Analyse numérique pour les EDP : Problème d'optimisation

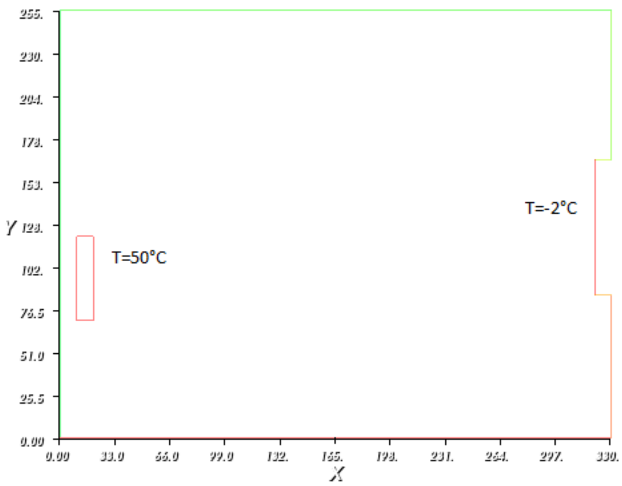
par

Mendes Flavio, Miralles Florian

19 avril 2017

1 Partie 1 : murs isolés

On modélise une salle de cours remplie d'air chauffée par un radiateur. Celui-ci maintenu à 50 degrés est situé à une extrémité de la salle, tandis qu'à l'autre extrémité on fixe une fenêtre à une température de -2 degrés.



On simule la variation de la chaleur dans cette pièce. On va s'intéresser au problème stationnaire suivant :

$$-k\Delta T = 0 \quad dans\ la\ salle\ \Omega$$

$$T = -2 \quad sur\ le\ bord\ de\ la\ fenetre$$

$$T = 50 \quad sur\ le\ bord\ du\ radiateur$$

$$k\nabla T.n = -0,31 \quad sur\ le\ reste\ des\ murs$$

1. La formulation variationnelle s'écrit :
   Définissons l'ensemble $V := \{v \in H^1\ tel\ que\ v_{|\partial R} = 0\ et\ v_{|\partial F} = 0\}$ où ∂R est le bord du radiateur et ∂F est le bord de la fenêtre. Il faut trouver $T \in V$ tel que :

$$-k\int_\Omega \Delta T v = 0$$

   Par la formule de Green on obtient :

$$k\int_\Omega \nabla T \nabla v - k\int_{\partial\Omega} \nabla T.nv = 0$$

   $\Leftrightarrow$

$$k\int_\Omega \nabla T \nabla v + 0,31\int_{\partial\Omega\backslash\partial F} v - k\int_{\partial F} \nabla T.nv = 0$$

   Or $\int_{\partial F} \nabla T.nv = 0$ car $v = 0$ sur ∂F. Il nous reste :

$$k\int_\Omega \nabla T \nabla v + 0,31\int_{\partial\Omega\backslash\partial F} v = 0$$

   On introduit un relèvement $T_g \in H^1$ où $g = \begin{cases} -2\ sur\ \partial F \\ 50\ sur\ \partial R \end{cases}$

et qui vérifie $\gamma_0(T_g) = g \in H^{1/2}(\partial R \cup \partial F)$

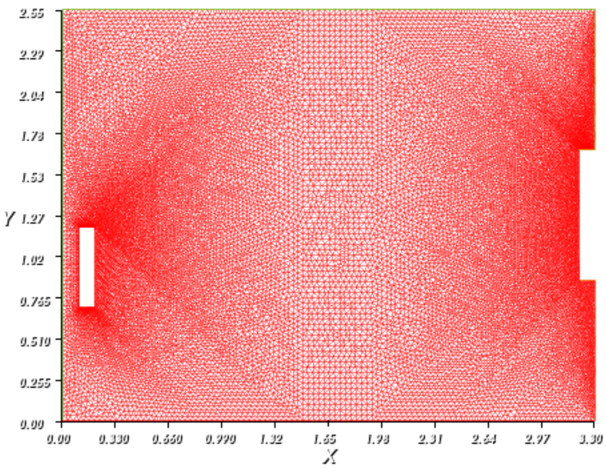
On va écrire $\delta_T = T - T_g$

Alors $\begin{cases} \delta_T = 0 \ sur \ \partial F \\ \delta_T = 0 \ sur \ \partial R \end{cases}$
donc $\delta_T \in V$

