

Géométrie non euclidienne

par

Mendes Flavio, Miralles Florian

22 octobre 2016

Table des matières

1	Introduction	3
2	Le demi-plan de Poincaré	4
2.1	Description	4
2.2	Définition d'une homographie	4
2.3	Groupe des homographies	5
2.4	Groupe des homographies restreints à \mathbb{H}	6
2.5	Générateurs de $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ et \mathbb{G}	7
3	Conservation des droites de \mathbb{H} par I, T_s, D_α	9
3.1	Droites de \mathbb{H}	9
3.2	Propriété de transitivité	12
3.3	Le birapport	13
4	Distances sur \mathbb{H}	17
4.1	Distance d	17
5	Géométrie dans \mathbb{H}	21
5.1	Triangles et Aires	21
5.2	Trigonométrie hyperbolique	23

1 Introduction

Euclide a annoncé en 300 avant notre ère les 5 axiomes suivants, ces axiomes forment la géométrie euclidienne :

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.
3. Etant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.

La géométrie non euclidienne met en défaut le cinquième postulat d'Euclide, tout en respectant les 4 précédents.

Cette géométrie fut introduite par Lobatchevski. En particulier, au début du 20ième siècle, Henri Poincaré propose une modèle de géométrie non euclidienne.

Dans cet article, nous traiterons plus particulièrement du demi-plan de Poincaré.

2 Le demi-plan de Poincaré

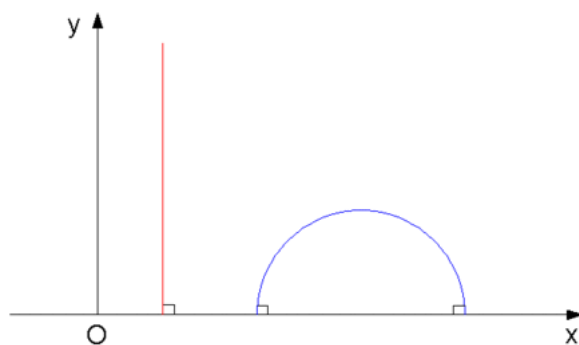
2.1 Description

Poincaré propose un modèle dans lequel les points sont les points de l'ensemble

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy | y > 0\}$$

On remarque que \mathbb{H} est une partie du plan complexe.

Les droites de \mathbb{H} peuvent s'identifier aux demi-cercles euclidiens centrés sur l'axe des abscisses, aussi certaines droites de \mathbb{H} s'apparentent aux demi-droites perpendiculaires à l'axe des abscisses.



2.2 Définition d'une homographie

Soit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{C}^2 . Une matrice inversible $A \in GL_2(\mathbb{C})$ définit une application

$$\begin{aligned} H_A &: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \mathbb{C}v &\mapsto \mathbb{C}Av \end{aligned}$$

L'application $A \mapsto H_A$ définit une action (à gauche) du groupe $GL_2(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$:

$$H_A \circ H_B = H_{AB}$$

En effet, $H_A \circ H_B(\mathbb{C}v) = H_A(\mathbb{C}Bv) = \mathbb{C}ABv = H_{AB}(\mathbb{C}v)$

Par conséquent, l'application H_A est bijective et $H_A^{-1} = H_{A^{-1}}$.

On a une identification naturelle entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ z &\mapsto \mathbb{C} \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\infty \mapsto \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$, on définit donc une application $h_A : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ grâce au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\mathbb{C}} & \xrightarrow{h_A} & \bar{\mathbb{C}} \\ \parallel & & \parallel \\ \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) & \xrightarrow{H_A} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \end{array}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} H_A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az + b \\ cz + d \end{pmatrix} = (cz + d) \begin{pmatrix} \frac{az+b}{cz+d} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} h_A(z) \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{--- } c \neq 0, h_A(z) &= \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}, & \text{si } z \neq -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}, & \text{si } z = \infty \\ \infty, & \text{si } z = -\frac{d}{c} \end{cases} \\ \text{--- } c = 0, h_A(z) &= \begin{cases} \frac{az+b}{d}, & \text{si } z \neq \infty \\ \infty, & \text{si } z = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

2.3 Groupe des homographies

Introduisons maintenant le groupe des homographies. Nous allons tout d'abord définir le groupe des homographies à coefficients complexes. Puis nous verrons le groupe des homographies à coefficients réels, laissant invariant \mathbb{H} . On considère maintenant le morphisme de groupe :

$$\begin{aligned} h : GL_2(\mathbb{C}) &\rightarrow \text{Bij}(\bar{\mathbb{C}}) \\ A &\mapsto h_A \end{aligned}$$

Remarque : Ici $\text{Bij}(\bar{\mathbb{C}})$ est le groupe des bijection de $\bar{\mathbb{C}}$ dans lui-même.

Définition 1. Le groupe des homographies de $\bar{\mathbb{C}}$ se définit comme l'image de h :

$$\mathbb{G} = \text{Im}(h)$$

Remarquons toutefois, puisque h est un morphisme de groupe, \mathbb{G} est un groupe. C'est le groupe des homographies à coefficients complexes.

Remarque : $\text{Ker}(h) = \{\lambda \text{Id}, \lambda \neq 0\}$ car $h_A = h_{\lambda A}$

2.4 Groupe des homographies restreints à \mathbb{H}

On considère $\bar{\mathbb{H}} = \{x + iy, y \geq 0\} \cup \{\infty\}$. Comme dit plus haut, les homographies qui laissent invariantes \mathbb{H} sont des homographies particulières. En effet, on a :

Lemme 1. Si $A \in SL_2(\mathbb{R})$ alors

$$h_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$$

$$h_A(\bar{\mathbb{H}}) = \bar{\mathbb{H}}$$

Démonstration. Soit $A \in SL_2(\mathbb{R})$, il suffit de montrer que la partie imaginaire est positive.

$$\begin{aligned} \Im(h_A(z)) &= \Im\left[\frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}\right] \\ &= \Im\left(\frac{acz\bar{z} + adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right) = \Im\left(\frac{adz + bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\right) \\ &= \frac{(ad - bc)\Im(z)}{|cz+d|^2} = \frac{\Im(z)}{|cz+d|^2} \end{aligned}$$

Comme h_A est bijective, on a $h_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$. De plus, $h_A(\infty) = a/c \in \bar{\mathbb{H}}$ et $h_A^{-1}(\infty) = -d/c$ \square

Définition 1.

$$\mathbb{G}_{\mathbb{R}} = h(SL_2(\mathbb{R}))$$

est un sous-groupe.

