1}da\right)\left(\int_0^\infty w(b)b^{r-1}db\right)^{1-\lambda/n}$$

et puisque, par ce qui a été dit plus haut, $\left(\int_0^\infty w(b)b^{r-1}db\right)^{1-\lambda/n} = \frac{1}{r^{1-\lambda/n}}$ et que $\int_0^\infty v(a)a^{p-1}da = \frac{1}{p}$, alors il résulte :

$$\left(\frac{\lambda}{n-r(n-\lambda)}\right)^{\lambda/n}\left(\int_0^\infty v(a)a^{p-1}da\right)\left(\int_0^\infty w(b)b^{r-1}db\right)^{1-\lambda/n} = \frac{1}{pr}\left(\frac{\lambda/n}{1-1/p}\right)^{\lambda/n}$$

On procède de même pour le second terme en utilisant la réécriture du second terme et on obtient l'inégalité :

$$\int_0^\infty v(a)^{1-\lambda/n}\int_{a^{p/r}}^\infty w(b)dbda \leq \frac{1}{pr}\left(\frac{\lambda/n}{1-1/r}\right)^{\lambda/n}$$

De là on a :

$$I \leq \frac{n}{n-\lambda}(|\mathbb{S}^{n-1}|/n)^{\lambda/n}\left(\frac{1}{pr}\left(\frac{\lambda/n}{1-1/r}\right)^{\lambda/n} + \frac{1}{pr}\left(\frac{\lambda/n}{1-1/p}\right)^{\lambda/n}\right)$$

Ce qui prouve :

$$C(n,\lambda,p) \leq \frac{n}{n-\lambda}(|\mathbb{S}^{n-1}|/n)^{\lambda/n}\frac{1}{pr}\left(\left(\frac{\lambda/n}{1-1/r}\right)^{\lambda/n}+\left(\frac{\lambda/n}{1-1/p}\right)^{\lambda/n}\right)$$

$\square$