On a finalement la formulation suivante :

$$k \int_\Omega \nabla \delta_T \nabla v + k \int_\Omega \nabla T_g \nabla v + 0,31 \int_{\partial\Omega \setminus \partial F} v = 0$$

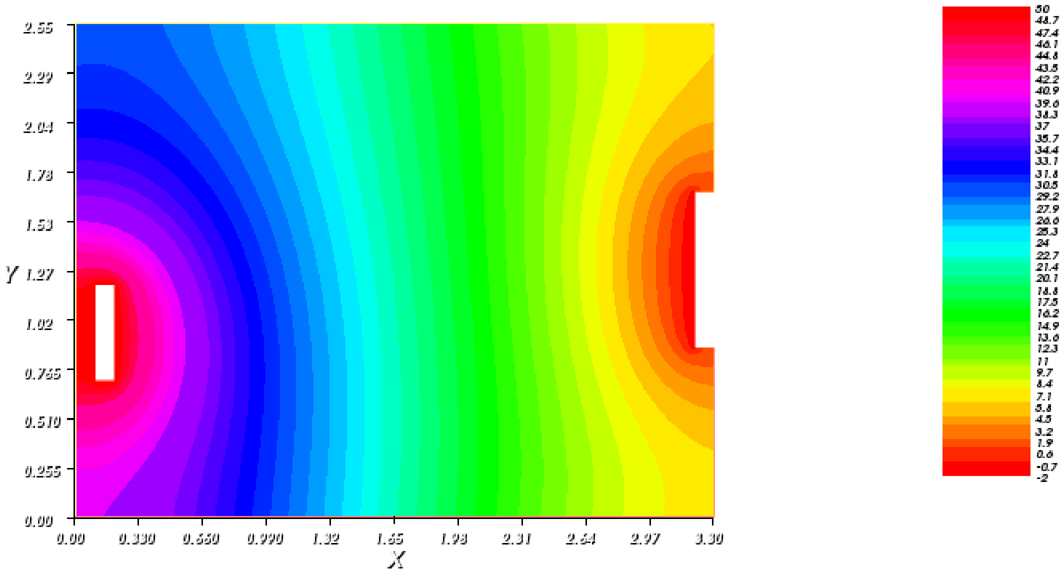
2. La salle est de longueur $3,3m$ et de largeur $2,55m$. La fenêtre est de longueur $0,81m$. Le radiateur est un rectangle de $0,5m$ sur $0,1m$. On prend $k = 0,25$.
On commence d'abord par mailler notre salle. On choisit arbitrairement 100 nœuds. Nous avons aussi fais le choix de rendre le maillage moins dense sur les cotés du radiateur en divisant par 2 le nombres de noeuds sur ceux ci.



```
int Nbnoeuds = 100;
//definition des constantes
real k=0.25;
real e=0.10;//espacement horizontal du radiateur
real f=0.70;//espacement vertical
real g=0.85;//L/3
real ep=0.10;//epaisseur fenetre
//dimension du radiateur
real lr=0.50;
real Lr=0.10;
//dimension de la pièce
real l=3.30;
real L=2.55;
//fenetre
real lf=0.85;
//nom bord fentre et radiateur
int F=40;
//definition de la salle
border S1(t=0,l){x=t;y=0;}
border S2(t=0,g){x=l;y=t;}
border S31(t=0,ep){x=l-t;y=g;}
border S3(t=g,g+lf){x=l-ep;y=t;label=F;}
border S32(t=l-ep,l){x=t;y=g+lf;}
border S4(t=g+lf,L){x=l;y=t;}
border S5(t=0,l){x=l-t;y=L;}
border S6(t=0,L){x=0;y=L-t;}
//definition du radiateur
border c1(t=e,Lr+e){x=t;y=f;label=1111;}
border c2(t=f,lr+f){x=Lr+e;y=t;label=2222;}
border c3(t=0,Lr){x=Lr+e-t;y=lr+f;label=3333;}
border c4(t=0,lr){x=e;y=lr+f-t;label=4444;}
//pour voir le domaine
plot(S1(Nbnoeuds)+S2(Nbnoeuds)+S31(Nbnoeuds/2)+S3(Nbnoeuds)+S32(Nbnoeuds/2)
+S4(Nbnoeuds)+S5(Nbnoeuds)+S6(Nbnoeuds)+c1(-Nbnoeuds/4)+c2(-Nbnoeuds/2)
+c3(-Nbnoeuds/4)+c4(-Nbnoeuds/2));
//maillage du domaine
mesh Th=buildmesh(S1(Nbnoeuds)+S2(Nbnoeuds)+S31(Nbnoeuds)+S3(Nbnoeuds)
+S32(Nbnoeuds)+S4(Nbnoeuds)+S5(Nbnoeuds)+S6(Nbnoeuds)+c1(-Nbnoeuds/2)
+c2(-Nbnoeuds/2)+c3(-Nbnoeuds/2)+c4(-Nbnoeuds/2));
plot(Th,wait=1);
//resolution
fespace Vh(Th,P1);
Vh uh,vh;

solve a(uh,vh, solver=LU)=int2d(Th)(dx(uh)*dx(vh)+dy(vh)*dy(uh))
+int1d(Th, S1,S2,S4,S5,S6,S31,S32)(0.31*vh)+on(1111,2222,3333,4444, uh=50)
+on(F, uh=-2);
plot(uh,wait=1,fill=1);
```