Vu que, $\text{Ker}(h) = \{\lambda \text{Id}, \lambda \neq 0\}$, on a :

$$\text{Ker}(h) \cap SL_2(\mathbb{R}) = \{\pm \text{Id}\}$$

donc ici,

$$\mathbb{G}_{\mathbb{R}} = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm \text{Id}\} = PSL_2(\mathbb{R})$$

Autre méthode moins convenable :

Montrons que $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ est une groupe pour la loi de composition interne \circ .

— Soit h_A l'homographie associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Remarquons que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det(A) = ad - bc = 1$, alors $h_A(z) = z$, d'où $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ contient l'élément neutre.

— Prenons h_A et h_B dans $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$. Vérifions que $h_A \circ h_B$ est aussi dans $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$.

$$h_A \circ h_B = \frac{a(\frac{ez+f}{gz+h}) + b}{c(\frac{ez+f}{gz+h}) + d} = \frac{aez + af + bgz + bh}{cez + cf + dgz + dh} = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)}$$

$$\text{Or } AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix},$$

d'où $h_A \circ h_B = h_{AB}$. Il reste à vérifier que $\det(AB) = 1$. On a que $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$

d'où $h_{AB} \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$.

— On a aussi $(h_A \circ h_B) \circ h_C = h_{AB} \circ h_C = h_{ABC} = h_A \circ h_{BC} = h_A \circ (h_B \circ h_C)$

— Il reste à montrer que pour tout $h_A \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$, h_A possède un inverse. On a pour A tel que $\det(A)=1$, $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

De plus, $h_{Id} = h_{A^{-1}A} = h_{A^{-1}} \circ h_A = (h_A)^{-1} \circ h_A$

2.5 Générateurs de $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ et \mathbb{G}

Dans toute la suite, $\overline{H} = H \cup \{\infty\}$ Dans cette partie, on considère les applications, $I : z \in \overline{H} \mapsto -\frac{1}{z} \in \overline{H}$ (l'application inverse),

$T_s : z \in \overline{H} \mapsto z + s \in \overline{H}$, $s \in \mathbb{C}$ (l'application translation), et

$D_\alpha : z \in \overline{H} \mapsto \alpha z$, avec $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (l'application homothétie).

Remarquons que la matrice associée à l'application I est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Celle

associée à T_s est $\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et finalement $\begin{pmatrix} \sqrt{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \end{pmatrix}$ est celle qui correspond à l'application D_α . Il est clair que ces trois matrices sont de déterminant 1, d'où ces 3 applications appartiennent à \mathbb{G} .

Proposition 1. $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ est engendré par $\{I, (T_s)_{s \in \mathbb{R}}, (D_\alpha)_{\alpha > 0}\}$.

\mathbb{G} est engendré par $\{I, (T_s)_{s \in \mathbb{C}}, (D_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{C}^*}\}$

Démonstration. Nous allons voir que toute homographie se décompose suivant ces 3 applications. En effet, distinguons deux cas :

— Cas où $c=0$:

On a : $ad - bc = 1 \Rightarrow ad = 1 \Rightarrow d = 1/a$

Donc : $h_A(z) = a^2z + ab = a^2(z + ba^{-1}) = D_{a^2} \circ T_{ba^{-1}}$

— Cas où $c \neq 0$:

On a : $ad - bc = 1 \Rightarrow b - ad = -1/c$

Donc : $h_A(z) = \frac{az+b-ad/c+ad/c}{cz+d}$

$= \frac{a/c(cz+d)+b-ad/c}{cz+d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2z+dc} = T_{a/c} \circ I \circ D_{c^2} \circ T_{dc}$

On en conclut que tout élément de $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ est composition des 3 applications décrites en début de section, d'où $\mathbb{G}_{\mathbb{R}} = \langle I; T_s; D_\alpha \rangle$ avec $\alpha > 0$ et $s \in \mathbb{R}$. \square

3 Conservation des droites de \mathbb{H} par I, T_s, D_α

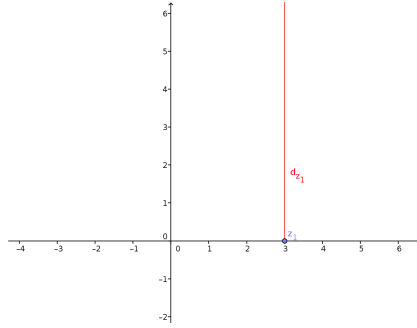
3.1 Droites de \mathbb{H}

Il existe deux types de droites de \mathbb{H} , celles qui se rapportent à une droite euclidienne, et celles qui correspondent à un demi-cercle euclidien.

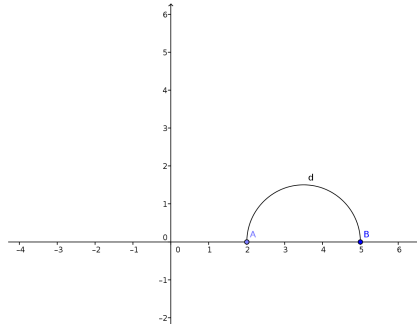
Définition 1. Les droites de \mathbb{H} sont :

$$d_{z_1} = \{z \in \mathbb{H} | \Re(z - z_1) = 0\}$$

pour $z_1 \in \mathbb{H}$



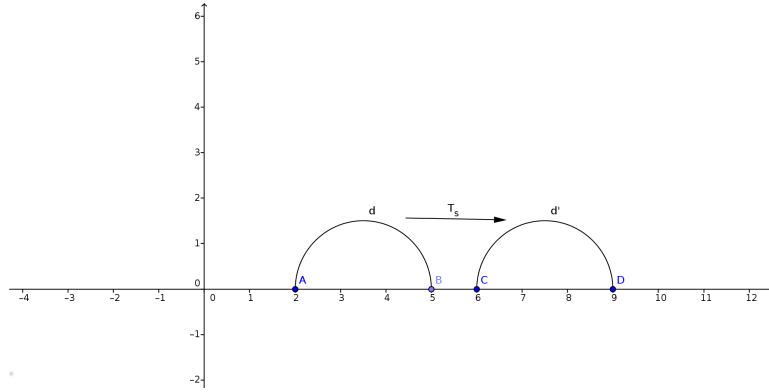
$$d_{z_0, r} = \{z \in \mathbb{H} | |z - z_0|^2 = r^2\}$$



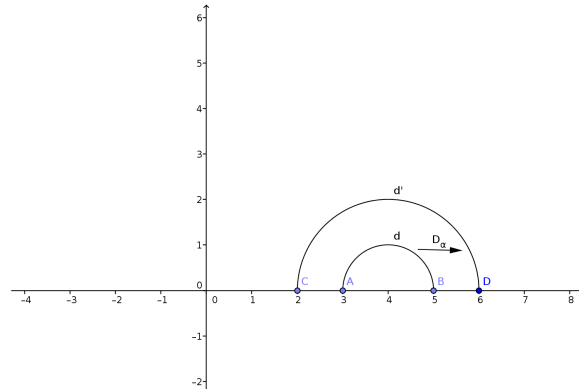
où $d_{z_0, r}$ est le demi-cercle euclidien centré en z_0 de rayon r .
 Pour ces deux types de droites, les générateurs T_s et D_α nous renvoient respectivement des droites translatées et des droites homothétiques, en particulier, pour le type de droite $d_{z_0, r}$. Il est d'ailleurs plus compliqué de montrer que la transformation I conserve les droites.

Lemme 1. Si $h_A \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ et d une \mathbb{H} -droite alors $h_A(d)$ est une \mathbb{H} -droite.

Démonstration. La preuve consiste à vérifier que les droites de \mathbb{H} sont invariants par les générateurs. Pour T_s c'est évident. Illustrons un exemple :

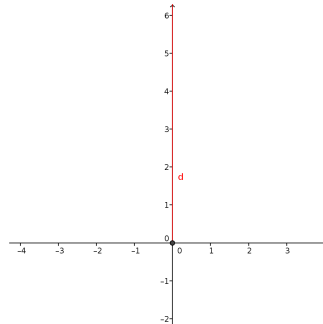


de même pour D_α :

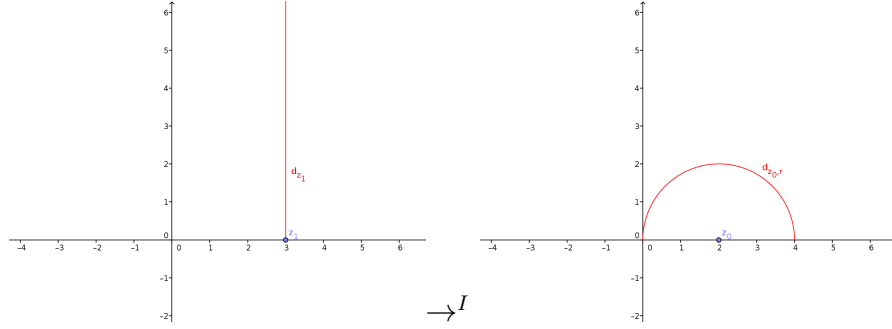


Montrons maintenant que les générateurs I conservent les droites de \mathbb{H} , il y a plusieurs cas à traiter :

- si $d_{z_1} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - z_1| = \Im(z - z_1)\}$ avec $z - 1$ dans \mathbb{R} on a :
 $|z - z_1| = \Im(z - z_1) \Leftrightarrow \Re(z - z_1) = 0$
 $\Leftrightarrow \Re(z) = z_1$ Soit $Z = I(z) = \frac{-1}{z}$ on a : $\Re(\frac{-1}{Z}) = z_1 \Leftrightarrow \Re(\frac{\bar{Z}}{|Z|^2}) = -z_1$
 - si $z_1 = 0$ on a $\Re(\frac{\bar{Z}}{|Z|^2}) = 0 \Leftrightarrow \Re(\bar{Z}) = 0 \Leftrightarrow \Re(Z) = 0$, autrement dit l'inversion laisse invariant la droite verticale des ordonnées :

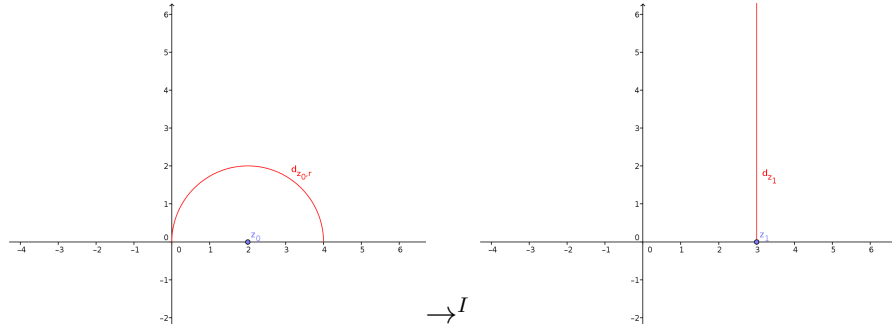


- si $z_1 \neq 0$ on a $I(d_{z_1}) = d_{z_0, r} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z|^2 + 2\Re(z)\frac{z_1}{2} = 0\}$ c'est à dire un demi-cercle de centre $z_0 = \frac{\bar{z}_1}{2}$ et de rayon $r = \frac{|z_1|^2}{4} = \frac{\bar{z}_1}{2} = z_0$