Résultat numérique :


2.55
2.29
2.04
1.78
1.53
Y 1.27
1.02
0.765
0.510
0.255
0.00
0.00
0.330
0.660
0.990
1.32
1.65
1.98
2.31
2.64
2.97
3.30
X
50
48.7
47.4
46.1
44.8
43.5
42.2
40.9
39.6
38.3
37
35.7
34.4
33.1
31.8
30.5
29.2
27.9
26.6
25.3
24
22.7
21.4
20.1
18.8
17.5
16.2
14.9
13.6
12.3
11
9.7
8.4
7.1
5.8
4.5
3.2
1.9
0.6
-0.7
-2

2 Partie 2

On modifie les conditions limites :

$$-k\Delta T = 0 \quad dans\ la\ salle\ \Omega$$
$$T = -2 \quad sur\ le\ bord\ de\ la\ fenetre$$
$$T = 50 \quad sur\ le\ bord\ du\ radiateur$$
$$-k\nabla T.n + h(T - T_f) = 0 \quad sur\ le\ reste\ des\ murs$$

avec $h = 1$ et $T_f = -2$ degrés.

3. Réécrivons la formulation variationnelle.
Définissons l'ensemble $V := \{v \in H^1\ tel\ que\ v_{|\partial R} = 0\}$ où ∂R est le bord du radiateur.
Il faut trouver $T \in V$ tel que :

$$-k \int_\Omega \Delta T v = 0$$

Par la formule de Green on obtient :

$$k \int_\Omega \nabla T \nabla v - k \int_{\partial\Omega} \nabla T.nv = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$k \int_\Omega \nabla T \nabla v + h \int_{\partial\Omega\backslash\partial F} (T - T_f)v$$

On introduit un relèvement $T_g \in H^1$ où $g = \begin{cases} -2\ sur\ \partial F \\ 50\ sur\ \partial R \end{cases}$
et qui vérifie $\gamma_0(T_g) = g \in H^{1/2}(\partial R \cup \partial F)$