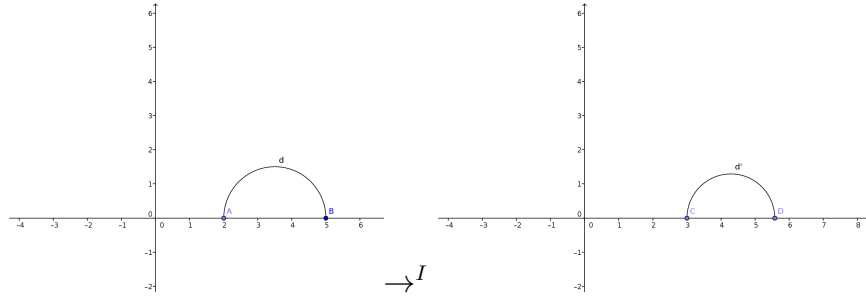


- si $d_{z_0, r} = \{z \in \mathbb{H} \mid |z - z_0|^2 = r^2\}$ (un demi-cercle euclidien). Nous avons $|z - z_0|^2 = |z|^2 - 2\Re(z\bar{z}_0) + |z_0|^2$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{|Z|^2} + 2\Re(\frac{\bar{z}_0}{Z}) = r^2 - |\bar{z}_0|^2$ pour $Z = \frac{-1}{z}$.
 $\Leftrightarrow 1 = |Z|^2(r^2 - |\bar{z}_0|^2) - 2|Z|^2\Re(\frac{\bar{z}_0}{Z})$
 Puisque $|Z|^2 = Z\bar{Z} : \Leftrightarrow 1 = |Z|^2(r^2 - |\bar{z}_0|^2) - 2\Re(Z\bar{z}_0)$

- si la droite $d_{z_0, r}$ asymptote la droite des ordonnées, c'est à dire si $r^2 - |\bar{z}_0|^2 = 0$ alors $\Re(z z_0) = \frac{-1}{2}$
 Autrement dit, si le rayon du demi-cercle vaut le module de z_0 (le centre du demi-cercle) alors la transformation de $d_{z_0, r}$ est une demi-droite euclidienne $d = \{z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) = \frac{-1}{2z_0}\}$.



- si $r^2 - |\bar{z}_0|^2 \neq 0$
 $|Z|^2 - 2\Re(Z)\frac{z_0}{r^2 - |\bar{z}_0|^2} = \frac{1}{r^2 - |\bar{z}_0|^2}$
 $\Leftrightarrow |Z|^2 + 2\Re(Z)\frac{z_0}{|\bar{z}_0|^2 - r^2} + \frac{1}{|\bar{z}_0|^2 - r^2} = 0$
 On a le nouveau centre $\bar{Z}_0 = \frac{z_0}{|\bar{z}_0|^2 - r^2}$ de là on peut déterminer le nouveau rayon $R^2 - |\bar{Z}_0|^2 = \frac{1}{r^2 - |\bar{z}_0|^2} \Leftrightarrow R^2 = \frac{1}{r^2 - |\bar{z}_0|^2} + \frac{|z_0|}{||\bar{z}_0|^2 - r^2|}$ donc si $r^2 - |\bar{z}_0|^2 \neq 0$ alors $I(d_{z, r}) = d_{Z_0, R}$



donc les générateurs de $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ conservent les droites. □

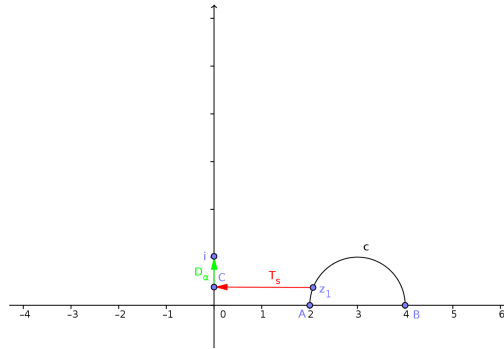
3.2 Propriété de transitivité

Proposition 1. On a : $\mathcal{T} = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \text{ tel que } z_1 \neq z_2 \neq z_3\}$.
 \mathbb{G} agit transitivement sur \mathcal{T} si :

$$\forall t, t' \in \mathcal{T} \exists ! g \in \mathbb{G} \quad gt = t'$$

Démonstration. On considère $h_{z_1, z_2, z_3}(z) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z} \times \frac{z_2 - z}{z_2 - z_3}$

donc : $z_2 \rightarrow 0, z_1 \rightarrow \infty, z_3 \rightarrow 1$
 donc : $h_{z_1, z_2, z_3}(z) = h_{z'_1, z'_2, z'_3}(h_A(z))$ Tout nombre complexe peut se rapporter à i , le schéma ci-dessous en est une illustration.



Autre méthode moins convenable. Il suffit de montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \exists h_A \in G \text{ tel que } h_A(z) = y$$

En effet montrer qu'il existe une homographie revient à déterminer sa matrice.

$$\frac{az+b}{cz+d} = z' \Leftrightarrow \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} = (x'+iy') \Leftrightarrow (ax+b+ia y) = (x'+iy')(cx+d+icy) \Leftrightarrow$$

$$(ax + b + iay) = (cxx' + dx' - cyy') + i(cx'y + cxy' + dy')$$

On aura le système suivant :

$$\begin{cases} ax + b + cyy' - cxx' - dx' = 0 \\ ay - cx'y - cxy' - dy' = 0 \end{cases}$$

Ce système est un système de 2 équations à 4 inconnues. On en déduit qu'il y a une infinité de solutions.

□

3.3 Le birapport

Définition 1. *Le nombre qui de 4 complexes 2 à 2 distincts associe :*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \times \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

s'appelle le birapport.

Proposition 1. *Le birapport a la propriété d'être invariant par $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$. En d'autres termes :*

$$[h_A(z_1), h_A(z_2), h_A(z_3), h_A(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

pour $h_A \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$.