On va écrire $\delta_T = T - T_g$

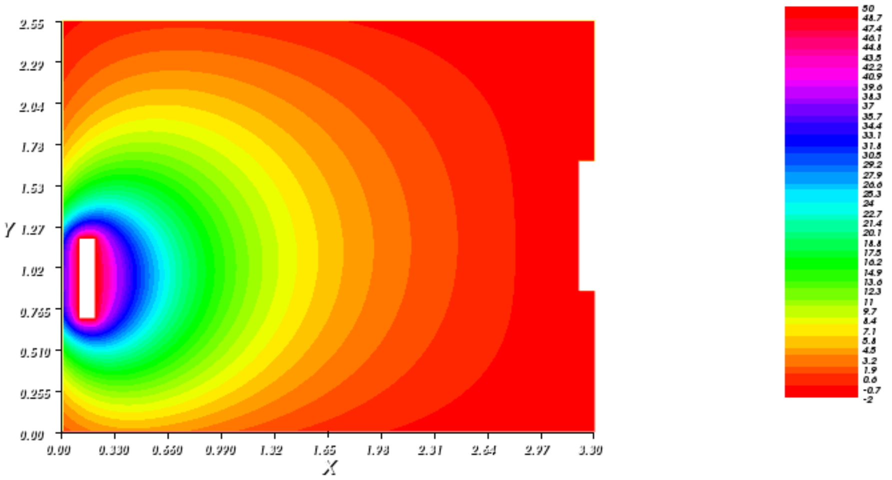
Alors $\begin{cases} \delta_T = 0\ sur\ \partial F \\ \delta_T = 0\ sur\ \partial R \end{cases}$
donc $\delta_T \in V$

On a finalement la formulation suivante :

$$k \int_\Omega \nabla \delta_T \nabla v + k \int_\Omega \nabla T_g \nabla v + h \int_{\partial\Omega\backslash\partial F} (T - T_f)v = 0$$

4. On reprend le même code qu'avant et on remplace le 'solve' par :
solve a(uh,vh, **solver**=**LU**)=**int2d**(Th)(k*(**dx**(uh)***dx**(vh)+**dy**(uh)***dy**(vh)))
+**int1d**(Th,S1,S2,S4,S5,S6,S31,S32)(uh*vh)
+**int1d**(Th,S1,S2,S4,S5,S6,S31,S32)(2*vh)+**on**(R, uh=50)+**on**(F, uh = -2) ;
plot(uh,**wait**=1,**fill**=1) ;

On obtient ainsi l'image suivante :



Ce que nous pouvons remarqué c'est que contrairement à l'autre modèle, ici on modélise une salle avec des murs non isolés.