Démonstration. On travaille avec $(z_1, z_2, z_3) = t$

$$h_t : z \mapsto \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z} \times \frac{z_2 - z}{z_2 - z_3}$$

donc :

$$h_t(z_1) = \infty$$

$$h_t(z_2) = 0$$

$$h_t(z_3) = 1$$

et donc :

$$h_t : z_1 \rightarrow \infty \leftarrow z'_1 : h_{t'}$$

$$h_t : z_2 \rightarrow 0 \leftarrow z'_2 : h_{t'}$$

$$h_t : z_3 \rightarrow 1 \leftarrow z'_3 : h_{t'}$$

et $h(\infty) = \infty, h(0) = 0, h(1) = 1$ d'où :

$$h_{t'}^{-1} \circ h_t(z) = z$$

Autre méthode moins convenable :

$$\begin{aligned} \text{En effet, } [h(z_1), h(z_2), h(z_3), h(z_4)] &= \frac{h(z_1)-h(z_3)}{h(z_1)-h(z_4)} \times \frac{h(z_2)-h(z_4)}{h(z_2)-h(z_3)} \\ &= \frac{(1-\frac{h(z_3)}{h(z_1)})}{(1-\frac{h(z_4)}{h(z_1)})} \times \frac{(1-\frac{h(z_4)}{h(z_2)})}{(1-\frac{h(z_3)}{h(z_2)})} \\ \text{où } 1 - \frac{h(z_3)}{h(z_1)} &= 1 - \frac{(\frac{az_3+b}{cz_3+d})}{(\frac{az_1+b}{cz_1+d})} = \frac{(az_1+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_1+d)}{(az_1+b)(cz_3+d)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(z_1-z_3)(ad-bc)}{(az_1+b)(cz_3+d)} = \frac{z_1-z_3}{(az_1+b)(cz_3+d)}$$

De meme,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{h(z_4)}{h(z_1)} &= \frac{z_1-z_4}{(az_1+b)(cz_4+d)}, \\ 1 - \frac{h(z_4)}{h(z_2)} &= \frac{z_2-z_4}{(az_2+b)(cz_4+d)}, \\ 1 - \frac{h(z_3)}{h(z_2)} &= \frac{z_2-z_3}{(az_2+b)(cz_3+d)}, \end{aligned}$$

par simplification on trouve :

$$\frac{(1 - \frac{h(z_3)}{h(z_1)})}{(1 - \frac{h(z_4)}{h(z_1)})} \times \frac{(1 - \frac{h(z_4)}{h(z_2)})}{(1 - \frac{h(z_3)}{h(z_2)})} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \times \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

□

Lemme 1. Pour $z, z' \in \mathbb{H}$ et α, ω les points à l'infini de la droite reliant z à z' , on a :

$$[z, z', \alpha, \omega] > 0$$

Démonstration. Pour $z, z' \in \mathbb{H}$ et α, ω les points à l'infini de la droite reliant z à z' , on a pour tous $h_A \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$:

$$[z, z', \alpha, \omega] = [h_A(z), h_A(z'), h_A(\alpha), h_A(\omega)]$$

Distinguons plusieurs cas,

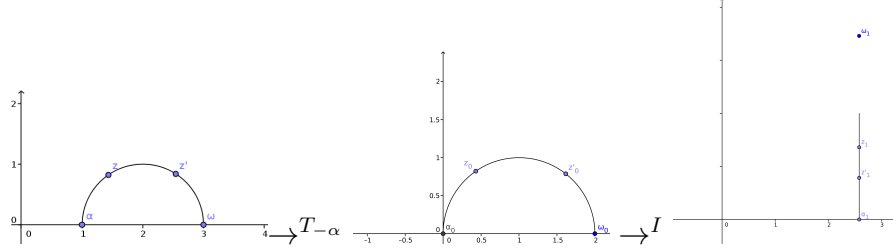
- cas où le chemin reliant ces deux points est une droite au sens euclidien dans ce cas il existe λ réel tel que $z = \lambda z'$

On a $\Re(z) = \alpha = \Re(z') = \Re(\omega)$ donc $\Re(z - \alpha) = \Re(z' - \alpha) = \Re(z' - \omega) = \Re(z - \omega) = 0$ ce sont des imaginaires purs. Cela entraine que le birapport est réel et de plus :

$$\frac{z - \alpha}{z - \omega} = \frac{i\Im(z)}{i\Im(z - \omega)} = \frac{\Im(z) > 0}{\Im(z - \omega) < 0}$$

De même pour $\frac{z' - \alpha}{z' - \omega}$ d'où le birapport est positif.

- cas où le chemin est un demi cercle au sens euclidien, alors on se ramène à une droite euclidienne : prenons $h_A = I \circ T_{-\alpha}$



Dans ce cas $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $z'_1 = kz_1$ d'où nous sommes ramené au premier cas.

□

Proposition 1. Notons d une \mathbb{H} -droite et z_1, z_2, z_3, z_4 deux à deux distincts dans \mathbb{H} alors

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1, z_2, z_3, z_4 \in d$$

Démonstration. • Première implication

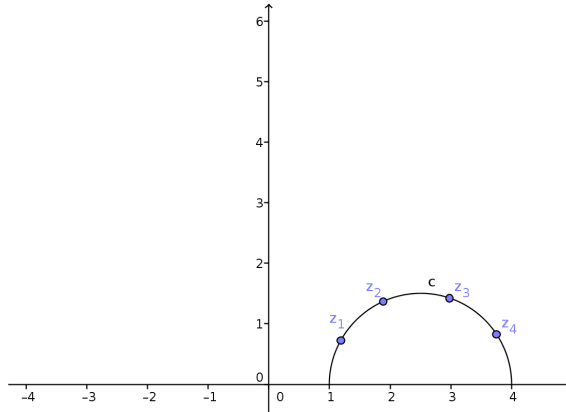
- cas où la droite est verticale :

$$\exists \alpha, \gamma, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

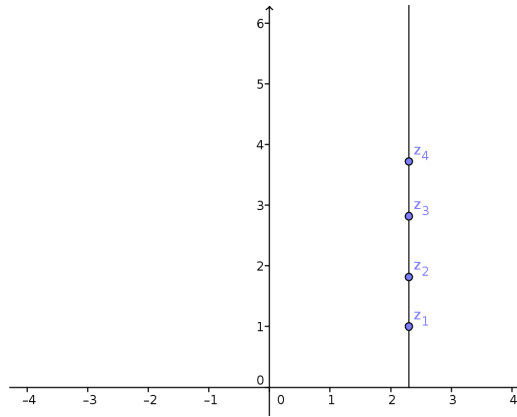
tel que,

$$\frac{z_1 - \gamma z_1}{z_1 - \alpha z_1} \times \frac{z_2 - \lambda z_2}{z_2 - \mu z_2} = \frac{1 - \gamma}{1 - \alpha} \times \frac{1 - \lambda}{1 - \mu} \in \mathbb{R}$$

- cas où on a :



Il suffit de procéder en composant par $I \circ T$ on a :



et on retombe sur le premier cas d'où $z_1, z_2, z_3, z_4 \in d \Rightarrow [z_1, z_2, z_3, z_4] \in \mathbb{R}$

- Seconde implication, si $[z_1, z_2, z_3, z_4] = r \in \mathbb{R}$ alors
 - soit $\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} = a$ et $\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} = b$ sont imaginaires purs :
 - soit ceux sont des réels

□

4 Distances sur \mathbb{H}

Comme dans la géométrie euclidienne, la géométrie hyperbolique possède elle-aussi des distances qui sont associées à l'espace \mathbb{H} .

4.1 Distance d

Montrons que $d(z, z') = |\log([z, z', \alpha, \omega])|$ est une distance. On rappelle que α et ω sont des points à l'infini. On a pour $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$[z, z', \alpha, \omega] \in \mathbb{R}_+$$

et

$$\forall z, z' \in \mathbb{H} \quad d(z, z') > 0$$

— Montrons que d sépare les points, en effet :

$$d(z, z') = 0 \iff |\log([z, z', \alpha, \omega])| = 0$$

$$\iff \log([z, z', \alpha, \omega]) = 0$$

$$\iff [z, z', \alpha, \omega] = 1$$

$$\iff \frac{z-\alpha}{z-\omega} = \frac{z'-\alpha}{z'-\omega}$$

$$\iff z = z'$$

— d est également symétrique $d(z, z') = |\log([z, z', \alpha, \omega])|$

$$= |\log([\frac{z-\alpha}{z-\omega} \times \frac{z'-\omega}{z'-\alpha}])|$$

$$= |\log(\frac{z'-\omega}{z'-\alpha} \times \frac{z-\alpha}{z-\omega})|$$

$$= |-\log(\frac{z'-\alpha}{z'-\omega} \times \frac{z-\omega}{z-\alpha})|$$

$$= |\log([z', z, \alpha, \omega])|$$

$$= d(z', z)$$

Pour montrer que d satisfait l'inégalité triangulaire, on va définir la longueur d'une courbe γ par

$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(s)|}{\Im(\gamma(s))} ds \quad \text{avec} \quad \gamma t \in [a, b] \mapsto \begin{cases} (x(t), y(t)) \\ \gamma(a) = z \\ \gamma(b) = z' \end{cases}$$

Lemme 1. $L(h_A \circ \gamma) = L(\gamma)$, pour tout $h_A \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$

Démonstration. Montrons que cette longueur est invariante par $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$, en effet : Soit $h_A \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ on a

$$L(h_A \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|d(h_A \circ \gamma)(s)|}{\Im(h_A \circ \gamma(s))} ds$$

Lemme 1.

$$\begin{aligned} dh_A(z) : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \lambda v \end{aligned}$$

avec $\lambda = \frac{1}{|cz+d|^2}$

Démonstration. $h_A(z + \theta)$

$$\begin{aligned} &= \frac{a(z + \theta) + b}{c(z + \theta) + d} - h_A(z) + h_A(z) \\ &= \frac{(a(z + \theta) + b)(cz + d) - (c(z + \theta) + d)(az + b)}{(c(z + \theta) + d)(cz + d)} \\ &= \frac{0z_2 + z[(ad + cb) - (ad + bc)] + \theta(ad - bc) + \theta(ac - ac) + (bd - db)}{(c(z + \theta) + d)(cz + d)} \end{aligned}$$

donc :

$$h_A(z + \theta) = h_A(z) + \frac{\theta}{(cz + d)^2} + \text{reste}(\theta)$$

d'où :

$$dh_A(z) = \frac{1}{(cz + d)^2}$$

□

On a que

$$d(h_A \circ \gamma)(s) = dh_A(\gamma(s)) \times \gamma'(s)$$

et

$$\Im(h_A \circ \gamma(s)) = \frac{\Im(\gamma(s))}{|c\gamma(s) + d|^2}$$

de ce fait

$$L(h_A \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|dh_A \circ \gamma(s)| |\gamma'(s)|}{\Im(\gamma(s))} |c\gamma(s) + d|^2 ds$$

or

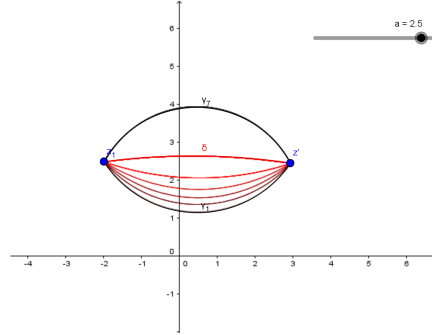
$$dh_A \circ \gamma(s) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{|c\gamma(s) + d|^2} = \frac{1}{|c\gamma(s) + d|^2}$$

d'où

$$L(h_A \circ \gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(s)|}{\Im(\gamma(s))} ds = L(\gamma)$$