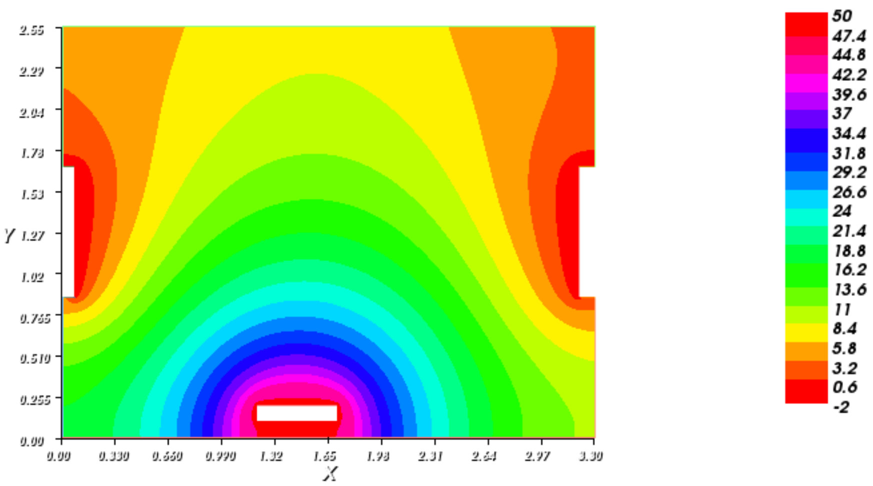
5. On refait les simulations avec le radiateur placé vers le milieu du mur du bas et une deuxième fenêtre sur le côté gauche, légèrement moins épaisse (3cm de moins) . On a le code suivant :

```
int Nbnoeuds = 100 ;
//definition des constantes
real k=0.25 ;
real e=1.20 ;//espacement horizontal du radiateur
real f=0.10 ;//espacement vertical
real g=0.87 ;//(255-81)/2
real ep=0.10 ;//epaisseur fenetre
//dimension du radiateur
real lr=0.50 ;
real Lr=0.10 ;
//dimension de la pièce
real l=3.30 ;
real L=2.55 ;
//fenetre
real lf=0.81 ;
//nom bord fentre et radiateur
int F=40 ;
int R=55 ;
//definition de la salle
border S1(t=0,l){x=t ;y=0 ;}
border S2(t=0,g){x=l ;y=t ;}
border S31(t=0,ep){x=l-t ;y=g ;}
border S3(t=g,g+lf){x=l-ep ;y=t ;label=F ;}
```

```
border S32(t=l-ep,l){x=t;y=g+lf;}
border S4(t=g+lf,L){x=l;y=t;}
border S5(t=0,l){x=l-t;y=L;}
border S61(t=0,g){x=0;y=L-t;}
border S62(t=0,ep-0.03){x=t;y=L-g;}//on choisit une epaisseur de fenetre differente
border S63(t=0,lf){x=ep-0.03;y=L-g-t;label=F;}
border S64(t=ep-0.03,0){x=t;y=L-g-lf;}
border S65(t=L-g-lf,0){x=0;y=t;}
//definition du radiateur
border c1(t=e,lr+e){x=t;y=f;label=R;}
border c2(t=f,Lr+f){x=lr+e;y=t;label=R;}
border c3(t=0,lr){x=lr+e-t;y=Lr+f;label=R;}
border c4(t=0,Lr){x=e;y=Lr+f-t;label=R;}
//pour voir le domaine
//plot(S1(Nbnoeuds)+S2(Nbnoeuds)+S31(Nbnoeuds/2)+S3(Nbnoeuds)+S32(Nbnoeuds/2)
+S4(Nbnoeuds)+S5(Nbnoeuds)+S6(Nbnoeuds)+c1(-Nbnoeuds/4)+c2(-Nbnoeuds/2)
+c3(-Nbnoeuds/4)+c4(-Nbnoeuds/2));
//maillage du domaine
mesh Th=buildmesh(S1(Nbnoeuds)+S2(Nbnoeuds)+S31(Nbnoeuds/10)+S3(Nbnoeuds)
+S32(Nbnoeuds)+S4(Nbnoeuds)+S5(Nbnoeuds)+S61(Nbnoeuds)+S62(Nbnoeuds)
+S63(Nbnoeuds)+S64(Nbnoeuds)+S65(Nbnoeuds)+c1(-Nbnoeuds/2)+c2(-Nbnoeuds/2)
+c3(-Nbnoeuds/2)+c4(-Nbnoeuds/2));
//plot(Th,wait=1);
//resolution
fespace Vh(Th,P1);
Vh uh,vh;

solve a(uh,vh, solver=LU)=int2d(Th)(k*(dx(uh)*dx(vh)+dy(uh)*dy(vh)))
+int1d(Th,S61,S62,S64,S65,S1,S2,S4,S5,S31,S32)(0.31*vh)+on(R, uh=50)+on(F, uh = -2);
plot(uh,wait=1,fill=1);
```

Résultat numérique :



Dans le modèle des murs non isolés le résultat est similaire à l'image trouvé pour une seule fenêtre.