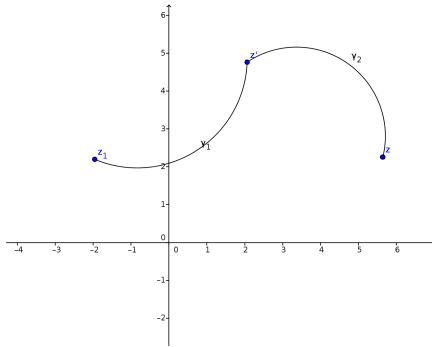
□

Définissons ensuite l'application δ qui pour deux point z, z' de \mathbb{H} associe $\inf\{L(\gamma_{z,z'}), \gamma_{z,z'} \in C^1([a, b])\}$ le schéma ci dessous donne une idée de l'application



Remarque : Pour cette application il est difficile de montrer la séparation des points, mais la symétrie et l'inégalité triangulaire sont des points plus évident à montrer.

On remarque que l'inf est minoré par 0 et puisque C^1 est non vide alors $\{L(\gamma), \gamma \in C^1([a, b])\}$ est non vide d'où l'inf est bien définie. Il est clair que pour cette application l'inégalité triangulaire est plus facile à montrer en effet considérons le chemin γ , de classe C^1 par morceaux, qui relie z à z'' en passant par z' définit par $\gamma = \gamma_1 \mathbf{1}_{[a, c]} + \gamma_2 \mathbf{1}_{[c, b]}$, $\gamma_1(c) = \gamma_2(c) = z'$, $\gamma(a) = z$, $\gamma(b) = z''$



On a donc $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ de là nous pouvons alors écrire $\inf_{\gamma \in C^1([a, b])} (L(\gamma)) \leq$

$L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ puisque nous avons minoré la somme des longueur il ne nous reste plus qu'à passer à l'inf à droite on obtient ainsi $\inf_{\gamma \in C^1([a, b])} (L(\gamma)) \leq$

$\inf_{\gamma_1 \in C^1([a, c])} L(\gamma_1) + \inf_{\gamma_2 \in C^1([c, b])} L(\gamma_2)$ de cette dernière inégalité résulte

$$\delta(z, z'') \leq \delta(z, z') + \delta(z', z'')$$

Proposition 1. d et δ coïncident sur \mathbb{H} .

Démonstration. Pour cela rappelons que $\forall m, m' \in \mathbb{H}$ l'application δ est invariante par $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ et c'est aussi le cas de d :

$$\delta(h_A(m), h_A(m')) = \delta(m, m')$$

et

$$d(h_A(m), h_A(m')) = d(m, m')$$

grâce à l'invariance du birapport par $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$. De ce fait par transitivité il suffit alors de montrer l'égalité des distances pour deux points quelconques. C'est à dire $\forall z_1, z_2$ il existe $h_A \in \mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ tel que $h_A(z_1) = ia$ et $h_A(z_2) = ib$. Soient $z = ia$ et $z' = ib$ dans \mathbb{H} , avec $\gamma : t \in [0, 1] \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ une courbe joignant z à z' on a :

$$d(ia, ib) = |\log(\frac{a}{b})|$$

Remarquons que $x(t) \equiv 0$ alors

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt \\ &\geq \left| \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} dt \right| \\ &= |\log(\frac{a}{b})| \end{aligned}$$

d'où

$$d(ia, ib) = |\log(\frac{a}{b})| \leq \int_0^1 \frac{|y'(t)|}{y(t)} dt = L(\gamma)$$

ceci entraîne

$$d(ia, ib) \leq \inf\{L(\gamma) | \gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{H}), \gamma(0) = (0, a), \gamma(1) = (0, b)\} = \delta(ia, ib)$$

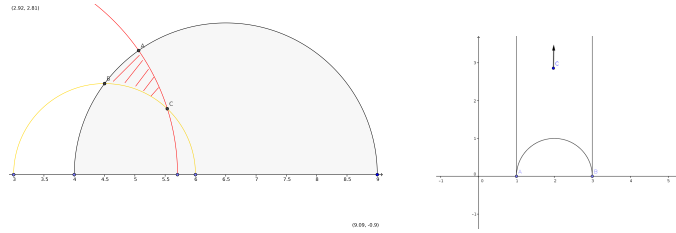
Remarquons qu'il y a égalité pour y monotone sur $[0, 1]$. Nous pouvons alors conclure que les deux applications coïncident et définissent bien des distances sur \mathbb{H} . \square

5 Géométrie dans \mathbb{H}

5.1 Triangles et Aires

Après avoir défini les géodésiques du demi-plan de Poincaré, les longueurs et les distances, nous allons désormais définir l'aire de figures géométriques sur \mathbb{H} .

Dans cette partie, nous allons plus particulièrement nous intéresser aux triangles hyperboliques. Ce sont des objets de la forme :



Définition 1. Un *triangle hyperbolique* est la donnée de trois points distincts (sommets) dans \mathbb{H}

Définition 1. On définit l'*aire hyperbolique* d'un sous-ensemble $D \subset \mathbb{H}$ par :

$$\mathbb{A}(D) = \int \int_D \frac{dx dy}{y^2}$$

Théorème 1. L'aire d'un triangle (A, B, C) vaut :

$$\pi - \hat{A} - \hat{B} - \hat{C}$$

Démonstration. — Cas 1 : $(A, B, C) = (\infty, 0, 1)$

Le domaine est alors :

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \right\}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(D) &= \int \int_D \frac{dx dy}{y^2} = \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= [\arcsin(1) - \arcsin(-1)] = \pi \end{aligned}$$

— Cas 2 :

$A = (1 + \cos(t), \sin(t))$ avec $\hat{A} \leq t \leq \pi$,

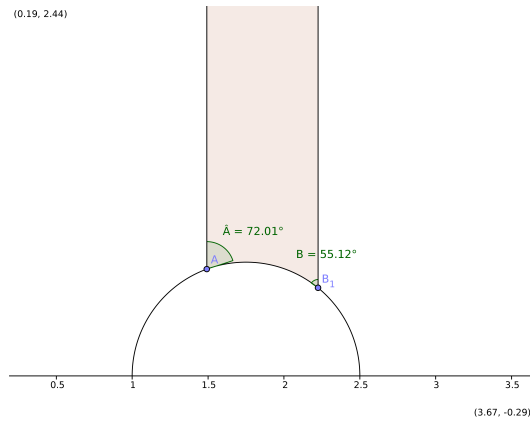
$$\mathbb{A}(T) = \int \int_T \frac{dxdy}{y^2} = \int_{\partial T} \frac{dx}{y}$$

d'après le théorème de Green.

$$= \int_{\hat{A}}^{\pi} \frac{-\sin(t)}{\sin(t)} dt = \pi - \hat{A}$$

— Cas 3 :

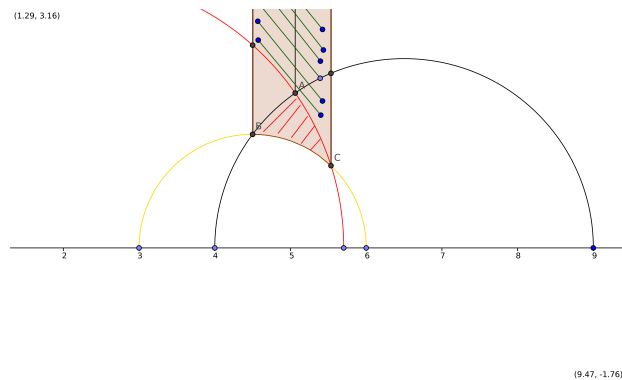
$$\mathbb{A}(T) = \pi - \hat{A} - \hat{B}$$



— Cas 4 :

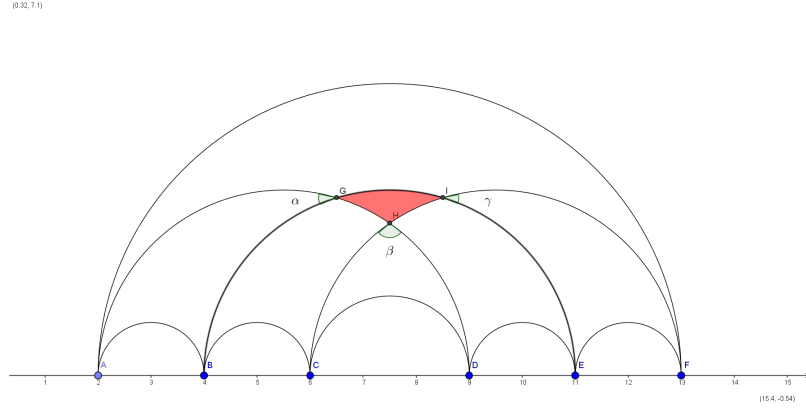
On procède de même avec $\hat{C} \leq t \leq \hat{B}$,

Pour avoir un triangle sans aucun point à l'infini on fait la même opération : On calcule l'aire en rouge

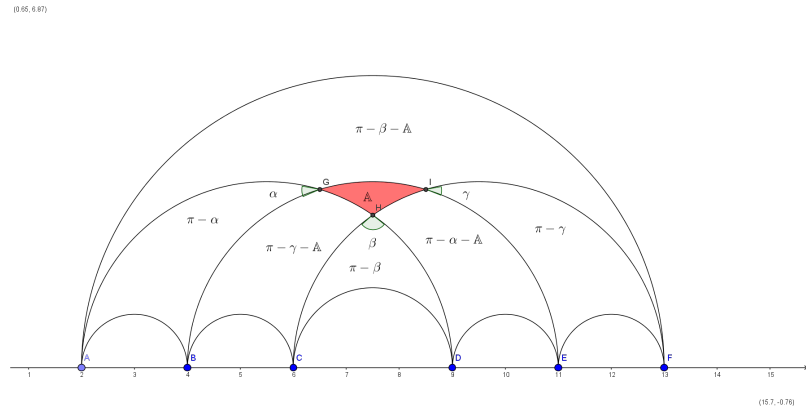


, puis on calcule l'aire hachurée en vert et par des procédés de soustraction on peut obtenir l'aire hachurée en rouge.

— cas 5 : on souhaite calculer l'aire du triangle (G,H,I) en rouge ci dessous



Grâce au cas que l'on a énoncés plus haut, nous pouvons calculer l'aire de (A,B,G) qui vaut $\pi - \alpha$, nous avons de même pour les autres figures, ce qui nous donne le dessin suivant :



L'aire du demi-cercle sans les 5 demi-cercles vaut 4π , de là on a la formulation suivante :

$$4\pi = 6\pi - 2(\alpha + \beta + \gamma) - 2A$$

ce qui entraine

$$A = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

□

5.2 Trigonométrie hyperbolique

Tout comme la géométrie euclidienne, la géométrie hyperbolique possède elle-aussi ses relations trigonométriques. C'est la trigonométrie hyperbolique. Considérons un triangle hyperbolique de côté a, b, c et d'angle $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. On

peut trouver les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
& \text{--- } \frac{\sin(\hat{A})}{\sinh(\frac{a}{k})} = \frac{\sin(\hat{B})}{\sinh(\frac{b}{k})} = \frac{\sin(\hat{C})}{\sinh(\frac{c}{k})} \\
& \text{--- } \cosh(\frac{c}{k})\sin(\hat{A})\sin(\hat{B}) = \cos(\hat{A})\cos(\hat{B}) + \cos(\hat{C}) \\
& \text{--- } \cosh(\frac{c}{k}) = \cosh(\frac{a}{k})\cosh(\frac{b}{k}) - \sinh(\frac{a}{k})\sinh(\frac{b}{k}) \times \cos(\hat{C})
\end{aligned}$$